

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ**  
**ЧАСТЬ 1. СТАТИКА**  
Учебное пособие

## СОДЕРЖАНИЕ

### ВВЕДЕНИЕ

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ

1.1. Общие указания

1.2. Основные виды связей и их реакции

### 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. Общие указания по методике решения задач

2.2. Силовой расчет стержневых конструкций

2.3. Силовой расчет конструкций из тел шаровой и цилиндрической формы

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

3.1. Общие указания по методике решения задач

3.2. Различные формы уравнений равновесия плоской системы сил

3.3. Расчет простых конструкций

3.4. Расчет составных конструкций

### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

4.1. Равновесие тела при наличии трения скольжения

4.2. Равновесие тела при наличии трения качения

### 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

### 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ТЕЛ

### 7. РАСЧЕТ ФЕРМ

7.1. Общие указания по методике решения задач

7.2. Определение опорных реакций фермы

7.3. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов

7.4. Определение усилий в стержнях фермы методом сечений

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 72

## **ВВЕДЕНИЕ**

Предлагаемое пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами методов решения задач по статике. Здесь изложены основные правила и рекомендации, о которых обычно говорит преподаватель на практических занятиях.

Для сокращения объема пособия эти правила изложены в специальных подразделах, на которые затем делаются ссылки. Так, необходимые для решения задач сведения по определению направления реакций связей приведены в подразделах первой главы; сведения по определению проекций сил на оси – в первом подразделе второй главы; по определению моментов сил относительно центра – в первом подразделе третьей главы. Общие указания по частным методикам, то есть, по методикам решения отдельных групп задач, даны в первых подразделах каждой главы, а также в начале некоторых разделов.

Предполагается, что для освоения методов решения задач с помощью пособия студенты будут последовательно прорабатывать все главы в том порядке, который здесь принят. Учитывая это, материал первых подразделов излагается с подробнейшими разъяснениями, затем объем пояснений постепенно уменьшается, иногда вместо пояснений делается лишь ссылка на указания предшествующих подразделов. Для отыскания подразделов, на которые делаются ссылки, рекомендуется пользоваться оглавлением. Формулы, рисунки и номера задач имеют двойную нумерацию: первая цифра соответствует номеру главы, вторая – порядковому номеру формулы, рисунка или задачи. Для задач указаны в скобках соответствующие номера задач из пособия “Теоретическая механика. Часть 1. Статика”. – Хабаровск, ДВГАПС, 1994 г.

К выполнению индивидуальных домашних заданий по статике нужно приступать сразу после освоения соответствующей частной методики.

Введение, главы 1 и 2 написаны проф. Дорониным В.И., глава 3 – доц. Иванченко В.Ю., главы 4 и 7 – проф. Рачеком Н.М., главы 5 и 6 – доц. Кравченко Е.А.

## **1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИКИ**

### **1.1. Общие указания**

Задачи статики курса теоретической механики решаются с использованием условий равновесия материальных объектов.

В качестве объекта равновесия обычно берут отдельные тела, но можно за объект взять и несколько связанных между собой тел, находящихся в равновесии.

Неизвестными величинами в этих задачах чаще всего являются силы, действующие на рассматриваемый объект; неизвестными могут быть и геометрические параметры, характеризующие положение или размеры объекта при равновесии.

Решение задач статики производится в следующей последовательности:

- выбирается объект равновесия;
- показываются все силы, действующие на объект;
- из условий равновесия объекта находятся искомые величины.

Выбор объекта равновесия тесно связан с условием задачи, и прежде всего с тем, что требуется по условию задачи определить. Если, например, надо определить какие-то силы в элементах конструкции, то в качестве объекта надо взять такую часть конструкции, на которую бы искомые силы действовали непосредственно.

Таким образом, выполнение первого пункта методики решения задач увязывается со вторым пунктом, то есть с расстановкой сил, действующих на объект.

Заметим, что все силы, приложенные к объекту, есть действие окружающих тел. Из них выделяют активные силы, величины которых задаются условием задачи, например, вес объекта. Под действием активных сил объект приобретает тенденцию к движению. Но этому движению объекта препятствуют соприкасающиеся с ним тела, называемые связями.

Силы, с которыми связи действуют на объект, называются реакциями связей.

Для каждой реакции связи заранее можно указать лишь направление или линию действия, модуль же ее определяется из условий равновесия объекта.

Правила определения направления реакций связей рассмотрены в п. 1.2.

В качестве условий равновесия объекта чаще всего используются аналитические условия или уравнения равновесия системы сил, действующих на объекты. Вид и число уравнений равновесия определяются характером системы сил, действующих на объект (см. п. п. 2.1., 3.2., 5.1 данного пособия).

В разделе “Статика” рассматриваются только статически определенные задачи, то есть, задачи, в которых число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. Число независимых уравнений для одного объекта равновесия указано в п. п. 2.1, 3.2 и 5.1 пособия. Для конструкций, состоящих из нескольких связанных между собой тел, общее число независимых уравнений равновесия равно сумме уравнений, которые можно составить для каждого отдельно взятого тела конструкции.

Если число неизвестных больше числа независимых уравнений равновесия, то задача будет статически неопределенной. Методы решения таких задач рассматриваются в курсе “Сопротивление материалов”. Эти методы основаны на том, что к уравнениям равновесия объекта добавляются “уравнения совместности деформаций”, то есть, дополнительно учитываются деформационные особенности тел. В статике же, как известно, все тела считаются твердыми, недеформирующими.

## 1.2. Основные виды связей и их реакции

Рассмотрим вначале простые связи, которые ограничивают движение одной какой-либо точки объекта.

При определении направления реакции простых связей будем исходить из следующих положений: во-первых, реакция каждой связи должна быть приложена к объекту в точке, у которой эта связь исключает какие-либо перемещения; во-вторых, реакция связи должна быть направлена в сторону противоположную тому направлению, по которому связь не позволяет перемещаться из рассматриваемого положения упомянутой выше точке объекта.

### 1.2.1. Связь – гладкая поверхность

Гладкой называют поверхность без трения. Такая связь не позволяет точке  $A$  объекта (рис.

1.1, 1.2., 1.3.) перемещаться по нормали к поверхности связи. Поэтому реакция связи  $\overline{R}_A$  будет направлена по этой нормали в сторону объекта.

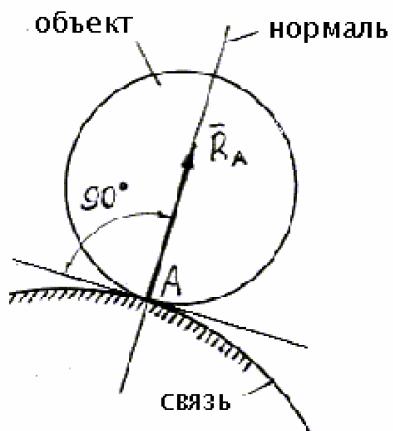


Рис. 1.1.



Рис. 1.2.



Рис. 1.3.

В том случае, когда объект опирается на острый шип или ребро двугранного угла, реакция связи будет направлена по нормали к поверхности объекта в сторону объекта.

Такого вида связи изображены на рис. 1.4 и 1.5.

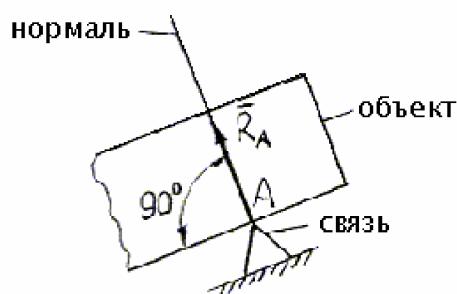


Рис. 1.4.

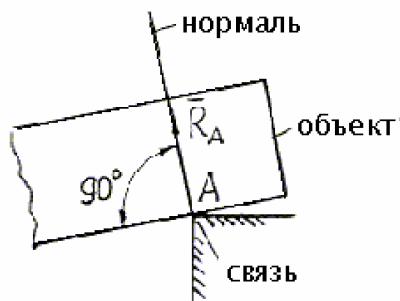


Рис. 1.5.

Для рассмотренных случаев можно сформулировать общее правило: реакция гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям тела и связи в точке их касания.

### 1.2.2. Связь – невесомая, нерастяжимая нить

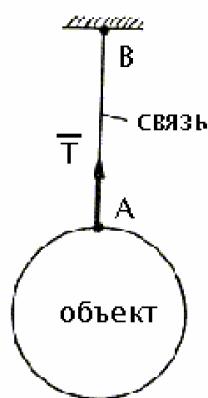
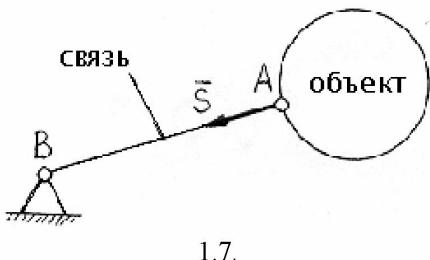


Рис. 1.6.

Связь этого вида не позволяет точке A объекта (рис. 1.6) удаляться от подвеса B по направлению нити AB. Поэтому реакция натянутой нити направлена вдоль нити от объекта к точке ее подвеса.

Если нить имеет вес, а прямая, проходящая через ее концы, образует с вертикалью некоторый угол, то характер ограничения, накладываемого т. связью на движение точки объекта, будет более сложным, и для определения направления реакции нить следует рассматривать как самостоятельный об

### 1.2.3. Связь – невесомый стержень с шарнирами по концам



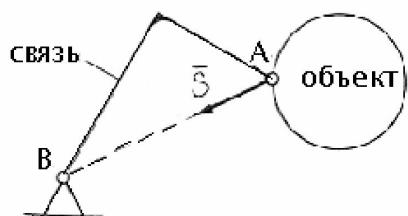
1.7.

Такой стержень препятствует перемещению точки  $A$  (рис. 1.7) в направлении оси  $AB$  стержня. Значит и reaction force  $\bar{S}$  стержня направлена по оси стержня.

В отличие от нити, которая должна быть всегда растянута, стержень может быть как растянут, так и сжат. Это значит, для reaction force  $\bar{S}$  стержня заранее можно указать лишь линию ее действия (по  $AB$ ); направление reaction force уточняется из условия равновесия объекта.

Обычно задаются направлением reaction force  $\bar{S}$  стержня – от объекта к середине стержня, считая, что стержень растянут. Если в результате решения с учетом условия равновесия объекта reaction force стержня получится отрицательной, то это значит, что она направлена в противоположную сторону, а стержень сжат.

Если стержень имеет вес, то характер ограничений, которые он накладывает на движение точки  $A$  объекта будет более сложным. Такой стержень следует рассматривать как самостоятельный объект, для которого концевые шарниры являются связями. Направления reaction force в этих шарнирах следует определять в соответствии с рекомендациями п.п. 1.2.4 и 1.2.5.



1.8.

Любые по конструкции жесткие несовместимые связи с внешними шарнирами можно рассматривать как стержни с шарнирами по концам, и из этого условия определять направления reaction force (рис. 1.8).

Рис.

### 1.2.4. Цилиндрический шарнир без трения

Цилиндрический шарнир (рис. 1.9) не позволяет точке  $A$  объекта перемещаться в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, в данном случае в плоскости  $Axy$ .

Следовательно, reaction force  $\bar{R}_A$  шарнира может иметь любое направление в плоскости  $Axy$ .

Неизвестную по величине и направлению reaction force  $\bar{R}_A$  представляют в виде двух составляющих  $X_A$  и  $Y_A$ , совпадающих с положительным направлением осей  $Ax$  и  $Ay$ . Величина этих составляющих определяется из условия равновесия объекта. После этого

$$\text{находится reaction force шарнира } A - R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}.$$

Если все силы, действующие на объект, расположены в плоскости  $Axy$ , то ось  $Z$  на расчетных схемах не показывается, а цилиндрический шарнир с реакциями изображается так, как показано на рис. 1.10.

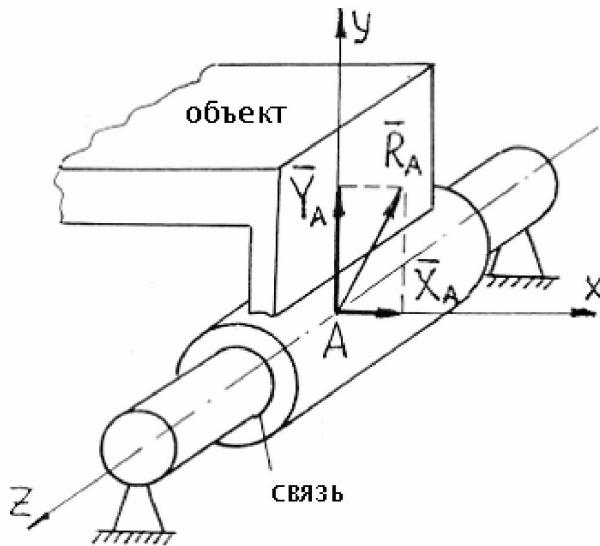


Рис. 1.9.

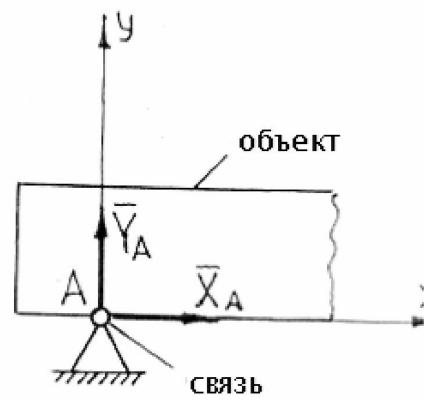


Рис. 1.10.

### 1.2.5. Связи – шаровой шарнир без трения и подпятник без трения

Шаровой шарнир (рис. 1.11) и подпятник (рис. 1.12) закрепляют точку  $A$  так, что исключаются любые ее перемещения в пространстве. Следовательно, реакция  $\bar{R}_A$  шарового шарнира и подпятника может иметь любое направление в пространстве; она представляется

тремя составляющими  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ , направленными по взаимно перпендикулярным осям. Величины составляющих определяются из условия равновесия объекта, после чего

$$\text{находится и полная реакция } \bar{R}_A - R_A = \sqrt{\bar{X}_A^2 + \bar{Y}_A^2 + \bar{Z}_A^2}$$

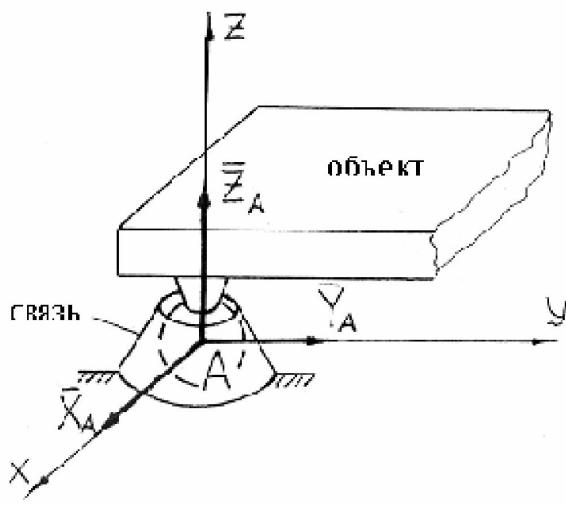


Рис. 1.11.

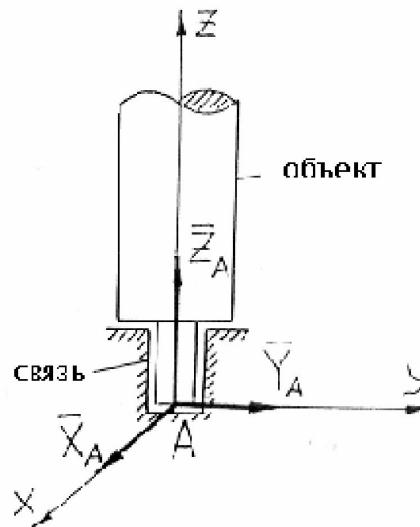


Рис. 1.12.

### 1.2.6. Связь – подвижная шарнирная опора

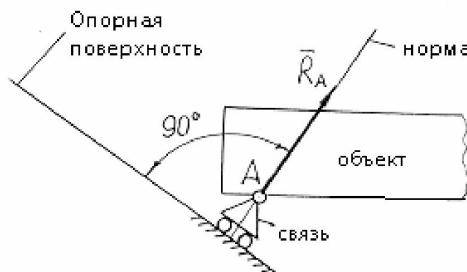


Рис. 1.13.

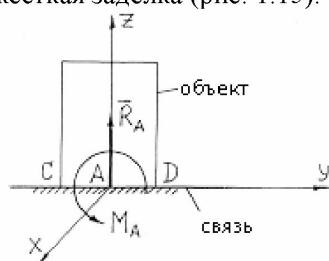
В отличии от неподвижной шарнирной опоры (рис. 1.12) подвижная шарнирная опора (рис. 1.13) не препятствует перемещению точки  $A$  объекта вдоль опорной поверхности. Связь препятствует перемещению точки  $A$  объекта трансверсально к нормали к опорной поверхности, поэтому реакция подвижной шарнирной опоры направлена по нормали к опорной поверхности. Нормаль должна проходить через центр шарнира  $A$ .

### 1.2.7. Сложные связи

До сих пор рассматривались простые связи, ограничивающие движение одной точки объекта. Сложные связи накладывают ограничения на движение всего объекта.

Рассмотрим два вида сложных связей:

- плоскость без трения в условиях, когда касание с объектом происходит на некоторой площадке  $CD$  (рис. 1.14);
- жесткая заделка (рис. 1.15).



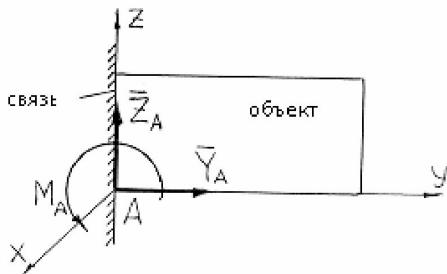


Рис. 1.14.

Рис. 1.15.

Будем считать, что активные силы, действующие на объект, в обоих рассматриваемых случаях расположены в плоскости  $Axy$ , поэтому и связи ограничивают перемещение объектов только в плоскости  $Axy$ . Плоскость без трения с касанием по площадке  $CD$  (рис. 1.14) не дает объекту перемещаться по нормали к плоскости, а также не дает ему

поворачиваться вокруг оси  $X$ . Поэтому действие этой связи характеризуется реакцией  $\bar{R}_A$ , направленной по нормали к плоскости и реактивным моментом  $M_A$ . Точка  $A$  приложения реакции  $\bar{R}_A$  может быть выбрана в любом месте площадки  $CD$ . Направление дуговой стрелки реактивного момента  $M_A$  противоположно направлению, в котором стремятся повернуть объект активные силы.

Жесткая заделка (рис. 1.15) не позволяет точке  $A$  объекта перемещаться в плоскости  $Axy$  и не дает объекту поворачиваться вокруг оси  $X$ . Поэтому реакция заделки состоит из силы  $\bar{R}_A$ , представленной составляющими  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{Z}_A$  и реактивного момента  $M_A$ .

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

### 2.1. Общие указания по методике решения задач

В этой главе будут рассмотрены наиболее простые задачи статики, когда на объект равновесия действуют сходящиеся силы, то есть силы, линии действия которых проходят через одну точку.

К таким задачам относятся задачи по расчету стержневых конструкций (п. 2.2) и расчету конструкций из тел шаровой или цилиндрической формы (п. 2.3).

Аналитическое условие равновесия сходящихся сил выражается следующими уравнениями равновесия:

$$\sum_{Oxy} F_{kx} = 0, \quad (2.1)$$

– для сходящихся сил в плоскости

$$\sum_{\text{пространство}} F_{kx} = 0, \quad (2.2)$$

– для сходящихся сил в пространстве –

$$\sum F_{ky} = 0 ,$$

$$\sum F_{kz} = 0 .$$

Можно пользоваться не только прямоугольными системами координатных осей, но и косоугольными. Так, в плоских задачах в качестве координатных осей можно взять любые две непараллельные прямые, лежащие в плоскости; в пространственных задачах – любые три непараллельные и не лежащие в одной плоскости прямые.

При составлении уравнений равновесия надо уметь находить проекции силы на оси координат.

Проекцией силы на ось называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и направлением силы.

Если проекцию силы  $\bar{F}$  на ось  $x$  обозначить символом  $F_x$ , то согласно приведенному определению

$$F_x = F \cos (\bar{F}, \hat{x}) , \quad (2.3)$$

или проще

$$F_x = F \cos \alpha_x , \quad (2.4)$$

где  $F$  – модуль силы;  $\alpha_x$  – угол между положительным направлением оси  $x$  и силой  $\bar{F}$ .

Из формулы (2.4) видно, что знак проекции силы на ось зависит от знака косинуса угла

$\alpha_x$ : проекция будет положительной, если угол  $\alpha_x$  острый и отрицательный – если тупой.

Формула (2.4) дает первый способ определения проекции силы на ось. При решении задач чаще пользуются другим способом, в основе которого лежат графические построения. Рассмотрим два случая.

### 2.1.1. Случай, когда сила и ось расположены в одной плоскости

Из начала  $A$  и конца  $B$  силы  $\bar{F}$  (рис. 2.1 и 2.2) опустим перпендикуляры на ось  $x$ . Нетрудно заметить, что направленный отрезок  $ab$  (начало отрезка – в точке  $a$ , конец – в точке  $b$ )

определяет проекцию  $F_x$ . На рис. 2.1 этот отрезок совпадает с положительным направлением оси  $x$ , поэтому ему придадим знак “+”. На рис. 2.2. отрезок  $ab$  направлен противоположно оси  $x$ , придадим ему знак “-“.

Построения, подобные выполненным на рис. 2.1 и 2.2, позволяют определение проекции силы на ось разделить на две операции: первая – определение модуля проекции, вторая – определение знака проекции.

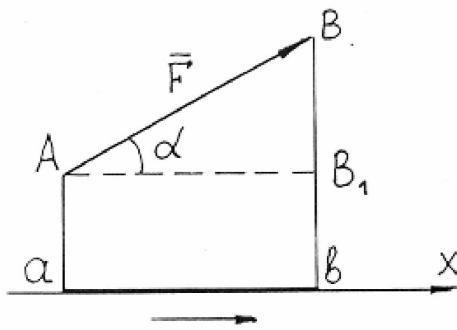


Рис. 2.1.

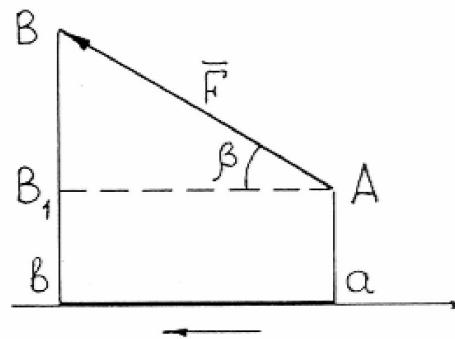


Рис. 2.2.

Модуль проекции или длина отрезка  $ab$  вычисляется из прямоугольного треугольника  $ABB_1$ :

$$\text{для рис. 2.1} - |F_x| = |ab| = F \cos \alpha, \quad (2.5)$$

$$\text{для рис. 2.2} - |F_x| = |ab| = F \cos \beta.$$

Знак проекции принимается положительным, если направление отрезка  $ab$  совпадает с положительным направлением оси (рис. 2.1) и отрицательным, если направления противоположны (рис. 2.2).

Итак, для вычисления проекции силы на ось  $X$  нужно:

а) выполнить построения, как это сделано на рис. 2.1 и 2.2;

б) определить модуль проекции силы на ось из треугольника  $ABB_1$  по формуле (2.5);

в) определить знак проекции силы на ось в зависимости от направления отрезка  $ab$ : знак “+”, если направление отрезка  $ab$  совпадает с положительным направлением оси  $X$ , знак “-”, если направления противоположны.

### 2.1.2. Случай, когда линия действия силы $\bar{F}$ и ось $X$ – скрещивающиеся прямые

В этом случае рекомендуется ось  $X$  дополнить двумя осями  $Y$  и  $Z$  (рис. 2.3) так, чтобы получалась декартова система координат. Далее, надо построить на силе  $\bar{F}$ , как на диагонали, параллелепипед, ребра которого были бы параллельны осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Учитывая, что проекции силы на параллельные оси однородные, можно утверждать, что силы  $F$  на ось  $X$  (рис. 2.3) изображается направленным отрезком  $AC$ . Проекции той же силы на оси  $Y$  и  $Z$  изображаются отрезками  $AD$  и  $AE$ . Модули проекций силы определяются по формулам

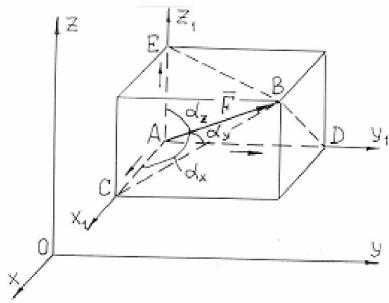


Рис. 2.3.

$$F_x = AC = F \cos \alpha_x \text{ — из треугольника } ABC, \quad (2.6)$$

$$F_y = AD = F \cos \alpha_y \text{ — из треугольника } ABD,$$

$$F_z = AE = F \cos \alpha_z \text{ — из треугольника } ABE.$$

Знак проекции определяется по установленному в п. 2.1.1 правилу в зависимости от направления оси и отрезка, определяющего проекцию.

Таким образом, для вычисления проекции силы  $F$  на ось  $x$  нужно:

- a) дополнить ось  $x$  двумя осями  $y$  и  $z$  так, чтобы получилась декартова система координат;
- б) построить на силе  $\bar{F}$ , как на диагонали, параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 2.3);
- в) определить модуль проекции  $F_x$  по формуле (2.6);
- г) определить знак проекции  $F_x$  в зависимости от направления отрезка  $AC$  (рис. 2.3).

В некоторых случаях для выполнения пункта (в) методики вместо формулы (2.6) можно использовать другую формулу, которая получается из построений на рис. 2.4.

$$|F_x| = A_2 C_2 = F \cos \beta \cdot \cos \gamma \quad (2.7)$$

Из рис. 2.4 и формулы (2.7) видно, что вначале определяется модуль проекции силы  $\bar{F}_{xy}$  на плоскость  $xy$

$$|F_{xy}| = F \cos \beta$$

а затем уже модуль проекции  $F_x$ . Метод, давший формулу (2.7), называют методом последовательного проектирования: чтобы найти проекцию силы на заданную ось, нужно вначале эту силу спроектировать на плоскость, в которой лежит ось, затем полученную проекцию спроектировать на заданную ось.

Применим этот метод для определения модуля  $F_y$  (рис. 2.4).

$$|F_y| = A_3 D_3 = F \cos \alpha \sin \gamma \quad (2.8)$$

## 2.2. Силовой расчет стержневых конструкций

Стержневыми будем называть конструкции, состоящие из невесомых стержней, соединенных по концам шарнирами (рис. 2.5). Соединяющий шарнир  $A$  называется узлом. К стержневым конструкциям близки конструкции из невесомых нитей (рис. 2.6), а также смешанные конструкции из невесомых стержней и нитей (рис. 2.7). Расчетные схемы у всех этих конструкций одинаковы, одинаковы и методики расчета по определению усилий в стержнях и нитях.

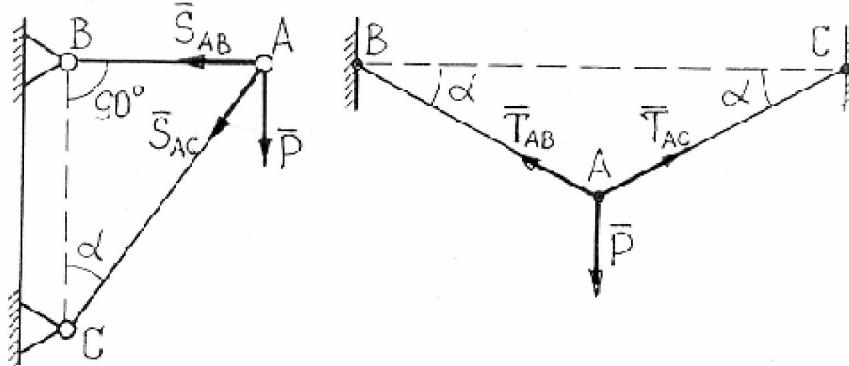


Рис. 2.5.

Рис. 2.6.

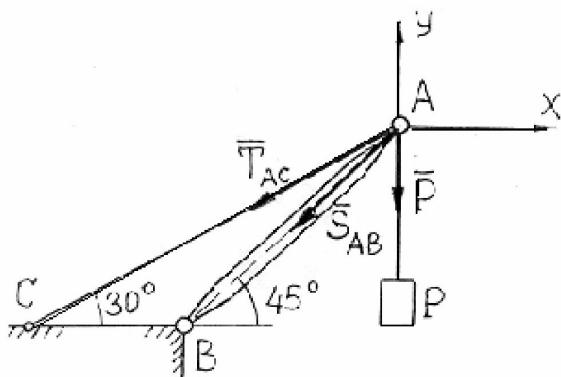


Рис. 2.7

Все действующие на узел силы, активные и реактивные, сходятся в этом узле. Так, на узел  $A$  стержневой конструкции (рис. 2.5) действует активная сила  $\bar{P}$  и реакции стержней  $\bar{S}_{AB}$  и  $\bar{S}_{AC}$ . На узел  $A$  нитяной конструкции (рис. 2.6) действует активная сила  $\bar{P}$  и реакции нитей  $\bar{T}_{AB}$  и  $\bar{T}_{AC}$ .

Координатные оси на расчетных схемах следует выбирать так, чтобы уравнения равновесия были для них наиболее простыми. Можно добиться, например, что в системе (2.1) каждое уравнение будет иметь одну неизвестную силу. Для этого оси  $X$  и  $Y$  надо проводить перпендикулярно неизвестным силам.

Вычисление реакций стержней и нитей производится с использованием условий равновесия. Эти реакции равны по модулю усилиям в соответствующих стержнях и нитях.

После определения реакций силовой расчет указанных конструкций считается законченным.

### ЗАДАЧА 2.1. (1)

Груз  $P = 100 \text{ H}$  подвешен в точке  $A$  стрелы, закрепленной на фундаменте с помощью шарнира  $B$ . Стrelа удерживается в указанном положении тросом  $AC$ . Определить, пренебрегая весом стрелы и троса, усилие в стреле и натяжение троса.

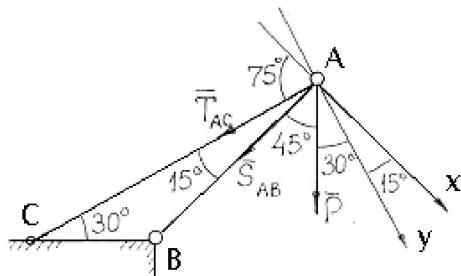
#### Решение:

Выбираем за объект равновесия узел  $A$ .

На узел действует вес груза  $\bar{P}$ , реакция троса  $\bar{T}_{AC}$  и реакция стрелы  $\bar{S}_{AB}$ . Стрела  $AB$  рассматривается как невесомый стержень. Направление реакций  $\bar{T}_{AC}$  и  $\bar{S}_{AB}$  принято в соответствии с указаниями п.п. 1.2.2 и 1.2.3. Для составления уравнений равновесия (2.1)

проведем через узел  $A$  оси  $x$  и  $y$  (рис. 2.7). Спроектируем силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{S}_{AB}$ ,  $\bar{T}_{AC}$  на оси. В результате получим следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \quad -S_{AB} \cos 45^\circ - T_{AC} \cos 30^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \quad -P - S_{AB} \cos 45^\circ - T_{AC} \cos 60^\circ = 0.\end{aligned}$$



Неизвестные силы  $\bar{S}_{AB}$  и  $\bar{T}_{AC}$  входят в оба уравнения равновесия. Для вычисления надо решать систему двух полученных уравнений. Естественно упростить, если оси  $x$  и  $y$  провести перпендикулярно нейтральной оси (например, ось  $x$  – перпендикулярно  $\bar{S}_{AB}$ , ось  $y$  – перпендикулярно  $\bar{T}_{AC}$ ). Для этих осей уравнения равновесия получатся следующими:

Рис. 2.8.

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \quad P \cos 45^\circ - T_{AC} \cos 75^\circ = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \quad P \cos 30^\circ - S_{AB} \cos 75^\circ = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $T_{AC} = 2,735 \text{ H}$ ,

из второго –  $S_{AB} = -3,342 \text{ H}$ .

Для реакции стрелы  $S_{AB}$  получится отрицательный результат. Это означает согласно указаниям п. 1.2.3, что стрела сжата, а не растянута, как предполагалось при выборе

направления  $\bar{S}_{AB}$  на расчетной схеме. Делать исправления на расчетной схеме и в уравнениях равновесия не рекомендуется.

Предлагаем определить реакции связей в расчетных схемах, изображенных на рис. 2.5 и 2.6,

считая  $P$  и  $\alpha$  заданными величинами.

Ответы:

$$S_{AB} = P \operatorname{tg} \alpha, \quad S_{AC} = -P \operatorname{sec} \alpha.$$

– для схемы на рис. 2.5 –

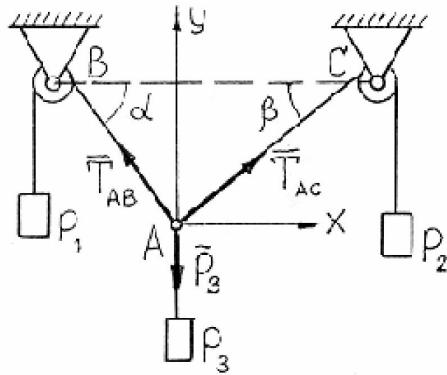
$$T_{AB} = T_{AC} = 0,5P \operatorname{cosec} \alpha.$$

– для схемы на рис. 2.6 –

### ЗАДАЧА 2.2 (2)

В узле  $A$  соединены три невесомые нерастяжимые нити, к свободным концам которых прикреплены грузы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Две нити перекинуты через неподвижные блоки  $B$  и  $C$ , углы наклона этих нитей к горизонту равны  $\alpha$  и  $\beta$ . Считая, что  $P_3$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  заданы, определить  $P_1$  и  $P_2$  при равновесии. Трение на блоках не учитывать.

**Решение:**



Выберем за объект равновесия узел  $A$ . На объект действуют силы  $P_3$ ,  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$ . Направления реакций нитей принятые в с указаниями п. 1.2.2. Учтем, что при отсутствии трения на блоках  $T_{AB} = P_1$ ,  $T_{AC} = P_2$ . Для составления уравнений равновесия проведем через узел  $A$  оси  $x$  и  $y$  (рис. 2.9). Спроектируем  $P_3$ ,  $T_{AB}$  и  $T_{AC}$  на оси, учитывая указания п. 2.1.1. В результате получим следующие уравнения равновесия:

Рис. 2.9.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -T_{AB} \cos \alpha + T_{AC} \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad T_{AB} \sin \alpha + T_{AC} \sin \beta - P_3 = 0.$$

Неизвестные силы  $T_{AB}$  и  $T_{AC}$  входят в оба уравнения равновесия. Из первого уравнения найдем:

$$T_{AB} = T_{AC} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

(a)

Подставив это соотношение во второе уравнение равновесия, после несложных преобразований получим

$$T_{AC} = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta}$$

Теперь из соотношения (a) можно определить  $T_{AB}$ .

Искомые  $P_1$  и  $P_2$  равны соответственно  $T_{AB}$  и  $T_{AC}$ .

В данной задаче оси координат проведены традиционно: ось  $x$  – по горизонтали, ось  $y$  –

по вертикали. Если оси  $x$  и  $y$  провести перпендикулярно неизвестным силам, как это сделано в предыдущей задаче, то возникнут трудности при определении величин углов между силами и осями координат. В рассмотренном решении этих трудностей нет, поэтому оно предпочтительнее.

Как видим, выбор направления осей зависит от особенностей задачи. В некоторых задачах следует рассматривать несколько вариантов выбора осей.

### ЗАДАЧА 2.3 (4)

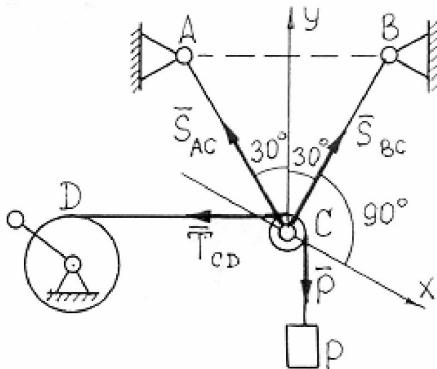
Груз  $P = 300 \text{ Н}$  равномерно поднимается лебедкой  $D$  с помощью веревки, перекинутой через блок  $C$ . Ось блока поддерживается стержнями  $AC$  и  $BC$ . Пренебрегая размерами блока, весом стержней и веревки, определить усилия в стержнях  $AC$  и  $BC$ . Трение на блоке не учитывать.

#### Решение:

Груз  $P$  движется равномерно и прямолинейно, поэтому можно считать, что груз и вся конструкция находится в состоянии равновесия. Это значит, мы вправе для решения задачи применить условия равновесия статики.

За объект равновесия принимаем узел  $C$ . Размерами блока по условию задачи можно

пренебречь, поэтому будем считать, что сила  $\bar{P}$  и реакция веревки  $\bar{T}_{CD}$  проходят через узел  $C$ . Кроме этих двух сил на узел действуют также реакции стержней  $\bar{S}_{AC}$  и  $\bar{S}_{BC}$ . То есть, в данной задаче можно считать, что на объект действует система сходящихся сил. Направления реакций приняты в соответствии с указаниями п.п. 1.2.2 и 1.2.3.



Часто в задачах на равновесие конструкций с блоком допускается расстановка сил не учитывая реакцию веревки, удерживающую (рис. 2.10 – это реакция  $\bar{T}_{CD}$ ). Такое, конечно, допускать нельзя: силы  $\bar{T}_{CD}$  веревка и груз  $P$  в равновесии быть не могут. Более того равновесие силы  $\bar{T}_{CD}$  по модулю должна быть равна весу груза надо учитывать при решении задач.

Рис. 2.10.

Ось  $x$  (рис. 2.10) направим так, чтобы она была перпендикуляра неизвестной силе  $\bar{S}_{BC}$ , Уравнение равновесия для этой оси следующее:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \cos 60^\circ - T_{DC} \cos 30^\circ - S_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$T_{CD} = P, \text{ находим } S_{AC} = -1200 \text{ Н.}$$

При выборе направления второй оси, учтем что величина  $S_{AC}$  уже найдена и любая ось, непараллельная оси  $x$  дает уравнение равновесия с одним неизвестным  $S_{BC}$ . Направим ось  $y$  по вертикали, так как в этом случае уравнение равновесия будет очень простым:

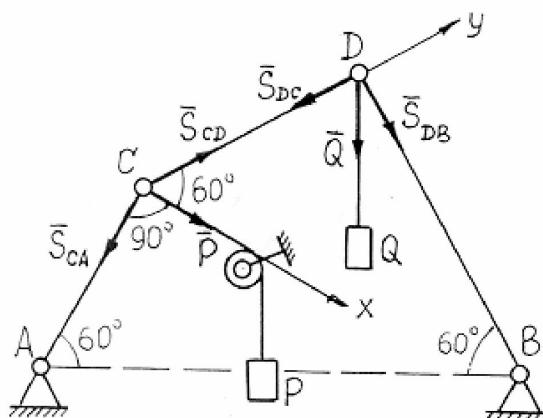
$$\sum F_{iy} = 0, \quad -P + S_{AC} \cos 30^\circ + S_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$S_{BC} = 4690 \text{ Н.}$$

Отметим, что при решении задачи 1 оси  $x$  и  $y$  были выбраны перпендикулярно неизвестным силам, в задаче 3 только ось  $x$  была выбрана перпендикулярно неизвестной силе, а ось  $y$  выбрана из условия, чтобы уравнение равновесия для нее было проще. В обоих вариантах выбора осей определение неизвестных реакций сводится к последовательному решению уравнений с одним неизвестным. Но второй вариант обычно более предпочтителен, так как уравнения равновесия в этом варианте получаются проще.

Рассмотренную методику решения задач можно применить для силового расчета стержневых конструкций, состоящих из нескольких узлов.

### ЗАДАЧА 2.4 (5)



Стержни  $AC$  и  $BD$  (рис. 2.11), прикрепленные концевыми к опоре, соединены стержнем  $CD$ . К шарнирам  $C$  и  $D$  при свободным концам которых подвешены грузы  $P$  и  $Q$ . Определите  $Q$  так, чтобы конструкция была в равновесии, если  $P = 10 \text{ kN}$ .

Рис. 2.11.

#### Решение:

Заданная конструкция имеет два узла –  $C$  и  $D$ . Каждый из узлов может быть объектом равновесия. На узел  $C$  действуют силы:  $\bar{P}$ ,  $\bar{S}_{CA}$ ,  $\bar{S}_{CD}$ ; а на узел  $D$  – силы:  $\bar{Q}$ ,  $\bar{S}_{DC}$ ,  $\bar{S}_{DB}$ .

Направление реакций стержней принято в соответствии с указаниями п. 1.2.3. Реакция стержня  $CD$ , приложенная к узлу  $C$ , обозначена  $\bar{S}_{CD}$ , а реакция этого же стержня, приложенная к узлу  $D$ , –  $\bar{S}_{DC}$ . Очевидным является соотношение:  $\bar{S}_{DC} = -\bar{S}_{CD}$ .

Искомая сила  $Q$  приложена к узлу  $D$ , на который действуют только неизвестные силы. Поэтому начинать решение задачи надо с рассмотрения узла  $C$ , к которому приложена

известная сила  $\bar{P}$ . Из условия равновесия узла  $C$  достаточно определить силу  $\bar{S}_{CD}$  передающуюся на узел  $D$ . Поэтому ось  $x$  проведем перпендикулярно  $\bar{S}_{AC}$ . Для этой оси уравнение равновесия системы сил, приложенной к узлу  $C$ , имеет вид

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P + S_{CD} \cos 60^\circ = 0$$

Отсюда находим  $S_{CD} = -P / \cos 60^\circ = -2P$  kH. Знак “-“ указывает на то, что стержень  $CD$  сжат (см. п. 1.2.3).

Переходим теперь к узлу  $D$ . Из условия равновесия узла  $D$  нужно найти только силу  $Q$ ,

поэтому ось  $y$  проведем перпендикулярно  $\bar{S}_{DB}$ . Для этой оси уравнение равновесия имеет вид

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -S_{DC} - Q \cos 60^\circ = 0$$

$$Q = 40$$

Отсюда находим  $S_{DC} = -Q / \cos 60^\circ = -80$  kH.

Силовой расчет пространственных стержневых конструкций выполняется по аналогичным методикам.

### ЗАДАЧА 2.5. (6)

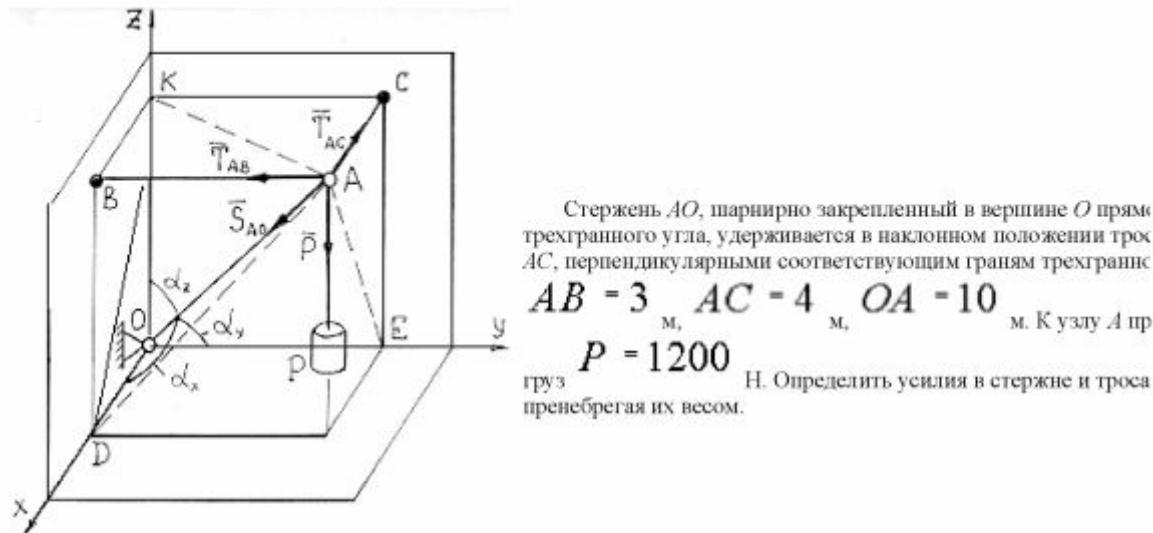


Рис. 2.12.

#### Решение:

За объект равновесия принимаем узел  $A$ . На узел действуют четыре силы: активная сила  $\bar{P}$ , реакции тросов  $\bar{T}_{AB}$ ,  $\bar{T}_{AC}$  и стержня  $\bar{S}_{AO}$ . Направления реакций приняты в соответствии с указаниями п.п. 1.2.2 и 1.2.3.

При составлении уравнений равновесия будем следовать рекомендациям п. 2.1.

$$\sum F_{kx} = 0 , \quad -T_{AC} - S_{AO} \cos \alpha_x' = 0 ,$$

$$\sum F_{ky} = 0 , \quad -T_{AB} - S_{AO} \cos \alpha_y' = 0 ,$$

$$\sum F_{kz} = 0 , \quad -P - S_{AO} \cos \alpha_z' = 0 .$$

Значения косинусов углов  $\alpha_x'$ ,  $\alpha_y'$  и  $\alpha_z'$  найдем из прямоугольных треугольников  $OAD$ ,  $OAE$  и  $OAK$ .

Из уравнений равновесия находим

$$S_{AO} = -P \frac{OA}{OK} = -800\sqrt{3} \text{ Н}$$

$$T_{AB} = -P \frac{OE}{OK} = 240\sqrt{3} \text{ Н,}$$

$$T_{AC} = P \frac{OD}{OK} = 320\sqrt{3} \text{ Н.}$$

### 2.3. Силовой расчет конструкций из тел шаровой и цилиндрической формы

Если шар удерживается в равновесии гладкими плоскостями (рис. 2.13), то реакция  $\bar{N}_A$ ,  $\bar{N}_B$  и  $\bar{N}_C$  этих плоскостей будут проходить через центр шара (см. п. 1.2.1). Если же и активные силы  $\bar{F}$  и  $\bar{P}$  проходят через центр шара, то получается, что шар находится в равновесии под действием системы сходящихся сил. Значит, расчет по определению реакций связей в подобных случаях может выполняться по методике, указанной в п. 2.1. За объект равновесия следует брать шар. К такому же выводу придем, если будем рассматривать равновесие цилиндра (рис. 2.14), движение которого в плоскости, перпендикулярной его

продольной оси, ограничивается гладкими поверхностями. При определении реакций  $\bar{N}_A$  и  $\bar{N}_B$  за объект равновесия следует брать цилиндр.

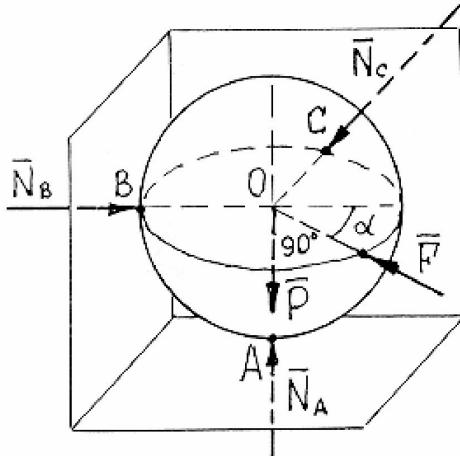


Рис. 2.13.

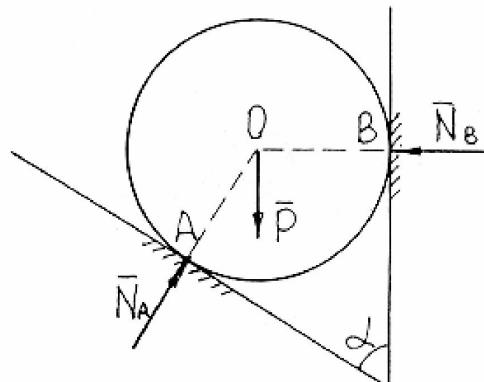


Рис. 2.14.

### ЗАДАЧА 2.6. (3)

Тяжелый однородный шар радиуса  $r$  и весом  $P$  удерживается в равновесии в положении, показанном на рис. 2.15. Определить давление шара на гладкую наклонную плоскость и силу растягивающую стержень  $BC$ .

**Решение:**

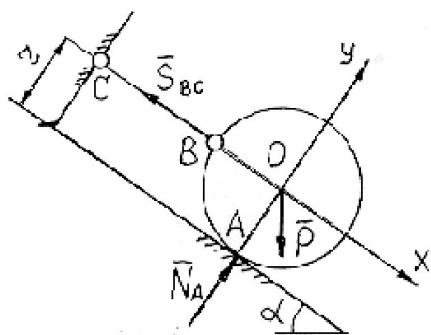


Рис. 2.15.

За объект равновесия принимаем шар, на него действуют три силы:  
 $\bar{N}_A$  – реакция плоскости,  $\bar{S}_{BC}$  – реакция стержня  $BC$   
Уравнения равновесия сил, приложенных к шару –

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \sin \alpha - S_{BC} = 0;$$

$$\sum F_{kp} = 0, \quad N_A - P \cos \alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$S_{BC} = P \sin \alpha, \quad N_A = P \cos \alpha.$$

Рекомендуем самостоятельно определить реакции связей в расчетных схемах на рис. 2.13, 2.14, считая,  $P$ ,  $F$  и  $\alpha$  заданными величинами.

Ответы:

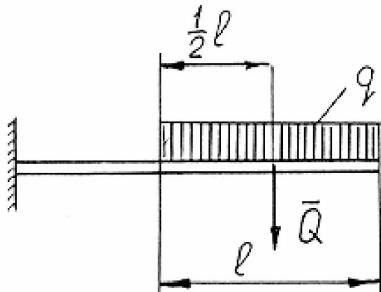
$$\text{для схемы на рис. 2.13} - N_A = P, \quad N_B = F \cos \alpha, \quad N_C = F \sin \alpha$$

$$\text{для схемы на рис. 2.14} - N_A = P \operatorname{cosec} \alpha, \quad N_B = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

#### 3.1. Общие указания по методике решения задач

В главе 3 рассматривается решение задач равновесия объектов, находящихся под действием системы сил, расположенной в одной плоскости (плоской системы сил).



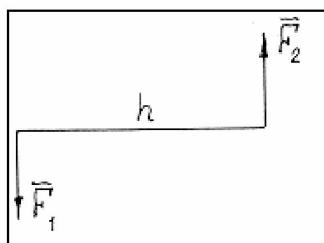
Плоская система сил может быть представлена не только совокупностью отдельных сосредоточенных сил, но и действием различного вида распределенных нагрузок, а также моментов. Примером распределенной нагрузки является равномерно распределенная нагрузка (рис. 3.1), которая характеризуется интенсивностью  $q$ . Интенсивность – величина силы, действующей на единицу длины участка действия нагрузки, ее размерные единицы –  $\text{Н}/\text{м}$ .

Рис. 3.1.

$$Q = ql$$

Равномерно распределенная нагрузка заменяется равнодействующей

$l$  – длина участка (рис. 3.1); приложена сила  $Q$  в середине участка действия распределенной нагрузки. Определение равнодействующей в случае более сложного закона распределения нагрузки рассматривается в соответствующих курсах лекций.



Действие на объект момента  $M$  означает действие пары сил, характеризуемого моментом  $M$ . Пара сил является, как и сила, самостоятельным элементом, представляющим собой совокупность двух равных параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 3.2). Пара сил оказывает на объект врачающее действие, которое характеризуется моментом пары.

Рис. 3.2.

В плоских задачах момент пары равен взятому со знаком “+” или “-“ произведению модуля одной из сил пары на ее плечо

$$M = \pm F_1 \cdot h \quad (3.1)$$

Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары. Знак момента определяется направлением вращательного действия: момент пары считается положительным, если вращение, производимое парой, наблюдается против хода часовой стрелки, отрицательным при вращении по ходу часовой стрелки. На рис. 3.2 момент пары равен

$$M = +F_1 \cdot h$$

В плоских задачах статики допускается изображение момента или в виде дуговой стрелки, или в виде пары сил (рис. 3.3), которые и определяют направление вращательного действия момента.

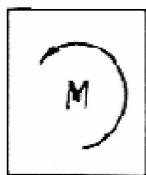


Рис.3.3.

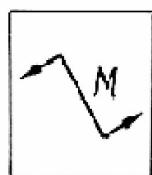
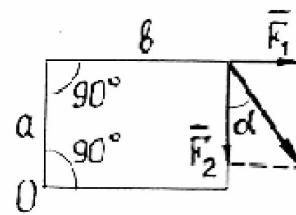


Рис.3.4



Рис.3.5.



Так как пару сил на плоскости можно переносить куда угодно, место приложения момента  $M$  на расчетной схеме не фиксируется. Модуль момента измеряется в Нм или в кНм. Вращательное действие на объект оказывает не только пары сил, но и отдельные сосредоточенные силы. Вращательный эффект силы относительно какого-либо центра характеризуется алгебраическим моментом силы относительно этого центра.

Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятое со знаком "+" или "-" произведение модуля силы на ее плечо (рис. 3.4):

$$M_O(\bar{F}) = \pm Fh, \quad (3.2)$$

где  $F$  – модуль силы;  $h$  – плечо силы.

Момент силы относительно центра считается положительным, если вращение, производимое силой, наблюдается против хода часовой стрелки, отрицательным – при вращении по ходу часовой стрелки. При вычислении момента силы относительно центра модуль силы бывает либо задан, либо является искомой величиной.

Плечом силы называется длина перпендикуляра, опущенного из центра ни линию действия силы.

Для определения плеча силы  $\bar{F}$  вдоль вектора этой силы проводится ее линия действия; из центра  $O$  опускается перпендикуляр на эту линию действия; по данным задачи вычисляется длина этого перпендикуляра, то есть плечо силы  $h$  относительно центра  $O$ .

В примере на рис. 3.4 ; знак момента – положительный, то есть

$$M_O(\bar{F}) = + F \cdot h = F \cdot OA \sin \alpha$$

В некоторых случаях для вычисления момента силы относительно центра удобнее пользоваться правилом Вариньона: момент равнодействующей относительно центра равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этого центра.

Рассмотрим это на конкретном примере (рис. 3.5). Для вычисления момента силы

$\bar{F}$  относительно центра  $O$  предварительно разложим ее на две составляющие  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , их модули равны

$$F_1 = F \sin \alpha, \quad F_2 = F \cos \alpha$$

Согласно правилу Вариньона получим

$$M_O(\bar{F}) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot b = -F(a \sin \alpha + b \cos \alpha)$$

Решение задач с использованием условия равновесия плоской системы сил выполняется в указанной в пункте 1.1 последовательности: выбирается объект равновесия; изображаются все

силы, действующие на объект; из условий равновесия определяются искомые величины.

Если объект равновесия представляет собой одно твердое тело, то такой объект будем называть простой конструкцией. Расчет простых конструкций рассмотрен в п. 3.3. Расчет составных конструкций, состоящих из нескольких твердых тел, связанных между собой, рассмотрен в п. 3.4.

### 3.2. Различные формы уравнений равновесия плоской системы сил

Аналитическое условие равновесия плоской системы сил выражается следующими тремя уравнениями равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0 , \quad (3.3)$$

$$\sum F_{ky} = 0 ,$$

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = 0 ,$$

где  $\sum F_{kx}$ ,  $\sum F_{ky}$  – суммы проекций всех сил на оси  $x$  и  $y$ ,  $\sum M_O(\bar{F}_k)$  – сумма моментов всех сил относительно центра  $O$ .

Форма уравнений равновесия (3.3) называется основной. Помимо основной могут использоваться также две следующих формы:

$$\sum F_{kx} = 0 , \quad (3.4)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0 ,$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0 ,$$

или

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0 , \quad (3.5)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0 ,$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0 .$$

При использовании уравнений равновесия в форме (3.4) следует учитывать, что ось  $x$  не должна быть перпендикулярна прямой  $AB$ ; при использовании формы (3.5) центры моментов  $A$ ,  $B$  и  $C$  не должны лежать на одной прямой.

Если на объект действует плоская система параллельных сил, условия равновесия выражаются двумя формами уравнений равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0 , \quad (3.6)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0 .$$

$$\text{или} \quad \sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad (3.7)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0$$

**y**

В форме (3.6) ось **y** следует выбирать параллельно силам, центр **A** выбирается произвольно. В форме (3.7) отрезок **AB** не должен быть параллелен силам. Решение каждой конкретной задачи должно быть наиболее рациональным. Это достигается как выбором направления осей координат и центров моментов, так и выбором формы уравнений равновесия.

**x** **y**

Направления осей координат **x** и **y** следует выбирать так, чтобы они были перпендикулярны неизвестным силам.

За центр моментов следует выбирать точку пересечения двух неизвестных сил или точку на линии действия неизвестной силы.

Рациональный выбор формы уравнений равновесия, направления осей координат и центров моментов позволяет составлять такие уравнения равновесия, каждое из которых содержит по одной неизвестной. Решение такой системы уравнений сопровождается минимумом вычислений.

### 3.3. Расчет простых конструкций

Как было указано в пункте 3.1, простыми будем называть конструкции из одного тела и связей, удерживающих его в равновесии.

Целью расчета, как правило, является определение сил реакций при заданной внешней нагрузке. В качестве объекта равновесия при расчете берется тело, находящееся в равновесии. Силы реакций связей направляются в соответствии с указаниями п. 1.2. Для решения каждой конкретной задачи выбирается наиболее удобная форма уравнений равновесия; выбираются соответствующие оси координат и центры моментов. Решение задачи производится в последовательности, указанной в п. 1.1.

Рассмотрим выполнение этих действий при решении типовых задач.

#### ЗАДАЧА 3.1. (7)

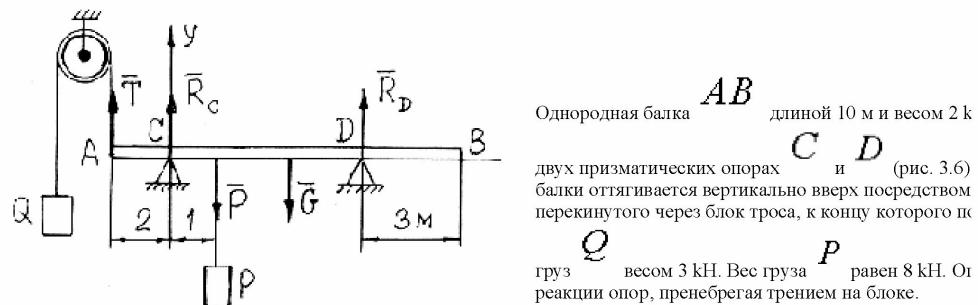


Рис. 3.6.

**Решение:**

За объект равновесия примем балку **AB**.

На балку действуют активные силы: **P**, **G** – вес балки, приложенный в ее середине,

**T** – сила натяжения троса, равная по модулю весу груза **Q**.

Реакции опор **R\_C** и **R\_D** направлены перпендикулярно балке **AB** согласно указаниям п. 1.2.1.

**AB**

Таким образом, на балку **AB** действует плоская система параллельных сил. Для решения

будем использовать уравнения равновесия в форме (3.6). Ось **y** проведем параллельно силам; в качестве центра моментов выберем точку **C**, лежащую на линии действия неизвестной силы **R\_C**.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{hy} = 0, \quad T + R_C - P - G + R_D = 0,$$

$$\sum M_C (\bar{F}_k) = 0, \quad -T \cdot 2 - P \cdot 1 - G \cdot 3 + R_D \cdot 5 = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$R_D = 4 \text{ kH},$$

$$R_C = 3 \text{ kH}.$$

из второго –

Полученные результаты должны удовлетворять любым другим уравнениям равновесия, то есть обращать их в тождество. Поэтому дополнительные уравнения равновесия можно использовать как проверочные для контроля правильности вычислений. Проверьте, что

$$\sum M_D (\bar{F}_k) = 0$$

уравнение равновесия  
обратится в тождество.

при подстановке найденных  $R_C$  и  $R_D$

### ЗАДАЧА 3.2 (8)



Рис.3.7.

**Решение:**

Примем за объект равновесия балку  $AB$ . На балку действуют активные силы:  $\bar{F}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $M$  – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, пара сил с моментом  $M$ . Согласно п. 3.1 равнодействующая равномерно распределенной нагрузки приложена посередине участка действия нагрузки, величина ее равна

$$Q = ql = 1/5 \cdot 6 = 9 \text{ кН.}$$

Реакцию заделки, согласно п. 1.2.7 представим силами  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  и моментом заделки  $M_A$ .

На балку действует плоская система сил. Для решения задачи используем уравнения

равновесия в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рис. 3.7, за центр моментов возьмем точку  $A$ , в которой пересекаются две неизвестные силы  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ .

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \quad X_A = 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \quad Y_A - Q - F = 0, \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \quad M_A - Q \cdot 3 + M - F \cdot 10 = 0.\end{aligned}$$

Момент заделки  $M_A$  и момент активной пары  $M$  учитываются только в уравнении моментов, так как силы, составляющие пару, в проекции на любую ось дают ноль. Оба момента в уравнении имеют знак “+”, так как соответствующие им пары стремятся повернуть балку против хода часовой стрелки.  
Каждое из составленных уравнений содержит только одну неизвестную величину. Решая уравнения, получим

$$X_A = 0, \quad Y_A = 13 \text{ kH}, \quad M_A = 47 \text{ kNm}.$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 13 \text{ kH}.$$

Модуль силы реакции заделки  $R_A$  равен 13 кН.  
Следует заметить, что отсутствие горизонтальных составляющих активной нагрузки формально позволяет отнести данную задачу к случаю равновесия системы параллельных сил на плоскости, то есть заранее учесть, что горизонтальная сила реакции  $X_A$  равна нулю.

### ЗАДАЧА 3.3 (10)

Прямоугольная плита, весом которой пренебрегаем, размером  $a \times 2a$  закреплена с помощью трех стержней в вертикальной плоскости. На плиту действует сила  $\bar{F} = 20$  кН. Определить усилия в стержнях.

**Решение:**

Примем за объект равновесия плиту. На нее действует одна активная сила  $\bar{F}$ . Силы реакции стержневых опор направлены вдоль соответствующих стержней. В совокупности эти силы представляют собой плоскую систему сил.

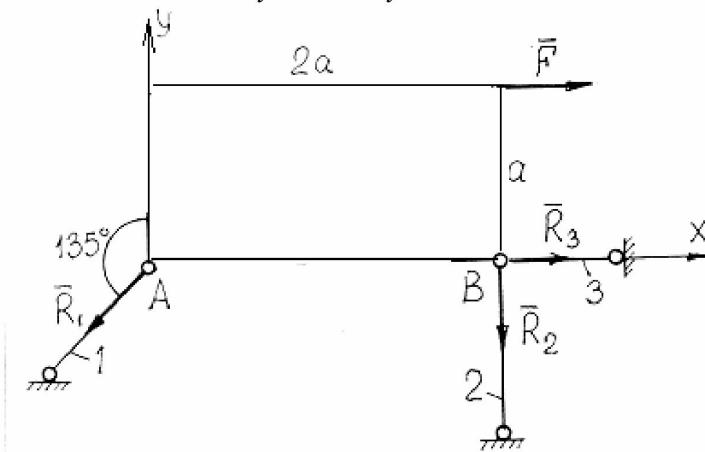


Рис. 3.8.

Уравнения равновесия этой системы сил составим в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рис. 3.8. За центр моментов выберем точку  $A$ , в которой пересекаются две

неизвестные силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_3$ . Хотя в точке  $B$  также пересекаются две неизвестные силы, она менее удобна в качестве моментного центра, так как более сложно определяется момент силы  $\bar{R}_1$  относительно центра  $B$ .

Уравнения равновесия запишутся в виде

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -F - R_1 \cos 45^\circ + R_3 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -R_2 - R_1 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad Fa - R_2 \cdot 2a = 0.$$

Решая уравнения, найдем

$$R_1 = -7,07 \text{ kH}, \quad B \quad R_3 = 15 \text{ kH}.$$

### ЗАДАЧА 3.4 (12)

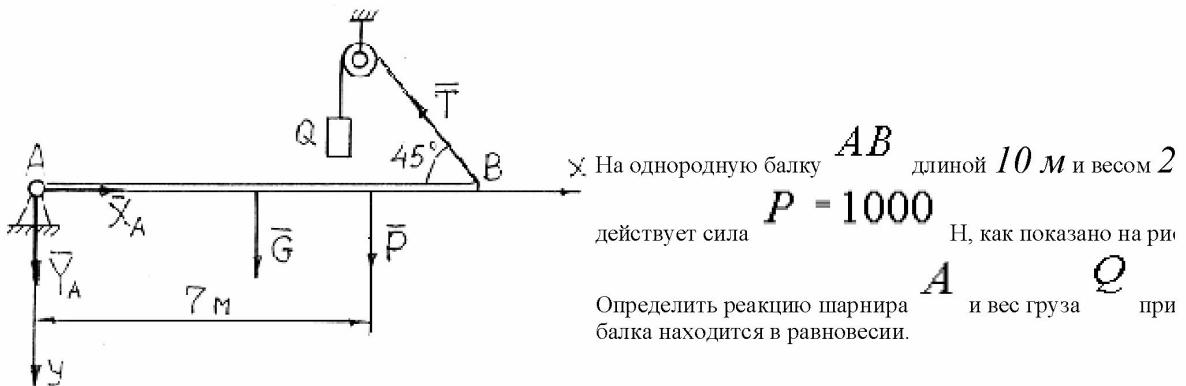


Рис. 3.9.

**Решение:**

За объект равновесия примем балку  $AB$ . На балку действуют активные силы:  $P$  и вес балки  $G$ .

Реакция шарнира  $A$  представлена двумя составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . Сила натяжения нити  $\bar{T}$ , действующая на балку, равна по модулю весу груза  $Q$ , подвешенного на конце этой нити.

Совокупность этих сил представляет собой произвольную плоскую систему сил. Учитывая, что в точке  $A$  пересекаются две неизвестные силы, уравнения равновесия системы составим в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рисунке. В качестве центра моментов выбрана точка  $A$ .

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & X_A - T \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_A + G + P - T \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, & -G \cdot 5 - P \cdot 7 + T \cdot 10 \cos 45^\circ &= 0.\end{aligned}$$

При составлении третьего уравнения равновесия были использованы рекомендации, изложенные в п. 3.1.

Решая составленную систему уравнений, получим

$$Q = T = 2405 \text{ Н}, X_A = 1700 \text{ Н}, Y_A = -1300 \text{ Н}.$$

### ЗАДАЧА 3.5 (13)

Ферма весом 100 кН нагружена силами  $P = 20$  кН и  $Q = 80$  кН. Определить реакции опор  $A$  и  $B$ , если центр тяжести фермы находится в середине фермы.

**Решение:**

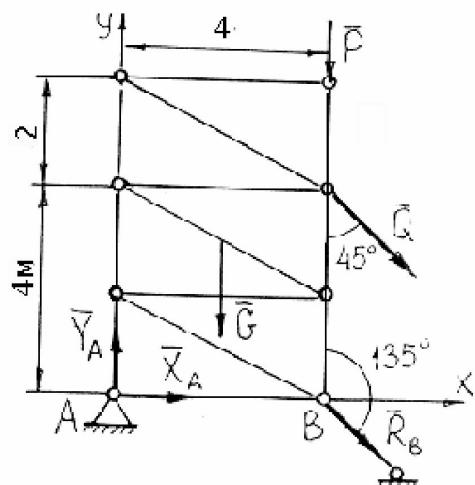


Рис.3.10

Примем за объект равновесия ферму в целом. Это возможно, та несмотря на то, что ферма не является твердым телом, она предст жесткую неизменяемую конструкцию, к ней могут применяться и равновесия. На ферму действуют активные силы: вес фермы

$\bar{P}$  и  $\bar{Q}$ . Реакцию шарнира  $A$  разложим на две составляю  $\bar{Y}_A$  и  $\bar{X}_A$ . Силу реакции  $\bar{R}_B$  опорного стержня  $B$  направим вдс стержня. Эти силы образуют плоскую систему сил. Уравнения ра системы составим в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показа 3.10; в качестве центра моментов выберем точку  $A$  в которой : две неизвестные силы.

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & X_A + R_B \cos 45^\circ + Q \sin 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_A - R_B \cos 45^\circ - G - P - Q \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, & -G \cdot 2 - P \cdot 4 - R_B \cdot 4 \sin 45^\circ - \\ && - Q \cos 45^\circ \cdot 4 - Q \sin 45^\circ \cdot 4 &= 0.\end{aligned}$$

При вычислении момента силы  $\bar{Q}$  относительно центра  $A$  было использовано правило Вариньона (см. п. 3.1): сила  $\bar{Q}$  предварительно разложена на две составляющие

(горизонтальную –  $Q \sin 45^\circ$  и вертикальную –  $Q \cos 45^\circ$ ), затем были вычислены моменты каждой из составляющих относительно центра  $A$ .  
Решая составленную систему уравнений, найдем

$$R_B = -259 \text{ kH}, X_A = 126,6 \text{ kH}, Y_A = -6,6 \text{ kH}.$$

### ЗАДАЧА 3.6 (11)

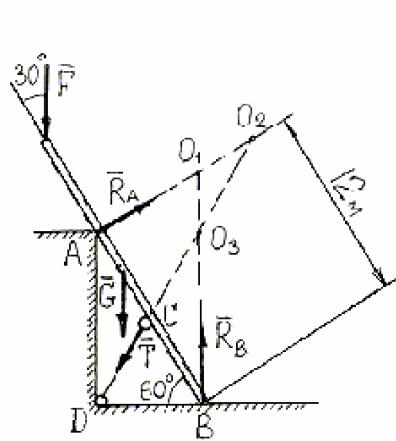


Рис. 3.11.

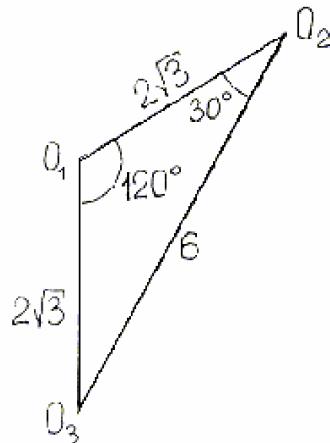


Рис. 3.12.

Балка весом  $12 \text{ kH}$  и длиной  $18 \text{ M}$  нагружена силой  $F = 6 \text{ kH}$  удерживается в равновесии стержнем  $CD$  в положении, указанном на рис. 3.11. Определить усилие в стержне  $CD$  и реакции опор в точках  $A$  и  $B$ , не учитывая трение.

**Решение:**

За объект равновесия примем балку. На нее действуют активные силы:  $\bar{F}$  и вес балки  $\bar{G}$ . Сила реакции острого выступа в точке  $A$  направлена перпендикулярно поверхности балки. Сила реакции гладкой поверхности в точке  $B$  направлена перпендикулярно этой поверхности. Реакция стержня  $CD$  – сила  $\bar{T}$  направлена вдоль этого стержня.  
В совокупности указанные силы образуют плоскую произвольную систему сил. Уравнения равновесия этой системы составим в форме (3.5). В качестве моментных центров выберем точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  в местах пересечения линий действия сил  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_B$ ;  $\bar{T}$  и  $\bar{R}_A$ ;  $\bar{T}$  и  $\bar{R}_B$  соответственно. Заметим, что точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  не лежат на одной прямой в соответствии с условием п. 3.2.

$$\sum M_{O_1}(\bar{F}_k) = 0, \quad F \cdot 18 \sin 30^\circ + G \cdot 9 \sin 30^\circ - T \cdot \sqrt{3} = 0,$$

$$\sum M_{O_2}(\bar{F}_k) = 0, \quad F \cdot 12 + G \cdot 7,5 - R_B \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_{O_3}(\bar{F}_k) = 0, \quad F \cdot 9 + G \cdot 4,5 - R_A \cdot 3 = 0.$$

Следует отметить, что за внешней простотой составленной системы уравнений равновесия, каждое из которых содержит только по одной неизвестной величине, скрыта кропотливая работа по вычислению моментов каждой из сил. Предварительно были вычислены расстояния  $O_1O_2 = 2\sqrt{3}$  м;  $O_1O_3 = 2\sqrt{3}$  м;  $O_2O_3 = 6$  м (рис. 3.12). Затем плечо каждой силы, согласно определению, подсчитывалось как длина перпендикуляра, опущенного из

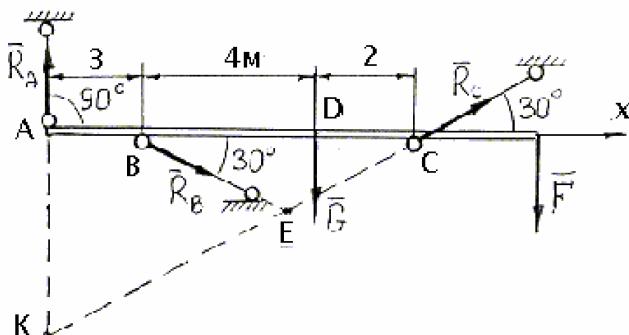
моментной точки на линию действия соответствующей силы. Так, плечо  $\bar{G}$  относительно  $O_2$  равно

$$9 \cos 60^\circ + O_1O_2 \cos 30^\circ = 7,5 \text{ м.}$$

Решая составленную систему уравнений, найдем

$$T = 36\sqrt{3} \text{ кН; } R_B = 54 \text{ кН; } \\ R_A = 36 \text{ кН.}$$

### ЗАДАЧА 3.7 (14)



Горизонтальная балка длиной 12 м удерживается равновесием с помощью трех стержней, имеющих шарниры. На балку действует сила

$F = 500$  Н и приложен в точке

$D$  (рис. 3.13)

Рис. 3.13.

### Решение:

Примем за объект равновесия балку. На нее действуют активные силы:  $\bar{F}$  и вес балки  $\bar{G}$ , приложенный в точке  $D$ . Силы реакции опорных стержней направлены вдоль каждого из них. Эти силы образуют плоскую произвольную систему сил. Уравнения равновесия этой системы составим в форме (3.4). Ось  $x$  направим вдоль балки, в качестве моментных центров выберем точки  $K$  и  $E$  в местах пересечения линий действия сил  $R_A$

и  $\bar{R}_C$ ,  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_C$  соответственно.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_B \cos 30^\circ + R_C \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_K(\bar{F}_k) = 0, \quad -G7 - F \cdot 12 - R_B \cdot 3 \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_E(\bar{F}_k) = 0, \quad -R_A \cdot 6 - P \cdot 1 - F \cdot 5 = 0.$$

Решая составленную систему уравнений, найдем

$$R_A = -583,3 \text{ H}, \quad R_B = -866,7 \text{ H}, \quad R_C = 866,7 \text{ H}.$$

Знак “-“ в значениях усилий в стержнях  $R_A$  и  $R_B$  указывает на то, что эти усилия направлены в противоположную сторону.

### 3.4. Расчет составных конструкций

При решении задач статики часто приходится рассматривать равновесие сложных объектов, состоящих из отдельных твердых тел, связанных друг с другом в какую-либо составную конструкцию. При расчете такой конструкции следует внимательно отнести к выбору объектов равновесия.

Прежде всего следует заметить, что для каждой составной конструкции можно выбрать столько независимых объектов равновесия, сколько отдельных твердых тел входит в состав этой конструкции. В качестве объектов равновесия можно выбирать любое из тел этой конструкции; любую группу связанных между собой тел, являющуюся частью конструкции; конструкцию в целом. От выбора объектов равновесия зависит рациональность решения задачи.

Если в качестве объекта равновесия выбрана конструкция в целом, то при расчете помимо активных сил учитываются реакции только внешних связей.

Если в качестве объекта равновесия выбрана какая-либо часть конструкции, то при расчете помимо активных сил учитываются силы реакции внешних связей, а также реакции связей со стороны отброшенных частей конструкции.

#### ЗАДАЧА 3.8 (9)

Мост состоит из трех ферм:  $AK$  – весом  $2000 \text{ kH}$ ,  $KN$  – весом  $8000 \text{ kH}$  и  $ND$  – весом  $2000 \text{ kH}$ . Центр тяжести каждой фермы расположен посередине. На мосту находится поезд, создающий распределенную нагрузку интенсивностью

$$q = 40 \text{ kH/m}.$$

Определить реакции опор  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Размеры указаны на расчетной схеме (рис. 3.14).

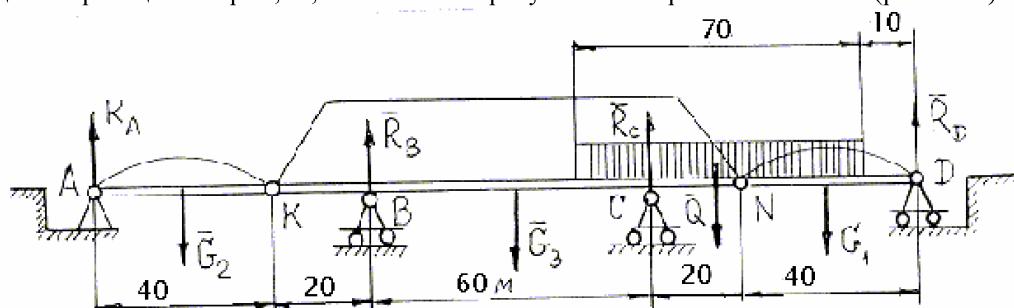


Рис. 3.14.

**Решение:**

Мост представляет собой сложную конструкцию, состоящую из трех ферм, каждая из которых может рассматриваться как твердое тело. Следовательно, всего можно выбрать три независимых объекта равновесия.

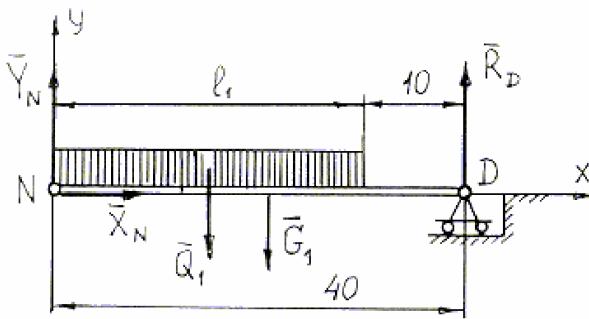


Рис.3.15.

В качестве первого объекта равновесия в ферму  $ND$  (рис. 3.15). На ферму действуют активные силы: равнодействующая равномерно распределенной нагрузки  $Q_1 = ql_1 = 120$  вес фермы  $R_1$ . Реакция подвижной шарнирной опоры в точке  $D - \bar{R}_D$  направлена перпендикулярно опорной поверхности. Реакция шарнира  $A$ , соединяющего ферму с остальной конструкцией, разложена на составляющие  $\bar{Y}_N$ .

Уравнения равновесия плоской системы сил, действующей на ферму  $ND$ , составим в форме (3.3),

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & X_N &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_N - Q_1 - G_1 + R_D &= 0, \\ \sum M_N(\bar{F}_k) &= 0, & -Q_1 \cdot 15 - G_1 \cdot 20 + R_D \cdot 40 &= 0. \end{aligned}$$

Решая составленную систему уравнений, найдем

$$R_D = 1450 \text{ кН}, \quad X_N = 0, \quad Y_N = 1750 \text{ кН}.$$

Учитывая, что активная нагрузка, действующая на все элементы моста, представлена только вертикальными силами, усилия во всех неподвижных шарирных опорах будем в дальнейшем представлять только вертикальными составляющими. Это позволяет считать, что все объекты находятся под действием плоской системы параллельных сил.

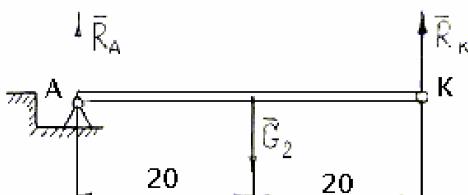


Рис. 3.16.

В качестве второго объекта равновесия выберем ферму  $AK$ . На нее действует единственная активная сила – вес фермы  $G_2$ . В соответствии с вышесказанным реакции шарниров в точках  $A$  и  $K$  представляются вертикальными силами  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_K$ . Уравнения равновесия соответствующей плоской системы параллельных сил составим в виде

*A* и *K*

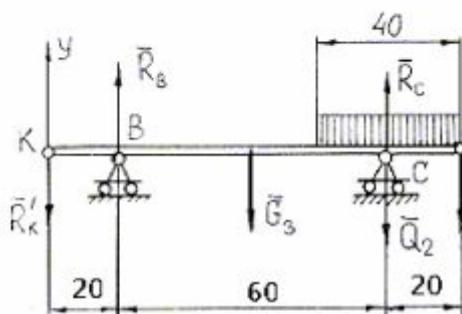
В качестве моментных центров выберем точки

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad R_K \cdot 40 - G_2 \cdot 20 = 0.$$

$$\sum M_K(\bar{F}_k) = 0, \quad G_2 \cdot 20 - R_2 \cdot 40 = 0.$$

$$T_{KE} = 66,3 \text{ kH.}$$

Решая систему уравнений, найдем



В качестве третьего объекта равновесия выберем ферму *KI*

3.17). На ферму действуют активные силы: вес фермы  $\bar{G}_3$  и равнодействующая равномерно распределенной нагрузки  $\bar{Q}_2$  приложенная посередине участка действия нагрузки в точке *C*

Рис. 3.17.

Силы реакции подвижных шарирных опор в точках *B* и *C* направлены перпендикулярно опорным поверхностям, то есть по вертикали вверх. Силы реакции шарниров в точках *K* и *A* направлены вниз:  $\bar{R}'_K = -\bar{R}_K$ ,  $\bar{R}'_N = -\bar{R}_N$ . Силы, действующие на ферму *KN*, образуют плоскую систему параллельных сил. Уравнения равновесия этой системы сил составим в форме (3.6). Ось *y* направим параллельно линиям действия сил; за центр моментов примем точку *C*.

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -R_K + R_B - G_3 - Q_2 + R_C - R_N = 0.$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0, \quad R_K \cdot 80 - R_B \cdot 60 + G_3 \cdot 30 - R_N \cdot 20 = 0.$$

$$R_B = 1750 \text{ kH}, \quad R_C = 7600 \text{ kH}.$$

Решая систему уравнений, найдем Для проверки правильности решения задачи в качестве объекта равновесия выберем мост в целом (рис. 3.14).

На мост действуют активные силы: силы тяжести  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$  и равнодействующая равномерно распределенной нагрузки

$$Q = ql = 40 \cdot 70 = 2800 \text{ kH.}$$

*B*, *C* и *D*

Силы реакции подвижных шарирных опор в точках *B*, *C* и *D* направлены перпендикулярно соответствующим опорным поверхностям, то есть вверх по вертикали;

реакция неподвижной шарнирной опоры в точке  $A$ , вследствие отсутствия горизонтальных активных сил, также направлена по вертикали вверх.

Уравнения равновесия соответствующей системы параллельных сил на плоскости составим

в форме (3.6). Ось  $y$  направим по вертикали вверх, в качестве центра моментов примем точку  $A$ .

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_A - G_1 + R_B - G_2 - R_C - Q - G_3 + R_D = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -G_1 \cdot 20 + R_B \cdot 60 - G_2 \cdot 90 + R_C \cdot 120 - Q \cdot 135 - G_3 \cdot 160 + R_D \cdot 180 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что подстановка найденных ранее значений сил реакций превращает эти уравнения в тождества.

### ЗАДАЧА 3.9 (15)

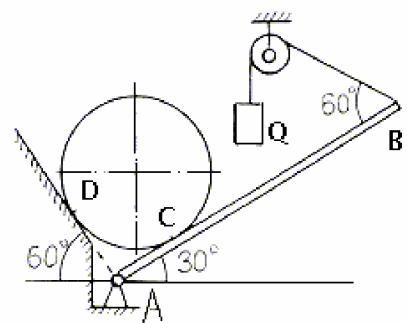


Рис. 3.18.

Однородный цилиндр весом  $P = 10$  Н радиуса  $r = 12$  см и однородный стержень  $AB$  весом  $Q = 12$  Н и длиной  $2a$  находятся в равновесии, соприкасаясь между собой в точке стержня  $AB$  в точке  $B$  привязана нить, перекинутая чрез точку  $C$  к другому концу нити подвешен груз  $Q$ . Определить реакции  $R_D$  и  $R_C$  в точках  $D$  и  $C$ .

#### Решение:

В качестве первого объекта равновесия выберем цилиндр (рис. 3.19). На цилиндр действует одна активная сила – вес цилиндра  $P$ . Силу реакции внешней гладкой опоры в точке

$D$  направим перпендикулярно опорной поверхности; силу реакции со стороны стержня  $AB$

в точке  $C$  направим перпендикулярно стержню. Эти силы образуют систему сходящихся сил на плоскости; из них две силы являются неизвестными. Для их определения составим два уравнения равновесия.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_D - P \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad R_C - P \cos 30^\circ = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем  $R_D = 5$  Н,  $R_C = 8,66$  Н.

В качестве второго объекта равновесия выберем стержень  $\overline{AB}$  (рис. 3.20). На стержень действует одна активная сила – вес стержня  $\bar{G}$ . Сила реакции неподвижного шарнира разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ ; сила натяжения нити направлена вдоль нити и равна по модулю весу подвешенного груза  $Q$ ; сила реакции  $\bar{R}'_C$ , действующая со стороны цилиндра, направлена перпендикулярно стержню.

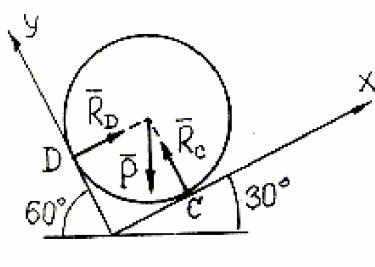


Рис. 3.19.

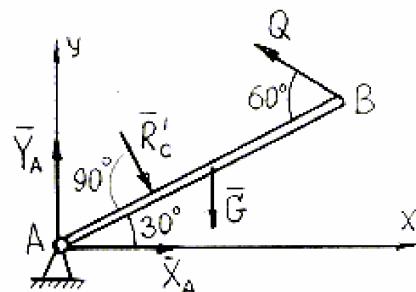


Рис. 3.20.

Уравнения равновесия этой системы сил составим в основной форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рисунке; в качестве центра моментов выберем точку  $A$ .

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_C \cos 60^\circ - Q \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - G - R_C \cos 30^\circ + Q \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -R_C \cdot 12 + Q \cdot 48 \sin 60^\circ - G \cdot 24 \cos 30^\circ = 0.$$

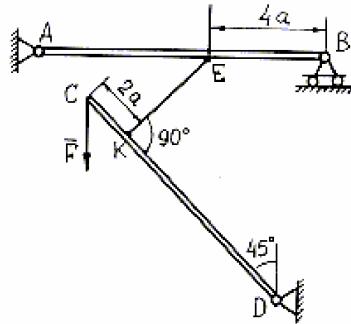
При составлении уравнения моментов учтено, что плечо силы  $R'_C$  относительно точки  $A$  равно радиусу цилиндра  $r$ .  
Решая систему уравнений, найдем

$$Q = 8,5 \text{ Н}, \quad X_A = 3,03 \text{ Н}, \quad Y_A = 15,25 \text{ Н}.$$

Полная сила реакции шарнира  $A$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 15,5 \text{ Н}.$$

### ЗАДАЧА 3.10 (16)



Две однородные балки  $AB$  и  $CD$  длиной  $10a$  и весом  $P =$   
каждая удерживаются в равновесии с помощью связей, изображенных на ри-

3.21. Определить реакции связей, если на балку  $CD$  действует вертикальная сила  $F = 60$  кН.

Рис. 3.21.

**Решение:**

В качестве первого объекта выберем балку  $CD$  (рис. 3.22).

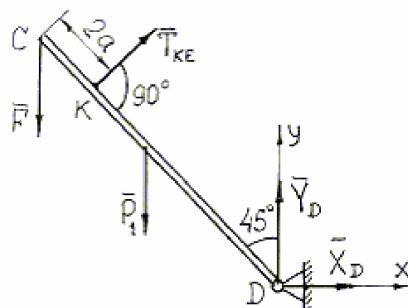


Рис. 3.22

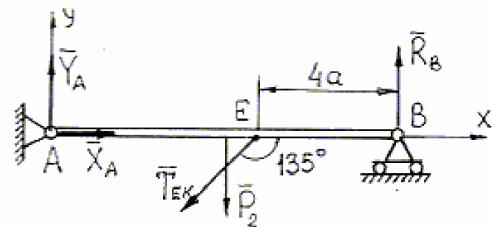


Рис. 3.23.

На балку действуют активные силы: заданная сила  $\bar{F}$  и вес балки  $\bar{P}_1$ . Сила реакции неподвижной шарнирной опоры разложена на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\bar{X}_D$  и  $\bar{Y}_D$ . Реакция невесомого шарнирного стержня  $EK$ , соединяющего балку  $CD$  с балкой  $AB$ , направлена вдоль стержня  $EK$ . Эти силы образуют плоскую систему сил: три из них являются неизвестными. Для их определения составим уравнения равновесия в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рисунке, в качестве центра моментов выбрана точка  $D$ .

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_D + T_{KE} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_D - P_1 + T_{KE} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = 0, \quad F \cdot 10a \cos 45^\circ - T_{KE} \cdot 8a + P_1 \cdot 5a \cos 45^\circ = 0.$$

Решая составленную систему уравнений, найдем

$$T_{KE} = 66,3 \text{ кН}, \quad X_D = -46,87 \text{ кН}, \quad Y_D = 43,1 \text{ кН}.$$

В качестве второго объекта равновесия выберем балку  $AB$  (рис. 3.23). На балку действует единственная активная сила – вес балки  $\bar{P}_2$ . Сила реакции неподвижной шарнирной опоры  $A$  представлена составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ ; сила реакции  $\bar{R}_B$  подвижной шарнирной опоры  $B$  направлена по вертикали, сила реакции стержня  $EK$ ,  $\bar{T}_{EK} = -\bar{T}_{KE}$ . Эти силы образуют плоскую систему сил, из которых три являются неизвестными. Для их определения составим уравнения равновесия в форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на рисунке, в качестве центра моментов выбрана точка  $A$ .

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - T_{EK} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - T_{EK} \cos 45^\circ + R_B = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P_2 \cdot 5a - T_{EK} \cdot 6a \cos 45^\circ + R_B \cdot 10a = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем

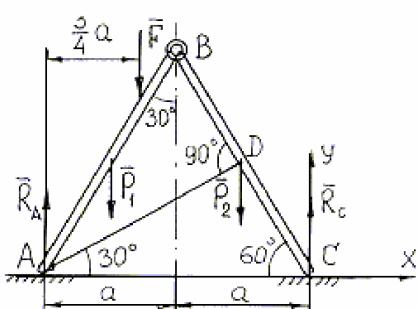
$$R_B = 43,1 \text{ kH}, \quad X_A = 46,87 \text{ kH}, \quad Y_A = 33,77 \text{ kH}.$$

### ЗАДАЧА 3.12 (17)

Две однородные балки  $AB$  и  $BC$  (рис. 3.24) весом  $2$  кН каждая, соединенные между собой шарниром  $B$  и веревкой  $AD$ , находятся в равновесии, опираясь в точках  $A$  и  $C$  на гладкий горизонтальный пол. На балку  $AB$  действует вертикальная сила  $\bar{F} = 8$  кН.

Определить реакции опор в точках  $A$  и  $C$ , усилие в шарнире  $B$  и натяжение веревки  $AD$ .

**Решение:**



В качестве первого объекта выберем конструкцию в целом (рис. 3.12). Действует активные силы: заданная сила  $\bar{F}$  и силы тяжести обеих балок  $\bar{P}_2$ . Силы реакции гладкой горизонтальной поверхности в точках  $A$  и  $C$  направлены перпендикулярно этой поверхности. Отметим, что силы reaction  $R_B$  и веревки  $M_A$  не показаны, так как для конструкции в целом являются внутренними.

Рис. 3.24.

Силы, действующие на объект, образуют плоскую систему параллельных сил; из них две силы  $\bar{R}_A$  и  $\bar{R}_C$  являются неизвестными. Для их определения составим уравнения равновесия в форме (3.6)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad R_A - P_1 - F - P_2 + R_C = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P_1 \frac{a}{2} - F \frac{3}{4}a - P_2 \frac{3}{2}a + R_C \cdot 2a = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем  $R_C = 5$  кН,  $R_A = 7$  кН.

В качестве второго объекта равновесия выберем балку  $BC$  (рис. 3.25).

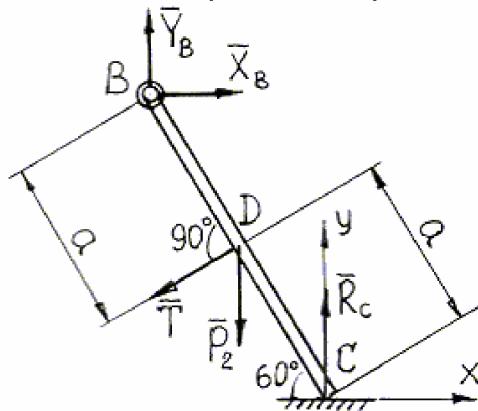


Рис. 3.25.

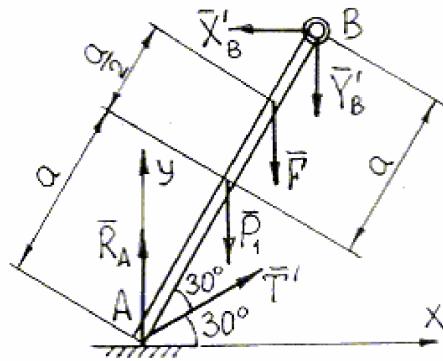


Рис. 3.26

На балку действует одна активная сила – вес балки  $\bar{P}_2$ . К силам реакции, действующим на балку, относятся  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$  – составляющие силы реакции шарнира  $B$ , сила  $\bar{T}$  натяжения нити  $AD$  и сила реакции гладкой поверхности  $\bar{R}_C$ . Эти силы образуют плоскую систему сил. Уравнения равновесия составим в основной форме (3.3). Оси координат  $x$  и  $y$  показаны на чертеже. В качестве центра моментов выбрана точка  $B$ . Уравнения равновесия имеют вид

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_B - T \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_B - P_2 - T \cos 60^\circ + R_C = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad R_C \cdot a - P_2 \frac{a}{2} - Ta = 0.$$

Решая систему уравнений, найдем

$$T = 4 \text{ кН}, \quad X_B = 2\sqrt{3} \text{ кН}, \quad Y_B = -1 \text{ кН}.$$

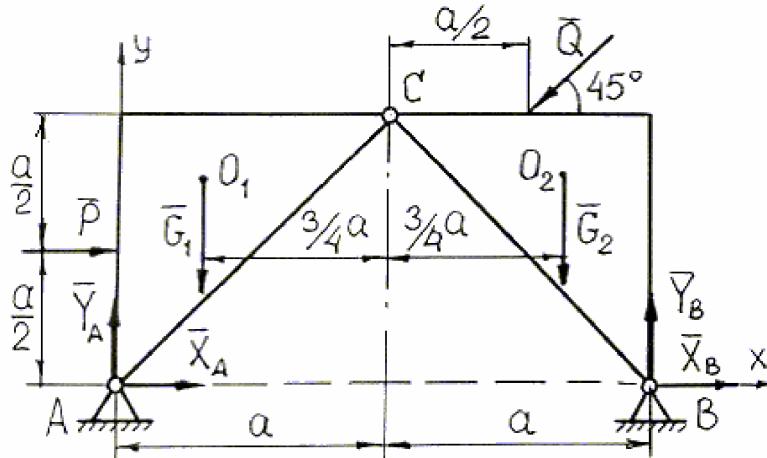
Для проверки правильности вычислений воспользуемся третьим объектом равновесия –

балкой  $AB$  (рис. 3.26). На нее действуют активные силы: сила  $\bar{F}$  и вес балки  $\bar{R}_A$ . Сила натяжения нити  $\bar{T}'$ , а также составляющие  $\bar{X}'_B, \bar{Y}'_B$  силы реакции шарнира  $B$ . В число сил реакции входит также сила реакции поверхности —  $y$ . Эти силы образуют плоскую систему сил. Уравнения равновесия этой системы сил составим в форме (3.3)

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & -X'_B + T \cos 30^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & R_A - Y'_B - F - P_1 + T' \cos 60^\circ &= 0, \\ \sum M_A(\bar{F}) &= 0, & -P_1 \frac{a}{2} - F \frac{3}{4}a - Y'_B a + X'_B a \sqrt{3} &= 0.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что подстановка в эти уравнения ранее найденных значений сил превращает эти уравнения в тождества.

### ЗАДАЧА 3.13 (18)



Трехшарнирная арка  $ABC$  состоит из двух симметричных весом 20 кН каждая, соединенных шарниром  $C$ . В точках  $A$  и  $B$  шарнирно присоединена к фундаменту. Центры тяжести каждой полуарки находятся в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

Рис. 3.27.

На арку действуют две силы

$$P = 40 \text{ кН} \text{ и } Q = 20\sqrt{2} \text{ кН.}$$

Определить реакции опор  $A$  и  $B$  и усилие в шарнире  $C$ .

#### Решение:

Трехшарнирная арка представляет собой составную конструкцию из двух тел. Следовательно, для решения задачи следует выбрать два объекта равновесия. На первый взгляд задача может показаться статически неопределенной, так как на любой из возможных объектов равновесия действует по четыре неизвестные силы — составляющие силы реакции шарниров  $A, B$  или  $C$ , а число уравнений равновесия для каждого из объектов равно

трем. Однако, учитывая, что силы реакции внутреннего шарнира  $C$ , действующие на левую и правую полуарки, равны по модулю и противоположны по направлению, всего в задаче имеем шесть неизвестных величин. Для их определения можем составить в совокупности шесть уравнений равновесия для двух выбранных объектов равновесия. В качестве первого объекта равновесия выберем конструкцию в целом. На нее действуют активные силы: силы

$\bar{Q}$  и  $\bar{P}$ , силы тяжести каждой полуарки  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$ , а также силы реакции шарниров

$A$  и  $B$ , каждую из которых разложим на две взаимно перпендикулярные составляющие

(рис. 3.27). Силы реакции в шарнире  $C$  не показываем, так как они являются силами внутренними. Действующие на конструкцию силы образуют плоскую систему сил. Уравнения равновесия этой системы сил составим в форме (3.4)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + P - Q \cos 45^\circ = 0,$$

(a)

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \frac{a}{2} - G_1 \frac{a}{4} - G_2 \frac{7}{4}a - Y_B \cdot 2a -$$

$$-Q \cos 45^\circ \cdot \frac{3}{2}a + Q \cos 45^\circ a = 0.$$

(б)

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \frac{a}{2} + G_1 \frac{7}{4}a + G_2 \frac{a}{4} - Y_A \cdot 2a -$$

$$-Q \cos 45^\circ a - Q \cos 45^\circ \frac{a}{2} = 0.$$

(в)

При определении момента силы  $Q$  относительно точек  $A$  и  $B$  было использовано правило Вариньона (см. п. 3.1).

Поскольку составленных уравнений недостаточно для определения всех неизвестных, которые в них содержатся, рассмотрим второй объект равновесия – полуарку  $AC$  (рис.

3.28). На нее действуют заданная сила  $\bar{P}$ , вес полуарки  $\bar{G}_1$ , а также силы реакции

внешнего шарнира  $A$  ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ ) и внутреннего шарнира  $C$  ( $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ ). Силы, действующие на балку, образуют плоскую систему сил. Уравнения равновесия этой системы сил составим в форме (3.3)

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_C + P = 0,$$

$$\begin{array}{ll} (\Gamma) & \sum F_{ky} = 0, \\ (\Delta) & Y_A + Y_C - G_1 = 0, \end{array}$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0, \quad -Y_A a + X_A a + P \frac{a}{2} + G_1 \frac{3}{4} a = 0.$$

(e)

Из уравнения (б) находим

$$Y_B = 35 \text{ kH};$$

Из уравнения (в) –

$$Y_A = 25 \text{ kH};$$

Из уравнения (д) –

$$Y_C = -5 \text{ kH};$$

Из уравнения (е) –

$$X_A = -15 \text{ kH};$$

Из уравнения (г) –

$$X_C = -25 \text{ kH};$$

Из уравнения (а) –

$$X_B = -5 \text{ kH}.$$

Как и в предыдущих примерах для проверки правильности решения может быть использован дополнительный объект равновесия – полуарка  $CB$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

##### 4.1. Равновесие тела при наличии трения скольжения

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что поверхности, ограничивающие движение объекта, являются гладкими. Реакция гладкой поверхности направлена по нормали к ней. Если поверхность является негладкой, то в точке контакта объекта с такой

поверхностью возникает сила трения скольжения  $\bar{F}_{mp}$ , направленная противоположно возможной скорости проскальзывания точки контакта. Опытом установлено, что сила трения при равновесии может принимать значения от нуля до некоторой максимальной величины. Максимальной величиной она достигает в предельном состоянии равновесия и определяется в этом случае по формуле

$$\bar{F}_{mp} = f \cdot N, \quad (4.1)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения,  $N$  – нормальная реакция.

При решении задач с учетом трения, обычно рассматриваются только предельные состояния равновесия тел. Последовательность решения остается прежней (см. п. 1.1): выбирается объект решения; показываются действующие на объект силы, включая силы трения; составляются уравнения равновесия с учетом дополнительной зависимости (4.1); из уравнений определяются неизвестные величины. Таким образом, новым элементом методики задач статики при наличии трения скольжения является учет дополнительных сил трения, определяемых по формулам вида (4.1).

##### ЗАДАЧА 4.1 (19)

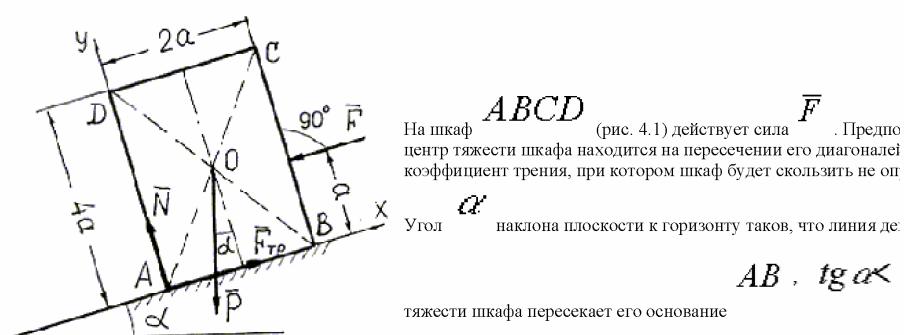


Рис. 4.1.

##### Решение:

Выбираем за объект равновесия шкаф. Рассмотрим предельное состояние равновесия

шкафа, когда еще нет скольжения и нет опрокидывания вокруг ребра  $AD$ . На шкаф действуют сила  $\bar{P}$  – вес шкафа,  $\bar{F}$  – заданная сила,  $\bar{N}$  – нормальная реакция,  $\bar{F}_{mp}$  – сила трения.

Считаем, что силы  $\bar{N}$  и  $\bar{F}_{mp}$  в предельном состоянии равновесия приложены в точке  $A$ . Составляем уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad F_{mp} - F - P \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0,$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cos \alpha \cdot a + P \sin \alpha \cdot 2a + Fa = 0.$$

$$F_{mp} = fN$$

Дополнительное уравнение вида (4.1) –

При нахождении момента силы  $\bar{P}$  относительно точки  $A$  в уравнении

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \text{использовано правило Вариньона (см. п. 3.1).}$$

В четырех полученных уравнениях неизвестными являются силы  $P \cdot N \cdot F_{mp}$  и

коэффициент трения  $f$ . Решая систему уравнений, получим  $f = 1 - \operatorname{tg} \alpha$ . Понятно, что шкаф будет скользить не опрокидываясь и при значительно меньших найденного; поэтому, окончательно будем иметь

$$f \leq 1 - \operatorname{tg} \alpha$$

#### ЗАДАЧА 4.2 (19)

Тележка весом  $P = 200 \text{ Н}$  и длиной  $l = 10 \text{ м}$  (рис. 4.2) опирается на плоскость при помощи призматической опоры  $C$  и катка  $D$ . Коэффициент трения на опоре  $C$  равен  $0,5$ .

Определить значение силы  $\bar{F}$ , способной сдвинуть тележку с места. Трение на опоре  $D$  не учитывается.

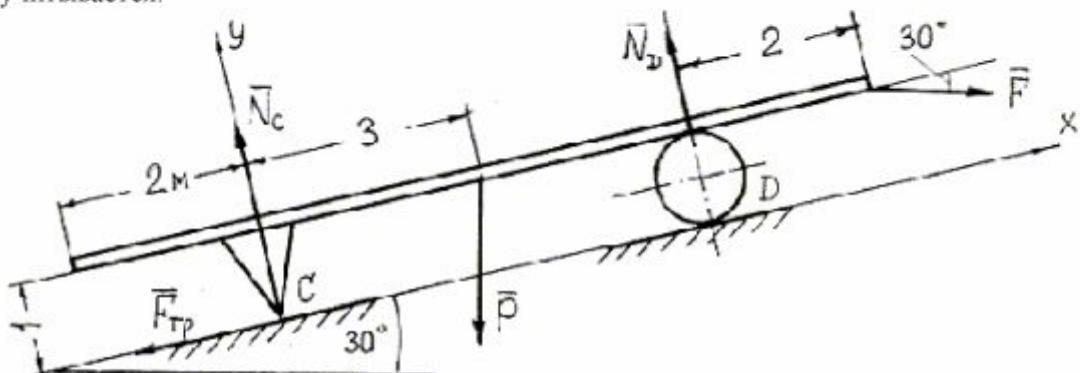


Рис. 4.2.

#### Решение:

За объект равновесия выберем тележку. Рассмотрим предельное состояние равновесия тележки, когда еще нет скольжения. На тележку действуют силы:  $\bar{P}$  – вес тележки,  $\bar{F}$  – заданная сила,  $\bar{N}_C$  – нормальная реакция в точке  $C$ ,  $\bar{N}_D$  – нормальная реакция в точке  $D$ ,

$\bar{F}_{mp}$  – сила трения.

Выбираем оси координат так, чтобы одна из них (ось  $X$ ) была направлена вдоль наклонной плоскости, а другая (ось  $Y$ ) – ей перпендикулярна. Составляем уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -F_{mp} - P \sin 30^\circ + F \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N_C + N_D - P \cos 30^\circ - F \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0, \quad N_D \cdot 6 - P \cos 30^\circ \cdot 3 + P \cos 60^\circ \cdot 1 -$$

$$-F \cos 30^\circ \cdot 1 - F \cos 60^\circ \cdot 8 = 0.$$

Дополнительное уравнение вида (4.1) –  $F_{mp} = f \cdot N_C$ .

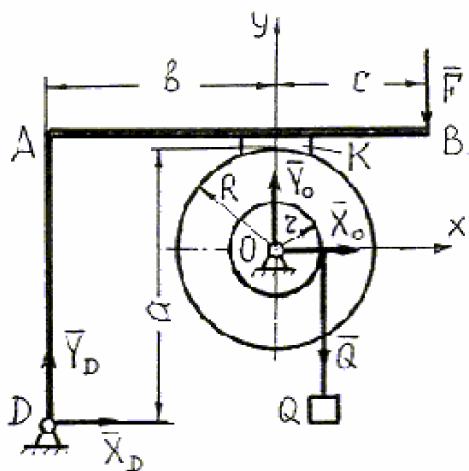
Моменты сил  $\bar{P}$  и  $\bar{F}$  относительно точки  $C$  в уравнении

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0$$

определяются с использованием правила Вариньона.

Решив полученную систему уравнений, найдем  $F \geq 99,6 \text{ H}$ .

### ЗАДАЧА 4.3. (20)



На барабан радиуса  $R$  (рис. 4.3) насажен тормозной шкив радиуса  $r$ . С барабана сбегает трос, к концу которого подвешен груз  $Q = 2$  кг. Шкиву с помощью рычага  $DAB$  прижимается тормозная колодка. Определить силу  $F$ , которую необходимо приложить к рычагу  $D$  для удержать барабан от вращения, если коэффициент трения на тормозном шкиве равен 0,4. Весом рычага  $DAB$ , а также размерами колодки пренебречь ( $b = 0,4 \text{ м}; R = 0,5 \text{ м}; r = 0,2 \text{ м}; c = 0,5 \text{ м}$ ).

Рис. 4.3.

**Решение:**

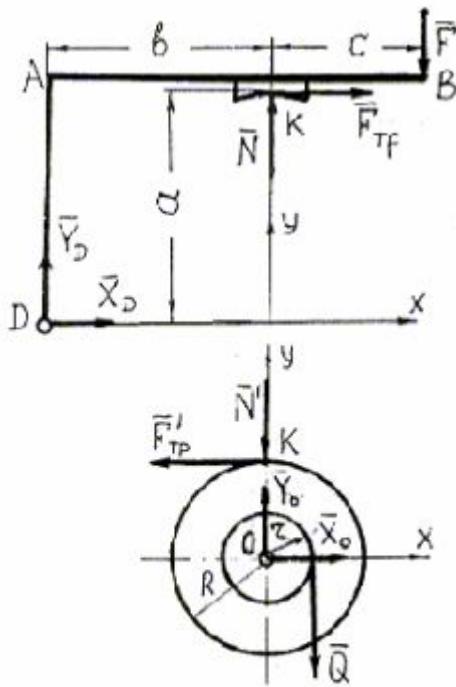


Рис. 4.4.

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_o - F'_{mp} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_o - N' - Q = 0,$$

$$\sum M_o(\bar{F}_k) = 0, \quad F'_{mp} \cdot 2r - Q \cdot r = 0.$$

$$F'_{mp} = f \cdot N'$$

Дополнительное уравнение вида (4.1) –

Из полученной системы уравнений находим

$$F'_{mp} = 100 \text{ H}, N' = 250 \text{ H}.$$

Далее рассмотрим равновесие рычага DAB (рис. 4.4), на который действуют следующие

силы:  $\bar{F}$  – активная сила, величину которой следует определить;  $\bar{R}_D(\bar{X}_D, \bar{Y}_D)$  –

реакция шарнира D;  $\bar{N}$  – реакция шкива,  $\bar{F}_{mp}$  – сила трения. Учтем, что по закону равенства действия и противодействия

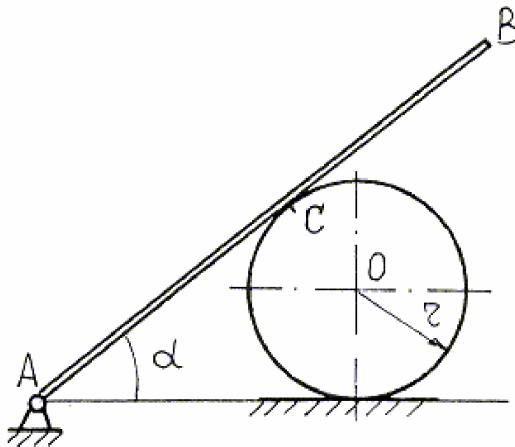
$$\bar{N} = -\bar{N}', \quad \bar{F}_{mp} = -\bar{F}'_{mp}$$

Для определения силы  $F$  достаточно составить одно уравнение равновесия:

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = 0, \quad -F(b + c) - F_{mp} \cdot a + N \cdot b = 0$$

Отсюда  $F = 85 \text{ H}$ .

#### ЗАДАЧА 4.4 (20)



Однородная балка  $AB$  длиной  $l$  и весом  $P$  (рис. 4.5), вращающаяся на шарнире  $A$ , опирается в точке  $C$  на цилиндр радиуса  $r$  и весом  $\bar{P}$ , образуя с горизонтом угол  $\alpha$ . Определить коэффициент трения цилиндром и балкой  $f_1$ , между цилиндром и полом  $f_2$  при равновесии системы.

Рис. 4.5.

**Решение:**

Система состоит из двух тел. Рассмотрим предельное состояние равновесия каждого из этих тел.

Объект равновесия – балка (рис. 4.6). На балку действуют силы:  $\bar{P}$  – вес балки,  $\bar{N}_1$  – нормальная реакция,  $(F_{mp})_1$  – сила трения,  $\bar{R}_A(X_A, Y_A)$  – реакция шарнира  $A$ . Для решения задачи, необходимо из указанных сил найти величину реакции  $\bar{N}$ , поэтому составим уравнение равновесия, в котором неизвестна только эта сила:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha + N_1 \cdot AC = 0,$$

$$AC = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad N_1 = \frac{P \cdot l \cos \alpha}{2r \cdot \operatorname{ctg} 0,5\alpha}$$

Учитывая, что

, получим

Теперь рассмотрим равновесие цилиндра (рис. 4.7). На цилиндр действуют силы:  $\bar{Q}$  – вес цилиндра,  $\bar{N}'_1$  – давление балки,  $\bar{N}_1 = -\bar{N}'_1$ ,  $\bar{N}_2$  – реакция пола,  $(\bar{F}'_{mp})_1$  – сила трения между балкой и цилиндром,  $(\bar{F}_{mp})_1 = -(\bar{F}'_{mp})_1$ ,  $(\bar{F}_{mp})_2$  – сила трения между полом и цилиндром.

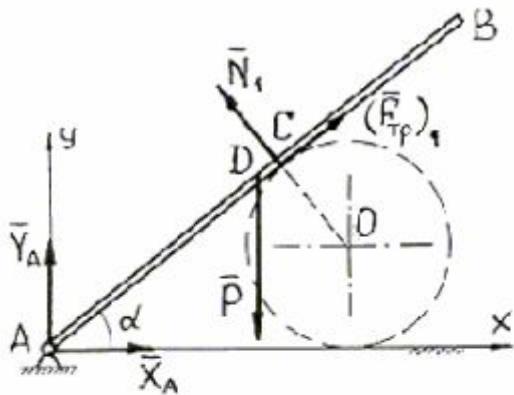


Рис. 4.6.

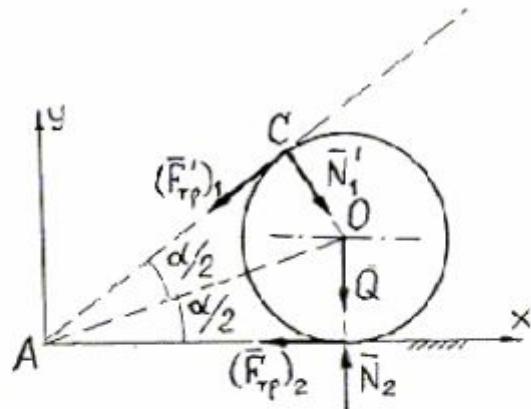


Рис. 4.7.

Уравнения равновесия сил, приложенных к цилинду:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -\left(F'_{mp}\right)_1 \cos \alpha - \left(F_{mp}\right)_2 + N'_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -\left(F'_{mp}\right)_1 \sin \alpha - N'_1 \cos \alpha + N_2 - Q = 0,$$

$$\sum M_o(\bar{F}_k) = 0, \quad -\left(F'_{mp}\right)_1 \cdot r + \left(F_{mp}\right)_2 \cdot r = 0.$$

Дополнительные уравнения вида (4.1) –

$$\left(F'_{mp}\right)_1 = f_1 \cdot N'_1, \quad \left(F_{mp}\right)_2 = f_2 \cdot N_2$$

Решив эту систему пяти уравнений, найдем:

$$f_1 = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad f_2 = \frac{f_1 \cdot N_1}{Q + N_1(1 + \cos \alpha)},$$

где  $N_1$  – определенная ранее реакция в точке С.

#### 4.2. Равновесие тела при наличии трения качения

Если твердое тело имеет форму катка и может катиться под действием активных сил по некоторой шероховатой поверхности, то в месте соприкосновения тела с поверхностью возникают силы реакции, которые препятствуют не только скольжению, но и качению тела. Сопротивление качению возникает вследствие деформации катка и поверхности, по которой он катится. Это сопротивление характеризуется моментом трения качения, который достигает максимальной величины в предельном состоянии равновесия катка и определяется по формуле:

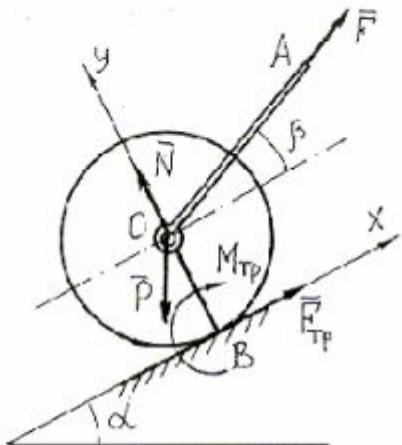
$$M_{mp} = k \cdot N \quad (4.2)$$

где  $k$  – коэффициент трения качения ( $k$  имеет размерность длины),  $N$  – нормальная реакция.

Момент  $M_{mp}$  направлен в сторону противоположную возможному поворачиванию катка.

При решении задач обычно рассматриваются только предельные состояния равновесия катка. Последовательность решения остается прежней. Новым элементом методики является учет момента трения качения.

### ЗАДАЧА 4.5 (21)



Цилиндрический каток весом  $P$  и радиуса  $r$  (рис. 4.8) удерживается скатывания по наклонной плоскости силой  $\bar{F}$ , приложенной вдоль  $AO$ , составляющей с наклонной плоскостью угол  $\beta$ . Коэффициент трения  $\bar{F}$  равен  $k$ . Определить минимальное значение удерживающей силы, если плоскость наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ . Определить также минимум значение коэффициента трения скольжения, при котором каток не будет скатываться по наклонной плоскости.

Рис. 4.8.

#### Решение:

Выберем за объект каток в предельном состоянии равновесия. На каток действуют силы:

$\bar{P}$  – вес катка,  $\bar{F}$  – удерживающая сила,  $\bar{N}$  – нормальная реакция наклонной плоскости,  $\bar{F}_{mp}$  – сила трения скольжения,  $M_{mp}$  – момент трения качения. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & F \cos \beta + F_{mp} - P \sin \alpha &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & F \sin \beta + N - P \cos \alpha &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, & P \sin \alpha \cdot r - F \cos \beta \cdot r - M_{mp} &= 0. \end{aligned}$$

Дополнительные уравнения вида (4.1) и (4.2)

$$F_{mp} = f \cdot N, \quad M_{mp} = k \cdot N.$$

В полученных пяти уравнениях – пять неизвестных  $F, N, F_{mp}, M_{mp}$  и  $f$ . В результате решения системы уравнений получим:

$$F = P \frac{r \sin \alpha - k \cos \alpha}{r \cos \beta - k \sin \beta}, \quad f = \frac{k}{r}$$

## 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В этом разделе пособия рассматривается решение задач равновесия тел (объектов), находящихся под действием произвольной пространственной системы сил. Порядок решения задач остается таким же, как и в предыдущих разделах: сначала выделяют твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть, потом к этому телу прикладывают все действующие на него силы, а затем составляют и решают уравнения равновесия этих сил.

Направления реакций связей принимаются в соответствии с указаниями п. 1.2. Прочитайте этот параграф еще раз, обратив особое внимание на новые связи в п.п. 1.2.4, 1.2.5.

Для решения задач используются аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & \sum F_{ky} &= 0, & \sum F_{kz} &= 0, \\ \sum M_x(\bar{F}_k) &= 0, & \sum M_y(\bar{F}_k) &= 0, & \sum M_z(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

В системе уравнений (5.1) допускается замена уравнений проекций уравнениями моментов сил относительно дополнительных осей. Можно, например, получить систему шести уравнений равновесия только из уравнений моментов.

Чтобы после таких замен уравнения равновесия были независимыми друг от друга, следует придерживаться следующего правила их составления: первое уравнение должно включать одну какую-либо неизвестную силу; второе и последующие уравнения составляются так, чтобы в каждое из них добавлялось по одной новой неизвестной силе. (Новая – в том смысле, что в предыдущие уравнения равновесия эта сила не включалась).

Чтобы это правило можно было выдержать, рекомендуется при составлении уравнений проекций оси направлять перпендикулярно возможно большему числу неизвестных сил (напомним, что силы, перпендикулярные оси, на эту ось не проектируются), а при составлении уравнений моментов сил относительно осей, оси направлять так, чтобы они пересекали возможно большее число неизвестных сил или были им параллельны (силы, пересекающие ось и параллельные ей, момента относительно этой оси не дают).

Этих рекомендаций следует придерживаться при составлении любой системы уравнений равновесия, в том числе и системы (5.1).

При определении проекции сил на оси координат советуем еще раз прочитать п. 2.1.2.

Новым элементом в составлении уравнений равновесия пространственной системы сил является вычисление моментов сил относительно координатных осей.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси.

Момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. (понятие об алгебраическом моменте силы относительно точки введено в п. 3.1 данного пособия).

Так, момент силы  $\bar{F}$  относительно оси  $Z$  (рис. 5.1) определяется формулой

$$M_z(\bar{F}) = M_o(\bar{F}_n) = \pm F_n \cdot h, \quad (5.2)$$

где  $F_n$  – модуль проекции  $\bar{F}_n$ ,  $h$  – плечо этой проекции.

Знак “+” в форме (5.2) ставится, если вращение, производимое силой, наблюдается против часовой стрелки, знак “-”, если вращение по ходу часовой стрелки; при этом считается, что наблюдатель смотрит со стороны положительного направления оси  $Z$ .

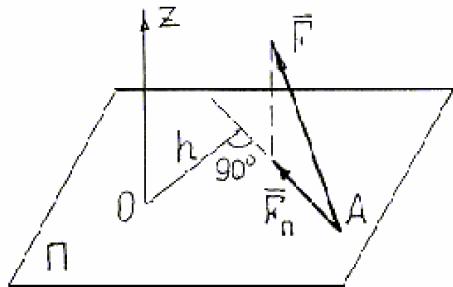


Рис.5.1.

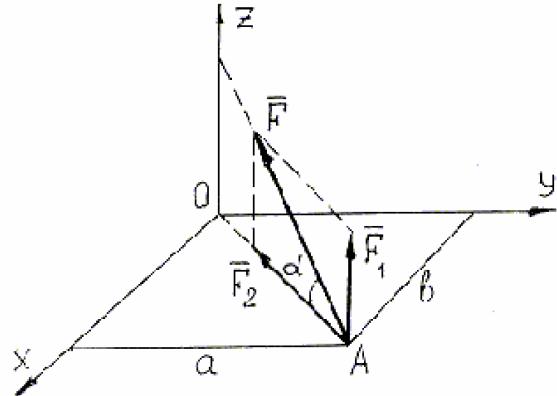


Рис.5.2

Из формулы (5.2) следует, что для вычисления момента силы  $F$  относительно оси  $Z$  надо выполнить следующие операции (рис. 5.1)

- провести плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную оси  $Z$ ;
- определить проекцию  $\bar{F}_n$  силы  $\bar{F}$  на плоскость  $\Pi$ ;
- определить плечо  $h$  проекции  $\bar{F}_n$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $Z$  с плоскостью  $\Pi$ ;
- вычислить  $M_z(\bar{F})$  по формуле (5.2).

Из формулы (5.2) также следует, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси ( $F_n = 0$ ), или если линия действия силы пересекает ось ( $h = 0$ ).

В некоторых случаях для вычисления момента силы относительно оси удобнее пользоваться правилом Вариньона: момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

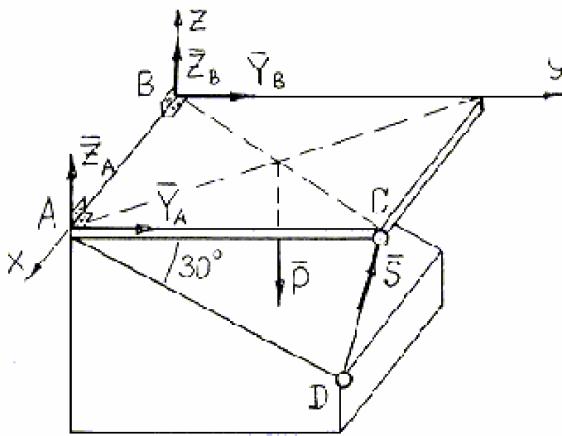
Например, чтобы вычислить моменты силы  $\bar{F}$  относительно координатных осей  $x$  и  $y$  (рис. 5.2), разложим ее на две составляющие  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  ( $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ), модули этих составляющих равны

$$F_1 = F \sin \alpha , \quad F_2 = F \cos \alpha .$$

Согласно правилу Вариньона будем иметь:

$$\begin{aligned} M_x(\bar{F}) &= M_x(\bar{F}_1) + M_x(\bar{F}_2) = F_1 \cdot a + 0 = F \sin \alpha \cdot a , \\ M_y(\bar{F}) &= M_y(\bar{F}_1) + M_y(\bar{F}_2) = -F_1 \cdot b + 0 = -F \cos \alpha \cdot a . \end{aligned}$$

### ЗАДАЧА 5.1 (22)



Однородная прямоугольная крышка светового люка удерживается в горизонтальном положении стержнем  $CD$  на рис. 5.3. Определить усилие в стержне  $CD$ , а также силы цилиндрических шарниров  $A$  и  $B$ , пренебрегая весом стекла в шарнирах.

Рис. 5.3.

### Решение:

За объект равновесия возьмем крышку светового люка.

На крышку действует одна активная сила  $\bar{P}$  – вес крышки. Реакция невесомого стержня  $CD$  направлена, согласно п. 1.2.3, вдоль стержня. Реакции цилиндрических шарниров  $A$  и  $B$ , согласно п. 1.2.4, могут иметь любое направление в плоскости  $YZ$ , они представлены на рис. 5.3 своими составляющими  $\bar{Y}_A, \bar{Z}_A$  и  $\bar{Y}_B, \bar{Z}_B$ .

Таким образом, на крышку действует произвольная пространственная система сил. Для решения будем использовать уравнения равновесия в форме (5.1), оси  $X, Y$  и  $Z$  показаны на рис. 5.3.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad 0 = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S \cos 75^\circ + Y_A + Y_B = 0, \quad (b)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad S \cos 15^\circ - P + Z_A + Z_B = 0, \quad (c)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \frac{1}{2} AC + S \cdot AC \sin 75^\circ = 0, \quad (d)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad P \frac{1}{2} AB - S \cdot \sin 75^\circ \cdot AB - Z_A \cdot AB = 0, \quad (e)$$

$$\sum M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad S \cdot \cos 75^\circ \cdot AB + Y_A \cdot AB = 0. \quad (f)$$

При определении проекций силы  $\bar{S}$  на координатные оси учитывались рекомендации п. 2.1.2: на силе  $\bar{S}$ , как на диагонали, построен параллелограмм, расположенный в плоскости, параллельной плоскости  $YZ$ ; затем найдены проекции:

$$S_x = 0, \quad S_y = S \cos 75^\circ, \quad S_z = S \cos 15^\circ.$$

При определении моментов сил относительно координатных осей, рекомендуется (до приобретения достаточного опыта решения задач) чертить дополнительные расчетные схемы.

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0$$

Так, на дополнительной расчетной схеме при составлении уравнения в рассматриваемой задаче надо изобразить проекцию крышки с действующими силами на

плоскость  $yz$  (рис. 5.4). Тогда задача по составлению уравнения

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0$$

сводится к задаче по составлению суммы моментов сил,

расположенных в плоскости  $yz$ , относительно точки  $A$ . Отметим, что плечом силы

$\bar{S}$  относительно точки  $A$  является отрезок  $AK$ , равный  $AC \sin 75^\circ$ .

На рис. 5.5 и 5.6 изображены проекции на плоскости  $XZ$  и  $XY$  той же крышки с действующими на нее силами. Эти проекции могут помочь при составлении уравнений равновесия.

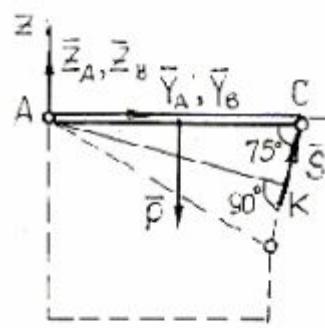


Рис. 5.4.

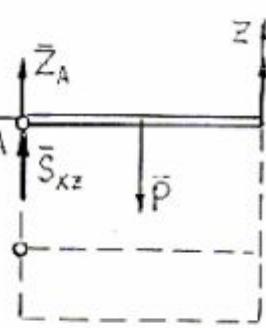


Рис. 5.5.

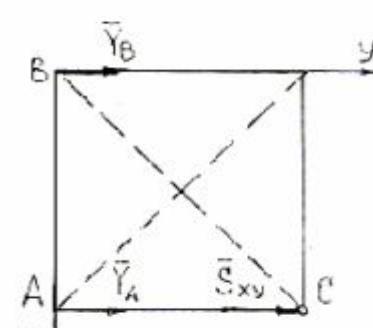


Рис. 5.6.

В частности, согласно рис. 5.5 –

$$M_y(\bar{S}) = M_B(\bar{S}_{xz}) = -S \cdot \sin 75^\circ \cdot AB$$

а согласно рис. 5.6 –

$$M_z(\bar{S}) = M_A(\bar{S}_{xy}) = S \cdot \cos 75^\circ \cdot AB$$

Для определения реакций связей крышки надо решить систему составленных ранее пяти уравнений. Из уравнения (г) найдем  $S = 51,8 \text{ H}$ . Подставляя это значение в уравнения (д) и (е), найдем  $Z_A = 0, Y_A = -13,4 \text{ H}$ . Далее из уравнений (б) и (в) найдем  $Y_B = 0, Z_B = 0 \text{ H}$ .

### ЗАДАЧА 5.2. (23)

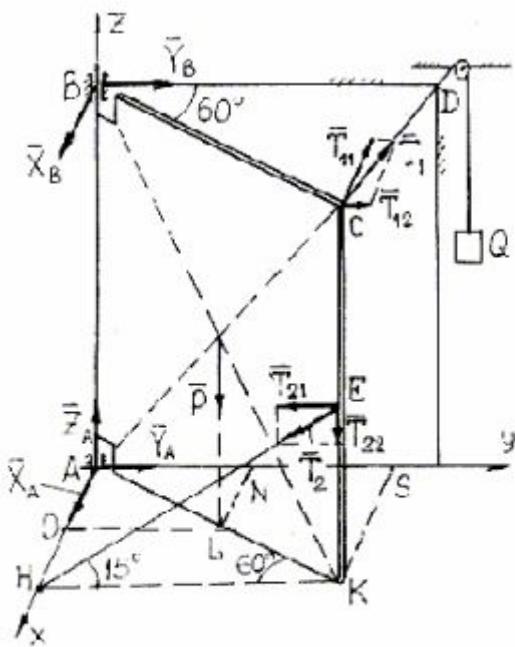


Рис.5.7.

Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения, открыта на угол  $CBD = 60^\circ$  и удерживается в этом положении веревками, из которых одна ( $CD$ ) перекинута через блок и грузом  $Q = 200 \text{ Н}$ , другая ( $EH$ ) привязана к точке  $H$  пола. В  $H$ , ее ширина  $BC = BD = 1,8 \text{ м}$ , высота  $AB = 2,4 \text{ м}$ . Пренебрегая массой двери, определить натяжение веревки  $EH$ , а также реакции цилиндрического шарнира в точке  $B$  и под пятника в точке  $A$ .

**Решение:**

За объект равновесия возьмем дверь  $ABC$ . На дверь действуют две активные силы:

$\bar{P}$  – вес двери, приложенный в ее геометрическом центре, и натяжение  $\bar{T}_1$  веревки  $CD$ , равное весу груза  $Q$ . Реакция под пятника  $A$ , согласно п.1.2.5, представлена составляющими  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ ; реакция цилиндрического шарнира  $B$ , согласно п.1.2.4, – составляющими  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$ ; реакция веревки  $EH$  представлена силой  $\bar{T}_2$ . Уравнения равновесия сил, действующих на дверь, составим в форме (5.1), оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  показаны на рис 5.7.

Эти уравнения имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -T_1 \sin 60^\circ + X_A + X_B = 0, \quad (a)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 15^\circ + Y_A + Y_B = 0, \quad (b)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad -P - T_2 \sin 15^\circ + Z_A = 0, \quad (c)$$

$$\sum M_s(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \frac{1}{2} AK \cos 60^\circ - T_1 \cos 60^\circ AB - Y_B AB = 0,$$

(d)

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad P \frac{1}{2} BC \sin 60^\circ - T_1 \sin 60^\circ AB + X_B AB + T_2 \sin 15^\circ AK \sin 60^\circ = 0.$$

$$(d) \quad \sum M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad T_1 \cdot BC \sin 60^\circ - T_2 \cos 15^\circ \cdot AK \sin 60^\circ = 0 \quad (e)$$

При определении проекций сил  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  на координатные оси учтены рекомендации п. 2.1.2. На силе  $T_1$ , как на диагонали, построен параллелограмм со сторонами, параллельными осям  $x$  и  $y$ , после чего найдены проекции:

$$T_{1x} = -T_{11} = -T_1 \sin 60^\circ, \quad T_{1y} = T_{12} = T_1 \cos 60^\circ, \quad T_{1z} = 0.$$

На силе  $\bar{T}_2$ , как на диагонали, построен параллелограмм со сторонами, параллельными осям  $y$  и  $z$  после чего найдены проекции:

$$T_{2x} = 0, \quad T_{2y} = -T_{21} = -T_2 \cos 15^\circ, \quad T_{2z} = -T_{22} = -T_2 \sin 15^\circ.$$

При составлении уравнений (г), (д), (е) учтены рекомендации по вычислению моментов сил

относительно осей (см. выше). Для определения  $M_x(\bar{P})$  мысленно была проведена плоскость, проходящая через силу  $\bar{P}$  перпендикулярно оси  $X$ ; эта плоскость пересекает ось  $X$  точке  $O$ ; плечо силы  $\bar{P}$  относительно оси  $X$  есть отрезок  $OL$ , равный  $1/2 AK \cos 60^\circ$ , сила  $\bar{P}$  поворачивает дверь вокруг оси  $X$  по часовой стрелке,

$$M_x(\bar{P}) = -P \frac{1}{2} AK \cos 60^\circ$$

Для определения  $M_y(\bar{P})$  мысленно была проведена плоскость, проходящая через силу  $P$  перпендикулярно оси  $y$ ; затем выполнялись операции, аналогичные описанным выше,

заметим лишь, что плечо силы  $\bar{P}$  относительно оси  $y$  есть отрезок  $LN$ .

Для определения  $M_x(\bar{T}_1)$  и  $M_y(\bar{T}_1)$  использовалось правило Вариньона с учетом того, что сила  $\bar{T}_1$  разложена на составляющие  $T_{11}$  и  $T_{12}$  (см. рис. 5.7);

$$M_x(\bar{T}_1) = M_x(\bar{T}_{11}) + M_x(\bar{T}_{12}) = 0 - T_1 \cos 60^\circ \cdot AB.$$

$$M_y(\bar{T}_1) = M_y(\bar{T}_{11}) + M_y(\bar{T}_{12}) = -T_1 \sin 60^\circ \cdot AB + 0.$$

При определении  $M_z(\bar{T}_1)$  учтено, что сила  $\bar{T}_1$  лежит в плоскости  $BCD$ ,

перпендикулярной оси  $Z$ , плечо силы  $\bar{T}_1$  относительно точки  $B$  – высота равнобедренного треугольника  $BCD$  равная  $BC \sin 60^\circ$ .

При определении моментов силы  $\bar{T}_2$  относительно координатных осей учтено, что эта сила пересекает ось  $x$ , поэтому  $M_x(\bar{T}_2) = 0$ ; учтено также, что сила  $\bar{T}_2$  разложена на составляющие  $\bar{T}_{21}$  и  $\bar{T}_{22}$  (см. рис. 5.7), поэтому по правилу Вариньона –

$$M_y(\bar{T}_2) = M_y(\bar{T}_{21}) + M_y(\bar{T}_{22}) = 0 + T_2 \sin 15^\circ \cdot KS,$$

$$M_z(\bar{T}_2) = M_z(\bar{T}_{21}) + M_z(\bar{T}_{22}) = -T_2 \cos 15^\circ \cdot AH + 0.$$

Для определения реакций связей двери надо решить систему составленных ранее шести уравнений. Из уравнения (e) найдем

$$T_2 = 358,2 \quad T_1 = Q = 200 \text{ Н.}$$

Подставляя эти значения в уравнения (в), (г), (д), найдем

$$Z_A = 592,8 \text{ Н.} \quad Y_B = -193,8 \text{ Н.} \quad X_B = -49,4 \text{ Н.}$$

$$X_A = 222,6 \text{ Н.} \quad Y_A = 439,8 \text{ Н.}$$

Далее из уравнений (а) и (б) найдем

Задачи 5.1 и 5.2 решены с использованием осей прямоугольной системы координат. Составленные для этих осей уравнения равновесия удалось расположить в последовательности, при которой в каждом уравнении имеется одна новая неизвестная сила. В результате – решение системы уравнений было выполнено очень просто. Однако, в большинстве случаев такую последовательность можно обеспечить, если придерживаться рекомендаций, указанных в начале данного раздела. Проследим, как это делается, на примере решения следующей задачи.

### ЗАДАЧА 5.3 (24)

Однородная квадратная плита  $ABCD$  (рис. 5.8) стороной  $a$ , весом  $P = 100 \text{ Н}$  удерживается в горизонтальном положении шестью стержнями. На плиту действует сила  $50 \text{ Н}$ . Определить усилия в стержнях.

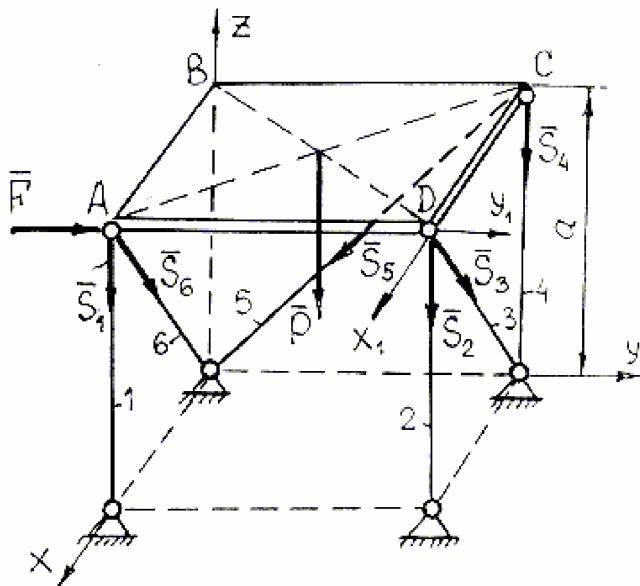


Рис. 5.8.

**Решение:**

Выбираем за объект равновесия плиту  $ABCD$ . Реакции стержней направляем в соответствии с указаниями п. 1.2.3.

Ось  $y$  перпендикулярна пяти стержням: 1, 2, 3, 4 и 6, поэтому реакции этих стержней на ось  $y$  не проектируются.

Из уравнений равновесия

$$\sum F_{ky} = 0, \quad F - S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (a)$$

находим  $S_5 = 50\sqrt{2}$  Н.

Ось  $Z$  параллельна стержням 1, 2, 4 и пересекает стержни 5 и 6, поэтому реакции указанных стержней не дают моментов относительно оси  $Z$ . Из уравнения равновесия

$$\sum M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad F \cdot a + S_3 a \cos 45^\circ = 0 \quad (b)$$

находим  $S_3 = -50\sqrt{2}$  Н.

При нахождении момента силы  $\bar{S}_3$  в уравнении (б) эта сила предварительно была разложена на вертикальную (вдоль стержня 2) и горизонтальную (вдоль стороны  $DC$ ) составляющие, момент относительно оси  $Z$  дает только горизонтальная составляющая, равная  $S_3 \cos 45^\circ$ . Знак момента определялся в соответствии с указаниями к формуле (5.2). Плечи сил хорошо видны на рис. 5.8.

Далее из уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -S_6 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 0 \quad (в)$$

находим  $S_6 = -S_3 = -50\sqrt{2}$  Н.

Заметим, что силы  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{F}$  и  $\bar{P}$  на ось  $X$  не проектируются, так как они перпендикулярны ей.

Для следующего уравнения равновесия проведем ось  $X_1$  через сторону  $CD$ . Эта ось

пересекает силы  $\bar{F}, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4$  и  $\bar{S}_5$ , которые в уравнение моментов относительно оси не войдут. Тогда из уравнения равновесия

$$\sum M_{x1}(\bar{F}_k) = 0, \quad S_1 \cdot a + S_6 \cos 45^\circ \cdot a + P \frac{a}{2} = 0 \quad (\text{г})$$

$$S_1 = -\frac{P}{2} - S_6 \frac{\sqrt{2}}{2} = -100 \text{ Н.}$$

Момент силы  $\bar{S}_6$  в уравнении (г) находился по такому же способу, как и момент силы  $\bar{S}_4$  в уравнении (б).

Затем из уравнения равновесия

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad S_1 \cdot a + S_2 \cdot a + P \frac{a}{2} = 0$$

$$S_2 = -S_1 - \frac{P}{2} = 50 \text{ Н.}$$

Наконец, из уравнения равновесия

$$\sum M_{y1}(\bar{F}_k) = 0, \quad -S_4 \cdot a - S_5 \cos 45^\circ \cdot a - P \frac{a}{2} = 0$$

$$S_4 = -S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2} = -100 \text{ Н.}$$

находим

Рекомендуем внимательно проследить составление двух последних уравнений равновесия. Установите, почему не все действующие на плиту силы входят в эти уравнения, проверьте знаки моментов и определение плеч сил.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНЫХ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Плоскими телами являются расположенные в одной плоскости пластины и конструкции из весомых линий.

Простыми будем называть тела (плоские фигуры), для которых площадь (длина) и координаты центра тяжести заданы, либо легко определяются. Приведем примеры плоских фигур, для которых эти параметры определяются по формулам (табл. 6.1).

Таблица 6.1

**Площадь (длина) и координаты центра тяжести некоторых плоских фигур**

Плоская фигура	Площадь (длина)	Координаты центра тяжести	
		$x_c$	$y_c$
Треугольник (рис. 6.1)	$S = l/2ah$	$x_c = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$	$y_c = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$
Круговой сектор (рис. 6.2)	$S = \alpha R^2$ $\alpha - \text{в рад.}$	$x_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , $\alpha - \text{в рад.}$	$y_c = 0$
Дуга окружности (рис. 6.3)	$L = 2 \alpha R$ $\alpha - \text{в рад.}$	$x_c = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , $\alpha - \text{в рад.}$	$y_c = 0$

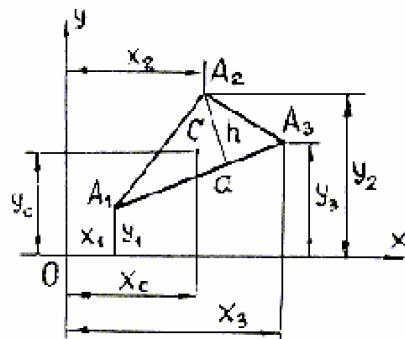


Рис. 6.1.

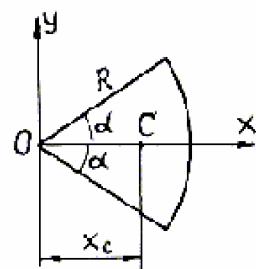


Рис. 6.2.

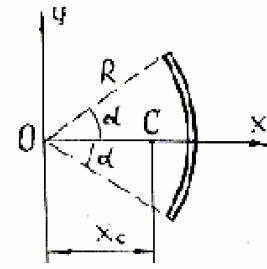


Рис. 6.3.

Координаты центра тяжести сложных плоских фигур, состоящих из участков, каждый из которых является простой фигурой, определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad (6.1)$$

где  $S_k$  – площадь  $k$ -го участка фигуры,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_k, y_k$  – координаты центра тяжести этого участка.

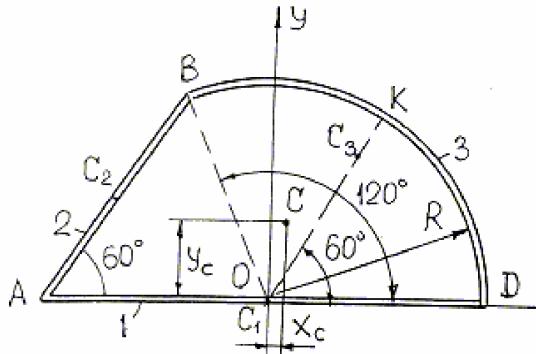
Для сложных плоских конструкций из весомых линий координаты центра тяжести определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum l_k \cdot x_k}{\sum l_k}, \quad y_C = \frac{\sum l_k \cdot y_k}{\sum l_k}, \quad (6.2)$$

где  $l_k$  – длина  $k$ -го участка весомой линии,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_k, y_k$  – координаты центра тяжести этого участка.

Для плоских фигур с вырезами в некоторых случаях целесообразно вместо вырезов вводить участки с отрицательной площадью (длиной) если это ведет к образованию простой фигуры. Соответствующие этим участкам  $S_k$  и  $l_k$  в формулах (6.1) и (6.2) берутся со знаком “-“.

### ЗАДАЧА 6.1 (25)



Определить координаты центра тяжести проволочного контура  $ABD$  (рис. 6.4), состоящего из дуги окружности и двух прямолинейных отрезков. Линейные плоскости элементов одинаковы,  $R =$

Рис. 6.4.

#### Решение:

Выберем систему координат так, как указано на рис. 6.4. Проволочный контур разобьем на три части: 1 – отрезок  $AD$ , 2 – отрезок  $AB$ , 3 – дуга окружности  $BD$ .

Обозначим центры тяжести этих частей –  $C_1, C_2, C_3$ . Их длины –  $l_1 = 2R$ ,

$$l_2 = R \quad \text{и} \quad l_3 = \frac{2}{3} \pi R \quad (\text{см. табл. 6.1}).$$

Найдем координаты центров тяжести указанных частей. Центр тяжести отрезков  $AD$  и  $AB$  расположен на их серединах, следовательно,

$$x_1 = 0; y_1 = 0; x_2 = -R + \frac{R}{2} \cos 60^\circ = -\frac{3}{4}R; y_2 = \frac{R}{2} \sin 60^\circ = \frac{R}{4}\sqrt{3}.$$

$$OC_3 = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Центр тяжести дуги  $BD$  лежит на биссектрисе угла  $BOD$ , при этом

$$\alpha' = \frac{\pi}{3} \quad \text{(см. табл. 6.1), где} \quad \alpha' = \frac{\pi}{3} \quad \text{— половина угла } BOD,$$

$$OC_3 = \frac{R \sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3R\sqrt{3}}{2\pi}$$

Тогда

$$x_3 = OC_3 \cos 60^\circ = \frac{3R\sqrt{3}}{4\pi}, \quad y_3 = \frac{9R}{4\pi}$$

а координаты центра тяжести  $C_3$  —

Координаты общего центра тяжести проволочного контура, изображенного на рис. 6.4, вычислим по формулам (6.2), имея в виду, что он лежит в плоскости  $XY$ .

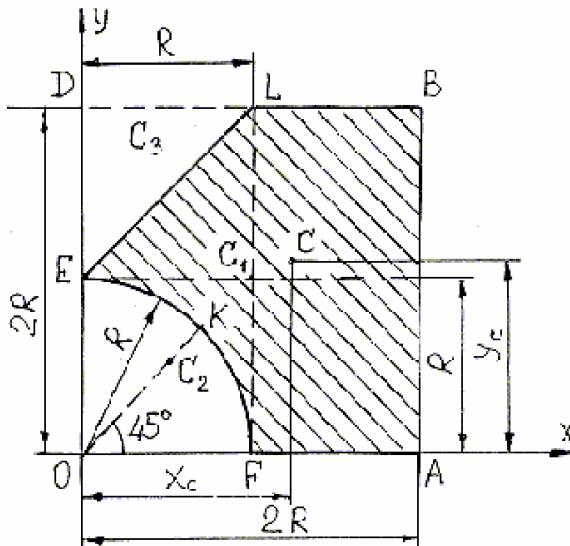
$$x_C = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2R \cdot O + R \left( -\frac{3}{4}R \right) + \frac{2}{3}\pi R \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{4\pi}}{2R + R + \frac{2}{3}\pi R} = 0,14 \text{ M,}$$

$$y_C = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + l_3 y_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{2R \cdot O + R \cdot \frac{R}{4}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi R \cdot \frac{9R}{4\pi}}{2R + R + \frac{2}{3}\pi R} = 2,28$$

M,

Положение центра тяжести указано на рис. 6.4.

### ЗАДАЧА 6.2. (26)



Определить координаты центра тяжести плоской фигуры (рис. 6.5), форма и размеры которой указаны на рисунке 10 см.

Рис. 6.5.

**Решение:**

Плоская фигура имеет сложную форму. Однако ее можно представить как квадрат  $OABD$  со стороной  $2R$ , из которого вырезана четверть круга  $OEF$  и равнобедренный треугольник  $LDE$ . Поэтому в рассматриваемой задаче площадь квадрата  $OABD$  положительна и равна  $S_1 = 4R^2$ , а площади вырезанных четверти круга и треугольника отрицательны и соответственно равны

$$S_2 = -\frac{\pi R^2}{4}, \quad S_3 = -\frac{1}{2}R^2.$$

Будем считать, что фигура состоит из трех частей: 1 – квадрат  $OABD$ , 2 – четверть круга  $OEF$ , 3 – треугольник  $LDE$ . Центры тяжести этих частей обозначим  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ .

Найдем координаты центров тяжести указанных частей. Координаты центра тяжести квадрата  $-x_1 = R$ ,  $y_1 = R$ . Центры тяжести четверти круга (сектора) лежит на отрезке  $OK$ ,

$$OC_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

как следует из табл. 6.1, где  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  – половина центрального угла дуги окружности сектора.

$$OC_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$$

Тогда

координаты центра  $C_2$  –

$$x_2 = OC_2 \cos 45^\circ = \frac{4R}{3\pi}, \quad y_2 = OC_2 \sin 45^\circ = \frac{4R}{3\pi}.$$

Координаты центра тяжести треугольник  $LDE$ , согласно табл. 6.1, –

$$x_3 = \frac{1}{3}R, \quad y_3 = \frac{1}{3}(R + 2R + 2R) = \frac{5}{3}R$$

Координаты общего центра тяжести плоской фигуры (рис. 6.5) вычислим по формулам (6.2).

$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4R^2 \cdot R - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{1}{3}R}{4R^2 - \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R^2} = 12,9 \text{ см,}$$

$$y_C = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{4R^2 \cdot R - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{5}{3}R}{4R^2 - \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R^2} = 10,4 \text{ см,}$$

Положение центра тяжести фигуры указано на рис. 6.5.

## 7. РАСЧЕТ ФЕРМ

### 7.1. Общие указания по методике решения задач

Фермой называется жесткая конструкция из прямоугольных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется плоской. Места соединения стержней фермы называются узлами. При расчете ферм считают, что все внешние нагрузки прикладываются только в узлах. Тогда на каждый стержень фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии направлены только вдоль стержня. Следовательно, стержни фермы либо растягиваются, либо сжимаются.

Рассмотрим плоские статически определимые фермы.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции определяются обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Усилия в стержнях фермы определяются либо методом вырезания узлов, либо методом сечений. В первом методе рассматривается равновесие узлов фермы (п. 7.3), во втором – равновесие какой-либо части фермы (п. 7.4). Методом вырезания узлов удобно пользоваться, когда необходимо найти усилия во всех стержнях фермы. Методом сечений пользуются для определения усилий в отдельных стержнях фермы, обычно, для проверочных расчетов.

Методику расчета фермы рассмотрим на конкретном примере.

Выполним расчет фермы, изображенной на рис. 7.1. На ферму действуют силы  $P_1 = 600 \text{ kH}$ ,  $P_2 = 300 \text{ kH}$ .

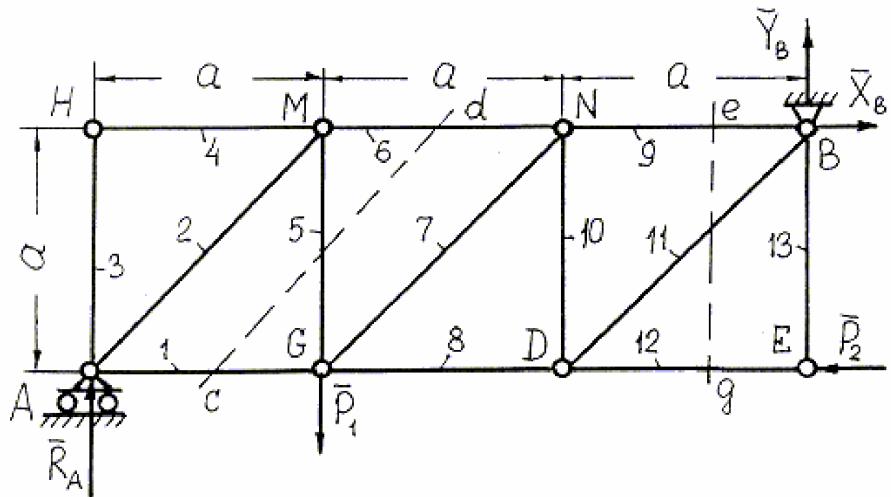


Рис. 7.1.

Определить реакции опор и усилия в стержнях фермы. Осуществить проверку выполненного расчета.

### 7.2. Определение опорных реакций фермы

Объект равновесия – ферма. На нее действуют следующие силы:  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  – активные силы,  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$  – реакции опор  $A$  и  $B$ .

Уравнения равновесия фермы

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & X_B - P_2 &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & R_A + Y_B - P_1 &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, & -R_A \cdot 3a - P_2 a + P_1 \cdot 2a &= 0.\end{aligned}$$

Решив систему уравнений, получим  $P_A = 300 \text{ kH}$ ,  $X_B = 300 \text{ kH}$ ,  $Y_B = 300 \text{ kH}$ .

Для того, чтобы убедиться в правильности расчета, вычислим  $\sum M_G(\bar{F}_k)$ . Если  $\sum M_G(\bar{F}_k) = 0$ , то реакции вычислены верно

$$\begin{aligned}\sum M_G(\bar{F}_k) &= -R_A a + Y_B \cdot 2a - X_B \cdot a = a (-R_A + 2Y_B - X_B) = \\ &= a (-300 + 2 \cdot 300 - 300) = 0.\end{aligned}$$

### 7.3. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов

Обозначим все узлы фермы прописными буквами латинского алфавита и пронумеруем стержни фермы. Искомые усилия будем обозначать  $S_i$ , где  $i$  – номер стержня.

Методика расчета состоит в следующем:

- первым вырезается узел, в котором сходятся два стержня: изображаются активные силы, действующие на этот узел и реакции перерезанных стержней, реакция каждого стержня направляется вдоль стержня от узла; составляются уравнения равновесия сил, приложенных к вырезанному узлу; вычисляются реакции стержней;
- вырезается следующий узел, в котором сходятся не более двух стержней, усилия в которых неизвестны; составляются уравнения равновесия сил, приложенных к этому узлу и вычисляются неизвестные реакции стержней;
- далее, переходя от узла к узлу, определяются усилия со всех стержнях фермы.

После выполнения расчетов составляется таблица усилий в стержнях фермы.  
По этой методике определим усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 7.1. Первым

вырезаем узел  $H$  (рис. 7.2). В нем сходятся только два стержня, это стержни 3 и 4;  $\bar{S}_3$  и  $\bar{S}_4$  – реакции этих стержней. Уравнения равновесия узла  $H$ :

$$\sum F_{kx} = 0, \quad S_4 = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad S_4 = 0,$$

Следующим вырезаем узел  $A$  (рис. 7.3). К нему приложены силы:  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$  – неизвестные реакции стержней 1, 2;  $\bar{R}_A$  – известная реакция опоры  $A$ ;  $\bar{S}'_3$  – известная реакция стержня 3 ( $\bar{S}'_3$  – равна по модулю и направлена противоположно реакции  $\bar{S}_3$ , изображенной на рис. 7.2, т.е.  $\bar{S}'_3 = -\bar{S}_3$ ).

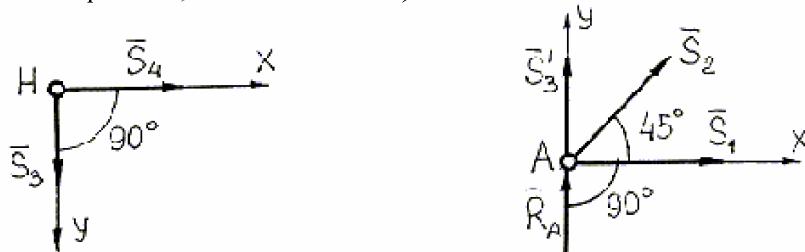


Рис. 7.2.

Уравнения равновесия узла  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & S_1 + S_2 \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & S'_3 + S_2 \cos 45^\circ + R_A &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим  $S_1 = 300$  кН,  $S_2 = -300\sqrt{2}$  кН.

Теперь перейдем к узлу  $M$  (рис. 7.4). На него действуют силы:  $\bar{S}_5$ ,  $\bar{S}_6$  – неизвестные реакции стержней 5 и 6;  $\bar{S}'_2$ ,  $\bar{S}'_4$  – известные реакции стержней 2 и 4:

$$\bar{S}'_2 = -\bar{S}_2, \quad \bar{S}'_4 = -\bar{S}_4.$$

Уравнения равновесия узла  $M$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad S'_4 - S'_2 \cos 45^\circ + S_6 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S'_2 \cos 45^\circ + S_5 = 0.$$

Отсюда:  $S_5 = 300$  кН,  $S_6 = -300$  кН.

После этого вырезаем узел  $G$  (рис. 7.5). На узел  $G$  действуют силы:  $\bar{P}_1$  – заданная сила;  $\bar{S}_7$ ,  $\bar{S}_8$  – неизвестные реакции стержней 7 и 8;  $\bar{S}'_1$  и  $\bar{S}'_5$  – известные реакции стержней 1 и 5:

$$\bar{S}'_1 = -\bar{S}_1, \quad \bar{S}'_5 = -\bar{S}_5$$

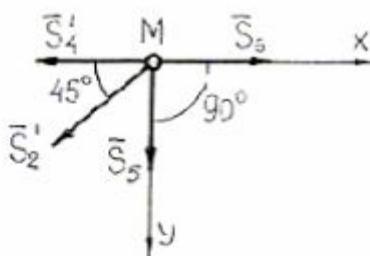


Рис. 7.4.

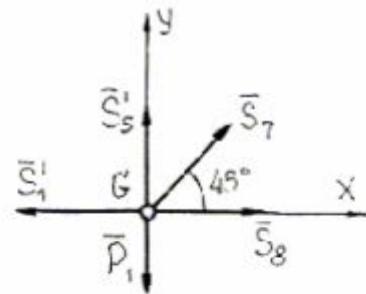


Рис. 7.5.

Уравнения равновесия узла  $G$ :

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -S'_1 + S_7 \cos 45^\circ + S_8 = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S'_5 + S_7 \cos 45^\circ - P_1 = 0$$

Отсюда:  $S_7 = 300\sqrt{2}$  кН,  $S_8 = 0$

Аналогичным образом составляются уравнения равновесия остальных узлов. В результате расчетов были получены следующие значения усилий в стержнях:

$$S_1 = S_5 = -S_6 = -S_{10} = -S_{12} = 300 \text{ кН},$$

$$-S_2 = S_7 = S_{11} = 300\sqrt{2} \text{ кН},$$

$$S_3 = S_4 = S_8 = S_9 = S_{13} = 0$$

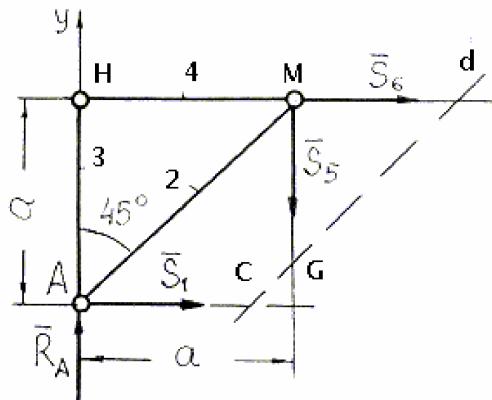
Из этих данных видно, что стержни 1, 5, 7 – растянуты, стержни 2, 6, 10, 13 – сжаты, а стержни 3, 4, 8, 9, 13 – не нагружены.

#### 7.4. Определение усилий в стержнях фермы методом сечений

Расчет выполняется в последовательности:

– определяются опорные реакции, если они ранее не были определены;

- ферма разрезается на две части сечением, которое проходит через стержни, усилия в которых необходимо определить; при этом должно разрезаться не более трех стержней, усилие в которых неизвестны;
- рассматривается равновесие одной из двух частей фермы; действие отброшенной части заменяется реакциями перерезанных стержней, которые направляются вдоль стержней от узлов; изображаются активные силы, действующие на рассматриваемую часть фермы;
- составляются уравнения равновесия так, чтобы в каждое уравнение входило одно неизвестное усилие. Обычно составляются уравнения моментов сил относительно точек, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий. Если же на расчетной схеме два стержня параллельны, то составляется уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную к этим стержням;
- решая каждое из составленных уравнений равновесия, находят искомые усилия в стержнях.



Пусть требуется определить усилие в стержнях 5, 6, 9, 12 фермы рис. 7.1, т. е. Проверить правильность ранее выполненного расчета вырезания узлов. Проводим сечение  $cd$  через стержни 1, 5, 6 и рассматриваем равновесие левой части фермы (рис. 7.6). На эту часть действуют силы:  $\bar{R}_A$  – реакция опоры  $A$ ;  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_5$ ,  $\bar{S}_6$  – реакции перерезанных стержней 1, 5, 6.

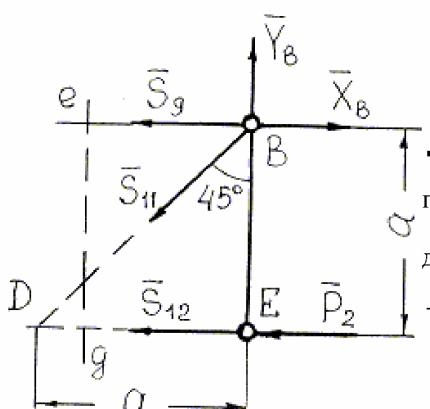
Рис. 7.6.

Для вычисления  $S_5$  составляем уравнение проекций сил на ось  $y$ ,

$$\sum F_{ky} = 0, \bar{R}_A - S_5 = 0, S_5 = 300 \text{ кН.}$$

Для вычисления  $S_6$  составляем уравнение моментов относительно точки пересечения стержней 1 и 5:

$$\sum M_G(\bar{F}_k) = 0, -S_6 \cdot a - \bar{R}_A \cdot a = 0, S_6 = -300 \text{ кН.}$$



Чтобы вычислить усилия в стержнях 9 и 12, проводим сечение  $de$ , разрезая ферму по стержням 9, 11, 12; рассматриваем правую часть фермы (рис. 7.7). На рассматриваемую часть фермы действуют силы:  $\bar{P}_2$  – заданная сила,  $\bar{Y}_B$  – реакция опоры  $B$ ;  $\bar{S}_9$ ,  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{12}$  – реакции перерезанных стержней 9, 11, 12.

Рис. 7.7.

Для вычисления  $\bar{S}_9$  составляем уравнение моментов относительно точки  $D$  – точки пересечения стержней 11 и 12.

$$\sum M_G(\bar{F}_k) = 0, S_9 \cdot a + Y_B \cdot a - X_B \cdot a = 0$$

Отсюда  $S_9 = 0$

Для вычисления  $S_{12}$  составляем уравнение моментов относительно точки пересечения стержней 9, 11

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0, -S_{12} \cdot a - P_2 \cdot a = 0$$

Отсюда  $S_{12} = -300$  kН.

Сравнивая результаты расчетов, выполненных методом вырезания узлов, с результатами, полученными методом сечений, убеждаемся в том, что усилия в стержнях 5, 6, 9, 12 были определены правильно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, Ч. 1. – М., Наука, 1961 и последующие издания, – 512 с.