ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ I. СТАТИКА
Методические указания и задания к выполнению контрольной работы
для студентов заочного обучения

Учебно-методическое издание призвано помочь студентам очной, заочной форм обучения в самостоятельном получении и закреплении знаний, а также в решении задач раздела статики. Приведены основные теоретические сведения по данному курсу, разобраны примеры, даны контрольные вопросы.

СОЖЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курс теоретической механики состоит из трех основных разделов: статики, кинематики и динамики.

В пособии изложены основы раздела статики. Основоположником статики принято считать величайшего ученого древности Архимеда (287-212 г. до н.э.). Опираясь на строгую систему аксиом, он дал первое научное изложение теории рычага, создал учение о центре тяжести. Период от Архимеда до Галилея, охватывающий почти два тысячелетия, стал временем постепенного накопления опытного материала о разнообразных механических движениях. Значительно позже эти знания были обобщены, упорядочены и представлены в работах Вариньена (1654-1722) и Пуансо (1777-1859), являющихся безусловной базой для изучения состояния равновесия тел.

СТАТИКА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

1.1. Основные понятия статики

Статика – учения о силах и о равновесии тел под действием приложенных сил.

Под материальными объектами в теоретической механике рассматриваются:

- *материальная точка* – материальное тело, размерами которого можно в данной задаче пренебречь;
- *механическая система* – система взаимосвязанных материальных точек;
- *абсолютно твердое тело* – тело в котором, расстояние между двумя любыми точками есть величина постоянная.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел.

Сила определяется (рис. 1):

- численной величиной (модулем);
- линией действия и направлением;
- точкой приложения.

где $\overline{\boldsymbol{F}}$– вектор силы ;
т. А – точка приложения силы $\overline{\boldsymbol{F}}$

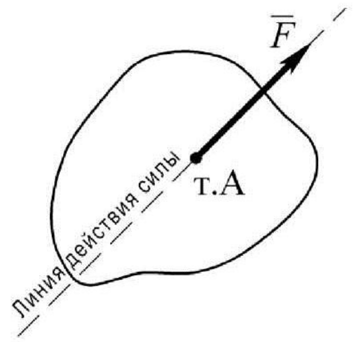


Рис. 1

Линия действия – прямая, по которой направлен вектор силы.

В твердом теле сила – вектор, скользящий по линии действия силы.

Так как сила – вектор, то её можно спроецировать на координатные оси. В пространстве на три оси x, y, z, (рис. 2). В плоскости на две оси, пусть x и y, (рис.3).

$\overline{\boldsymbol{F}}\ (\boldsymbol{F_x}, \boldsymbol{F_y}, \boldsymbol{F_z})$ – сила в пространстве.
$\boldsymbol{F_{xy}} = \boldsymbol{Fcos\alpha}$ проекция силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ на плоскость *xy*.

Проекции вектора силы на координатные оси соответственно равны:

$$\boldsymbol{F_x = F\cos a \cdot \sin \beta}$$
$$\boldsymbol{F_y = F\cos a \cdot \cos \beta}$$
$$\boldsymbol{F_z = F\sin\alpha}$$

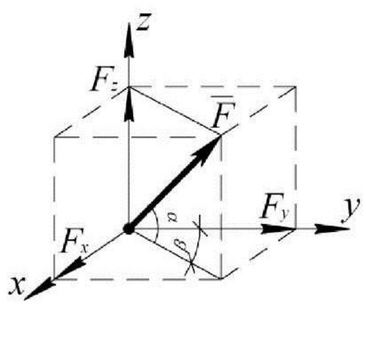
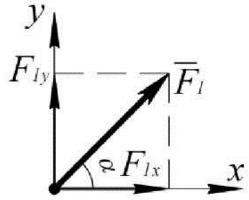
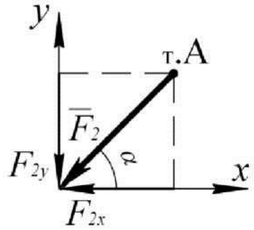


Рис. 2

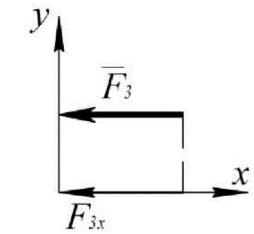
Случаи проекции силы на координатные оси плоскости *xy*.



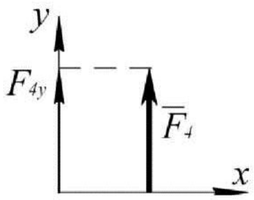
$\overline{\boldsymbol{F}}_1(\boldsymbol{F}_{1x}, \boldsymbol{F}_{1y})$
$\boldsymbol{F}_{1x} = \boldsymbol{F}_1 \cos\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{F}_{1y} = \boldsymbol{F}_1 \sin\boldsymbol{\alpha}$



$\overline{\boldsymbol{F}}_2(\boldsymbol{F}_{2x}, \boldsymbol{F}_{2y})$
$\boldsymbol{F}_{2x} = -\boldsymbol{F}_2 \cos\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{F}_{2y} = -\boldsymbol{F}_2 \sin\boldsymbol{\alpha}$



$\overline{\boldsymbol{F}}_3(\boldsymbol{F}_{3x})$, $\quad \overline{\boldsymbol{F}}_3 \| \boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{F}_{3x} = -\boldsymbol{F}_3$
$\boldsymbol{F}_{3\mathbf{y}} = \mathbf{0}$



$\overline{\boldsymbol{F}}_4(\boldsymbol{F}_{4\mathbf{y}})$, $\quad \overline{\boldsymbol{F}}_3 \| \mathbf{y}$
$\boldsymbol{F}_{4\mathbf{y}} = \boldsymbol{F}_4$
$\boldsymbol{F}_{4\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

Рис. 3

Системой сил (рис. 4) называется совокупность сил действующих на данное твердое тело.

Система сил, действующая на свободное твердое тело, называется *уравновешенной*, если она не изменяет состояние покоя тела, она обозначается: $\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{F}}_1, \overline{\boldsymbol{F}}_2 \ldots \overline{\boldsymbol{F}}_n) \sim 0$.

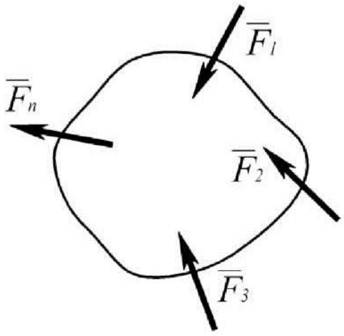


Рис. 4

Силы, действующие на механическую систему, делятся на *внешние и внутренние*.

Внешние силы $\overline{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{e}}$ - силы, действующие на точки (тела) материальной системы со стороны тел, не входящие в эту систему.

Внутренние силы $\overline{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{i}}$ – силы взаимодействия между материальными точками (телами) данной механической системы.

В статике твердых тел внутренние силы можно сделать внешними, применив метод Р.О.З:

Р – рассекаем,
О – отбрасываем,
З - заменяем.

Статика решает две основные задачи:

1) привести систему сил, действующих на твердое тело к простейшему виду;
2) вывести необходимые и достаточные условия равновесия тел под действием приложенных сил (уравнения равновесия).

1.2. Аксиомы статики

Механика - естественная наука, она строится на законах природы, установленных опытным путем. Статика, как раздел механики, строится на следующих аксиомах:

1.2.1. Аксиома равновесия двух сил

Две силы (рис. 5) *взаимно уравновешиваются* только в том случае, если действуя на твердое тело, они имеют *общую линию действия, равны по величине и направлены в разные стороны.*

$$\overline{\boldsymbol{F}}_1 = -\overline{\boldsymbol{F}}_2$$

$$\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{F}}_1, \overline{\boldsymbol{F}}_2) \sim 0$$

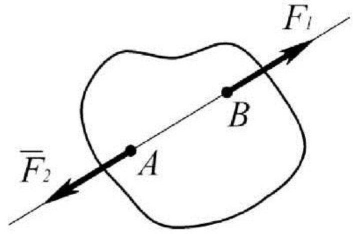


Рис. 5

1.2.2. Аксиома прибавления (убавления)

Если к твердому телу, находящемуся под действием некоторой системы сил, *прибавить (отнять) уравновешенную систему сил*, то действие данной системы сил на данное тело *не изменяется.*

Примечание. Из данной аксиомы следует, что сила - вектор скользящей в твердом теле. Силы, не изменяя их действие на твердое тело, можно переносить по линии действия сил.

1.2.3. Аксиома параллелограмма сил

Равнодействующая двух сил, выходящих из одной точки, равна *диагонали параллелограмма,* (рис.6) построенного на этих силах, как на сторонах.

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2$$

$$\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{F}_1}, \overline{\boldsymbol{F}_2}) \sim \boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{R}})$$

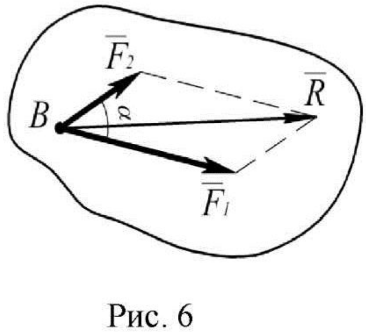


Рис. 6

1.2.4. Аксиома равенства действия и противодействия

Два тела находятся в равновесии только тогда, когда они взаимодействуют с силами равными по величине и противоположными по направлению и лежащими на одной прямой.

1.2.5. Аксиома отвердевания

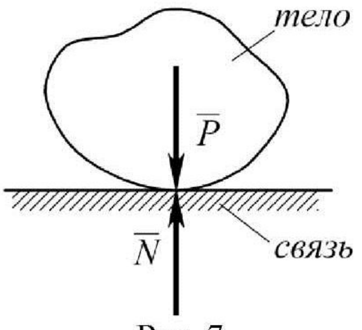
Равновесие геометрически изменяемой системы, находящейся под действием данной системы сил, не нарушится, если система отвердеет.

Эта аксиома позволяет рассматривать равновесие любой изменяемой конструкции, считая её абсолютно жесткой. В случае, если количество уравнений равновесия окажется недостаточным для решения задачи, то дополнительно составляются уравнения, учитывающие условия равновесия отдельных частей данной конструкции.

2. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

Тело называется *свободным*, если его перемещение в пространстве ничем не ограничено, и напротив, тело является *несвободным*, если его перемещению препятствуют другие тела.

Тела, ограничивающие перемещение данного тела, называются *связями*. Сила, с которой связь действует на тело, называется *реакцией связи* или *реактивной силой*. Эта сила направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещения телу (рис. 7).



$\overline{\boldsymbol{P}}$ – вес тела
$\overline{\boldsymbol{N}}$ – реакция связи

Рис. 7

Силы, *действующие* на твердое тело и не являющиеся реакциями, считаются *активными*, их действие, как правило, задано.

Равновесие несвободных тел в статике изучается на основании аксиомы связи.

Аксиома связи – всякое *несвободное тело можно сделать свободным*, если мысленно отбросить связи и заменить их действия реакциями связей. (метод Р.О.З.)

Пример: Плафон висит на нити, вес плафона $\overline{\boldsymbol{P}}$ (рис. 8 *а*).

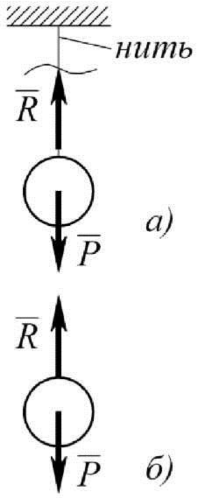


Рис. 8

Плафон – не свободное тело.
Нить – связь.

Мысленно нить рассекаем, отбрасываем и заменяем реакцией связи $\overline{\boldsymbol{R}}$.

Получим свободное тело, которое будет находится в равновесии под действием сил $\overline{\boldsymbol{P}}$ и $\overline{\boldsymbol{R}}$. (Рис. 8 *б*)

$$\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{P}}, \overline{\boldsymbol{R}}) \sim \mathbf{0}$$

В *статике* мы рассматриваем *равновесие только свободных тел*.

Силы реакций связей зависят от активных сил и, в отличии от активных, вызывать перемещение данного тела не могут, поэтому их называют пассивными. В задачах активные силы обычно задаются, а пассивные (реакции связей) подлежат определению.

Основные типы связей и направления их реакций:

- Гладкая поверхность или опора (рис. 9).

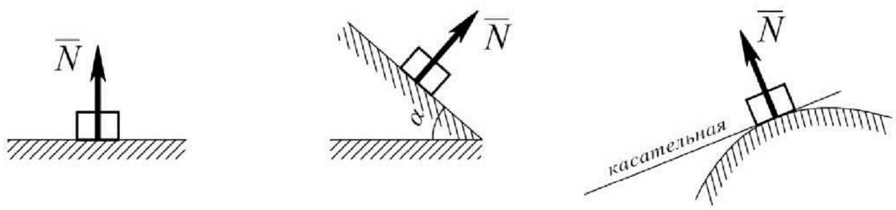


Рис. 9

Реакция $\overline{\boldsymbol{N}}$ гладкой опоры (рис.9) направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел (т.е. перпендикулярна касательной).

- Опора на угол

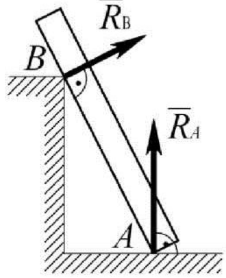
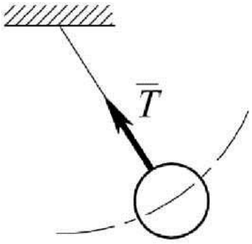


Рис. 10

Реакции $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}, \overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B}}$ (рис. 10) строятся перпендикулярно к той поверхности, на которую угол давит.

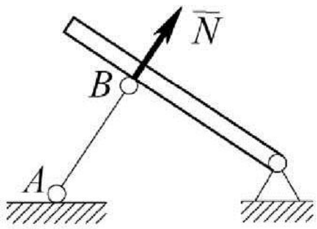
- Идеальная нить.



Реакция идеальной нити (рис. 11) направлена вдоль нити от закрепленного тела к точке её подвеса.

Рис. 11

- Невесомый стержень.

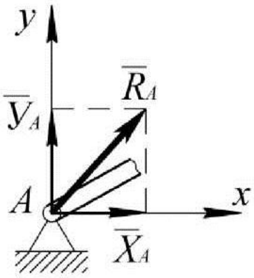


AB – невесомый стержень, на концах которого шарниры.

$\overline{\boldsymbol{N}}$ – реакция невесомого стержня (рис. 12) направлена вдоль стержня.

Рис. 12

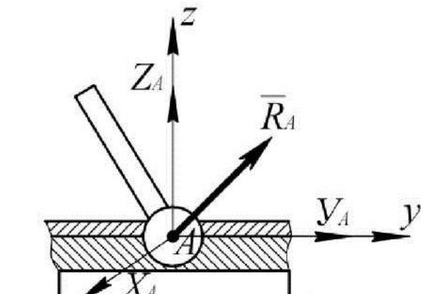
- Цилиндрический шарнир (подшипник).



Направление реакции определяется двумя взаимно-перпендикулярными составляющими $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{Ax}}, \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{Ay}})$ или (обозначают $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{A}})$), где $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{A}}$ - две неизвестных проекции реактивной силы $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}$ на оси *x*, *y*. Величина реакции равна $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{2}}}$.

Рис. 13

- Сферический шарнир (подпятник).



Такая связь (рис. 14) не дает точке закрепления тела перемещаться ни в одном направлении. Реакция может быть представлена тремя взаимно-перпендикулярными составляющими $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{A}})$

Величина реакции равна

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{2}}}.$$

Рис. 14

- Подпятник.

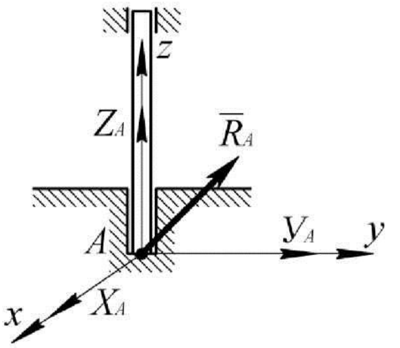


Рис. 15

Реакция подпятника, (рис. 15) с учетом давления на пяту, имеет три неизвестных $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X_A},\ \boldsymbol{Y_A},\ \boldsymbol{Z_A})$.

Величина реакции равна

$$\boldsymbol{R_A} = \sqrt{\boldsymbol{X_A^2} + \boldsymbol{Y_A^2} + \boldsymbol{Z_A^2}}.$$

- Подвижная опора (каток)

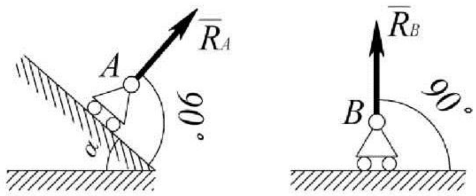


Рис. 16

Реакция подвижной опоры перпендикулярна (рис. 16) катковой поверхности опоры.

- Жесткая заделка (консольная балка)

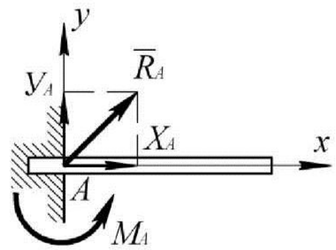


Рис. 17

Реакция жесткой заделки (рис. 17) характеризуется:

$\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X_A},\ \boldsymbol{Y_A})$ – реактивной силой;

$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}}$ - реактивным моментом.

Понятие момента будет рассмотрено в следующей главе.

Итого, жесткая (глухая) заделка имеет три неизвестных $(\boldsymbol{X_A},\ \boldsymbol{Y_A}, \boldsymbol{M_A})$.

3. МОМЕНТЫ СИЛЫ. ПАРА СИЛ

Действие силы на закрепленное в одной точке или оси тело, заключается в стремлении повернуть его вокруг данной точки или оси. Для характеристики вращательного действия силы вводится понятие момента силы относительно точки (или центра) и момента силы относительно неподвижной оси.

3.1. Момент силы относительно точки

Дана сила $\overline{\boldsymbol{F}}$, действующая на тело и неподвижный полюс т.О.

Найти момент силы относительно точки (рис. 18).

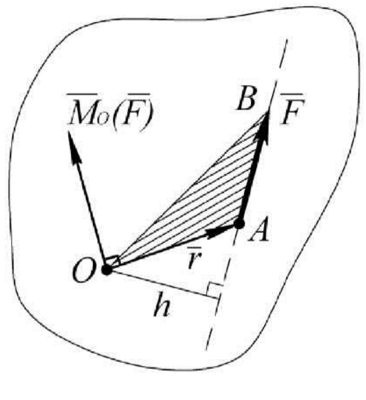


Рис. 18

$\overline{\boldsymbol{F}}$- сила,

т.А – точка приложения силы,

O – неподвижная точка (полюс вращения),

h – плечо силы (кратчайшее расстояние от плюса (точки *O*) до линии действия силы),

$\overline{\boldsymbol{r}}$ - радиус-вектор точки приложения силы,

ΔOAB – плоскость поворота (момента), проходящая через точку *O* и силу $\overline{F}$.

Моментом силы относительно точки $\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{o}}(\overline{\boldsymbol{F}})$ называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы ($\overline{\boldsymbol{r}}$) на вектор силы ($\overline{\boldsymbol{F}}$):

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{o}}(\overline{\boldsymbol{F}}) = \overline{\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{x}\, \overline{\boldsymbol{F}}. \qquad (1)$$

Строится вектор момента силы относительно точки $\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{o}}(\overline{\boldsymbol{F}})$ (рис. 18) перпендикулярно плоскости поворота (ΔOAB) так, чтобы с конца вектора момента силы относительно точки было видно вращение силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ относительно точки О против часовой стрелки.

Момент силы относительно точки по модулю равен произведению силы на плечо

$$|\mathrm{M_o}(\boldsymbol{F})| = \pm \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h}. \qquad (2)$$

Знак (+) если сила вращает тело против хода часовой стрелки (рис. 19*а*), если по часовой, то знак (-) (рис. 19*б*).

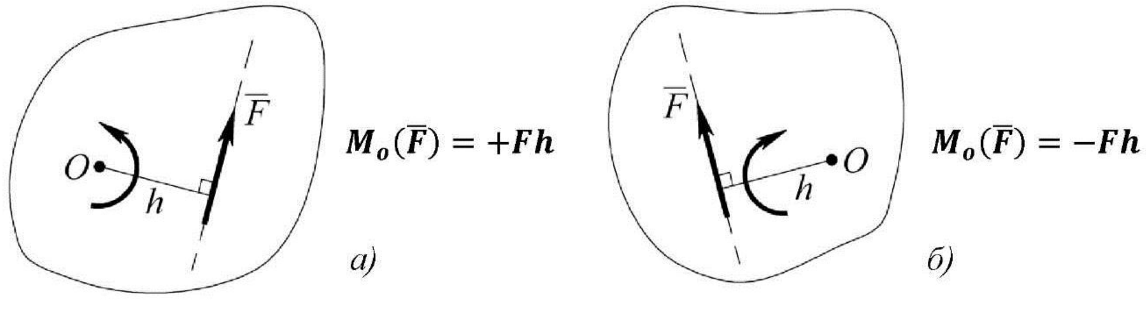


Рис. 19

В случае, когда плечо силы *(h)* найти затруднительно, то следует силу разложить на составляющие и воспользоваться теоремой о моменте равнодействующей (теорема Вариньона), которая для плоской системы сил имеет вид:

$$M_o(\bar{R}) = \sum_{i=1}^{n} M_o(\bar{F}_i),$$

где т. O взята в плоскости действия сил системы.

Замечание: момент силы относительно точки равен нулю, если сила (или линия её действия) пересекает точку (рис. 20).

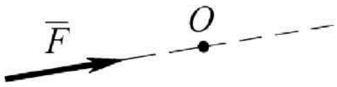


Рис. 20

$M_o(\bar{F}) = 0$, поскольку плечо равно нулю ($h = 0$).

Пример. Найти момент силы относительно точки O (рис. 21).

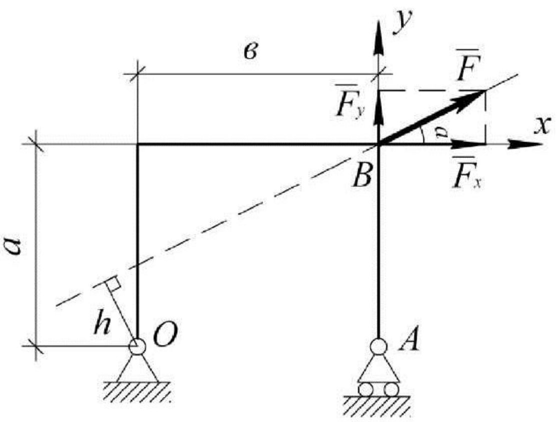


Рис. 21

Плечо h найти затруднительно. Разложим силу $(\bar{F})$ на составляющие, спроецировав её на координатные оси x,y.

$F_x = F\cos a$
$F_y = F\sin a$

$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y, \quad \bar{F}(\bar{F}_x,\ \bar{F}_y),$

Тогда

$$M_o(\bar{F}) = M_o(\bar{F}_x) + M_o(\bar{F}_y) = -F_x\, a + F_y\, в = -F\ \cos a\ \cdot a + F\sin a \cdot в.$$

3.2. Момент силы относительно оси

Дана неподвижная ось Z и сила $\bar{F}$, приложенная в точке A, располагающяяся произвольно в пространстве. Найдем момент силы $\bar{F}$ относительно указанной оси (рис. 22). Момент силы относительно оси $M_z(\bar{F})$ есть скаляр, равный моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную данной оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент силы относительно оси имеет знак (+) , если с конца оси Z видно, что проекция силы $(\bar{F}_{xy})$ стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, и если видно вращение по ходу часовой стрелки, то момент отрицательный и имеет знак (-) (рис. 22).

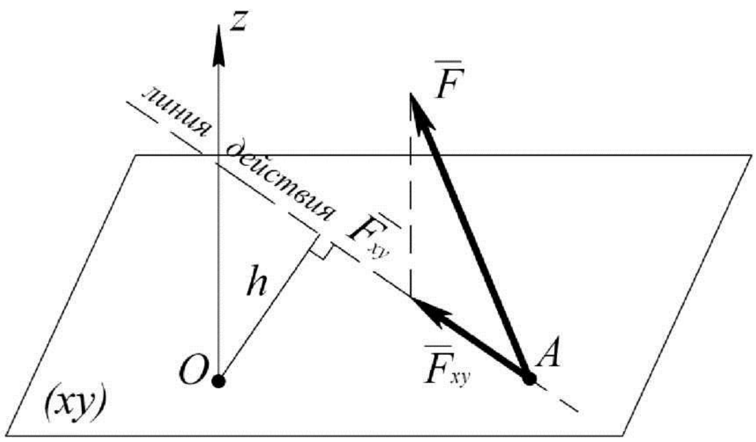


Рис. 22

$$M_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h, \qquad (3)$$

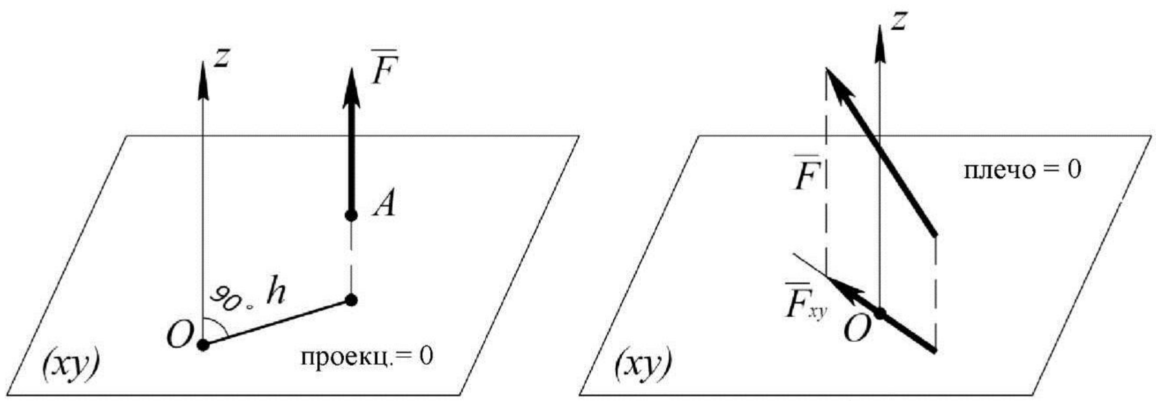
где h – кратчайшее расстояние от точки O (пересечения оси Z с плоскостью xy) до линии действия $\overline{F}_{xy}$.

При вычислении момента силы относительно оси удобно придерживаться следующей последовательности:

1. Провести плоскость (xy) через точку А, перпендикулярную оси Z.
2. Найти проекцию $\overline{F}_{xy}$ силы на эту плоскость.
3. Указать точку пересечения оси Z с плоскостью xy (т. О).
4. Определить расстояние h от точки O до линии действия проекции $\overline{F}_{xy}$.
5. Найти величину искомого момента и его знак $M_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости, то есть:

1. если сила $\overline{F} \,//\, Z$ то проекция силы $\overline{F}$ на плоскость (xy) обращается в нуль, т.е. $F_{xy} = 0$, Рис. 23*а*;



а *б*

Рис. 23

2. если линия действия силы пересекает ось (в этом случае плечо равно нулю, т.е. $h = 0$) (рис. 23*б*).

Замечание: При нахождении момента силы относительно оси удобно не проецировать силу на плоскость, а разложить на составляющие, параллельные осям, и по теореме Вариньона (о моменте равнодействующей) определить искомый момент как сумму моментов проекций указанной силы.

Пример. Найти момент силы $\boldsymbol{\overline{F}}$ относительно оси z.

Силу $\boldsymbol{\overline{F}}$ разложим на составляющие $\boldsymbol{F_x = F\cos\alpha}$, $\boldsymbol{F_z = F\sin\alpha}$, $\boldsymbol{\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_z}$ (рис. 24), тогда по теореме Вариньона:

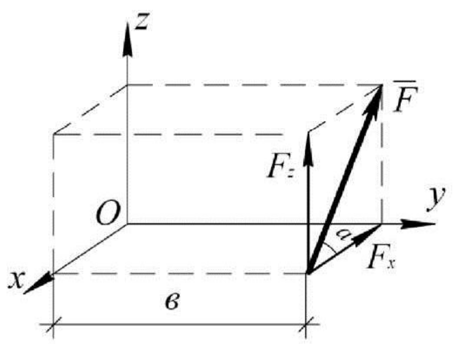


Рис. 24

$$\boldsymbol{M_z(\overline{F}) = M_z(\overline{F}_x) + M_z(\overline{F}_z)}$$

Поскольку сила $\boldsymbol{\overline{F}_z \,//\, z}$, то $\boldsymbol{M_z(\overline{F}_z) = 0}$,

$$\boldsymbol{M_z(\overline{F}) = M_z(\overline{F}_x) =}$$
$$\boldsymbol{= F \cdot \cos\alpha \cdot в}.$$

3.3. Пара сил

Парой сил называют систему двух равных по величине, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, линии действия которых не совпадают (рис. 25).

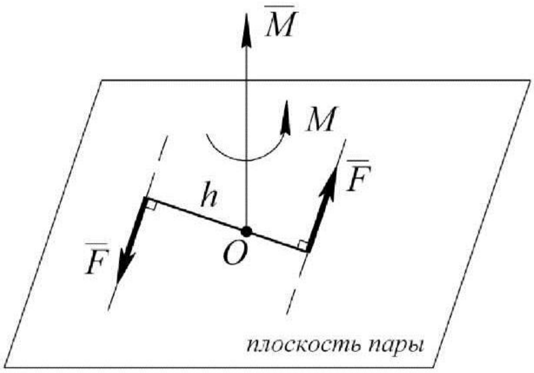


Рис. 25

Пара сил характеризуется:

- плоскостью пары;
- модулем сил, составляющих пару сил;
- плечом – кратчайшее расстоянием между линиями действия сил.

Пара сил не находится в равновесии, она поворачивает тело в плоскости пары. Мерой вращательного действия пары сил является ее момент - произведение величины одной из сил пары на плечо (рис. 25).

$$\boldsymbol{M} = \pm \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h} \tag{4}$$

Момент имеет положительный знак, если пара вызывает поворот против хода часовой стрелки, по ходу часовой стрелки - знак отрицательный. На (рис. 25) показан момент со знаком (+). Момент пары рассматривают как вектор и направляют его перпендикулярно плоскости пары так, чтобы с конца вектора момента $\overline{\boldsymbol{M}}$ было видно вращение пары против хода часовой стрелки.

Пара сил обладает рядом свойств:

- пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;
- пару, не изменяя оказываемого ею на твердое тело действия, можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной.

Свойство пары сил позволяют сделать следующий вывод: вектор момента пары сил $\overline{\boldsymbol{M}}$ является свободным вектором, и его можно построить в любой точке.

Замечание: Пара сил, действующая на тело, в уравнения проекций сил не входит, так как сумма проекций сил пар на любую ось равна нулю. Пара сил входит только в уравнения моментов, так как сама характеризуется моментом.

4. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ

(первая задача статики – упростить произвольную системы сил)

Системы сил, действующие на твердое тело, могут быть:

- сходящимися, то есть линии действия сил пересекаются в одной точке;
- плоскими, если все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости;
- пространственными, когда силы, действующие на тело, лежат произвольно в пространстве.

Произвольная система сил $\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{F}}_1, \overline{\boldsymbol{F}}_2, \ldots, \overline{\boldsymbol{F}}_n)$, где n – число сил системы, эквивалента одной силе

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{F}}_i, \tag{5}$$

- называемой главным вектором и одной паре сил с моментом

$$\overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} m_o(\overline{F}_i), \qquad (6)$$

- называемой главным моментом системы сил, то есть можно записать:

$$S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \sim S(\overline{R},\ \overline{M}_o),$$

где т. O – произвольная точка или центр приведения.

4.1. Условия равновесия твердого тела

(вторая задача статики)

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил $S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n)$, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}_o$ и главный момент относительно произвольного полюса $\overline{M}_o$ были равны нулю, то есть:

$$\begin{cases} \overline{R}_o = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0, \\ \overline{M}_o = \sum_{i=1}^{n} m_o(\overline{F}_i) = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

- условия равновесия твердого тела под действием произвольной системы сил.

Записывая полученные векторные равенства в проекции на координатные оси $x,y,z,$ получаем шесть скалярных уравнений равновесия:

4.2. Уравнения равновесия пространственной системы сил

$\overline{R}(R_x, R_y, R_z)$; $\overline{M}_o(M_x, M_y, M_z)$.

И зная, что $\mathbf{R_0}$ и $\mathbf{\overline{M}_0}$ равны нулю можем записать:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{i_z} = 0 \\ M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\overline{F}_i) = 0 \\ M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\overline{F}_i) = 0 \\ M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\overline{F}_i) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

- уравнения равновесия пространственной системы сил

Для равновесия тела находящегося под действием *произвольной* системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на три координатные оси и суммы моментов всех сил системы относительно этих же осей были равны нулю.

Замечание: если пространственная система сил является сходящейся, то уравнений равновесий будет три:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_x = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{i_x} = 0} \\ \boldsymbol{R_y = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{i_y} = 0} \\ \boldsymbol{R_z = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{i_z} = 0} \end{cases} \qquad (9)$$

- уравнения равновесия сходящейся пространственной системы сил

Здесь все силы системы пересекают оси *x,y,z* и моментов относительно этих осей не дадут.

4.3. Уравнения равновесия плоской системы сил

Пусть все силы плоской системы сил лежат в плоскости *xoy* и уравновешивают тело, т.е. $\boldsymbol{S(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n) \backsim 0}$, при $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$.

В этом случае их моменты $\boldsymbol{\overline{m}_o(\overline{F}_i)}$ относительно произвольного полюса (центра) т. О, лежащего в плоскости действия сил *xoy,* параллельны оси z (рис. 26).

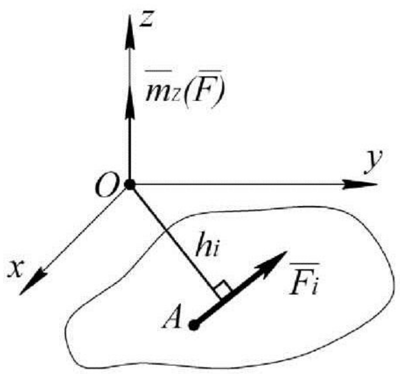


Рис. 26

Не равными нулю будут только моменты сил системы относительно оси z.

А все силы системы будут проецироваться только на оси *x* и *y*.

Следовательно, скалярными уравнениями равновесия плоской системы сил будут только три уравнения.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = 0} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_o(\overline{F}_i) = 0} \end{cases} \quad \textbf{\textit{или упрощенно}} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0} \\ \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_{Oi} = 0} \end{cases} \qquad (10)$$

- основная форма уравнений равновесия плоской произвольной системы сил.

Для равновесия тела, находящегося под действием плоской произвольной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на две координатные оси и суммы моментов всех сил системы относительно произвольного полюса т.О были равны нулю.

Уравнения равновесия плоской системы сил можно записать в других формах:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{F}_i) = 0 \end{cases}$$

- в этом случае прямая АВ не должна быть перпендикулярна оси x.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} m_A(\overline{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_B(\overline{F}_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_C(\overline{F}_i) = 0 \end{cases}$$

- здесь, точки А, В, С не лежат на одной прямой.

5. РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Если связью является шероховатая поверхность, то вместе с нормальной реакцией $\overline{N}$ может возникнуть касательная реакция $\overline{F}_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, направленная противоположно возможному перемещению (рис. 27). Метод решения задач при наличии силы трения остается таким же, как и при отсутствии трения (задачи статики), лишь к составленным уравнениям равновесия добавляется условие (11).

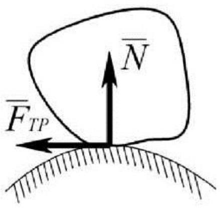


Рис. 27

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N \tag{11}$$

где f - коэффициент трения.

Сила трения меняется от нуля до максимального значения: $0 \le F_{\text{тр}} \le F_{\text{тр}\,max}$.

Задача. Однородная балка АВ длиной *l* и весом Р опирается концом А на шероховатую горизонтальную поверхность, а точкой С - на гладкую вертикальную опору высотой $h = l/2$ (рис. 28*а*). Найти наименьшее значение коэффициента трения между балкой и горизонтальной поверхностью, при котором возможно равновесие, если угол $\boldsymbol{\alpha = 60°}$.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки АВ (рис. 28*б*). На неё действуют: заданная сила веса $\overline{\boldsymbol{P}}$, реакция $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{C}}$, направленная перпендикулярно к АВ, две реакции в т. А – нормальная $\overline{\boldsymbol{N}}$ и касательная $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{тр}}$ (сила трения).

Выбрав оси координат, можно составить три уравнения равновесия для плоской системы сил: АВ $(\overline{\boldsymbol{P}}, \overline{\boldsymbol{N}}, \overline{\boldsymbol{F}}_{\text{тр}}, \overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{c}}) \sim \boldsymbol{0}.$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i_x}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{TP}} - \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i_y}} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_{\text{A}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}}) = -\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}/\mathbf{2} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{AC} = \mathbf{0}$$

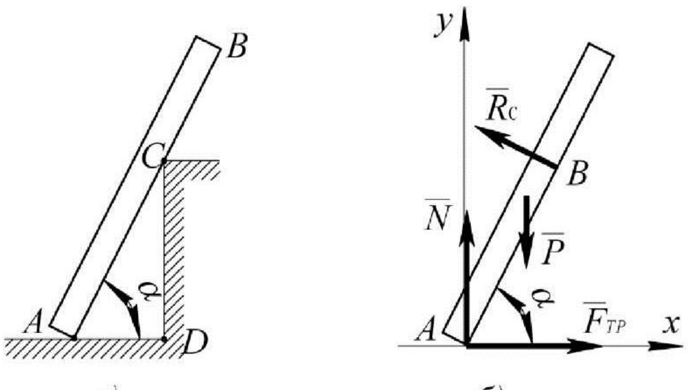


Рис. 28

Из треугольника ACD (рис. 28*а*): $\boldsymbol{AC} = \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{2} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}}$

Определяем неизвестные величины из составленных уравнений

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} = \frac{-\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{2} \cdot \boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{TP}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{sin}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{C}} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}(\mathbf{1} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha}).$$

Запишем условия равновесия при наличии трения:

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} \leq \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{N}$$

Получаем $\boldsymbol{P} \cdot \mathbf{sin}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{P}(\mathbf{1} - \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\alpha})$

Отсюда находим коэффициент трения

$$\boldsymbol{f \geq \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{(1 - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha)}}$$

При заданном $\boldsymbol{\alpha = 60°}$ получаем $\boldsymbol{f \geq 0,48}$. Следовательно $\boldsymbol{f_{min} = 0,48}$.
Ответ: $\boldsymbol{f_{min} = 0,48}$

6. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ

В статике решение задачи сводится к следующим операциям.

1. Выяснить, какова данная конструкция, жесткая или не жесткая (изменяемая или не изменяемая).
2. Если конструкция не жесткая, то, применить метод Р.О.З. (аксиому связей), и выбрать тело, равновесие которого следует рассмотреть; нарисовать выбранное тело отдельно.
3. К данному телу приложить все активные (заданные) силы и силы реакций связей.
4. Посмотреть, какая система сил действует на выбранное тело (сходящаяся, плоская, пространственная и т.д.).
5. Выбрать систему координат.
6. Записать для полученной системы сил необходимые уравнения равновесия.
7. Решить полученную систему уравнений, проанализировать их.

Кратко статика выражается тремя словами:

Тело	**Силы (активные, реактивные)**	**Уравнения равновесия**

7. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

7.1. Центр тяжести твердого тела

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести при любом положении тела в пространстве.

Твердое тело состоит из частиц, на каждую из которых действуют силы тяжести $(\overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{1}}, \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{2}}, \dots, \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}}, \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{n}})$, образующие параллельную пространственную систему сил.

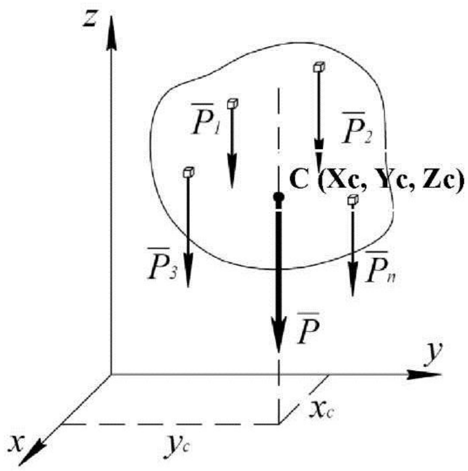


Рис. 29

Равнодействующую сил тяжести этих частиц обозначим $\overline{\boldsymbol{P}}$. Модуль этой силы называется весом тела и определяется:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}} \tag{12}$$

Координаты центра тяжести тела т.C (x_c, y_c, z_c) находятся по формулам:

$$\boldsymbol{x_c} = \frac{\sum \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{x_{ci}}}{\sum \overline{\boldsymbol{P}}} \qquad \boldsymbol{y_c} = \frac{\sum \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{y_{ci}}}{\sum \overline{\boldsymbol{P}}} \qquad \boldsymbol{z_c} = \frac{\sum \overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \boldsymbol{z_{ci}}}{\sum \overline{\boldsymbol{P}}}, \tag{13}$$

где x_{ci}, y_{ci}, z_{ci} – координаты частиц твердого тела в выбранной системе отсчета.

Замечание: Центр тяжести твердого тела может находится и вне пределов данного твердого тела (например, для кольца).

7.2. Координаты центров тяжести однородных тел

Если удельный вес тела γ, есть величина постоянная (γ-const), то тело считается однородным. Для однородных тел вместо $\overline{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{i}}$ можно использовать $\boldsymbol{V_i}$, $\boldsymbol{S_i}$, $\boldsymbol{L_i}$, обозначающие соответственно объемы, площади, длины частей, на которые разбито тело, т.е.

$$\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{V_i}, \qquad \boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{S_i}, \qquad \boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{L_i}.$$

Вес тела: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{V}$, где $\boldsymbol{V}$ – объем всего тела ($\boldsymbol{V} = \sum \boldsymbol{V_i}$),
$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S}$ – площадь тела ($\boldsymbol{S} = \sum \boldsymbol{S_i}$),
$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{L}$, где $\boldsymbol{L}$ – длина всех частей тела ($\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L_i}$).

Подставляя эти значения в формулы (12) получим выражение для нахождения координат центра тяжести:

- объемного тела:

$$x_c = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{\sum V} \qquad y_c = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{\sum V} \qquad z_c = \frac{\sum V_i \cdot z_i}{\sum V} \tag{14}$$

- для плоского тела:

$$x_c = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S} \qquad y_c = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S} \qquad z_c = \frac{\sum S_i \cdot z_i}{\sum S} \tag{15}$$

- для линейного тела:

$$x_c = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{\sum L} \qquad y_c = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{\sum L} \qquad z_c = \frac{\sum L_i \cdot z_i}{\sum L} \tag{16}$$

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

7.3. Способы определения центров тяжести твердых тел

Положение центра тяжести твердого тела можно определить с помощью несложных методов. Рассмотрим некоторые из них.

1. Симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, на оси симметрии или в центре симметрии.

2. Разбиения. В случае, когда тело можно разбить на части, для которых объемы, площади, длины, а следовательно и координаты их центров тяжести известны, или легко определяются, координаты центра тяжести всего тела находятся по формулам (14, 15, 16).

3. Дополнения. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, считая при этом объемы или площади вырезанных частей отрицательными.

7.4. Алгоритм решения задач на определение центра тяжести

1. Произвольно выбираем систему отчета (x, y, z).
2. Расчленяем тело на части, для которых известны или легко определяются объемы, площади или длины.
3. Определяем объемы, площади или длины этих частей.
4. Находим координаты центров тяжести полученных частей в выбранной системе отсчета.
5. Вычисляем по формулам (14, 15, 16) координаты центра тяжести всего тела.

8. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

8.1. Порядок оформления расчетно-графических работ

Расчетно-графические работы (РГР) по статике, рекомендуется выполнять четким разборчивым почерком черными или синими чернилами или в компьютерном наборе (14 размер шрифта, полуторный интервал) на одной стороне листа формата А4. Первый лист (за титульным листом) должен содержать задание и расчетную схему.

Текст записки располагают от правого и левого края листа на расстоянии до текста не менее 20 мм (для подшивки и замечаний), сверху и снизу - не менее 40 мм.

8.2. Задания к РГР по статике

8.2.1. ЗАДАНИЕ №1. Определение реакций опор твердого тела

В задании необходимо определить реакции в опорах, вызванные заданными нагрузками, а также сделать проверку выполненного решения задачи. Исходные данные представлены в таблице 1 и на рис. 31.

Таблица 1

№ Вар.	№ Схемы	*F*, кН	*P*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м	*a*, м	*в*, м	*c*, м	*β*, град.
1	1	10	10	6	2	4	2	--	45
2		12	15	8	3	5	3	--	30
3		18	6	12	1,1	3	1	--	60
4	2	6	8	10	1,8	--	1	0,5	30
5		8	12	15	5	--	1,5	2	45
6		6	10	6	1	--	1	2	60
7	3	9	9	8	3	2	1	--	30
8		23	23	12	1,2	3,5	1,5	--	45
9		14	15	10	1,8	5	3	--	30
10	4	16	16	15	4	4	2	3	45
11		12	13	6	2	4	2	3	45
12		10	10	8	3	5	3	4	30
13	5	15	15	12	1,4	--	1	--	60
14		6	12	10	4,5	--	1	--	30
15		8	8	15	4	--	1,5	--	45
16	6	6	6	7	1,7	--	1	2	60
17		9	9	8	3	--	1	0,5	30
18		23	23	9	2	--	1,5	2	45
19	7	15	15	10	1,5	--	3	4	30
20		16	16	20	4	--	2	3	45
21		13	13	6	2	--	2	3	45
22	8	10	10	4	3	5	3	--	30
23		15	15	12	1,2	3	1	--	60
24		12	12	8	1,5	2	1	--	30
25	9	8	8	16	4	3,5	1,5	--	45
26		6	15	6	2	3	1	--	60
27		9	6	10	5	2	1	--	30
28	10	22	8	12	3	--	1,5	--	45
29		15	6	10	1,5	--	3	--	30
30		16	9	20	6	--	2	--	45

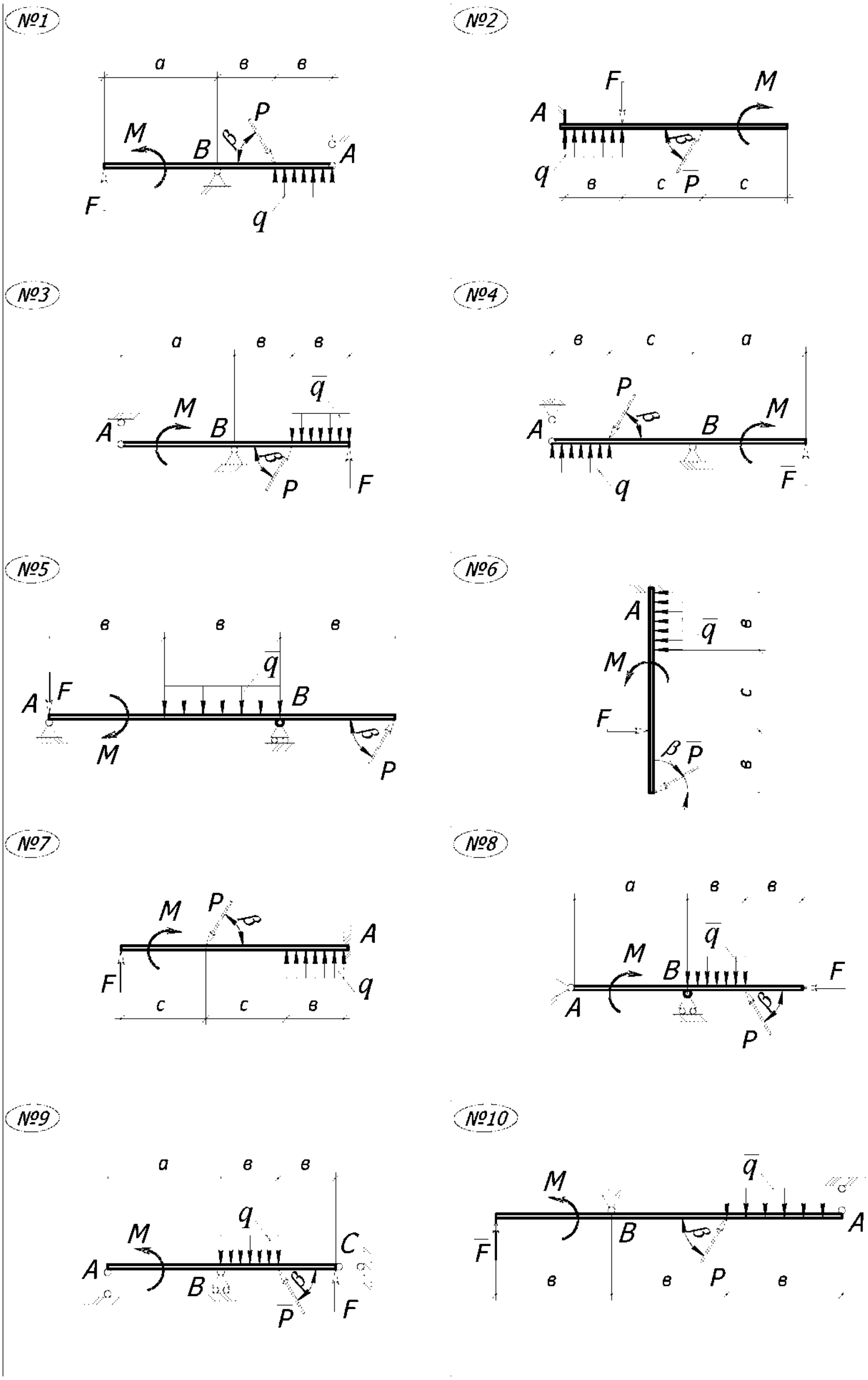


Рис. 31

8.2.2. ЗАДАНИЕ №2. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

В задании необходимо определить реакции в опорах и давление в шарнире С, возникающие под действием заданных нагрузок, сделать проверку решения задачи.

Исходные данные представлены в таблице 2, размеры указаны на рис. 32.

Таблица 2

№ Вар.	№ Схемы	F, кН	P, кН	M, кН·м	q, кН/м	α, град.
1	1	22	8	16	1,8	45
2		20	12	18	5	60
3		25	10	12	1	45
4	2	26	9	10	3	45
5		28	23	15	1,2	30
6		26	11	16	1,8	60
7	3	--	15	18	4	60
8		--	16	12	2	45
9		--	19	10	3	30
10	4	26	23	15	1,4	30
11		22	8	16	4,5	45
12		20	12	18	4	60
13	5	25	10	12	1,7	45
14		26	19	10	3	45
15		28	23	15	2	30
16	6	--	9	17	1,8	60
17		--	15	18	5	60
18		--	6	19	1	45
19	7	15	19	10	3	30
20		26	23	20	1,2	30
21		23	8	16	1,8	45
22	8	20	12	14	4	60
23		25	10	12	2	45
24		22	9	18	3	45
25	9	28	4	16	1,4	30
26		26	11	16	4,5	60
27		29	15	10	4	60
28	10	22	26	12	1,7	45
29		25	19	10	3	30
30		26	23	20	2	30

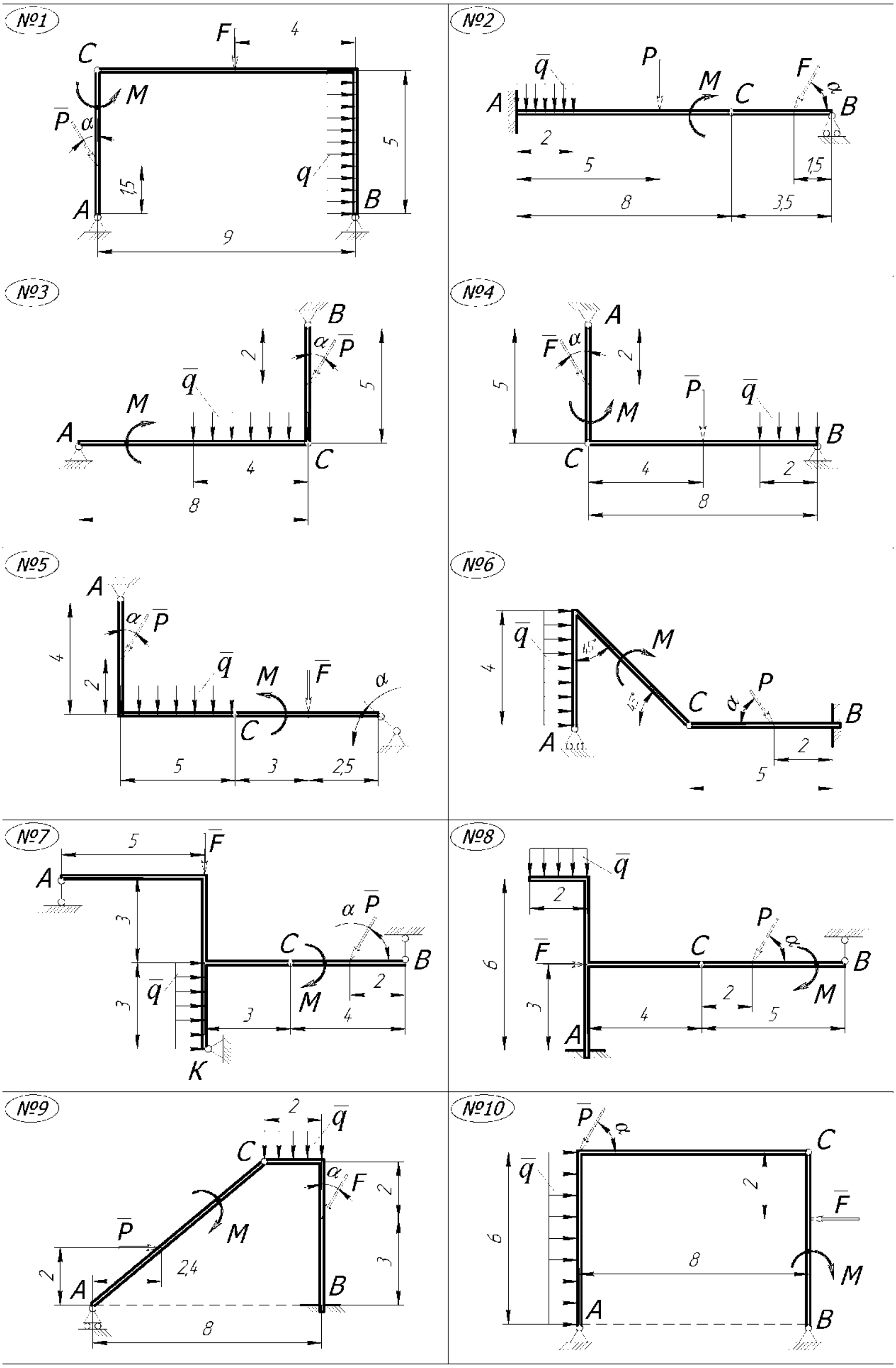


Рис. 32

8.2.3. ЗАДАНИЕ №3. Определение реакций опор твердого тела (пространственная система сил)

В задании необходимо определить реакции в опорах и усилие в нитях или стержнях для схем (1, 5, 6, 9, 10); для схем (2-4, 7,8) найти величину уравновешивающей силы P, возникающие под действием заданных нагрузок, сделать проверку решения задачи.

Исходные данные представлены в таблице 3 и на рис. 33.

Таблица 3

№ Вар.	№ Схемы	T, кН	Q, кН	G, кН	a, м	b, м	c, м	α, град.
1	1	--	--	16	4	2	3	45
2		--	--	18	4	2	3	60
3		--	--	12	5	3	4	30
4	2	8	--	10	3	1	2	60
5		14	--	15	2	1	0,5	30
6		18	--	16	5	3	2	45
7	3	--	9	--	3	1	2	60
8		--	23	--	2	1	1,5	30
9		--	15	--	3	1	2	45
10	4	--	16	--	5	3	4	30
11		--	13	--	4	2	3	45
12		--	10	--	4	2	3	60
13	5	--	15	--	4	2	3	45
14		--	12	--	5	3	4	30
15		--	8	--	3	1	2	60
16	6	--	--	17	2	1	0,5	30
17		--	--	18	3,5	1,5	2	45
18		--	--	19	3	1	2	60
19	7	10	--	10	2	1	0,5	30
20		6	--	20	2,5	2	1	45
21		16	--	16	5	3	4	30
22	8	20	--	--	4	2	3	30
23		12	--	--	4	2	3	60
24		8	--	--	4	2	3	45
25	9	--	8	16	5	3	4	30
26		--	15	6	3	1	2	60
27		--	6	10	2	1	0,5	30
28	10	--	--	12	4	3	2	45
29		--	--	10	3	1	2	60
30		--	--	20	2	1	0,5	30

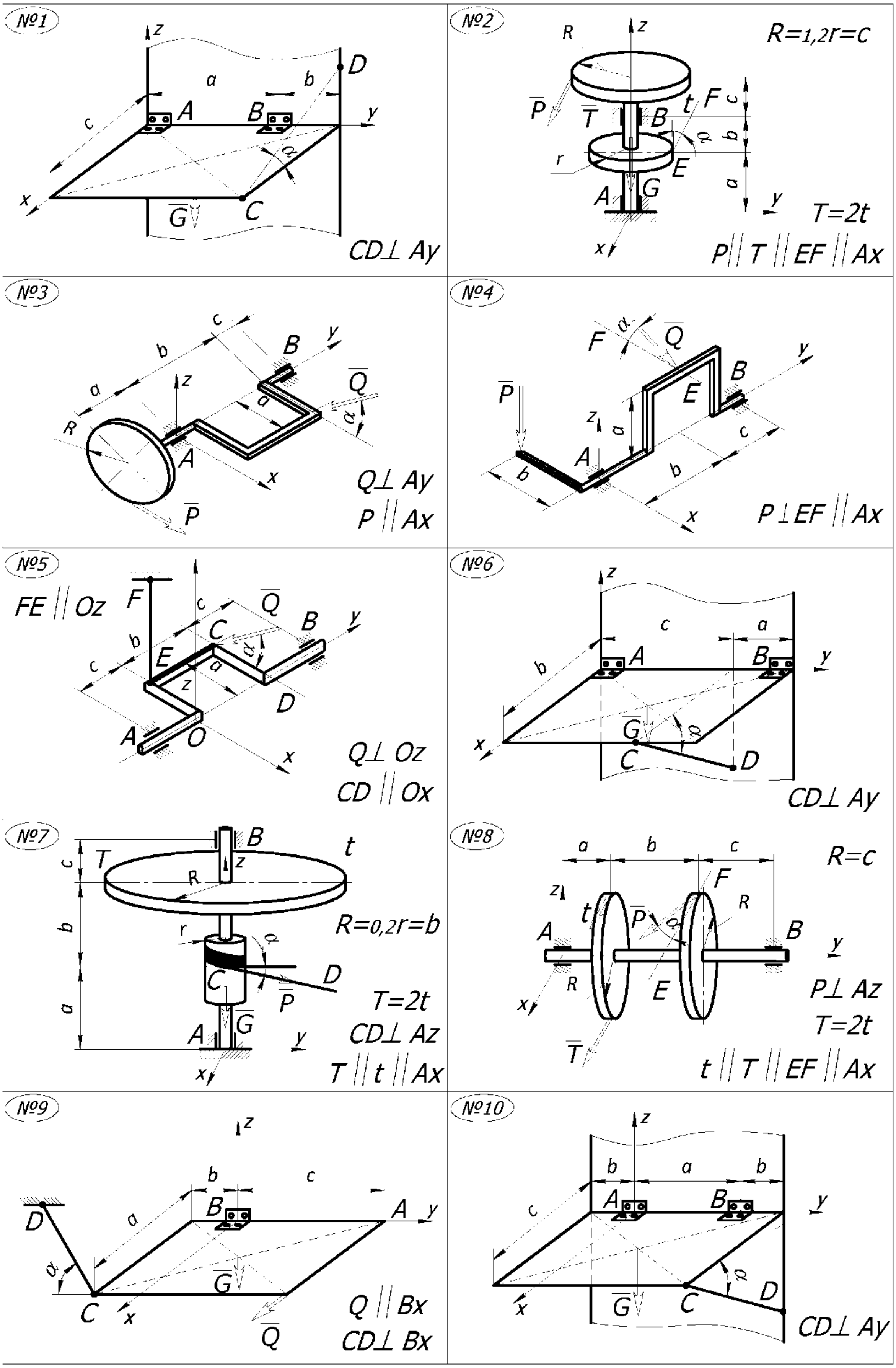

№1
CD⊥ Ay
№2
R=1,2r=c
T=2t
P || T || EF || Ax
№3
Q⊥ Ay
P || Ax
№4
P ⊥EF || Ax
№5
FE || Oz
Q⊥ Oz
CD || Ox
№6
CD⊥ Ay
№7
R=0,2r=b
T=2t
CD⊥ Az
T || t || Ax
№8
R=c
P⊥ Az
T=2t
t || T || EF || Ax
№9
Q || Bx
CD⊥ Bx
№10
CD⊥ Ay

Рис. 33

8.2.4. ЗАДАНИЕ №4. Определение центра тяжести плоской фигуры

Для составного несимметричного сечения из прокатных профилей найти центр тяжести.

Исходные данные представлены в таблице 4 и на рис. 34.

Таблица 4

№ Вар.	№ Схемы	Уголок неравнпол., № профиля	Уголок равнпол., № профиля	Швеллер, № профиля	Балка двутавровая, № профиля	Лист, мм	*a*, мм
1	1	--	--	20	33	230x20	20
2		--	--	22	24	240x18	30
3		--	--	24	36	260x10	60
4		--	--	27	30	300x16	50
5		--	--	18	12	200x8	10
6	2	4,5/2,8	--	--	36	180x10	50
7		5,6/3,6	--	--	33	190x12	40
8		6,3/4	--	--	33а	200x14	30
9		8/5	--	--	30	220x16	20
10		11/7	--	--	27	230x18	10
11	3	--	8	18	10	--	6
12		--	5	16	12	--	10
13		--	4	14	14	--	18
14		--	3,6	20	16	--	20
15		--	3,2	24	18	--	24
16	4	--	9	5	--	130x8	30
17		--	7	6,5	--	140x10	70
18		--	8	8	--	150x12	40
19		--	9	10	--	160x14	70
20		--	10	14	--	180x16	60
21	5	2,5/1,6	--	16	--	200x8	100
22		3,2/2	--	18	--	200x10	90
23		4/2,5	--	20	--	240x12	120
24		4,5/2,8	--	22	--	260x14	140
25		5,6/3,6	--	24	--	280x16	10
26	6	--	10	27	--	160x8	50
27		--	8	16	--	180x10	100
28		--	5	14	--	140x12	80
29		--	4	18	--	80x6	10
30		--	3,2	5	--	120x10	20

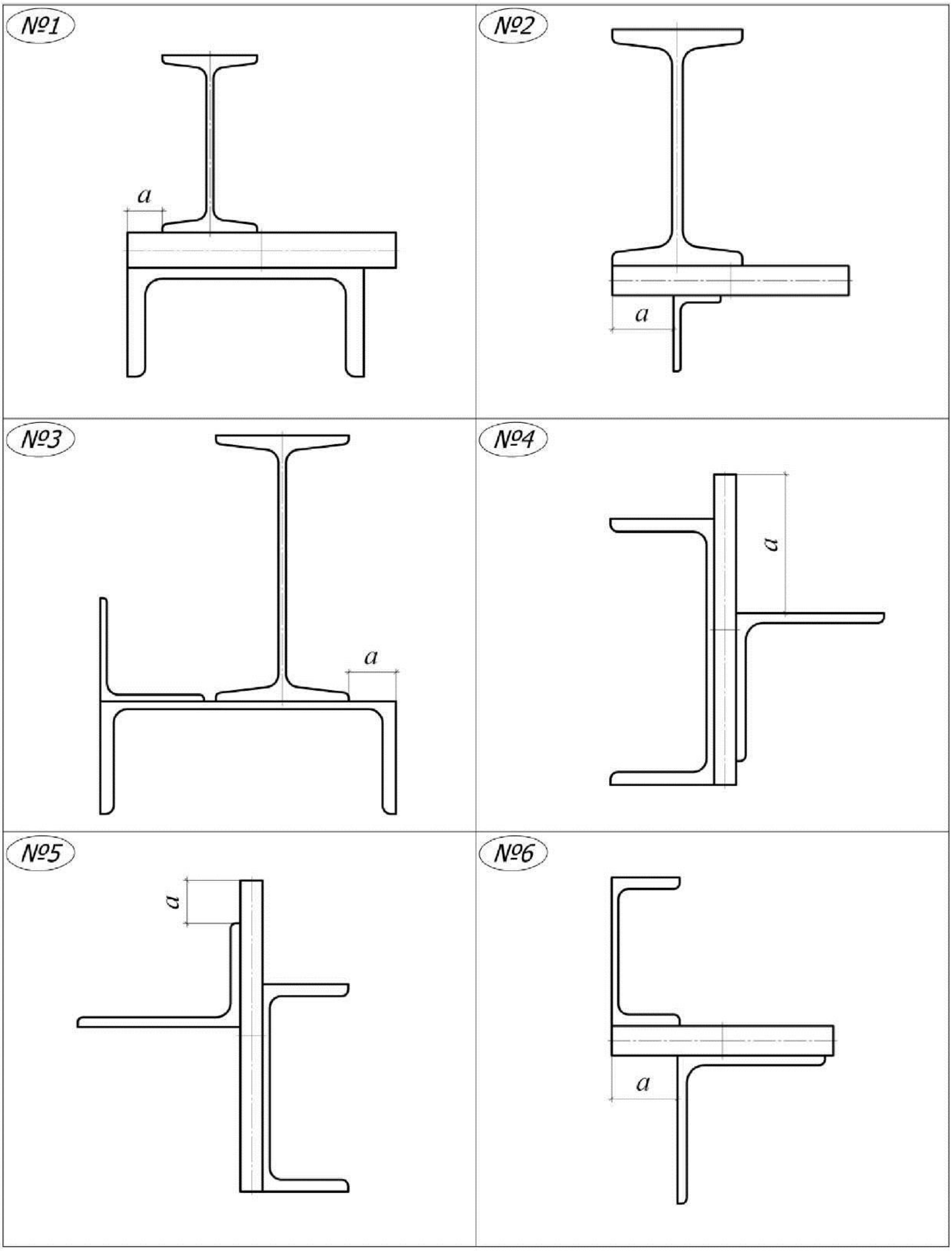


Рис. 34

8.2.5. ЗАДАНИЕ №5. Расчет плоских ферм

Определить реакции опор фермы и усилие в стержнях. Нагрузка и размеры даны в таблице 5 и на рис. 35.

Таблица 5

№ вар.	№ Схемы	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	a, м	b, м	Расчетные стержни
1	1	12	18	6	1	1,2	CD, EA
2		8	12	22	1,2	1,6	BD, EK
3		12	8	24	1,8	2,2	BD, AD
4	2	18	18	6	1,4	1,8	BE, EA
5		12	12	22	0,8	1,2	CE, ED
6		18	8	24	0,6	1,0	BC, EC
7	3	12	8	24	0,8	1,4	DE, DB
8		8	18	16	1,2	1,8	CE, ED
9		18	12	22	1,6	2,6	DE, BC
10	4	8	24	10	1,0	0,8	DK, AC
11		18	10	14	1,4	1,8	KD, AD
12		14	22	12	2,2	3,2	DA, KC
13	5	10	16	8	1,2	1,4	ED, CA
14		12	24	14	1,4	1,6	CD, EA
15		16	14	10	1,4	1,2	CD, CB
16	6	8	24	10	1,0	1,6	DA, AC
17		18	10	14	1,4	2,2	DC, EA
18		14	22	12	1,2	1,8	AC, AD
19	7	18	18	6	1,8	1,6	AE, DA
20		12	12	22	2,0	2,2	AE, AB
21		18	8	24	2,4	1,8	AE, BD
22	8	12	8	24	1,2	1,6	BK, EC
23		8	18	16	0,8	1,2	EB, EC
24		18	12	22	1,4	1,8	BC, EC
25	9	8	24	10	1,4	1,8	CB, EB
26		18	10	14	2,2	2,6	CE, EB
27		14	22	12	1,2	1,4	AC, BE
28	10	10	16	8	1,2	1,4	CK, EB
29		12	24	14	1,4	1,6	EB, AC
30		16	14	16	1,4	1,2	BC, KC

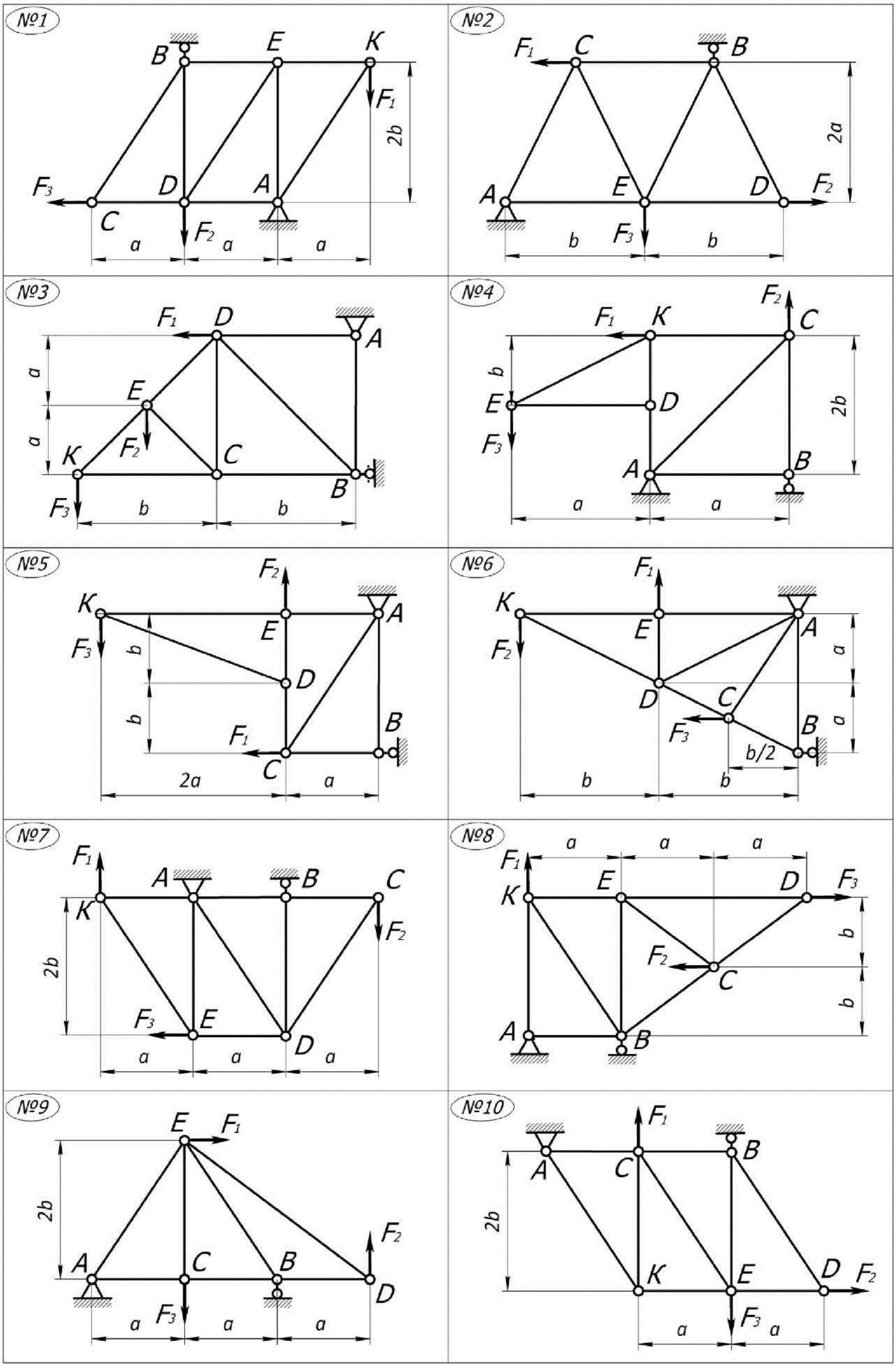

№1
B E K
F1
2b
F3 C D A
F2
a a a
№2
F1 C B
2a
A E D F2
F3
b b
№3
F1 D A
a
E
a
K F2 C B
F3
b b
№4
F2
F1 K C
b
E D
2b
F3
A B
a a
№5
F2
K E A
F3
b D
b B
F1
C
2a a
№6
F1
K E A
F2 a
D C
F3 B a
b/2
b b
№7
F1
A B C
K
F2
2b
F3 E
D
a a a
№8
a a a
F1
K E D F3
b
F2 C
b
A B
№9
E F1
2b
F2
A C B
D
F3
a a a
№10
F1
A C B
2b
K E D F2
F3
a a

Рис. 35

9. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ ПО СТАТИКЕ

9.1. *РГР №1.* Определение реакций опор твердого тела

Пример 1

Балка АВ концом А заделана в стену (рис. 36), нагружена силой $F = 20$ кН, непрерывно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности $q = 3$ кН/м и моментом $M = 5$ кН·м.

Пренебрегая весом балки, определить реакции опоры А (жесткой заделки). Размеры в метрах показаны на рисунке 36.

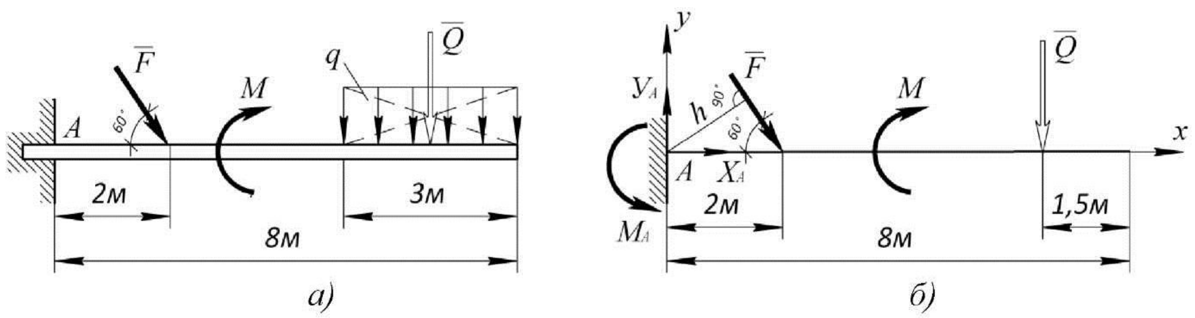


Рис. 36.

Решение.

Выполняем задание по порядку, изложенному в разделе 6.

1. Система жесткая. Состоит из одного тела – консольной балки А.
2. Рассмотрим равновесие консольной балки А.
3. Применяем аксиому связей (метод Р.О.З), отбрасываем связи и заменяем их действия реакциями. То есть отбросим заделку А и заменим ее реакцией заделки $\overline{R}_A$, представленной на (рис 36*б*) двумя ее составляющими X_A, и Y_A, а также моментом заделки M_A.

К балке А прикладываем также активные (заданные) силы: силу $\overline{F}$, непрерывно распределенную нагрузку $\overline{q}$, которую заменяем единой сосредоточенной силой $\overline{Q}$, сила $\overline{Q}$ приложена посредине участка приложения нагрузки (рис. 36*а*) и имеет направление нагрузки, по модулю (величине) сила Q=q·3=3·3=9 кН, то есть сила Q равна произведению интенсивности нагрузки q=3 кН/м на длину нагрузки l = 3 м.

Следовательно, на балку А действует уравновешенная система сил $S(X_A, Y_A, M_A, F,$ Q) ∾ 0, под действием которых балка находится в равновесии, три из которых - X_A, Y_A, M_A нужно найти.

4. Из схемы (рис. 36*б*) видно, что силы, действующие на консольную балку А лежат произвольно в плоскости чертежа (*xy*), то есть образуют плоскую произвольную систему сил, для которой нужно использовать один из трех вариантов систем уравнений равновесия. Выбираем первую систему, которая гласит: сумма проекций всех сил на оси (*xy*) и сумма моментов этих

сил относительно произвольного полюса равна нулю. Составим три уравнения равновесия всех сил системы, приложенных к консольной балке А (рис. 36б).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{i_x} = X_A + F \cdot \cos 60 = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} F_{i_y} = Y_A - F \cdot \sin 60 - Q = 0 & (2) \\ \sum_{i=1}^{n} m_{\text{A}}(\overline{F}_i) = M_A - M - F \cdot 1,73 - Q \cdot (8 - 1,5) = 0 & (3) \end{cases}$$

плечо $h = 2 \cdot \sin 60 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}73$ м

При составлении уравнения моментов учитываем, что *плечо – кратчайшее* расстояние от полюса А *до линии действия силы*, а *момент силы* имеет знак *плюс*, если сила вращает тело против хода часовой стрелки.

5. Решаем составленную систему уравнений (1, 2, 3).

Из уравнения 1. $X_A = -F \cdot cos\, 60 = 20\frac{1}{2} = 10$ кН

Из уравнения 2. $Y_A = F \cdot \sin 60 + Q = 20\frac{\sqrt{3}}{2} + 9 = 26{,}3$ кН

Из уравнения 3. $M_A = M + F \cdot 1{,}73 + Q \cdot 6{,}5 =$
$= 5 + 20 \cdot 1{,}73 + 9 \cdot 6{,}5 = 98{,}1$ кН $\cdot$ м

Знаки (+) полученных величин показывают, что эти силы и моменты направлены так, как это показано на (рис 36), знак минус (−), говорит о том, что направление противоположно выбранному.

Пример 2 **Определение реакций опор твердого тела с применением ПК**

Балка АВС, закрепленная в точке В цилиндрическим шарниром и удерживаемая в точке А вертикальным стержнем нагружена силами: распределенной нагрузкой постоянной интенсивности $\overline{q}$, сосредоточенной силой $\overline{\text{P}}$ и моментом М (рис. 37 *а*).

Определить реакции связей в точках А и В, если:

$\boldsymbol{M = 20}$ кН $\cdot$ м, $\boldsymbol{P = 10}$ кН, $\boldsymbol{q = 5}$ кН/м
$\mathbf{a = 3}$ м, $\boldsymbol{b = 1.5}$ м, $\boldsymbol{\beta = 60° = \frac{\pi}{3}}$

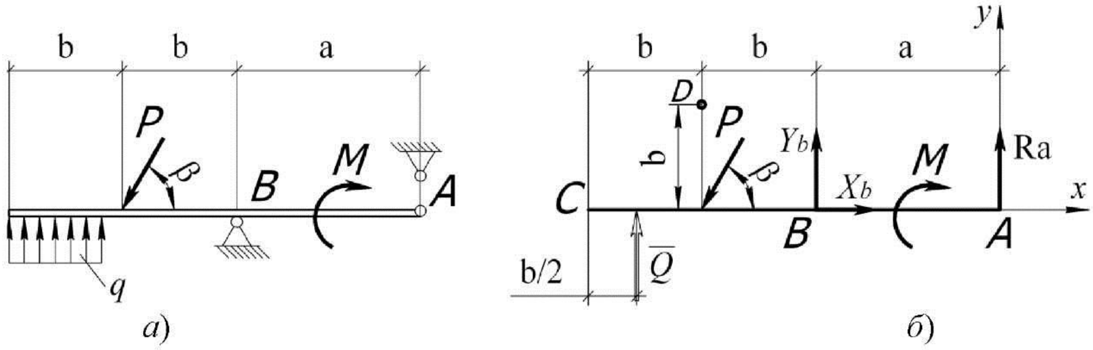


Рис. 37

Решение:

1. Рассмотрим равновесие жесткой балки ABC.
2. Выберем координатные оси *xy* (рис. 37*а*).
3. Прикладываем к балке ABC активные силы (силы, действие которых заданно): $\bar{\boldsymbol{q}}$, $\bar{\mathrm{P}}$, M. Далее по аксиоме связи, мысленно отбрасываем опоры в точках A и B, заменяя их действие на балку реакциями $\bar{\boldsymbol{R}}$a и $\bar{\boldsymbol{R}}$b. Реакцию $\bar{\boldsymbol{R}}$b показываем двумя её составляющими Yb, Xb. Распределенную нагрузку $\bar{\boldsymbol{q}}$ заменяем сосредоточенной силой $\bar{\boldsymbol{Q}}$, по величине равной $\boldsymbol{Q = q \cdot b = 5 \cdot 1.5 = 7.5}$ кН.
4. Балка ABC теперь свободна от связей (опор A и B) и находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил $\boldsymbol{S}(\bar{\boldsymbol{Q}}, \bar{\mathrm{P}}, \bar{\mathrm{M}}, \bar{\boldsymbol{R}}\mathrm{a}, \mathbf{Yb}, \mathbf{Xb}) \sim \mathbf{0}$.
5. Запишем для полученной системы сил необходимые уравнения равновесия.

$$\boldsymbol{\sum F_{Xi} = 0, \quad Xb - P\cos\beta = 0}$$

$$\boldsymbol{\sum F_{Yi} = 0, \quad Q - P\sin\beta + Yb + Ra = 0}$$

$$\boldsymbol{\sum m_{Ai} = 0, \quad -Q \cdot \left(a + b + \frac{b}{2}\right) + P\sin\beta \cdot (a + b) - Yb \cdot a = 0}$$

6. Решим полученную систему уравнений относительно неизвестных сил $\bar{\boldsymbol{R}}$a, **Yb**, **Xb** с помощью пакета **Mathcad**.

Для решения системы уравнений равновесия используем блок решений нелинейных уравнений Given, имеющий следующую структуру:

- Ввод числовых значений исходных данных;
- Задание начальных приближений неизвестных реакций;
- Ввод ключевого слова Given, ниже которого записывается система уравнений;
- Применение процедуры-функции Find, которая находит неизвестные системы уравнений.

Далее представлен документ Mathcad.

Введем исходные данные для расчета.

Чтобы присвоить переменной значение, например переменную (b) сделать равной 1.5:

- Введем в желаемом месте документа имя переменной, например b.

*- Введем оператор присваивания с помощью клавиши <:> или нажатием соответствующей кнопки **Definition** (Присваивание) на панели инструментов **Calculator** (Калькулятор) или **Evaluation** (Выражения).*

$$a := 3 \qquad b := 1.5$$

$$M := 20 \quad q := 5 \quad P := 10 \qquad \beta := \frac{\pi}{3}$$

Вычисляем равнодействующую распределенной нагрузки постоянной интенсивности $\overline{\boldsymbol{q}}$.

$$Q := q \cdot b \qquad\qquad Q = 7.5$$

Задаем начальные приближения для неизвестных реакций.

Так как полученная система уравнений является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин, начальное приближение можно задавать произвольно.

$$\begin{pmatrix} Xb \\ Yb \\ Ra \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задаем начало блока решений системы уравнений Given и формируем систему уравнений равновесия. При записи уравнений применяется символ (=), являющийся логическим «булевым» оператором, в документе Mathcad он выглядит жирным.

Given

$$Xb - P \cdot \cos(\beta) \mathbf{=} 0$$

$$Q - P \cdot \sin(\beta) + Yb + Ra \mathbf{=} 0$$

$$-Q \cdot \left(a + b + \frac{b}{2}\right) + P \cdot \sin(\beta) \cdot (a + b) - Yb \cdot a - M \mathbf{=} 0$$

Вычисляем неизвестные реакции связей с помощью процедуры Find, которая указывает окончание блока решения.

$$\begin{pmatrix} Xb \\ Yb \\ Ra \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\left(\begin{pmatrix} Xb \\ Yb \\ Ra \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} Xb \\ Yb \\ Ra \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6.801 \\ 7.962 \end{pmatrix}$$

Проверим полученный результат: $\boldsymbol{R}\text{a} = \mathbf{7.962}$ кН, $\mathbf{Yb} = \mathbf{-6.801}$ кН, $\mathbf{Xb} = \mathbf{5}$ кН; (отрицательное значение $\mathbf{Yb}$ говорит о том, что направление реакции противоположно указанному на расчетной схеме).

Для этого вычислим главный момент внешних сил относительно точки D (точки, через которую не проходят линии действия всех неизвестных сил). Величина его тождественно должна быть равна нулю.

$$MD := Ra\cdot(b + a) - M + Xb\cdot b + Yb\cdot b - P\cdot\cos(\beta)\cdot b - Q\cdot\frac{b}{2} = 1.776 \times 10^{-15}$$

$$\sum \boldsymbol{m_{Di}} = \mathbf{1.776^{-15}} \sim \mathbf{0}$$

С точностью, обеспечиваемой численным методом, данная задача решена верно.

9.2. *РГР №2* Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Пример 1

Конструкция состоит из двух невесомых балок AC и CB, закрепленных в точке A жесткой заделкой, в точке B опорой на стержень. Балки соединены в точке C шарниром. На материальную систему двух тел действует сосредоточенные силы $\bar{F}$, $\bar{P}$ и непрерывно распределенная нагрузка постоянной интенсивности $\bar{q}$, а также момент M.

Определить реакции опор A и B, и давление в шарнире C. Размеры в метрах показаны на рисунке 38.

Дано:
$\boldsymbol{q} = \mathbf{2}$ кН/м
$\boldsymbol{F} = \mathbf{5}$ кН
$\boldsymbol{P} = \mathbf{10}$ кН
$\boldsymbol{M} = \mathbf{2}$ кН · м

Найти:
$\boldsymbol{\bar{R}_A}$, $\boldsymbol{M_A}$, $\boldsymbol{\bar{R}_C}$, $\boldsymbol{\bar{R}_B}$

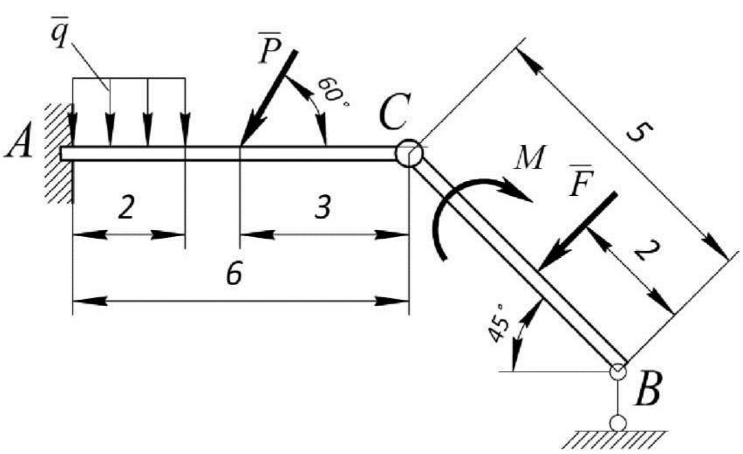


Рис. 38

Решение.

1. Система не жесткая. Состоит из двух тел, стержней AC и CB.
2. Применяем метод Р.О.З. (рассекаем конструкцию в шарнире C) и рассматриваем по отдельности равновесие твердых тел AC и CB.

Анализируем расчетную схему, представленную на рисунке 39, видим, что система статически определима.

Рассмотрим равновесие тела АС.

3. Приложим к телу АС все активные силы и силы реакций связей (рис. 39*а*). В точке А две составляющих реакции шарнира, в точке С прикладываем также реакцию шарнира, которой заменяем действие мысленно отброшенной части СВ. Заменяем распределенную нагрузку единой сосредоточенной силой $\bar{Q}$ по величине равной $|Q| = q \cdot l = 2 \cdot 2 = 4$ кН.

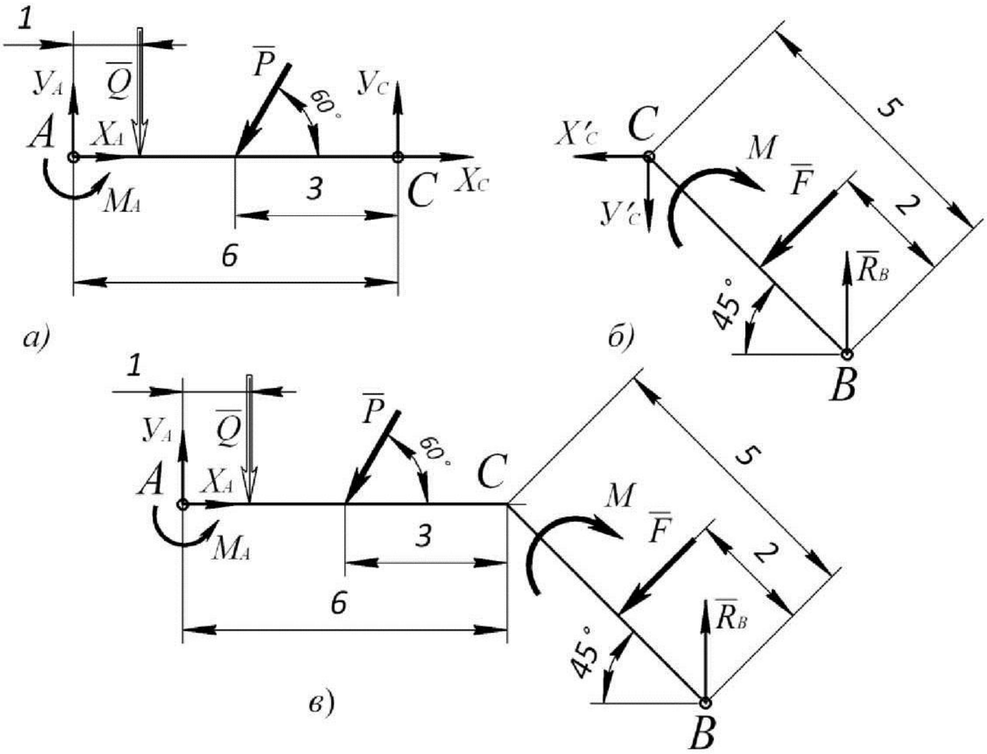


Рис. 39

4. Тело АС (рис. 39*а*) находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил $\boldsymbol{S(\bar{Q}, \bar{P}, M_A, X_A, Y_A, X_C, Y_C) \backsim 0}$. Запишем три уравнения равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_x} = X_A - P\cos 60 + X_C = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_y} = Y_A - Q - P\sin 60 + Y_C = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\bar{F}_i) = -Q \cdot 1 + M_A - P\sin 60 \cdot 3 + Y_C \cdot 6 = 0 \qquad (3)$$

Рассмотрим равновесие тела СВ. Приложим к этому телу активные силы и силы реакций связей. Учтем, что реакции во внутреннем шарнире С по аксиоме о равенства действия и противодействия $\boldsymbol{\bar{R}_C = -\bar{R}'_C}$. $\boldsymbol{S(\bar{F}, \bar{R}_B, M, X'_C, Y'_C) \backsim 0}$. Запишем три уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, действующих на тело СВ.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_x} = -\ X'_C - F\cos 45 = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_y} = -Y'_C + R_B - F\sin 45 = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_C(\bar{F}_i) = -M - F\cdot 3 + R_B \cdot 5 \cdot \cos 45 = 0 \tag{6}$$

Решим систему шести уравнений (1-6), найдем неизвестные величины $M_A, X_A, Y_A, R_B, X_C, Y_C$.

Получим из уравнений (4, 6, 5):

$X'_C = -F\cos 45 = 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -3.54$ кН;

$R_B = \frac{M+F\cdot 3}{5\cos 45} = \frac{2+5\cdot 3}{5\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4.81$ кН;

$Y'_C = R_B - F\sin 45 = 4.81 - 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.27$ кН.

Подставляя найденные значения в уравнения (1, 2), находим:

$X_A = P\cos 60 -\ X_C = 10\cdot\frac{1}{2} - (-3.54) = 8.54$ кН;

$Y_A = Q + P\sin 60 - Y_C = 4 + 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.27 = 11.39$ кН;

$M_A = Q\cdot 1 + P\sin 60\cdot 3 - Y_C\cdot 6 = 4\cdot 1 + 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 - 1.27\cdot 6 = 22.36$ кН;

Проверка: для этого, рассмотрим конструкцию в целом, считая её отвердевшей (рис. 39 *в*). Составим три уравнения равновесия: сумму проекций всех сил системы на оси *y* и *x*, сумму моментов сил системы относительно выбранного полюса т. С. Указанные суммы тождественно должны быть равны нулю в этом случае решение выполнено верно.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_A - P\cdot\cos 60 - F\cdot\cos 45 = 8.54 - 10\frac{1}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.0045 \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = Y_A - Q - P\cdot\sin 60 - F\cdot\sin 45 + R_B =$$

$$= 11.39 - 4 - 10\frac{\sqrt{3}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 4.81 = 0.0042 \approx 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{m}_{Ci} = R_B\cdot 5\cdot\cos 45 - F\cdot 3 - M + P\cdot\sin 60\cdot 3 + Q\cdot 5 - Y_A\cdot 6 + M_A =$$

$$= 4.81\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\cdot 3 - 2 + 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 + 4\cdot 5 - 11.39\cdot 6 + 22.36 = 0.0067 \approx 0$$

Задача решена верно.

Пример 2 **Определение реакций опор составной конструкции с применением ПК**

Дана составная конструкция состоящая из двух балок АС и СВ, опирающихся на неподвижные шарниры А и В. Балки соединены в точке С шарниром. На материальную систему двух тел действует сосредоточенные силы $\bar{F}$, и $\overline{\text{P}}$ непрерывно распределенной нагрузка постоянной интенсивности $\bar{q}$ и момент М.

Определить реакции опор А и В, а также давление в шарнире С. Размеры в метрах показаны на рисунке 40.

Решение.

1. Система не жесткая. Состоит из двух тел, стержней АС и СВ.
2. Применяем метод Р.О.З. (рассекаем конструкцию в шарнире С) и рассматриваем по отдельности равновесие твердых тел АС и СВ.

Анализируем расчетную схему, представленную на рисунке 28 *б*, *в*, видим, что система статически определима.

Рассмотрим равновесие тела АС.

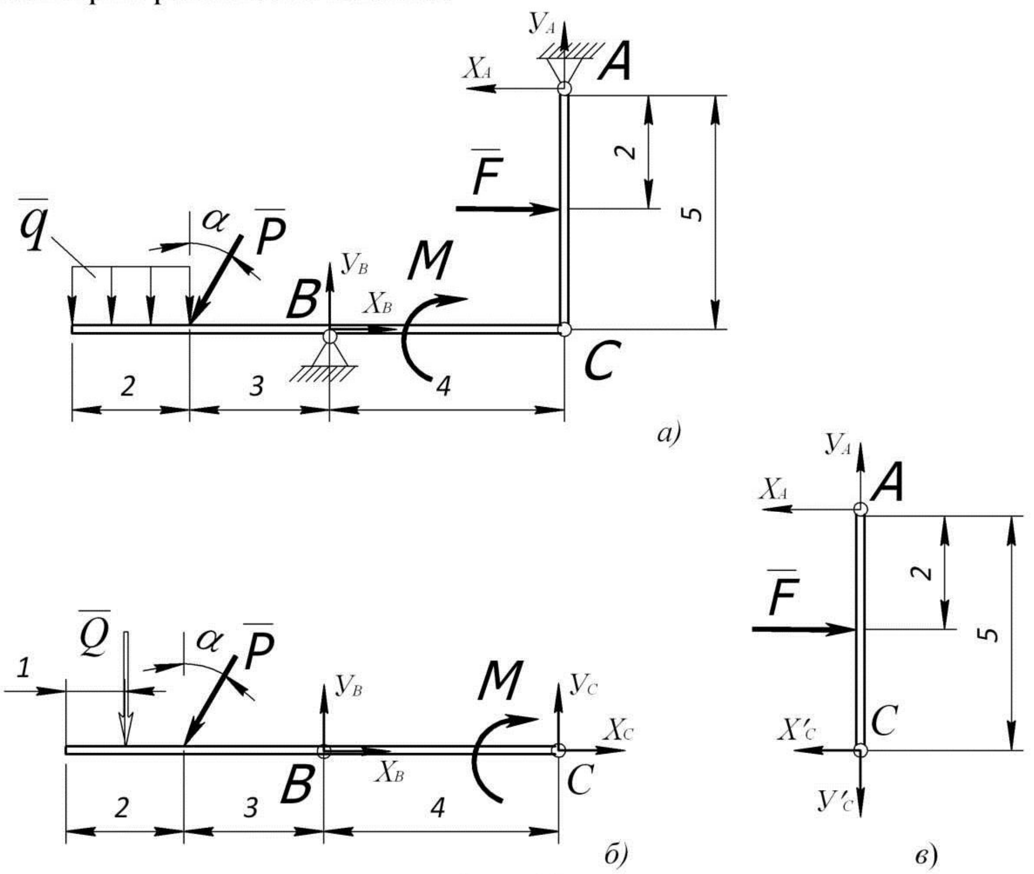


Рис. 40

3. Приложим к телу АС все активные силы и силы реакций связей (рис. 40 *в*). В точке А две составляющих реакции шарнира, в точке С прикладываем также реакцию шарнира, которой заменяем действие мысленно

отброшенной части СВ. Заменяем распределенную нагрузку единой сосредоточенной силой $\bar{Q}$.

4. Тело АС (рис. 40 *а*) находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил $\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{F}}, \boldsymbol{X_A}, \boldsymbol{Y_A}, \boldsymbol{X}_{\mathrm{C}}, \boldsymbol{Y_C}) \backsim \boldsymbol{0}$. Для которой ниже запишем три условия равновесия.

8.1. Рассмотрим равновесие тела СВ. Приложим к этому телу активные силы и силы реакций связей. Укажем, что реакции во внутреннем шарнире С по аксиоме равенства действия противодействию $\overline{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{C}} = -\overline{\boldsymbol{R}}'_{\boldsymbol{C}}$. $\boldsymbol{S}(\overline{\boldsymbol{P}}, \overline{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{X_B}, \boldsymbol{Y_B}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}'_{\mathrm{C}}, \boldsymbol{Y}'_{\boldsymbol{C}}) \backsim \boldsymbol{0}$. Запишем три уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, действующих на тело СВ.

В итоге можем записать шесть уравнений равновесия.

Решим систему шести уравнений (1-6) учитывая свойства в шарнире С $\mathbf{X_C} = -\mathbf{X'_C}$ и $\mathbf{Y_C} = -\mathbf{Y'_C}$ относительно неизвестных величин $\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Y_A}$, $\boldsymbol{X}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{B}}$ $\mathrm{X_C}$, $\mathbf{Y_C}$.

Воспользуемся для решения системы уравнений программой **Mathcad,** листинг которой представлен ниже.

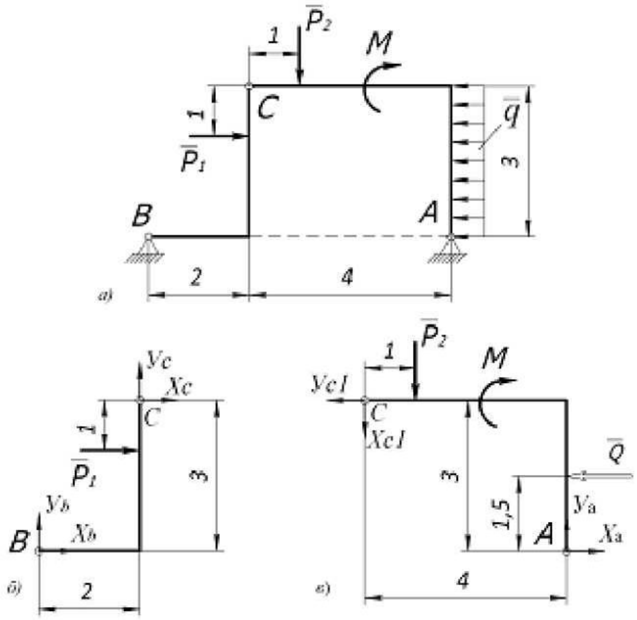
Присваиваем активным (заданным) силам значения:

$P1 := 5 \quad кН \qquad P2 := 6 \quad кН \qquad M := 10 \quad кН \cdot м \qquad q := 8 \quad \frac{кН}{м}$

$Q := q \cdot 3 \qquad\qquad Q = 24 \quad кН$

Задаем начальные параметры для неизвестных величин:

$$\begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Xb \\ Yb \\ Xc \\ Yc \\ Xc1 \\ Yc1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Формируем начало блока решения системы уравнений равновесия, вводом оператора Given

Given

$Xc + Xc1 = 0$
$Yc + Yc1 = 0$ -выражения, характеризующие внутренние свойства шарнира С

$Xa + Xc + P1 = 0$
$Ya + Yc = 0$
$P1 \cdot 1 + Xa \cdot 3 - Ya \cdot 2 = 0$

-уравнения равновесия для части АС, за полюс принимаем т. С

-уравнения равновесия для части ВС, за полюс принимаем т. С

$Xc1 + Xb - Q = 0$
$Yc1 + Yb - P2 = 0$
$-P2 \cdot 1 - M - Q \cdot 1.5 + Yb \cdot 4 + Xb \cdot 3 = 0$

Используем оператор Find для нахождения численных значений неизвестных реакций из системы 8 уравнений равновесия записанных выше.

$$\begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Xb \\ Yb \\ Xc \\ Yc \\ Xc1 \\ Yc1 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\left(\begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Xb \\ Yb \\ Xc \\ Yc \\ Xc1 \\ Yc1 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} Xa \\ Ya \\ Xb \\ Yb \\ Xc \\ Yc \\ Xc1 \\ Yc1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.111 \\ 5.667 \\ 16.889 \\ 0.333 \\ -7.111 \\ -5.667 \\ 7.111 \\ 5.667 \end{pmatrix} \quad кН$$

Делаем проверку решения, составляя ур-ние суммы моментов сил системы для всей конструкции АВС относительно полюса т.С.

$Mc := Xa \cdot 3 - Ya \cdot 2 + P1 \cdot 1 - P2 \cdot 1 - M - Q \cdot 1.5 + Yb \cdot 4 + Xb \cdot 3 = 7.105 \times 10^{-15}$

Видим полученное значение Мс близко к нулю, следовательно, решение выполнено верно.

9.3. *РГР №3.* Определение реакций опор твердого тела (пространственная система сил)

Коленчатый вал может вращаться вокруг оси АВ (рис. 41). На вал действует сила $\bar{Q}$.

Определить реакции опор А и В, а также величину предотвращающей поворот вала силы $\bar{F}$.

Дано:

$\boldsymbol{\alpha = 30°}$

$\boldsymbol{Q = 100}$ Н

$\boldsymbol{\bar{F} \perp A}$у

$\boldsymbol{\bar{Q} \parallel Az}$

Найти:

$\boldsymbol{\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{F}}$

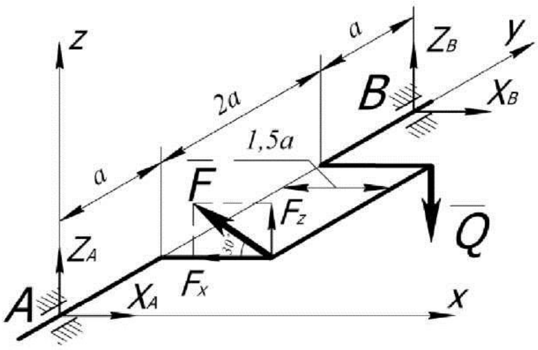


Рис. 41

Решение.

Рассмотрим равновесие абсолютно свободного вала АВ, на который помимо сил $\boldsymbol{\bar{F}}$ и $\boldsymbol{\bar{Q}}$ действуют реакции подшипников А и В. Реакция подшипника перпендикулярна его оси, но её направление неизвестно, поэтому представим её составляющими направленными вдоль соответствующих координатных осей: $\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Z_A}$, $\mathbf{X_B}$, $\mathbf{Z_B}$.

При составлении уравнений моментов силу $\boldsymbol{\bar{F}}$ можно разложить по осям X и Z: $\boldsymbol{F_x = F \cdot \cos 30°}$, $\boldsymbol{F_z = F \cdot \sin 30°}$, $\boldsymbol{F_y = 0}$, так как $\boldsymbol{\bar{F} \perp A}$у по условию задачи.

Поскольку на вал действует уравновешенная пространственная система сил АВ ($\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Z_A}$, $\mathbf{X_B}$, $\mathbf{Z_B}$, $\boldsymbol{\bar{F}}$, $\boldsymbol{\bar{Q}}$), то составляем шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_x} = X_A + X_B - F \cdot \cos 30° = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_y} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{i_z} = Z_A + Z_B - Q + F \cdot \sin 30° = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\bar{F}_i) = F \cdot a \cdot \sin 30° - Q \cdot 3 \cdot a + Z_B \cdot 4 \cdot a = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\bar{F}_i) = -F \cdot 1,5 \cdot a \cdot \sin 30° + Q \cdot 1,5 \cdot a = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\bar{F}_i) = F \cdot a \cdot \cos 30° - X_B \cdot 4 \cdot a = 0$$

Решая данную систему уравнений, получаем:

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{200}\ \text{Н},\ \ \mathbf{x_A} = \mathbf{129{,}75}\ \text{Н},\ \ \mathbf{z_A} = -\mathbf{50}\ \text{Н},\ \ \mathbf{x_B} = \mathbf{43{,}25}\ \text{Н},\ \ \mathbf{z_B} = \mathbf{50}\ \text{Н}.$$

Знак (-) у реакции $\mathbf{z_A}$ говорит о том, что эта реакция имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

9.4. *РГР №4.* Определение центра тяжести плоской фигуры

Для составного не симметричного сечения из прокатных профилей найти центр тяжести.

Дано: Швеллер №14;
Лист 240х140 (мм);
Неравнобокий уголок 12,5/8.

1. Выбираем произвольно координатные оси *xy*.
2. Разобьем сечение на три части:
   - швеллер;
   - лист;
   - неравнобокий уголок.
3. Сечение плоское, поэтому находим площади каждой части по ГОСТам прокатной стали (Приложение 1):
   - швеллер №14 (ГОСТ 8240-89) S_1=15,7 см^2;
   - лист (ГОСТ 8510-93) S_2=24·10=240 см^2;
   - неравнобокий уголок (ГОСТ 8510-86) S_3=19,7 см^2.

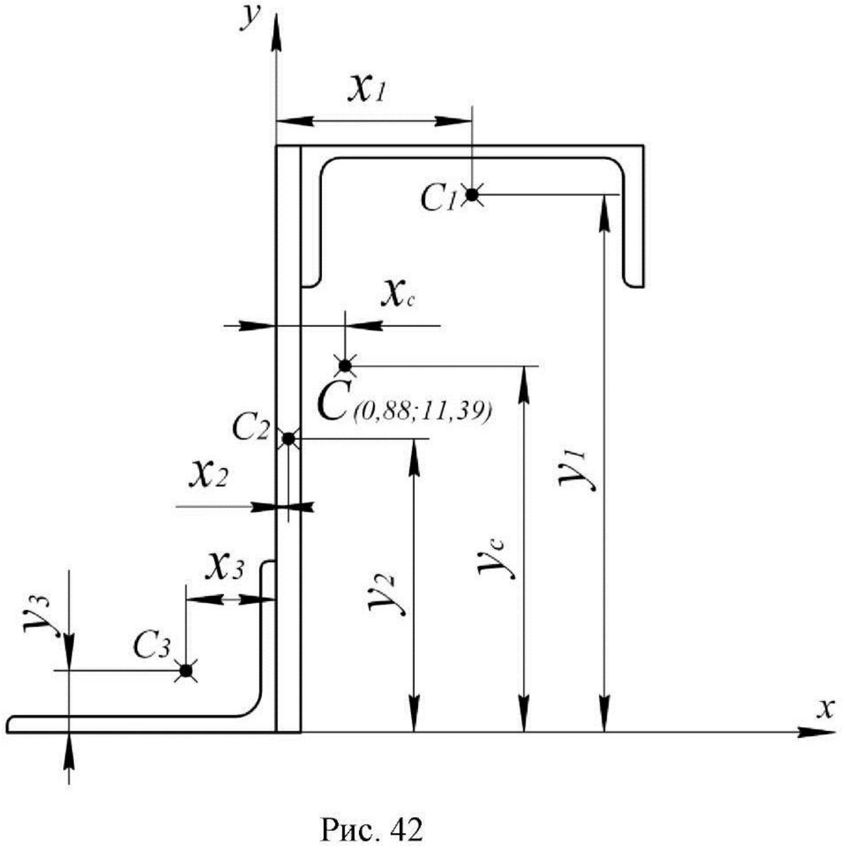


Рис. 42

4. Выбираем из ГОСТов координаты центров тяжести швеллера и неравнобокого уголка и пересчитываем их для принятой системы координат *xy* (рис).

   - x_1=1+7=8 см (к толщине листа 1см прибавляем половину высоты швеллера 14/2=7);

   - x_2=1/2=0,5 см, для листа 240х10 (мм) или 24х1 (см) центр тяжести лежит на пересечении диагоналей;

   - x_3= - 4,14 см (неравнобокий уголок ГОСТ 8510-86, смотри координату y_0)

   б) Координаты по оси *y*:

   - чтобы найти координату $\boldsymbol{y_1}$ нужно от высоты листа - 24 см отнять координату $\boldsymbol{x_0}$ швеллера №14 (ГОСТ 8240-89), $\boldsymbol{x_0}$= 1,66 см.

$\boldsymbol{y_1}$= 24 – 1,66=22,34 см;

$\boldsymbol{y_2}$= 24/2 =12 см;

$\boldsymbol{y_3}$= 1,92 см (неравнобокий уголок ГОСТ 8510-86, смотри координату $\boldsymbol{x_0}$)

5. Так как сечение плоское, то по формулам (14) определяем координаты центра тяжести плоского однородного сечения:

$$x_c = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S} = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3}{S_1 + S_2 + S_3};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S} = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

Удобно полученные данные занести в таблицу с помощью чего упростить решение задачи.

№ п/п	Наименование	Площадь S_i, см^2	Координаты		$S_i \cdot x_i$	$S_i \cdot y_i$
			x_i, см	y_i, см		
1	Швеллер №14	15,7	8	22,34	15,7·8=125,6	15,7·22,34= =125,6
2	Лист 240х140	24	0,5	12	24·0,5=12	24·12=288
3	Неравнобокий уголок 12,5/8	19,7	-4,14	1,92	19,7·(-4,24)= =85,56	19,7·1,92= =37,82
$\sum$		59,4			52,04	676,56

$$x_c = \frac{\sum S_i \cdot x_i}{\sum S} = \frac{52{,}04}{59{,}4} = 0{,}88 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i \cdot y_i}{\sum S} = \frac{676{,}56}{59{,}4} = 11{,}39 \text{ см}.$$

Ответ: С(0,88; 11,39) – координаты центра тяжести сечения.

9.5. *РГР №5.* Плоские фермы

Фермой называется неизменяемая стержневая система, состоящая из прямолинейных стержней, соединённых между собой на концах посредством шарниров.

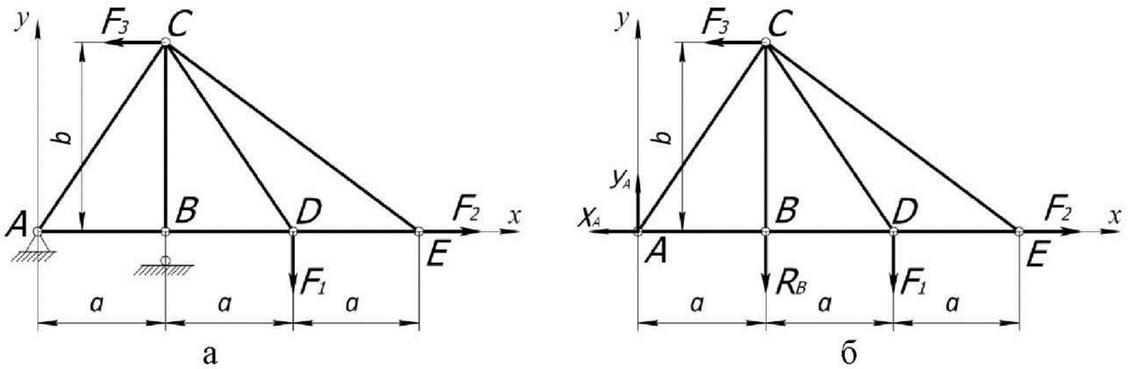
Шарниры, соединяющие стержни, называются узлами фермы. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм образованных из треугольников.

При расчете усилий в стержнях фермы предполагают, что вес стержней пренебрежимо мал в сравнении с действующими на ферму силами и что эти силы приложены к ней только в узлах. При этих допущениях стержни фермы являются стержневыми связями для ее узлов. Реакции стержневых связей направляют вдоль стержней, предполагая, что они растянуты (от узлов). Для сжатых стержней в результате решения уравнений равновесия будем получать отрицательные значения реакций.

Для расчета усилий в стержнях нужно сначала определить внешние опорные реакции. Усилия в стержнях могут быть определены двумя методами - методом вырезания узлов и методом сквозных сечений. При первом методе последовательно рассматривают равновесие узлов фермы, выбирая каждый раз такой узел, где сходится не более двух стержней, усилия в которых неизвестны. Для каждого узла составляют по два уравнения равновесия и из них определяют реакции стержней. При втором методе ферму мысленно рассекают на две части так, чтобы в сечение попало не более трёх стержней, усилия в которых неизвестны, и для одной из двух частей составляют три уравнения равновесия плоской системы сил. Для упрощения решения уравнения необходимо составить так, чтобы в каждом из них было как можно меньше неизвестных реакций (метод Риттера).

Задача. Определить реакции опор фермы на заданную нагрузку, а также силы во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Для стержней 3 и 4, дополнительно указанных в задании, подтвердить правильность расчетов усилий в стержнях способом Риттера. Схемы ферм показаны на рисунке . Необходимые данные для расчета приведены в табл.

Дано: схема фермы (см. рис. 43, а); $\boldsymbol{F_1 = 10}$ **кН**; $\boldsymbol{F_2 = 20}$ **кН**; $\boldsymbol{F_3 = 25}$ **кН**; $\boldsymbol{a = 4}$**м**; $\boldsymbol{b = 5}$**м.**



а б

Рис. 43

Решение.

1. Определение реакций опор. Вычерчиваем эквивалентную схему фермы (рис. 41 б) заменяя опоры реакциями. Для неподвижной шарнирной опоры A линия действия ее реакции неизвестна, поэтому будем определять ее составляющие $\boldsymbol{X_A}$ и $\boldsymbol{Y_A}$. Опора B - стержневая, линия действия ее реакции $\boldsymbol{R_B}$ известна – она направлена вдоль опорного стержня.

Выбираем произвольно оси xy для всей конструкции в целом. Составим уравнение равновесия плоской системы сил. При расчете момента в качестве центра выбираем точку, где пересекаются наибольшее число неизвестных реакций. В нашем случае точка A.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_{X\mathit{i}} = 0}; \qquad \mathbf{-X_A - F_3 + F_2 = 0};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_{Yi} = 0}; \qquad \mathbf{Y_A - R_B - F_1 = 0};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\overline{m}_{Ai} = 0}; \qquad \mathbf{-R_B \cdot a - F_1 \cdot 2a + F_3 \cdot \mathit{b} = 0}.$$

Решая систему уравнений, получим;

Из уравнения 3 $\quad \boldsymbol{R_B \cdot a = -F_1 \cdot 2a + F_3 . b \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{R_B = \frac{-F_1 \cdot 2a + F_3 \cdot b}{a} = \frac{-10 \cdot 2 \cdot 4 + 25 \cdot 5}{4} = 11{,}25} \text{ кН};$$

из уравнения 1 $\quad \boldsymbol{X_A = F_2 - F_3 = \ 20 - 25 = -5\text{кН}};$

из уравнения 2

$$\boldsymbol{Y_A = R_B + F_1 = \ 25 - 20 = 11{,}25 + 10 = 21{,}25\text{кН}}.$$

Примечание: Если при вычислении значений реакций получается отрицательное значение, это означает, что направление реакции выбрано неправильно, истинное направление – противоположное. Но в этом случае в дальнейшем следует, в уравнениях, где присутствует эти реакции подставлять их также со знаком (-).

Определение сил в стержнях фермы методом вырезания узлов. Стержни, сходящиеся в узле фермы, являются для узлового соединения связями. Отбросим мысленно связи и заменим их действия реакциями. На рисунке 44 показаны узлы фермы с приложенными к ним активными и реактивными силами.

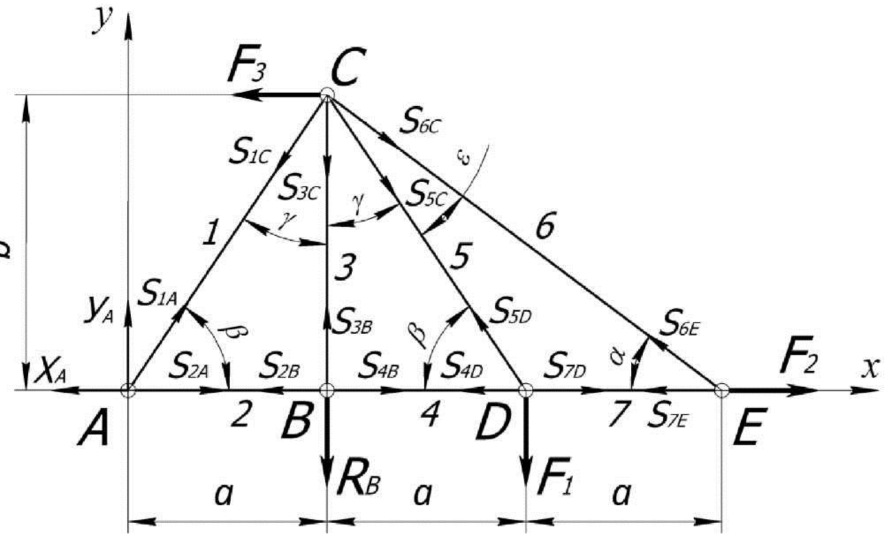


Рис. 44

Силу в стержнях с номером $(\boldsymbol{i})$ обозначим $\boldsymbol{S_i}$. Реакцию стержня с номером $(\boldsymbol{i})$ приложенную к узлу M, обозначим $\boldsymbol{S_{iM}}$. Например, тогда для стержня, соединяющего узлы B и D, $\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{iB}} = -\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{iD}}$, при этом $|\boldsymbol{S_{iB}}|=|\boldsymbol{S_{iD}}|$. Направления реакций выбираем внутрь от узлов, предполагая, стержни растянуты. Если в результате решения реакция стержня получится отрицательной, то это будет означать, что соответствующий стержень сжат (рис. 44).

Для рассматриваемой схемы можно начинать расчеты с точки E. Предварительно требуется определение углов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$$tg\,\alpha = \frac{b}{2\cdot a} = \frac{5}{2\cdot 4} = 0,625 \qquad \alpha = tg^{-1}\,0,625 = 32,01°$$

$$tg\,\beta = \frac{h}{a} = \frac{5}{4} = 1,25 \qquad \beta = tg^{-1}\,1,25 = 51,34°$$

$$\gamma = 90° - \beta = 90 - 51,34 = 38,66°$$

$$\varepsilon = 90 - \alpha - \gamma = 90 - 32,01 - 38,66 = 19,33°$$

Рассмотрим условие равновесия узла E,

Вырежем узел E . Для этого освобождаем его от внутренних связей (стержней 6 и 7), приложив их реакции $\boldsymbol{S_{7E}}$ и $\boldsymbol{S_{6E}}$ (см. рис. 45). Составляем два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил, приложенных и точке E.

1. $\sum \mathbf{F_X} = \mathbf{0}; \Rightarrow \mathbf{F_2} - \mathbf{S_{7E}} - \mathbf{S_{6E}} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0};$ 2.
$\sum \mathbf{F_Y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{S_{6E}} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}; \Rightarrow \mathbf{S_{6E}} = \mathbf{0}$

Тогда из ур - я 1 $\Rightarrow \mathbf{S_{7E}} = \mathbf{F_2} = \mathbf{20\ кН}$

Рассуждая подобным образом, рассмотрим условия равновесия остальных узлов.

Условие равновесия узла D, (рис. 46)

1. $\sum \mathbf{F_X = 0}; \Longrightarrow\ \mathbf{S_{7D} - S_{4D} - S_{5D} \cdot \cos\beta = 0};$

2. $\sum \mathbf{F_Y = 0} \Longrightarrow\ \mathbf{S_{5D} \cdot \sin\beta - F_1 = 0}; \Longrightarrow$

$$\mathbf{S_{5D}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{\sin\beta}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{\sin 51{,}34}} = 12{,}806 \text{ кН.}$$

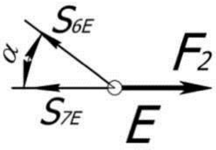


Рис. 45

Используя, что $\boldsymbol{S_{7D}} = \mathbf{S_{7E}}$, из ур.-я 1 получим: $\mathbf{S_{4D} = S_{7D} - S_{5D} \cdot \cos\beta =}$

$\Rightarrow \mathbf{S_{4D} = 20} - 12{,}806 \cdot 0{,}6247 = 12$ кН.

Рассмотрим условие равновесия узла С, (рис. 47)

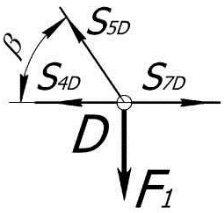


Рис. 46

1. $\sum \mathbf{F_X = 0}; \Longrightarrow\ \mathbf{S_{6C} \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) + S_{5C} \cdot \sin\gamma -}$

$\mathbf{-S_{1C} \cdot \sin\gamma - F_3 = 0}$

2. $\sum \mathbf{F_Y = 0} \Longrightarrow\ \mathbf{-S_{6C} \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) - S_{5C} \cdot \cos\gamma -}$

$\boldsymbol{-S_{1C}} \cdot \mathbf{\cos\gamma - S_{3C} = 0}.$ Из уравнения 1

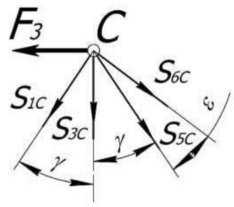


Рис. 47

$$\boldsymbol{S_{1C}} = \frac{\boldsymbol{S_{6C}}.\,\mathbf{\sin}(\boldsymbol{\gamma + \varepsilon}) + \boldsymbol{S_{5C}}\,.\,\mathbf{\sin}\,\boldsymbol{\gamma - F_3}}{\mathbf{\sin\gamma}} =$$

$$= \frac{\mathbf{0 + 12{,}806 \cdot \sin 38{,}66 - 25}}{\mathbf{\sin 38{,}66}} = \mathbf{-27{,}213\ кН}.$$

Знак (—) означает, что стержень 1 — сжат.

Из уравнения 2.

$\mathbf{S_{3C} = -S_{6C} \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) - S_{5C} \cdot \cos\gamma - S_{1C} \cos\gamma = 0 - 12{,}806 \cdot \cos 38{,}66 - (-27{,}213) \cdot \cos 38{,}66 = 11{,}25\ кН}$

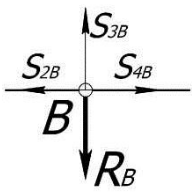


Рис. 48

Рассмотрим условие равновесия узла В, (рис. 48)

Кроме реакций стержней, на него действует дополнительно и реакция опоры В.

Вырежем узел В . Для этого освобождаем его от связей - внешней (шарнирно-неподвижной опоры) и внутренней (стержней 1 и 2), приложив реакции опоры $\boldsymbol{R_B}$ и стержней 3 и 4 (рис. 1.21). Составляем два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил, приложенных к точке В :

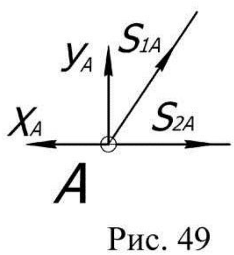


Рис. 49

1.$\sum \mathbf{F_X = 0}; \Longrightarrow\ \mathbf{-S_{2B} + S_{4B} = 0} \Longrightarrow$

$\mathbf{S_{2B} = S_{4B} =\ 12\ кН}.$

2. $\sum \mathbf{F_Y = 0} \Longrightarrow\ \mathbf{S_{3B}} - \boldsymbol{R}_\mathbf{B} \mathbf{= 0} \Longrightarrow$

$\boldsymbol{R}_\mathbf{B} = \mathbf{S_{3B} = 11{,}25}$ кН.

Примечание: Сопоставив значений $\boldsymbol{R}_\mathbf{B} = \mathbf{11{,}25\ кН}$, полученное при определении реакций опор фермы с помощью уравнений равновесия всей фермы и полученное значение $\boldsymbol{R_B = 11,25}$ **кН** видим их тождественность, что указывает на правильность решения задачи.

Рассмотрим условие равновесия узла А (рис. 49)

На узел А кроме внутренних реакций стержней 1 и 2 действуют еще составляющие реакции опоры $\mathbf{X_A}$ и $\boldsymbol{Y_A}$.

Составляем два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил, приложенных и точке:

1.$\sum \mathbf{F_X = 0}; \Longrightarrow\ \mathbf{S_{2A} + S_{1A} \cdot \cos\beta - X_A = 0 \Longrightarrow\ X_A = S_{2A} + S_{1A} \cdot \cos\beta = -5}$ **кН**

2. $\sum \mathbf{F_Y = 0 \Longrightarrow\ S_{1A} \cdot \sin\beta} + \boldsymbol{Y_A} \mathbf{= 0 \Longrightarrow}$

$$\mathbf{Y_A = -S_{1A} \cdot \sin\beta = 21,25}\ \text{кН}.$$

Примечание: Полученные значения $\mathbf{X_A}$ и $\mathbf{Y_A}$ совпадают со значениями, полученными при вычислении реакций опор фермы с помощью уравнений равновесия всей фермы. Это свидетельствует о правильности проведенных вычислений.

По результатам вычислений заполняем таблицу сил в стержнях.

Таблица 9.1

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Знак силы	-	+	+	+	+		+
Сила, кН	27,23	12	11,25	12	12,81	0	20

Покажем применение метода сквозных сечений.

Достоинством данного метода является возможность определения усилий в отдельных стержнях.

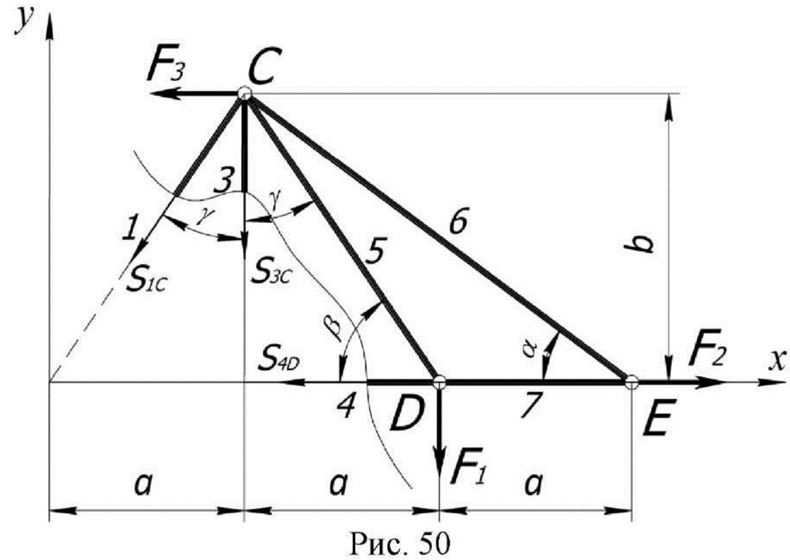


Рис. 50

Рассекаем ферму по стержням 3, 4 и 1. Левую часть мысленно отбрасываем (рис. 50), так как там приложены реакции шарниров и их требуется предварительно определять, а к правой прикладываем реакции перерезаемых стержней. Для правой части фермы составляем уравнения равновесия (используем вторую форму условий равновесия).

$$\mathbf{1.}\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M_C}(\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{i}) = 0; \Rightarrow \boldsymbol{F_2 \cdot b + h \cdot S_{4D} \cdot \cos\beta - F_1 \cdot a = 0};$$

$$\mathbf{2.}\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_A(\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{i}) = 0; \Rightarrow \boldsymbol{F_3 \cdot b - S_{3C} \cdot a - F_1 \cdot 2 \cdot a = 0};$$

$$\mathbf{3.}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_Y = 0}; \Rightarrow \boldsymbol{-S_{1C} \cdot \cos\gamma - S_{3C} - F_1 = 0}.$$

Точки А и С выбраны в качестве центров моментов потому, что в каждой из них пересекаются линии действия двух неизвестных сил, а ось у - в качестве оси проекций потому, что к ней неизвестная сила $\boldsymbol{S_{4D}}$ и две известных - $\boldsymbol{F_2}$ и $\boldsymbol{F_3}$перпендикулярны. В результате мы составили 3 уравнения, в двух из которых по одной неизвестной. Из этих уравнений получили те же значения реакций, как и при решении, методом вырезания узлов.

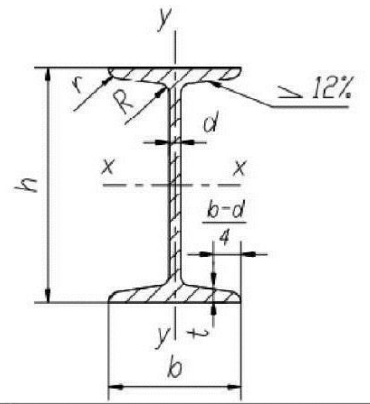
Из уравнения 1 $\boldsymbol{S_{4D}} = \frac{F_2 \cdot b - F_1 \cdot a}{b} = \frac{20 \cdot 5 - 10 \cdot 4}{b} = \mathbf{12\ кН};$

Из уравнения 2 $\boldsymbol{S_{3C}} = \frac{F_3 \cdot b - F_1 \cdot 2 \cdot a}{a} = \frac{25 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \cdot 4}{b} = \mathbf{11,25\ кН};$

Из уравнения 3 $\boldsymbol{S_{1C}} = -\frac{S_{3C} + F_1}{\cos\gamma} = \frac{11,25 + 10}{0,7809} = \mathbf{-27,13\ кН}.$

Приложение 1

Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 - 93)

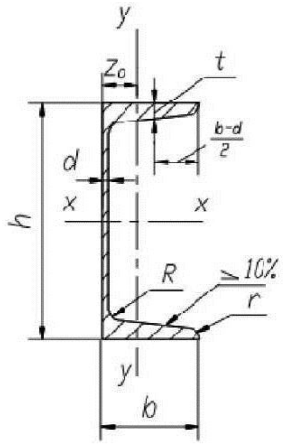


Обозначения:

h - высота балки;
b - ширина полки;
d - толщина стенки;
t - средняя толщина полки;

J - момент инерции;
W- момент сопротивления;
i - радиус инерции;
S - статический момент полусечения.

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения F, см^2	J_x, см^4	Wx, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	Масса 1м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24а	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27а	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30а	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6



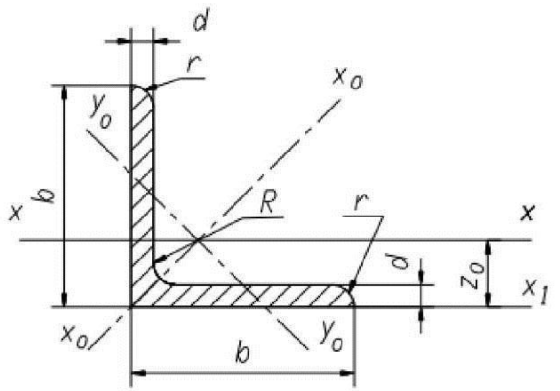
Швеллеры (по ГОСТ 8240 - 89)

Обозначения:

h - высота балки;
b - ширина полки;
d - толщина стенки;
t - средняя толщина полки;

J - момент инерции;
W- момент сопротивления;
i - радиус инерции;
S - статический момент полусечения;
Z_0 – расстояние от оси у до наружной с грани стенки.

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения F, см^2	Jx, см^4	Wx, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	Z_0, см	Масса 1м, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1Д9	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	ПО	151	25,1	2,37	2,21	21,0
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7

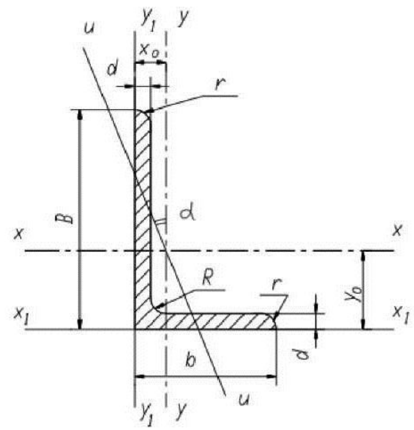


Уголки равнобокие (по ГОСТ 8509 - 93)

Обозначения:

b - ширина полки; d — толщина полки; J - момент инерции; i - радиус инерции; Z_0 – расстояние от оси y до наружной с грани стенки.

№	Размеры, *мм*		Площадь сечения	Jx, см^4	i_x, см	$J\,x_{0\,макс}$, см^4	$i\,x_{0\,макс}$, см	$J\,y_{0\,мин}$, см^4	$i\,y_{0\,мин}$, см	$J\,x_1$, см^4	Z_0, см	Масса 1м, кг
	b	*d*										
3,2	32	3 4	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
3,6	36	3 4	2,10	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	1,65
4	40	3 4	2,35	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09	1,85
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1



Уголки неравнобокие (по ГОСТ 8510 - 93)

Обозначения:

B - ширина большей полки; b - ширина меньшей полки; d - толщина полки; J - момент инерции; i - радиус инерции; y_0, x_0 - расстояние от центра тяжести до наружных граней полок.

№ профиля	Размеры, *мм* мм			Площадь сечения	Jx, см^4	i_x, см	J_y, см^4	i_y, см	J_u *мин*,	i_u *мин*,	Угол накло	$J\,x_1$, см^4	$J\,y_1$, см^4	x_0, см	y_0, см	Масса 1 м, кг
	B	b	d													
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	0,13	0,34	0,392	1,56	0,43	0,42	0,86	0,91
3,2/2	32	20	3	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	0,28	0,43	0,382	3,26	0,82	0,49	1,08	1,17
4/2,5	40	25	3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	0,56	0,54	0,385	6,37	1,58	0,59	1,32	1,48
4,5/2,8	45	28	3	2,14	4,41	1,43	1,32	0,79	0,79	0,61	0,382	9,02	2,20	0,64	1,47	1,68
5,6/3,6	56	36	3,5	3,16	10,1	1,79	3,30	1,02	1,95	0,79	0,407	20,3	5,43	0,82	1,80	2,48
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98
12/5	125	80	10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,14	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	204	2,03	4,49	14,1

Приложение 2

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое сила и, что такое система сил? Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твердое тело?
2. Какие две системы сил называются эквивалентными?
3. Что понимается под формулировкой «условие равновесия твердого тела»?
4. Какая сила называется равнодействующей системы сил?
5. Как геометрически определяется равнодействующая системы сходящихся сил, влияет ли порядок сложения сил на величину и направление равнодействующей. По какой формуле определяется величина равнодействующей двух сходящихся сил.
6. Сформулируйте аксиому о действии и противодействии двух тел.
7. В чем состоит принцип «отвердевания».
8. Какое тело называется «свободным», а какое «несвободным».
9. Сформулируйте аксиому освобождаемости тел от связей.
10. Классификация реакций связи в зависимости от их направления. Гибкие связи и их реакции. Реакция идеально гладкой поверхности.
11. Основные виды опор балочных систем: цилиндрическая подвижная (иначе шарнирно-подвижная) опора, цилиндрическая неподвижная (шарнирно-неподвижная) опора, защемляющая неподвижная (жесткое защемление). Их реакции.
12. Что называется моментом силы относительно данной точки? Как выбирается знак момента?
13. Что такое плечо силы?
14. Изменится ли момент силы относительно данной точки при переносе силы по линии ее действия?
15. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
16. Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак момента? В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
17. Что значит привести силу к данному центру?
18. Что называется главным вектором и главным моментом плоской системы сил и как они определяются?
19. Чем отличается главный вектор от равнодействующей данной системы сил?
20. Изменится ли величина главного вектора и главного момента при перенесении центра приведения?
21. Что называется парой сил?
22. Какое движение совершает свободное твердое тело под действием пары сил.
23. Что называется скалярным моментом пары и как определяется знак момента?
24. Что называется векторным моментом пары и как определяется знак момента?

25. Что называется плечом пары?
26. Каким образом можно уравновесить действие на тело пары сил?
27. Какие пары сил называются эквивалентными?
28. Какими свойствами обладают пары?
29. В чем состоит условие равновесия пар, лежащих в одной плоскости
30. Какая система сил называется пространственной?
31. Что называется пространственной системой сходящихся сил?
32. Сформулируйте правило параллелепипеда сил.
33. Как определяется равнодействующая пространственной системы сходящихся сил?
34. Как определяются проекции пространственной системы сил на координатные оси и плоскости?
35. Является ли проекция силы на плоскость векторной величиной?
36. В чем состоит графическое и аналитическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил.
37. Как приводятся силы, как угодно расположенные в пространстве, к данному центру?
38. Напишите уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил и объясните их смысл.
39. Напишите три формы условий уравновешенности для плоской системы произвольно расположенных сил.
40. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил (два вида).
41. Методика решения задач на равновесие плоской системы произвольно расположенных и параллельных сил. Рациональный выбор координатных осей, центров моментов. Проверка решений.
42. При каком условии твердое тело находится в равновесии?
43. При каком условии система абсолютно твердых тел находится в равновесии
44. Какие силы называются внешними, а какие внутренними?
45. Какие силы являются сосредоточенными, а какие – распределенными. Замена распределенной нагрузки сосредоточенной силой.
46. При каком условии задача определения равновесия твердого тела является статически определимой.
47. При каком условии задача определения равновесия твердого тела является статически неопределимой. Что такое степень статической неопределимости.
48. Какие две пары сил называются эквивалентными?
49. Что произойдет при переносе пары сил действующих на твердое тело в параллельную плоскость?
50. Как произвести сложение двух пар сил не лежащих в одной плоскости?
51. Как произвести сложение двух пар сил лежащих в одной плоскости?
52. Записать условие равновесия твердого тела под действием пар сил, действующих в одной плоскости.

53. Способы определения равнодействующей системы сходящихся сил.
54. Сформулируйте и поясните основную теорему статики (теорему Пуансо)?
55. Какие системы сил называются эквивалентными.
56. В каком случае возможно приведение системы сил к равнодействующей силе?
57. Как изменяются векторные моменты системы при перемене центра приложения?
58. Что называют инвариантами системы сил в статике? Сформулируйте и поясните теорему Вариньона.
59. Запишите три формы условий равновесия плоской системы сил.
60. *Приведение произвольной системы сил к динамическому винту. Центральная винтовая ось.
61. *Системы параллельных сил и их приведение к простейшим эквивалентным системам. Центр системы параллельных сил.
62. Дайте определение центра параллельных сил и укажите его свойства; напишите формулы для определения координат центра параллельных сил.
63. *Распределенные системы параллельных сил. Простейшие частные случаи их приведения к равнодействующим. Связи типа плоской и пространственной заделки.
64. Пояснить, в каком случае система параллельных сил приводиться: а.- к паре сил; б.- к равнодействующей силе; в.- к равновесной системе сил.
65. Рассмотреть условия равновесия тела с двумя закрепленными точками.
66. Рассмотреть условие равновесия с одной закрепленной точкой.
67. (*) Трение. Виды трения. Экспериментальные законы для различных видов трения. Методы решений задач равновесия при наличии трения
68. Виды трения. Законы Кулона для трения скольжения.
69. Что такое угол и конус трения? Условия равновесия тела на шероховатой поверхности.
70. Трение качения. Условие равновесия катка.
71. Понятие и определение коэффициента трения качения.
72. Дать определение центра тяжести и формулы для его определения.
73. Доказать, что для однородного тела, имеющего плоскость (ось или центр) симметрии, центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.
74. Пояснить, когда и как возможно применение для определения центра тяжести «метода разбиения на части» и «метода отрицательных масс».
75. Определить центр тяжести треугольника, дуги окружности, площади кругового сектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский А. А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика: учебное пособие для вузов/ А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 14-е изд., испр. –М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2007. -608 с.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для вузов/Под общ. ред. А. А. Яблонского. – 7-е изд., испр. –М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2002. -384 с
3. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие / Под редакцией К.С. Колесникова / М: 1983.
4. Бражниченко Н.А., Канн В.Л., Минцберг Б.Л., Морозов В.И. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие. М: 1986 и предыдущие издания.
5. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / О.Э. Кеппе, Я.А. Виба, О.П. Грапис и др.; Под ред. О.Э. Кеппе. – М.: Высш. Шк., 1989. – 368 с.: ил.
6. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие для вузов/ И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 39-е изд., стер. –М.: Лань, 2002. -448 с.
7. Учебное пособие по теоретической механике. Решение задач. Часть 1 (Статика и кинематика) / В.Н. Дидкоский, Ю.А. Гейм, К.А. Мухопад. Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Изд-во АлтГТУ, 2001. – 79с.
8. Основы конструирования: Учебно-методическое пособие для курсового и дипломного проектирования / Сост.: И.Л. Новожилов, В.Н. Самородова, С.А. Сорокин. – Барнаул, 2007. – 80 с.
9. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. – Спб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.