ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА

Учебное пособие

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ. ПРОЕКЦИЯ СИЛЫ НА ОСЬ И ПЛОСКОСТЬ. РАВНОДЕЙСТВУЮЩАЯ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

1.1. Основные сведения из теоретического курса

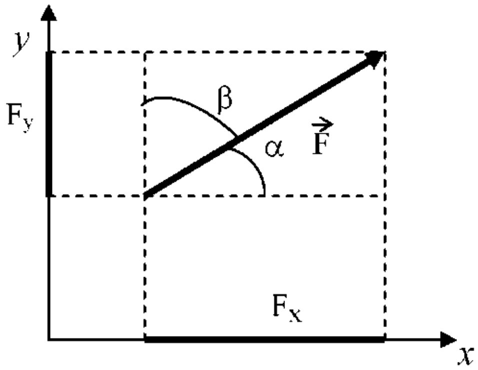
Статика решает следующие задачи:

– разработка способов замены произвольной системы сил другой, более простой системой;

– определение условий равновесия произвольной системы сил.

Одним из первичных понятий статики является **сила** – мера механического действия одного тела на другое. Сила – векторная величина, которая имеет направление, модуль и точку приложения. Не нарушая состояния тела, в статике силу можно переносить в любую точку вдоль линии ее действия.

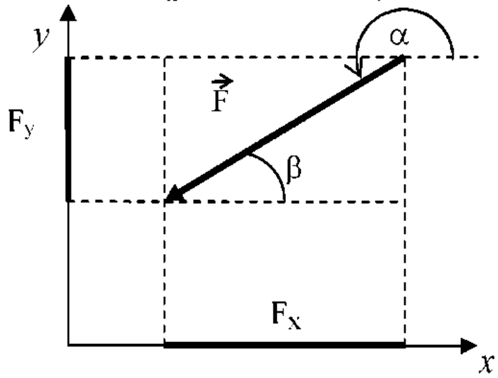
Проекцией силы $\vec{F}$ на ось называют **скалярную** величину, равную произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и направлением силы $\vec{F}$ (рис. 1.1, 1.2).



$F_x = F\cos\alpha$

$F_y = F\cos\beta = F\sin\alpha$

Рис. 1.1



$F_x = F\cos\alpha = -F\cos\beta$

$F_y = F\sin\beta$

Рис. 1.2

Проекция силы на плоскость (рис. 1.3) – **векторная** величина, которая определяется следующим образом:

$$|\vec{F}_{XY}| = |\vec{F}|\cos\alpha,$$

где α – угол между силой и ее проекцией на плоскость ***XOY***.

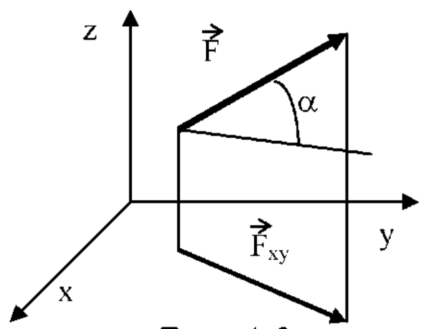


Рис. 1.3

Сложение сил производится по правилу параллелограмма (рис.1.4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,,$$

где α – угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

В том случае, когда линии действия этих сил пересекаются, $\vec{R}$ является их **равнодействующей**, то есть силой, действие которой на тело эквивалентно действию данной системы сил.

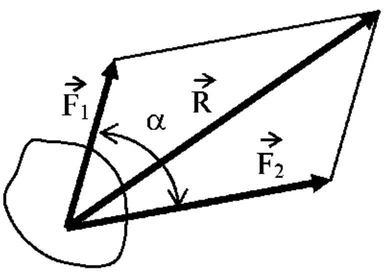


Рис. 1.4

Сразу заметим, что далеко не любая система сил может быть заменена равнодействующей, то есть воздействие такой системы на тело не может быть эквивалентно действию только одной силы. О способах и случаях приведения произвольной системы сил речь пойдет в разделе 5 настоящего пособия.

Правило параллелограмма позволяет складывать любое количество сил, приложенных в одной точке твердого тела, то есть равнодействующая $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$. Сложение сил можно осуществить:

– геометрически, построением векторного силового многоугольника, откладывая каждый следующий вектор от конца предыдущего; замыкающий вектор и будет равнодействующей (рис. 1.5);

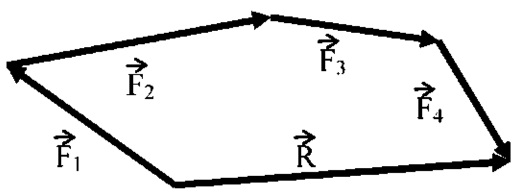


Рис. 1.5

– аналитически, сложением проекций всех сил на выбранные координатные оси:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{xk}\,; \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{yk}\,; \quad R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{zk}\,,$$

тогда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.

Если равнодействующая системы сил, приложенных к твердому телу, равна нулю, то говорят, что такая система сил находится в равновесии. Геометрически условие $\vec{R} = 0$ означает, что силовой многоугольник заданных сил – замкнутый.

Моментом силы $\vec{F}$ (рис. 1.6) относительно точки называют вектор, численно равный произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы и направленный перпендикулярно плоскости, образуемой силой и точкой, в ту сторону, откуда «вращение» плоскости, совершаемое силой, будет видно против хода часовой стрелки.

Величина и направление векторного момента полностью определяются соотношением

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра О на линию действия силы (рис. 1.6).

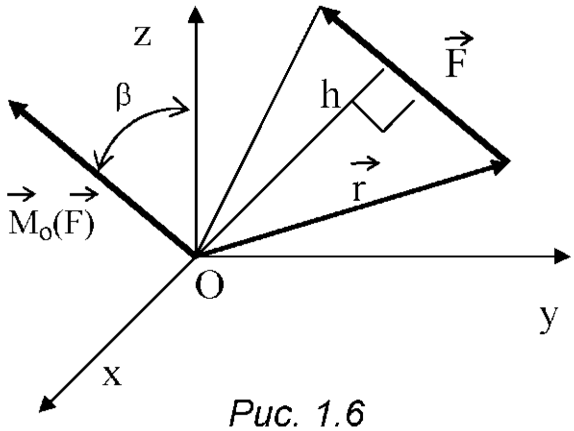


Рис. 1.6

Действительно, модуль векторного произведения

$$M_0(\vec{F}) = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h,$$

где h – кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы («плечо»). Радиус-вектор, сила и момент образуют «правую тройку».

Проекцию $\vec{M}_0$ на ось, проходящую через точку О, называют осевым моментом. Например,

$$M_z(\vec{F}) = np_z\, \vec{M}_O = M_O \cos\beta,$$

где β – угол между осью и векторным моментом (см. рис. 1.6).

Если известны F_x, F_y, F_z – проекции силы на оси координат, *x, y, z* – координаты любой точки на линии действия силы, то момент силы относительно точки можно вычислить, используя правило раскрытия векторного произведения:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x).$$

Тогда

$$M_X = yF_Z - zF_Y, \qquad M_Y = zF_X - xF_Z, \qquad M_Z = xF_Y - yF_X$$

– моменты силы $\vec{F}$ относительно координатных осей.

При рассмотрении плоской системы сил будем вычислять так называемый алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки:

$$M_0(F) = \pm F \cdot h.$$

Знак плюс соответствует повороту тела под действием силы $\vec{F}$ против часовой стрелки, знак минус – по ходу часовой стрелки.

1.2. Решение задач

Задача 1.1. На твердое тело с центром в точке *О* (рис. 1.7) действуют силы $F_1 = 1$ ***Н***, $F_2 = 2$ ***Н***, $F_3 = 3$ ***Н***, $F_4 = 4$ ***Н***.

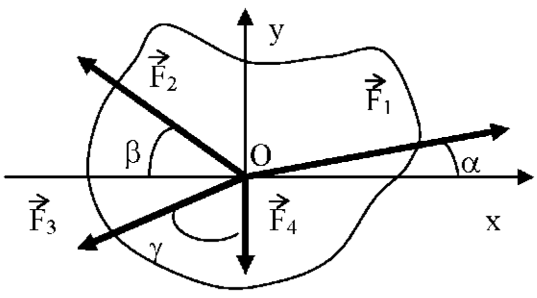


Рис. 1.7

Определить величину равнодействующей этих сил, если известны углы $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

Решение

Для решения этой задачи целесообразно воспользоваться аналитическим способом, то есть спроецировать все силы на две взаимно перпендикулярные оси и найти проекции равнодействующей на эти оси:

$$R_x = \sum F_{kx} = F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos\beta - F_3 \sin\gamma,$$

$$R_x = 1\cdot 1{,}7 - 2\cdot 0{,}7 - 3\cdot 1{,}7 = -4{,}8\ (H);$$

$$R_y = \sum F_{xy} = F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin\beta - F_3 \cos\gamma - F_4,$$

$$R_y = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}7 - 3\cdot 0{,}5 - 4 = -3{,}2\ (H).$$

Тогда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4{,}8^2 + 3{,}2^2} = 5{,}74\ (H).$$

Задача 1.2

Определить угол между равнодействующей $\vec{R}$ сил $\vec{F}_2 = 3\sqrt{5}\vec{j}$ и $\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 2\sqrt{5}\vec{j}$ и положительным направлением оси ***OX***.

Решение

Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ заданы проекциями на координатные оси:

$$F_{1x} = 3;\ F_{1y} = 2\sqrt{5};\ F_{2x} = 0;\ F_{2y} = 3\sqrt{5}.$$

Найдем сначала равнодействующую аналитическим способом:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = 3 + 0 = 3\ (H);$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\ (H).$$

Тогда $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{3^2 + \left(5\sqrt{5}\right)^2} = 11{,}6\ (H)$.

Затем определим направляющий косинус

$$\cos\left(\vec{R}, \vec{i}\right) = \frac{R_x}{R} = \frac{3}{11{,}6} = 0{,}26.$$

Искомый угол составит 75°.

Задача 1.3

Равнодействующая плоской системы сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ равна нулю. Определить модуль силы $\vec{F}_1$, если известны $F_{2x} = 4H$, $F_{2y} = 7H$, $F_{3x} = -5H$, $F_{3y} = -5H$, $F_{4x} = -2\ H$, $F_{4y} = 0.$

Решение

Если равнодействующая $\vec{R} = 0$, то и ее проекции на координатные оси $R_x = R_y = 0.$ Следовательно, суммы проекций всех сил системы также равны нулю, то есть

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{xk} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 0, \\ R_y = \sum F_{yk} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0. \end{cases}$$

Подставив известные значения, решим систему относительно F_{1x} и F_{1y}:

$$\begin{cases} F_{1x} = -F_{2x} - F_{3x} - F_{4x} = -4 + 5 + 2 = 3\,(H); \\ F_{1y} = -F_{2y} - F_{3y} - F_{4y} = -7 + 5 - 0 = -2\,(H). \end{cases}$$

Модуль искомой силы

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}{}^2 + F_{1y}{}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,(H).$$

Задача 1.4

Сила ***F = 420 Н***, приложенная к точке ***А***, лежит в плоскости **XOY** (рис. 1.8). Определить момент силы относительно точки ***О***, если $x_A = 0{,}2$ ***м***, $y_A = 0{,}3$ ***м***, $\alpha = 30°$.

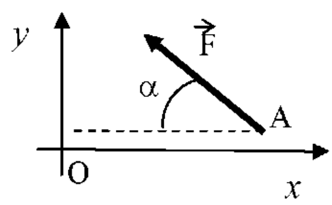


Рис. 1.8

Решение

В общем виде

$$\vec{M}_0 = \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_e - yF_x\right).$$

Поскольку сила лежит в плоскости ***XOY***, ее проекция на ось ***OZ*** и координата ***z*** равны нулю ***(F_Z = 0, z = 0)***. Поэтому предыдущее выражение упрощается:

$$\vec{M}_0 = \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right),$$

где

$$F_x = -F\cos\alpha = -420\cdot 0{,}85 = -357\ (H),$$
$$F_y = F\sin\alpha = 420\cdot 0{,}5 = 210\,(H).$$

Таким образом,

$$|M_0| = |xF_y - yF_x| = -0{,}2\cdot 210 - 0{,}3\cdot(-357) = 151\,(\text{Нм}).$$

Задача 1.5

Изогнутая балка с длинами участков ***a, b, c (м)*** жестко заделана в точке ***A*** и нагружена силой ***F***, действующей под углом α (рис. 1.9).

Определить момент силы ***F*** относительно точки ***A***.

Решение

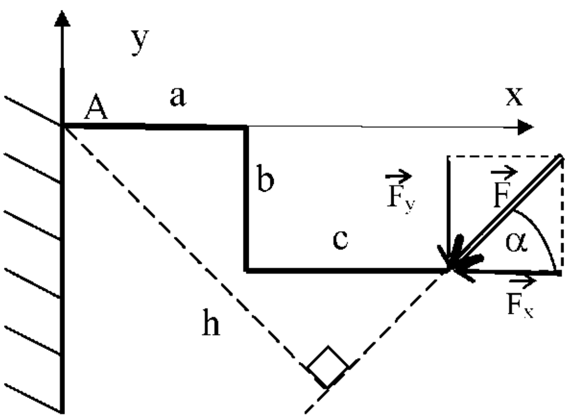


Рис. 1.9

Алгебраический момент силы можно вычислить по формуле

$$M_A(F) = -F\cdot h.$$

Однако при определении расстояния ***h*** пришлось бы прибегнуть к громоздким геометрическим построениям. Поэтому в данном случае целесообразно разложить эту силу на две составляющие $\vec{F}_x, \vec{F}_y$, параллельные осям ***x*** и ***y***, то есть

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y,$$

и векторный момент силы вычислить как сумму моментов этих составляющих:

$$M_A(\vec{F}) = M_A(\vec{F}_x) + M_A(\vec{F}_y).$$

Модули составляющих

$$|\vec{F}_x| = F\cos\alpha, \quad |\vec{F}_y| = F\sin\alpha.$$

Окончательно с учетом правила определения знаков моментов получим

$$M_A(F) = -|F_x|\cdot b - |F_y|(a+c) = -F\cos\alpha\cdot b - F\sin\alpha\cdot(a+c).$$

1.3. Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает статика?
2. Дайте определение материальной точки и абсолютно твердого тела.
3. Что такое сила, чем она характеризуется?
4. Перечислите аксиомы статики и их суть.
5. В чем состоит правило параллелограмма сил?
6. Как определить проекции силы на ось?
7. Что такое равнодействующая системы сил?
8. Имеет ли значение порядок расположения сил при построении силового многоугольника?
9. В каком случае силовой многоугольник замкнутый?
10. Дайте определение векторного момента силы относительно точки. Каковы способы его вычисления?
11. Изменится ли момент силы относительно точки при переносе силы вдоль линии действия?
12. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

2. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Основные сведения из теоретического курса

В этом разделе рассматривается действие на тело системы сил, расположенных в одной плоскости (например **ХОУ**). Линии действия этих сил могут пересекаться в одной точке (сходящиеся силы), быть параллельными или располагаться произвольно.

Система сил называется уравновешенной, если она не выводит покоящееся свободное тело из равновесия. Для этого необходимо и достаточно, чтобы проекции всех сил на координатные оси, лежащие в плоскости действия сил, равнялись нулю и была равна нулю алгебраическая сумма моментов тех же сил относительно произвольной точки этой плоскости:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил можно записать в двух других формах:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0,$

где ось ***X*** не должна быть перпендикулярна прямой ***AB***;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} M_C(\vec{F}_k) = 0,$

где точки ***A, B, C*** не должны лежать на одной прямой.

Если на тело действует плоская система сходящихся сил, условия равновесия примут вид

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0 .$$

В случае действия параллельных сил условие можно записать в виде двух уравнений. Например, если силы параллельны оси **У**, то

$$\sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_A(\vec{F}_k) = 0 .$$

Алгоритм решения задач следующий:

1. Определить все виды внешних нагрузок, действующих на твердое тело: сосредоточенные силы, распределенную нагрузку, пары сил.
2. Несвободное твердое тело сделать свободным. Для этого следует применить принцип освобождаемости: отбросить связи, заменив их реакциями.
3. Проверить статическую определимость задачи (количество неизвестных параметров для произвольной плоской системы сил не должно превышать трех).
4. Если задача статически определима, то выбрать одну из форм записи уравнений равновесия, записать их и решить относительно неизвестных параметров (о решении статически неопределимых задач речь пойдет ниже).
5. Провести проверку решения. Для этого, например, записать уравнение моментов относительно какой-либо другой точки, не использованной при составлении уравнений равновесия.

2.2. Решение задач

Задача 2.1

Цилиндр весом ***G = 200 Н*** (рис. 2.1) удерживается нитью ***ОА*** на идеальной гладкой наклонной плоскости ***МК***, составляющей с горизонтом угол $\beta = 45°$, и оказывает на плоскость давление ***Q = 60 Н***.

Определить угол α и силу натяжения нити T.

Решение

На твердое тело (цилиндр) действуют следующие силы: вес $\vec{G}$, реакция наклонной плоскости $\vec{N}$ (причем $\vec{N} = -\vec{Q}$) и натяжение нити $\vec{T}$. Эти силы образуют систему сходящихся сил.

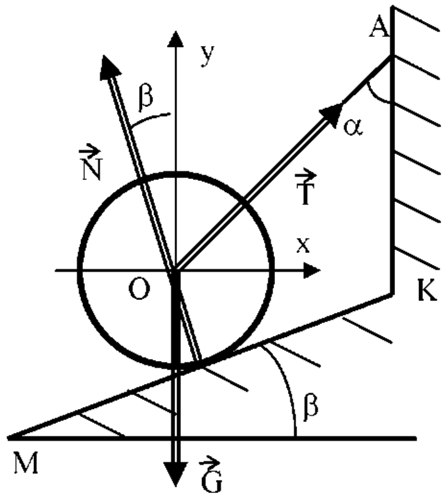


Рис. 2.1

Решим задачу двумя способами.

1-й способ (аналитический). Уравнения равновесия

$$\sum F_{xk} = 0, \quad \sum F_{yk} = 0$$

будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} T\sin\alpha - N\sin\beta = 0; \\ T\cos\alpha + N\cos\beta - G = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим значение силы

$$T = N\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

и подставим его во второе. Тогда

$$N\sin\beta\, ctg\alpha + N\cos\beta - G = 0.$$

Отсюда

$$ctg\,\alpha = \frac{G - N\cos\beta}{N\sin\beta} = \frac{200 - 60\cdot 0{,}7}{60\cdot 0{,}7} \approx 3{,}8,$$

$$\alpha = arcctg\,3{,}8 = 15^\circ.$$

Натяжение нити будет

$$T = 60\,\frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 60\,\frac{0{,}7}{0{,}26} \approx 163\ (H).$$

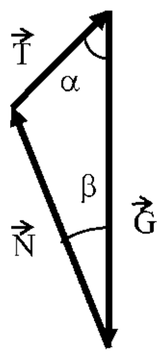


Рис. 2.2

2-й способ (графический, рис. 2.2). Изобразим в масштабе известный по величине и направлению вектор силы $\vec{G}$. Из его конца под углом β отложим в том же масштабе вектор $\vec{N}$. Отрезок, соединяющий конец вектора $\vec{N}$ и начало вектора $\vec{G}$, и будет искомой величиной вектора $\vec{T}$. Измерив длину этого отрезка и умножив ее на масштаб, найдем численное значение силы ***T.***

Это же значение можно найти и по теореме косинусов:

$$T = \sqrt{G^2 + N^2 - 2G \cdot N\cos\beta} \approx 163\ (H).$$

Угол α определим либо прямым измерением на чертеже, либо по теореме синусов $\frac{N}{sin\alpha} = \frac{T}{sin\beta}$, откуда $sin\alpha = N\frac{sin\beta}{T} = 0{,}26$ и $\alpha = 15^\circ$.

Задача 2.2

Груз весом ***G = 3 000 Н*** (рис. 2.3) подвешен с помощью каната, перекинутого через блок ***А*** и намотанного на лебедку ***D***. Определить усилия в стержнях ***АВ*** и ***АС***. Углы указаны на рисунке. Размерами блоков пренебречь.

Решение

Применив принцип освобождаемости от связей, покажем силы, действующие на блок ***А***. Это натяжение нитей ($\vec{T}$ и $\vec{G}$) и усилия в стержнях ***АВ*** и ***АС*** (S_1 и S_2). Эти силы образуют систему сходящихся сил. Обозначим на рис. 2.3 углы α и β и определим их из геометрических соображений: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

<u>1-й способ</u> (аналитический). Уравнения равновесия

$$\sum F_{xk} = 0, \quad \sum F_{yk} = 0$$

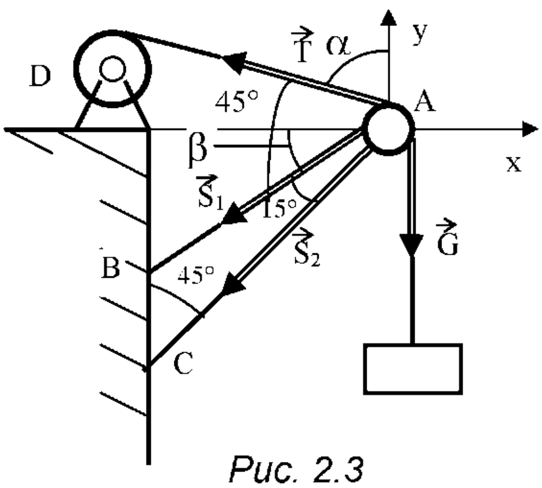


Рис. 2.3

с учетом того, что $T = G$ (это одна и та же нить), будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} -T\sin 75^\circ - S_1\cos 30^\circ - S_2\sin 45^\circ = 0; \\ T\cos 75^\circ - S_1\sin 30^\circ - S_2\cos 45^\circ - G = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$S_1 = S_2 = -1840\ (H).$$

Знак минус означает, что показанные на рис. 2.3 силы S_1 и S_2 направлены в противоположную сторону, то есть стержни ***АВ*** и ***АС*** сжаты.

2-й способ (графический, рис. 2.4). Построение силового многоугольника начнем с изображения в масштабе известного по величине и направлению вектора силы $\vec{G}$.

Из его конца под углом *15° (90 - α,* см. рис. 2.3*)* к горизонту отложим в том же масштабе вектор $\vec{T}$. Из начала вектора $\vec{G}$ и конца вектора $\vec{T}$ проведем прямые, параллельные ***AC*** и ***AB*** соответственно. Точка их пересечения отсечет на прямых отрезки, пропорциональные величинам искомых векторов. Измерив длины отрезков и умножив их на масштаб, найдем численные значения $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$.

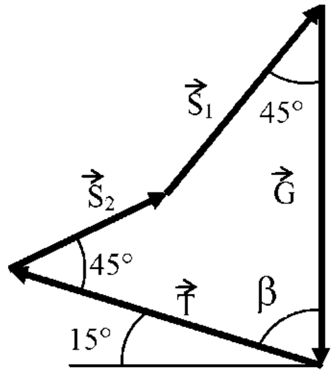


Рис. 2.4

Задача 2.3

На Г-образную балку, закрепленную посредством жесткой заделки (рис. 2.5), действуют следующие нагрузки: момент ***M = 4 Н·м,*** сосредоточенная сила ***P = 10 Н,*** распределенная нагрузка с интенсивностью ***q = 1,5 Н/м.*** Известны расстояния ***a = 2 м; b = 3 м.***

Определить реакцию жесткой заделки – $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A$.

Решение

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой $\vec{Q}$, которая является равнодействующей системы параллельных сил и, поскольку $q = const$, проходит через середину участка ***CD***. Величина этой силы

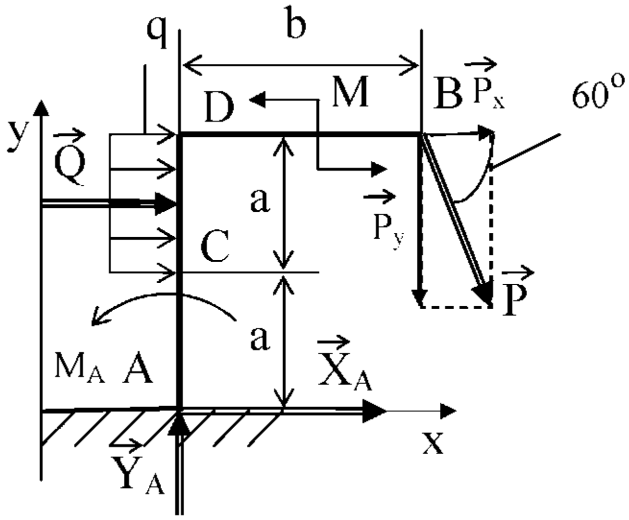


Рис. 2.5

$$Q = q \cdot a = 1{,}5 \cdot 2 = 3\ (Н).$$

Заменим жесткую заделку соответствующими реакциями: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ – составляющими силы и ***M_A*** – так называемым реактивным моментом.

Составим уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{xk} = X_A + Q + P\cos 60^\circ = 0; \\ \sum F_{yk} = Y_A - P\sin 60^\circ = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = M_A + M - Q \cdot 3 - P\cos 60^\circ \cdot 2a - P\sin 60^\circ \cdot b = 0. \end{cases}$$

Подставим в эти уравнения известные величины:

$$X_A + 3 + 10 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$Y_A - 10 \cdot 0{,}85 = 0;$$

$$M_A + 4 - 3 \cdot 3 - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 4 - 10 \cdot 0{,}85 \cdot 3 = 0.$$

Отсюда

$$X_A = -8\ H, \quad Y_A = 8{,}5\ H, \quad M_A = 50{,}5\ \text{Нм}.$$

Задача 2.4

На двухопорную балку (рис. 2.6) действуют распределенные нагрузки с интенсивностью q_{max} **= 20 Н/м**; длины участков ***l* = 0,3 м.**

Определить реакцию опоры ***A*** **(*R_A*)**.

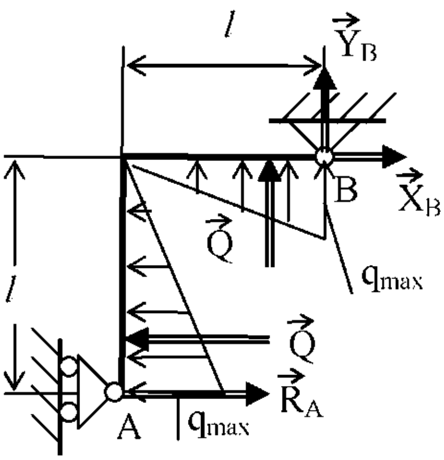


Рис. 2.6

Решение

Покажем реакции шарнира ***B*** $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B)$ и катка ***A*** $(\vec{R}_A)$.

Заменим распределенные нагрузки на участках АС и ВС равнодействующими силами

$$Q = ½(q_{max} \cdot l) = ½(20 \cdot 0{,}3) = 3\ (H).$$

В данном случае линии их действия расположены на расстоянии **1/3*l*** от точек ***A*** и ***B***, где $q = q_{max}$.

Для определения неизвестной R_A достаточно составить только одно уравнение

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -Q \cdot \frac{1}{3} l - Q \cdot \frac{2}{3} l + R_A \cdot l = 0,$$

решив которое, найдем, что $R_A = Q = 3\ H$.

Задача 2.5

Однородный стержень ***CD*** (рис. 2.7) весом ***G = 600 Н*** и длиной **4 м** опирается концом ***С*** на гладкий пол, а промежуточной точкой ***В*** – на выступ высотой ***h = 3 м***, образуя с вертикалью угол α = ***30°***. Стержень удерживается в таком положении нерастяжимой нитью ***АС***, параллельной полу.

Определить реакции связей в точках ***В*** и ***С*** и силу натяжения нити ***Т***.

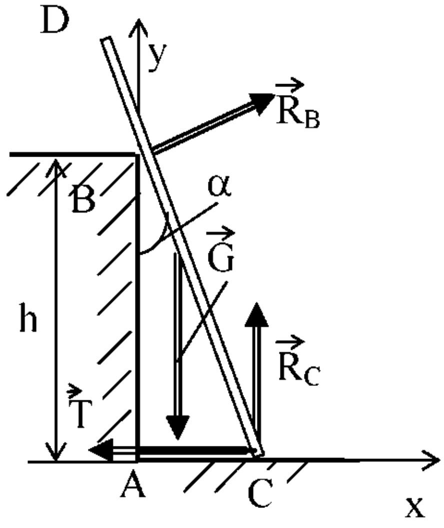


Рис. 2.7

Решение

Изобразим на рисунке действующие на стержень силы: вес ***G***, реакции связей R_B, R_C и натяжение нити ***Т***.

Составим уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{xk} = R_B \cos 30^\circ - T = 0; \\ \sum F_{yk} = R_B \sin 30^\circ + R_c - G = 0; \\ \sum M_c(\overline{F}_k) = -R_B \cdot BC + G\dfrac{CD}{2}\sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Подставим в эти уравнения известные величины:

$$\begin{cases} R_B \cdot 0{,}85 - T = 0; \\ R_B \cdot 0{,}5 + R_c - 600 = 0; \\ -R_B \cdot 2\sqrt{3} + 60 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 0, \end{cases}$$

где

$$BC = \frac{h}{\cos 30^\circ} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ (\text{м}).$$

Решив систему уравнений, найдем

$$T = 150\ Н,\ R_B = 173\ Н,\ R_C = 513\ Н.$$

Задача 2.6

Однородный стержень ***АВ*** длиной l и весом ***Р = 100 Н*** прикреплен к стене шарниром ***А*** (рис. 2.8, а) и удерживается под углом ***45°*** к вертикали с помощью троса, перекинутого через блок ***С*** и несущего груз ***G.*** Ветвь ***ВС*** троса образует с вертикалью угол ***30°***. В точке ***D*** (***AD = 0,75*** l) приложена сила ***Q = 200 Н***.

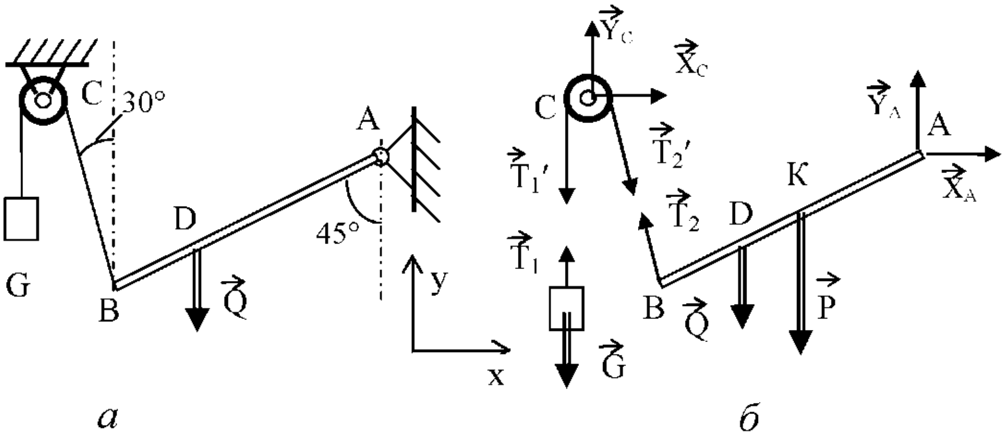


Рис. 2.8

Определить реакции шарнира ***A*** и вес груза ***G***.

Решение

На стержень ***АВ*** действуют силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ (причем АК = 0,5l), реакции шарнира А – $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и натяжение троса $\vec{T}_2$ (рис. 2.8, б). Покажем, что натяжение троса равно весу груза ***G***. Для этого рассмотрим отдельно равновесие груза ***G***, блока ***C*** и стержня ***AB***. На рис. 2.8, б показаны действующие на них силы.

Так как груз находится в равновесии, то

$$\sum F_{yk} = -G_1 + T_1 = 0,$$

откуда $G = T_1$.

Для блока ***C*** составим уравнение моментов с учетом того, что по аксиоме о равенстве действия противодействию

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1 \text{ и } \vec{T}_2 = -\vec{T}_2':$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = T_1'r - T_2'r = 0,$$

где ***r*** – радиус блока.

Следовательно, $T_2' = T_1' = T_1 = G$. Поскольку $T_2 = T_2'$, натяжение нити равно весу груза, то есть $T_2 = G$.

Рассмотрим равновесие стержня ***AB*** под действием плоской системы сил:

$$\begin{cases} \sum F_{xk} = X_A - T \sin 30^\circ = 0; \\ \sum F_{yk} = Y_A - Q - P + T \cos 30^\circ = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = P\dfrac{l}{2}\sin 45^\circ + Q\dfrac{3}{4}l \sin 45^\circ - Tl \sin 75^\circ = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$\boldsymbol{X_A = 73\ H,\ Y_A = 173\ H,\ G = 146\ H.}$$

Задача 2.7

На консольную балку ***АВ*** (рис. 2.9, а) действуют пара сил с моментом ***М = 2 Н·м,*** сосредоточенная сила ***Р = 4 Н,*** распределенная нагрузка ***q = 1,5 Н/м.*** Размеры в метрах указаны на рисунке.

Определить реакцию жесткой заделки.

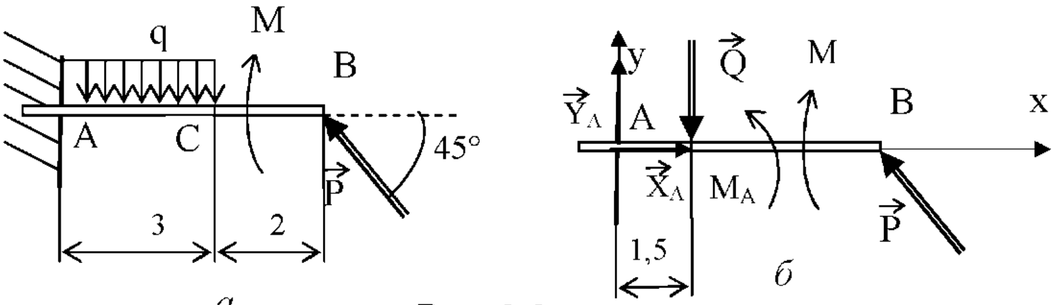


Рис. 2.9

Решение

Распределенная нагрузка эквивалентна сосредоточенной силе

$$Q = q \cdot l = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5\ (H),$$

приложенной в середине отрезка ***АС***.

Жесткую заделку в точке ***А*** заменим неизвестными реакциями $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и ***М***$_A$. Действующие на балку силы представляют собой плоскую систему, поэтому можно составить три уравнения равновесия для определения трех искомых величин (задача статически определима):

$$\begin{cases} \sum F_{xk} = X_A - P \cos 45^\circ = 0; \\ \sum F_{yk} = Y_A - Q + P \sin 45^\circ = 0; \\ \sum M_A(F_k) = M_A - Q \cdot 1{,}5 - P \cdot 5 \sin 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем

$$\boldsymbol{X_A = 2{,}8\ H, \quad Y_A = 1{,}7\ H, \quad M_A = -\ 5{,}35\ H \cdot м.}$$

2.3. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите уравнение равновесия для произвольной плоской системы сил.
2. Запишите уравнения равновесия для плоской системы: а) параллельных сил; б) сходящихся сил.
3. Перечислите виды нагрузок, действующих на твердое тело.
4. Чем характеризуется система распределенных сил?
5. Как определить равнодействующую системы распределенных сил?
6. Что такое пара сил?
7. Чем характеризуется пара сил? Каковы свойства пар?
8. Сформулируйте принцип освобождаемости от связей.
9. Как направлены реакции наиболее распространенных связей: гладкой поверхности, подвижного и неподвижного шарниров, жесткой заделки, идеального стержня, нити?
10. Какова последовательность действий при определении опорных реакций?
11. Как установить, является ли задача статистически определимой?
12. Как проверить результаты расчетов?
13. Какое тело называется несвободным? Приведите примеры.
14. Что такое реакция связи? Назовите основные типы связей и укажите направления их реакций.

3. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

3.1. Основные сведения из теоретического курса

Система тел, или составная конструкция, – это совокупность нескольких твердых тел, которые свободно опираются одно на другое (рис. 3.1, а) или соединяются между собой узлами (например, шарнирами (рис. 3.1, б), скользящими муфтами (рис. 3.1, в) и т.п.).

Силы взаимодействия в узлах сочленения называют **внутренними** ($\vec{F}^i$). На основании аксиомы о равенстве действия противодействию главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю. Все остальные силы, действующие на конструкцию, являются **внешними** ($\vec{F}^e$).

Статически определимые системы тел следует рассчитывать по алгоритму, описанному в подразд. 2.1. Если после освобождения от внешних связей и замены их реакциями количество неизвестных параметров для плоской системы сил больше трех, то задача является статически неопределимой.

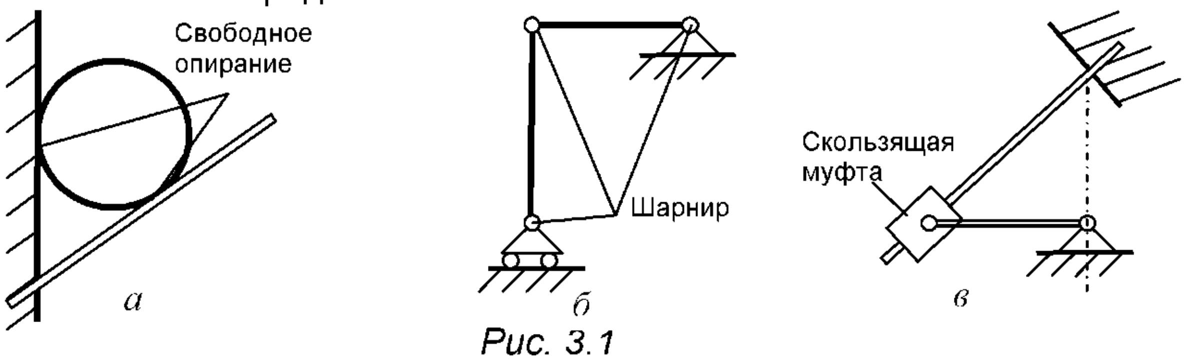


Рис. 3.1

В этом случае для расчета реакций опор, а также для определения усилий в узлах сочленения используют метод сечений. В основу метода положено следующее утверждение: если вся конструкция уравновешена, то и каждая ее часть находится в равновесии. Это означает, что уравнения равновесия можно составлять и для системы в целом, и для каждой ее отдельной части.

Следует заметить, что при рассмотрении равновесия всей системы внутренние усилия в местах соединения ее частей не входят в уравнения, поскольку их главный вектор и главный момент равны нулю. Для каждой из частей эти усилия становятся внешними силами и могут быть определены из уравнений равновесия.

Расчет составной конструкции, состоящей из N тел, проводят двумя способами: либо рассматривают уравнения равновесия для каждого тела в отдельности, либо сначала записывают уравнения равновесия для всей системы в целом, а затем – еще для N–1 тел, входящих в ее состав.

3.2. Решение задач

Задача 3.1

Укажите на рис. 3.2 номер статистически определимой конструкции.

Решение

Каждая конструкция состоит из двух частей – стержней ***AB*** и ***BC***, соединенных шарниром ***B***.

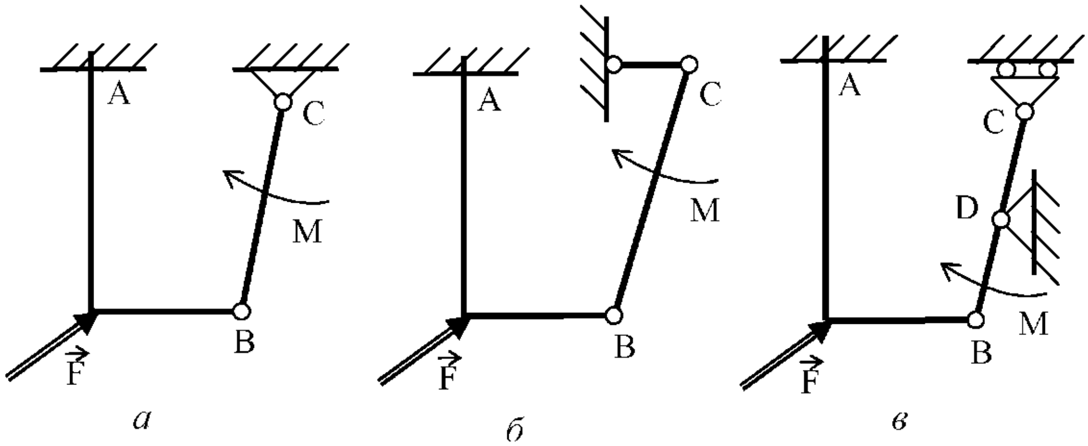


Рис. 3.2

Применив принцип освобождаемости от связей, убедимся в том, что на каждую конструкцию действует произвольная плоская система сил (рис. 3.3).

В случае (а) – это заданные сила $\vec{F}$, момент M, реакции жесткой заделки A (две проекции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и момент $\boldsymbol{M_A}$) и шарнира **C** ($\vec{X}_C, \vec{Y}_C$).

В случае (б) – это сила $\vec{F}$, момент M, реакции жесткой заделки A ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, $\boldsymbol{M_A}$) и идеального стержня **C** ($\vec{X}_C$).

В случае (в) – это сила $\vec{F}$, момент M, реакции катка **C** ($\vec{Y}_C$), жесткой заделки A ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, $\boldsymbol{M_A}$) и шарнира D ($\vec{X}_D, \vec{Y}_D$).

При составлении уравнений равновесия для системы в целом (три уравнения) получим, что в каждом варианте количество неизвестных реакций связей превышает количество уравнений.

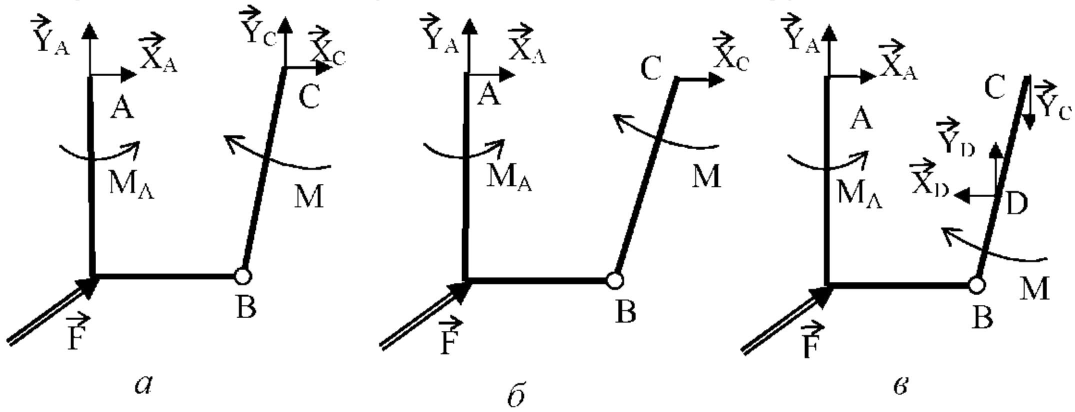


Рис. 3.3

Применение метода сечений дает возможность составить уравнения равновесия для стержней AB и BC в отдельности (всего 6 уравнений). Но при разделении конструкции на части добавятся новые неизвестные – реакции в шарнире **В** ($\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$). Чтобы решить вопрос о статической определимости, выясним, в каком случае количество уравнений не меньше количества неизвестных.

Очевидно, что этому условию удовлетворяет конструкция (б) – из шести составленных уравнений можно определить все неизвестные параметры ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, $\vec{X}_C$).

Задача 3.2

Конструкция (рис. 3.4, а) состоит из двух частей, соединенных шарниром в точке **С**, и нагружена силой ***Р = 10 Н***, распределенной нагрузкой с интенсивностью ***q = 1 Н/м*** и моментом ***М = 5 Н·м.***
Известно, что ***а = 2 м, в = 3 м,*** угол $\alpha = 60°$.

Определить реакции связей и внутренние усилия в точке **С.**

Решение

Заменим опоры в точках **А** и **В** неизвестными реакциями связей: $\vec{R}_A$ (каток) и $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$, M_B (жесткая заделка). При составлении уравнений равновесия для всей системы получим, что количество неизвестных превышает количество уравнений. Воспользуемся методом сечений и разделим конструкцию в шарнире **С** на части **АС** и **ВС.** К каждому стержню приложим заданные усилия, реакции внешних связей и силы взаимодействия с отделенной частью.

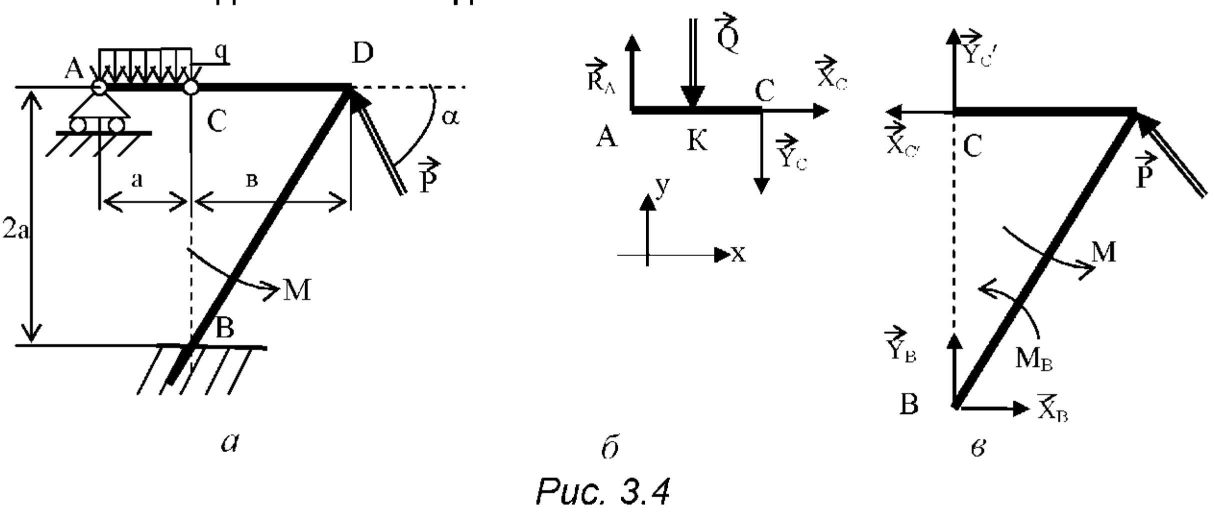


Рис. 3.4

На **АС** (рис. 3.4, б) действуют равнодействующая распределенной нагрузки ***Q (АК = 0,5а)***, реакция катка **А** ($\vec{R}_A$) и силы взаимодействия с отброшенной частью **ВС** ($\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$).

На **BC** (рис. 3.4, в) действуют сила $\vec{P}$, момент ***M***, реакции жесткой заделки ***B*** ($\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, M_B) и силы взаимодействия с отброшенной частью **AC** ($\vec{X}'_C, \vec{Y}'_C$). Отметим, что $\vec{X}'_C = -\vec{X}_C$, $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$.

Запишем уравнения равновесия для каждой из частей:

$$AC: \begin{cases} \sum F_{xk} = -X_c = 0, \\ \sum F_{yk} = R_A - Q - Y_c = 0, \\ \sum M_c(\overline{F}_k) = Q\dfrac{a}{2} - R_A \cdot a = 0, \end{cases}$$

где $Q = q \cdot a = 1 \cdot 2 = 2$ ***(Н)***;

$$BC: \begin{cases} \sum F_{kx} = X_c + X_B - P\cos\alpha = 0, \\ \sum F_{ky} = Y_c + Y_B + P\sin\alpha = 0, \\ \sum M_c(\overline{F}_k) = M + M_{b(p)} + X_B 2a + Pb\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Подставим в уравнения известные величины:

$$\begin{cases} -X_c = 0, \\ R_A - Y_c - 2 = 0, \\ 2 \cdot 0{,}5 - R_A = 0, \\ X_c + X_B - 10 \cdot 0{,}5 = 0, \\ Y_c + Y_B + 10 \cdot 0{,}85 = 0, \\ 5 + M_{B(p)} + 2X_B \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 0{,}85 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем

$X_C = 0$, $R_A = 1$ ***Н***, $Y_C = -1$ ***Н***, $X_B = 5$ ***Н***, $Y_B = -7{,}66$ ***Н***, $M_B = -51$ ***Н·м***.

Задача 3.3

Однородная балка **AC** весом P_1 удерживается в горизонтальном положении распоркой **BD** (**AC** = **BD** = l) весом P_2 (рис. 3.5, а). В точке **C** к балке **AC** приложена сила ***Q = 100 Н***. **BD** – однородный стержень.

Известно, что ***AE = CE, BF = DF***, $P_1 = P_2 = P = 40$ ***Н***, а ***A, B, D*** – шарниры.

Определить реакции шарниров ***A*** и ***B*** ($\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$).

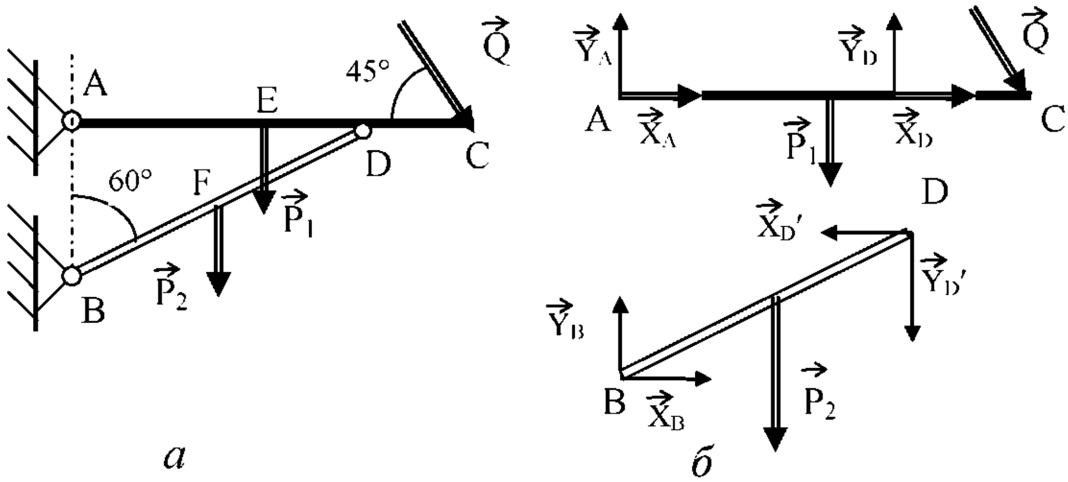


Рис. 3.5

Решение

Реакции шарниров ***A*** и ***B*** представим в виде составляющих $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ и $\vec{R}_B = \vec{X}_B + \vec{Y}_B$.

Поскольку для системы в целом можно составить три уравнения равновесия, а неизвестных – четыре ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$), воспользуемся методом сечений: разделим конструкцию на части ***AC*** и ***BD*** и приложим действующие на них силы (рис. 3.5, б).

Поскольку внутренние усилия в шарнире ***C*** находить не требуется, запишем три уравнения равновесия для всей системы и одно уравнение ($\sum M_D(\vec{F}_k) = 0$) для ***BD***:

$$\sum F_{xk} = X_A + X_B - Q\cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{yk} = Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - Q\sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -P_1\frac{l}{2} - Q\sin 45^\circ l + X_B l\cos 45^\circ - P_2\frac{l}{2}\sin 60^\circ;$$

$$\sum M_D(\vec{F}_k) = X_B l\cos 60^\circ - Yl\sin 60^\circ + P_2\frac{l}{2}\sin 60^\circ = 0.$$

Решив эту систему, найдем

$$X_A = -287\ H,\quad Y_A = 6\ H,\quad X_B = 216\ H,\quad Y_B = 145\ H.$$

Тогда реакции шарниров ***A*** и ***B*** будут

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{287^2 + 6^2} = 287{,}1\ (H),$$

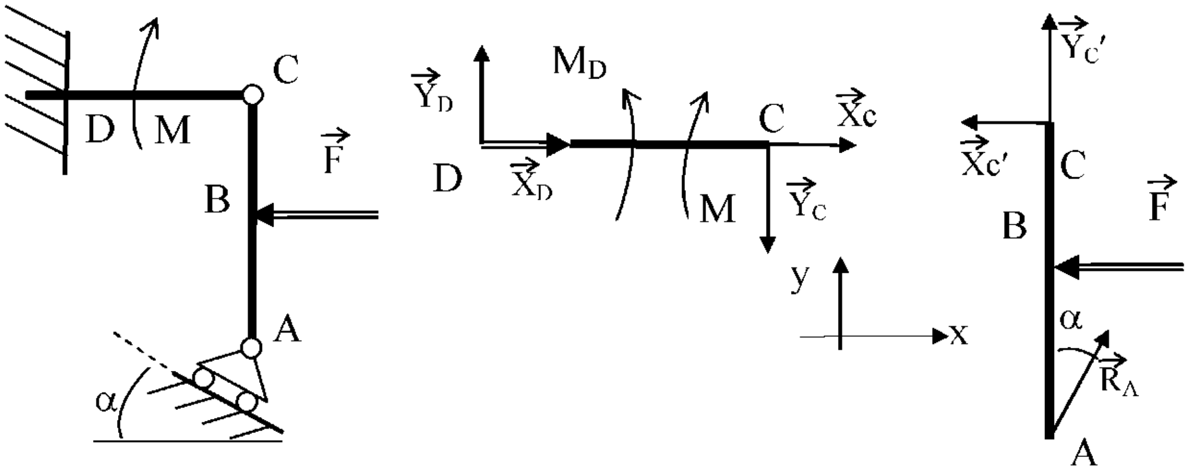
$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{216^2 + 145^2} = 260{,}2\ (H).$$

Задача 3.4

Составная конструкция нагружена силой ***F = 3 кН*** и парой сил с моментом ***М = 8 Нм*** (рис. 3.6, а).

Известно, что ***α = 30°, АВ = ВС = а (м).***

Определить реакцию опоры ***А*** ($\vec{R}_A$).



а *б*

Рис. 3.6

Решение

Если рассмотреть систему в целом, то количество неизвестных (реакции катка $\vec{R}_A$ и жесткой заделки $\vec{X}_D, \vec{Y}_D$, ***M$_D$***) превышает количество уравнений. Поэтому разделим конструкцию на части ***АС*** и ***DC*** и приложим к ним действующие силы (см. рис. 3.6, б). Очевидно, что для определения искомой реакции ***R$_A$*** достаточно составить одно уравнение равновесия для стержня ***АС***:

$$\sum M_c\left(\vec{F}_k\right) = -Fa + R_A \cdot 2a\sin\alpha = 0.$$

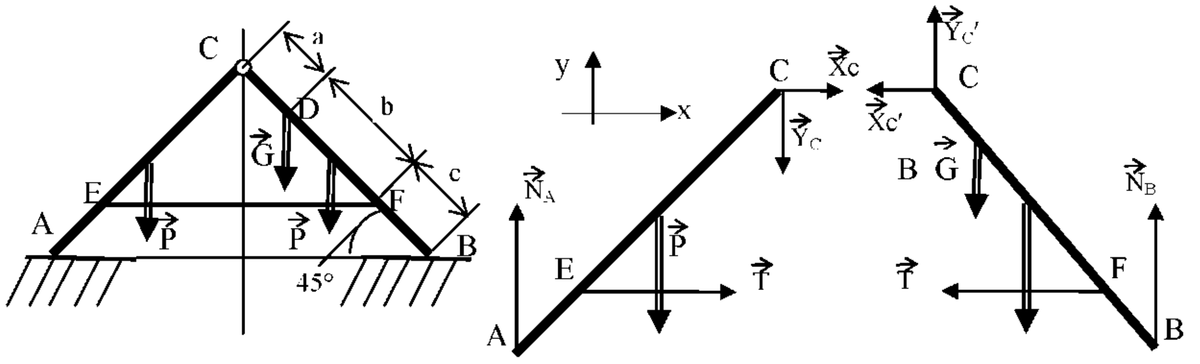
Отсюда

$$R_A = \frac{F}{2\sin\alpha} = \frac{3}{2\cdot 0{,}5} = 3 \ \ (\text{кН}).$$

Задача 3.5

На гладком горизонтальном полу стоит стремянка, состоящая из частей ***АС*** и ***СВ*** длиной $AC = BC = 3$ ***м*** и весом $P = 120$ ***Н*** каждая, соединенных шарниром С и тросом ***EF*** (***EF*** параллелен ***АВ***), причем расстояния $AE = BF = c = 1$ ***м.*** Центры тяжести частей ***АС*** и ***СВ*** находятся в их середине. В точке ***D*** на расстоянии $a = 0{,}6$ ***м*** стоит человек весом $G = 720$ ***Н***. Лестницы стремянки связаны между собой нерастяжимой нитью (рис. 3.7, а).

Определить реакции пола, шарнира и натяжение троса.



а *б*

Рис. 3.7

Решение

Рассмотрим равновесие стремянки в целом. Реакции гладкой плоскости в точках ***А*** и ***В*** направлены вертикально вверх и вместе с заданными силами $\vec{P}$ и $\vec{G}$ образуют систему параллельных сил. Для определения неизвестных $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ запишем два уравнения равновесия (в данном случае силы параллельны оси ***у***, поэтому их проекции на ось ***х*** будут равны нулю):

$$\sum F_{yk} = N_A + N_B - 2P - G = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = P\frac{BC}{2}\cos 45^\circ + G \cdot BD\cos 45^\circ +$$

$$+ P\left(BC + \frac{AC}{2}\right)\cos 45^\circ - N_A(AC + BC)\cos 45^\circ = 0.$$

Отсюда найдем реакции пола: $N_A = 408$ ***Н***, $N_B = 552$ ***Н***.

Чтобы найти усилия в шарнире С и натяжение троса, воспользуемся методом сечений (рис. 3.7, б) и рассмотрим равновесие одного из стержней, например ***АС***:

$$\sum F_{xk} = T + X_C = 0;$$

$$\sum F_{yk} = N_A - Y_C - P = 0;$$

$$\sum M_C = -N_A \cdot AC\cos 45^\circ + P\frac{AC}{2}\cos 45^\circ + T \cdot CE\sin 45^\circ = 0.$$

Решив эту систему, найдем

$$X_C = \pm 522\ Н, \quad Y_C = \pm 288\ Н, \quad T = 522\ Н.$$

Задача 3.6

Однородный стержень ***AB*** весом ***P*** закреплен шарнирно в точке ***A*** и опирается на цилиндр ***C*** радиусом ***r*** и весом ***Q = 2P*** (рис. 3.8, а). Цилиндр расположен на горизонтальном полу и соприкасается с вертикальной стенкой.

Известно, что ***AB = 3r***, ***α = 60°.***

Определить силы давления стержня на шарнир ***A*** и цилиндра на пол, если все поверхности гладкие.

Решение

Освободим систему от связей в точках ***A*** $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A)$, ***D*** $(\vec{N}_D)$, ***E*** $(\vec{N}_E)$. Отметим, что согласно закону Ньютона о равенстве действия противодействию силы давления стержня ***AB*** на шарнир и цилиндра на гладкие поверхности пола и стенки равны реакциям этих связей, но направлены в противоположные стороны. Найдем эти реакции.

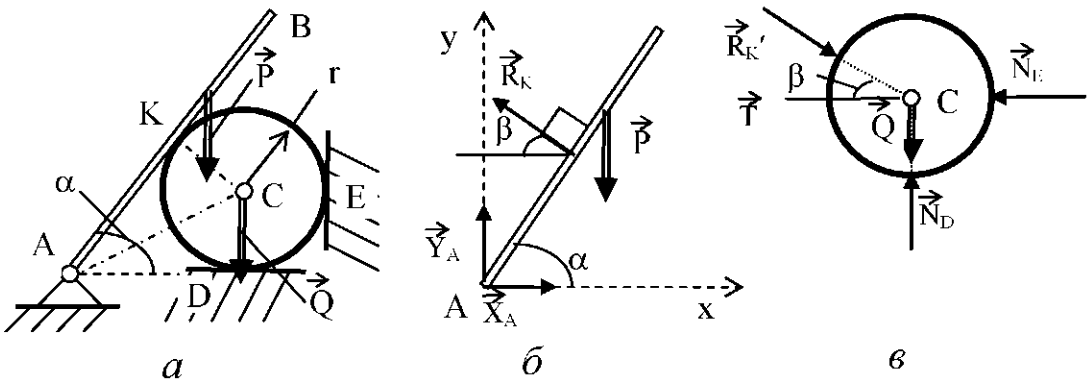


Рис. 3.8

Воспользуемся методом сечений и рассмотрим равновесие каждой части в отдельности (рис. 3.8, б, в). Обратим внимание на такие моменты:

– в точке касания стержня и цилиндра $\vec{R}_k \perp AB$, так как соприкасающиеся поверхности гладкие;

– на стержень действует произвольная плоская, а на цилиндр – сходящаяся система сил;

– по условию задачи $\vec{N}_E$ определять не требуется, поэтому для цилиндра достаточно составить одно уравнение равновесия.

Учитывая вышесказанное, запишем:

– для цилиндра

$$\sum F_{yk} = N_D - R_k \sin\beta - Q = 0;$$

– для стержня ***AB***

$$\sum F_{kx} = X_A - R_k \cos\beta = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P + R_k \sin\beta = 0,$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -P\frac{3r}{2}\cos 60^\circ + R_k AK = 0.$$

Из геометрических соображений $\beta = 30°$, так как треугольник ***АКС*** прямоугольный и угол $KAC = 30°$, тогда $AK = r \cdot ctg30°$.

Подставив известные величины, получим:

$$X_A - R_K \cos 30^\circ = 0;$$

$$Y_A - P + R_K \sin 30^\circ = 0;$$

$$-P\frac{3r}{2}\cos 60^\circ + R_K r \cdot ctg30^\circ = 0;$$

$$N_D - R_k \sin 30^\circ - 2P = 0.$$

Решив эту систему, найдем

$X_A = 0{,}375P$ *Н*, $У_A = 0{,}79P$ *Н*, $N_D = 1{,}8$ *Н*.

Соответственно давление стержня на шарнир ***А*** $X'_A = -0{,}375P$ *Н*, $У'_A = -0{,}79P$ *Н*, а давление цилиндра на пол $N'_D = -1{,}8$ *Н*.

Задача 3.7

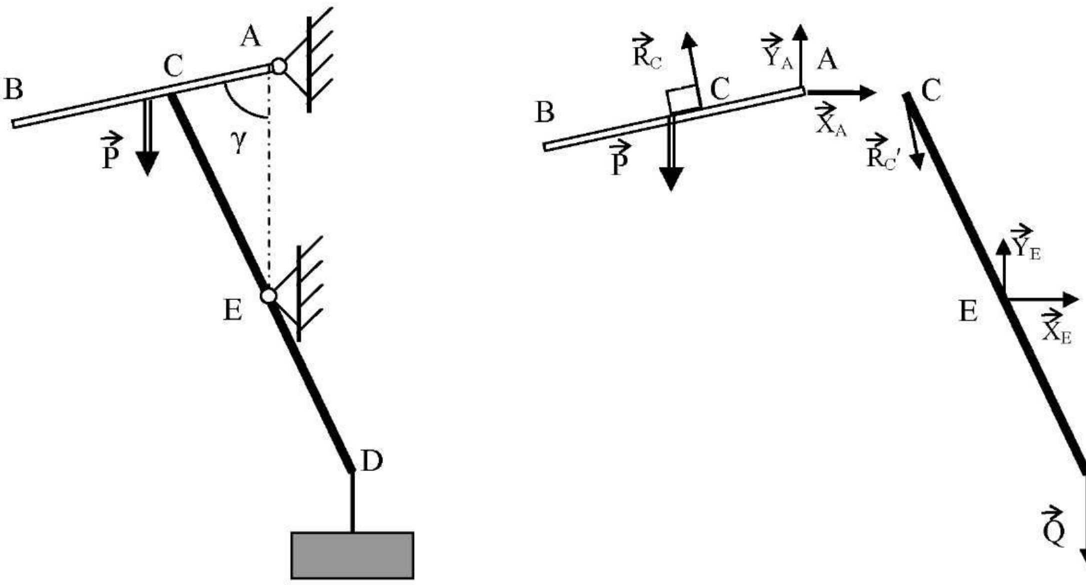
Идеально гладкие стержни ***AB*** и ***CD*** (рис. 3.9, а) закреплены шарнирами в точках ***A*** и ***E*** соответственно и соприкасаются в точке ***C***. Известны $AB = CD = 2l$, $AE = CE = DE = l$. Вес однородного стержня ***AB*** равен ***P***, вес груза ***Q*** составляет ***2P***.

Определить угол γ в положении равновесия.

Решение

Очевидно, что ***ACE*** – равнобедренный треугольник, поэтому $\angle AEC = 180 - 2\gamma$. Целесообразно рассмотреть равновесие стержней ***AB*** и ***CD*** в отдельности (рис. 3.9, б), записав для каждого только уравнения моментов:

$$\begin{cases} \sum M_A = Pl\sin\gamma - 2lR_C\cos\gamma = 0; \\ \sum M_E = R_C l\cos\gamma - Ql\sin(180 - 2\gamma) = 0. \end{cases}$$



а *б*

Рис. 3.9

Из первого уравнения выразим реакцию

$$R_C = \frac{P \sin \gamma}{2 \cos \gamma}$$

и подставим её во второе. Тогда

$$\sin\gamma - 4 \cdot 2 \sin\gamma \cos\gamma = 0,$$
$$\sin\gamma(1 - 8\cos\gamma) = 0.$$

Последнее выражение имеет два решения:

$$\sin\gamma = 0, \quad \gamma_1 = 0;$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{8}, \quad \gamma_2 = \arccos\frac{1}{8} \approx 83^\circ.$$

3.3. Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы называют составными?
2. Приведите примеры составных конструкций, в которых тела соединяются шарнирами, и покажите силы взаимодействия между частями этих конструкций.
3. Как направлены силы взаимодействия, если тела, входящие в систему, касаются друг друга гладкими поверхностями?
4. Какими реакциями заменяют связи различных типов?
5. Какие силы в составных конструкциях называют внешними?

6. Какие силы в составных конструкциях называют внутренними?

7. В чем состоит основное свойство внутренних сил?

8. Можно ли называть внутренние силы взаимно уравновешенными?

9. В чем состоит задача статики при рассмотрении системы твердых тел?

10. В чем суть метода сечений?

11. Каково назначение метода сечений?

12. Почему внутренние усилия не могут быть определены из уравнений равновесия, составленных для системы в целом?

13. Сколько уравнений равновесия можно составить для системы из N тел на плоскости?

14. Какие варианты составления уравнений равновесия для составной конструкции можно рассмотреть?

15. Как рационально выбрать оси координат и моментные точки при составлении уравнений равновесия?

16. Какой вид будут иметь уравнения равновесия, если на систему действует плоская система параллельных или сходящихся сил?

4. РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

4.1. Основные сведения из теоретического курса

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на три некомпланарные оси и алгебраические суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{zk} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0. \tag{4.1}$$

Для равновесия системы сходящихся сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на три некомпланарные оси:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{yk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{zk} = 0. \tag{4.2}$$

Для равновесия системы параллельных сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраическая сумма проекций всех сил на ось, параллельную этим силам, и алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух других осей.

Если $F_{Xk} \| OX$, то

$$\sum_{k=1}^{n} F_{xk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0. \qquad (4.3)$$

Момент силы относительно оси удобно вычислять, пользуясь таким правилом: необходимо спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси, и вычислить момент этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, присвоив знак плюс, если сила вращает плоскость против хода часовой стрелки, и минус, если вращает по ходу часовой стрелки (рис. 4.1), то есть

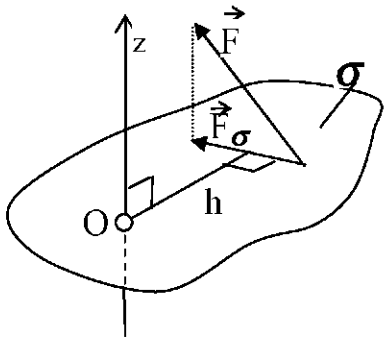


Рис. 4.1

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_\sigma h,$$

где $\vec{F}_\sigma$ – проекция силы на плоскость σ, перпендикулярную оси ***OZ***, ***h*** – кратчайшее расстояние от $\vec{F}_\sigma$ до точки пересечения оси ***OZ*** с плоскостью σ.

Осевой момент силы равен нулю, если сила пересекает ось или параллельна оси. Другими словами, осевой момент силы равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Моменты силы относительно координатных осей можно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} M_X(F) &= y \cdot F_Z - z \cdot F_Y, \\ M_Y(F) &= z \cdot F_X - x \cdot F_Z, \\ M_Z(F) &= x \cdot F_Y - y \cdot F_X, \end{aligned} \qquad (4.4)$$

где x, y, z – координаты любой точки на линии действия силы, F_X, F_Y, F_Z – проекции силы на оси координат.

4.2. Решение задач

Задача 4.1

Сила F_1 = ***16 Н*** действует вдоль диагонали верхнего основания куба, а сила F_2 = ***10 Н*** – вдоль ребра нижнего основания куба параллельно оси ***X*** (рис. 4.2). Ребро куба ***а = 0,75 м***.

Определить момент силы F_1 относительно оси X и момент силы F_2 относительно оси Z.

Решение

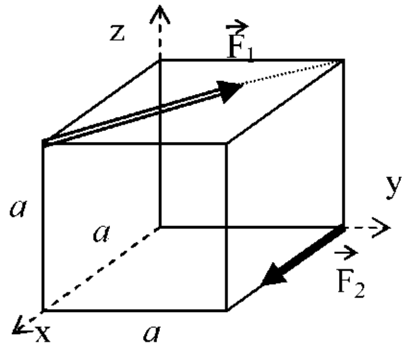


Рис. 4.2

Чтобы найти момент силы F_1 относительно оси x, ее следует спроецировать на плоскость, перпендикулярную этой оси, то есть на плоскость ZOY ($\perp OX$):

$$F_1' = F_1 \sin 45^\circ,$$

а затем найти момент от этой проекции:

$$M_X(\vec{F}_1') = -F_1' a = F_1 \sin 45^\circ = -16 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}75 = -8{,}5 \text{ (Нм)};$$

$$M_Z(\vec{F}_2) = -F_2 a = -10 \cdot 0{,}75 = -7{,}5 \text{ (Нм)}.$$

Заметим, что сила F_2 лежит в одной плоскости с осями x и y, поэтому ее момент относительно этих осей равен нулю.

Задача 4.2

С помощью ворота, закрепленного в подшипниках A и B, удерживается в равновесии груз Q весом ***1 кН*** (рис. 4.3). Трос сходит с барабана радиусом r ***= 0, 05 м*** по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 60°$. Длина рукоятки ***KD = 0,4 м, AD = 0,3 м, AC = 0,4 м, CB = 0,6 м.***

Определить реакции опор и силу P, с которой нужно давить на рукоятку при равновесном состоянии системы и горизонтальной рукоятке ***KD***.

Решение

Выберем систему координат ***AXYZ***, связав ее начало с точкой ***A***, и покажем на чертеже все действующие на ворот силы: $\vec{P}$, $\vec{Q}$ (при отсутствии трения в блоке натяжение троса равно весу груза ***Q***, см. задачу 2.6), а

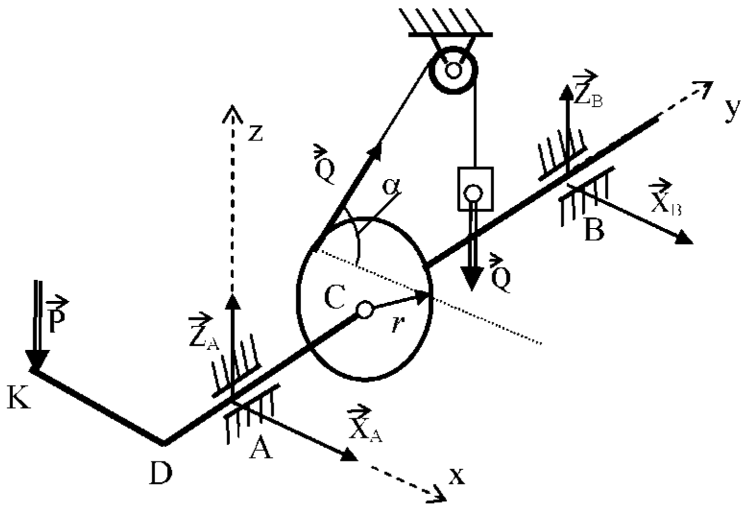


Рис. 4.3

также реакции в опорах **A** и **B.** Шарниры ограничивают перемещение вала в двух направлениях, вдоль осей **x** и **z**, поэтому их реакции удобно разложить на две составляющие: **X** и **Z**. Таким образом, имеем 5 неизвестных величин: $\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B$ и $\vec{P}$.

Составим уравнения равновесия в виде (4.1). Для этого сначала приравняем к нулю проекции главного вектора системы сил:

$$\begin{cases} R_X = \sum F_{Xk} = X_A + X_B + Q \cdot \cos\alpha = 0; \\ R_Y = \sum F_{Yk} = 0; \\ R_Z = \sum F_{Zk} = Z_A + Z_B - P + Q \cdot \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Для вычисления осевых моментов сил воспользуемся приемом сведения пространственной задачи к плоской, то есть будем поочередно проецировать ворот и действующие на него силы на плоскость, перпендикулярную той оси, относительно которой находятся моменты сил (рис. 4.4).

Заметим, что при этом сама ось будет проецироваться в точку (ось **x** – в точку **A** на рис. 4.4, а; ось **z** – в точку **A** на рис. 4.4, б; ось **y** – в точку **B = C = A = D** на рис. 4.4, в), относительно которой нужно вычислить моменты сил:

$$\begin{cases} \sum M_X(\vec{F}_k) = Z_B \cdot AB + Q \cdot \sin\alpha \cdot AC + P \cdot AD = 0; \\ \sum M_Y(\vec{F}_k) = Q \cdot r - P \cdot KD = 0; \\ \sum M_Z(\vec{F}_k) = -X_B \cdot AB - Q \cdot \cos\alpha \cdot AC = 0. \end{cases}$$

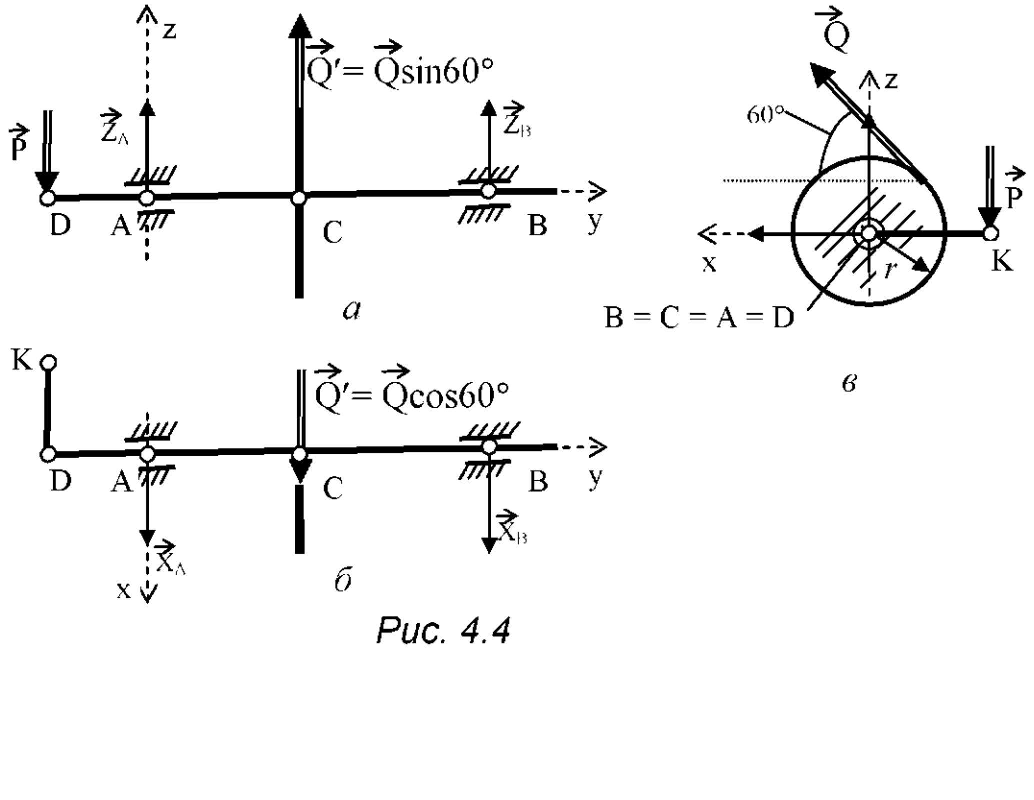


Рис. 4.4

Подставив известные величины и решив систему из шести уравнений, найдем

***P = 125 Н, X*A *= –300 Н, Z*A *= –357 Н, X*B *= –200 Н, Z*B *= –384 Н*.

Задача 4.3

Однородная прямоугольная пластина ***ABCD*** весом ***G = 120 Н*** шарнирно прикреплена к горизонтальному прямоугольному столу ***ABEF*** в точках ***A*** и ***B*** (рис. 4.5), а шарниры ***D*** и ***E*** соединены стержнем ***DE***. Известно, что ***AB = l, AD = DE, α = 60°.***

Определить реакции в опорах ***A*** и ***B*** и усилие в стержне ***DE***.

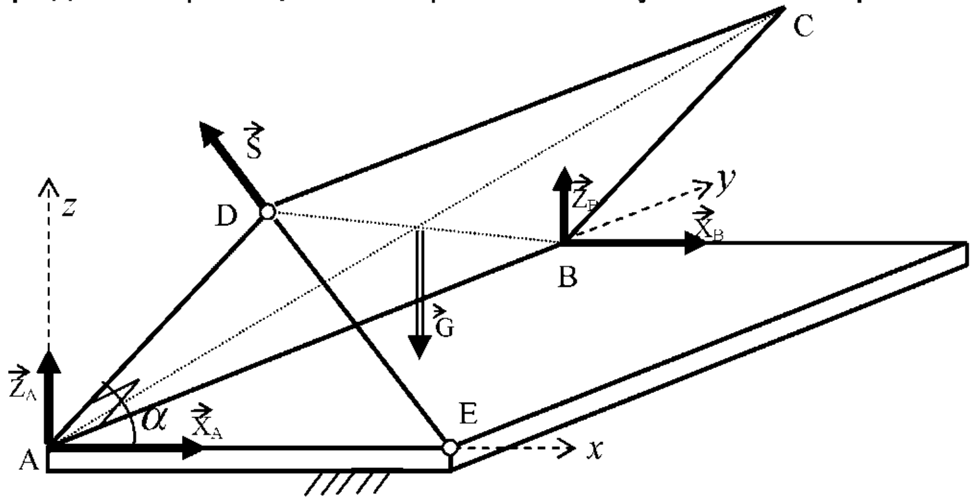


Рис. 4.5

Решение

Пусть ***S*** – усилие в стержне ***DE***. Учтем, что треугольник ***ADE*** – равносторонний и лежит в плоскости ***XAZ*** (это означает, что моменты силы $\vec{S}$ относительно осей ***x*** и ***z*** равны нулю).

Как и в предыдущей задаче, имеем 5 неизвестных величин. Запишем условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{Xk} = X_A + X_B - S \cdot \cos 60^\circ = 0; \\ \sum F_{Yk} = 0; \\ \sum F_{Zk} = Z_A + Z_B - G + S \cdot \sin 60^\circ = 0; \\ \sum M_X(F_k) = Z_B \cdot l - G \cdot \dfrac{l}{2} = 0; \\ \sum M_Y(F_k) = G \cdot \dfrac{AD}{2} \cdot \cos 60^\circ - S \cdot AD \cdot \cos 30^\circ = 0; \\ \sum M_Z(F_k) = -X_B \cdot l = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$X_B = 0$, $Z_B = 60$ Н, $X_A = 17{,}3$ Н, $Z_A = 30$ Н, $S = 34{,}5$ Н.

Задача 4.4

Однородная прямоугольная пластина ***ABCD*** весом ***G = 200 Н*** удерживается в горизонтальном положении с помощью сферического шарнира ***A,*** петли ***B*** и троса ***CE***, закрепленного в точке ***E*** (рис. 4.6). Углы $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$.

Определить реакции в опорах ***A*** и ***B*** и натяжение троса ***CE***.

Решение

Обозначим силу натяжения нити ***T***. Реакцию сферического шарнира ***A*** целесообразно разложить на три составляющие, реакцию петли ***B*** – на две, то есть вместе с силой ***T*** имеем 6 неизвестных.

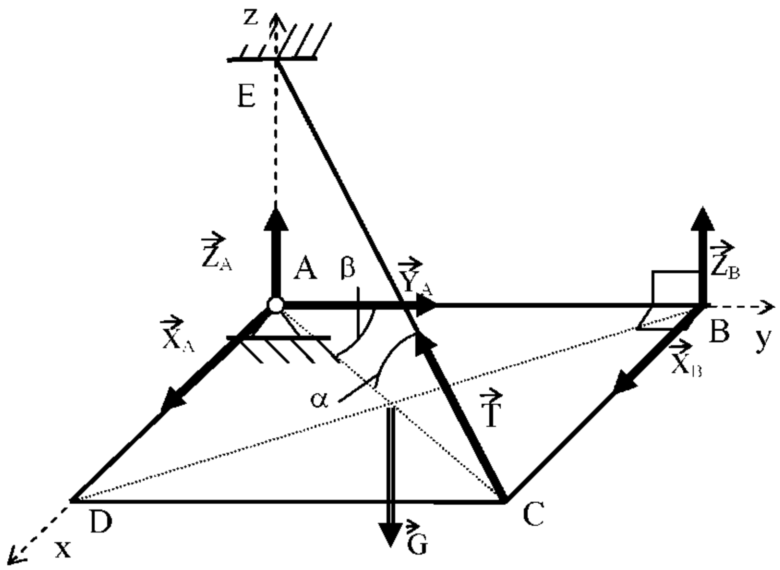


Рис. 4.6

Составим 6 уравнений равновесия, учитывая, что силу $\vec{T}$ нужно проецировать дважды:

$$\sum F_{Xk} = X_A + X_B - T\cos\alpha\sin\beta = 0;$$

$$\sum F_{Yk} = Y_A - T\cos\alpha\cos\beta = 0;$$

$$\sum F_{Zk} = Z_A + Z_B - G + T\sin\alpha = 0.$$

$$\begin{cases} \sum M_X(F_k) = -Z_B AB - G\dfrac{AB}{2} + T\sin\alpha AB = 0; \\ \sum M_Y(F_k) = G\dfrac{BC}{2} - T\sin\alpha \cdot BC = 0; \\ \sum M_Z(F_k) = -X_B AB = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$X_B = 0,\ Z_B = 0,\ Z_A = 100\ Н,\ Y_A = 150\ Н,\ X_A = 86{,}6\ Н,\ T = 200\ Н.$$

Задача 4.5

Квадратная пластина ***ABCD***, нагруженная боковой силой ***P***, через шарниры опирается на стержни (рис. 4.7).

Определить усилия в опорных стержнях.

Решение

Введем систему координат ***DXYZ*** и обозначим: ***a*** – сторона квадрата ***ABCD***; S_i (i = 1…6) – усилия в стержнях. Обратите внимание на то, что в этой задаче нет необходимости раскладывать реакции в опорных шарнирах на несколько составляющих.

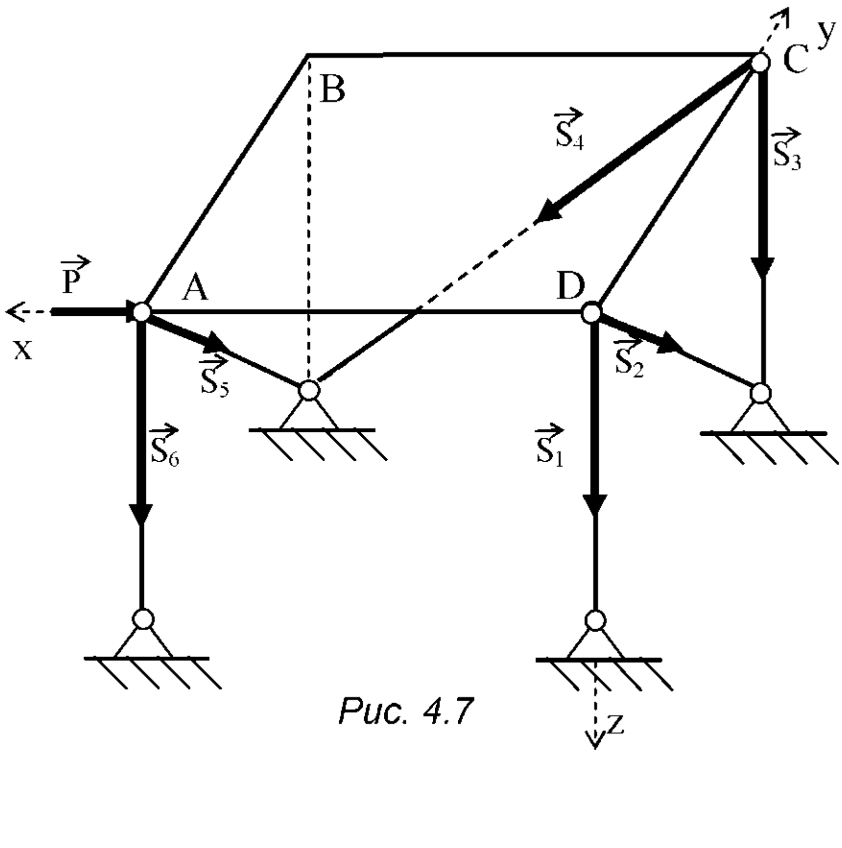


Рис. 4.7

Дело в том, что опорные стержни являются идеальными (стержни заканчиваются шарнирами, на участке между шарнирами нет внешних нагрузок), поэтому реакции в шарнирах (и верхних, и нижних) будут направлены по линии, соединяющей концы, то есть вдоль стержня.

Учитывая это, запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{Xk} = S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0;$$

$$\sum F_{Yk} = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\sum F_{Zk} = S_1 + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_3 + S_6 + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\sum M_y(\vec{F}_k) = -S_6 a - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -S_3 a + S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0;$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -S_4 \frac{\sqrt{2}}{2} a + S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$S_1 = P, \quad S_2 = -S_5 = -P\sqrt{2}, \quad S_3 = -P, \quad S_4 = P\sqrt{2}, \quad S_6 = -P.$$

4.3. Вопросы для самоконтроля

1. Запишите условия равновесия произвольной пространственной системы сил в векторной форме и в проекциях на координатные оси.
2. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для системы сходящихся сил в пространстве?
3. Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для системы параллельных сил в пространстве?
4. Как записываются уравнения равновесия для системы пар сил, произвольно расположенных в пространстве?
5. Дайте определение осевого момента силы.
6. Как на практике вычисляется момент силы относительно оси?
7. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?

8. Запишите формулы для вычисления моментов силы относительно координатных осей.

9. Какова последовательность действий при определении опорных реакций в случае действия на тело пространственной системы сил?

5. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

5.1. Основные сведения из теоретического курса

В статике вводятся понятия о главном векторе системы сил и главном моменте относительно центра.

Главный вектор определяется как геометрическая сумма всех сил системы: $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K$. Это свободный вектор. Его величину можно вычислить по формуле

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2},$$

где

$$R_X = \sum_{k=1}^{n} F_{Xk}, \quad R_Y = \sum_{k=1}^{n} F_{Yk}, \quad R_Z = \sum_{k=1}^{n} F_{Zk},$$

а направление – по направляющим косинусам

$$cos(\vec{R},\vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad cos(\vec{R},\vec{j}) = \frac{R_y}{R}, \quad cos(\vec{R},\vec{k}) = \frac{R_z}{R}.$$

Главный момент системы сил относительно некоторого центра ***O*** равен геометрической сумме векторных моментов всех сил относительно того же центра, то есть $\vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k)$. Этот вектор приложен в точке ***O***. Его величину можно вычислить по формуле

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

где $M_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k), \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k), \quad M_z = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k),$

а направление – по направляющим косинусам

$$cos(\vec{M}_0,\vec{i}) = \frac{M_x}{M_0}, \quad cos(\vec{M}_0,\vec{j}) = \frac{M_y}{M_0}, \quad cos(\vec{M}_0,\vec{k}) = \frac{M_z}{M_0}.$$

Силы, произвольно расположенные в пространстве, можно привести к любому центру. При этом исходная система сил заменяется *одной силой*, равной главному вектору и приложенной в центре приведения, и *одной парой*, момент которой равен главному моменту всех сил относительно центра приведения.

Величина и направление главного вектора не зависят от центра приведения, а величина и направление главного момента изменяются при переходе к другому центру приведения.

В зависимости от величины и взаимного расположения $\vec{R}$ и $\vec{M}_O$ различают следующие частные случаи приведения системы сил:

$\vec{R}=0; \quad \vec{M}_0=0$	система сил уравновешена
$\vec{R}\neq 0; \quad \vec{M}_0=0$	система сил приводится к равнодействующей $\vec{R}$, линия действия которой проходит через центр приведения
$\vec{R}\neq 0; \quad \vec{M}_0\neq 0; \quad \vec{R}\perp\vec{M}_0$	система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой не проходит через центр приведения, а отстоит от него на расстояние $d = M_0/R$
$\vec{R}\neq 0; \quad \vec{M}_0\neq 0; \quad \vec{R}\perp\vec{M}_0$	система сил приводится к динамическому винту
$\vec{R}=0; \quad \vec{M}_0\neq 0$	система сил приводится к паре, момент которой не зависит от выбора центра приведения

Следует обратить внимание на то, что равнодействующая системы сил и главный вектор системы сил – неравнозначные понятия, хотя и вычисляются они по одному и тому же правилу: $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k$.

При приведении системы сил к простейшему виду вычисляют статистические инварианты – параметры, которые не зависят от выбора центра приведения. Их два: $INV_I=\vec{R}$ и $INV_{II}=\vec{R}\cdot\vec{M}_0$.

5.2. Решение задач

Задача 5.1

Известны главный вектор ***R (0; 3; 4) (Н)*** и главный момент системы сил ***M_0* (2; –1; 2) (Нм)**, приложенной к твердому телу. К чему приводится система сил?

Решение

Проекции главного вектора и главного момента таковы:

$$R_x = 0,\ R_y = 3,\ R_z = 4;$$

$$M_{0x} = 2,\ M_{0y} = -1,\ M_{0z} = 2.$$

Тогда их модули

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ (H),$$

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}{}^2 + M_{0y}^2 + M^2{}_{0z}} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3\ \textbf{(Нм).}$$

Главный вектор и главный момент отличны от нуля. Проверим их скалярное произведение (второй инвариант):

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_0 = R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 5\,.$$

Поскольку $R \neq 0, M_0 \neq 0, \vec{R} \perp \vec{M}_0$, можно сделать вывод, что система сил приводится к динамическому винту.

Задача 5.2

На куб действуют пары сил с моментами ***M₁ = M₂ = M₃ = 2 Нм*** (рис. 5.1).

Определить модуль момента равнодействующей пары сил.

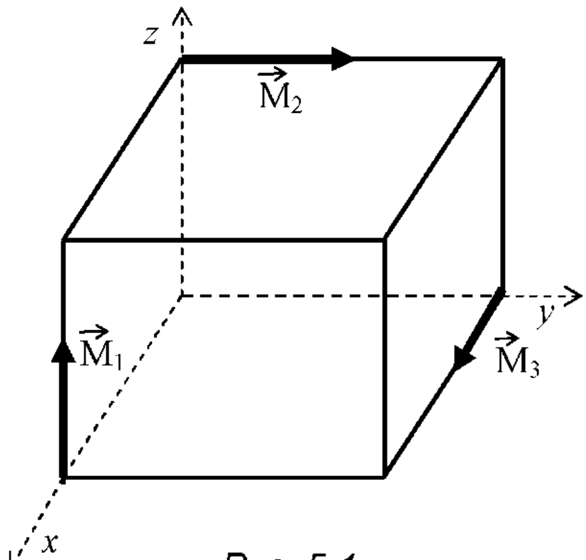


Рис. 5.1

Решение

Поскольку

$$M_o = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z{}^2},$$

то определим сначала проекции главного момента на оси:

$$M_x = \sum M_{xk} = M_3 = 2\ (Нм);$$

$$M_y = \sum M_{yk} = M_2 = 2\ (Нм);$$

$$M_z = \sum M_{zk} = M_1 = 2\ (Нм).$$

Тогда

$$M_0 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad (Нм).$$

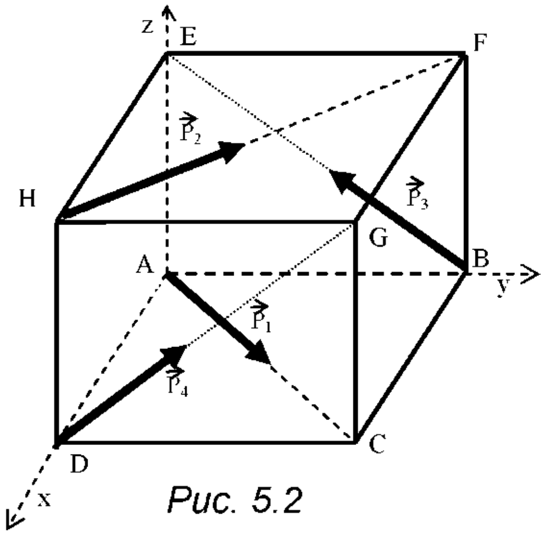


Рис. 5.2

Задача 5.3

Силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ (Н) приложены в точках куба ***A*** (вдоль диагонали ***AC***), ***H*** (вдоль ***HF***), ***B*** (вдоль ***BE***), ***D*** (вдоль ***DG***) соответственно (рис. 5.2).

Привести систему сил к центру ***A***.

Решение

Чтобы привести систему к некоторому центру, необходимо найти проекции главного вектора и главного момента системы сил на координатные оси:

$$\vec{R} = \vec{i} R_x + \vec{j} R_y + \vec{k} R_z;$$

$$\vec{M}_A = \vec{i} M_x + \vec{j} M_y + \vec{k} M_z.$$

Определим проекции главного вектора:

$$\begin{cases} R_x = \sum P_{xk} = -P_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + P \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0; \\ R_y = \sum P_{yk} = P_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + P_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} - P_3 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + P_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2}\,(H); \\ R_z = \sum P_{zk} = P_3 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + P_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2}\,(H). \end{cases}$$

Главный вектор лежит в плоскости ***zAy*** и его модуль

$$|\vec{R}| = \sqrt{\left(P\sqrt{2}\right)^2 + \left(P\sqrt{2}\right)^2} = 2P\ (H).$$

Найдем проекции главного момента:

$$\begin{cases} M_x = \sum M_x\left(\overline{P}_k\right) = -P_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a + P_3 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a = 0; \\ M_y = \sum M_y\left(\overline{P}_k\right) = -P_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a - P_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a = -Pa\sqrt{2}; \\ M_z = \sum M_z\left(\overline{P}_k\right) = P_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a + P_4 \dfrac{\sqrt{2}}{2} a = Pa\sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда модуль главного момента

$$\left|\vec{M}_A\right| = \sqrt{\left(P\sqrt{2}a\right)^2 + \left(P\sqrt{2}a\right)^2} = 2Pa \text{ (Нм)}.$$

Очевидно, что и главный момент лежит в плоскости ***zAy.***

Проверим ортогональность главного вектора и главного момента:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_A = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0 \cdot 0 + \left(P\sqrt{2}\right)\left(-Pa\sqrt{2}\right) + \left(P\sqrt{2}\right)\left(Pa\sqrt{2}\right) = 0.$$

Следовательно, векторы перпендикулярны.

Поскольку $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M}_A \neq 0$ и $\vec{R} \perp \vec{M}_0$, то система сил приводится к равнодействующей, параллельной главному вектору и отстоящей от него на расстояние

$$d = \frac{M_A}{R} = \frac{Pa\sqrt{2}}{P\sqrt{2}} = a.$$

Равнодействующая $\vec{R}^*$ приложена в точке ***D*** и направлена по диагонали ***DG*** (рис. 5.3).

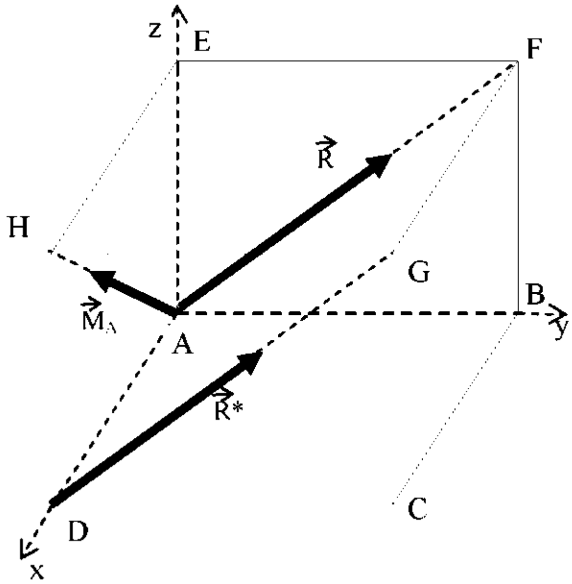


Рис. 5.3

Задача 5.4

Система сил приведена к главному вектору ***R (0; 3; 4)*** и главному моменту ***M₀ (0; 4; 0)*** относительно начала координат.

Определить угол γ между этими векторами.

Решение

Скалярное произведение векторов можно представить в таком виде:

$$\vec{R}\vec{M}_0 = RM_0 \cos\gamma.$$

В то же время

$$\vec{R}\vec{M}_0 = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z.$$

Тогда

$$\cos\gamma = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{R \cdot M_0}.$$

Найдем составляющие:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ (H);$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{4^2} = 4\ \text{(Нм)}.$$

Окончательно имеем

$$\cos\ \gamma = \frac{0 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5},$$

$$\gamma = \arccos(0{,}6) = 53{,}13^\circ.$$

Задача 5.5

Вдоль ребер параллелепипеда действуют силы $P_1 = P_2 = P_3 = P$, длины сторон параллелепипеда ***a, b, c*** (рис. 5.4).

Найти проекции главного вектора и главного момента на оси.

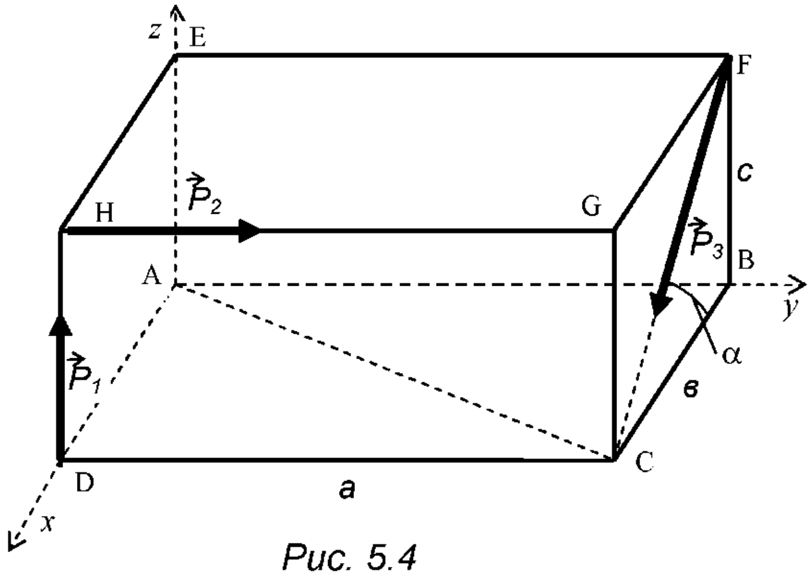


Рис. 5.4

Решение

Обозначим на рисунке угол α и найдем его из геометрических соображений:

$$\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}};\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Определим проекции главного вектора:

$$R_x = \sum P_{xk} = P_3 \cos\alpha = P\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}};$$

$$R_y = \sum P_{yk} = P_2 = P;$$

$$R_z = \sum P_{zk} = P_1 - P_3 \sin\alpha = P\left(1 - \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}\right).$$

Затем найдем проекции главного момента:

$$M_x = \sum M_x(P_k) = -P_2 c - P_3 \sin\alpha \cdot a = P(c - a\sin\alpha);$$

$$M_y = \sum M_y(P_k) = -P_1 b + P_3 \cos\alpha \cdot c = P(c \cdot \cos\alpha - b);$$

$$M_z = \sum M_z(P_k) = P_2 b - P_3 \cos\alpha \cdot a = P(b - a\cos\alpha).$$

5.3. Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о приведении системы сил к центру.
2. Что такое главный вектор системы сил?
3. Как можно вычислить модуль главного вектора и определить его направление в пространстве?
4. Что такое главный момент системы сил относительно центра?
5. Как вычислить модуль главного момента и определить его направление в пространстве?
6. Зависит ли главный вектор от выбора центра приведения?
7. В чем отличие между главным вектором и равнодействующей системы сил?
8. Как зависит главный момент системы сил от выбора центра приведения?
9. Перечислите частные случаи приведения системы сил к центру.
10. Назовите статические инварианты.
11. К чему приводится система сил, если $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 \neq 0$? Чему равны при этом INV_I и INV_{II}?
12. К чему приводится система сил, если $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 = 0$? Чему равны при этом INV_I и INV_{II}?
13. В каком случае система сил приводится к динамическому винту?
14. Чему равны статические инварианты INV_I и INV_{II} при приведении системы сил к динамическому винту?
15. К чему приводится система сил, если $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 \neq 0$ и $\vec{M}_0 \perp \vec{R}$? Чему равны при этом INV_I и INV_{II}?
16. Какова последовательность действий при приведении системы сил к центру?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 1: Статика и кинематика. – 512 с.

Будник Ф.Г. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1987. – 176 с.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2 т. – М.: Высш. шк., 1985. – Т. 1: Статика и кинематика. – 240 с.

Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 1983. – 575 с.

Кепе О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

Колесников К.С. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1983. – 320 с.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика, кинематика. – К.: Вища шк., 1989. – 360 с.