ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

СИЛА ТРЕНИЯ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Конспект лекций

СТАТИКА

СИЛА ТРЕНИЯ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Виды трения

Различают внешнее трение и внутреннее. Внешним трением называется механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух тел. Внутреннее трение создается в твердых телах при их деформациях, а также в жидкостях и газах при их вязком течении. Внешнее трение характеризуется силой трения, действующей на это тело, т.е. силой сопротивления, направленной противоположно относительному перемещению данного тела.

Различают трение скольжения и качения.

Трение скольжения

Если тело весом P лежит на поверхности, то действие веса будет уравновешено реакцией. Если к телу приложить силу F, то тело, будучи не уравновешено, должно начать двигаться независимо от величины силы F.

Опыт свидетельствует, что при увеличении силы F от 0 до F_{max} тело находится в состоянии относительного покоя. Точные измерения показывают, что при $F < F_{max}$ в зоне контакта имеют место обратимые микро перемещения частиц до 1 мкм.

Из опыта следует, что сила F уравновешена силой трения скольжения.

При дальнейшем увеличении активной силы сила трения растет до максимальной силы трения скольжения в покое в точке А - F_{TPmax}.

До точки А сила трения скольжения в покое называется неполной силой трения скольжения.

При дальнейшем увеличении активной силы тело начнет двигаться и сила трения скольжения будет зависеть от скорости движения. Эта сила называется силой трения скольжения движения, которое делят на сухое, жидкое, полусухое, полужидкостное по степени наличия смазки между движущимися телами.

Законы силы трения скольжения

До тех пор пока не возникло скольжение тела по связи, будет иметь место равенство

$$\overline{F} = -\overline{Q},$$

из которого видим, что с увеличением силы Q, возрастает и сила трения скольжения F.

Значит, сила трения скольжения $\overline{F}$, так же, как и сила $\overline{Q}$, может изменяться от нуля до некоторого максимального значения F_{max}, соответствующего моменту начала относительного скольжения тела по связи.

Сила трения скольжения, возникающая при относительном покое тела, называется силой трения скольжения в покое. Она изменяется от $0 < F \leq F_{max}$.

Возникновение силы трения скольжения обусловлено многими факторами, среди которых существенную роль играют степень шероховатости поверхностей трущихся тел, силы сцепления, возникающие между частицами поверхностных слоев, твердость и вид материалов трущихся тел. В инженерных расчетах всегда принимают во внимание силу трения. Обычно при этом исходят из установленных опытным путем законов трения скольжения, которые были открыты в конце XYIII века Кулоном (1781) и Аммонтом. Они формулируются следующим образом:

1) сила трения скольжения в покое направлена в сторону, противоположную возможному перемещению одного из трущихся тел относительного другого;

2) сила трения скольжения в покое не может по модулю превосходить максимальную силу трения скольжения в покое $\overline{F}_{max}$;

3) модуль максимальной силы трения скольжения в покое прямо пропорционален нормальному давлению одного из трущихся тел на другое или, что то же, модулю нормальной силы реакции:

$$F_{max}=fN,$$

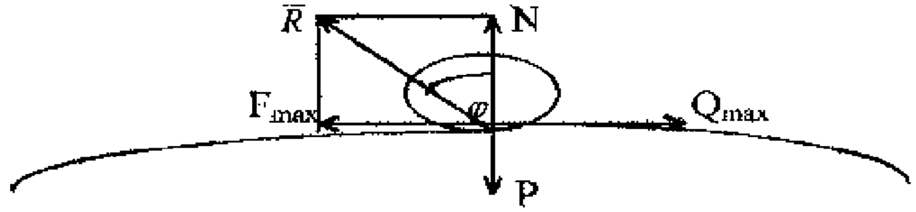
где f называется коэффициентом трения скольжения в покое.

Из равенства следует, что f есть безразмерное отвлеченное число. Оно не зависит от силы нормального давления и площади контакта поверхности, но зависит от шероховатостей поверхностей, их твердости и вида материалов тел, контактирующих друг с другом. Однако это имеет место до некоторой величины удельного давления, т.е. давления, приходящегося на единицу площади контакта трущихся поверхностей. Для абсолютно гладких тел $f=0$, для реальных тел $0<f<1$.

Конус трения

Из предыдущего следует, что реальная реакция опорной поверхности слагается из двух составляющих: из нормальной реакции N и перпендикулярной к ней силы трения скольжения в покое $\overline{F}_{тр}$.

Следовательно, полная реакция опорной поверхности R будет составлять некоторый угол φ с нормальной реакцией N.



При изменении силы трения скольжения $\bar{F}$ от нуля до F_{max} сила $\bar{F}$ будет меняться от N до R_{max}, а угол φ расти от нуля до некоторого максимального значения φ_0. Угол φ_0 между направлениями нормальной реакции $\bar{N}$ и полной реакции R , соответствующий максимальному значению силы трения скольжения $\bar{F}_{max}$, называется углом трения.

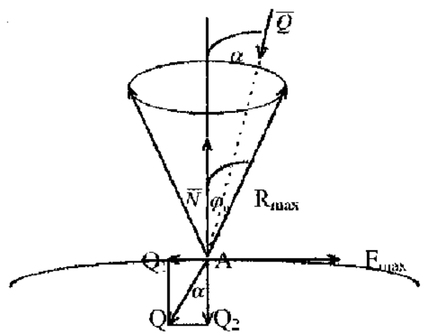
$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{F_{max}}{N}.$$

Так как $F_{max}=f_0N$, то отсюда находим следующую связь между углом трения φ_0 и коэффициентом трения скольжения f_0:

$$f_0=\operatorname{tg}\varphi_0,$$

т.е. коэффициент трения скольжения в покое равен тангенсу угла трения.

Конус с вершиной в точке касания тел, образующая которого составляет угол трения с нормалью к поверхности трущихся тел, называется конусом трения.

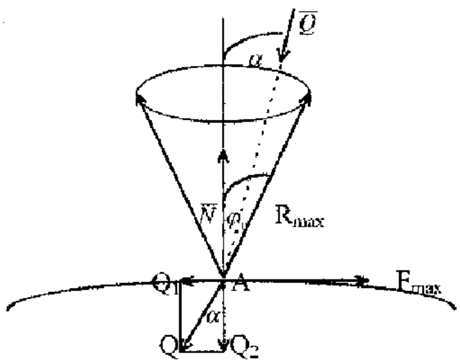


Если коэффициент трения скольжения в покое при скольжении одного тела по поверхности другого в различных направлениях один и тот же, то полная реакция R_{max} отклоняется от нормальной реакции N во всех направлениях на одинаковый угол трения φ_0 и конус трения будет круглым с углом при вершине, равным 2 φ_0. Однако это условие не соблюдается, например, при скольжении по дереву в направлении волокон и в направлении перпендикулярном к ним, у шкуры оленя - при движении по шерсти и против шерсти. Конус трения в этом случае будет сплющен в направлении волокон.

Практически угол трения φ_0 невелик, так, для трущихся сухих металлов он близок к 10°.

Графическое условие равновесия тел при наличии трения скольжения

Пусть действующие на тело силы приводятся к равнодействующей $\overline{Q}$, линия действия которой проходит через точку A касания тела с поверхностью, служащей связью, и образует с нормалью к связи в этой точке угол α.



Перенесем эту силу в точку A и разложим на две составляющие, из которых Q_1 лежит в касательной плоскости, проведенной через точку A, а вторая Q_2 направлена по нормали в точке A к поверхности, которая служит связью.

$$Q_1 = Q_2 \operatorname{tg}\alpha$$

Q_1 будет стремиться вызвать скольжение тела по связи, Q_2 вызовет равную по модулю реакцию $\overline{N}$. Если f_0 - статический коэффициент трения скольжения между телом и связью, то модуль максимальной силы трения скольжения в покое будет

$$F_{max} = f_0 Q_2 = Q_2 \operatorname{tg} \varphi_0,$$

где φ_0 – угол трения.

Для того чтобы тело оставалось в покое, необходимо, чтобы сила Q_1 была по модулю меньше или равна максимальной силе трения скольжения в покое F_{max}.

$$Q_2 tg\,\alpha \le Q_2 tg\,\varphi_0$$

или

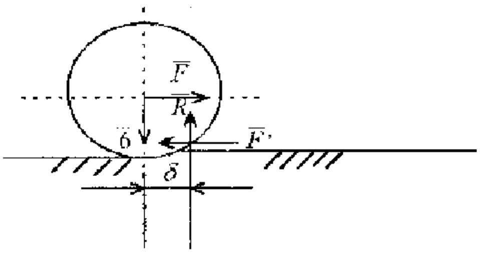
$$tg\,\alpha \le tg\,\varphi_0,$$

$$\alpha \le \varphi_0.$$

Отсюда заключаем, что до тех пор пока линия действия равнодействующей всех сил, приложенных к телу, каков бы ни был ее модуль, проходит внутри конуса трения, скольжения тела по связи не возникает.

При совпадении линии действия всех сил, приложенных к телу, с образующей конуса трения наступает момент, когда тело будет находиться на грани между покоем и скольжением, и при малейшем отклонении ее за пределы конуса трения начинается скольжение тела по связи.

Силы трения качения



Пусть на каток действует сила F. Из-за деформаций реакция сместится на величину δ. В точке касания возникает сила F′, которую называют силой трения качения. Пара сил (G, R) уравновешена моментом пары $(\overline{F}, \overline{F}')$. Момент пары FF′ будет равен G,δ, где δ - коэффициент трения качения. Момент трения качения полностью определяет условия равновесия и движения. Иногда рассматривают силу трения качения, она равна

$$F'r = G\delta,$$

$$F' = G\frac{\delta}{r}, \quad ,$$

$$M_{TP} = R\delta.$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

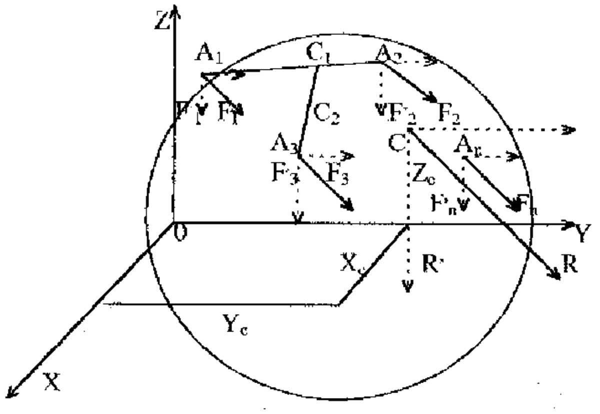
Центр параллельных сил

Понятие о центре параллельных сил возникает при решении некоторых задач механики, в частности при определении центров тяжести тел.

Рассмотрим систему параллельных и одинаково направленных сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, приложенных к твердому телу в точках $A1, A_2, \ldots, A_n$ Очевидно, что эта система имеет равнодействующую R, направленную так же, как слагаемые силы, причем по модулю

$$R = \Sigma F_K.$$

Если теперь каждую из сил системы поворачивать около ее точки приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, то мы будем



получать новые системы одинаково направленных параллельных сил с теми же модулями и точками приложения, но с другим общим направлением (см., например, пунктирные линии на рис. 31). Равнодействующая каждой из таких систем параллельных сил будет, очевидно, иметь тот же модуль R, но всякий раз другую линию действия. Чтобы найти эту линию действия, надо каждый раз определять какую-нибудь точку, через которую она проходит.

Покажем, что при всех таких поворотах линия действия равнодействующей всегда проходит через одну и ту же точку C. В самом деле, сложив сначала силы F_1 и F_2 найдем, что их равнодействующая R_1 (на чертеже не показана) при любых поворотах сил будет проходить через точку C_1, лежащую на прямой A_1A_2 и удовлетворяющую равенству $F_1A_1C_1 = F_2A_2C_2$, так как при поворотах сил ни положение прямой A_1A_2, ни это равенство не изменяются. Складывая теперь силу R_1 с силой F_3, мы получим, что их равнодействующая, являющаяся одновременно равнодействующей сил F_1, F_2, F_3, будет всегда проходить через аналогично определяемую точку C_2, лежащую на прямой C_1A_3 и т.д.

Доведя эту операцию последовательного сложения до конца, мы убедимся, что равнодействующая R всех сил действительно проходит всегда через одну и ту же точку C, положение которой по отношению к точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т.е. к телу, будет неизменным.

Точка C, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Свойства центра параллельных сил. 1. Положение центра параллельных сил не меняется, если все параллельные силы поворачивать на один и тот же угол вокруг точек, к которым они приложены.

2. Положение центра параллельных сил по отношению к телу неизменно и не зависит от выбора системы координат.

У штанги с 4 грузами центр параллельных сил меняться не будет, если изменять системы координат. Будут меняться лишь координаты грузов.

Координаты центра параллельных сил

1. Возьмем абсолютно твердое тело, на которое действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_K$.

2. Так как положение центра параллельных сил зависит не от выбора их направления, а лишь от приложения точек, из которых исходят заданные силы, повернем все силы так, чтобы они стали параллельными оси Z.

3. Равнодействующая заданной параллельной системы сил также будет параллельна оси Z и равна

$$R = \sum_1^n F_i \,.$$

4. По теореме Вариньона, если данная система сил не эквивалентна нулю и имеет равнодействующую, то момент последней относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси.

$$m_X(R) = \sum_1^n m_X(F_1)\,,$$

но

$$m_x(R) = RY_{C1},$$

а

$$\sum_1^n m_X(F_i) = F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + \ldots + F_n Y_n\,,$$

тогда

$$RY_C = F_1Y_1 + F_2Y_2 + \ldots + F_nY_n.$$

$$Y_C = \frac{F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + \ldots + F_n Y_n}{R} = \frac{\sum_1^n F_i Y_i}{R}\,.$$

5. Аналогично найдем координаты центра параллельных сил по оси X:

$$m_x(R) = \sum_1^n m_x(F_1)\,,$$

$$m_x(R) = RX_c,$$

$$\sum_1^n m_x(F_i) = F_1 X_1 + F_2 X_2 + \ldots + F_n X_n\,,$$

$$FX_C = F_1X_1 + F_2X_2 + \ldots + F_nX_n.$$

$$X_C = \frac{F_1 X_1 + F_2 X_2 + \ldots + F_n X_n}{R} = \frac{\sum_1^n F_i X_i}{R}\,.$$

6. Для того чтобы определить координату центра параллельных сил по оси Z, воспользуемся свойством, по которому положение центра параллельных сил не меняется при перемене направления всех параллельных сил.

Повернем все силы параллельно оси X.

$$\sum_1^n m_Y(F_{1I}) = F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + \ldots + F_n Z_n\,,$$

$$m(R)=RZ_C,$$

$$RZ_C=F_1Z_1 + F_2Z_2+\ldots+ F_nZ_n,$$

$$Z_C = \frac{F_1Z_1 + F_2Z_2 + \ldots + F_nZ_n}{R}.$$

7. Мы получили следующие формулы, по которым можно определить положения центра параллельных сил, зная величину каждой силы и точку ее приложения:

$$X_C = \frac{\sum_1^n F_iX_i}{R},$$

$$Y_C = \frac{\sum_1^n F_iY_i}{R},$$

$$Z_C = \frac{\sum_1^n F_iZ_i}{R},$$

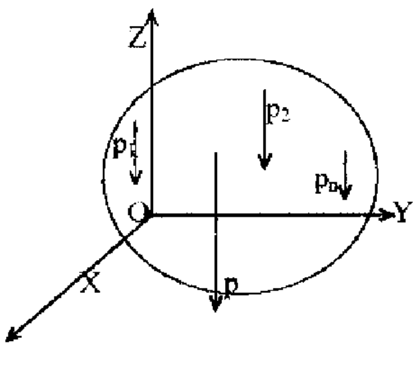
$$R = \sum_1^n F_i.$$

Центр тяжести твердого тела

На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести. Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют однородным полем тяжести.

Равнодействующую сил тяжести $p_1, p_2, \ldots, p_n$, действующих на частицы данного тела, обозначим P. Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством

$$P=\Sigma p_K.$$



При любом повороте тела силы p_K остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу; изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно, по доказанному равнодействующая P сил p_K будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C, являющуюся центром параллельных сил тяжести p_K. Эта точка и называется центром тяжести тела. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве. Что такая точка всегда существует, следует, как мы видели, из доказанного ранее.

Координаты центра тяжести как центра параллельных сил определяются формулами (93 - 100) будут:

$$X_c = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \quad Y_c = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \quad Z_c = \frac{\sum p_k z_k}{P},$$

где X_K, Y_K, Z_K - координаты точек приложения сил тяжести p_K частиц тела.

Отметим в заключение, что согласно определению центр тяжести - это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Координаты центров тяжести однородных тел

Для однородного тела вес p_K любой его части пропорционален объему υ_K этой части: $p_к = \gamma\upsilon_K$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т.е. $P = \gamma V$, где γ - вес единицы объема.

Подставив эти значения P и $p_к$ в формулы (104), мы заметим, что в числителе γ как общий множитель выносится за скобку и сокращается с γ в знаменателе. В результате из формул (104) получим

$$X_C = \frac{\Sigma \upsilon_K x_K}{V}, \; Y_C = \frac{\Sigma \upsilon_K Y_K}{V}, \; Z_C = \frac{\Sigma \upsilon_K Z_K}{P}.$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C, координаты которой определяются формулами (105), называют центром тяжести объема V.

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$X_C = \frac{\Sigma S_K x_K}{S}, \; Y_C = \frac{\Sigma S_K Y_K}{S},$$

где S - площадь всей пластины, а S_K - площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами, называют центром тяжести площади S.

Точно так же получают формулы для координат центра тяжести линии:

$$X_C = \frac{\Sigma l_K x_K}{L}, \; Y_C = \frac{\Sigma l_K Y_K}{L}, \; Z_C = \frac{\Sigma l_K Z_K}{L},$$

где L - длина всей линии, а $l_к$ - длины ее частей.

По формулам можно находить центры тяжести изделий из тонкой проволоки постоянного сечения.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

Способы определения координат центров тяжести тел

Исходя из полученных выше общих формул можно указать следующие конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. **Симметрия**. Если однородное тело имеет плоскость или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Допустим, например, что однородное тело имеет плоскость симметрии. Тогда этой плоскостью оно разбивается на две такие части, веса которых p_1 и p_2 равны друг другу, а центры тяжести находятся на одинаковых расстояниях от плоскости симметрии. Следовательно, центр тяжести тела как точка, через которую проходит равнодействующая двух равных и параллельных сил p_1 и p_2, будет действительно лежать в плоскости симметрии. Аналогичный результат получается и в случаях, когда тело имеет ось или центр симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центр симметрии) этих тел.

2. **Разбиение**. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам. При этом число слагаемых в каждом из числителей будет равно числу частей, на которое разбито тело.

3. **Дополнение**. Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

4. **Интегрирование**. Если тело нельзя разбить на несколько конечных частей, положения центров тяжести которых известны, то тело разбивают сначала на произвольные малые объемы $\Delta\upsilon_K$, для которых формулы принимают вид

$$X_C = \frac{\sum X_K \Delta\upsilon_K}{V},$$

где X_K, Y_K, Z_K - координаты некоторой точки, лежащей внутри объема $\Delta\upsilon_K$.

Затем в равенствах (108) переходят к пределу, устремляя все $\Delta\upsilon_K$ к нулю, т.е. стягивая эти объемы в точки. Тогда стоящие в числителях суммы обращаются в интегралы, распространенные на весь объем тела, и формулы (106) дают в пределе

$$X_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} X d\upsilon, \quad Y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} Y d\upsilon, \quad Z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} Z d\upsilon,$$

Аналогично для координат центров тяжести площадей и линий получаем в пределе

$$X_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} XdS,\ Y_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} YdS,$$

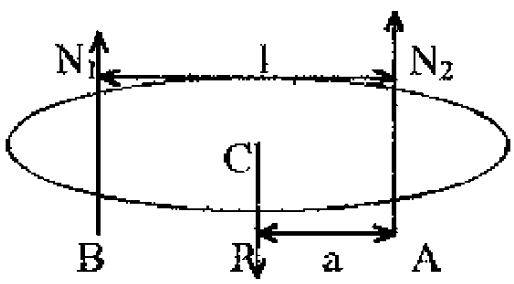
$$X_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} Xdl,\ Y_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} Ydl,\ Z_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} Zdl.$$

Пример применения этих формул к определению координат центра тяжести рассмотрен в следующем параграфе.

5. **Экспериментальный способ**. Центры тяжести неоднородных тел сложной конфигурации (самолет, паровоз и т.п.) можно определять экспериментально. Один из возможных экспериментальных методов (метод подвешивания) состоит в том, что тело подвешивают на нити или тросе за различные его точки. Направление нити, к которой подвешено тело, будет каждый раз давать направление силы тяжести. Точка пересечения этих направлений определяет центр тяжести тела.

Другим возможным способом экспериментального определения центра тяжести является метод взвешивания. Идея этого метода ясна из рассмотренного ниже примера.

П р и м е р. Покажем, как можно экспериментально определить положение центра тяжести самолета (расстояние α), если расстояние AB=1 (рис. 34) известно. Поставив колесо B на платформу весов, найдем взвешиванием силу давления колеса на платформу; тем самым будет найдена численно равная этой силе реакция N_1.

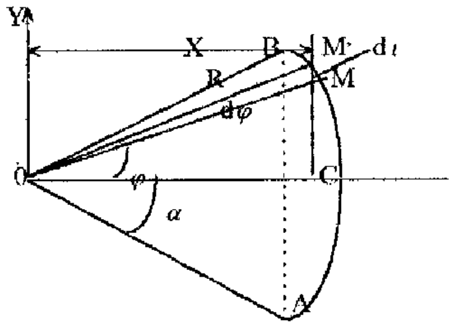


Точно так же взвешиванием находим реакцию N_2. Приравнивая затем нулю сумму моментов всех сил относительно центра тяжести C самолета, получаем $N_2\alpha - N(1-\alpha)=0$, откуда находим

$$\alpha = \frac{N_1 l}{N_1 + N_2}.$$

Очевидно, $N_1+N_2=P$, где P - вес самолета. Если величина P наперед известна, то для определения a можно обойтись только однократным взвешиванием.

Центры тяжести некоторых однородных тел



1. **Центр тяжести дуги окружности**. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом AOB=2_a . В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 34). Найдем координату X_C по формулам (107). Для этого выделим на дуге AB элемент MM′ длиной dl=Rdφ, положение которого определяется углом φ. Координата X элемента MM′ будет X=Rcosφ. Подставляя эти значения X и dl в первую из формул и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим

$$X_C = \frac{1}{L}\int_A^B X dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

где L - длина дуги AB, равная R2α.

Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$X_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

где угол α измеряется в радианах.

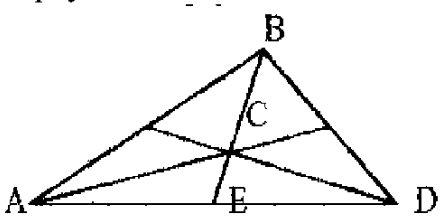
Этот результат можно получить, и не пользуясь явно понятием об интеграле. По формуле , если обозначить длину элемента дуги через Δl_K, будет

$$X_C = \frac{1}{L}\sum X_K \Delta l_K,$$

где X_K - координата элемента Δl_K, причем с точностью до малых высшего порядка $X_K=R\cos\varphi_K$ (вместо φ пишем φ_K).

Тогда $X_K\Delta l_K=R\Delta l_K\cos\varphi_K$, откуда $\Sigma X_K\Delta l_K=\Sigma R\Delta Y_K=R\cdot AB$. В результате замечая, что AB=2Rsinα и L=R2α, придем к формуле .

2. **Центр тяжести площади треугольника**. Разобьем площадь треугольника ABD прямыми, параллельными стороне AD, на n узких полосок; центры тяжести этих полосок будут, очевидно, лежать на медиане BE треугольника.

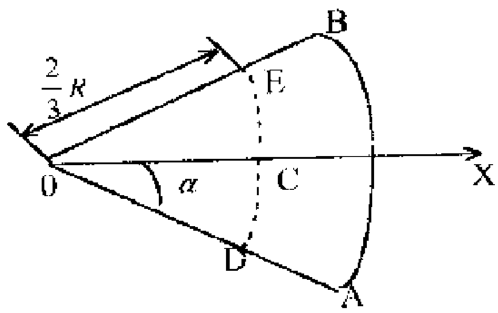


Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересе-
чения его медиан. При этом, как известно,

$$CE = \frac{1}{3} BE.$$

3. **Центр тяжести площади кругового сектора**. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2α. Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n, эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса $\frac{2}{3}R$. И следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE, положение которого найдется по формуле (111). Окончательно получим, что центр тяжести площади кругового сектора лежит на его оси симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$X_c = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$



Формулы координат центров тяжести ряда других однородных тел можно найти в различных технических справочниках.