

## **ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.**

### **СТАТИКА И КИНЕМАТИКА**

Методические указания и задания для  
расчетно-графических работ

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Введение.....	4
1. Статика. Основные положения.....	4
1.1 Произвольная плоская система сил.....	12
Задача С1.....	13
Задача С2.....	18
1.2 Система сходящихся сил.....	24
Задача С3.....	24
1.3 Произвольная пространственная система сил.....	29
Задача С4.....	33
1.4 Определение опорных реакций составной балки с элементами оптимизации.....	38
Задача С5.....	38
2. Кинематика.....	52
2.1 Кинематика точки.....	52
Задача К1.....	55
2.2 Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела.....	60
Задача К2.....	64
2.3 Составное (сложное) движение точки.....	73
Задача К3.....	75
Библиографический список.....	83
Образец оформления титульного листа РГР.....	84

## ВВЕДЕНИЕ

Для усвоения курса «Теоретическая механика. Статика и кинематика» необходимо изучить теорию, получить навыки в решении задач и выполнить расчетно-графические работы.

Настоящее учебное пособие включает два раздела: статику и кинематику, по которым приводятся программа изучения и задания для расчетно-графических работ (РГР).

РГР выполняются на листах писчей бумаги формата А4, которые затем брошюруются. Решение каждой задачи должно сопровождаться чертежом, который выполняется согласно условиям конкретного варианта задания. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным и выполнен с учетом применяемого масштаба. На рисунках должны быть показаны все заданные величины (размеры, векторы сил, скоростей, ускорений и т. п.) и координатные оси. Кроме того необходимо иметь в виду, что все линии на рисунках и в условиях, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными.

Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице оставлять поля для замечаний преподавателя.

## 1. СТАТИКА. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором рассматриваются операции с силами и равновесие твердых тел. Под состоянием равновесия твердого тела понимают не только состояние покоя, но и движение по инерции. В основе теоретической механики лежат экспериментально установленные аксиомы (законы), справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека.

При действии сил на свободные тела их равновесие может быть нарушено. Тела или системы тел, равновесие которых изучается, несвободны, так как их перемещению в пространстве препятствуют другие (неподвижные) тела, скрепленные или соприкасающиеся с первыми. Тела, которые ограничивают (связывают) перемещение данного тела, называются связями.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется силой реакции связи или просто реакцией связи. Значения реакций связей определяются в процессе решения соответствующей задачи механики. Направлена же реакция связи в сторону, противоположную той,

куда связь не дает перемещаться телу. Ниже представлены наиболее часто встречающиеся типы связей и направления их реакций.

**Гладкая плоскость (поверхность или опора)** (рис. 1). Реакция  $\bar{N}$  гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке.

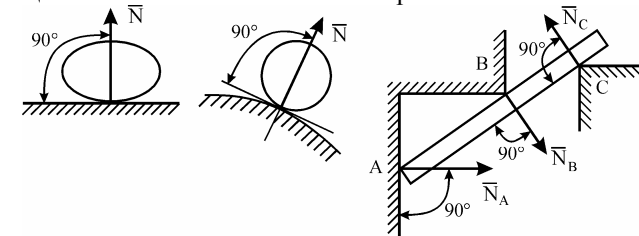


Рисунок 1 Реакции гладкой поверхности или опоры

**Нить (канат, цепь, ремень, трос).** Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 2), не дает телу  $M$  удаляться от точки подвеса нити по направлению  $AM$ . Поэтому реакция  $\bar{T}$  натянутой нити направлена вдоль нее от тела к точке подвеса.

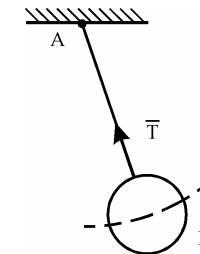


Рисунок 2 Реакции нити

**Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник (шарнирно-неподвижная опора).** Цилиндрическим шарниром (рис. 3) называется совокупность неподвижной обоймы (втулки) 1 и помещенного в нее валика (пальца) 2, жестко соединенного с телом 3. В точке  $C$  соприкосновения втулки с валиком возникает сила опорной реакции, направленная по нормали к идеально гладким поверхностям. Эта нормаль проходит через геометрический центр  $A$  валика. Так как положение точки  $C$  соприкосновения валика со втулкой заранее не известно, то невозможно сразу указать направление силы реакции  $\bar{R}$ , но можно утверждать, что линия действия реакции  $\bar{R}$  всегда пройдет через центр  $A$  шарнира. На расчетных схемах шарнирно-неподвижная опора условно изображается так, как показано на рис. 4. Неизвестную по модулю и направлению реакцию  $\bar{R}_A$  при решении задач представляют в виде

двух ее взаимно-перпендикулярных составляющих  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$ . После определения их значений находят значение реакции  $\bar{R}_A$  и ее направление:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_{Ax}}{R_A}.$$

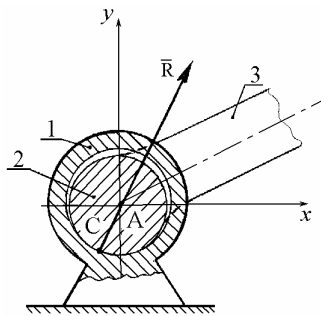


Рисунок 3 Цилиндрический шарнир (шарнирно-неподвижная опора)

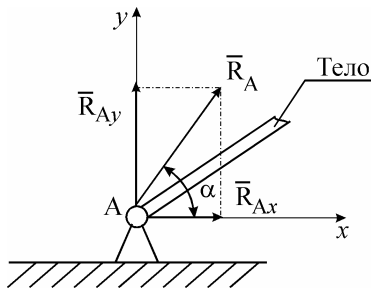


Рисунок 4 Реакции шарнирно-неподвижной опоры

**Шарнирно-подвижная опора (опора на катках).** Реакция  $\bar{R}$  такой связи проходит через центр шарнира (рис. 5) и направлена перпендикулярно к опорной плоскости.

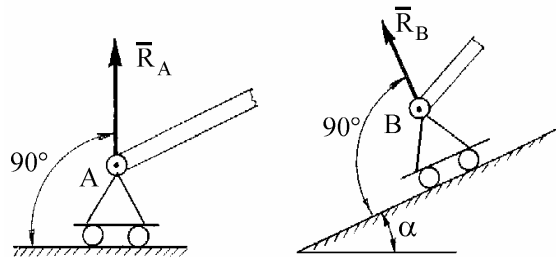


Рисунок 5 Шарнирно-подвижная опора и ее реакция

**Сферический шарнир** (рис. 6). Сферическим шарниром называется устройство, выполненное в виде двух контактирующих сфер, геометрический центр  $A$  которых неподвижен. Тело 3, равновесие которого рассматривается, жестко связано с внутренней подвижной сферой 1. При условии, что сферические поверхности гладкие, реакция  $\bar{R}_A$  направлена по нормали к этим поверхностям и проходит через центр  $A$  сферы. На расчетных схемах реакцию  $\bar{R}_A$  представляют в виде трех ее взаимно-перпендикулярных составляющих  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  и  $\bar{R}_{Az}$ , направленных вдоль координатных осей.

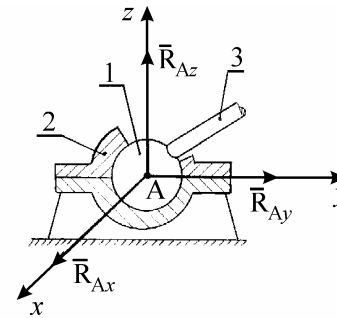


Рисунок 6 Сферический шарнир и его реакции

**Подпятник** (рис. 7). Подпятник представляет собой соединение цилиндрического шарнира 2 и опорной плоскости 3, на которую опирается вал 1. Реакция подшипника, лежащая в плоскости перпендикулярной оси вала, представляется двумя ее взаимно-перпендикулярными составляющими  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$ , а реакция опорной плоскости – реакцией  $\bar{R}_{Az}$ , направленной по нормали к этой плоскости.

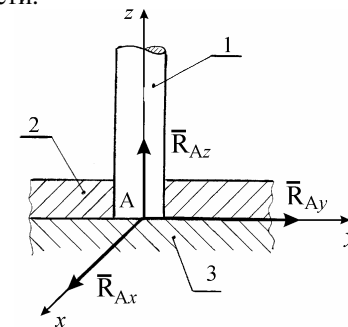


Рисунок 7 Подпятник и его реакции

**Невесомый стержень** (рис. 8). Реакция  $\bar{S}$  прямолинейного невесомого (идеального) стержня направлена вдоль этого стержня. Если связью является криволинейный стержень, то реакция направлена вдоль прямой  $AB$ , соединяющей концевые шарниры  $A$  и  $B$ .

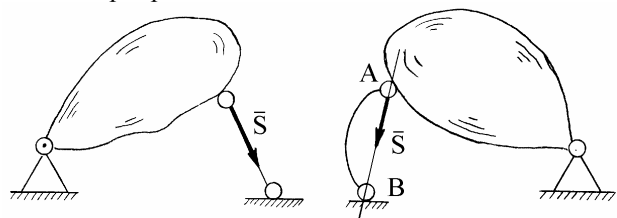


Рисунок 8 Невесомый стержень и его реакция

**Жесткая заделка (неподвижное защемление)** конца балки (рис. 9). Такая связь не допускает не только линейных перемещений балки 1 вдоль координатных осей, но и вращения балки в плоскости  $xAy$ .

Нахождение реакций жесткой заделки сводится к определению трех неизвестных величин: составляющих  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  реакции  $\bar{R}_A$  и так называемого реактивного момента  $M_A$ , препятствующего вращению балки в плоскости  $xAy$  вокруг точки  $A$ .

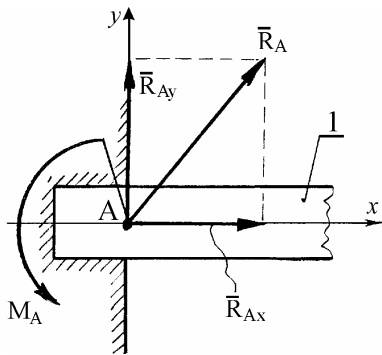


Рисунок 9 Жесткая заделка и ее реакции

Для того чтобы составить уравнения равновесия, надо уметь вычислять проекции сил на координатные оси и выполнять операции сложения и разложения сил.

Проекцией силы на ось называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси. Так, для сил, изображенных на рис. 10:

$$F_x = a_1 b_1 = F \cos \alpha;$$

$$F_y = a_2 b_2 = F \cos(90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha;$$

$$Q_x = c_1 d_1 = Q \cos \beta = Q \cos(180^\circ + \gamma) = -Q \cos \gamma;$$

$$Q_y = c_2 d_2 = Q \cos(90^\circ + \gamma) = -Q \sin \gamma.$$

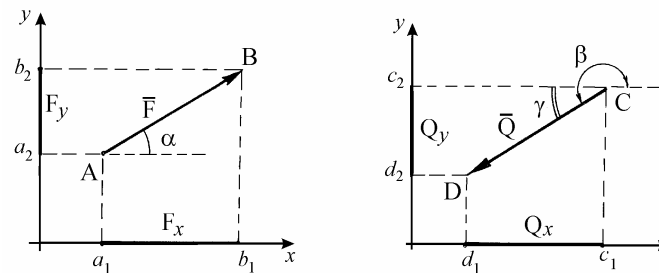


Рисунок 10 Проекция сил на оси

Проекцией силы  $\bar{F}$  на плоскость  $Oxy$  называется вектор  $\bar{F}_{xy} = \overline{OB}_1$ , заключенный между проекциями начала и конца силы  $\bar{F}$  на эту плоскость (рис.11).

По модулю  $F_{xy} = F \cos \theta$ , где  $\theta$  – угол между направлением силы  $\bar{F}$  и ее проекцией  $\bar{F}_{xy}$ .

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее сначала найти ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем полученный вектор спроецировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 11, найдем:

$$F_x = OB_2 = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cdot \cos \varphi,$$

$$F_y = OB_3 = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \cdot \sin \varphi.$$

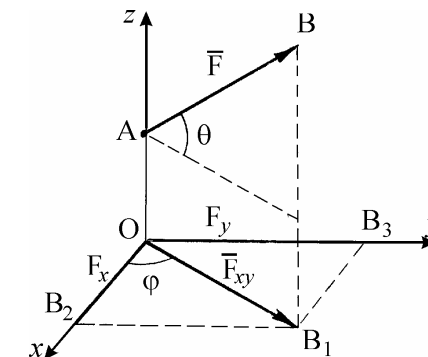


Рисунок 11 Проекция сил на плоскость

**Геометрическое сложение сил**  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  основывается на построении в масштабе векторного многоугольника, замыкающая сторона которого представляет эту сумму и называется главным вектором  $\vec{R}$  (рис. 12).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

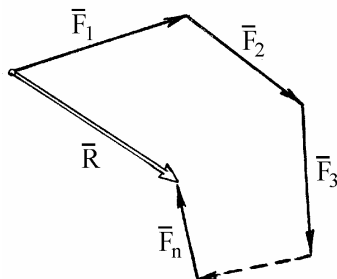


Рисунок 12 Геометрическое сложение сил

**Аналитическое сложение сил** основано на известной теореме векторной алгебры: проекция вектора суммы на ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{kx},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{ky},$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum F_{kz}.$$

Модуль (численное значение) главного вектора

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Действие силы на твердое тело может вызвать вращательный эффект, который для плоской системы сил оценивается моментом силы относительно какой-либо точки  $O$  на плоскости (рис. 13):

$$m_O(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1; \quad m_O(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2,$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – плечи сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно точки  $O$ .

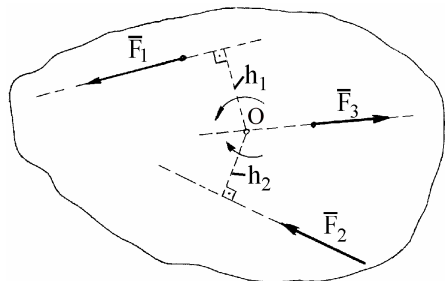


Рисунок 13 Моменты сил относительно точки  $O$  на плоскости

Плечом называется длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия соответствующей силы. Если данная сила стремится вращать тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, то ее моменту относительно этой точки приписывают знак «+». Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, так как при этом плечо равно нулю (например,  $m_O(\vec{F}_3) = 0$ ).

Вычисление момента силы относительно какой-либо точки во многих случаях упрощается, если эту силу разложить на две взаимноперпендикулярные составляющие и применить теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей сходящихся сил относительно любого центра равен сумме моментов составляющих сил относительно того же центра. Например, для равнодействующей силы  $\vec{F}$  и ее составляющих  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  (рис. 14) имеем:

$$m_O(\vec{F}) = m_O(\vec{F}') + m_O(\vec{F}''),$$

$$\text{где } |\vec{F}'| = F' = F \cdot \cos \alpha, \quad |\vec{F}''| = F'' = F \cdot \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$m_O(\vec{F}) = -F \cdot \cos \alpha \cdot (a + c) + F \cdot \sin \alpha \cdot b.$$

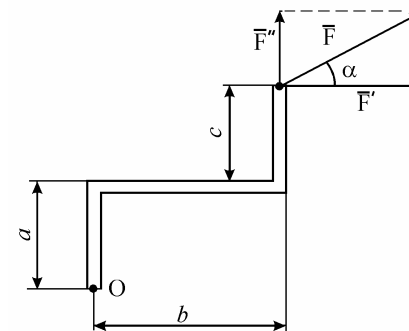


Рисунок 14 Момент равнодействующей силы  $\vec{F}$  и ее составляющих  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  относительно точки  $O$

Вращательный эффект вызывает также пара сил, под которой понимается совокупность двух сил, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и линии действия которых параллельны (рис. 15).

Пара сил, стремящаяся вращать тело против хода часовой стрелки, считается положительной, а по ходу часовой стрелки – отрицательной. Пара сил характеризуется ее моментом, который равен взятому со знаком «плюс» или

«минус» произведению модуля одной из сил данной пары на плечо пары, т. е. на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

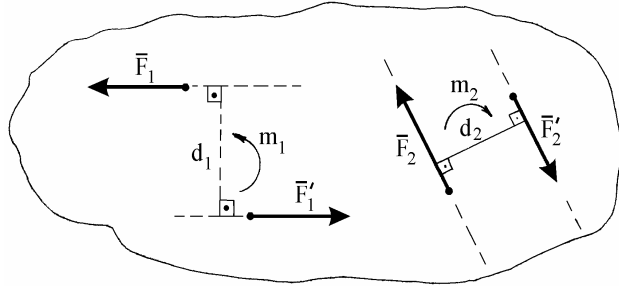


Рисунок 15 Пары сил

Обозначив момент пары буквой  $m$ , а плечо пары буквой  $d$ , будем иметь (рис. 15):

$$m_1 = F_1 \cdot d_1; \quad m_2 = -F_2 \cdot d_2.$$

Систему пар сил, расположенных в одной плоскости, можно заменить одной эквивалентной парой, момент которой  $M$  равен алгебраической сумме моментов пар:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

### 1.1. Произвольная плоская система сил

Под произвольной системой сил понимают совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых не пересекаются в одной точке. Произвольную плоскую систему сил можно значительно упростить, приведя силы к одному центру приведения  $O$ . В результате чего в этом центре будет приложена сила  $\bar{R}$ , называемая главным вектором, и к телу в целом будет приложена пара сил с моментом  $M_O$ , называемым главным моментом относительно этого центра.

Главный вектор  $\bar{R}$  равен геометрической сумме сил, входящих в данную систему, а главный момент  $M_O$  – алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения, включая и алгебраическую сумму моментов пар сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k, \quad M_O = \sum m_O(\bar{F}_k)$$

Численное значение главного вектора определяется по его проекциям на координатные оси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

$$\text{где } R_x = \sum F_{kx} \text{ и } R_y = \sum F_{ky}.$$

Направление главного вектора находят по косинусам направляющих углов:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = \frac{R_y}{R},$$

где  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  – орты осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Условиями равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента относительно любого центра  $O$ :

$$\bar{R} = 0 \text{ и } M_O = 0.$$

Эти условия выполняются, если

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

(1)

Уравнения (1) называются основными уравнениями равновесия. Существуют еще две формы уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum F_{kx} = 0. \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

(3)

В системе уравнений (2) ось  $x$  не должна быть перпендикулярной к прямой, проходящей через центры  $A$  и  $B$ , а центры  $A$ ,  $B$  и  $C$  в системе (3) не должны лежать на одной прямой.

**ЗАДАЧА С1:** Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0–С1.9, табл. С1), закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке  $C$  к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом  $P=25$  кН. На раму действуют пара сил с моментом  $M=100$  кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл. С1 (например, в условии № 1 на раму действует сила  $\vec{F}_2$  под углом  $15^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $D$ , и сила  $\vec{F}_3$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$ , и т. д.).

Определить реакции связей в точках  $A, B$ , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,5$  м.

**Указания.** Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  часто удобно разложить ее на составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда  $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}') + m_o(\vec{F}'')$ .

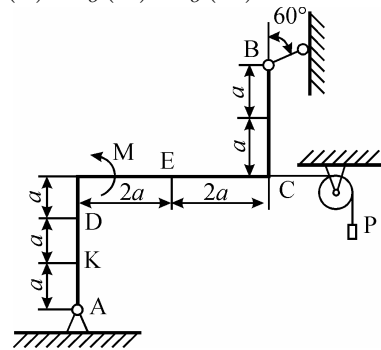


Рисунок С1.0

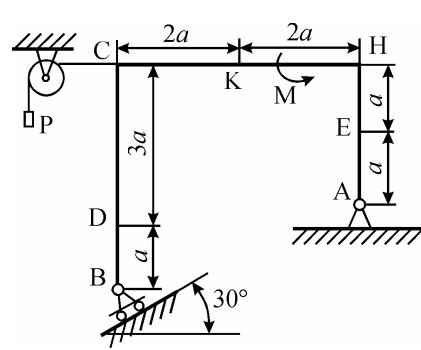


Рисунок С1.1

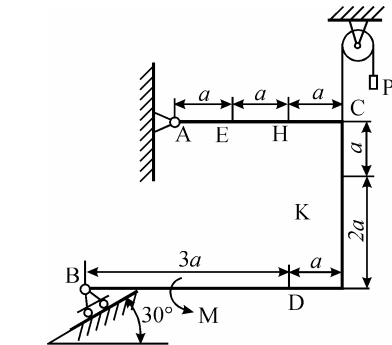
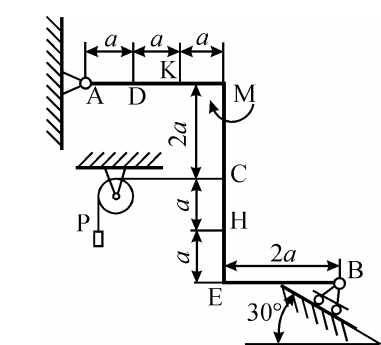


Рисунок С1.2

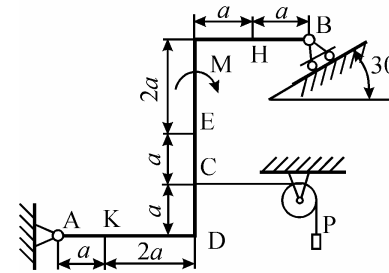


Рисунок С1.4

Рисунок С1.3

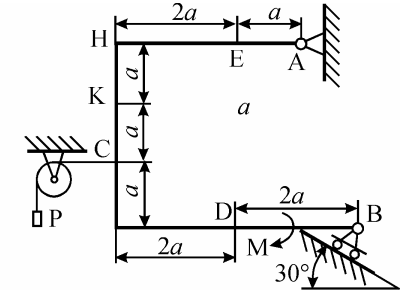


Рисунок С1.5

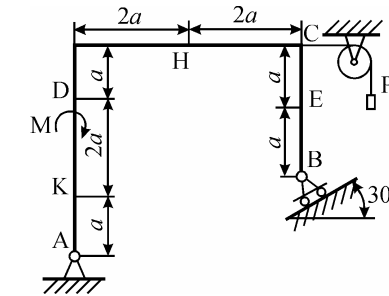


Рисунок С1.6

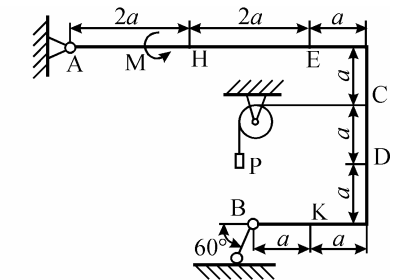


Рисунок С1.7

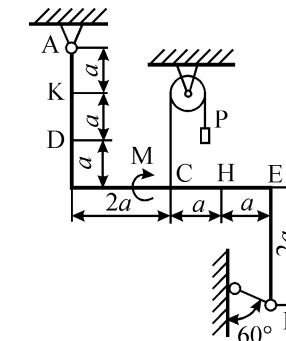


Рисунок С1.8

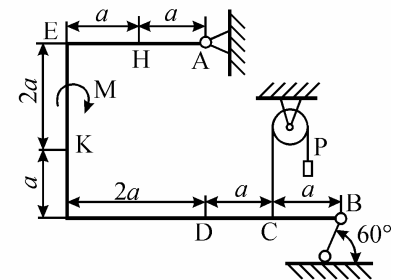


Рисунок С1.9

Таблица С1

Номер условия	Силы								
	$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$		$\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$		
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$					
	$F_1 = 10$ кН	$F_2 = 20$ кН	$F_3 = 30$ кН	$F_4 = 40$ кН					
Точка приложения	$\alpha_1$ , град	Точка приложения	$\alpha_2$ , град	Точка приложения	$\alpha_3$ , град	Точка приложения	$\alpha_4$ , град		
0	H	30	–	–	–	–	K	60	
1	–	–	D	15	E	60	–	–	
2	K	75	–	–	–	–	E	30	
3	–	–	K	60	H	30	–	–	
4	D	30	–	–	–	–	E	60	
5	–	–	H	30	–	–	D	75	
6	E	30	–	–	K	15	–	–	
7	–	–	D	60	–	–	H	15	
8	H	60	–	–	D	30	–	–	
9	–	–	E	75	K	30	–	–	

**ПРИМЕР С1:** Жесткая рама  $ADCB$  (рис. С1) имеет в точке  $A$  неподвижную шарнирную опору, а в точке  $B$  – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано:  $F = 25$  кН,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $P = 18$  кН,  $\gamma = 75^\circ$ ,  $M = 50$  кН·м,  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 0,5$  м. Определить: реакции в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые действующими нагрузками.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси  $x$  и  $y$  и изобразим действующие на раму силы: силу  $\vec{F}$ , пару сил с моментом  $M$ , натяжение троса  $\vec{T}$  (по модулю  $T = P$ ) и реакции связей  $\vec{R}_{Ax}$ ,  $\vec{R}_{Ay}$ ,  $\vec{R}_B$  (реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

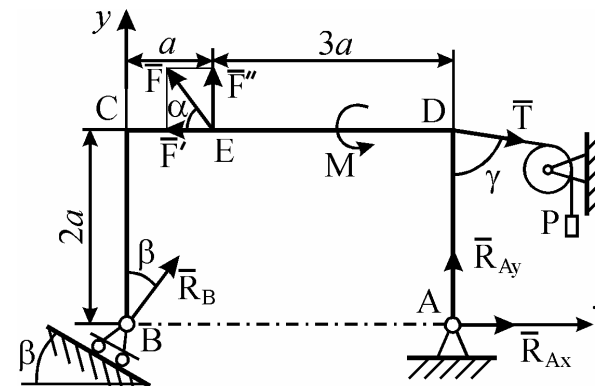


Рисунок С1 Схема к примеру С1

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}'$ ,  $\vec{F}''$  ( $F' = F \cdot \cos \alpha$ ,  $F'' = F \cdot \sin \alpha$ ,) и учтем, что  $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$ . Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_{Ax} + R_B \cdot \sin \beta - F \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \gamma = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_{Ay} + R_B \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha - T \cdot \cos \gamma = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cdot \cos \beta \cdot 4a + F \cdot \cos \alpha \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a - T \cdot \sin \gamma \cdot 2a = 0; \quad (6)$$

Из уравнения (6) находим:

$$R_B = \frac{M + F \cdot \cos \alpha \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a - T \cdot \sin \gamma \cdot 2a}{4a \cdot \cos \beta},$$

$$R_B = \frac{50 + 25 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \cdot 0,5 - 25 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 \cdot 0,5 - 18 \cdot \sin 75^\circ \cdot 2 \cdot 0,5}{4 \cdot 0,5 \cdot \cos 30^\circ} = 7,296 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4):

$$R_{Ax} = F \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \gamma - R_B \cdot \sin \beta,$$

$$R_{Ax} = 25 \cdot \cos 60^\circ - 18 \cdot \sin 75^\circ - 7,296 \cdot \sin 30^\circ = -8,534 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5):

$$R_{Ay} = T \cdot \cos \gamma - R_B \cdot \cos \beta - F \cdot \sin \alpha,$$

$$R_{Ay} = 18 \cdot \cos 75^\circ - 7,296 \cdot \cos 30^\circ - 25 \cdot \sin 60^\circ = -23,31 \text{ кН.}$$

Ответ:  $R_{Ax} = -8,534$  кН,  $R_{Ay} = -23,31$  кН,  $R_B = 7,296$  кН.



Знаки указывают, что реакции  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  направлены противоположно показанным на рисунке.

Для проверки правильности полученных результатов составим и решим проверочное уравнение равновесия в форме моментов всех сил относительно точки  $C$ .

$$\begin{aligned} \sum m_C(\bar{F}_k) &= R_B \cdot \sin \beta \cdot 2a + F \cdot \sin \alpha \cdot a + M - T \cdot \cos \gamma \cdot 4a + R_{Ax} \cdot 2a + \\ &+ R_{Ay} \cdot 4a = 7,296 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 + 50 - \\ &- 18 \cdot \cos 75^\circ \cdot 4 \cdot 0,5 + (-23,31) \cdot 4 \cdot 0,5 + (-8,534) \cdot 2 \cdot 0,5 = 0,001 \approx 0. \end{aligned}$$

**ЗАДАЧА C2:** Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке  $C$  или соединены друг с другом шарнирно (рис. C2.0–C2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. C2.6–C2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке  $A$  или шарнир, или жесткая заделка; в точке  $B$  или гладкая плоскость (рис. C2.0 и C2.1), или невесомый стержень  $BB'$  (рис. C2.2 и C2.3), или шарнир (рис. C2.4–C2.9); в точке  $D$  или невесомый стержень  $DD'$  (рис. C2.0, C2.3, C2.8), или шарнирная опора на катках (рис. C2.7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом  $M = 60$  кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 20$  кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. C2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условии № 1 на конструкцию действуют сила  $\bar{F}_2$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $L$ , сила  $\bar{F}_4$  под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$ , и нагрузка, распределенная на участке  $CK$ ).

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (для рис. C2.0, C2.3, C2.7, C2.8 еще и в точке  $D$ ), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,2$  м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. C2а.

**Указания.** Задача C2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленив систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

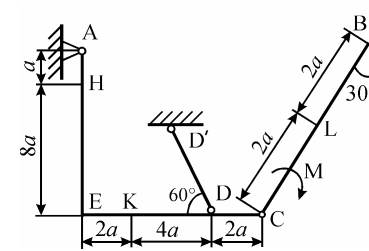


Рисунок C2.0

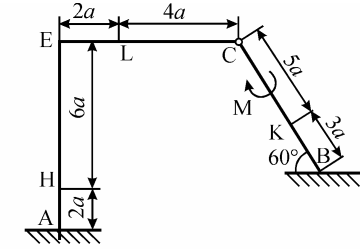


Рисунок C2.1

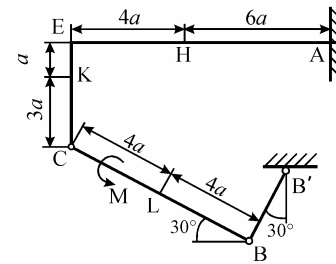


Рисунок C2.2

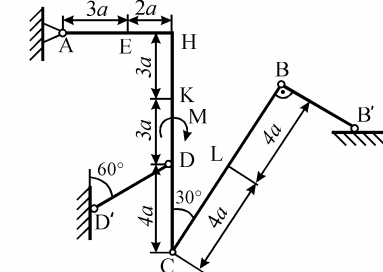


Рисунок C2.3

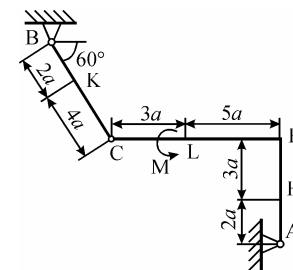


Рисунок C2.4

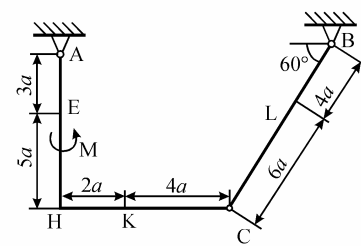


Рисунок C2.5

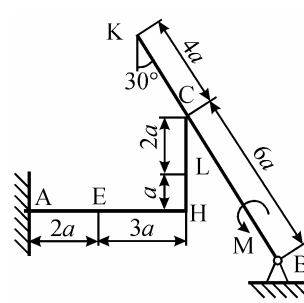


Рисунок C2.6

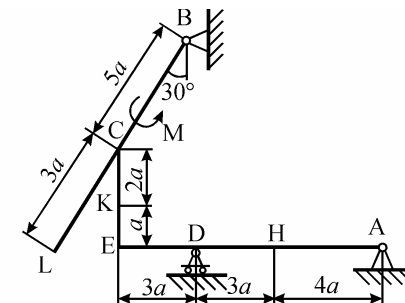


Рисунок C2.7

Таблица С2а

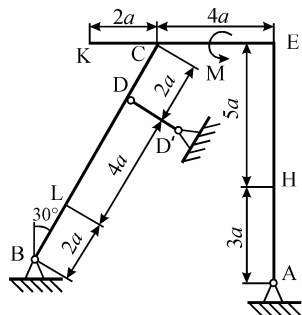


Рисунок С2.8

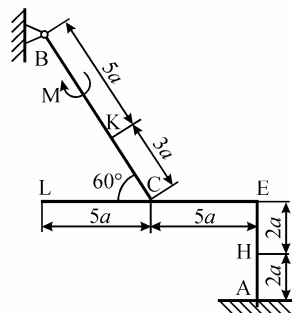


Рисунок С2.9

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. С2.0, С2.3, С2.5, С2.7, С2.8	рис. С2.1, С2.2, С2.4, С2.6, С2.9

Таблица С2

Номер условия	Сила								Нагруженный участок
	$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$		$\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$		
	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$F_1 = 10 \text{ кН}$	$F_2 = 20 \text{ кН}$	$F_3 = 30 \text{ кН}$	$F_4 = 40 \text{ кН}$	
	Точка приложения	Точка приложения	Точка приложения	Точка приложения	$\alpha_1, \text{ град}$	$\alpha_2, \text{ град}$	$\alpha_3, \text{ град}$	$\alpha_4, \text{ град}$	
0	K	60	-	-	H	30	-	-	CL
1	-	-	L	60	-	-	E	30	CK
2	L	15	-	-	K	60	-	-	AE
3	-	-	K	30	-	-	H	60	CL
4	L	30	-	-	E	60	-	-	CK
5	-	-	L	75	-	-	K	30	AE
6	E	60	-	-	K	75	-	-	CL
7	-	-	H	60	L	30	-	-	CK
8	-	-	K	30	-	-	E	15	CL
9	H	30	-	-	-	-	L	60	CK

**ПРИМЕР С2:** Конструкция состоит из жесткого угольника  $AEC$  и стержня  $CK$ , которые в точке  $C$  (рис. С2а) соединены друг с другом с помощью цилиндрического шарнира.

Внешними связями являются: в точке  $A$  – шарнирно-неподвижная опора, в точке  $B$  – невесомый стержень  $BB'$ , в точке  $D$  – шарнирно-подвижная опора. К конструкции приложена сила  $\vec{F}$ , пара сил с моментом  $M$  и равномерно распределенная на участке  $KB$  нагрузка интенсивности  $q$ .

Дано:  $F = 10 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $q = 20 \text{ кН/м}$ ,  $M = 50 \text{ кН·м}$ ,  $a = 0,5 \text{ м}$ .

Определить реакции связей в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , вызванные заданными нагрузками.

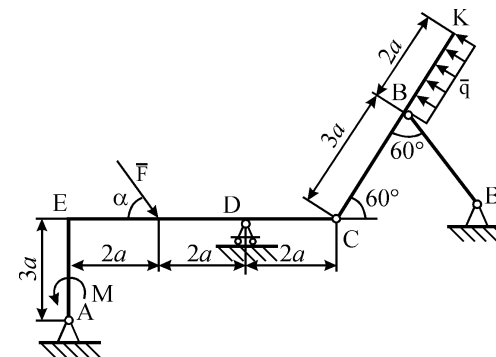


Рисунок С2а Схема к примеру С2

**Решение.** 1. Для определения реакций расчленим систему по шарниру  $C$  и рассмотрим сначала равновесие стержня  $KC$  (рис. С2б). Проведем координатные оси  $x$  и  $y$  и изобразим действующие на стержень силы: равномерно рас-

пределенную нагрузку заменим силой  $\bar{Q}$ , приложенной в середине участка  $BK$  (численно  $Q = q \cdot 2a = 20$  кН), реакцию  $\bar{R}_B$  стержня  $BB'$  направим вдоль этого стержня, а действие отброшенного угольника  $AEC$  представим составляющими  $\bar{R}_{Cx}$  и  $\bar{R}_{Cy}$  реакции шарнира  $C$ .

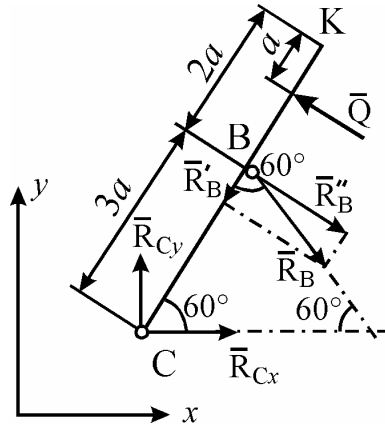


Рисунок С2б Равновесие стержня  $KC$  к примеру С2

Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = R_{Cx} + R_B \cdot \cos 60^\circ - Q \cdot \sin 60^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Cy} - R_B \cdot \sin 60^\circ + Q \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (8)$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = -R_B \cdot \sin 60^\circ \cdot 3a + Q \cdot 4a = 0. \quad (9)$$

При вычислении момента силы  $\bar{R}_B$  разлагаем ее на составляющие  $\bar{R}'_B$  и  $\bar{R}''_B$  и применяем теорему Вариньона ( $R'_B = R_B \cdot \cos 60^\circ$ ,  $R''_B = R_B \cdot \sin 60^\circ$ ).

Из уравнения (9) находим:

$$R_B = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot \sin 60^\circ}.$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot \sin 60^\circ} = 30,8 \text{ кН.}$$

Из уравнения (7):

$$R_{Cx} = Q \cdot \sin 60^\circ - R_B \cdot \cos 60^\circ.$$

$$R_{Cx} = 20 \cdot \sin 60^\circ - 30,8 \cdot \cos 60^\circ = 1,92 \text{ кН.}$$

Из уравнения (8):

$$R_{Cy} = R_B \cdot \sin 60^\circ - Q \cdot \cos 60^\circ.$$

$$R_{Cy} = 30,8 \cdot \sin 60^\circ - 20 \cdot \cos 60^\circ = 16,67 \text{ кН.}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С2в).

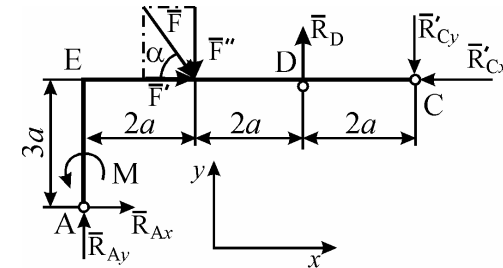


Рисунок С2в Равновесие угольника  $AEC$  к примеру С2

На него действуют: сила  $\bar{F}$ , пара сил с моментом  $M$ , реакция  $\bar{R}_D$  шарнирно-подвижной опоры  $D$ , составляющие  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  реакции шарнирно неподвижной опоры  $A$  и составляющие  $\bar{R}'_{Cx}$  и  $\bar{R}'_{Cy}$  реакции  $\bar{R}_C$ , направленные противоположно соответствующим реакциям  $\bar{R}_{Cx}$  и  $\bar{R}_{Cy}$ , которые были приложены к стержню  $KC$ . При решении учитываем, что численно  $R'_{Cx} = R_{Cx}$  и  $R'_{Cy} = R_{Cy}$ , в силу равенства действия и противодействия.

Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + F \cdot \cos \alpha - R'_{Cx} = 0; \quad (10)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - F \cdot \sin \alpha + R_D - R'_{Cy} = 0; \quad (11)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = M - F \cdot \cos \alpha \cdot 3a - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + R_D \cdot 4a + R'_{Cx} \cdot 3a - R'_{Cy} \cdot 6a = 0. \quad (12)$$

В уравнении (12) при вычислении момента силы  $\bar{F}$ , последняя разложена на составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$  ( $F' = F \cdot \cos \alpha$ , и  $F'' = F \cdot \sin \alpha$ ) и применена теорема Вариньона.

Из уравнения (12) находим:

$$R_D = \frac{-M + F \cdot \cos \alpha \cdot 3a + F \cdot \sin \alpha \cdot 2a - R'_{Cx} \cdot 3a + R'_{Cy} \cdot 6a}{4a}.$$

$$R_D = \frac{-50/0,5 + 10 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 + 10 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - 1,92 \cdot 3 + 16,67 \cdot 6}{4} = 6,645 \text{ кН.}$$

Из уравнения (10):

$$R_{Ax} = R'_{Cx} - F \cdot \cos \alpha.$$

$$R_{Ax} = 1,92 - 10 \cdot \cos 60^\circ = -3,08 \text{ кН.}$$

Из уравнения (11):

$$R_{Ay} = F \cdot \sin \alpha - R_D + R'_{Cy}.$$

$$R_{Ay} = 10 \cdot \sin 60^\circ - 6,645 + 16,67 = 18,685 \text{ кН.}$$

Ответ:  $R_{Ax} = -3,08 \text{ кН}$ ,  $R_{Ay} = 18,685 \text{ кН}$ ,  $R_D = 6,645 \text{ кН}$ ,  $R_B = 30,8 \text{ кН}$ ,  $R_{Cx} = 1,92 \text{ кН}$ ,  $R_{Cy} = 16,67 \text{ кН}$ .

Знаки указывают, что сила реакции  $\bar{R}_{Ax}$  направлена противоположно показанной на рис. С2в.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называется силой реакции связи?
3. Перечислите основные виды связей и укажите их реакции.
4. Сформулируйте принцип освобождаемости от связей.
5. Что называется равнодействующей системы сил?
6. Как сложить силы:
  - а) геометрически,
  - б) аналитически?
7. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
8. Что называется моментом силы относительно центра на плоскости?
9. Чему равен момент пары сил?
10. Чему равен главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил?
11. Сформулируйте три формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Какие задачи статики называют статически определимыми и какие статически неопределимыми?
13. В чем сущность решения задач на равновесие сочлененной системы тел?

### 1.2. Система сходящихся сил

**ЗАДАЧА С3:** Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам  $A, B, C, D$  (рис. С3.0–С3.9, табл. С3). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах  $H, K, L$  или  $M$  прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены по данным таблицы. В узле, который в каждом столбце таблицы указан первым, приложена сила  $P = 200 \text{ Н}$ ; во втором узле приложена сила  $Q = 100 \text{ Н}$ . Сила  $\bar{P}$  образует с положительными направлениями координатных осей  $x, y, z$  уг-

лы, равные соответственно  $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$ , а сила  $\bar{Q}$  – углы  $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$ ; направления осей  $x, y, z$  для всех рисунков показаны на рис. С3.0.

Грани параллелепипеда, параллельные плоскости  $xy$ , – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью  $xy$  угол  $\varphi = 60^\circ$ , а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол  $\theta = 51^\circ$ . Определить усилия в стержнях.

На рис. С3.10 в качестве примера показано, как должен выглядеть чертеж С3.1, если по условиям задачи узлы находятся в точках  $L$  и  $M$ , а стержнями являются  $LM, LA, LB; MA, MC, MD$ . Там же показаны углы  $\varphi$  и  $\theta$ .

**Указания.** Задача С3 – на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов, где сходятся стержни и приложены заданные силы, и учесть закон о равенстве действия и противодействия; начинать с узла, где сходятся три стержня.

Изображать чертеж можно без соблюдения масштаба так, чтобы лучше были видны все шесть стержней. Стержни следует пронумеровать в том порядке, в каком они указаны в таблице; реакции стержней обозначать буквой с индексом, соответствующим номеру стержня (например,  $\bar{N}_1, \bar{N}_2$  и т. д.).

Таблица С3

Номер условия	0	1	2	3	4
Узлы	$H, M$	$L, M$	$K, M$	$L, H$	$K, H$
Стержни	$HM, HA, HB, MA, MC, MD$	$LM, LA, LD, MA, MB, MC$	$KM, KA, KB, MA, MC, MD$	$LH, LC, LD, MA, HB, HC$	$KH, KB, KC, HA, HC, HD$
Номер условия	5	6	7	8	9
Узлы	$M, H$	$L, H$	$K, H$	$L, M$	$K, M$
Стержни	$MH, MB, MC, HA, HC, HD$	$LH, LB, LD, HA, HB, HC$	$KH, KC, KD, HA, HB, HC$	$LM, LB, LD, MA, MB, HC$	$KM, KA, KD, MA, MB, MC$

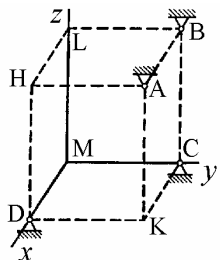


Рисунок C3.0

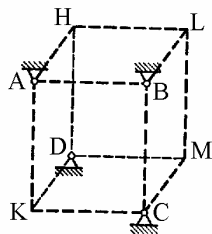


Рисунок C3.1

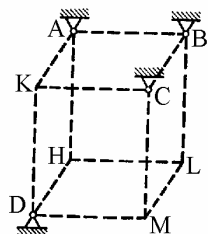


Рисунок C3.2

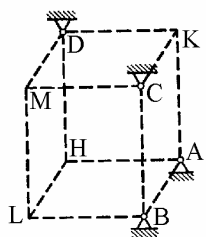


Рисунок C3.3

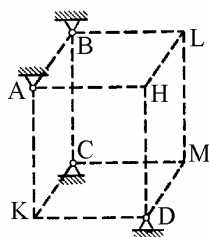


Рисунок C3.4

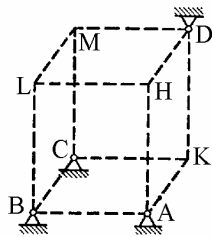


Рисунок C3.5

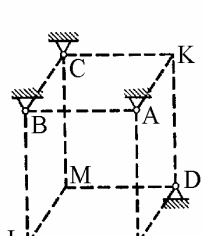


Рисунок C3.6

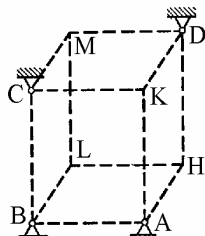


Рисунок C3.7

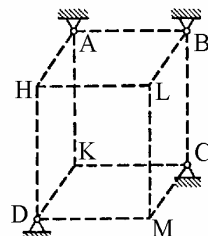


Рисунок C3.8

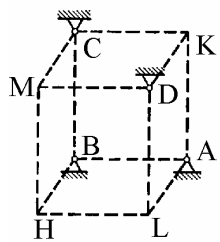


Рисунок C3.9

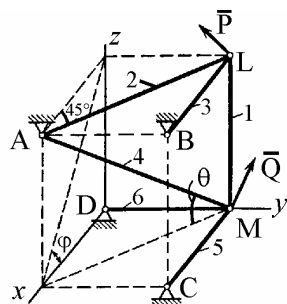


Рисунок C3.10

**ПРИМЕР C3:** Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2, ..., 6, соединенных друг с другом (в узлах K и M) и с неподвижными опорами A, B, C, D шарнирами (рис. C3). В узлах K и M приложены силы  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , образующие с координатными осями углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  соответственно (на рисунке показаны только углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ).

Дано:  $P = 100 \text{ Н}$ ,  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\beta_1 = 60^\circ$ ,  $\gamma_1 = 45^\circ$ ,  $Q = 50 \text{ Н}$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ ,  $\gamma_2 = 60^\circ$ ,  $\psi = 30^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\delta = 74^\circ$ . Определить усилия в стержнях 1–6.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие узла K, в котором сходятся стержни 1, 2, 3. На узел действуют сила  $\vec{P}$  и реакции  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$  стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми. Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx} = 0; P \cdot \cos \alpha_1 + N_2 \cdot \sin \psi + N_3 \cdot \sin \varphi = 0; \quad (13)$$

$$\sum F_{ky} = 0; P \cdot \cos \beta_1 - N_1 - N_2 \cdot \cos \psi = 0; \quad (14)$$

$$\sum F_{kz} = 0; P \cdot \cos \gamma_1 - N_3 \cdot \cos \varphi = 0.$$

(15)

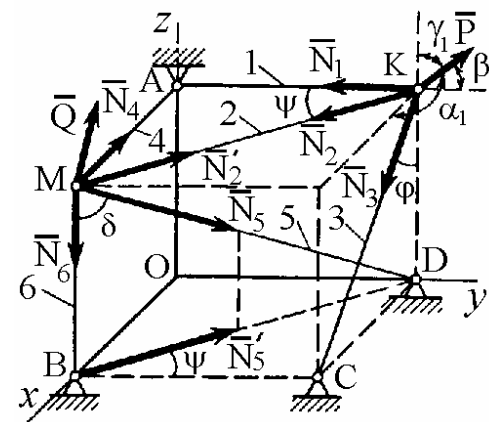


Рисунок C3 Схема к примеру C3

Из уравнения (15) находим:

$$N_3 = \frac{P \cdot \cos \gamma_1}{\cos \varphi}. \quad N_3 = \frac{100 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = 141 \text{ Н}.$$

Из уравнения (13):

$$N_2 = -\frac{P \cdot \cos \alpha_1 + N_3 \cdot \sin \varphi}{\sin \psi}$$

$$N_2 = -\frac{100 \cdot \cos 60^\circ + 141 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = -345 \text{ Н}.$$

Из уравнения (14):

$$N_1 = P \cdot \cos \beta_1 - N_2 \cdot \cos \psi.$$

$$N_1 = 100 \cdot \cos 60^\circ - (-345) \cdot \cos 30^\circ = 348,78 \text{ Н.}$$

2. Рассмотрим равновесие узла  $M$ . На узел действуют сила  $\bar{Q}$  и реакции  $\bar{N}'_2, \bar{N}_4, \bar{N}_5, \bar{N}_6$  стержней. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция  $\bar{N}'_2$  направлена противоположно  $\bar{N}_2$ , численно же  $N'_2 = N_2$ . Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad Q \cdot \cos \alpha_2 - N'_2 \cdot \sin \psi - N_4 - N_5 \cdot \sin \delta \cdot \sin \psi = 0; \quad (16)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Q \cdot \cos \beta_2 + N'_2 \cdot \cos \psi + N_5 \cdot \sin \delta \cdot \cos \psi = 0; \quad (17)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad Q \cdot \cos \gamma_2 - N_5 \cdot \cos \delta - N_6 = 0. \quad (18)$$

При определении проекций силы  $\bar{N}'_5$  на оси  $x$  и  $y$  в уравнениях (16) и (17) удобнее сначала найти проекцию  $\bar{N}'_5$  этой силы на плоскость  $xOy$  (по числовой величине  $N'_5 = N_5 \cdot \sin \delta$ ), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси  $x, y$ .

Решая уравнение (17), находим:

$$N_5 = -\frac{Q \cdot \cos \beta_2 + N_2 \cdot \cos \psi}{\sin \delta \cdot \cos \psi}.$$

$$N_5 = -\frac{50 \cdot \cos 60^\circ + (-345) \cdot \cos 30^\circ}{\sin 74^\circ \cdot \cos 30^\circ} = 328,86 \text{ Н.}$$

Из уравнения (16):

$$N_4 = Q \cdot \cos \alpha_2 - N'_2 \cdot \sin \psi - N_5 \cdot \sin \delta \cdot \sin \psi.$$

$$N_4 = 50 \cdot \cos 45^\circ - (-345) \cdot \sin 30^\circ - 328,86 \cdot \sin 74^\circ \cdot \sin 30^\circ = 49,79 \text{ Н.}$$

Из уравнения (18):

$$N_6 = N_5 \cdot \cos \delta - Q \cdot \cos \gamma_2.$$

$$N_6 = 328,26 \cdot \cos 74^\circ - 50 \cdot \cos 60^\circ = 65,48 \text{ Н.}$$

Ответ:  $N_1 = 348,78 \text{ Н}, N_2 = -345 \text{ Н}, N_3 = 141 \text{ Н}, N_4 = 49,79 \text{ Н}, N_5 = 328,86 \text{ Н}, N_6 = 65,48 \text{ Н}$ . Знаки показывают, что стержень 2 сжат, остальные растянуты.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как определить проекцию силы на ось?
2. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил:
  - а) геометрическим способом,
  - б) аналитическим способом?
3. Сформулируйте условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости и в пространстве.

4. Если связью является невесомый стержень, то как направлена сила его реакции в случае, когда он:

- а) прямолинейный,
- б) криволинейный?

### 1.3. Произвольная пространственная система сил

Моментом силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  называется приложенный в этом центре вектор  $\bar{m}_O(\bar{F})$ , модуль которого равен произведению модуля силы  $\bar{F}$  на ее плечо  $h$  и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и линию действия силы в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки  $O$ , представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 16):

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = F \cdot h.$$

Момент силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы.

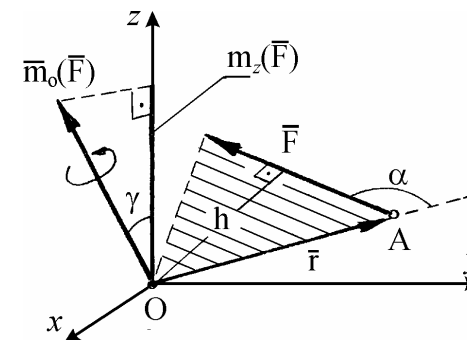


Рисунок 16 Момент пространственной силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$  и оси  $z$ , проходящей через центр  $O$

В самом деле, модуль векторного произведения равен

$$|\bar{m}_O(\bar{F})| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$

Заметим также, что вектор  $\bar{m}_O(\bar{F})$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\bar{r}$  и  $\bar{F}$ , в ту сторону, откуда кратчайший поворот вектора  $\bar{r}$  к направлению вектора  $\bar{F}$  представляется происходящим против хода часовой стрелки.

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно какой-либо оси  $z$ , проходящей через центр  $O$  (рис. 16), называется скалярная величина, равная проекции вектора  $\vec{m}_O(\vec{F})$  на эту ось:

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cdot \cos \gamma.$$

Механический смысл величины  $m_z(\vec{F})$  состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси  $z$ . В самом деле, если разложить силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_{xy}$  и  $\vec{F}_z$ , где  $\vec{F}_z \parallel Oz$  (рис. 17), то поворот вокруг оси  $z$  будет совершать только составляющая  $\vec{F}_{xy}$  и вращательный эффект всей силы  $\vec{F}$  будет определяться величиной  $m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$ . Составляющая же  $\vec{F}_z$  повернуть тело вокруг оси  $z$  не может (она лишь может сдвинуть тело вдоль оси  $z$ ).

Момент силы относительно оси  $z$  будет иметь знак «плюс», когда с положительного конца этой оси поворот, который стремится совершить сила  $\vec{F}_{xy}$  вокруг этой оси, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак «минус» – когда по ходу часовой стрелки.

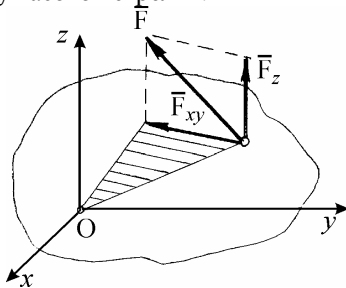


Рисунок 17 Момент составляющих  $\vec{F}_{xy}$  и  $\vec{F}_z$  силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ , проходящей через центр  $O$

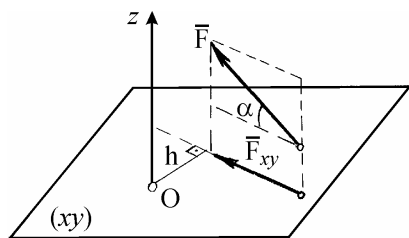


Рисунок 18 Проектирование силы  $\vec{F}$  на плоскость  $(xy)$  для определения момента силы относительно оси  $z$

Для того чтобы определить момент какой-либо силы  $\vec{F}$  относительно какой-либо оси  $z$  (рис. 18), нужно провести любую плоскость  $(xy)$ , перпендикулярную к данной оси и, спроектировав силу на эту плоскость, найти алгебраическую величину момента полученной проекции  $\vec{F}_{xy}$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с плоскостью  $xy$ .

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = F \cdot \cos \alpha \cdot h.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, когда сила параллельна оси либо когда линия действия силы пересекает ось.

При рассмотрении равновесия произвольной пространственной системы сил приходится определять моменты пар сил относительно осей, для чего моменты пары сил представляют в виде вектора.

Момент пары, как вектор, направлен по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела парой сил представляется происходящим против направления вращения часовой стрелки.

Изображенные на рис. 19, а и 19, б векторы  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  представляют собой соответственно моменты пар  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  и  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ .

Так как пару сил можно переносить в ее плоскости действия и в любую другую плоскость, ей параллельную, то ее момент  $\vec{M}$  не имеет определенной точки приложения и является *свободным вектором*. Такие векторы можно переносить параллельно самим себе в любую точку тела.

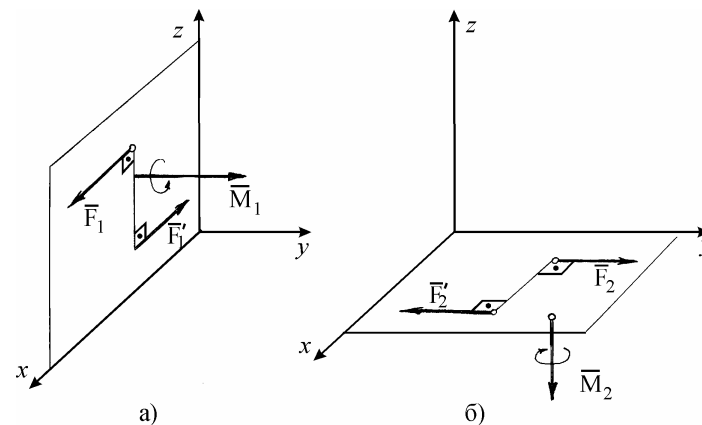


Рисунок 19 Моменты  $\vec{M}_1$  пары сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  (а) и  $\vec{M}_2$  пары сил  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$  (б)

При определении момента пары сил относительно какой-либо оси достаточно найти проекцию вектора-момента этой пары на данную ось. Так, на примере, изображенном на рис. 19, а и 19, б, будем иметь:

$$M_{1x} = 0; M_{1y} = M_1; M_{1z} = 0;$$

$$M_{2x} = 0; M_{2y} = 0; M_{2z} = -M_2.$$

Если требуется сложить пары сил, то достаточно сложить их векторы-моменты как свободные векторы, т. е. перенести эти векторы параллельно самим себе в общую точку и применить правило сложения векторов.

Так, на примере двух пар сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$  и  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ , расположенных в плоскостях  $xBy$  и  $xBz$  соответственно (рис. 20), будем иметь:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Модуль  $M$  результирующего вектора  $\vec{M}$  находим как величину диагонали прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ :

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

или в проекциях на координатные оси:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} = 0;$$

$$M_y = M_{1y} + M_{2y} = -M_2;$$

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} = M_1,$$

следовательно,

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-M_2)^2 + M_1^2}.$$

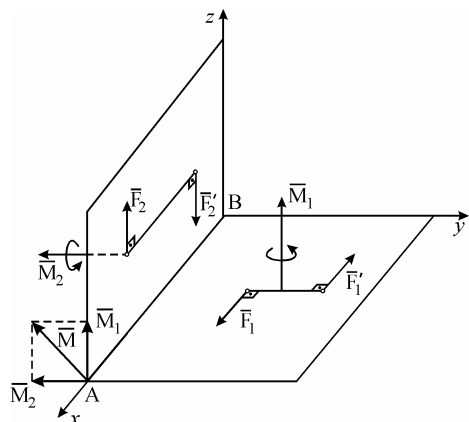


Рисунок 20 Моменты  $\vec{M}_1$  пары сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$  и  $\vec{M}_2$  пары сил  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ , расположенных в разных плоскостях

Любую пространственную систему сил можно привести к некоторому центру  $O$ , в результате чего будет получен главный вектор  $\vec{R}$ , приложенный в этом центре и главный момент  $\vec{M}_O$  относительно этого центра  $O$ . Как известно, главный вектор равен геометрической сумме всех сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k,$$

и не зависит от выбора центра приведения, а главный момент  $\vec{M}_O$  равен геометрической сумме векторов-моментов всех сил относительно этого центра (включая и векторы-моменты всех пар сил) и зависит от выбора центра приведения:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Условиями равновесия произвольной пространственной системы сил являются равенство нулю главного вектора этой системы сил и главного момента относительно любого центра, что выражается шестью уравнениями равновесия в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0;$$

$$R_y = \sum F_{ky} = 0;$$

$$R_z = \sum F_{kz} = 0;$$

$$M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_k) = 0;$$

$$M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = 0;$$

$$M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

**ЗАДАЧА С4:** Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем 1 (рис. С4.0–С4.7) или же двумя подшипниками в точках  $A$  и  $B$  и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С4.8, С4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты  $P_1 = 5$  кН, вес меньшей плиты  $P_2 = 3$  кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xy$  – горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом  $M = 4$  кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4; при этом силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $xy$ , сила  $\vec{F}_2$  – в плоскости, параллельной  $xz$ , и сила  $\vec{F}_3$  – в плоскости, параллельной  $yz$ . Точки приложения сил ( $D, E, H, K$ ) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a = 0,6$  м.

**Указания.** Задача С4 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сфериче-



ского шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы  $\vec{F}$  часто удобно разложить ее на две составляющие ( $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ ), параллельные координатным осям (или на три); тогда по теореме Вариньона  $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$  и т. д.

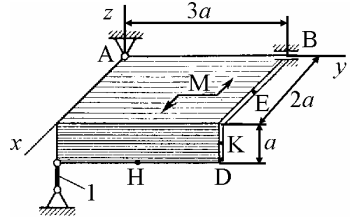


Рисунок С4.0

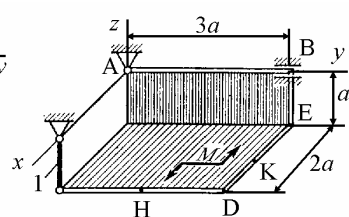


Рисунок С4.1

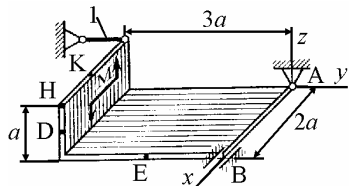


Рисунок С4.2

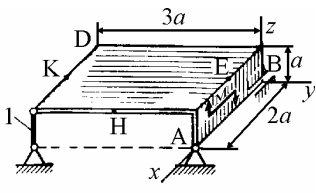


Рисунок С4.3

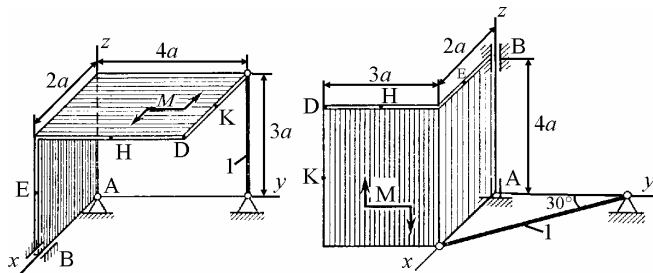


Рисунок С4.4

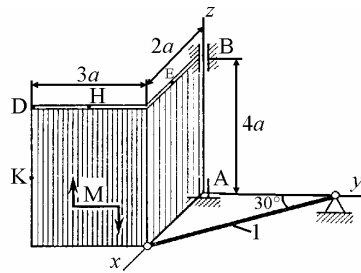


Рисунок С4.5

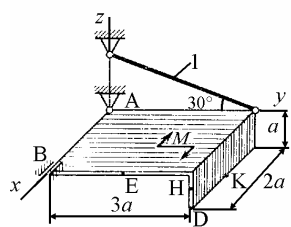


Рисунок С4.6

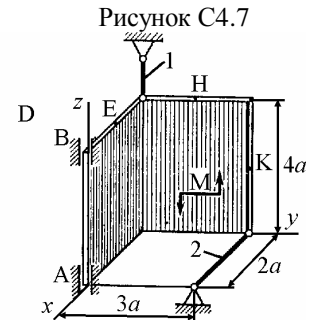


Рисунок С4.7

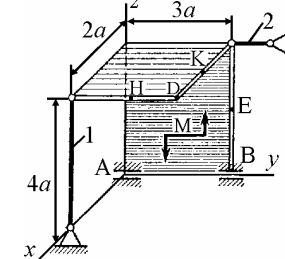


Рисунок С4.8

Рисунок С4.9

Таблица С4

Номер условия	Сила							
	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка приложения	$\alpha_1, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_2, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_3, \text{ град}$	Точка приложения	$\alpha_4, \text{ град}$
0	E	60	H	30	–	–	–	–
1	–	–	D	60	E	30	–	–
2	–	–	–	–	K	60	E	30
3	K	30	–	–	D	0	–	–
4	–	–	E	30	–	–	D	60
5	H	0	K	60	–	–	–	–
6	–	–	H	90	D	30	–	–
7	–	–	–	–	H	60	K	90
8	D	30	–	–	K	0	–	–
9	–	–	D	90	–	–	H	30

**ПРИМЕР С4:** Горизонтальная прямоугольная плита весом  $P$  (рис. С4) закреплена сферическим шарниром в точке  $A$ , цилиндрическим (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $DD'$ . На плиту в плоскости, параллельной  $xz$ , действует сила  $\vec{F}$ , а в плоскости, параллельной  $yz$ , – пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P = 3$  кН,  $F = 8$  кН,  $M = 4$  кН·м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $AC = 0,8$  м,  $AB = 1,2$  м,  $BE = 0,4$  м,  $EH = 0,4$  м. Определить реакции опор  $A$ ,  $B$  и стержня  $DD'$ .

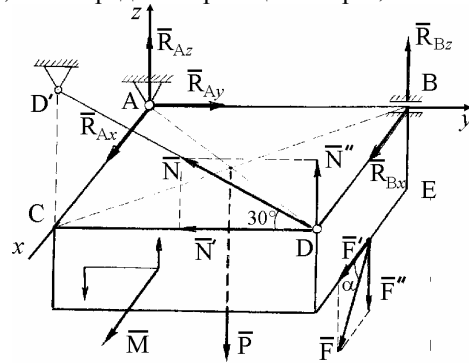


Рисунок С4 Схема к примеру С4

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$  и пара с моментом  $\bar{M}$ , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие:  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Az}$ , цилиндрического (подшипника) – на две составляющие:  $\bar{R}_{Bx}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ , (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию  $\bar{N}$  стержня направляем вдоль стержня от  $D$  к  $D'$ , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; R_{Ax} + R_{Bx} + F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (19)$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_{Ay} - N \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (20)$$

$$\sum F_{kz} = 0; R_{Az} + R_{Bz} - P + N \cdot \sin 30^\circ - F \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$(21) \quad \sum m_x(\bar{F}_k) = M - P \cdot 0,5 \cdot AB + R_{Bz} \cdot AB - F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB + N \cdot \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (22)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot 0,5 \cdot AC - N \cdot \sin 30^\circ \cdot AC + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AC - F \cdot \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (23)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -F \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC - R_{Bx} \cdot AB = 0. \quad (24)$$

Для определения моментов силы  $\bar{F}$  относительно осей разлагаем ее на составляющие  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , параллельные осям  $x$  и  $z$  ( $F' = F \cdot \cos \alpha$ ,  $F'' = F \cdot \sin \alpha$ ), и применяем теорему Вариньона. Аналогично поступаем с реакцией  $\bar{N}$  ( $\bar{N}' = N \cdot \cos 30^\circ$ ;  $\bar{N}'' = N \cdot \sin 30^\circ$ ).

Из уравнения (23) находим:

$$N = \frac{P \cdot 0,5 \cdot AC + F \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AC - F \cdot \cos 60^\circ \cdot BE}{AC \cdot \sin 30^\circ}$$

$$N = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot 0,8 - 8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0,4}{0,8 \cdot \sin 30^\circ} = 5,928 \text{ кН.}$$

Из уравнения (24):

$$R_{Bx} = -\frac{F \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + N \cdot \cos 30^\circ \cdot AC}{AB}$$

$$R_{Bx} = -\frac{8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1,2 + 5,928 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8}{1,2} = -7,422 \text{ кН.}$$

Из уравнения (22):

$$R_{Bz} = \frac{P \cdot 0,5 \cdot AB - M + F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB - N \cdot \sin 30^\circ \cdot AB}{AB}$$

$$R_{Bz} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 4 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,2 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,2}{1,2} = 2,13 \text{ кН.}$$

Из уравнения (19):

$$R_{Ax} = -R_{Bx} - F \cdot \cos 60^\circ$$

$$R_{Ax} = -(-7,422) - 8 \cdot \cos 60^\circ = 3,422 \text{ кН.}$$

Из уравнения (20):

$$R_{Ay} = N \cdot \cos 30^\circ$$

$$R_{Ay} = 5,928 \cdot \cos 30^\circ = 5,133 \text{ кН.}$$

Из уравнения (21):

$$R_{Az} = -R_{Bz} + P - N \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \sin 60^\circ$$

$$R_{Az} = -2,13 + 3 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ + 8 \cdot \sin 60^\circ = 4,834 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $R_{Ax} = 3,422$  кН,  $R_{Ay} = 5,133$  кН,  $R_{Az} = 4,834$  кН,  $R_{Bx} = -7,422$  кН,  $R_{Bz} = 2,13$  кН,  $N = 5,928$  кН.

Знак «минус» указывает, что реакция  $\bar{R}_{Bx}$  направлена противоположно показанной на рис. С4.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как определить момент силы относительно оси?
2. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
3. Как представить вектор-момент пары сил, расположенной в пространстве?
4. Как складываются пары сил в пространстве?
5. Как вычислить главный вектор и главный момент пространственной произвольной системы сил?

6. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил?

#### 1.4. Определение опорных реакций составной балки с элементами оптимизации

**ЗАДАЧА C5:** Схемы конструкций изображены на рис. C5.1–C5.4. Исходные данные приведены в табл. C5. Во всех вариантах сила  $\vec{F}_2$  наклонена к оси  $x$  под углом  $\alpha$ , который изменяется от 0 до  $2\pi$ . Требуется определить реакции связей в функции угла  $\alpha$ . Кроме того, необходимо найти значения угла  $\alpha$ , при которых вес исследуемой опоры и потенциальная энергия деформации всех опор оказываются минимальными.

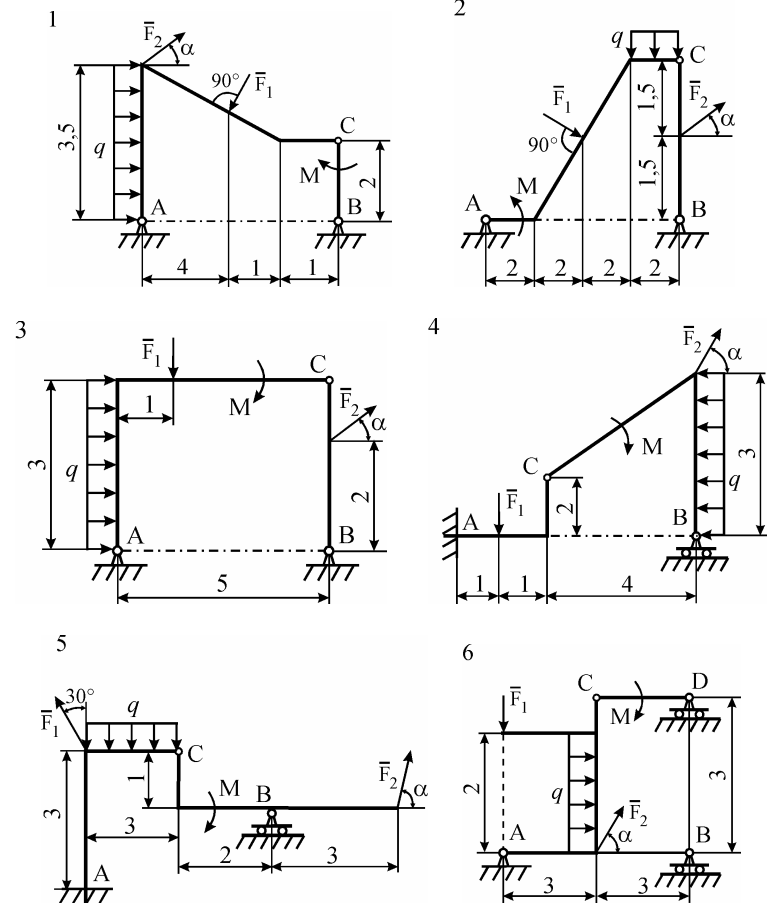


Рисунок C5.1

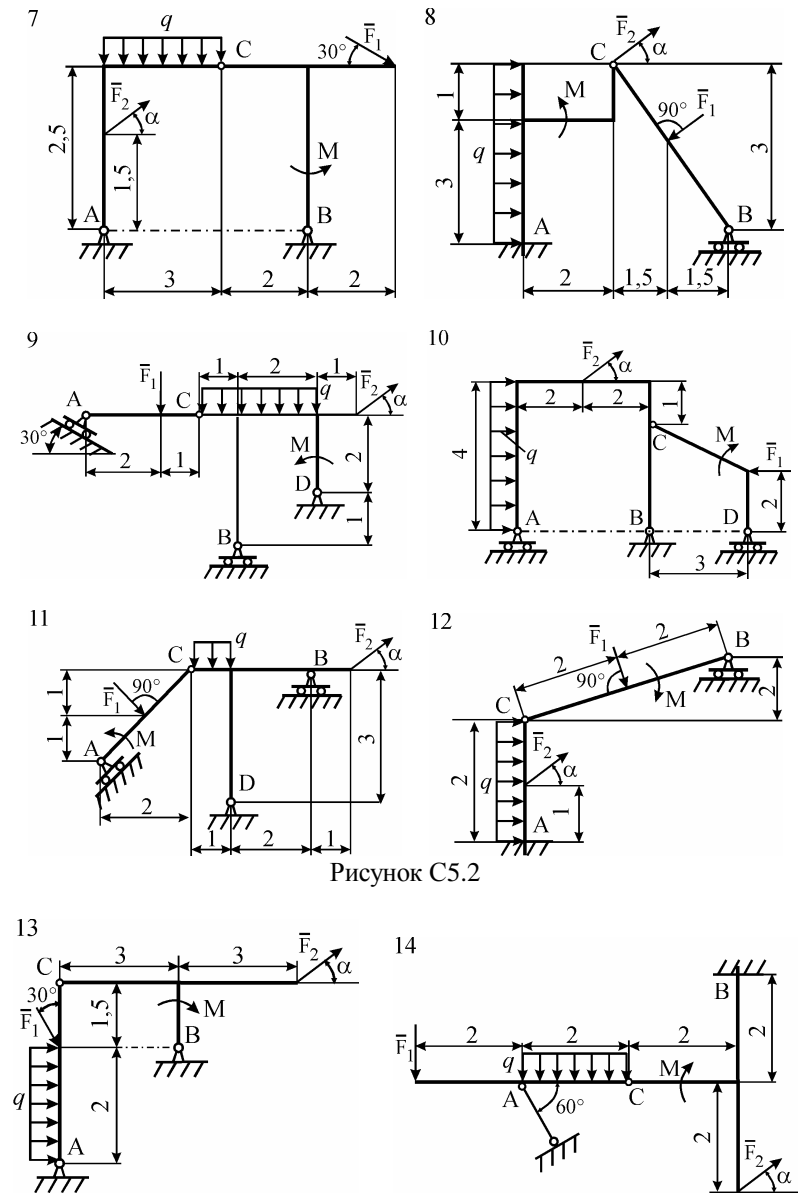


Рисунок C5.2

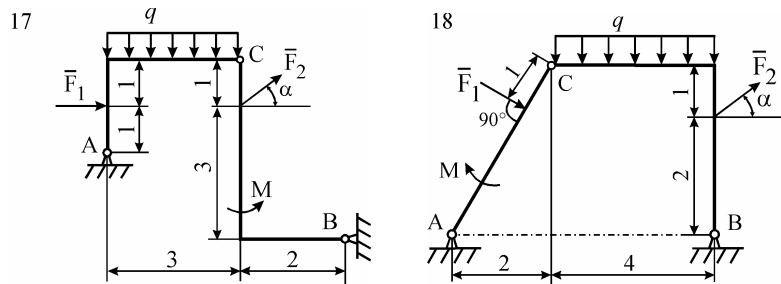
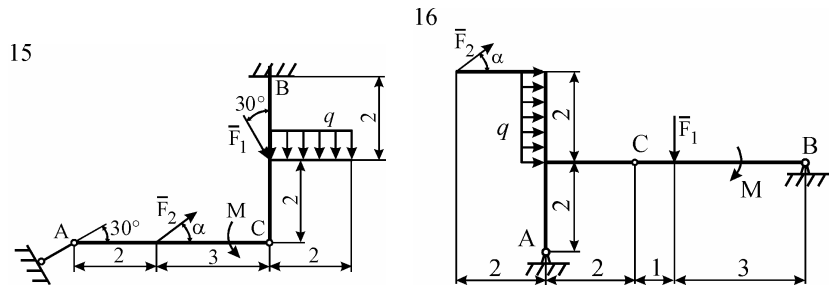


Рисунок С5.3

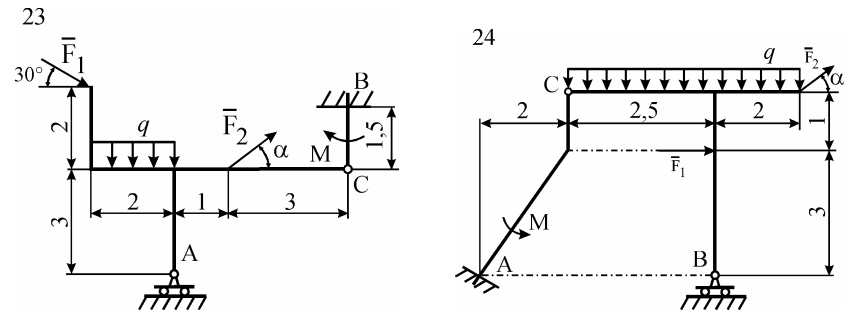
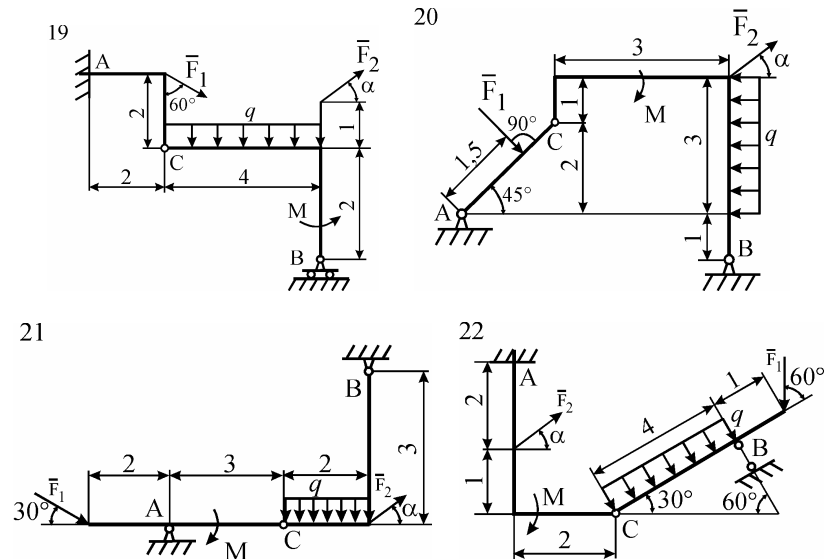


Рисунок С5.4

Таблица С5

Номер варианта (рис. С5.1–С5.4)	F <sub>1</sub> , F <sub>2</sub>		M, кН·м	q, кН/м	Исследуемая реакция
	кН				
1	5,0	7,0	24,0	0,8	R <sub>A</sub>
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R <sub>B</sub>
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R <sub>A</sub>
4	8,0	8,0	18,0	1,4	R <sub>A</sub>
5	9,0	7,0	16,0	1,6	R <sub>B</sub>
6	11,0	7,0	20,0	2,0	R <sub>D</sub>
7	13,0	10,0	10,0	2,4	R <sub>A</sub>
8	14,0	12,0	14,0	2,6	R <sub>B</sub>
9	15,0	5,0	14,0	2,8	R <sub>D</sub>
10	12,0	4,0	16,0	3,0	R <sub>A</sub>
11	9,0	6,0	18,0	3,2	R <sub>A</sub>
12	6,0	8,0	20,0	3,4	R <sub>A</sub>
13	9,0	12,0	26,0	4,0	R <sub>B</sub>
14	11,0	10,0	18,0	3,5	R <sub>B</sub>
15	13,0	9,0	30,0	3,0	R <sub>A</sub>
16	10,0	7,0	20,0	2,0	R <sub>B</sub>
17	5,0	6,0	15,0	1,5	R <sub>A</sub>
18	8,0	5,0	10,0	1,4	R <sub>A</sub>
19	11,0	4,0	5,0	1,3	R <sub>A</sub>
20	12,0	8,0	9,0	1,1	R <sub>B</sub>
21	8,0	9,0	13,0	1,2	R <sub>A</sub>
22	6,0	10,0	15,0	1,4	R <sub>A</sub>
23	10,0	12,0	17,0	1,6	R <sub>A</sub>
24	12,0	6,0	15,0	2,2	R <sub>A</sub>

**Указания:** Решить поставленную задачу – значит найти лучший вариант проектируемого объекта, например, конструкции машины или сооружения, технологического процесса и др. В данном случае решение задачи оптимизации сводится к определению значений угла  $\alpha$ , при которых рассматриваемая конструкция оказывается лучшей по одному из двух критериев: или одна из исследуемых опор должна иметь минимальный вес, или все опоры должны деформироваться с минимальной потенциальной энергией. Последнее эквивалентно, например, минимальному нагреву опоры, обусловленному ее деформацией.

**Критерий минимального веса опоры.** Для упрощения задачи представим все опоры в виде стержней заданной длины, расположенных вдоль составляющих сил реакций. Таким образом каждый стержень будет нагружен некоторой продольной силой  $\bar{N}$ , модуль которой равен модулю соответствующей силы реакции рассматриваемой опоры. Если реакцией опоры является пара сил, то паре соответствуют два стержня – по одному для каждой силы.

Модуль силы  $\bar{N}$  можно представить в виде

$$N = S \cdot \sigma, \quad (25)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,  $\sigma$  – сила, приходящаяся на единицу этой площади.

Умножим и разделим правую часть равенства (25) на длину  $l$  стержня и удельный вес  $\gamma$  материала, из которого он изготовлен. Получим

$$G = l^* \cdot N, \quad (26)$$

где  $G$  – вес стержня,  $l^* = l \cdot \gamma / \sigma$ .

Как видно, при заданном коэффициенте  $l^*$  оптимизацию по весу стержня можно заменить оптимизацией по силе  $\bar{N}$ . В дальнейшем входящие в коэффициент  $l^*$  величины  $l$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  считаются известными. Для расчета их значения не понадобятся.

В тех вариантах задачи, где опора  $A$  представляет собой жесткую заделку, роль силы  $\bar{N}$  играет равнодействующая, которая равна главному вектору  $\bar{R}_A$  плоской системы сил реакций заделки, линия действия которой находится на некотором расстоянии  $h$  от точки  $A$  ( $h = M_A / R_A$ ). В тех вариантах, где в точке  $A$  расположена шарнирно-неподвижная опора,

$$N = R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}.$$

В данной задаче в результате решения соответствующей системы уравнений равновесия находят  $R_A$  как функцию одного аргумента  $\alpha$ . Оптимальное значение реакции найдется из исследования функции  $R_A$  на глобальный экс-

тремум, в данном случае глобальный минимум (глобальным минимумом функции называется наименьшее ее значение в изучаемом интервале изменения аргумента).

Численные значения реакций всех опор зависят от  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , которые имеют период  $2\pi$ . Это позволяет ограничиться поиском глобального минимума  $R_A$  в интервале изменения аргумента  $\alpha$ :

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Значения  $R_A$  вычисляются с интервалом  $\Delta\alpha = \pi/12$  в соответствии с формулой  $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \pi/12$ , где  $k = 1, 2, \dots, 24$  и  $\alpha_1 = 0$ . По вычисленным значениям реакции  $R_A$  строится график зависимости  $R_A = R_A(\alpha)$ , из которого находят значение  $\alpha$ , соответствующее глобальному минимуму  $R_A$ .

**Критерий минимальной потенциальной энергии деформации.** По-прежнему опоры представляем стержнями, работающими по направлениям составляющих реакций.

Из курса физики известно, что потенциальная энергия  $\Pi_i$  деформации  $i$ -го стержня, нагруженного продольной силой  $N_i$ , равна

$$\Pi_i = \frac{N_i \cdot \Delta l_i}{2}, \quad (27)$$

где  $\Delta l_i$  – удлинение (деформация)  $i$ -го стержня, вызванное силой  $N_i$ .

Деформация определяется согласно закону Гука:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i}. \quad (28)$$

Здесь  $l_i$  – длина  $i$ -го стержня;  $S_i$  – площадь его поперечного сечения;

$E_i$  – модуль упругости материала, из которого этот стержень изготовлен.

Подставив (28) в (27), найдем потенциальную энергию стержня в виде

$$\Pi_i = l_i^* \cdot N_i^2, \quad (29)$$

где коэффициент  $l_i^* = l_i / 2 \cdot E_i \cdot S_i$ .

В дальнейшем величина  $l_i^*$  считается известной и постоянной для всех стержней ( $l_i^* = l_i^*$ ). Суммарная потенциальная энергия стержней (опор) найдется сложением (29):

$$\Pi = l_i^* \sum N_i^2. \quad (30)$$

Как видно, при известном коэффициенте  $1^*$  оптимизацию конструкции по потенциальной энергии деформации опор можно заменить оптимизацией по параметру, равному сумме квадратов модулей составляющих сил реакций всех опор. Соответствующая целевая функция будет

$$f(\alpha) = \sum X_i^2, \quad (31)$$

где  $X_i$  – модуль  $i$ -й составляющей реакции соответствующей опоры.

Следует отметить, что в числе модулей реакций могут быть как силы, так и моменты пар сил. Для приведения тех и других к одной размерности значения  $X_i$ , соответствующие моментам, необходимо разделить на характерный габаритный размер  $h$  конструкции. Во всех вариантах задания величину  $h$  принять равной 1 м.

С помощью найденных выше значений  $X_i$  определяется целевая функция с шагом  $\Delta\alpha = \pi/12$ . По вычисленной целевой функции строится график  $f(\alpha)$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Глобальный минимум этого графика соответствует оптимальному значению угла  $\alpha$ .

**ПРИМЕР C5:** На рис.С5а представлена схема составной конструкции, два элемента которой ( $AC$  и  $CB$ ) соединены между собой цилиндрическим шарниром  $C$ . На конструкцию в целом наложены внешние связи в виде шарнирно-неподвижных опор  $A$  и  $B$  и внутренняя связь в шарнире  $C$ . Размеры элементов указаны в метрах.

Дано:  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 7,0$  кН,  $M = 11$  кН·м,  $q = 1$  кН/м,  $\beta = 60^\circ$ .

Определить, при каких значениях угла  $\alpha$  опора  $A$  будет иметь наименьший вес и потенциальная энергия деформации всех опор минимальной.

**Решение.** Заменяем равномерно распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  равнодействующей  $\bar{Q}$ , модуль которой  $Q = q \cdot 3 = 3$  кН, а точка приложения находится на середине вертикального участка элемента  $CB$ .

Расчленим заданную конструкцию на два элемента  $AC$  и  $CB$ , представленные на рис. С5б и рис. С5в соответственно.

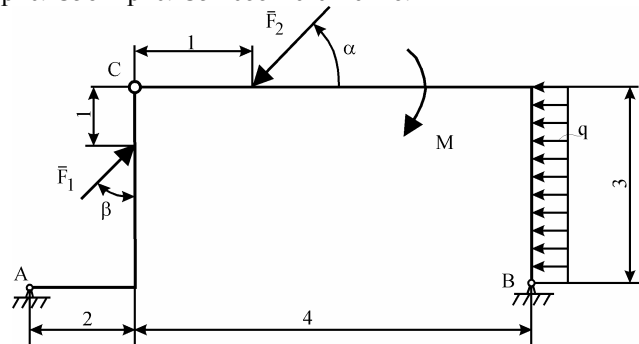


Рисунок С5а Схема к примеру С5

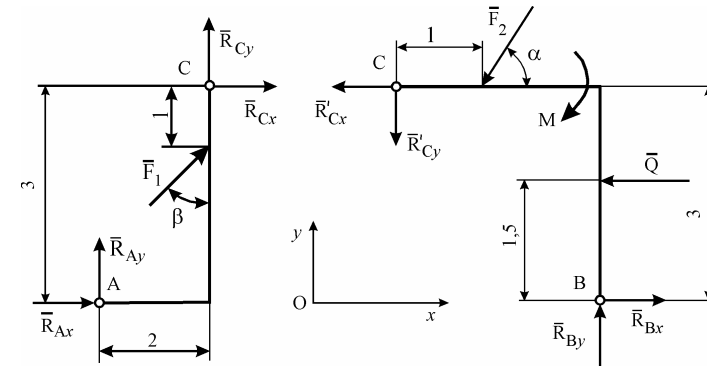


Рисунок С5б

Рисунок С5в

К каждому элементу прикладываем заданные активные силы и реакции внешних и внутренней связей. Примем для обоих элементов единую систему координат  $Oxy$ . В точке  $A$  элемента  $AC$  прикладываем составляющие (компоненты)  $\bar{R}_{Ax}$  и  $\bar{R}_{Ay}$  реакции  $\bar{R}_A$  внешней связи, а в точке  $C$  – составляющие  $\bar{R}_{Cx}$  и  $\bar{R}_{Cy}$  реакции  $\bar{R}_C$  внутренней связи. В точке  $B$  элемента  $BC$  прикладываем составляющие  $\bar{R}_{Bx}$  и  $\bar{R}_{By}$  реакции  $\bar{R}_B$  внешней связи, а в точке  $C$  – составляющие  $\bar{R}'_{Cx}$  и  $\bar{R}'_{Cy}$  реакции  $\bar{R}'_C$  внутренней связи ( $\bar{R}'_{Cx} = -\bar{R}_{Cx}$ ,  $\bar{R}'_{Cy} = -\bar{R}_{Cy}$ ).

Составим уравнения, выражающие равновесие элемента  $AC$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + F_1 \cdot \sin \beta + R_{Cx} = 0, \quad (32)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} + F_1 \cdot \cos \beta + R_{Cy} = 0, \quad (33)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = R_{Cy} \cdot 2 - R_{Cx} \cdot 3 - F_1 \cdot \sin \beta \cdot 2 + F_1 \cdot \cos \beta \cdot 2 = 0. \quad (34)$$

Составим уравнения равновесия элемента  $BC$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Bx} - Q - F_2 \cdot \cos \alpha - R'_{Cx} = 0, \quad (35)$$

$$\sum F_{ky} = R_{By} - F_2 \cdot \sin \alpha - R'_{Cy} = 0,$$

(36)

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = R'_{Cx} \cdot 3 + R'_{Cy} \cdot 4 + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot 3 + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot 3 - M + Q \cdot 1,5 = 0. \quad (37)$$

С учетом, что  $R'_{Cx} = R_{Cx}$ ,  $R'_{Cy} = R_{Cy}$ , уравнения (32)–(37) перепишем в виде системы шести уравнений, перенеся в их правые части известные члены, считая, что значение угла  $\alpha$  также задано:

$$\begin{aligned}
 R_{Ax} + R_{Cx} &= -F_1 \cdot \sin \beta, \\
 R_{Ay} + R_{Cy} &= -F_1 \cdot \cos \beta, \\
 2 \cdot R_{Cy} - 3R_{Cx} &= 2F_1 \cdot (\sin \beta - \cos \beta), \\
 R_{Bx} - R_{Cx} &= Q + F_2 \cdot \cos \alpha, \\
 R_{By} - R_{Cy} &= F_2 \cdot \sin \alpha, \\
 3 \cdot R_{Cx} + 4 \cdot R_{Cy} &= M - 1,5 \cdot Q - 3 \cdot F_2(\sin \alpha + \cos \alpha).
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Система уравнений (38) позволяет определить реакции связей как функции угла  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ).

С целью упрощения уравнений (38) подставим числовые значения заданных постоянных величин:

$$\begin{aligned}
 R_{Ax} + R_{Cx} &= -8,66, \\
 R_{Ay} + R_{Cy} &= -5,0, \\
 2 \cdot R_{Cy} - 3 \cdot R_{Cx} &= 7,32, \\
 R_{Bx} - R_{Cx} &= 3 + 7,0 \cdot \cos \alpha, \\
 R_{By} - R_{Cy} &= 7,0 \cdot \sin \alpha, \\
 3 \cdot R_{Cx} + 4 \cdot R_{Cy} &= 6,5 - 21,0 \cdot \cos \alpha + 21,0 \cdot \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Матричная форма уравнений равновесия  
Правые части уравнений (39) имеют вид  
 $a + b \cdot \cos \alpha + c \cdot \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned}
 &(40) \\
 &\text{Представим систему уравнений (39) в матричной форме:} \\
 &A \cdot X = B,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(41) \\
 &\text{где } X \text{ – матрица-столбец неизвестных,}
 \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Cx} \\ R_{Cy} \\ R_{Bx} \\ R_{By} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 &(42) \\
 &A \text{ – матрица коэффициентов при неизвестных,}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 &(43) \\
 &\text{матрица-столбец правых частей системы уравнений (39)}
 \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} -8,66 & 0 \cdot \cos \alpha & 0 \cdot \sin \alpha \\ -5,00 & 0 \cdot \cos \alpha & 0 \cdot \sin \alpha \\ 7,32 & 0 \cdot \cos \alpha & 0 \cdot \sin \alpha \\ 3,0 & 7 \cdot \cos \alpha & 0 \cdot \sin \alpha \\ 0 & 0 \cdot \cos \alpha & 7 \cdot \sin \alpha \\ 6,5 & -21 \cdot \cos \alpha & -21 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}
 \tag{44}$$

Для любого варианта задания каждый элемент этого столбца может иметь вид  $a + b \cdot \cos \alpha + c \cdot \sin \alpha$ , где коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  зависят от заданных сил и их плеч.

В матрицах (43) и (44) целые числа являются точными, дробное число должно быть записано с относительной погрешностью, соответствующей пяти верным значащим цифрам. Такая же запись промежуточных результатов должна быть сохранена во всех вариантах задания. Она вытекает из принятой в инженерной практике точности расчетов в 5%, что соответствует записи окончательных результатов с тремя верными значащими цифрами.

Решением матричного уравнения (41) будет

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

где  $A^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $A$ .

**Алгоритм вычислений.** Для решения матричного уравнения (41) в Mathcad имеется функция *lsolve* ( $A$ ,  $B$ ), которая возвращает вектор  $X$  для системы уравнений  $A \cdot X = B$  при заданной матрице коэффициентов  $A$  и векторе свободных членов  $B$ . В нашей задаче матрица  $B$  является переменной, зависящей от угла  $\alpha$ . Выбираем шаг изменения угла  $\Delta\alpha = \pi/12$ .

Модули реакций в точках определяются через составляющие

$$R_i = \sqrt{R_{ix}^2 + R_{iy}^2}$$

Из графика  $R_i(\alpha)$  находим значение угла, при котором данная реакция имеет минимум.

**Результаты вычислений.** Значения модулей составляющих реакций всех связей полной искомой реакции должны быть сведены в табл. С5.1.

Таблица С5.1

Обозначения, принятые в расчете	$R_{Ax}$	$R_{Ay}$	$R_{Cx}$	$R_{Cy}$	$R_{Bx}$	$R_{By}$	$R_A$	$\sum R_i^2$
Их идентификаторы	$X(1)$	$X(2)$	$X(3)$	$X(4)$	$X(5)$	$X(6)$	$F$	$\Pi$
$\alpha = 0$								
$\alpha = \pi/12$								
$\alpha = \pi/6$								
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$2\pi$								

По данным табл. С5.1 вначале строим график  $R_A$  в функции от угла  $\alpha$  (рис. С5г). Для этого наносим на координатную плоскость  $R_A - \alpha$  точки, соответствующие вычисленным значениям реакции. Полученные точки соединяем плавной кривой. На этой кривой отмечаем точку, соответствующую значению глобального минимума реакции  $R_{Amin}$  и по ней находим значение  $\alpha_{min}$ , т.е. угла  $\alpha$ , соответствующего значению  $R_{Amin}$ .

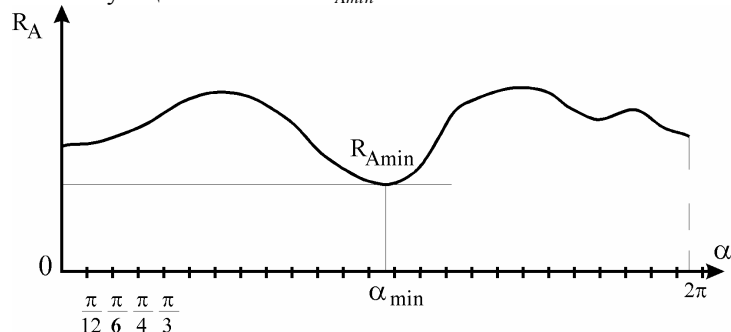


Рисунок С5г

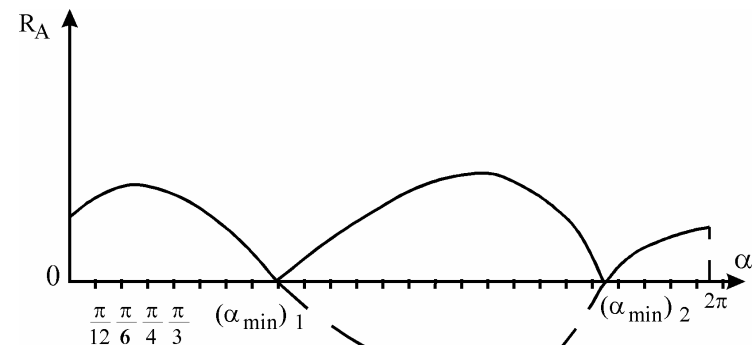


Рисунок С5д

**Примечание.** В тех вариантах задания, где в точке  $A$  расположена шарнирно-подвижная опора или невесомый стержень, кривая зависимости  $R_A = R_A(\alpha)$  может пересекать ось  $\alpha$  и часть ее располагаться ниже этой оси (рис. С5д). Это означает, что для этой части кривой значения модулей оказались отрицательными. Эта часть графика показана пунктиром.

Поскольку модуль не может быть отрицательным, нижнюю часть графика следует зеркально перенести вверх относительно оси  $\alpha$ . Точки пересечения кривой (сплошной и пунктирной) с осью  $\alpha$  дают значения углов  $(\alpha_{min})_1$ ,  $(\alpha_{min})_2$ , соответствующих значению реакции  $R_A$ , равное нулю (глобальный минимум).

Для оценки оптимальности конструкции по второму критерию строим график изменения сумм квадратов модулей составляющих реакции в зависимости от угла  $\alpha$  (рис. С5е).

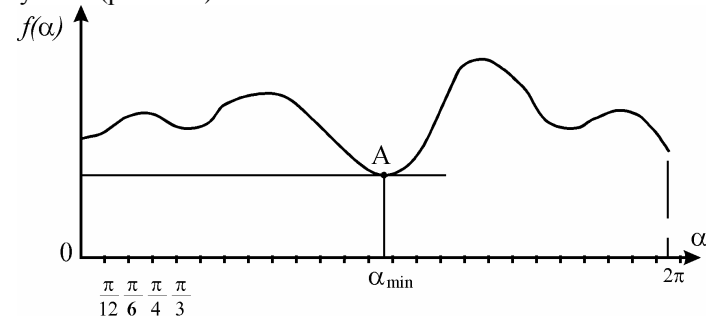


Рисунок С5е

На графике отмечаем точку  $A$ , соответствующую глобальному минимуму целевой функции  $f(\alpha)$  и определяем угол  $\alpha_{min}$ .

**Содержание отчета.** Отчет по работе должен содержать:

- 1) схему конструкции, исходные данные и постановку задачи;



2) изложение расчета с расчетными схемами и краткими пояснениями (уравнениями равновесия, решение уравнений в общем виде, запись целевых функций, методику нахождения оптимального угла  $\alpha$ );

3) схему алгоритма, программу;

4) распечатку числовых результатов, графики, анализ результатов.

■ *Программа вычислений корней системы уравнений*

Задаем шаг изменения угла  $\alpha$  и его предельные значения

$$\alpha := 0, \frac{\pi}{36} .. 2 \cdot \pi$$

В матрице A1 вводим коэффициенты левой части уравнений

$$A1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В матрице B1 вводим свободные коэффициенты правой части уравнений

$$B1(\alpha) := \begin{pmatrix} -8.66 \\ -5 \\ 7.32 \\ 3 + 7 \cdot \cos(\alpha) \\ 7 \cdot \sin(\alpha) \\ 6.5 - 21 \cdot \cos(\alpha) - 21 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

В матрице X записываем корни решения уравнений:

$$X(\alpha) := \text{lsolve}(A1, B1(\alpha))$$

Находим реакцию в точке A:

$$F(\alpha) := \sqrt{(X(\alpha)_1)^2 + (X(\alpha)_2)^2}$$

Вычисляем потенциальную энергию деформации (результаты в табл. C5.2):

$$\Pi(\alpha) = (X(\alpha)_1)^2 + (X(\alpha)_2)^2 + (X(\alpha)_3)^2 + (X(\alpha)_4)^2 + (X(\alpha)_5)^2 + (X(\alpha)_6)^2.$$

Таблица С5.2

φ	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	F	Π
0	-5.4222	-3.8033	-3.2378	-1.1967	6.7622	-1.1960	6.6231	102.941
0.2618	-4.8978	-3.0167	-3.7622	-1.9833	5.9993	-0.1715	5.7523	87.198
0.5236	-4.5682	-2.5222	-4.0918	-2.4778	4.9703	1.0222	5.2182	75.862
0.7854	-4.4557	-2.3536	-4.2043	-2.6464	3.7455	2.3033	5.0391	69.406
1.0472	-4.5682	-2.5222	-4.0918	-2.4778	2.4082	3.5844	5.2182	68.760
1.3090	-4.8978	-3.0167	-3.7622	-1.9833	1.0496	4.7782	5.7523	75.109
1.5708	-5.4222	-3.8033	-3.2378	-1.1967	-0.2378	5.8033	6.6231	89.516
1.8326	-6.1056	-4.8285	-2.5544	-0.1715	-1.3661	6.5899	7.7841	112.441
2.0944	-6.9015	-6.0222	-1.7585	1.0222	-2.2585	7.0844	9.1596	143.325
2.3562	-7.7556	-7.3033	-0.9044	2.3033	-2.8542	7.2531	10.6530	180.364
2.6180	-8.6096	-8.5844	-0.0504	3.5844	-3.1126	7.0844	12.1580	220.545
2.8798	-9.4055	-9.7782	0.7455	4.7782	-3.0160	6.5899	13.5675	259.987
3.1416	-10.0889	-10.803	1.4289	5.8033	-2.5711	5.8033	14.7817	294.507
3.4034	-10.6133	-11.589	1.9533	6.5899	-1.8082	4.7782	15.7152	320.312
3.6652	-10.9429	-12.084	2.2829	7.0844	-0.7792	3.5844	16.3028	334.638
3.9270	-11.0554	-12.253	2.3954	7.2531	0.4456	2.3033	16.5033	336.209
4.1888	10.9429	-12.084	2.2829	7.0844	1.7829	1.0222	16.3028	325.406
4.4506	-10.6133	-11.589	1.9533	6.5899	3.1416	-0.1715	15.7152	304.110
4.7124	-10.0889	-10.803	1.4289	5.8033	4.4289	-1.1967	14.7817	275.265

4.9742	-9.4055	-9.7782	0.7455	4.7782	5.5572	-1.9833	13.5675	242.279
5.2360	-8.6096	-8.5844	-0.0504	3.5844	6.4496	-2.4778	12.1580	208.405
5.4978	-7.7556	-7.3033	-0.9044	2.3033	7.0453	-2.6464	10.6530	176.250
5.7596	-6.9015	-6.0222	-1.7585	1.0222	7.3037	-2.4778	9.1596	147.518
6.0214	-6.1056	-4.8285	-2.5544	-0.1715	7.2071	-1.9833	7.7841	123.023
6.2832	-5.4222	-3.8033	-3.2378	-1.1967	6.7622	-1.1967	6.6231	102.941

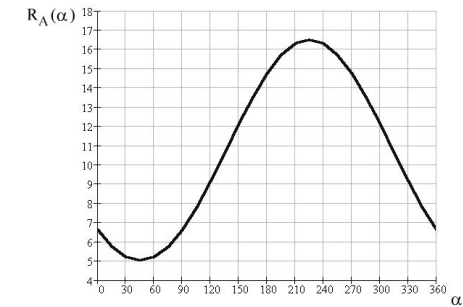


Рисунок С5ж

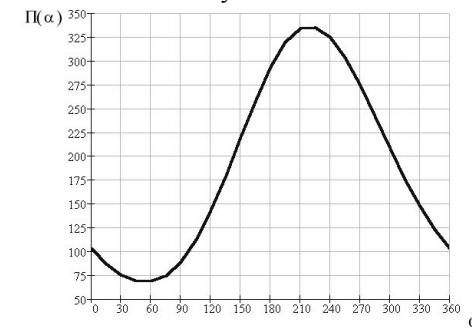


Рисунок С5з

Табл. С5.2 содержит результаты вычислений, а на рис. С5ж и С5з представлены графики зависимостей  $R_A = R_A(\alpha)$  и  $\Pi = \Pi(\alpha)$ , построенные по этим результатам.

## 2. КИНЕМАТИКА

### 2.1. Кинематика точки

Определить движение точки – это значит уметь определить положение точки по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени.

В кинематике применяются три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

При векторном способе определения движения точки радиус-вектор движущейся точки  $M$  (рис. 21), проведенный из выбранного неподвижного центра  $O$ , выражается как векторная функция от времени, т.е.  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

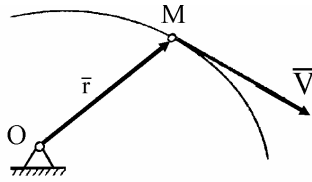


Рисунок 21 Векторный способ определения движения точки

Скорость  $\vec{V}$  точки, характеризующая быстроту и направление движения точки, равна производной по времени от ее радиуса-вектора:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ускорение  $\vec{a}$  точки, характеризующее изменение скорости по модулю и направлению, равно производной по времени от вектора скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Координатный способ определения (задания) движения точки состоит в том, что координаты движущейся точки в выбранной системе координат выражаются как функции времени  $t$ .

Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Если точка движется в плоскости  $Oxy$ , то будем иметь только два уравнения движения:

$$x = x(t), y = y(t).$$

Для того чтобы найти траекторию точки, достаточно из уравнений движения исключить время  $t$ . Вектор скорости и вектор ускорения определяются по их проекциям на оси декартовых координат, причем

$$\left. \begin{aligned} V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \\ V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \\ V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда получаем формулы разложения векторов скорости  $\vec{V}$  и ускорения  $\vec{a}$  по координатным осям:

$$\vec{V} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}.$$

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}.$$

Модули векторов скорости и ускорения вычисляем по формулам

$$|\vec{V}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

При естественном способе движение точки задается ее траекторией и уравнением движения по этой траектории:

$$s = \overset{\curvearrowright}{OM} = s(t),$$

где  $O$  – начало отсчета дуг на траектории;  $s$  – дуговая координата точки  $M$  или взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории от начала отсчета до точки  $M$  (рис. 22).

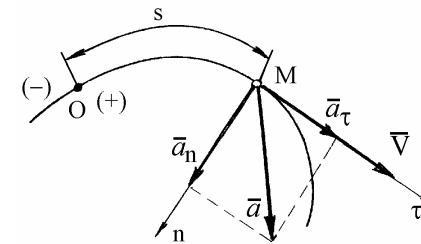


Рисунок 22 Естественный способ задания движения точки

Если заданы траектория движущейся точки и закон ее движения по этой траектории  $s = s(t)$ , то вектор скорости направлен по касательной к этой траектории, а его проекция на направление касательной определяется по формуле

$$V = \frac{ds}{dt},$$

причем абсолютное значение этой проекции равно модулю скорости:

$$|V| = \left| \frac{ds}{dt} \right|,$$

Вектор ускорения определяется по его проекциям на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad a_g = 0,$$

где  $\rho$  – радиус кривизны траектории в данной точке.

Следовательно,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Отметим частные случаи:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории  $\rho \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $a_n = 0$ . В этом случае ускорение направлено вдоль траектории точки и по модулю равно

$$a = |a_\tau| = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right|.$$

2. Если точка движется по криволинейной траектории равномерно, то

$$V = \text{const} \text{ и } a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0,$$

и поэтому ускорение направлено по нормали к траектории и по модулю равно

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

3. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то  $a_n = 0$ ,  $a_\tau = 0$  и  $a = 0$ .

В том случае, когда движение точки задано в координатной форме, касательное ускорение определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right), \text{ или } a_\tau = \frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}}{V}.$$

После этого нормальное ускорение можно найти из равенства

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

$$\text{где } a^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Определив  $a_n$ , найдем радиус кривизны по формуле

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Если плоская траектория задана уравнением  $y = y(x)$ , то радиус кривизны траектории вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''},$$

$$\text{где } y' = \frac{dy}{dx} \text{ и } y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

**ЗАДАЧА К1:** Точка  $M$  движется в плоскости  $xy$  (рис. К1.0–К1.9, табл. К1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ , где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени  $t = 1$  с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость  $x = f(t)$  указана непосредственно на рисунках, а зависимость  $y = f_2(t)$  дана в табл. К1 (для рис. К1.0–К1.2 – в столбце 2, для рис. К1.3–К1.6 – в столбце 3, для рис. К1.7–К1.9 – в столбце 4).

**Указания.** Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения.

В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени  $t_1 = 1$  с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

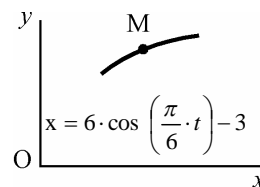


Рисунок К1.0

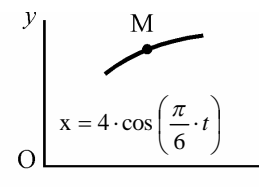


Рисунок К1.1

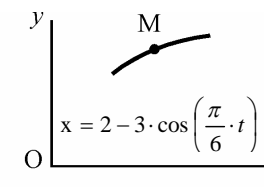


Рисунок К1.2

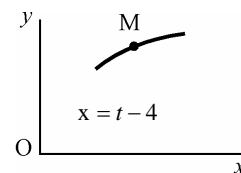


Рисунок К1.3

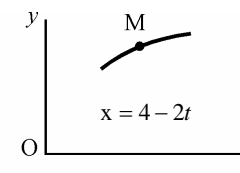


Рисунок К1.4

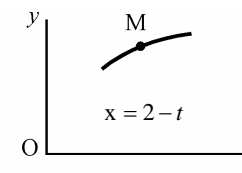


Рисунок К1.5

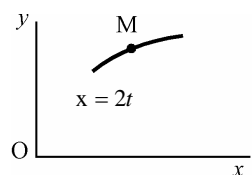


Рисунок К1.6

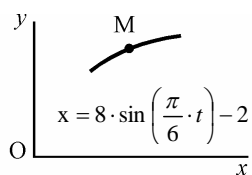


Рисунок К1.7

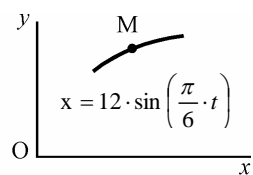


Рисунок К1.8

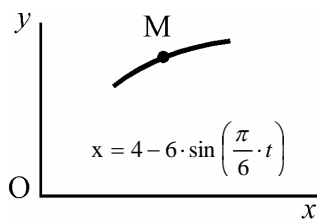


Рисунок К1.9

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. К1.0–К1.2	Рис. К1.3–К1.6	Рис. К1.7–К1.9
0	$12 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot t^2 + 2$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
1	$-6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$6 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
2	$-3 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
3	$9 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot t^3$	$10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
4	$3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-4 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$

5	$10 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 - 3 \cdot t^2$	$12 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
6	$6 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
7	$-2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$(1+t)^3$	$-8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$
8	$9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$	$2 - t^3$	$9 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$
9	$-8 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$	$4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)$	$-6 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)$

**ПРИМЕР К1:** Даны уравнения движения точки в плоскости  $xOy$ :

$$x = 6 \cdot \cos(\pi/6) - 3, \quad y = -4 \cdot \cos^2(\pi/6)$$

( $x, y$  – в метрах,  $t$  – в секундах).

Определить уравнение траектории точки. Для момента времени  $t_1 = 1$  с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

**Решение.** Для определения траектории исключим из заданных уравнений движения время  $t$ , воспользовавшись подстановкой:

$$\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+3}{6},$$

$$y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - 1.$$

Из полученного выражения следует, что траекторией движения точки является парабола с нисходящими ветвями и осью, параллельной оси  $y$ ; вершина параболы находится в точке с координатами  $x = -3$  м,  $y = 0$ .

Найдем проекции вектора скорости на оси координат:

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt} = -\pi \cdot \sin(\pi t/6),$$

$$\dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot \cos(\pi t/6) \cdot \sin(\pi t/6) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin(\pi t/3).$$

Подставив  $t_1 = 1$  с в полученные выражения, находим

$$\dot{x} = V_x = -0,5\pi = -1,57, \quad \dot{y} = V_y = 0,577\pi = 1,81.$$

Скорость точки в момент времени  $t_1 = 1$  с

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 0,763\pi = 2,397 \text{ м/с}.$$

Найдем проекции вектора ускорения:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{6} \cos(\pi/6),$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{2}{9} \pi^2 \cos(\pi/3).$$

Для момента времени  $t_1 = 1$  с

$$a_x = \ddot{x} = -1,42, \quad a_y = \ddot{y} = 1,096,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1,793 \text{ м/с}^2.$$

Касательное ускорение найдем по формуле

$$a_\tau = \frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}}{V} = \frac{(-1,57)(-1,42) + 1,81 \cdot 1,096}{2,397} = 1,757 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0,357 \text{ м/с}^2.$$

Вычислим радиус кривизны траектории в том месте, где находится точка в момент времени  $t_1 = 1$  с:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{2,397^2}{0,357} = 16,1 \text{ м}.$$

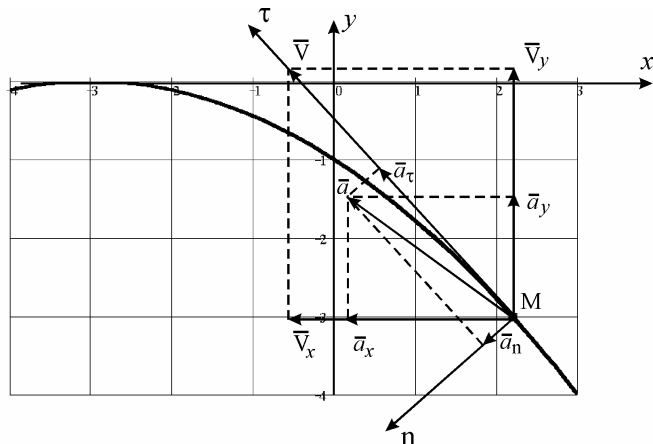


Рисунок К1 Направление траектории, скорости и ускорений точки M в заданный момент времени к примеру К1

Пользуясь уравнением траектории, вычерчиваем параболу (рис. К1) и показываем на ней точку M в заданный момент времени по ее координатам. Вектор скорости  $\vec{V}$  строим по составляющим  $\vec{V}_x$  и  $\vec{V}_y$ ; он должен быть на-

правлен по касательной к траектории. Вектор ускорения  $\vec{a}$  находим по его составляющим  $\vec{a}_x$  и  $\vec{a}_y$ . Далее найденный вектор раскладываем на направления касательной и нормали и получаем векторы касательного  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений. Полученные таким образом значения  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  должны совпасть с результатами их подсчета по формулам.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что называется траекторией точки?
2. Какие существуют способы задания движения и в чем заключается каждый из них?
3. Как при координатном способе задания движения точки определяется ее траектория?
4. Как найти проекции векторов скорости и ускорения точки на оси декартовой системы координат?
5. Как вычислить модули векторов скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси?
6. Как определяются и что характеризуют нормальное и касательное ускорения точки?
7. Как найти радиус кривизны траектории в какой-либо ее точке?

### 2.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельным (плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором траектории всех его точек лежат в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Пусть тело движется параллельно некоторой неподвижной плоскости  $\Pi$  (рис. 23). Если пересечь данное тело плоскостью  $xOy$ , параллельной неподвижной плоскости  $\Pi$ , то в сечении получится какая-то плоская фигура  $S$ . Эта фигура будет перемещаться при движении тела, оставаясь все время в той же плоскости  $xOy$ . Очевидно, что при таком движении тела все его точки, лежащие на перпендикуляре  $Aa$  к плоскости фигуры, движутся совершенно одинаково, так же как и точка  $A$  этой фигуры. Все точки, расположенные на перпендикуляре  $Bb$  к плоскости фигуры, движутся так же, как и точка  $B$  этой фигуры, и т.д. Отсюда следует, что для определения плоского движения тела достаточно знать движение плоской фигуры в ее плоскости.

Положение неизменяемой плоской фигуры  $S$  в ее плоскости вполне определяется положением двух произвольных ее точек  $A$  и  $B$ . Следовательно, изучение движения плоской фигуры в ее плоскости сводится к изучению движения прямолинейного отрезка  $AB$ , с которым фигура неиз-

менно связана. Но положение отрезка  $AB$  определяется двумя координатами  $x_A$  и  $y_A$  точки  $A$ , называемой полюсом и углом  $\varphi$ , который образует этот отрезок с некоторой осью неизменного направления, лежащей в плоскости данной фигуры (рис. 24).

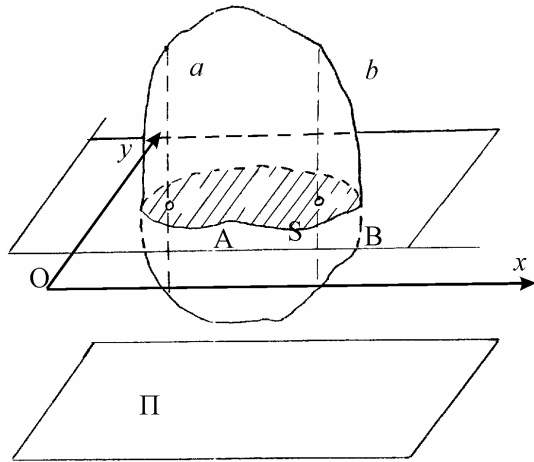


Рисунок 23 Плоскопараллельное движение твердого тела

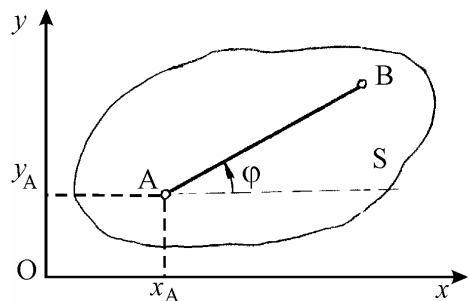


Рисунок 24 Определение положения отрезка  $AB$  в неизменяемой плоской фигуре  $S$

Таким образом, движение плоской фигуры в ее плоскости можно определить следующими тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение вместе с полюсом  $A$  и

определяемое первыми двумя уравнениями и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое третьим уравнением. При этом угловая скорость вращательного движения не зависит от выбора полюса. Очевидно, что скорость любой точки  $B$  плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса  $\vec{V}_A$  и скорости  $\vec{V}_{BA}$  точки  $B$  во вращательном движении вокруг полюса (рис. 25), т. е.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

$$\text{причем } \vec{V}_{BA} \perp AB \text{ и } V_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Отсюда следует теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось  $\eta$ , проходящую через эти точки, равны между собой.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая точка  $P$  плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны скорость  $\vec{V}_A$  какой-либо точки  $A$  плоской фигуры и угловая скорость  $\omega$  этой фигуры, то, повернув вектор  $\vec{V}_A$  вокруг точки  $A$  на  $90^\circ$  в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок

$$AP = V_A / \omega,$$

получим точку  $P$ , которая является МЦС (рис. 25).

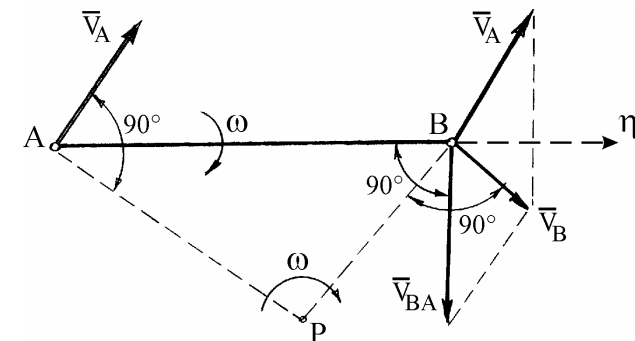


Рисунок 25 Определение МЦС при плоскопараллельном движении

Если же известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей.

Если мгновенный центр скоростей  $P$  найден и если известна угловая скорость фигуры, то скорость любой точки  $B$  фигуры определяется как скорость этой точки во вращательном движении вокруг МЦС, т. е. вектор  $\vec{V}_B$  перпендикулярен к отрезку  $PB$  и по модулю равен  $\omega \cdot PB$ . Отсюда следует, что

скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}.$$

Отметим другие случаи нахождения положения МЦС.

Если скорости точек  $A$  и  $B$  параллельны и  $AB \perp \vec{V}_A$ , то для определения положения МЦС следует воспользоваться свойством пропорциональности скоростей расстояниям точек до мгновенного центра скоростей. На рис. 26, а, б представлено, как находится МЦС в этих случаях.

На рис. 26, в показан случай, когда  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$  параллельны, но  $\vec{V}_A$  перпендикулярна отрезку  $AB$ . Очевидно, что в этом случае прямые  $Aa$  и  $Bb$ , перпендикулярные  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует, а угловая скорость фигуры равна нулю ( $\omega = 0$ ). На основании теоремы о проекциях скоростей имеем  $V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \alpha$ , отсюда  $V_A = V_B$  и  $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ . Значит, в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению.

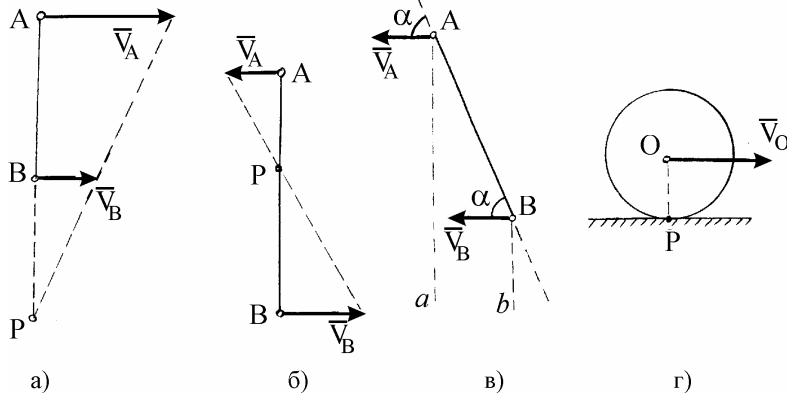


Рисунок 26 Примеры нахождения МЦС

При качении без скольжения одного тела по поверхности неподвижного другого (рис. 26, г) МЦС совпадает с точкой  $P$  соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

Ускорение любой точки движущейся плоской фигуры можно определить как геометрическую сумму ускорений этой точки в поступательном движении вместе с некоторым полюсом и вращательном движении вокруг этого полюса.

Если известны ускорение  $\vec{a}_A$  некоторой точки  $A$  фигуры (ускорение полюса), а также угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  фигуры, то ускорение любой ее точки  $B$  определяется по формуле

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

Здесь вектор  $\vec{a}_{BA}$  – ускорение точки  $B$  во вращательном движении вокруг полюса  $A$ ;  $\vec{a}_{BA}^n$  и  $\vec{a}_{BA}^\tau$  – нормальная и касательная составляющие этого вектора, которые вычисляем по формулам:

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB, \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB.$$

При этом вектор  $\vec{a}_{BA}^n$  направлен вдоль  $BA$  (от точки  $B$  к точке  $A$ ), а вектор  $\vec{a}_{BA}^\tau$  перпендикулярен к  $BA$  (рис. 27).

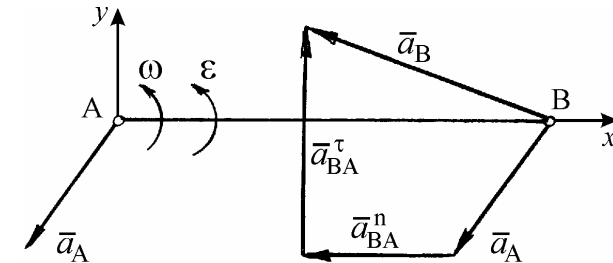


Рисунок 27 Определение ускорения плоской фигуры при плоскопараллельном движении

Ускорение точки  $B$  можно определить, если спроецировать векторное равенство

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

на оси  $x$  и  $y$  (см. рис. 27) и найти проекции этого ускорения:

$$a_{Bx} = a_{Ax} - a_{BA}^n, \quad a_{By} = a_{Ay} + a_{BA}^\tau.$$

По проекциям находят модуль ускорения точки  $B$ :

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}.$$

**ЗАДАЧА К2:** Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна  $B$  или  $E$  (рис. К2.0–К2.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунков  $B$  и  $E$  (рис. К2.8, К2.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1, O_2$  шарнирами; точка  $D$  находится в середине стержня  $AB$ . Длины стержней равны соответственно  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $l_4 = 0,6$  м. Положение механизма определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К2а (для рис. К2.0–К2.4) или в табл. К2б (для



рис. К2.5–К2.9); при этом в табл. К2а заданные  $\omega_1$  или  $\omega_4$  – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол  $\gamma$  на рис. К2.8 следует отложить от  $DB$  по ходу часовой стрелки, а на рис. К2.9 – против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К2 (см. рис. К2б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость  $\vec{V}_B$  и ускорение  $\vec{a}_B$  – от точки  $B$  к  $b$  (на рис. К2.5–К2.9).

Таблица К2а (к рис. К2.0–К2.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1, 1/c$	$\omega_4, 1/c$	$V$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена
0	0	60	30	0	120	6	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
1	90	120	150	0	30	–	4	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
2	30	60	30	0	120	5	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
3	60	150	150	90	30	–	5	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
4	30	30	60	0	150	4	–	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
5	90	120	120	90	60	–	6	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
6	90	150	120	90	30	3	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
7	0	60	60	0	120	–	2	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
8	60	150	120	90	30	2	–	$D, E$	$AB$	$B$	$AB$
9	30	120	150	0	60	–	8	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$

0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	$A, E$	$DE$	$A$	$AB$
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	$B, E$	$AB$	$B$	$AB$
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	$D, E$	$DE$	$A$	$AB$
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	$A, E$	$AB$	$A$	$AB$
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	$B, E$	$DE$	$B$	$AB$
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	$D, E$	$AB$	$A$	$AB$

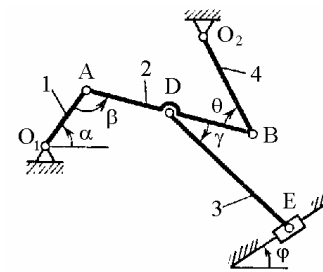


Рисунок К2.0

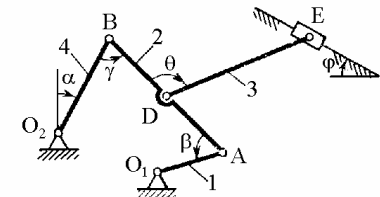


Рисунок К2.1

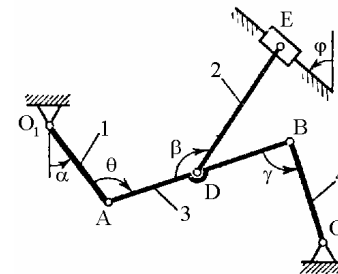


Рисунок К2.2

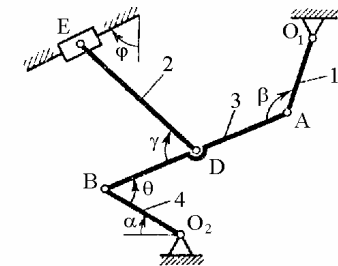


Рисунок К2.3

Таблица К2б (к рис. К2.5–К2.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi$	$\theta$	$\omega_1, 1/c$	$\varepsilon_{1,2}, 1/c^2$	$V_B, м/с$	$a_B, м/с^2$	$V$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\varepsilon$ звена

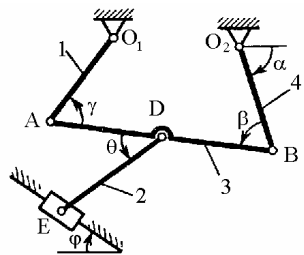


Рисунок К2.4

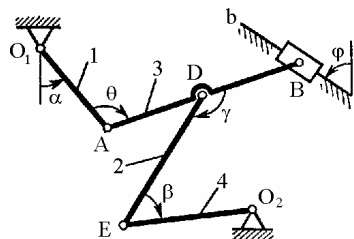


Рисунок К2.5

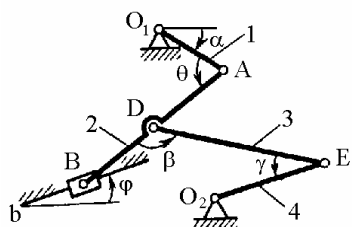


Рисунок К2.6

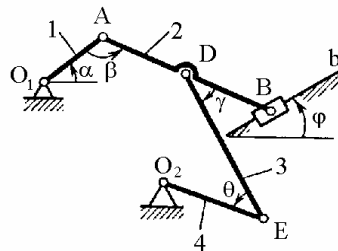


Рисунок К2.7

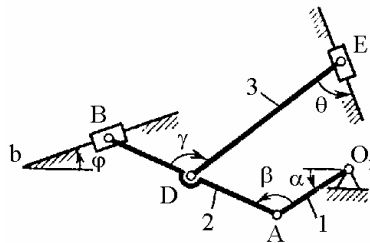


Рисунок К2.8

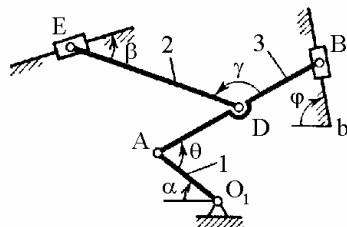


Рисунок К2.9

**Указания.** Задача К2 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства  $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^n$ , где  $A$  – точка, ускорение  $\vec{a}_A$  которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка  $A$  движется по дуге окружности, то  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n$ );  $B$  – точка, ускорение  $\vec{a}_B$

которой нужно определить (о случае, когда точка  $B$  тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К2).

**ПРИМЕР К2:** Механизм (рис. К2а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна  $B$ , соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  шарнирами.

Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $AD = DB$ ,  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $\omega_1 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 7$  с<sup>-2</sup> (направления  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  – против хода часовой стрелки). Определить:  $V_B$ ,  $V_E$ ,  $\omega_2$ ,  $a_B$ ,  $\varepsilon_3$ .

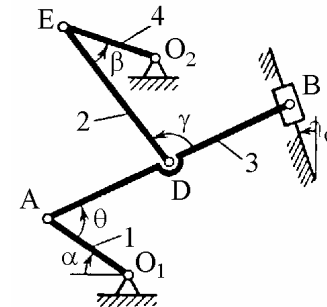


Рисунок К2а Схема к примеру К2

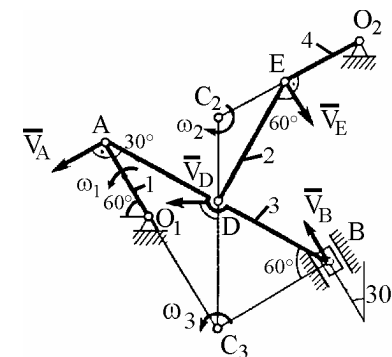


Рисунок К2б Заданное положение механизма к примеру К2

**Решение.**

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К2б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем  $V_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $V_B$ , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление  $\vec{V}_B$ . По данным задачи, учитывая направление  $\omega_1$ , можем определить  $\vec{V}_A$ ; численно

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_A \perp O_1A. \quad (45)$$

Направление  $\vec{V}_B$  найдем, учтя, что точка  $B$  принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная  $\vec{V}_A$  и направление  $\vec{V}_B$ , используем теорему о проекциях скоростей двух точек тела (стержня  $AB$ ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая  $AB$ ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор  $\vec{V}_B$  (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$V_B \cdot \cos 30^\circ = V_A \cdot \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad V_B = 0,46 \text{ м/с}. \quad (46)$$

3. Рассчитываем  $\vec{V}_E$ . Точка  $E$  принадлежит стержню  $DE$ . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить  $\vec{V}_E$ , надо сначала найти скорость точки  $D$ , принадлежащей одновременно стержню  $AB$ . Для этого, зная  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня  $AB$ ; это точка  $C_3$ , лежащая на пересечении перпендикуляров к  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_B$ , восстановленных из точек  $A$  и  $B$  (к  $\vec{V}_A$  перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора  $\vec{V}_A$  определяем направление поворота стержня  $AB$  вокруг МЦС  $C_3$ . Вектор  $\vec{V}_D$  перпендикулярен к отрезку  $C_3D$ , соединяющему точки  $D$  и  $C_3$ , и направлен в сторону поворота. Величину  $V_D$  найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \quad (47)$$

Чтобы вычислить  $C_3D$  и  $C_3B$ , заметим, что  $\triangle AC_3B$  – прямоугольный, так как острые углы в нем равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , и что  $C_3B = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,5 \cdot AB = BD$ . Тогда  $\triangle BC_3D$  является равнобедренным и  $C_3B = C_3D$ . В результате равенство (47) дает:

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_D \perp C_3D. \quad (48)$$

Так как точка  $E$  принадлежит одновременно стержню  $O_2E$ , вращающемуся вокруг  $O_2$ , то  $\vec{V}_E \perp O_2E$ , тогда, проведя из точек  $E$  и  $D$  перпендикуляры к скоростям  $\vec{V}_E$  и  $\vec{V}_D$ , построим МЦС  $C_2$  стержня  $DE$ . По направлению вектора  $\vec{V}_D$  определяем направление поворота стержня  $DE$  вокруг центра  $C_2$ . Вектор  $\vec{V}_E$  направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К2б видно, что

$\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$ , откуда  $C_2E = C_2D$ . Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \quad V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (49)$$

4. Определяем  $\omega_2$ . Так как МЦС стержня 2 известен (точка  $C_2$ ) и  $C_2D = l_2 / (2 \cdot \cos 30^\circ) = 0,69 \text{ м}$ , то

$$\omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (50)$$

5. Определяем  $\vec{a}_B$  (рис. К2в, на котором изображены все векторы ускорений). Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $\vec{a}_B$ , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня  $AB$  и траекторию точки  $B$ . По данным задачи можем определить  $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$ , где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad (51)$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\vec{a}_A^n$  направлен вдоль  $AO_1$ , а  $\vec{a}_A^\tau$  – перпендикулярно к  $AO_1$ ; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К2в). Так как точка  $B$  одновременно принадлежит ползуну, то вектор  $\vec{a}_B$  параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор  $\vec{a}_B$  на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и  $\vec{V}_B$ .

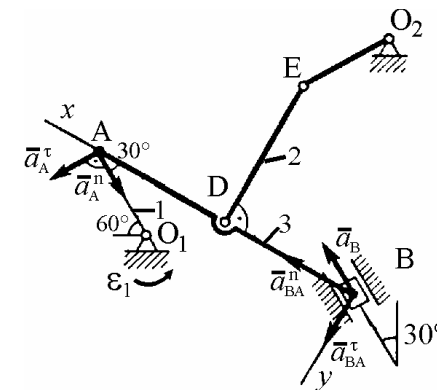


Рисунок К2в Направление ускорения  $a_B$  к примеру К2

Для определения  $\bar{a}_B$  воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (52)$$

Изображаем на чертеже векторы  $\bar{a}_{BA}^n$  (вдоль  $BA$  от  $B$  к  $A$ ) и  $\bar{a}_{BA}^\tau$  (в любую сторону перпендикулярно к  $BA$ ); численно  $a_{BA}^n = \omega_3^2 \cdot l_3$ . Находим  $\omega_3$  с помощью МЦС  $C_3$  стержня 3:

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3 A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (53)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (52), неизвестны только числовые значения  $a_B$  и  $a_{BA}^\tau$ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (52) на какие-нибудь две взаимно перпендикулярные оси.

Чтобы определить  $a_B$ , спроектируем обе части равенства (52) на направление  $BA$  (ось  $x$ ), перпендикулярное к неизвестному вектору  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Тогда получим:

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = a_A^\tau \cdot \cos 60^\circ - a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (54)$$

Подставив в равенство (54) числовые значения всех величин из (51) и (53), найдем, что  $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$ . (55)

Так как получилось  $a_B > 0$ , то, следовательно, вектор  $\bar{a}_B$  направлен как показано на рис. К2в.

6. Находим  $\varepsilon_3$ . Чтобы найти  $\varepsilon_3$ , сначала вычислим  $a_{BA}^\tau$ . Для этого обе части равенства (52) спроектируем на направление, перпендикулярное  $AB$  (ось  $y$ ). Тогда получим:

$$-a_B \cdot \sin 30^\circ = a_A^\tau \cdot \sin 60^\circ + a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (56)$$

Подставив в равенство (56) числовые значения всех величин из (55) и (51), найдем, что  $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$ . Знак указывает, что направление  $\bar{a}_{BA}^\tau$  противоположно показанному на рис. К2в. Теперь из равенства  $|\bar{a}_{BA}^\tau| = \varepsilon_3 \cdot l_3$  получим:

$$\varepsilon_3 = \frac{|\bar{a}_{BA}^\tau|}{l_3} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

**Ответ:**  $V_B = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $V_E = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$ ;  $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$ .

**Примечание 1.** Если точка  $B$ , ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К2.0–К2.4, где  $B$  движется по окружности радиуса  $O_2B$ ), то направление  $\bar{a}_B$  заранее неизвестно.

В этом случае  $\bar{a}_B$  также следует представить двумя составляющими ( $\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$ ) и исходное уравнение (52) примет вид

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (57)$$

При этом вектор  $\bar{a}_B^n$  (см., например, рис. К2.0) будет направлен вдоль  $BO_2$ , а вектор  $\bar{a}_B^\tau$  – перпендикулярно  $BO_2$  в любую сторону. Числовые значения  $a_A^\tau$ ,  $a_A^n$  и  $a_{BA}^n$  определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть  $a_A^\tau = 0$  или  $a_A^n = 0$ , если точка  $A$  движется прямолинейно).

Значение  $a_B^n$  вычисляется по формуле  $a_B^n = V_B^2 / \rho = V_B^2 / l$ , где  $l$  – радиус окружности  $O_2B$ , а  $V_B$  определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (57) остаются неизвестными только значения  $a_B^\tau$  и  $a_{BA}^\tau$  и они, как и в рассмотренном примере, находятся проецированием обеих частей равенства (57) на две взаимно-перпендикулярные оси.

Найдя  $a_B^\tau$ , можем вычислить искомое ускорение  $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$ . Величина  $a_{BA}^\tau$  служит для нахождения  $\varepsilon_{AB}$  (как в рассмотренном примере).

**Примечание 2.** Если требуется определить ускорение точки  $D$  звена  $AB$  (рис. К2г), то следует воспользоваться векторным равенством:

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{DA}^\tau + \bar{a}_{DA}^n.$$

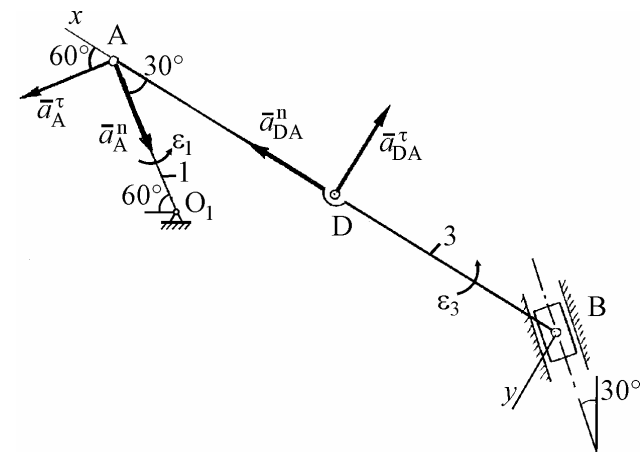


Рисунок К2г Пример определения ускорения точки  $D$  звена  $AB$

Ускорение точки  $D$  найдем по его проекциям на координатные оси, спроецировав приведенное выше векторное равенство на эти оси:

$$a_{Dx} = a_A^{\tau} \cdot \cos 60^{\circ} - a_A^n \cdot \cos 30^{\circ} + a_{DA}^n,$$

$$a_{Dy} = a_A^{\tau} \cdot \sin 60^{\circ} + a_A^n \cdot \sin 30^{\circ} + a_{DA}^{\tau}.$$

$$\text{Здесь } a_{DA}^n = \omega_3^2 \cdot AD, \quad a_{DA}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot AD.$$

Вектор  $\bar{a}_{DA}^n$  направлен от точки  $D$  к точке  $A$ , а вектор  $\bar{a}_{DA}^{\tau}$  перпендикулярен к  $DA$ .

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2}.$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?
2. Какими уравнениями задается плоскопараллельное движение?
3. Как по уравнениям движения плоской фигуры найти скорость полюса и угловую скорость вращения вокруг полюса?
4. Как определить скорость любой точки плоской фигуры?
5. Сформулируйте теорему о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.
6. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как найти положение МЦС в различных случаях?
7. Сформулируйте теорему об ускорениях точек плоской фигуры.

### 2.3. Составное (сложное) движение точки

Составное движение точки – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или нескольких движениях.

Рассмотрим тело  $A$  (рис. 28), которое свободно движется по отношению к неподвижной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Пусть точка  $M$  совершает движение по поверхности этого тела. Через произвольную точку  $O$  движущегося тела проведем неизменно связанные с этим телом оси  $x, y, z$ . Систему осей  $Oxuz$  называют подвижной системой отсчета.

Движение точки  $M$  по отношению к неподвижной системе отсчета называют *абсолютным движением точки*.

Абсолютное движение точки характеризуется изменением радиуса-вектора  $\bar{r}$  по модулю и направлению.

Скорость и ускорение точки в абсолютном движении называют абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки и обозначают  $\bar{V}_{\text{абс}}$  и  $\bar{a}_{\text{абс}}$ .

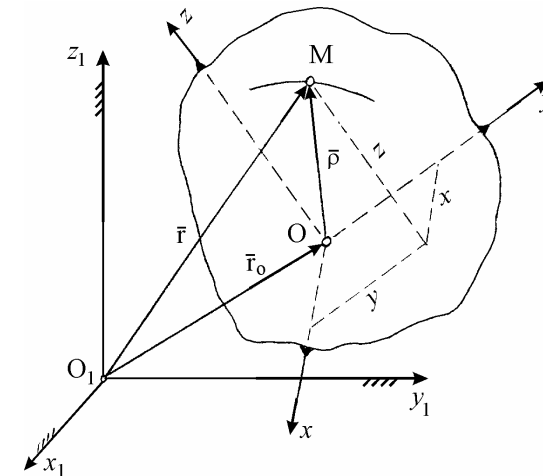


Рисунок 28 Составное движение точки

Движение точки  $M$  по отношению к подвижной системе отсчета называют *относительным движением точки*. Относительное движение характеризуется изменением только радиуса-вектора  $\bar{\rho}$  при неизменных радиусах-векторах  $\bar{r}$  и  $\bar{r}_0$ . В этом случае координаты  $x, y, z$  точки  $M$  в подвижной системе отсчета будут изменяться.

Скорость и ускорение точки в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением и обозначают  $\bar{V}_{\text{отн}}$  и  $\bar{a}_{\text{отн}}$ .

Движение подвижной системы отсчета  $Oxuz$  и неизменно связанного с ней тела  $A$  по отношению к неподвижной системе отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  является для точки  $M$  *переносным движением*. Переносное движение точки  $M$  характеризуется изменением радиусов-векторов  $\bar{r}$  и  $\bar{r}_0$  по модулю и направлению при неизменном только по модулю радиусе-векторе  $\bar{\rho}$ .

Скорость и ускорение той точки тела  $A$ , с которой в данный момент совпадает точка  $M$ , называют *переносной скоростью и переносным ускорением точки  $M$*  и обозначают  $\bar{V}_{\text{пер}}$  и  $\bar{a}_{\text{пер}}$ .

Желая изучить относительное движение точки, следует мысленно остановить переносное движение. Если необходимо изучить переносное движение точки, то надо мысленно остановить относительное движение и рассмотреть далее движение точки по формулам кинематики точки в абсолютном движении.

Если точка  $M$  участвует в составном движении, то имеют место следующие теоремы:

абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей точки, т. е.

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}};$$

абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова (поворотного) ускорений этой точки, т. е.

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}},$$

или

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Кориолисово ускорение  $\vec{a}_{\text{кор}}$  равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки, т. е.

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot (\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{V}_{\text{отн}}).$$

Следовательно, модуль этого ускорения

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot \omega_{\text{пер}} \cdot V_{\text{отн}} \cdot \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\vec{V}_{\text{отн}}$ .

Чтобы найти направление кориолисова ускорения  $\vec{a}_{\text{кор}}$  точки  $M$ , достаточно в точке  $M$  построить векторы  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\vec{V}_{\text{отн}}$  и восстановить из этой точки перпендикуляр к плоскости, в которой лежат эти векторы  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  и  $\vec{V}_{\text{отн}}$ . Вектор  $\vec{a}_{\text{кор}}$  направлен по этому перпендикуляру так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора, видел поворот вектора  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  на угол  $\alpha$  против хода часовой стрелки до совмещения его с вектором  $\vec{V}_{\text{отн}}$  (рис. 29).

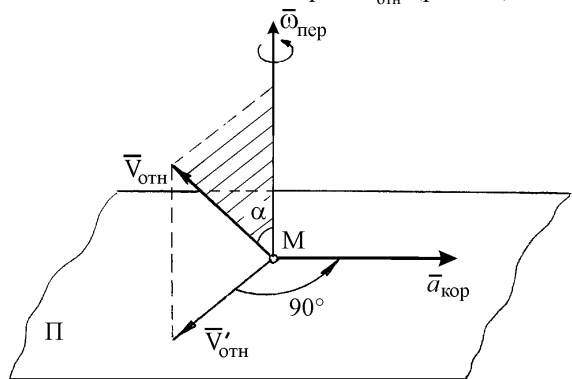


Рисунок 29 Направление кориолисова ускорения  $\vec{a}_{\text{кор}}$

Направление вектора  $\vec{a}_{\text{кор}}$  можно определить и другим способом (правило Н. Е. Жуковского).

Проведем через точку  $M$  плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную к вектору  $\vec{\omega}_{\text{пер}}$  и спроецируем относительную скорость  $\vec{V}_{\text{отн}}$  на эту плоскость. Если полученную проекцию  $\vec{V}'_{\text{отн}}$  повернем в плоскости  $\Pi$  на  $90^\circ$  вокруг точки  $M$  в направлении переносного вращения, то получим направление вектора  $\vec{a}_{\text{кор}}$ .

**ЗАДАЧА К3:** Прямоугольная пластина (рис. К3.0–К3.4) или круглая пластина радиуса  $R = 60$  см (рис. К3.5–К3.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi = f_1(t)$ , заданному в табл. К3. Положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. К3.0, К3.1, К3.2, К3.5, К3.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку  $O$  (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К3.3, К3.4, К3.7, К3.8, К3.9 ось вращения  $O_1O$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой  $BD$  (рис. К3.0–К3.4) или по окружности радиуса  $R$  (рис. К3.5–К3.9) движется точка  $M$ ; закон ее относительного движения, т.е. зависимость  $s = AM = f_2(t)$  ( $s$  выражено в сантиметрах,  $t$  – в секундах), задан в табл. К3 отдельно для рис. К3.0–К3.4 и для рис. К3.5–К3.9; там же даны размеры  $b$  и  $l$ . На рисунках точка  $M$  показана в положении, при котором  $s = AM > 0$  (при  $s < 0$  точка  $M$  находится по другую сторону от точки  $A$ ).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 1$  с.

**Указания.** Задача К3 – на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем произвести все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка  $M$  на пластине в момент времени  $t_1 = 1$  с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис. К3.5–К3.9, при решении задачи не подставлять числового значения  $R$ , пока не будут определены положение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 1$  с и угол между радиусами  $CM$  и  $CA$  в этот момент.

Таблица К3

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. К3.0–К3.4		Для рис. К3.5–К3.9	
		$b$ , см	$s = AM = f_2(t)$	$l$	$s = AM = f_2(t)$
0	$4 \cdot (t^2 - t)$	12	$50 \cdot (3 \cdot t - t^2) - 64$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (4t^2 - 2t^3) / 3$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40 \cdot (3 \cdot t^2 - t^4) - 32$	$4R/3$	$\pi \cdot R \cdot (2t^2 - t^3) / 2$

2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80 \cdot (t^2 - t) + 40$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (2t^2 - 1) / 3$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (3t - t^2) / 6$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3) - 48$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t) / 3$
5	$2 \cdot (t^2 - t)$	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t) / 6$
6	$5t - 4t^2$	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	$3R/4$	$\pi \cdot R \cdot (t^3 - 2t^2) / 2$
7	$15t - 3t^3$	8	$60 \cdot (t - t^3) + 24$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (t - 5t^2) / 6$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	$R$	$\pi \cdot R \cdot (3t^2 - t) / 3$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40 \cdot (t - 2t^3) - 40$	$4R/3$	$\pi \cdot R \cdot (t - 2t^2) / 2$

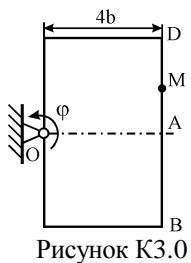


Рисунок К3.0

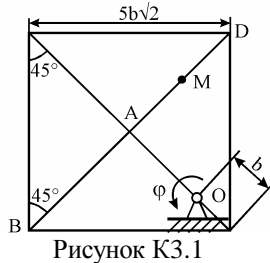


Рисунок К3.1

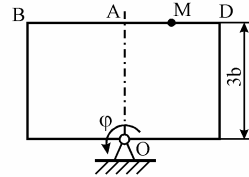


Рисунок К3.2

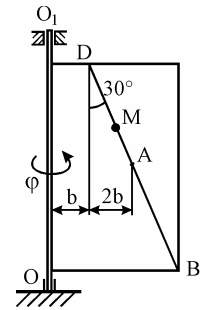


Рисунок К3.3

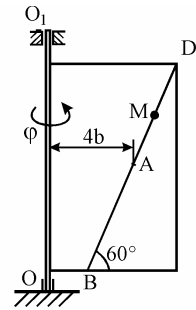


Рисунок К3.4

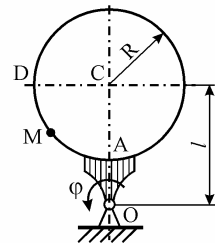


Рисунок К3.5

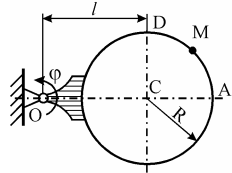


Рисунок К3.6

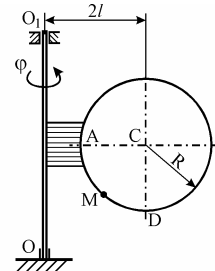


Рисунок К3.7

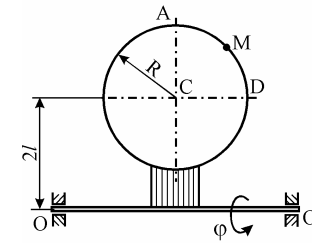


Рисунок К3.8

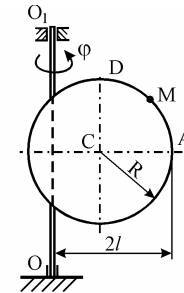


Рисунок К3.9

Рассмотрим два примера решения этой задачи.

**ПРИМЕР К3а:** Пластина  $OEAB_1D$  ( $OE = OD$ , рис. К3а) вращается вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости пластины, по закону  $\varphi = f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. К3а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса  $R$  движется точка  $B$  по закону  $s = AB = f_2(t)$  (положительное направление отсчета  $s$  – от  $A$  к  $B$ ).

Дано:  $R = 0,5$  м,  $\varphi = t^2 - 0,5t^3$ ,  $s = \pi R \cdot \cos(\pi/3)$  ( $\varphi$  – в радианах,  $s$  – в метрах,  $t$  – в секундах). Определить:  $V_{абс}$  и  $a_{абс}$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $B$  как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость  $\vec{V}_{абс}$  и абсолютное ускорение  $\vec{a}_{абс}$  точки найдутся по формулам:

$$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_{отн},$$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор},$$

(58)

где, в свою очередь,

$$\vec{a}_{отн} = \vec{a}_{отн}^{\tau} + \vec{a}_{отн}^n, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n.$$

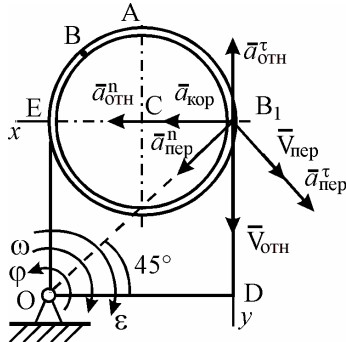


Рисунок К3а Схема к примеру К3

Определим все входящие в равенства (58) величины.

1. *Относительное движение.* Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R \cdot \cos(\pi/3). \quad (59)$$

Сначала установим, где будет находиться точка  $B$  на дуге окружности в момент времени  $t_1$ . Полагая в уравнении (59)  $t_1 = 2$  с, получаем

$$s = \pi R \cdot \cos(2\pi/3) = -0,5\pi R.$$

Тогда

$$\angle CAB = \frac{s_1}{R} = -0,5\pi.$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка  $B$  в момент  $t_1 = 2$  с находится справа от точки  $A$ . Изображаем ее на рис. К3а в этом положении (точка  $B_1$ ).

Теперь находим числовые значения  $V_{отн}$ ,  $a_{отн}^{\tau}$ ,  $a_{отн}^n$ :

$$V_{отн} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi/3),$$

$$a_{отн}^{\tau} = \dot{V}_{отн} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cdot \cos(\pi/3), \quad a_{отн}^n = \frac{V_{отн}^2}{\rho_{отн}} = \frac{V_{отн}^2}{R},$$

где  $\rho_{отн}$  – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности  $R$ . Для момента  $t_1 = 2$  с, учитывая, что  $R = 0,5$  м, получаем

$$V_{отн} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42 \text{ м/с},$$

$$a_{отн}^{\tau} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cdot \cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{отн}^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м/с}^2.$$

(60)

Знаки показывают, что вектор  $\vec{a}_{отн}^{\tau}$  направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\vec{V}_{отн}$  – в противоположную сторону; вектор  $\vec{a}_{отн}^n$  направлен к центру  $C$  окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К3а.

2. *Переносное движение.* Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = t^2 - 0,5t^3$ . Найдем сначала угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1,5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t;$$

и при  $t_1 = 2$  с

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}.$$

(61)

Знаки указывают, что в момент  $t_1 = 2$  с направления  $\omega$  и  $\varepsilon$  противоположны направлению положительного отсчета угла  $\varphi$ ; отметим это на рис. К3а.

Для определения  $\vec{V}_{пер}$  и  $\vec{a}_{пер}$  находим сначала расстояние  $h_1 = OB_1$  точки  $B_1$  от оси вращения  $O$ . Из рисунка видно, что  $h_1 = 2R \cdot \sqrt{2} = 1,41$  м. Тогда

в момент времени  $t_1 = 2$  с, учитывая равенства (61), получим

$$V_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 2,82 \text{ м/с},$$

$$a_{пер}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2, \quad a_{пер}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2.$$

(62)

Изображаем на рис. К3а векторы  $\vec{V}_{пер}$  и  $\vec{a}_{пер}^{\tau}$  с учетом направлений  $\omega$  и  $\varepsilon$  и вектор  $\vec{a}_{пер}^n$  (направлен к оси вращения).

3. *Кориолисово ускорение.* Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле  $a_{кор} = 2 \cdot |V_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{V}_{отн}$  и осью вращения (вектором  $\vec{\omega}$ ). В нашем случае этот угол равен  $90^\circ$ , так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор  $\vec{V}_{отн}$ . Численно в момент времени  $t_1 = 2$  с, так как в этот момент  $|V_{отн}| = 1,42$  м/с и  $|\omega| = 2$  с<sup>-1</sup>, получим

$$a_{кор} = 5,68 \text{ м/с}^2.$$

(63)



Направление  $\vec{a}_{\text{кор}}$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского: так как вектор  $\vec{V}_{\text{отн}}$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на  $90^\circ$  в направлении  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки. Изображаем  $\vec{a}_{\text{кор}}$  на рис. К3а. (Иначе направление  $\vec{a}_{\text{кор}}$  можно найти, учтя, что  $\vec{a}_{\text{кор}} = 2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{отн}})$ ).

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (58) векторов найдены и для определения  $V_{\text{абс}}$  и  $a_{\text{абс}}$  остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. *Определение  $V_{\text{абс}}$ .* Проведем координатные оси  $B_1x_1y_1$  (см. рис. К3а) и спроектируем почленно обе части равенства  $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}$  на эти оси.

Получим для момента времени  $t_1 = 2$  с:

$$V_{\text{абс}x} = V_{\text{отн}x} + V_{\text{пер}x} = 0 - |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = -1,99 \text{ м/с},$$

$$V_{\text{абс}y} = V_{\text{отн}y} + V_{\text{пер}y} = |V_{\text{отн}}| + |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ = 3,41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{абс}x}^2 + V_{\text{абс}y}^2} = 3,95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между  $\vec{V}_{\text{отн}}$  и  $\vec{V}_{\text{пер}}$  равен  $45^\circ$ , значение  $V_{\text{абс}}$  можно еще определить по формуле

$$V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2|V_{\text{отн}}| \cdot |V_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ} = 3,95 \text{ м/с}.$$

5. *Определение  $a_{\text{абс}}$ .* По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

(64)

Для определения  $a_{\text{абс}}$  спроецируем обе части равенства (64) на проведенные оси  $B_1x_1y_1$ . Получим:

$$a_{\text{абс}x} = a_{\text{отн}}^n + a_{\text{кор}} + a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ - |a_{\text{пер}}^\tau| \cdot \cos 45^\circ,$$

$$a_{\text{абс}y} = a_{\text{пер}}^n \cdot \cos 45^\circ + |a_{\text{пер}}^\tau| \cdot \cos 45^\circ - |a_{\text{отн}}^n|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени  $t_1 = 2$  с, найдем, что в этот момент

$$a_{\text{абс}x} = 9,74 \text{ м/с}^2; a_{\text{абс}y} = 7,15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}x}^2 + a_{\text{абс}y}^2} = 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $V_{\text{абс}} = 3,95 \text{ м/с}$ ,  $a_{\text{абс}} = 12,08 \text{ м/с}^2$ .

**ПРИМЕР К3б:** Треугольная пластина  $ADE$  вращается вокруг оси  $z$  по закону  $\varphi = f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. К3б дуговой стрелкой). По гипотенузе  $AD$  движется точка  $B$  по закону  $s = AB = f_2(t)$ ; положительное направление отсчета  $s$  – от  $A$  к  $D$ .

Дано:  $\varphi = 0,1 \cdot t^3 - 2,2 \cdot t$ ;  $s = AB = 2 + 15 \cdot t - 3 \cdot t^2$ ; ( $\varphi$  – в радианах,  $s$  – в сантиметрах,  $t$  – в секундах). Определить:  $V_{\text{абс}}$  и  $a_{\text{абс}}$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $B$  как сложное, считая ее движение по прямой  $AD$  относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость  $\vec{V}_{\text{абс}}$  и абсолютное ускорение  $\vec{a}_{\text{абс}}$  найдутся по формулам:

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}}, \quad \vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}},$$

(65)

где, в свою очередь,  $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{пер}}^n$ .

Определим все входящие в равенство (65) величины.

1. *Относительное движение* – это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2,$$

(66)

поэтому

$$V_{\text{отн}} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a_{\text{отн}} = \dot{V}_{\text{отн}} = -6.$$

В момент времени  $t_1 = 2$  с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \quad V_{\text{отн}} = 3 \text{ см/с}, \quad a_{\text{отн}} = -6 \text{ см/с}^2.$$

(67)

Знаки показывают, что вектор  $\vec{V}_{\text{отн}}$  направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\vec{a}_{\text{отн}}$  – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. К3б.

2. *Переносное движение.* Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = 0,1 \cdot t^3 - 2,2 \cdot t$ .

Найдем угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:  $\omega = \dot{\varphi} = 0,3t^2 - 2,2$ ;  $\varepsilon = \dot{\omega} = 0,6t$  и при  $t_1 = 2$  с,

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1,2 \text{ с}^{-2}.$$

(68)

Знаки указывают, что в момент  $t_1 = 2$  с направление  $\varepsilon$  совпадает с направлением положительного отсчета угла  $\varphi$ , а направление  $\omega$  ему противоположно; отметим это на рис. К3б соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние  $h_1$  точки  $B_1$  от оси вращения  $z$ :  $h_1 = AB_1 \cdot \sin 30^\circ = 10$  см. Тогда в момент  $t_1 = 2$  с, учитывая равенства (68), получаем:

$$V_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с},$$

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 \cdot h_1 = 10 \text{ см/с}^2.$$

(69)

Изобразим на рис. К36 векторы  $\vec{V}_{\text{пер}}$  и  $\vec{a}_{\text{пер}}^{\tau}$  (с учетом знаков  $\omega$  и  $\varepsilon$ ) и  $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ ; направлены векторы  $\vec{V}_{\text{пер}}$  и  $\vec{a}_{\text{пер}}^{\tau}$  перпендикулярно плоскости  $ADE$ , а вектор  $\vec{a}_{\text{пер}}^n$  – по линии  $B_1C$  к оси вращения.

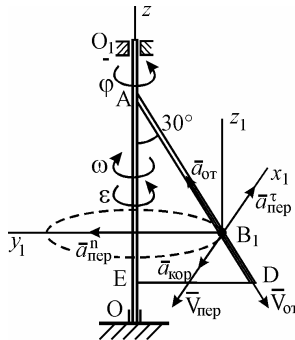


Рисунок К36 Направление векторов скоростей и ускорений к примеру К36

3. *Кориолисово ускорение.* Так как угол между вектором  $\vec{V}_{\text{отн}}$  и осью вращения (вектором  $\vec{\omega}$ ) равен  $30^\circ$ , то численно в момент времени  $t_1 = 2$  с

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot |\vec{V}_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2.$$

(70)

Направление  $\vec{a}_{\text{кор}}$  найдем по правилу Н. Е. Жуковского. Для этого вектор  $\vec{V}_{\text{отн}}$  спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору  $\vec{a}_{\text{пер}}^n$ ) и затем эту проекцию повернем на  $90^\circ$  в сторону  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора  $\vec{a}_{\text{кор}}$ . Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор  $\vec{V}_{\text{пер}}$  (см. рис. К36).

4. *Определение  $V_{\text{абс}}$ .* Так как  $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{пер}} + \vec{V}_{\text{отн}}$ , а векторы  $\vec{V}_{\text{пер}}$  и  $\vec{V}_{\text{отн}}$  взаимно перпендикулярны, то  $V_{\text{абс}} = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2}$ ; в момент времени  $t_1 = 2$  с  $V_{\text{абс}} = 10,44 \text{ см/с}$ .

5. *Определение  $a_{\text{абс}}$ .* По теореме о сложении ускорений

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

(71)

Для определения  $a_{\text{абс}}$  проведем координатные оси  $B_1xyz_1$  и вычислим проекции  $\vec{a}_{\text{абс}}$  на эти оси. Учтем при этом, что векторы  $\vec{a}_{\text{пер}}^{\tau}$  и  $\vec{a}_{\text{кор}}$  лежат на оси  $x_1$ , а векторы  $\vec{a}_{\text{пер}}^n$  и  $\vec{a}_{\text{отн}}$  расположены в плоскости  $B_1xyz_1$ , т. е. в плоскости пластины. Тогда, проецируя обе части равенства (71) на оси  $B_1xyz_1$  и учитывая одновременно равенства (67), (69), (70), получаем для момента времени  $t_1 = 2$  с:

$$a_{\text{абс } x} = |a_{\text{пер}}^{\tau}| - a_{\text{кор}} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс } y} = a_{\text{пер}}^n + |a_{\text{отн}}| \cdot \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс } z} = |a_{\text{отн}}| \cdot \cos 30^\circ = 5,20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение  $a_{\text{абс}}$ :

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс } x}^2 + a_{\text{абс } y}^2 + a_{\text{абс } z}^2} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } V_{\text{абс}} = 10,44 \text{ см/с}, \quad a_{\text{абс}} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под составным (сложным) движением точки?
2. Что называется абсолютным, переносным и относительным движением точки?
3. Сформулируйте, что такое переносная скорость и переносное ускорение точки.
4. В чем заключается теорема об абсолютной скорости точки, совершающей составное движение.
5. Сформулируйте теорему об ускорениях точки в составном движении.
6. Как определить модуль и направление кориолисова ускорения точки?
7. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Изд-во «Лань», 1998. 736 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов / С. М. Тарг. М.: Высш. шк., 1995. 416 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. М.; СПб.: Изд-во «Лань», 2001. 768 с.

4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика: Учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. СПб: Политехника, 1995. 670 с.