

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие

Сжато и доступно изложены основы статики твердого тела в рамках, не выходящих за пределы требований ГОС и программы средних специальных учебных заведений. В популярной форме авторы знакомят с основными понятиями и методами этой дисциплины, необходимыми для приведения плоской и пространственной систем сил, с условиями и уравнениями равновесия частных видов систем. Рассматривается методика определения опорных реакций твердых тел и составных конструкций, образованных из систем таких тел, а также методы определения положения центра тяжести. Изложение сопровождается примерами, необходимыми для успешного овладения теорией и приобретения минимальных навыков решения задач в объеме, достаточном для последующего изучения раздела «Статика деформируемого тела».

Пособие предназначено для студентов направления 521700 - Архитектура, изучающих раздел «Статика твердого тела» в курсе теоретической механики. Будет полезно также студентам других специальностей вузов архитектурно-строительного направления.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход к многоуровневой системе образования проходит в условиях гуманитаризации процесса обучения и создания качественно новых информационно-вычислительных систем. Это сопровождается значительным сокращением времени, отводимого на изучение механики у традиционных специальностей и появлением новых специальностей с одним или двухсеместровым курсом по этой дисциплине.

К их числу относится и курс основ механики объемом 68 академических часов, изучаемый в ННГАСУ студентами направления 521700 – Архитектура. Этот курс состоит из трех разделов:

- статика твердого тела,
- статика деформируемого тела,
- статика сооружений,

т.е. фактически является курсом строительной механики в широком смысле этого слова, как он раньше назывался.

Начиная с 2000 г., эта дисциплина согласно ГОС и учебным планам вошла в группу естественнонаучных дисциплин и стала называться «теоретической механикой». При этом два первых её раздела объемом 17 часов каждый сейчас изучаются в течение третьего семестра, а последний 34-часовой – в четвертом учебном семестре.

Отметим, что студенты строительных специальностей изучают эти разделы механики в соответствующих курсах: теоретической механики, сопротивления материалов и статики сооружений или строительной механики. Поэтому нетрудно понять, что успешное овладение основами механики в рамках сокращенной программы представляет непростую задачу, как для лектора, так и для студентов. И первым шагом на пути её решения является определение целей этого курса. Для студентов-архитекторов они сформулированы так:

- научить анализировать существующие конструктивные решения, понимать работу сооружения в целом и оценивать ту роль, которую играют отдельные элементы ансамбля, устанавливать функциональную связь между воздействиями, внутренними усилиями и формой сооружения;
- способствовать осознанному, свободному и целенаправленному решению основной задачи архитектурного проектирования – поиску новых форм и совершенных решений;
- ознакомить с основными понятиями и методами строительной механики и помочь формированию рационального и логического мышления.

Достижение намеченных целей требует тщательной подготовки учебной программы и её методического обеспечения.

Настоящее пособие является попыткой содействовать решению этой задачи для первого раздела курса – статики твердого тела. Его содержание не претендует на полноту и отражает точку зрения авторов на то, каким должен быть начальный курс этой дисциплины для архитекторов.

Учитывая уровень математической подготовки архитекторов, авторы отказались от строгих математических обоснований в изложении учебного материала, усилив по возможности логическую составляющую курса. Вместе с тем неизбежная популяризация не сопровождается искаженным упрощением.

В пособии дается представление о предмете, методах исследования и задачах теоретической механики и механики в целом, позволяющее студенту чувствовать себя уверенно при изучении этого курса.

Замечания в конце ряда параграфов предназначены для критически настроенных читателей и могут быть оставлены без внимания при первом чтении.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет механики и ее задачи

Приступая к изучению новой учебной дисциплины, полезно ответить на вопросы: что она изучает, какой метод исследования применяет, а также какое место занимает в системе естествознания и образования среди других наук и дисциплин.

В отношении механики это особенно важно, поскольку в школьных и вузовских учебниках она традиционно ассоциируется с разделом физики, что невольно отводит ей место в ряду таких общеобразовательных дисциплин, как физика или математика. На самом деле механика играет гораздо более важную роль в подготовке специалиста в области строительства или архитектуры.

Напомним, что механика – это наука, изучающая механическое движение материальных объектов, то есть их взаимное перемещение в пространстве и во времени. В качестве материальных объектов помимо дискретных тел могут выступать среды – например, жидкость или газ и поля, поэтому круг объектов, изучаемых механикой очень широк.

В зависимости от физических свойств этих объектов и их размеров всю механику можно разделить на классическую или ньютонову и неклассическую.

Неклассическая механика – это действительно часть физики, в которой исследуются объекты микро- и макромира с учетом пространственно-временной зависимости.



Рис. 1.1

Классическая механика имеет дело с объектами, протяженность которых приблизительно и с точностью до нескольких порядков заключена в интервале от 10^{-10} до 10^{10} метра. При их изучении свойства пространства и времени можно считать постоянными. Именно такую ньютонову механику мы и будем рассматривать в дальнейшем.

В зависимости от особенностей модели реальных объектов классическая механика делится на теоретическую механику – с моделью абсолютно твердого тела и

механику сплошной среды с моделью деформируемого тела.

Основным методом исследования в механике является *гипотетико-дедуктивный*. Его суть заключается в выдвижении гипотезы, которая подтверждается или опровергается опытом.

Схематически место механики в системе естествознания можно определить так, как показано на рис.1.1. При этом механика деформируемого тела или механика сплошной среды, образующая ядро этой науки, окружена тремя сегментами, представляющими собой теоретическую механику, неклассическую механику микро- и макромира и прикладную механику, которые примыкают соответственно: к математике, физике и практике в широком смысле этого слова.

Под прикладной механикой понимают раздел механики, в котором ее выводы и методы применяют для решения задач проектирования, строительства и эксплуатации сооружений. Этот термин близок к понятиям «техническая» или «строительная» механика и объединяет такие учебные дисциплины строительного направления, с которыми студенты встречаются в процессе обучения, как «теоретическая механика», «сопротивление материалов», «строительная механика», металлические, железобетонные и другие виды конструкций.

1.2. Предмет теоретической механики

Теоретическая механика – это раздел механики, изучающий движение абсолютно твердого тела.

Абсолютно твердым или недеформируемым называется тело, у которого расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными.

Частным случаем твердого тела является материальная точка – это тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь.

В зависимости от особенностей механического движения теоретическая механика (ТМ) делится на статику, кинематику и динамику.

Статика рассматривает частный случай механического движения, когда оно не зависит от времени – речь идет о рассмотрении равновесия твердого тела (ТТ), загруженного системой сил и находящегося в состоянии покоя.

Кинематика рассматривает внешнюю сторону механического движения независимо от причин, вызвавших его. Это не что иное, как геометрия в четырехмерном пространстве, где время играет роль четвертого измерения.

Если известно положение движущейся точки в каждый момент времени, то кинематика позволяет построить ее траекторию и определить такие кинематические параметры, как скорость или ускорение.

Динамика исследует общий случай механического движения ТТ с учетом причин, вызвавших его.

Нетрудно догадаться, что при изучении ТМ нас, прежде всего, будет интересовать статика.

Высокая степень абстракции модели абсолютно твердого тела позволяет применять в ТМ, как и в математике, *аксиоматико-дедуктивный* метод исследования. Это означает, что ТМ (и в частности статика) подобно геометрии

построена на системе аксиом, сформулированных Ньютоном, которые играют в механике ту же роль, что и аксиомы Евклида в геометрии.

Таким образом, изучение ТМ помимо решения основной задачи способствует формированию рационального логического мышления.

Остается ответить на вопрос, зачем нужно изучать теоретическую механику архитектору? В значительной мере ответ на этот вопрос уже дан в предисловии к настоящему пособию. В дополнение к этому отметим, что задачей архитектурного проектирования является организация окружающего пространства с учетом:

- функциональных требований,
- законов физики и механики,
- опыта проектирования,
- эстетических концепций,
- экономичности

и ряда других требований.

Знание основных законов строительной механики является необходимым условием проектирования реальных и рациональных сооружений. Их учет позволяет уже на начальной стадии разработки проекта исключить заведомо нереализуемые варианты.

В прошлом незнание этих законов архитекторы могли компенсировать только учетом опыта проектирования и своей интуицией, при этом принятие новых конструктивных решений сопровождалось повышенным риском.

Сегодня такой метод проб и ошибок был бы слишком дорогим и неоправданным, поскольку расширение наших знаний в области строительной механики и появление автоматизированных систем проектирования позволяют архитектору в полной мере реализовать свой творческий потенциал.

1.3. Основные понятия статики

Прежде, чем перейти к рассмотрению аксиом статики, поясним основные понятия, с которыми мы там встретимся.

Статика – это раздел теоретической механики, изучающий условия равновесия систем сил и методы замены этих систем эквивалентными.

Сила – векторная величина, характеризующая воздействие на тело другого материального объекта. Сила определяется тремя факторами:

- точкой приложения,
- линией действия или направлением,
- модулем или величиной.

Системой называется совокупность сил, приложенных к одному твердому телу.

Эквивалентными называются системы сил, оказывающие на тело одинаковое воздействие.

Условие эквивалентности систем сил будем записывать в виде:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m) \sim (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n).$$

Равнодействующей называется сила, эквивалентная системе сил:

$$\mathbf{R} \sim (\mathbf{R}) \sim (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n).$$

Уравновешенной называется система сил, равнодействующая которой существует и равна нулю:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) \sim \mathbf{0}.$$

Уравновешивающей называется сила, равная и противоположная по направлению равнодействующей.

Все тела в механике делятся на *свободные* и *несвободные*.

Свободное тело может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Несвободным называется тело, перемещения которого ограничены *наложенными на него связями*, то есть другими телами, ограничивающими свободу перемещений первого тела.

Все силы в механике делятся на *активные* и *реакции связей* или *реактивные*.

Последние могут появляться только в ответ на действие активных сил.

Отметим, что *реакция связи направлена в сторону, противоположную тому направлению, куда тело не может перемещаться вследствие наложенной на него связи*.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. В соответствии с приведенным определением сила является *точечным* вектором в отличие от векторов в математике, где векторы являются *свободными*.

2. Как обычно, здесь и в дальнейшем для обозначения векторных величин мы будем применять **полужирный шрифт**.

3. Понятия «линия действия» и «направление» близки, но не тождественны. Очевидно, что по линии действия можно определить направление с точностью до противоположного. Аналогично связаны понятия «модуль» и «величина» для вектора.

1.4. Аксиомы статики

Система аксиом статики, о которой мы уже упоминали, была сформулирована И.Ньютоном в 1687 г. в его работе «Математические основы натуральной философии». Часть этих аксиом известна из школьного курса физики как законы Ньютона, хотя первый из них – закон инерции был сформулирован еще Г.Галилеем.

1. Аксиома инерции. *Под действием уравновешенной системы сил тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя.*

2. Аксиома равновесия системы двух сил. Система двух сил уравновешена в том и только в том случае, если эти силы:

- действуют по одной прямой, соединяющей точки их приложения;
- равны по модулю;
- направлены в противоположные стороны (Рис.1.2).

Отметим, в частности, что из условия: $(\bar{P}_1, \bar{P}_2) \sim \mathbf{0}$ следует, что $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$.

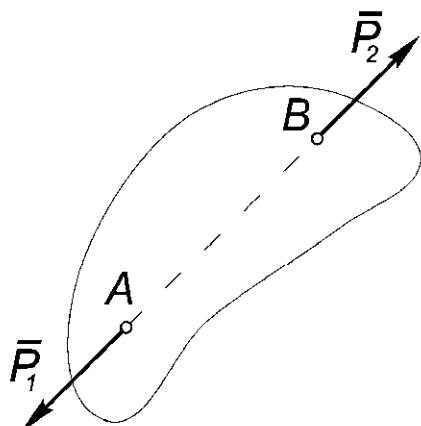


Рис. 1.2

3. Аксиома присоединения или исключения уравновешенной системы сил. Действие системы сил на тело не изменится, если к ней присоединить (исключить из нее) уравновешенную систему сил.

Следствием этой аксиомы является следующая

Теорема 1.1. Действие силы на ТГ не изменится, если эту силу перенести вдоль линии действия в любую точку этого тела.

Формулировка теоремы означает, что сила \bar{P} , приложенная в точке A твердого тела, эквивалентна силе \bar{P}' , приложенной в точке B того же тела и лежащей на линии действия силы \bar{P} . При этом вектор \bar{P} равен вектору \bar{P}' : $\bar{P} = \bar{P}'$ (Рис.1.3а,в).

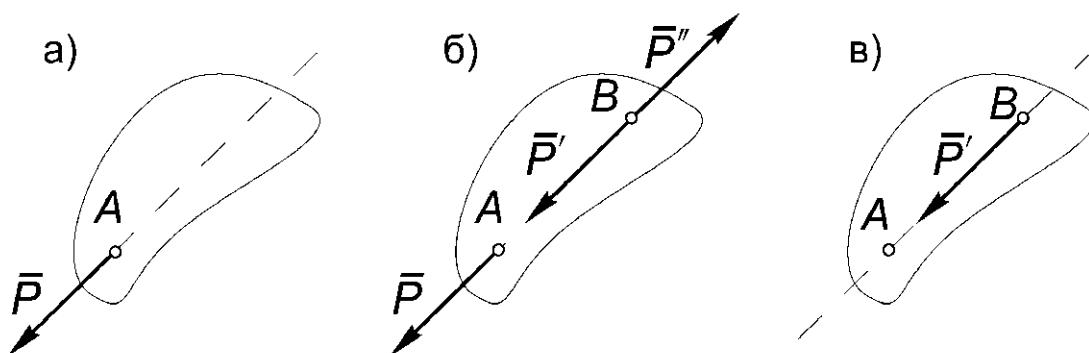


Рис.1.3

Для доказательства присоединим к системе, состоящей из единственной силы \mathbf{P} , уравновешенную систему сил, приложенных в точке B : $(\mathbf{P}', \mathbf{P}'') \sim 0$, выбрав $\mathbf{P}' = \mathbf{P} = -\mathbf{P}''$ (Рис.1.3б).

Тогда в силу аксиом 2 и 3:

$$(\mathbf{P}) \sim (\mathbf{P}, (\mathbf{P}', \mathbf{P}'')) \sim ((\mathbf{P}, \mathbf{P}''), \mathbf{P}') \sim (\mathbf{P}'),$$

поскольку силы $(\mathbf{P}, \mathbf{P}'')$ также образуют уравновешенную систему. Теорема доказана.

4. Аксиома параллелограмма. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке пересечения их линий действия и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.

Отметим, что математически рассмотренная процедура определения равнодействующей соответствует нахождению суммы векторов (Рис.1.4):

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2.$$

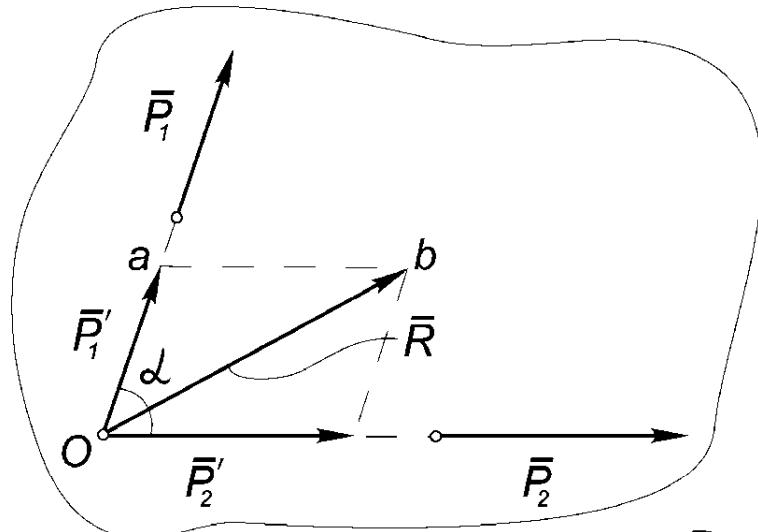


Рис.1.4

Для определения модуля равнодействующей возведем последнее выражение в квадрат:

$$|\mathbf{R}|^2 = R^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2) = P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2),$$

откуда получим искомое выражение:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между векторами \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 .

Построение параллелограмма можно, очевидно, заменить построением силового треугольника Oab .

5. Аксиома действия и противодействия. Два тела взаимодействуют с силами \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , равными по величине и противоположными по направлению:

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}_2.$$

Отметим, что эти силы в отличие от сил, о которых идет речь в аксиоме 2, системы не образуют, поскольку приложены к разным телам.

6. Аксиома отвердевания. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если его считать абсолютно твердым.

Эта аксиома позволяет рассматривать равновесие не только абсолютно твердых, но также деформируемых тел и даже жидкости. Например – в гидростатике.

7. Аксиома освобождаемости от связей. Несвободное тело можно считать свободным, если вместе с активными силами приложить к нему реакции отброшенных связей.

Отметим, что во всех предыдущих аксиомах рассматривались свободные тела. Соответственно для свободных тел впоследствии будут получены условия равновесия и теоремы статики. В то же время все окружающие нас строительные конструкции и сооружения представляют собой примеры тел несвободных. Отсюда понятна значимость последней аксиомы, которая позволяет от несвободных тел переходить к свободным, а также необходимость умения определять реакции этих связей.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Аксиома 1 справедлива только для частного случая ТТ – материальной точки.
2. На основании следствия из аксиомы 3 сила в ТМ является не точечным, а скользящим вектором, поэтому на практике точка ТТ, к которой приложена сила, может совпадать как с началом, так и с концом этого вектора.
3. С помощью аксиомы 4 можно выполнить и обратную операцию: разложить силу на две составляющие по двум заранее выбранным направлениям.
4. Здесь и далее, если это не вызывает недоразумения, мы применяем обычное начертание шрифта для обозначения как модуля вектора силы, так и его величины: $P = \pm |\mathbf{P}|$.

1.5. Простейшие типы связей

1. Идеально гладкая поверхность. Рассмотрим тело, которое может перемещаться без трения по гладкой горизонтальной поверхности (Рис.1.5а).

Пусть в качестве активной силы выступает сила веса – \mathbf{P} , приложенная в его центре тяжести. Реакция связи N представлена силой, распределенной по плоскости нижней грани этого тела, и ее можно считать приложенной в центре этой грани.

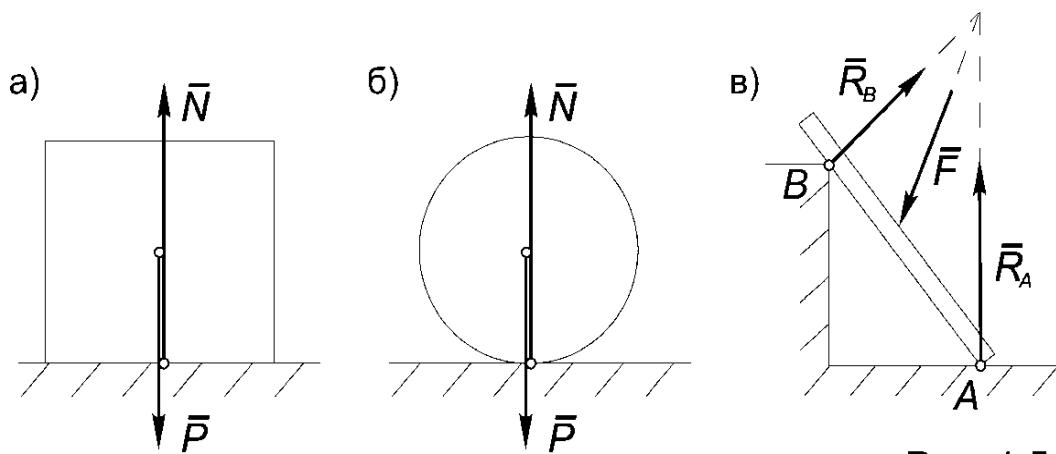


Рис. 1.5

Принципиально картина не меняется, если поверхность тела или связи будет гладкой, но криволинейной (Рис.1.5б).

Пусть тело в виде бруса с гладкой поверхностью опирается в точке A на идеально гладкую поверхность, а в точке B – на уступ (Рис.1.5в).

Нетрудно догадаться, что тело не сможет находиться в равновесии, если в качестве активной силы выступает его собственный вес, однако равновесие возможно, если к этому брусу приложить некоторую другую внешнюю силу F . При этом, как будет показано в следующей главе, равновесие возможно только в том случае, если линия действия этой силы проходит через точку пересечения линий действия реакций R_A и R_B .

Итак, по поводу этого типа связи можно сделать следующий вывод: *реакция идеально гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена по нормали к поверхности тела или связи.*

2. Гибкая невесомая и нерастяжимая нить. Рассмотрим тело, которое подвешено на двух таких нитях и находится в равновесии под действием собственного веса и реакций нитей, прикрепленных к телу в точках A и B (Рис.1.6).

Реакция связи равна силе натяжения нити, она направлена вдоль нити и от тела, которое эта нить удерживает.

3. Жесткий невесомый прямолинейный стержень. Реакция направлена вдоль стержня, который, в отличие от нити, может воспринимать как растягивающие (S_B), так и сжимающие (S_A) усилия (Рис.1.7).

4. Подвижная опора. Допускает перемещение закрепленным таким образом точки тела только вдоль опорной плоскости (Рис.1.8а).

Реакция направлена перпендикулярно защтрихованной опорной площадке.

В учебной литературе этот вид связи также называют *подвижным цилиндрическим шарниром*.

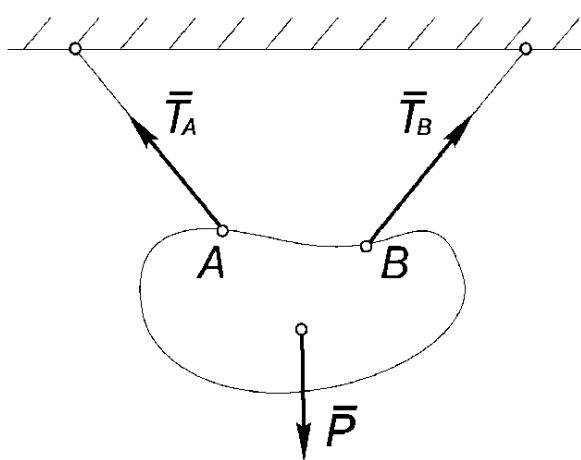


Рис. 1.6

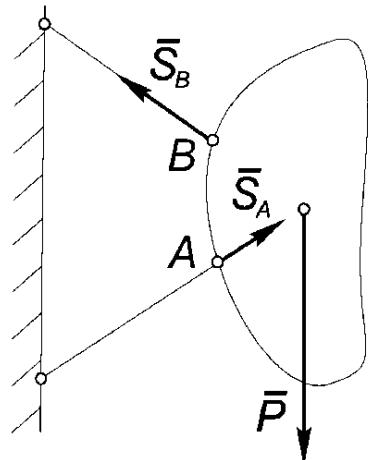
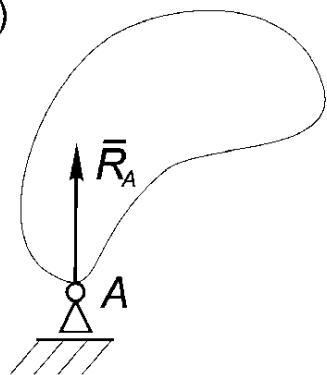


Рис. 1.7

Помимо стандартного обозначения, предусмотренного ГОСТом, на схемах эту связь изображают так, как показано на рис. 1.8б.

а)



б)

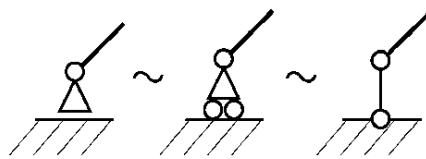


Рис. 1.8

Отметим, что четыре рассмотренные связи имеют одну общую особенность: соответствующие им реакции известны по направлению и неизвестны по величине. То есть с точки зрения алгебры *каждая из этих реакций соответствует только одному неизвестному*.

5. Неподвижная опора. Препятствует перемещению закрепленной таким образом точки тела в горизонтальном и вертикальном направлениях. Это означает, что *в общем случае реакция R_A такой связи неизвестна по величине и по направлению*. В качестве неизвестных при ее определении можно выбрать модуль реакции $-|R_A|$ и угол ϕ , который она образует с осью Ox , либо проекции вектора R_A на оси координат: R_{Ax} , R_{Ay} (Рис.1.9а).

Эта связь допускает поворот тела вокруг рассматриваемой точки, поэтому в учебной литературе эту связь также называют *неподвижным цилиндрическим шарниром*.

Помимо стандартного обозначения, предусмотренного ГОСТом, на схемах она изображается так, как показано на рис. 1.9б.

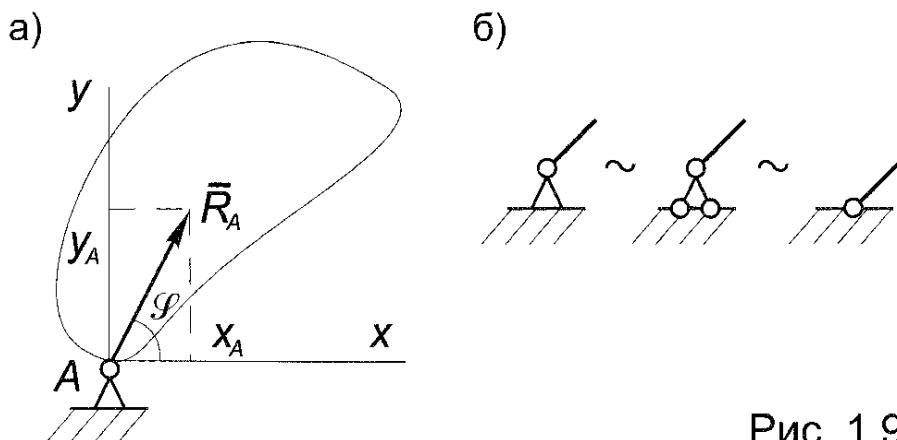


Рис. 1.9

6. Сферический шарнир. В отличие от цилиндрического шарнира не допускает перемещения закрепленной таким образом точки тела в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В качестве неизвестных при ее определении выбирают проекции этой реакции на оси координат: R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} (Рис.1.10).

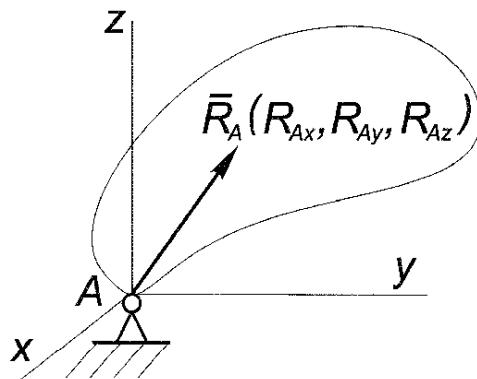


Рис. 1.10

Рассмотренными в этом параграфе шестью типами связей мы и ограничимся. Другие связи будут рассмотрены по мере необходимости.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. В соответствии с аксиомой 7 на схемах нужно изображать одно из двух: либо связи, либо реакции отброшенных связей. На практике реакции связей нередко изображают одновременно со связями.

2. Связи, как и другие понятия, встречающиеся в аксиомах, являются абстракциями, весьма условно отражающими свойства реальных объектов. Например, рассмотренная выше гибкая невесомая нить может быть моделью подвесных и вантовых систем, у которых масса погонного метра троса составляет десятки и сотни килограммов. Однако усилия, возникающие в таких тросах, во столько раз больше их собственного веса, что при расчете последним можно пренебречь, считая их невесомыми.

ГЛАВА 2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. Определение и теорема о трех силах

Определение 2.1. Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называемой центром системы.

В силу теоремы 1.1 сходящиеся силы, не уменьшая общности, можно считать приложенными в центре системы.

Теорема 2.1. Уравновешенная плоская система трех непараллельных сил является сходящейся.

Для доказательства рассмотрим уравновешенную плоскую систему трех непараллельных сил: $(P_1, P_2, P_3) \sim 0$.

Пусть для определенности силы P_1 и P_2 непараллельны (Рис.2.1).

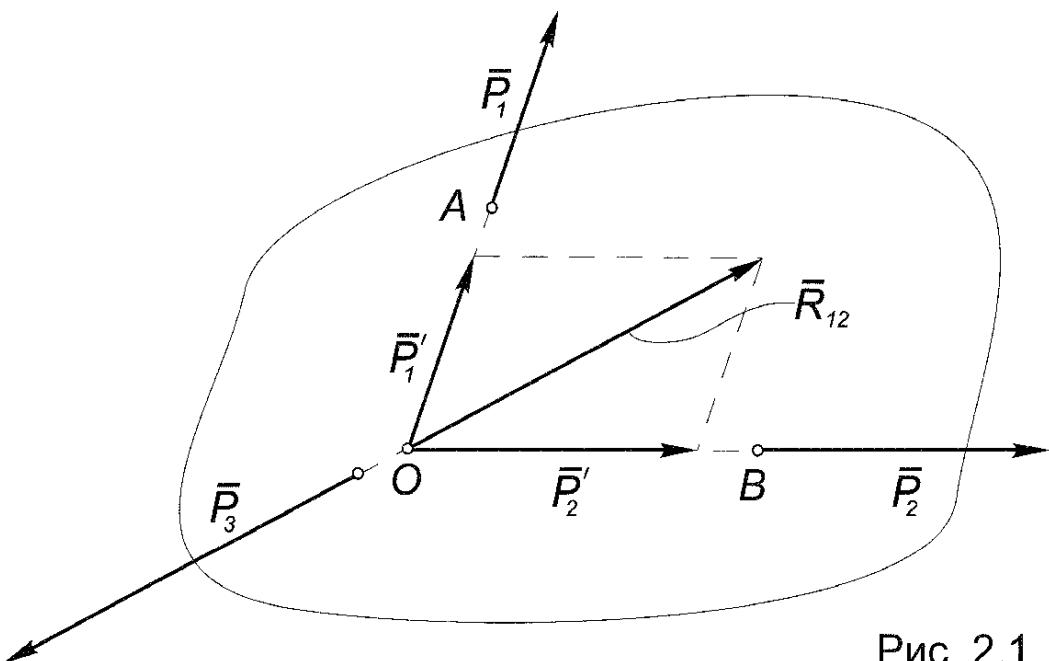


Рис. 2.1

Тогда они будут сходящимися, и по аксиоме 4 их можно заменить равнодействующей R_{12} , приложенной в точке O , где пересекаются их линии действия:

$$0 \sim (P_1, P_2, P_3) \sim (R_{12}, P_3).$$

Отсюда следует, что $(R_{12}, P_3) \sim 0$, но тогда по аксиоме 2 о равновесии системы двух сил линия действия P_3 должна пройти через точку O , а это и означает, что в этой точке пересекаются линии действия всех трех сил.

ПРИМЕЧАНИЕ. Условие «плоская» в формулировке теоремы не является необходимым – можно убедиться, что любая уравновешенная система трех сил всегда будет плоской. Это следует из условий равновесия произвольной пространственной системы сил, которые будут рассмотрены в 5 главе.

2.2. Графическое определение равнодействующей сходящихся сил

Теорема 2.2. Равнодействующая системы сходящихся сил существует, приложена в центре системы, равна их геометрической (векторной) сумме и изображается замыкающей стороной силового многоугольника.

Для доказательства рассмотрим систему сходящихся сил, приложенных в центре O : (Рис.2.2).

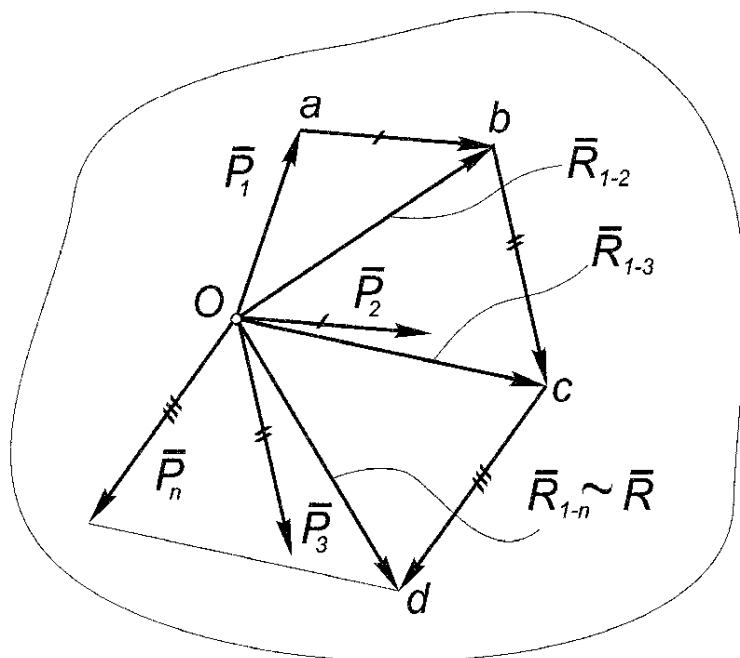


Рис. 2.2

По аксиоме параллелограмма две первых силы этой системы можно заменить равнодействующей R_{1-2} , которая изображается замыкающей стороной силового треугольника Oab и как вектор равна сумме векторов P_1 и P_2 :

$$(P_1, P_2) \sim R_{1-2} = P_1 + P_2.$$

Затем точно так же можно найти равнодействующую силы R_{1-2} и силы P_3 , откладывая от точки b вектор $bc = P_3$:

$$(P_1, P_2, P_3) \sim (R_{1-2}, P_3) \sim R_{1-3} = P_1 + P_2 + P_3.$$

Продолжая эту процедуру, мы найдем равнодействующую всей системы:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) \sim (\mathbf{R}_{1-(n-1)}, \mathbf{P}_n) \sim (\mathbf{R}_{1-n}) \sim \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_i,$$

которая изображается замыкающей стороной силового многоугольника $Oabcd$.

Отметим, что в общем случае этот многоугольник будет пространственной фигурой, поэтому графический метод определения равнодействующей удобен только для плоской системы сил.

Универсальным для определения равнодействующей системы сходящихся сил является аналитический метод, к рассмотрению которого мы и переходим.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Результат графического определения равнодействующей не изменится, если силы суммировать в другой последовательности, хотя при этом мы получим другой силовой многоугольник – отличный от первого.

2. Фактически силовой многоугольник, составленный из векторов сил заданной системы, является ломаной линией, а не многоугольником в привычном смысле этого слова.

2.3. Аналитическое задание силы

Термин «аналитический» в механике, как и в аналитической геометрии, означает применение системы координат при решении той или иной проблемы.

Определение. Проекцией силы \mathbf{P} на ось Ox называется взятая с знаком \pm длина отрезка этой оси, заключенная между проекциями на неё начала и конца вектора силы.

Эту проекцию обычно обозначают как P_x или X . В соответствии с определением она равна:

$$P_x = X = |\mathbf{P}| \cdot \cos(\mathbf{P}, \mathbf{i}) = P \cdot \cos\alpha = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{i}),$$

где \mathbf{i} – единичный вектор оси Ox , а α – угол между ним и силой \mathbf{P} (Рис.2.3).

Таким образом:

$$P_x = \begin{cases} > 0, & \text{если } 0 \leq \alpha < \pi/2; \\ = 0, & \text{если } \alpha = \pi/2; \\ < 0, & \text{если } \pi/2 < \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Аналогично находится проекция силы P на ось Oy .

Если проекцию силы на какую-либо ось умножить на орт этой оси, мы получим векторную величину, которая равна *составляющей силы* вдоль этой оси. Очевидно, сила \mathbf{P} является равнодействующей по отношению к своим составляющим, поэтому в соответствии с теоремой 2.2:

$$\mathbf{P} = P_x \cdot \mathbf{i} + P_y \cdot \mathbf{j} = X \cdot \mathbf{i} + Y \cdot \mathbf{j}.$$

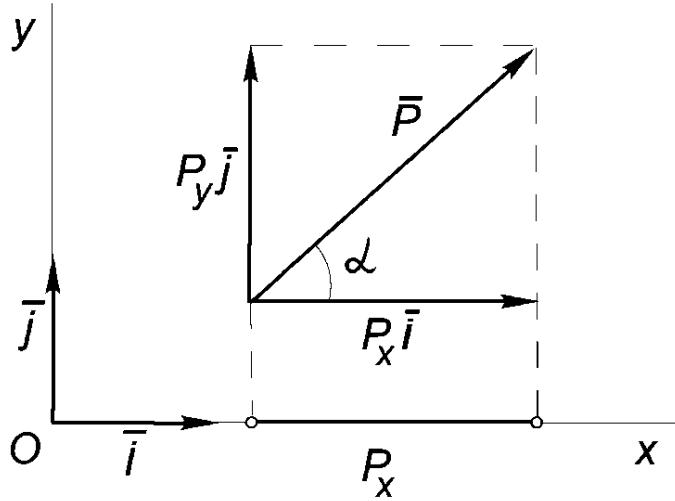


Рис. 2.3

Поставим следующую задачу. Пусть известны проекции силы на оси координат – X, Y, Z и координаты точки приложения этой силы – $A(x, y, z)$, а нужно определить вектор силы \bar{P} .

Для ее решения построим прямоугольный параллелепипед с вершиной в точке A и со сторонами, равными соответственно X, Y, Z . При этом будем откладывать отрезок длиной X в положительном направлении оси, если $X > 0$ и в противоположном направлении, – если $X < 0$.

Умножая каждую из проекций на орт соответствующей оси, найдем составляющие искомой силы вдоль координатных осей, которые образуют систему сходящихся сил с центром в точке A . Равнодействующая этой системы, согласно теореме 2.2, будет также приложена в точке A и равна вектору:

$$\bar{P} = X \cdot \bar{i} + Y \cdot \bar{j} + Z \cdot \bar{k}. \quad (2.1)$$

Таким образом, равнодействующая пространственной системы трех сходящихся сил изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, как на сторонах.

Модуль и направление искомого вектора силы \bar{P} можно найти по формулам:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad (2.2)$$

$$\cos(\bar{P}, \bar{i}) = X / P; \quad \cos(\bar{P}, \bar{j}) = Y / P; \quad \cos(\bar{P}, \bar{k}) = Z / P.$$

2.4.Аналитическое определение равнодействующей сходящихся сил

Пусть система сходящихся сил задана аналитически, то есть, известны координаты центра системы $A(x, y, z)$ и проекции каждой силы на оси координат: X_i, Y_i, Z_i , где индекс i принимает значения от 1 до n .

Согласно теореме 2.2 равнодействующая системы приложена в точке A и равна геометрической сумме этих сил:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) \sim \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_i . \quad (2.3)$$

Представим каждую силу системы в виде суммы ее составляющих по осям координат – как в формуле (2.1):

$$\mathbf{P}_i = X_i \cdot \mathbf{i} + Y_i \cdot \mathbf{j} + Z_i \cdot \mathbf{k} . \quad (2.4)$$

В аналогичной форме запишем неизвестную пока равнодействующую \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} . \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) и (2.4) в (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых ортах в обеих частях последнего соотношения, получим искомые выражения проекций равнодействующей:

$$R_x = \sum X_i ; R_y = \sum Y_i ; R_z = \sum Z_i . \quad (2.6)$$

Полученные зависимости можно сформулировать в виде следующей **теоремы: проекция равнодействующей системы на какую-либо ось равна сумме проекций всех сил системы на эту ось.**

Воспользовавшись формулами (2.2), найдем модуль и направление равнодействующей произвольной пространственной системы сходящихся сил:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} ;$$

$$\cos(\mathbf{R}, \mathbf{i}) = R_x / R ; \cos(\mathbf{R}, \mathbf{j}) = R_y / R ; \cos(\mathbf{R}, \mathbf{k}) = R_z / R .$$
(2.7)

2.5. Условия и уравнения равновесия системы сходящихся сил

Для того чтобы система сходящихся сил была уравновешенной, ее равнодействующая должна равняться нулю. В силу теоремы 2.2 отсюда следует **условие равновесия системы сходящихся сил:**

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{P}_i = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Условие (2.8) можно интерпретировать графически или аналитически. Графически это означает, что при построении силового многоугольника конец последнего вектора совпадет с началом первого. Это называется замкнутостью силового многоугольника.

Аналитически из условия (2.8) с учетом формул (2.7) получаются уравнения равновесия произвольной пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum Z_i = 0. \quad (2.9)$$

Для плоской системы сходящихся сил, лежащих в плоскости Oxy , соответствующие уравнения равновесия примут вид:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0. \quad (2.10)$$

2.6. Решение задач

При решении задач по статике рекомендуется придерживаться следующего плана:

- 1) выбрать тело, равновесие которого будем рассматривать;
- 2) приложить к нему активные силы;
- 3) отбросить связи, заменив их неизвестными опорными реакциями;
- 4) определить эти реакции аналитически, используя уравнения равновесия (2.9) и (2.10) или графически, используя условие замкнутости силового многоугольника;
- 5) проверить правильность решения задачи.

Пример 2.1. Определить реакции стержней, соединенных шарниром B , если к нему подвешен груз весом Q (Рис.2.4а).

Решение. В соответствии с предложенным выше планом выбираем тело, равновесие которого мы будем рассматривать. Этот выбор, в основном, определяется условиями задачи. Если в этой задаче рассмотреть равновесие подвешенного груза, то мы сумеем найти только силу натяжения нити, которая равна весу тела: $T = Q$ (Рис.2.4б).

Чтобы определить реакции стержней, рассмотрим равновесие точки B . Можно считать, что к ней посредством нити приложена активная сила Q и реакции отброшенных стержней S_A и S_C (Рис.2.3в).

Решим эту задачу аналитически. Выбирая начало отсчета в точке B , составим уравнения (2.10), которые в этой задаче примут вид:

$$-S_A \cos\alpha + S_C \cos\beta = 0;$$

$$S_A \sin\alpha + S_C \sin\beta = Q.$$

Чтобы найти отсюда S_C сложим полученные уравнения, умножив предварительно первое из них на $\sin\alpha$, а второе – на $\cos\alpha$:

$$S_C (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) = Q \cos\alpha.$$

Отсюда следует, что $S_C = Q \cos\alpha/\sin(\alpha+\beta)$, а поскольку α и β в эти уравнения входят симметрично, то $S_A = Q \cos\beta/\sin(\alpha+\beta)$.

Для проверки правильности аналитического решения задачи воспользуемся графическим методом.

Треугольник, образованный из трех сил: Q , S_A и S_C должен быть замкнут, поэтому решение сводится к построению треугольника по известной стороне (Q) и направлению двух других сторон (S_A и S_C). Для этого нужно в масштабе построить вектор Q , а затем из начала и из конца этого вектора провести прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (Рис.2.4г).

Измерив длины найденных отрезков и пересчитав в масштабе, можно считать поставленную задачу решенной. Направление полученных векторов определяется из условия замкнутости силового многоугольника, то есть конец последнего вектора должен совпадать с началом первого.

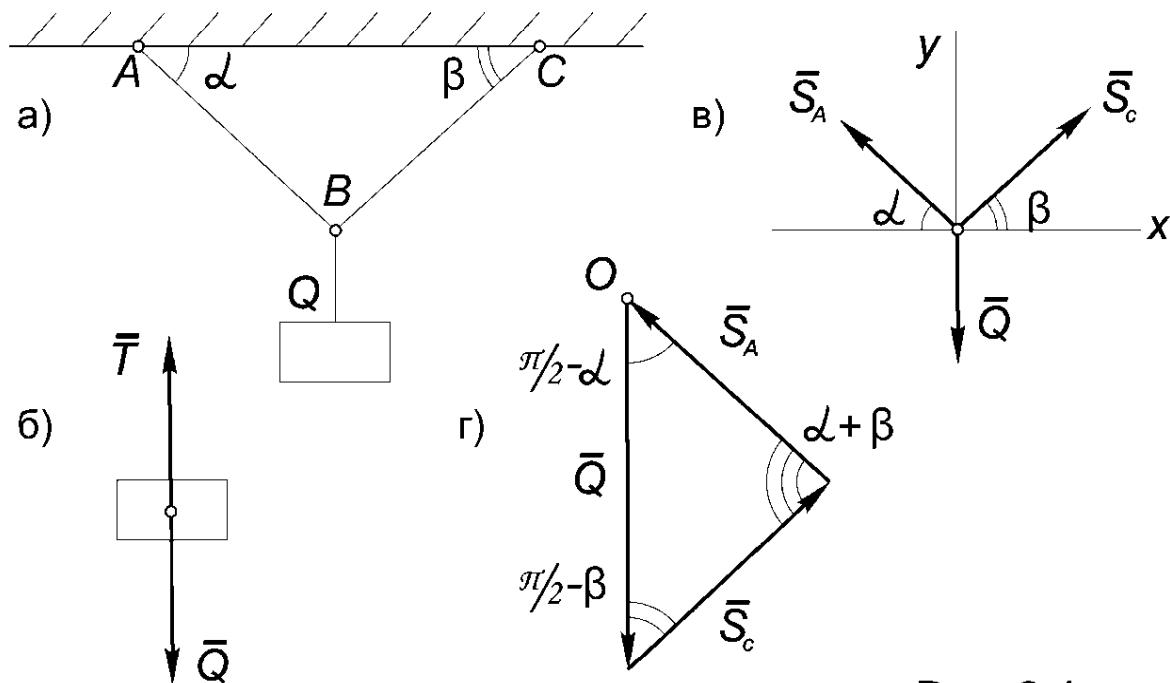


Рис. 2.4

Можно, впрочем, определить величину S_A и S_C и без масштабной линейки, если просто решить построенный треугольник.

С этой целью воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{Q}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{S_A}{\sin(\pi/2-\beta)} = \frac{S_C}{\sin(\pi/2-\alpha)},$$

откуда, заменяя синус дополнительного угла косинусом, получим:

$$S_A = Q \cos\beta/\sin(\alpha+\beta); \quad S_C = Q \cos\alpha/\sin(\alpha+\beta).$$

То есть, результат графического решения совпадает с аналитическим, значит задача решена правильно. •

Пример 2.2. Центр невесомого идеального блока удерживается при помощи двух стержней, соединенных шарнирно в точке B . Через блок переброшена нить, один конец которой закреплен, а к другому – подвешен груз весом Q (Рис.2.5а). Определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

Решение. Рассмотрим равновесие блока B , к которому приложены силы натяжения нитей T_1 и T_2 и реакции отброшенных стержней S_A и S_C , которые, как и в предыдущем примере мы считаем растянутыми (Рис.2.5б).

Фактически в качестве активной силы выступает вес груза Q , который приложен к блоку с помощью нити, поэтому $T_1 = Q$. По поводу силы T_2 надо отметить, что идеальным – то есть без трения блоком называется механизм, который меняет направление силы натяжения нити, но не ее величину, поэтому $T_1 = T_2 = Q$.

Пренебрегая размерами блока, получим уравновешенную систему сходящихся сил, приложенных в точке B (Рис.2.5в).

Определим реакции S_A и S_C аналитически. Отметим, что если в первое из уравнений (2.10) входят оба неизвестных, то в уравнение $\Sigma Y_i = 0$ неизвестная реакция S_C не войдет, поэтому имеет смысл начать решение задачи именно с этого уравнения:

$$S_A \cos 30^\circ + T_2 \cos 60^\circ - T_1 = 0.$$

Подставляя сюда значения тригонометрических функций и $T_1 = T_2 = Q$, получим:

$$S_A \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{Q}{2},$$

откуда $S_A = Q (\sqrt{3}/3)$.

Теперь вернемся к уравнению $\Sigma X_i = 0$:

$$- S_A \cos 60^\circ + T_2 \cos 30^\circ + S_C = 0,$$

или

$$S_C = S_A/2 - Q (\sqrt{3}/2).$$

Подставив найденное выше значение S_A , получим:

$$S_C = Q (\sqrt{3}/6) - Q (\sqrt{3}/2) = - Q (\sqrt{3}/3).$$

При этом минус в последнем выражении означает, что стержень BC не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Для проверки полученного результата решим эту задачу графически. С этой целью от центра O последовательно откладываем в масштабе известные силы T_1 и T_2 , затем от начала первого и от конца последнего вектора проводим прямые, параллельные S_A и S_C до их пересечения (Рис.2.5г).

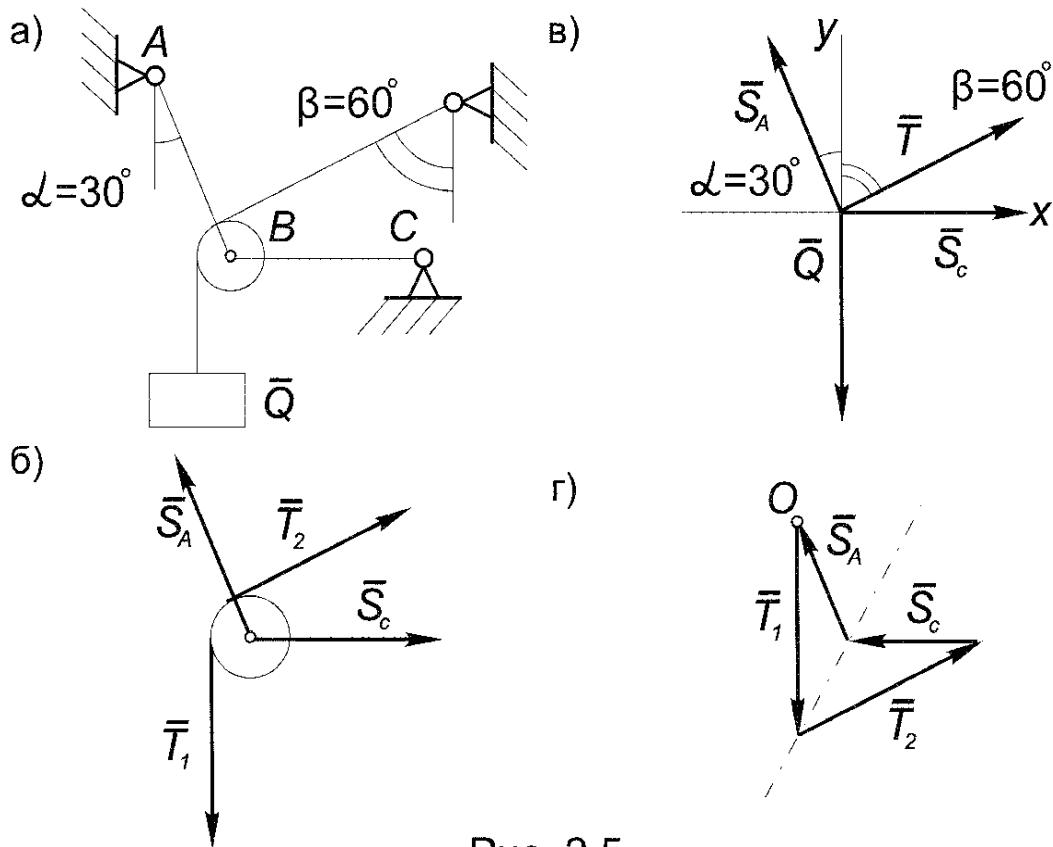


Рис. 2.5

Нетрудно видеть, что построенный силовой многоугольник имеет ось симметрии и $|S_A| = |S_C|$. При этом направление вектора S_C на силовом многоугольнике противоположно первоначальному направлению, указанному на чертеже, то есть стержень BC не растянут, а сжат. •

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. В системе уравнений (2.10) оси координат не обязательно должны быть взаимно перпендикулярными, поэтому, если в последнем примере выбрать ось Ox , совпадающую по направлению с силой T_2 , мы получим систему уравнений, из которых неизвестные S_A и S_C находятся *независимо одно от другого*.

2. Впоследствии мы увидим, что аналитическое решение можно проверить не только с помощью графического решения, но и аналитически. Впрочем, для системы сходящихся сил изложенный метод решения задач является, по-видимому, оптимальным.

ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

3.1. Момент силы относительно центра

Рассмотрим тело, которое закреплено в центре O и может поворачиваться вокруг оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости чертежа. Приложим в точке A этого тела силу \bar{P} и выясним, чем определяется вращательное действие этой силы (Рис.3.1).

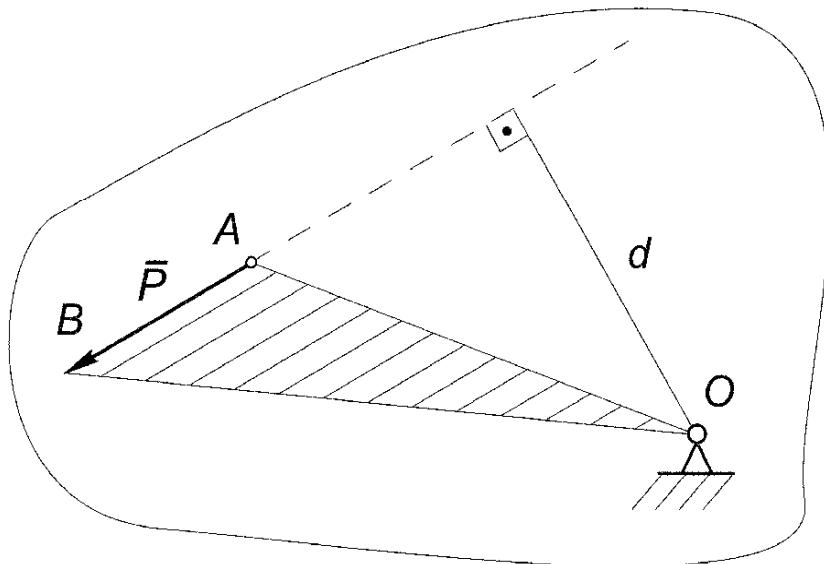


Рис. 3.1

Очевидно, что воздействие силы на тело будет зависеть не только от ее величины, но и от того, как она направлена, и в конечном итоге будет определяться ее *моментом относительно центра* O .

Определение 3.1. Моментом силы P относительно центра O называется взятое со знаком \pm произведение модуля силы на ее плечо – то есть длину перпендикуляра, опущенного из моментной точки на линию действия силы.

Правило знаков: момент силы считается положительным, если сила стремится повернуть тело против хода часовой стрелки и отрицательным, если она вращает тело по ходу часовой стрелки.

В соответствии с данным определением момент силы численно равен удвоенной площади треугольника OAB , построенного на векторе силы P с вершиной в моментной точке: $M_0(P) = P \cdot d = 2S_{OAB}$.

Отметим, что *момент силы относительно точки O равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку*.

Рассмотренное определение момента силы подходит только для плоской системы сил. В общем случае для однозначного описания вращательного действия силы введем следующее определение.

Определение 3.2. Вектор-моментом силы \bar{P} относительно центра O называется вектор, который:

- приложен в моментной точке O перпендикулярно к плоскости треугольника, построенного на векторе силы с вершиной в моментной точке;
- направлен по правилу правила винта;
- равен по модулю моменту силы P относительно центра O (Рис3.2а).

Правило правого винта, известное также из курса физики как правило буравчика, означает, что если смотреть навстречу вектору-моменту $\bar{M}_0(\bar{P})$, мы увидим вращение силой \bar{P} плоскости своего действия, происходящим против хода часовой стрелки.

Обозначим через \bar{r} радиус-вектор точки приложения силы \bar{P} и докажем, что справедлива следующая

Теорема 3.1. Вектор-момент силы \bar{P} относительно центра O равен векторному произведению радиус-вектора \bar{r} и вектора силы \bar{P} :

$$\bar{M}_0(\bar{P}) = (\bar{r} \times \bar{P}). \quad (3.1)$$

Напомним, что векторным произведением векторов \bar{a} и \bar{b} и называется вектор \bar{c} , который (Рис.3.2б):

б) $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$

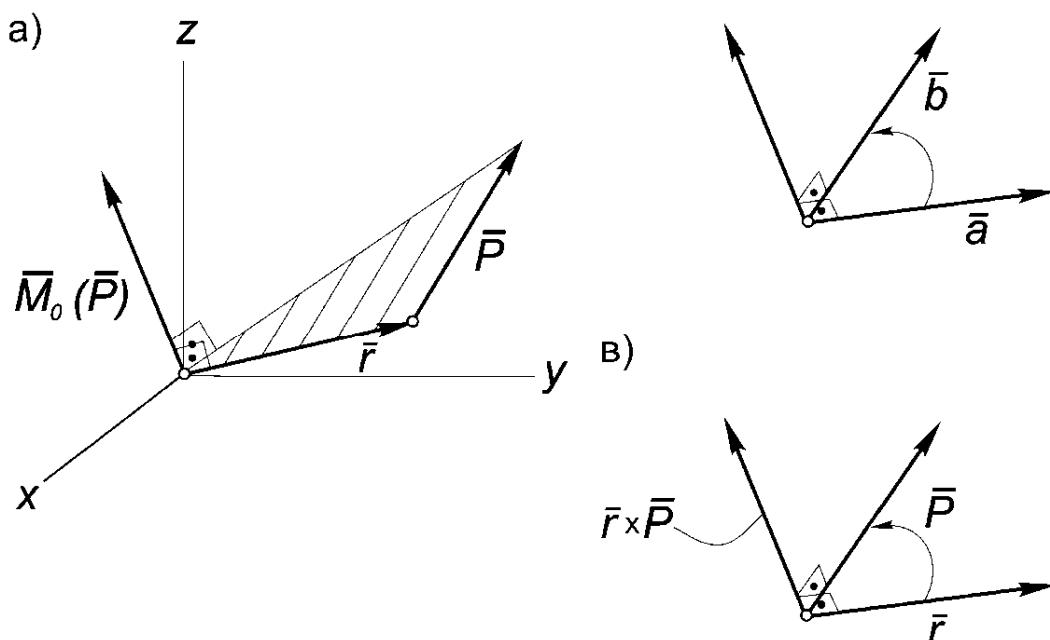


Рис. 3.2

- перпендикулярен к векторам \bar{a} и \bar{b} ;
- образует с ними правую тройку векторов, то есть, направлен так, что, смотря навстречу этому вектору, мы увидим поворот от вектора \bar{a} к вектору \bar{b} на наименьший угол происходящим против хода часовой стрелки;

– равен по модулю удвоенной площади треугольника, построенного на этих векторах:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Для доказательства теоремы отметим, во-первых, что вектор, равный векторному произведению векторов \mathbf{r} и \mathbf{P} будет коллинеарным вектору $\mathbf{M}_0(\mathbf{P})$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно отложить эти векторы от одной точки (Рис.3.2в). Итак, $(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \uparrow\uparrow \mathbf{M}_0(\mathbf{P})$.

Во-вторых, модуль векторного произведения этих векторов будет равен:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{P}| = |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{P}| \cdot \sin(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = P \cdot d = |\mathbf{M}_0(\mathbf{P})|,$$

откуда и следует соотношение (3.1). Следствием теоремы (3.1) является

Теорема Вариньона (о моменте равнодействующей сходящихся сил). Вектор-момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольного центра O равен геометрической сумме вектор-моментов всех сил системы относительно этого центра:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{M}_{0,i}(\mathbf{P}_i). \quad (3.2)$$

В самом деле, момент равнодействующей с учетом (3.1) и (2.3) будет равен:

$$\mathbf{M}_0(\mathbf{R}) \stackrel{(3.1)}{=} \mathbf{r} \times \mathbf{R} \stackrel{(2.3)}{=} \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{i=n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{M}_{0,i}(\mathbf{P}_i).$$

Для плоской системы сходящихся сил геометрическая сумма в (3.2) переходит в алгебраическую:

$$M_0(R) = \sum_{i=1}^{i=n} M_{0,i}(P_i).$$

ПРИМЕЧАНИЕ. В учебной литературе термин «момент» применяют для обозначения как момента силы, так и ее вектор-момента.

3.2. Пара сил и ее свойства

Определение. Парой называется система двух сил, которые равны по модулю, параллельны и направлены в противоположные стороны.

Пара, приложенная к ТТ, стремится вызвать его вращение. Вращательное действие пары определяется ее *моментом*, который равен произведению одной из сил пары на ее *плечо*, то есть расстояние между линиями действия сил пары:

$$M(P, P') = P \cdot d = P' \cdot d.$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1) Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю;

2) Сумма моментов сил пары относительно любой точки равна моменту этой пары.

В общем случае действие пары сил на ТТ определяется тремя факторами:

- плоскостью действия;
- направлением вращения в этой плоскости;
- величиной момента.

Чтобы однозначно определить все эти факторы, вводят понятие вектор-момента пары.

Определение. Вектор-моментом пары сил называется вектор, который:

- перпендикулярен плоскости действия пары;
- направлен по правилу правого винта;
- равен по модулю моменту пары (Рис.3.3).

Нетрудно убедиться, что вектор-момент пары сил можно представить в виде векторных произведений:

$$\bar{M}(\bar{P}, \bar{P}') = \bar{AB} \times \bar{P}' = \bar{BA} \times \bar{P}.$$

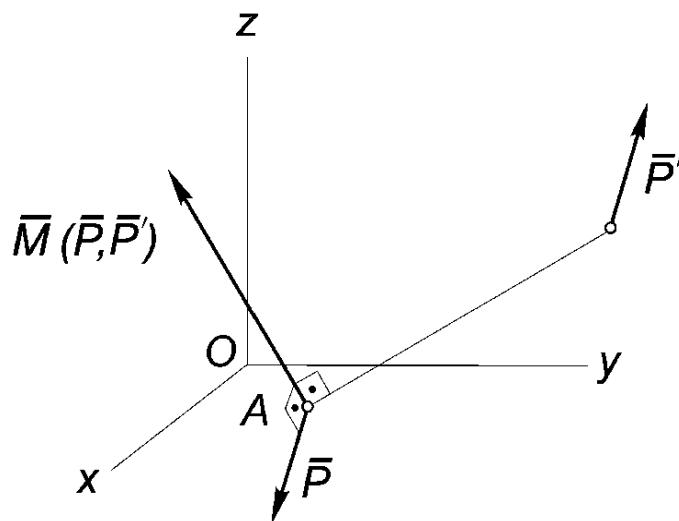


Рис. 3.3

ПРИМЕЧАНИЕ. В последнем определении ничего не сказано о точке приложения вектор-момента пары сил. Обоснования этого будут даны в следующем параграфе.

3.3. Теоремы об эквивалентности пар

Теорема 3.2. (Об эквивалентности пар на плоскости). Две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие равные по величине и по знаку моменты, эквивалентны.

Для доказательства рассмотрим две пары (\bar{P}, \bar{P}') и (\bar{F}, \bar{F}') , лежащие в одной плоскости и имеющие равные по величине и по знаку моменты (Рис.3.4).

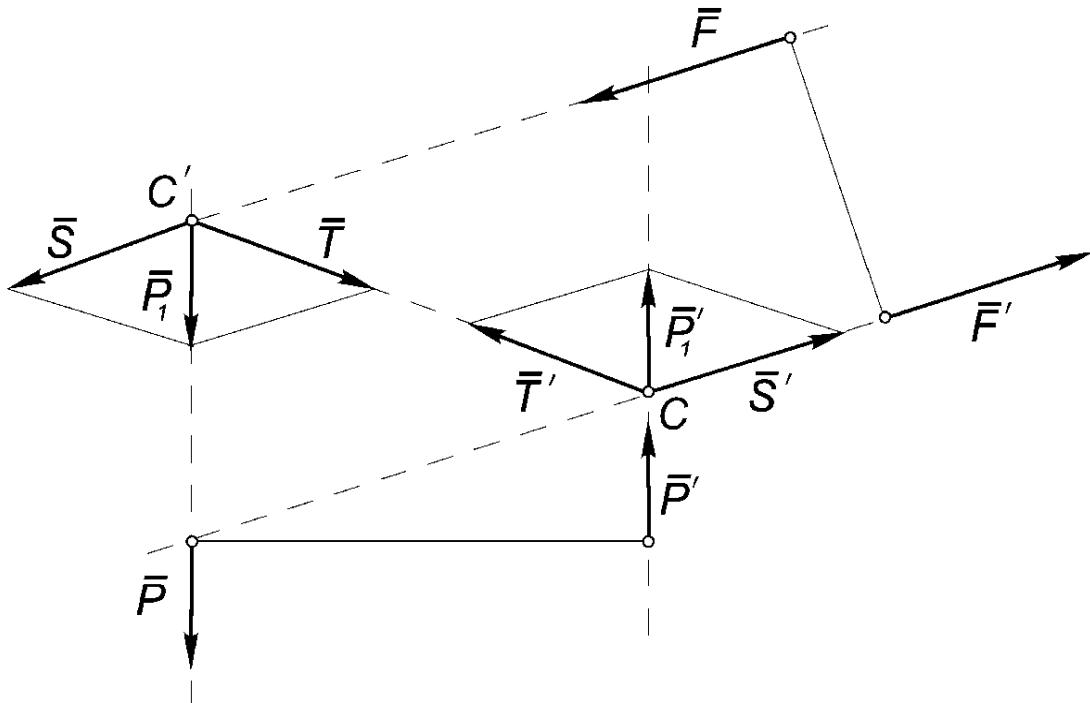


Рис. 3.4

Продолжим линии действия сил пар до их пересечения в точках C и C' .

На основании следствия из аксиомы 3 действие сил \bar{P} и \bar{P}' не изменится, если эти силы перенести в эти точки, то есть $(\bar{P}, \bar{P}') \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_1')$.

Воспользовавшись аксиомой 4, заменим силу \bar{P}_1 составляющими S и T , направленными, соответственно, вдоль линии действия силы \bar{F} , и по прямой CC' . Аналогично поступим с силой \bar{P}_1' , заменив ее составляющими S' и T' .

По построению $T = -T'$, поэтому согласно аксиоме 2: $(T, T') \sim \mathbf{0}$ и в соответствии с аксиомой 3 эту систему можно исключить.

Таким образом,

$$(\bar{P}, \bar{P}') \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_1') \sim ((S, T), (S', T')) \sim ((S, S'), (T, T')) \sim (S, S'),$$

то есть пары сил (\bar{P}, \bar{P}') и (S, S') эквивалентны.

Остается доказать эквивалентность пар (S, S') и (\bar{F}, \bar{F}') . Поскольку эти пары имеют равные плечи, они будут эквивалентны, если будут равны их моменты.

По условию теоремы моменты пар (\bar{P}, \bar{P}') и (\bar{F}, \bar{F}') равны. Таким образом:

$$M(\bar{F}, \bar{F}') = M(\bar{P}, \bar{P}') = M(\bar{P}_1, \bar{P}_1') = M_C(\bar{P}_1).$$

В силу теоремы Вариньона:

$$M_C(\bar{P}_1) = M_C(S) + M_C(T) = M_C(S),$$

поскольку линия действия силы \mathbf{T} проходит через точку C и ее момент равен нулю. Итак:

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = M_C(\mathbf{S}) = M(\mathbf{S}, \mathbf{S}'),$$

а значит пары $(\mathbf{S}, \mathbf{S}')$ и $(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ будут эквивалентны.

Таким образом: $(\mathbf{P}, \mathbf{P}') \sim (\mathbf{S}, \mathbf{S}') \sim (\mathbf{F}, \mathbf{F}')$, и теорема доказана.

Рассмотрим следствия этой теоремы, которые также можно рассматривать как свойства пар сил в дополнение к свойствам, рассмотренным в § 3.2.

Следствия:

1. Действие пары сил на ТТ не меняется при ее перемещении в своей плоскости.

2. Действие пары сил на ТТ не изменится, если одновременно изменить плечо и силы пары, сохранив неизменным ее момент.

Рассмотрим в частности пару, представленную силами $\pm P=M/2\varepsilon$, приложенными к балке в точках $x=x_M \pm \varepsilon$ (Рис.3.5а). Плечо такой пары, равно 2ε , а ее момент равен M . При изменении ε будут меняться плечо и силы пары, но величина ее момента останется равной первоначальному значению.

Определение 3.3. Моментом называется система, полученная из пары сил $\pm P = M/2\varepsilon$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, термин «момент» имеет в ТМ два значения: 1) момент как произведение силы на ее плечо и 2) момент как система, полученная из пары сил в соответствии с определением 3.3.

Отметим, что при таком предельном переходе плечо пары стремится к нулю, а силы пары – к бесконечности. Полученный в соответствии с определением 3.3 момент фактически является таким же самостоятельным объектом в механике, как и сила, и в дальнейшем мы будем обозначать его так, как показано на рис.3.5б.

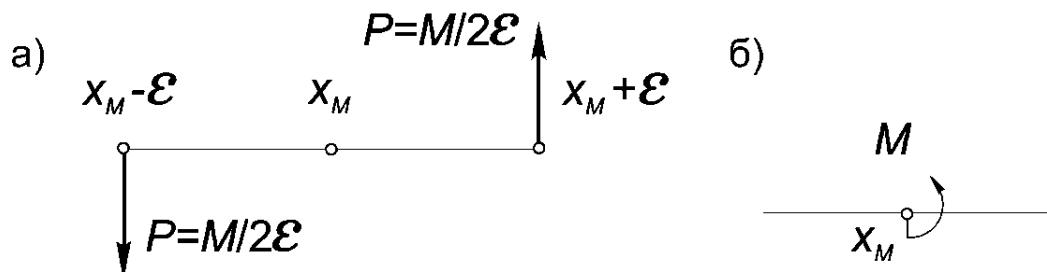


Рис. 3.5

Если для абсолютно твердого тела последний момент эквивалентен паре сил, показанной на рис. 3.5а, то в механике деформируемого тела действие такого сосредоточенного момента, приложенного в точке $x = x_M$, существенно отличается от действия пары сил.

Теорема 3.3. (Об эквивалентности пар в пространстве). Две пары, лежащие в параллельных плоскостях и имеющие равные по величине и по знаку моменты, эквивалентны.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Равнодействующая двух параллельных и равных по модулю сил равна их сумме, а ее линия действия проходит посередине между точками их приложения (Рис.3.6).

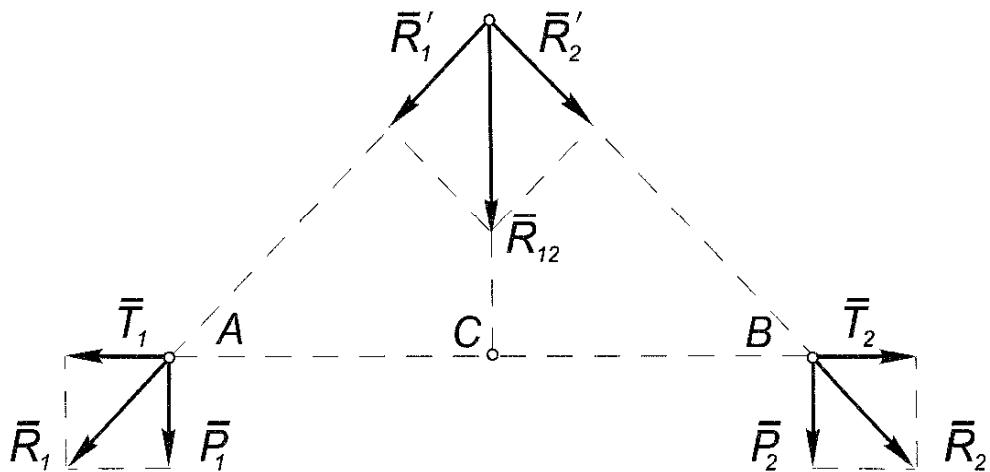


Рис. 3.6

Для доказательства леммы достаточно к системе двух сил ($\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$), приложенных соответственно в точках A и B , о которых идет речь в теореме, добавить уравновешенную систему сил ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$), а затем воспользоваться аксиомой параллелограмма:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \sim ((\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)) \sim ((\mathbf{P}_1, \mathbf{T}_1), (\mathbf{P}_2, \mathbf{T}_2)) \sim (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) \sim (\mathbf{R}_{12}),$$

где $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}$, $\mathbf{R}_{12} = 2\mathbf{P}$, а $AC = BC$.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим две пары сил ($\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$) и ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$), имеющие равные моменты и лежащие в параллельных плоскостях Π_1 и Π_2 соответственно (Рис.3.7).

Построим в плоскости Π_2 отрезок CD , равный и параллельный отрезку AB и приложим в точках C и D две системы уравновешенных сил: $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) \sim 0$ и $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \sim 0$, выбрав силы \mathbf{S} и \mathbf{T} равными по модулю и параллельными силам \mathbf{P} .

На основании аксиом 2, 3 и последней леммы:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) &\sim ((\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2), (\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)) \sim ((\mathbf{P}_1, \mathbf{T}_1), (\mathbf{P}_2, \mathbf{S}_2), (\mathbf{S}_1, \mathbf{T}_2)) \sim \\ &\sim ((\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), (\mathbf{S}_1, \mathbf{T}_2)) \sim (\mathbf{S}_1, \mathbf{T}_2), \end{aligned}$$

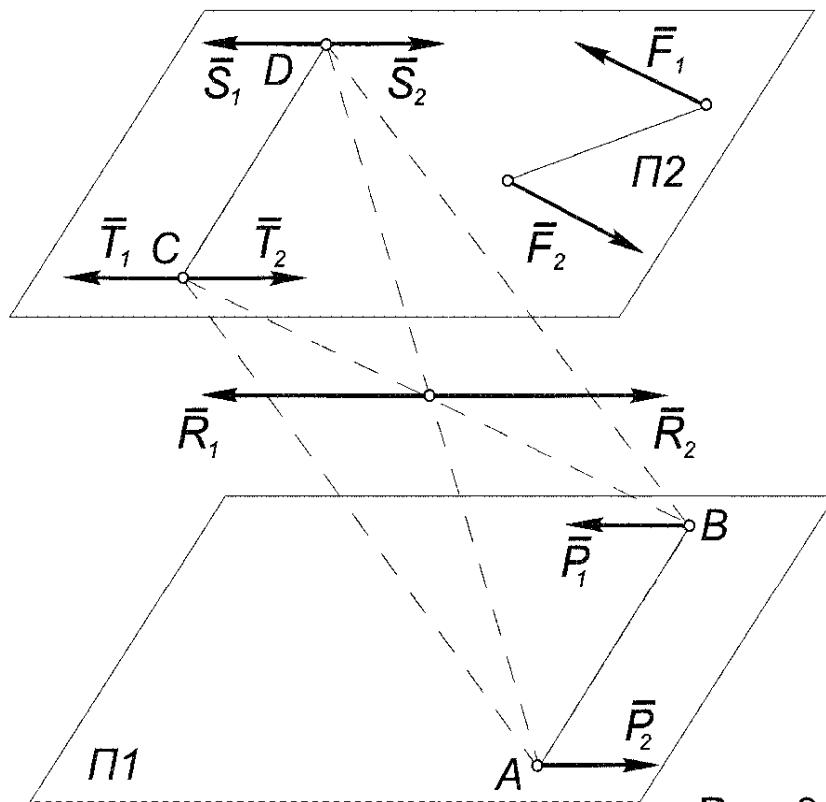


Рис. 3.7

поскольку $R_1 \sim (P_1, T_1)$ и $R_2 \sim (P_2, S_2)$ также образуют уравновешенную систему сил, которую можно исключить.

Таким образом, мы получили две пары сил: (S_1, T_2) и (F_1, F_2) , которые лежат в одной плоскости и имеют равные по величине и по знаку. В силу предыдущей теоремы 3.2 они будут эквивалентны, откуда следует, что

$$(P_1, P_2) \sim (S_1, T_2) \sim (F_1, F_2).$$

Теорема доказана.

Следствие. Действие пары сил на ТТ не изменится при ее перемещении в параллельную плоскость, расположенную в пределах этого тела.

ПРИМЕЧАНИЕ. В силу этого следствия вектор-момент пары сил в пределах этого тела можно считать свободным.

3.4. Сложение пар сил

Теорема 3.4. Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре с вектор-моментом, равным геометрической сумме вектор-моментов слагаемых пар.

Для доказательства рассмотрим две пары сил (P_1, P_2) и (F_1, F_2) , лежащие в плоскостях Π_1 и Π_2 соответственно, которые пересекаются по прямой AB .

Не уменьшая общности можно считать, что плечи этих пар равны отрезку AB этой прямой. Пусть $M(P_1, P_2) = M_1$, а $M(F_1, F_2) = M_2$ (Рис.3.8) .

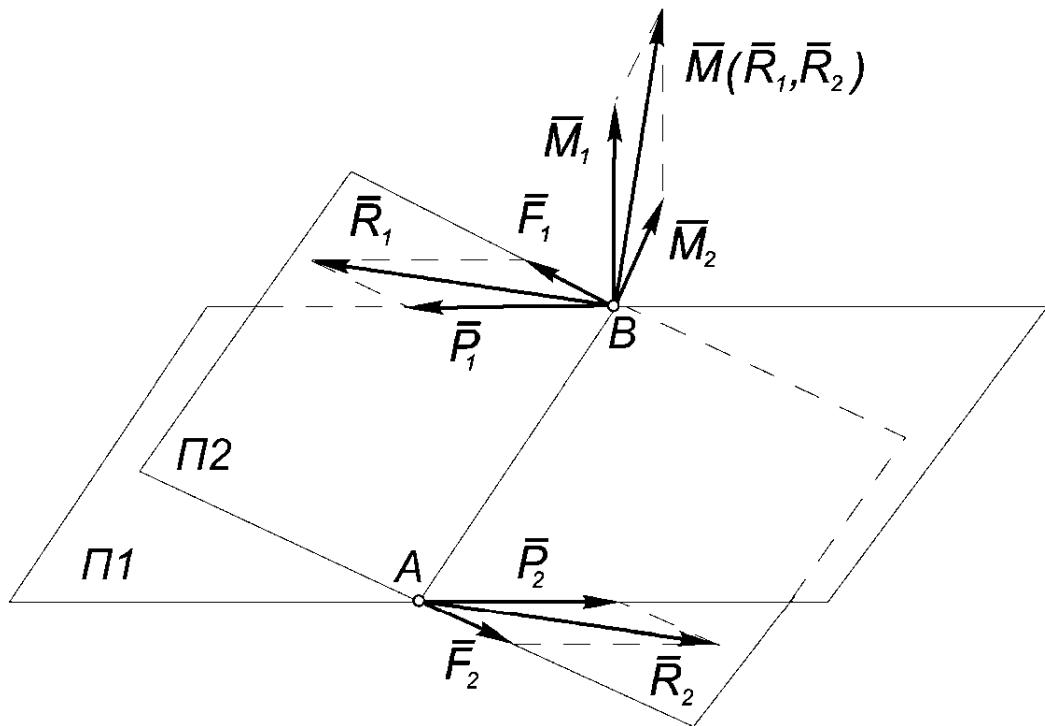


Рис. 3.8

Воспользовавшись аксиомой параллелограмма, получим:

$$((\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)) \sim ((\mathbf{P}_1, \mathbf{F}_1), (\mathbf{P}_2, \mathbf{F}_2)) \sim (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2).$$

При этом момент результирующей пары с учетом теоремы Вариньона будет равен:

$$\mathbf{M}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \mathbf{M}_A(\mathbf{R}_1) = \mathbf{M}_A(\mathbf{P}_1) + \mathbf{M}_A(\mathbf{F}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) + \mathbf{M}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2.$$

Теорема доказана.

Следствия:

1. Система n пар в пространстве эквивалентна одной паре с вектор-моментом, равным геометрической сумме вектор-моментов слагаемых пар:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{M}_i \quad (3.3)$$

2. Система n пар на плоскости эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар:

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i \quad (3.4)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. В соответствии с замечанием в конце предыдущего параграфа вектор-момент пары сил в пределах рассматриваемого тела, как в математике, является свободным, поэтому последняя теорема может показаться излишней.

В действительности между векторами в математике и векторами в ТМ продолжает оставаться различие, которое обнаруживается при рассмотрении системы аксиом, которым удовлетворяют векторы в математике и не удовлетворяют вектора сил.

3.5. Равновесие систем пар

Система пар сил, приложенных к ТТ, будет уравновешена, если момент результирующей пары равен нулю.

Таким образом, из соотношений (3.3) и (3.4) следуют *условия равновесия системы пар*:

1. Необходимым и достаточным условием равновесия системы пар в пространстве является равенство нулю геометрической суммы вектор-моментов слагаемых пар:

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

2. Необходимым и достаточным условием равновесия системы пар на плоскости является равенство нулю алгебраической суммы моментов слагаемых пар:

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i = 0. \quad (3.6)$$

Условие (3.5) имеет геометрическую интерпретацию и означает замкнутость многоугольника, образованного из векторов моментов пар.

Пример 3.1. Определить опорные реакции рамы, загруженной системой пар (Рис.3.9).

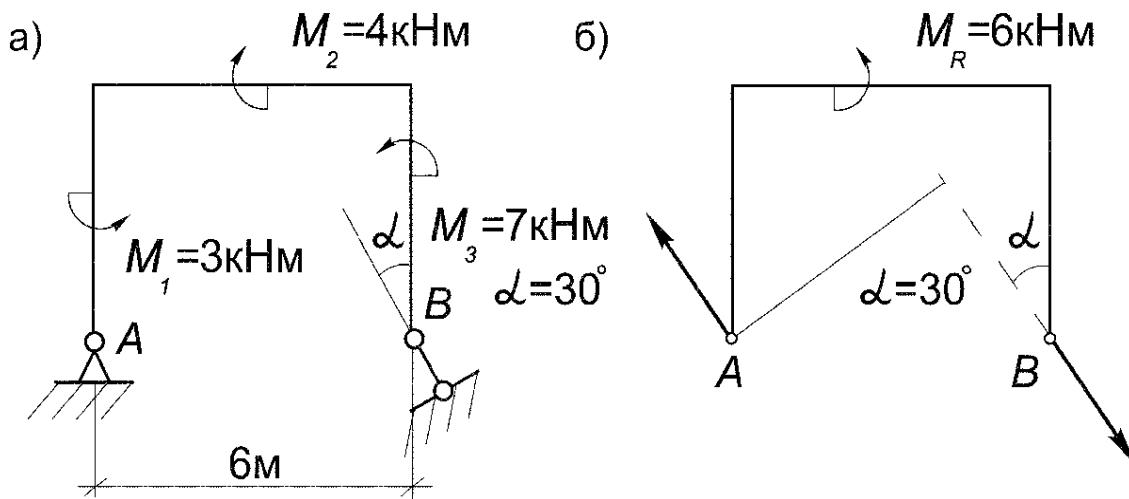


Рис. 3.9

Решение. Заменим систему пар, приложенных к раме, результирующей парой по формуле (3.4): $M_R = M_1 - M_2 + M_3 = 3 - 4 + 7 = 6$ кНм.

Из условия равновесия систем пар (3.6) следует, что активную пару M_R , приложенную к раме, может уравновесить только пара сил, образованных опорными реакциями, поэтому линия действия R_A должна быть параллельной R_B и

$$M_R + M(R_A, R_B) = 0,$$

откуда $R_A = R_B = M_R/d$, где $d = 6\cos30^\circ = 3\sqrt{3}$ м – плечо пары (R_A, R_B).

Итак, $R_A = R_B = 6/(3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})/3$ м. •

ГЛАВА 4. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Одной из основных задач, решаемых статикой, является замена одной системы сил другой – эквивалентной ей.

Такая процедура позволяет все многообразие систем сил свести к простейшим *каноническим* системам, классифицировать их и получить уравнения равновесия, необходимые для решения практических задач.

Ключевую роль в проведении таких преобразований систем сил играет следующая теорема.

4.1. Лемма Пуансо

Мы уже выяснили, что силу, приложенную к ТТ, можно переносить вдоль линии ее действия. Сейчас мы увидим, что при определенных условиях эту силу можно переносить даже параллельно своему первоначальному положению.

Лемма Пуансо. *Действие силы P , приложенной к ТТ не изменится, если эту силу перенести в любую точку O этого тела – центр приведения, добавив пару сил с моментом, равным моменту силы P относительно центра приведения.*

Для доказательства рассмотрим силу P , приложенную к телу в точке A (Рис.4.1а).

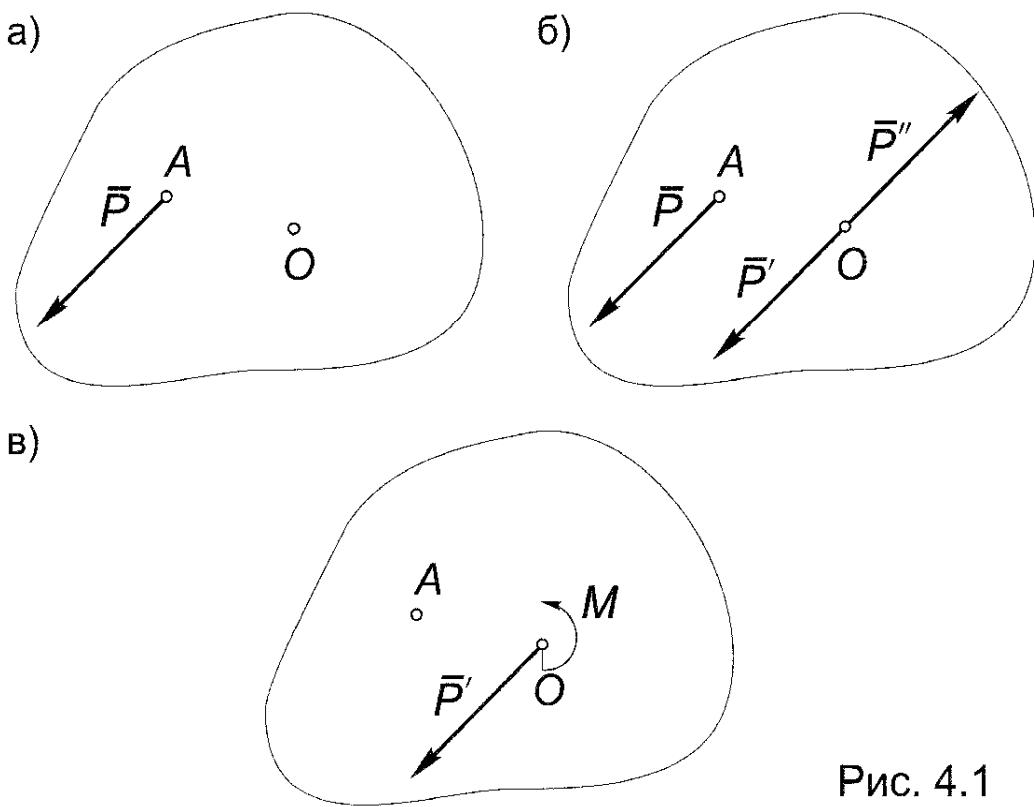


Рис. 4.1

Согласно аксиоме 3 действие силы P на ТТ не изменится, если к ней добавить уравновешенную систему сил: $(\bar{P}', \bar{P}'') \sim 0$.

Выберем силы этой уравновешенной системы так, чтобы они были равны по модулю и параллельны силе \mathbf{P} (Рис.4.1б) :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} = -\mathbf{P}'' .$$

Тогда полученную систему трех сил можно трактовать как силу \mathbf{P}' , приложенную в центре O , и пару сил $(\mathbf{P}, \mathbf{P}'')$ с моментом $M(\mathbf{P}, \mathbf{P}'') = M_O(\mathbf{P})$:

$$\mathbf{P} \sim (\mathbf{P}, (\mathbf{P}', \mathbf{P}'')) \sim (\mathbf{P}', (\mathbf{P}, \mathbf{P}'')) .$$

Лемма доказана.

Сила \mathbf{P}' , приложенная в точке O , называется *приведенной*, а пара $(\mathbf{P}, \mathbf{P}'')$ – *присоединенной*.

Напомним, что пару $(\mathbf{P}, \mathbf{P}'')$ можно заменить *моментом* \mathbf{M} , величина которого равна моменту силы \mathbf{P} относительно центра приведения O (Рис.4.1в), поэтому:

$$\mathbf{P} \sim (\mathbf{P}', (\mathbf{P}, \mathbf{P}'')) \sim (\mathbf{P}', \mathbf{M}) .$$

4.2. Теорема о приведении плоской системы сил

Теорема 4.1. Произвольную плоскую систему сил можно заменить одной силой \mathbf{R}_θ – главным вектором системы, приложенным в центре приведения и равным геометрической сумме всех сил системы, и главным моментом системы \mathbf{M}_θ , величина которого равна алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскую систему сил: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n)$.

Воспользовавшись леммой Пуансо приведем каждую силу системы \mathbf{P}_i к центру O , заменив ее приведенной силой \mathbf{P}'_i и присоединенной парой, эквивалентной моменту \mathbf{M}_i , величина которого равна моменту силы \mathbf{P}_i относительно выбранного центра приведения:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) \sim ((\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \dots, \mathbf{P}'_n), (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n)).$$

Приведенные силы, приложенные в центре приведения O , образуют систему сходящихся сил, которые согласно теореме 2.2 можно заменить равнодействующей \mathbf{R}_θ . При этом

$$(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \dots, \mathbf{P}'_n) \sim \mathbf{R}_\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}'_i = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_i .$$

Совокупность присоединенных моментов, эквивалентных присоединенным парам, в соответствии с теоремой 3.4 можно заменить моментом, величина которого равна алгебраической сумме присоединенных моментов:

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n) \sim \mathbf{M}_\theta ; \quad M_\theta = \sum_{i=1}^{i=n} M_i = \sum_{i=1}^{i=n} M_\theta(\mathbf{P}_i) .$$

Таким образом, первоначальная система сил будет эквивалентна:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n) \sim (\mathbf{R}_\theta, M_\theta),$$

где $\mathbf{R}_\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_i$ – главный вектор системы, а $M_\theta = \sum_{i=1}^{i=n} M_\theta(\mathbf{P}_i)$ – главный момент системы относительно центра О.

Отметим, что модуль главного вектора плоской системы сил находится по формуле (2.7):

$$R_O = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2}, \quad (4.1)$$

где X_i, Y_i – проекции силы \mathbf{P}_i на оси координат.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Для плоской системы сил под главным моментом системы часто также понимают величину этого момента.

2. Очевидно, что главный вектор \mathbf{R}_θ не зависит, а главный момент M_θ зависит от выбора центра приведения.

4.3. Частные случаи приведения плоской системы сил

В зависимости от значений главного вектора \mathbf{R}_θ и главного момента M_θ возможны следующие случаи приведения плоской системы сил.

1) $R_\theta = 0, M_\theta = 0$ – система сил находится в равновесии;

2) $R_\theta = 0, M_\theta \neq 0$ – система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;

3) $R_\theta \neq 0, M_\theta = 0$ – система эквивалентна равнодействующей \mathbf{R} , равной и эквивалентной главному вектору системы \mathbf{R}_θ , линия действия которой проходит через центр приведения: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\theta, \mathbf{R} \sim \mathbf{R}_\theta$;

4) $R_\theta \neq 0, M_\theta \neq 0$ – система эквивалентна равнодействующей \mathbf{R} , равной главному вектору системы \mathbf{R}_θ , ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_\theta| / R_\theta$ от центра приведения.

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть доказательство леммы Пуансо в обратном направлении, сменив силу \mathbf{P} на \mathbf{R} , а \mathbf{P}' – на \mathbf{R}_θ .

В самом деле, пусть система эквивалентна главному вектору \mathbf{R}_θ и главному моменту M_θ (Рис.4.2а). Заменим M_θ парой сил $(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ с моментом $M(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = M_\theta$, выбрав силы пары равными по модулю и параллельными \mathbf{R}_θ , а ее плечо $d = |M_\theta| / R_\theta$ (Рис.4.2б). Тогда

$$(\mathbf{R}_\theta, M_\theta) \sim (\mathbf{R}_\theta, (\mathbf{R}, \mathbf{R}')) \sim (\mathbf{R}, (\mathbf{R}_\theta, \mathbf{R}')) \sim \mathbf{R},$$

поскольку $(\mathbf{R}_\theta, \mathbf{R}') \sim 0$. Таким образом, система $(\mathbf{R}_\theta, M_\theta)$ действительно эквивалентна равнодействующей \mathbf{R} , линия действия которой проходит на расстоянии $d = |M_\theta| / R_\theta$ от центра приведения.

Следствием этого случая приведения является

Теорема Вариньона (о моменте равнодействующей плоской системы сил)

Момент равнодействующей плоской системы сил относительно произвольного центра O равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

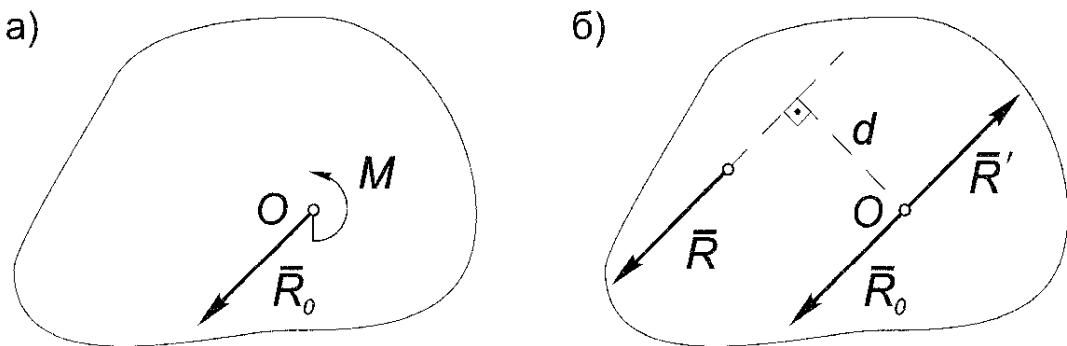


Рис. 4.2

Выбирая центр O , о котором идет речь в теореме, в качестве нового центра приведения системы сил, состоящей из единственной силы – равнодействующей R , и учитывая, что $R = R_0$ получим:

$$M_0(R) = \pm R \cdot d = \pm R \cdot |M_0| / R_0 = M_0 = \sum M_0(P_i)$$

4.4. Уравновешенная система сил

Необходимым и достаточным условием равновесия плоской системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента системы:

$$R_0 = 0, M_0 = 0. \quad (4.2)$$

Из этого условия следуют *уравнения равновесия плоской системы сил*, которые можно записать в трех различных формах:

1) Первая форма:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0; \\ \Sigma X &= 0; \\ \Sigma Y &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

2) Вторая форма:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= 0; \\ \Sigma M_B &= 0; \\ \Sigma Y &= 0, \text{ где ось } Oy \text{ неперпендикулярна отрезку } AB. \end{aligned} \quad (4.4)$$

3) Третья форма:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0; \\ \Sigma M_B &= 0;\end{aligned}\tag{4.5}$$

$\Sigma M_C = 0$, где точки А, В и С не лежат на одной прямой.

Таким образом, уравнения (4.3), (4.4) или (4.5) эквивалентны условиям (4.2) и наоборот.

В самом деле, условие $R_\theta = \mathbf{0}$ означает, что $|R_\theta| = R_\theta = 0$. Поэтому с учетом (4.1) : $R_\theta^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 = 0$, откуда и следуют два последних уравнения (4.2).

Первое из уравнений (4.3) получается из условия равенства нулю главного момента, если в качестве центра приведения взять точку А.

Докажем теперь, что уравнения (4.4) эквивалентны условиям равновесия системы (4.2).

Первое из уравнений (4.4) будет выполняться в двух случаях:

1) система сил, приложенных к ТТ, уравновешена и ее равнодействующая равна нулю;

2) равнодействующая сил, приложенных к ТТ, отлична от нуля, при этом ее линия действия проходит через точку А.

Пусть одновременно выполняются два первых уравнения системы (4.4). Это по-прежнему возможно в двух случаях:

1) равнодействующая $R = \mathbf{0}$;

2) равнодействующая $R \neq \mathbf{0}$ и ее линия действия одновременно проходит через точки А и В.

Если в дополнение к этим двум уравнениям выполняется и третье уравнение (4.4), то это означает, что $R_y = \Sigma Y_i = 0$.

При условии, что R неперпендикулярна этой оси – отсюда будет следовать, что $R = \mathbf{0}$, то есть система сил уравновешена.

Аналогично можно доказать, что условия (4.2) будут следовать из уравнений (4.3) или (4.5).

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. В частном случае для плоской системы сходящихся или параллельных сил уравнения в системах (4.3), (4.4) или (4.5) будут *линейно зависимы*. Это означает, что определитель системы алгебраических уравнений для определения опорных реакций таких систем сил становится равным нулю.

Например, для системы сил параллельных оси Oy уравнения (4.3) станут линейно зависимыми вследствие того, что второе из уравнений этой системы обратится в тождество, которое выполняется как для уравновешенных, так и для неуравновешенных систем.

Такие уравнения исключают из системы, уменьшая тем самым общее число уравнений для плоской системы сходящихся или параллельных сил с трех до двух.

2. В соответствии с предыдущим замечанием *уравнения равновесия системы сил, параллельных оси Oy* , можно записать в двух формах:

1) Первая форма:

$$\Sigma M_A = 0;\tag{4.6}$$

$\Sigma Y = 0$, где ось Oy неперпендикулярна силам системы.

2) Вторая форма:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0; \\ \Sigma M_B &= 0,\end{aligned}\quad (4.7)$$

где отрезок AB непараллелен силам системы.

3. Таким образом, если при рассмотрении произвольной плоской системы сил выяснится, что она в действительности является системой сходящихся или параллельных сил, можно упростить решение задачи, воспользовавшись вместо (4.3)-(4.5) системой (4.6) или (4.7) – для параллельных или (2.10) – для сходящихся сил.

ГЛАВА 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

5.1. Система параллельных сил

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, связанных с использованием полученных выше уравнений равновесия, введем дополнительные понятия, необходимые для решения практических задач.

Понятие о распределенной нагрузке. Наряду с рассмотренными выше сосредоточенными силами строительные конструкции и сооружения могут подвергаться воздействию *распределенных нагрузок* – по объему, по поверхности или вдоль некоторой линии – и определяемых ее *интенсивностью*.

Примером нагрузки, *распределенной по площади*, является сугородовая нагрузка, давление ветра, жидкости или грунта. Интенсивность такой поверхностной нагрузки имеет размерность давления и измеряется в kH/m^2 или килопаскалях ($\text{kPa} = \text{kH/m}^2$).

При решении задач очень часто встречается нагрузка, *распределенная по длине балки*. Интенсивность q такой нагрузки измеряется в kH/m .

Рассмотрим балку, загруженную на участке $[a, b]$ распределенной нагрузкой, интенсивность которой изменяется по закону $q = q(x)$. Для определения опорных реакций такой балки нужно заменить распределенную нагрузку эквивалентной сосредоточенной. Это можно сделать по следующему правилу:

Равнодействующая распределенной нагрузки приложена в центре тяжести грузовой эпюры и равна численно ее площади:

$$Q = \int_a^b q(x)dx.$$

Напомним, в частности, что равнодействующая нагрузки, изменяющейся по треугольному закону, приложена в центре тяжести этого треугольника, который находится в точке пересечения его медиан. В свою очередь, точка пересечения медиан отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

Жесткое и скользящее защемления. Познакомимся еще с двумя видами связей в дополнение к рассмотренным ранее в § 1.5.

Чтобы объяснить, в чем суть жесткого защемления, вернемся к рассмотрению неподвижной опоры (Рис.1.8). Точка A твердого тела, закрепленная таким образом, не может перемещаться в горизонтальном и вертикальном направлениях – чему соответствуют составляющие реакции $X_A = R_{AX}$ и $Y_A = R_{AY}$, но при этом тело может поворачиваться вокруг этой точки.

Жесткое защемление (Рис.5.1) не только не допускает линейных перемещений закрепленной точки, но и дополнительно препятствует повороту тела вокруг нее. Проанализируем, что это означает.

Чтобы повернуть тело, к нему прикладывают пару сил или сосредоточенный момент. Если тело продолжает оставаться в положении равновесия, это

означает, что активную пару уравновешивает *реактивный момент* M_A , который появляется в закрепленной части балки в дополнение к X_A и Y_A .

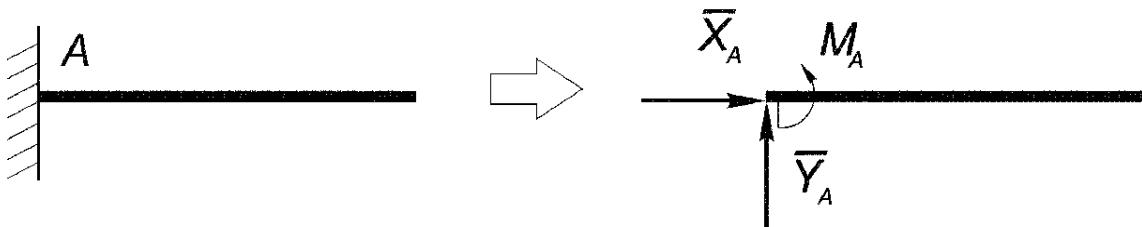


Рис. 5.1

Скользящее защемление в отличие от жесткого не препятствует линейному смещению закрепленной точки балки в одном из направлений, например – горизонтальном (Рис.5.2). При этом в указанном направлении соответствующая составляющая опорной реакции будет равна нулю: $R_A = Y_A$, $X_A = 0$.

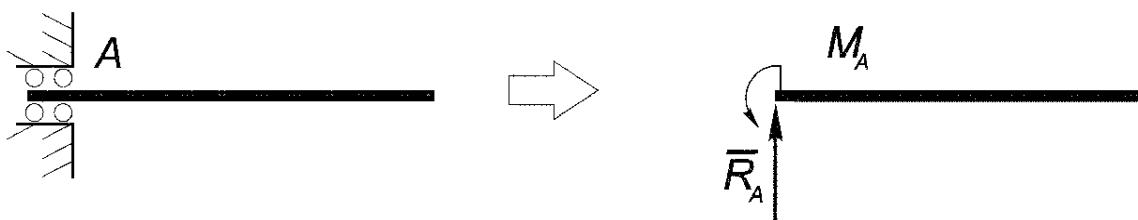


Рис. 5.2

Пример 5.1. Определить опорные реакции балки (Рис.5.3а).

Решение. В качестве активной нагрузки выступает равнодействующая распределенной нагрузки $Q = (1/2) \cdot aq = (1/2) \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ кН}$, линия действия которой проходит на расстоянии 1 м от левой опоры, сила натяжения нити $T = P = 2 \text{ кН}$, приложенная на правом конце балки и сосредоточенный момент.

Поскольку последний можно заменить парой вертикальных сил, то действующая на балку нагрузка вместе с реакцией подвижной опоры B образует систему параллельных сил, поэтому реакция R_A будет также направлена вертикально (Рис.5.3б).

Для определения этих реакций целесообразно воспользоваться уравнениями равновесия в форме (4.7), поскольку в отличие от уравнений (4.6) они позволяют найти R_A и R_B независимо друг от друга.

$$\Sigma M_A = 0; -Q \cdot 1 + R_B \cdot 3 - M + T \cdot 5 = 0,$$

откуда

$$R_B = (1/3)(Q + M - P \cdot 5) = (1/3)(3 + 4 - 2 \cdot 5) = -1 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3 + Q \cdot 2 - M + T \cdot 2 = 0, \\ R_A = (1/3)(Q \cdot 2 - M + P \cdot 2) = (1/3)(3 \cdot 2 - 4 + 2 \cdot 2) = 2 \text{ кН}.\end{aligned}$$

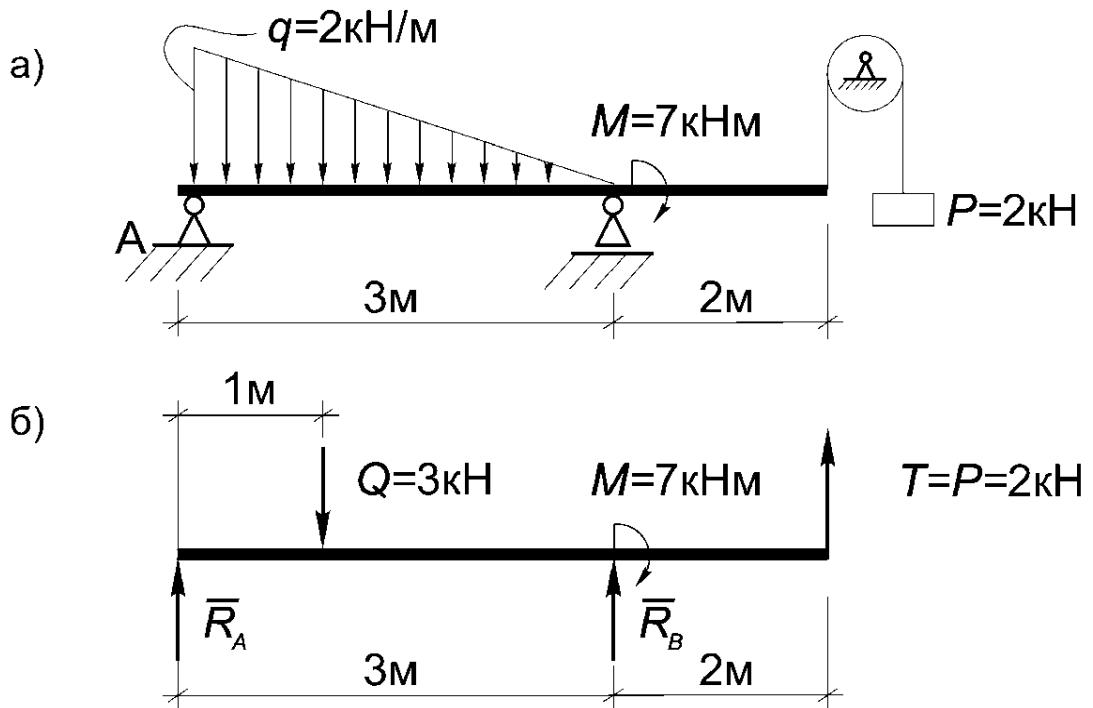


Рис. 5.3

Чтобы проверить правильность полученного решения, воспользуемся уравнением из системы (4.6):

$\sum Y_i = R_A - Q + R_B + T = 2 - 3 - 1 + 2 = 0$,
то есть, задача решена правильно. •

Пример 5.2. Найти опорные реакции консольной балки, загруженной распределенной нагрузкой (Рис.5.4а).

Решение. Равнодействующая распределенной нагрузки приложена в центре тяжести грузовой эпюры. Чтобы не искать положение центра тяжести трапеции, представим ее в виде суммы двух треугольников. Тогда заданная нагрузка будет эквивалентна двум силам: $Q_1 = (1/2) \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ кН}$ и $Q_2 = (1/2) \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ кН}$, которые приложены в центре тяжести каждого из треугольников (Рис.5.4б).

Опорные реакции жесткого защемления представлены силой R_A и моментом M_A , для определения которых удобнее использовать уравнения равновесия системы параллельных сил в первой форме, то есть (4.6):

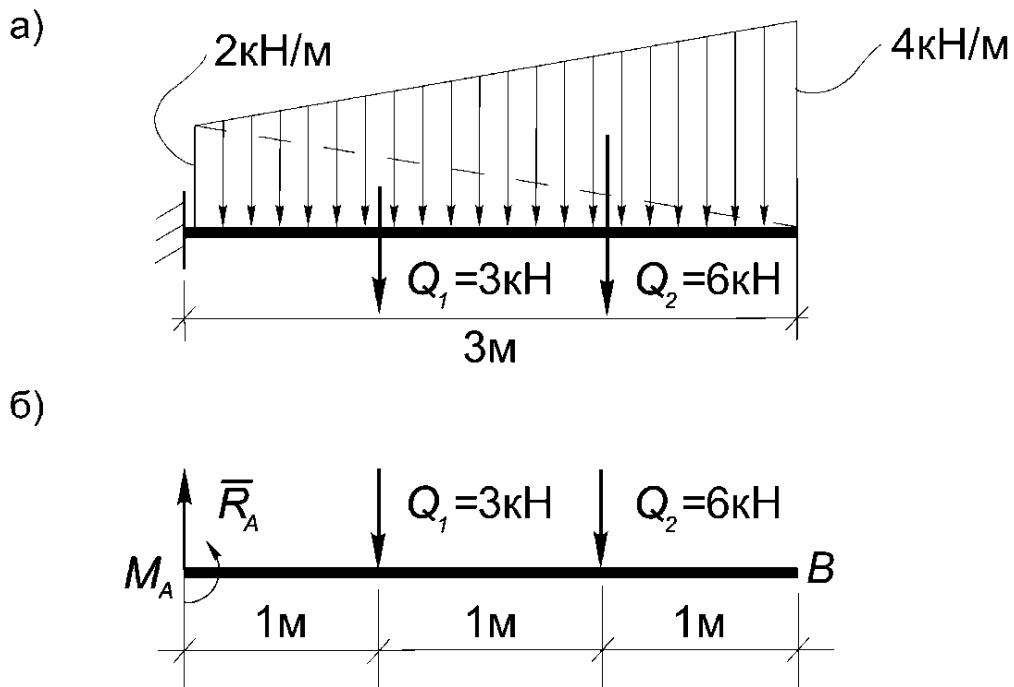


Рис. 5.4

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0; \quad &\Rightarrow \quad M_A = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ \Sigma Y = 0, \quad &\Rightarrow \quad R_A = 9 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для проверки воспользуемся уравнением $\Sigma M_B = 0$, где точка B находится на правом конце балки:

$$\Sigma M_B = M_A - R_A \cdot 3 + Q_1 \cdot 2 + Q_2 \cdot 1 = 15 - 27 + 6 + 6 = 0.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Наряду с термином «жесткое защемление» в литературе для обозначения этого типа связи применяется термин «жесткая заделка».

5.2. Произвольная плоская система сил

Переходя к рассмотрению примеров определения опорных реакций для систем, загруженных произвольной плоской системой сил, отметим, что решение поставленной задачи можно заметно упростить, если из предложенных форм уравнений равновесия (4.3) – (4.5) выбрать оптимальные и наметить рациональный путь их решения.

Поясним, что это означает. В общем случае матрица системы алгебраических уравнений является сплошь заполненной и имеет вид (а):

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{array} \quad (a) \quad \begin{array}{ccc} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{ccc} \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{array} \quad (v) \quad (5.1)$$

где знаком « \times » обозначены коэффициенты, отличные от нуля. Решение такой системы уравнений представляет наибольшие трудности.

Гораздо привлекательнее *матрица треугольного вида*, структура которой представлена на схеме (б). Она позволяет найти из первого уравнения первое неизвестное, затем, подставив его во второе уравнение, найти второе неизвестное и так далее.

Идеальной является представленная на схеме (в) *диагональная матрица*, при которой система распадается на отдельные уравнения, и неизвестные определяются независимо одно от другого.

Умение решать задачи и предполагает навыки составления системы уравнений с «хорошей» структурой – как приведенные на схемах (б) и (в).

В связи с этим может возникнуть вопрос, какую из предложенных форм уравнений равновесия (4.3) – (4.5) выбрать для этого?

Для того чтобы ответить на него, надо помнить, что:

1) это зависит от конкретной задачи;

2) в любой из форм уравнений равновесия присутствует моментное уравнение;

3) при составлении моментного уравнения в качестве моментной целесообразно выбирать точку, где пересекаются линии действия двух неизвестных опорных реакций из трех – в этом случае они не войдут в уравнение, и оно будет содержать только одно неизвестное;

4) если две неизвестных опорных реакции из трех параллельны, то при составлении уравнения в проекциях на ось последнюю следует направить так, чтобы она была перпендикулярна к двум первым реакциям – в этом случае уравнение будет содержать только последнее неизвестное;

5) при решении задачи систему координат надо выбирать так, чтобы ее оси были ориентированы так же, как большинство приложенных к телу сил системы.

Пример 5.3. Однородная балка весом $Q = 600$ Н и длиной $l = 4$ м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B на столб высотой $h = 3$ м, образуя с вертикалью угол 30° . В таком положении балка удерживается веревкой, протянутой по полу. Определить натяжение веревки T и реакции столба – R_B и пола – R_A (Рис.5.5а).

Решение. Под балкой или стержнем в ТМ понимают тело, у которого поперечными размерами в сравнении с его длиной можно пренебречь. Таким образом, вес Q однородной балки приложен в точке C , где $AC = 2$ м.

1) Поскольку две неизвестных реакции из трех приложены в точке A , первым следует составить уравнение $\Sigma M_A = 0$, так как туда войдет только

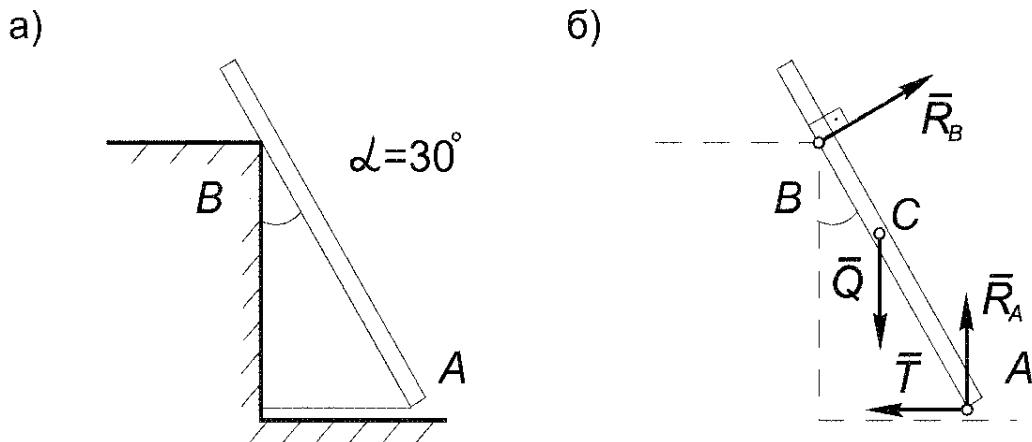


Рис. 5.5

реакция R_B :

$$- R_B \cdot AB + Q \cdot (l/2) \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

где $AB = h / \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ м. Подставляя в уравнение, получим:

$$R_B \cdot 2\sqrt{3} = 600 \cdot 2 \cdot (1/2) = 600,$$

откуда

$$R_B = 600 / (2\sqrt{3}) = 100\sqrt{3} \approx 173 \text{ Н.}$$

Аналогично из моментного уравнения можно было бы найти и реакцию R_A , выбрав в качестве моментной точку, где пересекаются линии действия R_B и T . Другими словами, в этой задаче можно прийти к системе уравнений, матрица которых имеет структуру (5.1в). Однако это потребует дополнительных построений, поэтому проще воспользоваться первой формой уравнений равновесия, то есть уравнениями (4.3) со структурой (5.1б):

$$2) \sum X = 0; R_B \cdot \cos 30^\circ - T = 0; \Rightarrow T = R_B \cdot \cos 30^\circ = 100\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2) = 150 \text{ Н};$$

$$3) \sum Y = 0, R_B \cdot \sin 30^\circ - Q + R_A = 0; \Rightarrow$$

$$R_A = Q - R_B \cdot \sin 30^\circ = 600 - 50\sqrt{3} \approx 513 \text{ Н.}$$

Таким образом, мы нашли T и R_A через R_B , поэтому проверить правильность полученного решения можно с помощью уравнения: $\sum M_B = 0$, куда в явном или неявном виде войдут все найденные реакции:

$$\begin{aligned} R_A \cdot AB \sin 30^\circ - T \cdot AB \cos 30^\circ - Q \cdot (AB - l/2) \cdot \sin 30^\circ &= 513 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (1/2) - \\ &- 150 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}/2) - 600 \cdot (2\sqrt{3} - 2) \cdot (1/2) = 513 \cdot \sqrt{3} - 150 \cdot 3 - 600 \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx \\ &\approx 513 \cdot 1,73 - 450 - 600 \cdot 0,73 = 887,5 - 888 = -0,5. \end{aligned}$$

Полученная в результате округления *невязка* $\Delta = -0,5$ называется *абсолютной погрешностью вычисления*.

Для того чтобы ответить на вопрос насколько точным является полученный результат, вычисляют *относительную погрешность*, которая определяется

по формуле:

$$\varepsilon = [\Delta / \min(|\Sigma^+|, |\Sigma^-|)] \cdot 100\% = \\ = [-0,5 / \min(|887,5|, |-888|)] \cdot 100\% = (0,5/887,5) \cdot 100\% = 0,06\%. •$$

Пример 5.4. Определить опорные реакции рамы (Рис.5.6). Здесь и в дальнейшем, если не оговорено специально, все размеры на рисунках будем считать указанными в метрах, а силы – в килонаютонах.

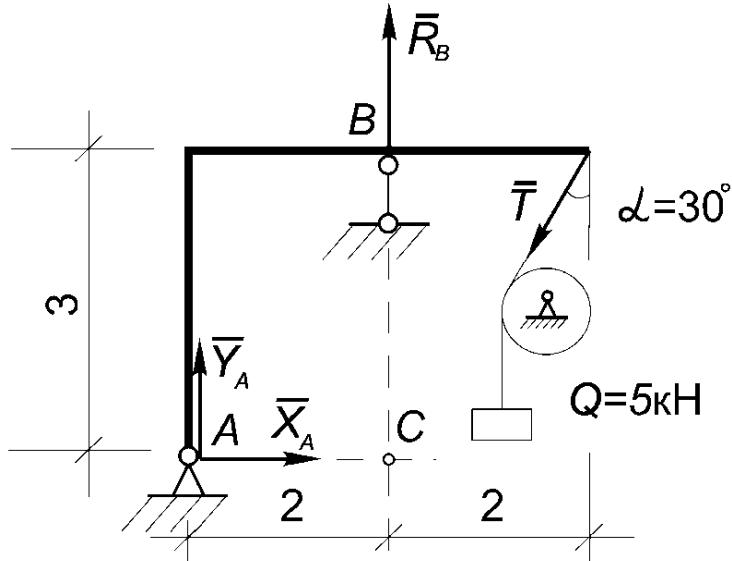


Рис. 5.6

Решение. Рассмотрим равновесие рамы, к которой в качестве активной приложена сила натяжения нити T , равная весу груза Q .

1) Реакцию подвижной опоры R_B найдем из уравнения $\sum M_A = 0$. Чтобы при этом не вычислять плечо силы T , воспользуемся теоремой Вариньона, разложив эту силу на горизонтальную и вертикальную составляющие:

$$R_B \cdot 2 + T \sin 30^\circ \cdot 3 - T \cos 30^\circ \cdot 4 = 0; \Rightarrow \\ R_B = (1/2) \cdot Q (\cos 30^\circ \cdot 4 - \sin 30^\circ \cdot 3) = (5/4) \cdot (4\sqrt{3} - 3) \text{ кН.}$$

2) Для вычисления Y_A составим уравнение $\sum M_C = 0$, где точка C лежит на пересечении линий действия реакций R_B и X_A :

$$-Y_A \cdot 2 + T \sin 30^\circ \cdot 3 - T \cos 30^\circ \cdot 2 = 0; \Rightarrow \\ Y_A = (1/2) \cdot Q (\sin 30^\circ \cdot 3 - \cos 30^\circ \cdot 2) = (5/4) \cdot (3 - 2\sqrt{3}) \text{ кН.}$$

3) Наконец, находим реакцию X_A :

$$\sum X = 0; X_A - T \sin 30^\circ = 0; \Rightarrow X_A = Q \sin 30^\circ = 5/2 \text{ кН.}$$

Поскольку все три реакции были найдены независимо друг от друга, для проверки нужно взять уравнение, в которое входит каждая из них:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D = X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 4 - R_B \cdot 2 &= 15/2 - 5 \cdot (3 - 2\sqrt{3}) - (5/2) \cdot (4\sqrt{3} - 3) = \\&= 15/2 - 15 + 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 15/2 = 0.\end{aligned}\bullet$$

Пример 5.5. Определить опорные реакции стержня, имеющего ломаное очертание (Рис.5.7а).

Решение. Заменяем распределенную нагрузку на каждом участке стержня сосредоточенными силами $Q_1 = 5$ кН и $Q_2 = 3$ кН, а действие отброшенного жесткого защемления – реакциями X_A , Y_A и M_A (Рис.5.7б).

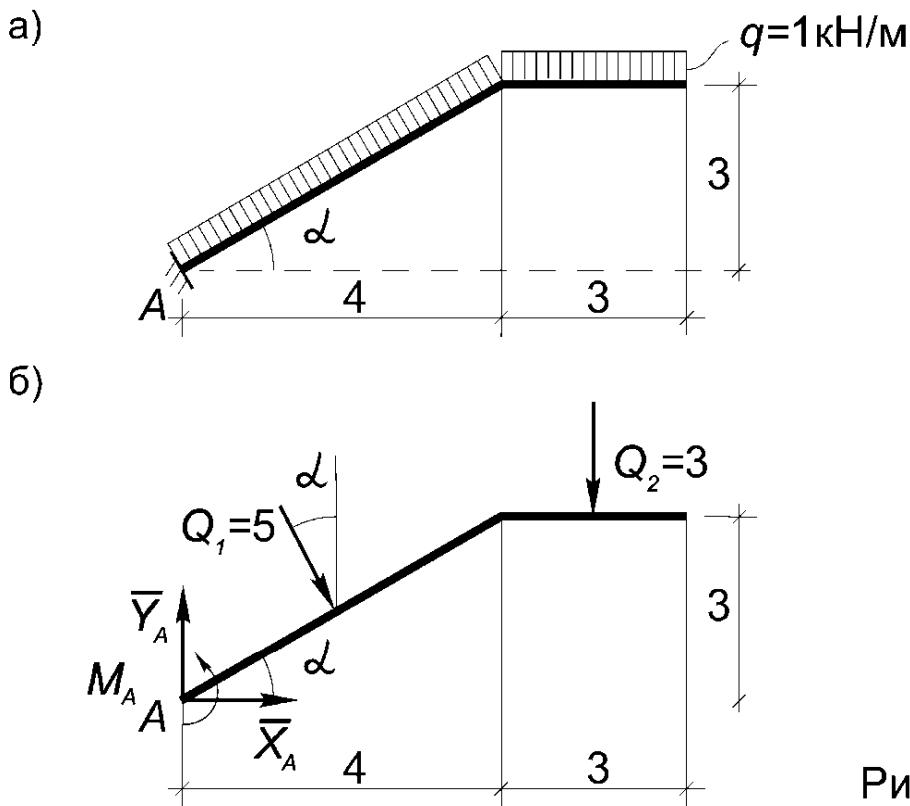


Рис. 5.7

- 1) $\Sigma M_A = 0; M_A - Q_1 \cdot 2,5 - Q_2 \cdot 5,5 = 0; \Rightarrow M_A = 5 \cdot 2,5 + 3 \cdot 5,5 = 12,5 + 16,5 = 29 \text{ кНм}.$
- 2) $\Sigma X = 0; X_A + Q_1 \cdot \sin\alpha = 0; \Rightarrow X_A = -5 \cdot (3/5) = -3 \text{ кН}.$
- 3) $\Sigma Y = 0; Y_A - Q_1 \cos\alpha - Q_2 = 0; \Rightarrow Y_A = 5 \cdot (4/5) + 3 = 4 + 3 = 7 \text{ кН},$
так как $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$.

Проверка: $\Sigma M_B = 0; M_A + X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 7 + Q_1 \cos\alpha \cdot 4,5 + Q_1 \sin\alpha \cdot 1,5 + Q_2 \cdot 1,5 = 29 - 3 \cdot 3 - 7 \cdot 7 + 5 \cdot (4/5) \cdot 5 + 5 \cdot (3/5) \cdot 1,5 + 3 \cdot 1,5 = 29 - 9 - 49 + 20 + 4,5 + 4,5 = 58 - 58 = 0.$

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. При решении задач с большим числом нагрузок – например, при выполнении расчетно-проектировочных работ все вычисления удобнее делать в десятичных дробях. В этом случае все результаты и проверка будут получаться с некоторым приближением, но относительная погрешность независимо от величин определяемых реакций и даже при использовании самых скромных вычислительных средств не должна выходить за пределы 1% (см. пример 5.3).

2. Если проверка не выполняется и не удается найти ошибку, то нужно, во-первых, постараться ее локализовать, то есть выяснить, какие из вычисленных реакций найдены неверно, и воспользоваться для их определения альтернативными уравнениями. Во-вторых, можно воспользоваться следующим приемом, который вытекает из свойств систем линейных алгебраических уравнений: *опорные реакции от заданной нагрузки равны сумме опорных реакций от каждой нагрузки в отдельности.*

5.3. Расчет составных систем

Под составными системами будем понимать конструкции, состоящие из нескольких тел, соединенных друг с другом.

Прежде, чем переходить к рассмотрению особенностей расчета таких систем, введем следующее

Определение. Статически определимыми называются такие задачи и системы статики, для которых число неизвестных реакций связей не превышает максимально допустимого числа уравнений.

Если число неизвестных больше числа уравнений, соответствующие задачи и системы называются статически неопределенными. При этом разность между числом неизвестных и числом уравнений называется степенью статической неопределенности системы.

Поясним это на следующих примерах.

1. Пусть центр невесомого идеального блока, рассмотренного в примере 2.2, удерживается при помощи не двух, а трех стержней: AB , BC и BD и нужно, как и раньше, определить реакции стержней, пренебрегая размерами блока.

С учетом условий задачи мы получим систему сходящихся сил, где для определения трех неизвестных: S_A , S_C и S_D можно составить по-прежнему систему только двух уравнений: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$. Очевидно, поставленная задача и соответствующая ей система будут статически неопределенными.

2. Балка, жестко защемленная на левом конце и имеющая на правом конце шарнирно-неподвижную опору, загружена произвольной плоской системой сил (Рис.5.8).

Для определения опорных реакций можно составить только три уравнения равновесия: (4.3), (4.4) или (4.5), куда войдут 5 неизвестных опорных реакций: X_A , Y_A , M_A , X_B и Y_B . Поставленная задача будет дважды статически неопределенной.

Такую задачу нельзя решить в рамках теоретической механики, предполагая рассматриваемое тело абсолютно твердым.

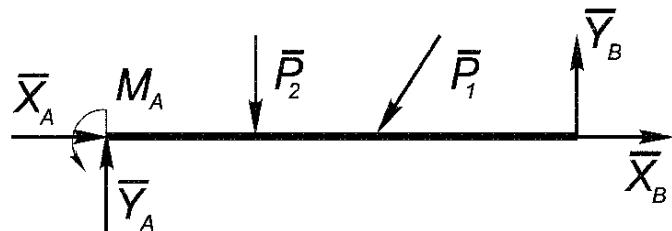
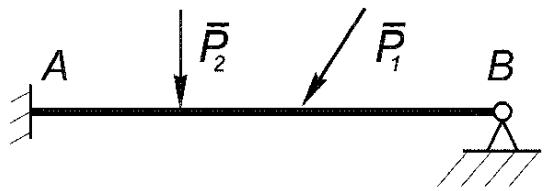


Рис. 5.8

Вернемся к изучению составных систем, типичным представителем которых является трехшарнирная рама (Рис. 5.9а). Она состоит из двух тел: AC и BC , соединенным *ключевым* шарниром C . На примере этой рамы рассмотрим *два способа определения опорных реакций составных систем*.

1 способ. Рассмотрим тело AC , загруженное заданной силой P , отбросив в соответствии с аксиомой 7 все связи и заменив их соответственно реакциями внешних (X_A, Y_A) и внутренних (X_C, Y_C) связей (Рис. 5.9б).

Аналогично можно рассмотреть равновесие тела BC под действием реакций опоры B – (X_B, Y_B) и реакций в соединительном шарнире C – (X_C', Y_C'), где в соответствии с аксиомой 5: $X_C = X_C', Y_C = Y_C'$.

Для каждого из этих тел можно составить три уравнения равновесия, таким образом, общее число неизвестных: $X_A, Y_A, X_C = X_C', Y_C = Y_C', X_B, Y_B$ равняется суммарному числу уравнений, и задача является статически определимой.

Напомним, что по условию задачи требовалось определить только 4 опорные реакции, нам же пришлось проделать дополнительную работу, определяя реакции в соединительном шарнире. В этом и заключается недостаток данного способа определения опорных реакций.

2 способ. Рассмотрим равновесие всей рамы ABC , отбросив только внешние связи и заменив их неизвестными опорными реакциями X_A, Y_A, X_B, Y_B .

Полученная система состоит из двух тел и не является абсолютно твердым телом, поскольку расстояние между точками A и B может изменяться вследствие взаимного поворота обеих частей относительно шарнира C .

Тем не менее можно считать, что совокупность сил, приложенных к раме ABC образует систему, если воспользоваться аксиомой отвердевания (Рис.5.9в).

Итак, для тела ABC можно составить три уравнения равновесия. Например:

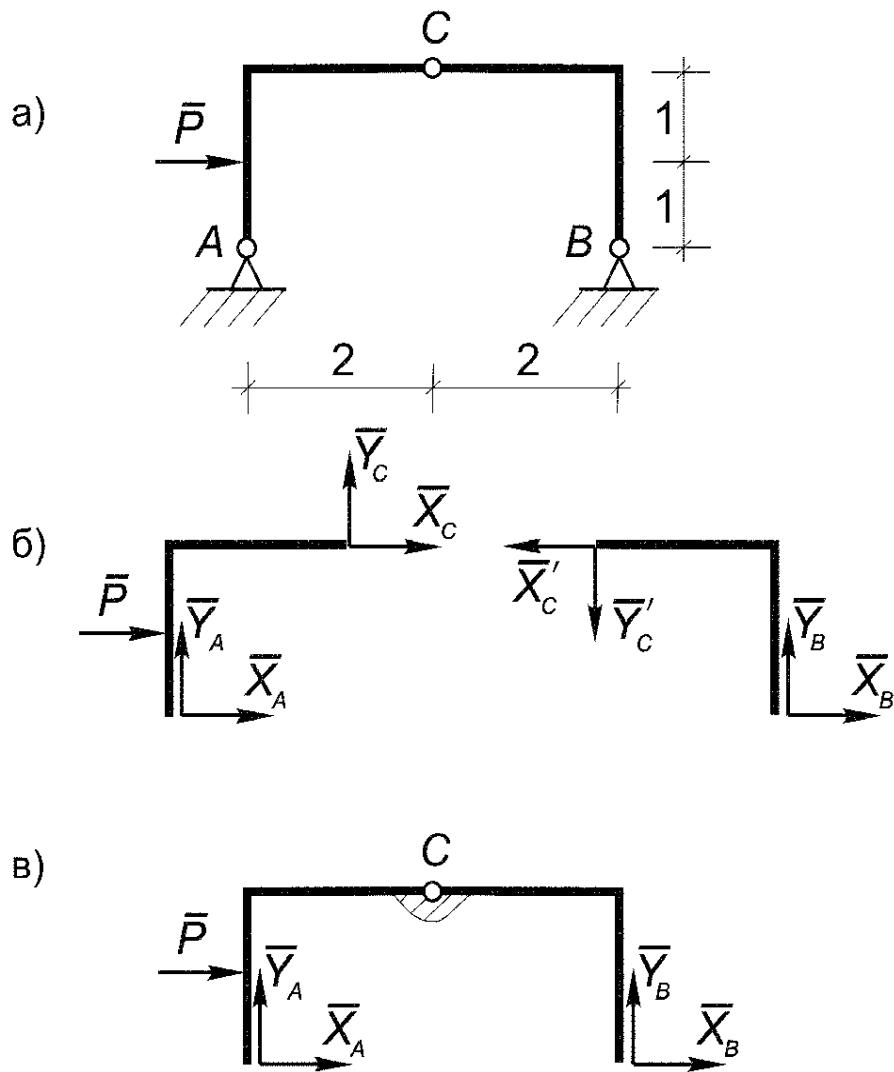


Рис. 5.9

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0; \\ \Sigma X &= 0; \\ \Sigma Y &= 0.\end{aligned}\tag{5.2}$$

В эти три уравнения войдут 4 неизвестных опорных реакции X_A , Y_A , X_B и Y_B . Отметим, что попытка использовать в качестве недостающего уравнения, например такое: $\Sigma M_B = 0$ к успеху не приведет, поскольку это уравнение будет линейно зависимым с предыдущими. Для получения линейно независимого четвертого уравнения необходимо рассмотреть равновесие другого тела. В качестве него можно взять одну из частей рамы, например – BC . При этом нужно составить такое уравнение, которое содержало бы «старые» неизвестные X_A , Y_A , X_B , Y_B и не содержало новых. Например, уравнение: $\Sigma X^{(BC)} = 0$ или подробнее: $-X_C' + X_B = 0$ для этих целей не подходит, поскольку содержит

«новое» неизвестное X_C' , а вот уравнение $\sum M_C^{(BC)} = 0$ отвечает всем необходимым условиям. Таким образом, искомые опорные реакции можно найти в следующей последовательности:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; & \Rightarrow Y_B &= P/4; \\ \sum M_B &= 0; & \Rightarrow Y_A &= -P/4; \\ \sum M_C^{(BC)} &= 0; & \Rightarrow X_B &= -P/4; \\ \sum X &= 0; & \Rightarrow X_A &= -3P/4.\end{aligned}$$

Для проверки можно использовать уравнение: $\sum M_C^{(AC)} = 0$ или, подробнее: $-Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 2 + P \cdot 1 = P/4 \cdot 2 - 3P/4 \cdot 2 + P \cdot 1 = P/2 - 3P/2 + P = 0$.

Отметим, что в это уравнение входят все 4 найденные опорные реакции: X_A и Y_A – в явной форме, а X_B и Y_B – в неявной, поскольку они были использованы при определении двух первых реакций.

Пример 5.6. Определить опорные реакции рамы (Рис.5.10а).

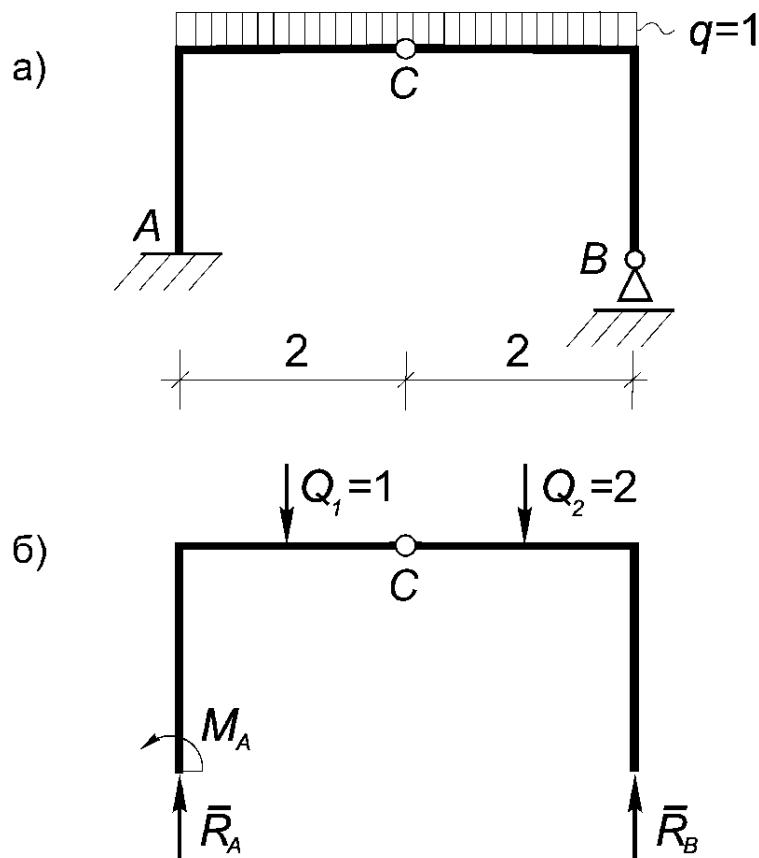


Рис. 5.10

Решение. Как и в предыдущем примере, рама состоит из двух частей, соединенных ключевым шарниром C . Распределенную нагрузку, приложенную

к левой части рамы, заменяем равнодействующей Q_1 , а к правой – равнодействующей Q_2 , где $Q_1 = Q_2 = 2\text{kH}$.

1) Находим реакцию R_B из уравнения $\sum M_C^{(BC)} = 0: \Rightarrow R_B = 1\text{kH}$;

Рассмотрим равновесие всей рамы как абсолютно твердого тела. Поскольку Q_1 , Q_2 и R_B образуют систему параллельных сил, реакции в точке A будут представлены вертикально направленной силой R_A и реактивным моментом M_A (Рис.5.10б), поэтому дальнейшее решение этой задачи не отличается от рассмотренной в примере 5.2:

2) $\sum M_A = 0; \Rightarrow M_A = 4\text{kNm}$;

3) $\sum Y = 0; \Rightarrow R_A = 3\text{kH}$.

Проверка:

$$\sum M_C^{(AC)} = M_A - R_A \cdot 2 + Q_1 \cdot 1 = 4 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 - 6 = 0.$$

•

Пример 5.7. Определить опорные реакции рамы (Рис.5.11а).

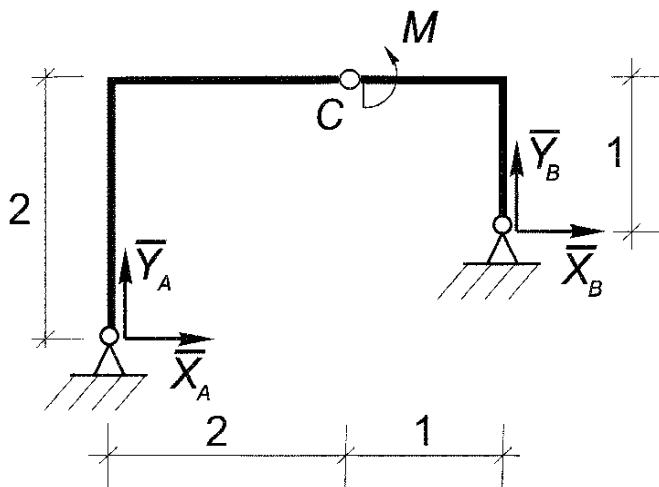


Рис. 5.11

Решение. В отличие от двух предыдущих примеров формальное определение опорных реакций в этой задаче требует совместного рассмотрения системы уравнений:

$$\sum M_A = 0; M + Y_B \cdot 3 - X_B \cdot 1 = 0;$$

$$\sum M_C^{(CB)} = 0; M + Y_B \cdot 1 + X_B \cdot 1 = 0.$$

Ее решением будет: $X_B = -M/2$; $Y_B = -M/2$.

Рассматривая затем равновесие всей рамы в целом, получим:

$$\sum X = 0; X_A + X_B = 0; \Rightarrow X_A = M/2;$$

$$\sum Y = 0; Y_A + Y_B = 0; \Rightarrow Y_A = M/2.$$

Проверка. $\sum M_C^{(AC)} = X_A \cdot 1 - Y_A \cdot 3 + M = M/2 - M/2 + M = 0.$

•

Пример 5.8. Определить реакции в опорах и в соединительном шарнире трехшарнирной арки (Рис.5.12а).

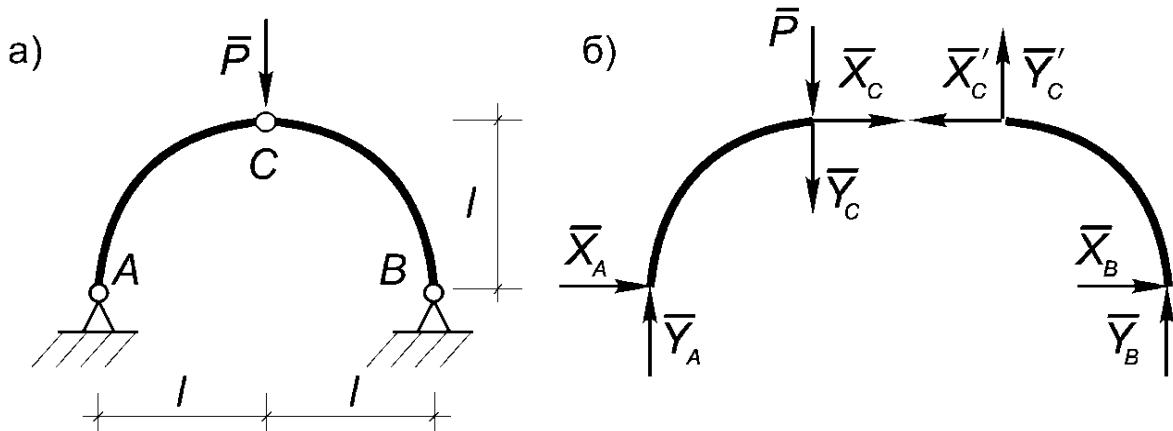


Рис. 5.12

Решение. Опорные реакции находим так же, как для рамы на рис. (5.9):

- 1) $\sum M_A = 0; \Rightarrow Y_B = P/2;$
- 2) $\sum M_C^{(CB)} = 0; \Rightarrow X_B = -P/2;$
- 3) $\sum M_B = 0; \Rightarrow Y_A = P/2;$
- 4) $\sum X = 0; \Rightarrow X_A = P/2.$

Для определения реакций в соединительном шарнире нужно рассмотреть равновесие одной из частей рамы. При этом результат будет зависеть от того, к какой части считать приложенной силу P . Например, считая эту силу приложенной к телу AC , получим из условий равновесия левой части (Рис.5.12б):

$$\begin{aligned} \sum X^{(AC)} &= 0; & \Rightarrow X_C &= -P/2; \\ \sum Y^{(AC)} &= 0; & \Rightarrow Y_C &= -P/2. \end{aligned}$$

А если считать силу P поделенной поровну между левой и правой частями рамы, то Y_C будет равняться нулю. В общем случае эту силу можно поделить в любом соотношении между частями рамы, но в сумме с реакцией Y_C она всегда будет равняться $-P/2$. •

5.4. Графическое определение опорных реакций

Во многих случаях решение задач можно упростить, если вместо уравнений равновесия или в дополнение к ним непосредственно использовать условия равновесия, аксиомы и теоремы статики. Соответствующий подход и получил название графического определения опорных реакций.

Прежде чем перейти к рассмотрению графического метода отметим, что, как и для системы сходящихся сил, графически можно решить только те задачи, которые допускают аналитическое решение. При этом графический метод определения опорных реакций удобен при небольшом числе нагрузок.

Итак, графический метод определения опорных реакций основан главным образом на использовании:

- аксиомы 2 (о равновесии системы двух сил);
- аксиомы 5 (о действии и противодействии);
- теоремы о трех силах;
- условия равновесия плоской системы сил.

При графическом определении реакций составных систем рекомендуется следующая *последовательность рассмотрения*:

- выбрать тело с минимальным числом алгебраических неизвестных реакций связей;
- если таких тел два или больше, то начать решение с рассмотрения тела, к которому приложено меньшее число сил;
- если таких тел два или больше, то выбрать тело, для которого большее число сил известно по направлению.

Пример 5.7. Определить графически опорные реакции рамы, изображенной на рис.5.9.

Решение. Система состоит из двух тел, имеющих равное число алгебраических неизвестных: 4 – для AC (X_A, Y_A, X_C, Y_C) и 4 – для BC ($X_B, Y_B, X_{C'}, Y_{C'}$), но на тело AC действуют три силы (\bar{P}, R_A, R_C), а на BC – только две ($R_B, R_{C'}$), поэтому начинаем решение с рассмотрения тела BC .

Согласно второй аксиоме R_B и $R_{C'}$ действуют вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, то есть по прямой BC .

Рассмотрим равновесие всей рамы ABC как твердого тела. На нее действует уравновешенная система трех непараллельных сил, которая в силу теоремы о трех силах должна быть сходящейся, поэтому реакция R_A должна проходить через точку K , где пересекаются линии действия R_B и $R_{C'}$ (Рис.5.13а).

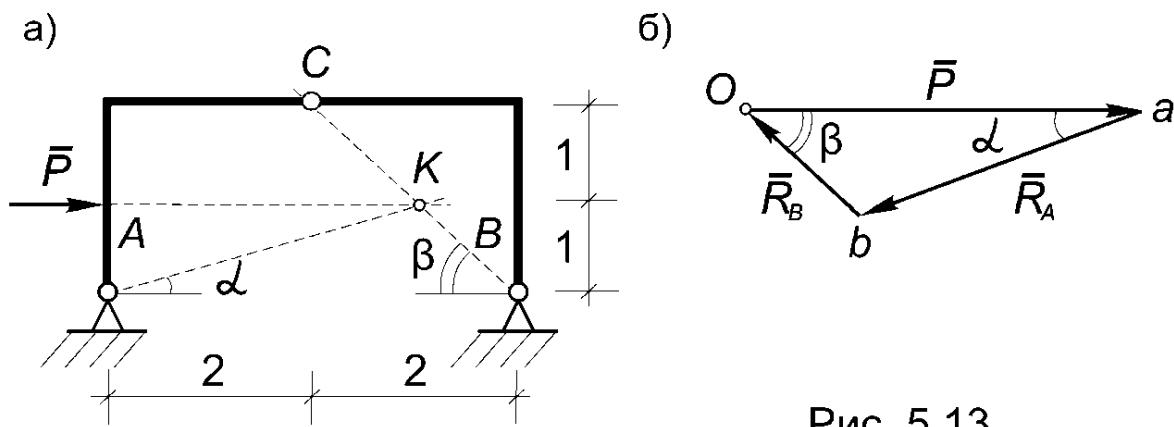


Рис. 5.13

Строим силовой треугольник, проводя через начало и конец вектора P прямые, параллельные направлениям R_A и R_B до их пересечения (Рис.5.13б).

Из подобия силового треугольника Oab и треугольника BAC на чертеже находим искомые реакции:

$$R_B/P = (\sqrt{2})/4; \Rightarrow R_B = (\sqrt{2})/4; X_B = -(R_B \sqrt{2})/2 = -P/4; Y_B = P/4.$$

$$|X_A|/P = 3/4; X_A = -(3/4)P; Y_A = -P/4. \bullet$$

Пример 5.8. Определить графически опорные реакции рамы, показанной на рис. 5.11.

Решение. Как и в предыдущем примере, начинаем рассмотрение с части, на которую действуют только две силы, и по аксиоме 2 определяем линию действия R_A (Рис.5.14).

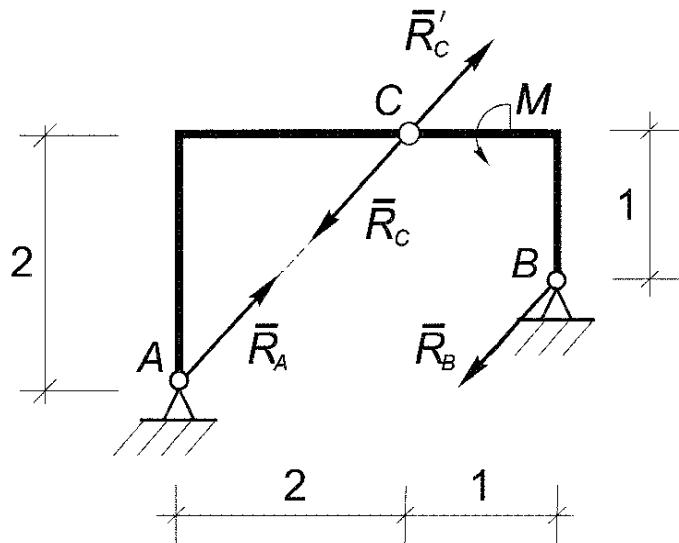


Рис. 5.14

Рассматривая равновесие рамы в целом, приходим к заключению, что опорные реакции R_A и R_B должны составить пару, которая уравновесит приложенный к раме момент. Отсюда следует, что $R_A = R_B = M/\sqrt{2}$, при этом

$$X_A = Y_A = R_A(\sqrt{2}/2) = M/2; X_B = Y_B = -M/2. \bullet$$

ГЛАВА 6. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

6.1. Момент силы относительно точки и оси

Рассмотрим тело, закрепленное на оси вращения (Рис.6.1), к которому в некоторой внутренней точке A приложена сила P . Для того чтобы выяснить, чем определяется вращательное действие этой силы, поступим следующим образом.

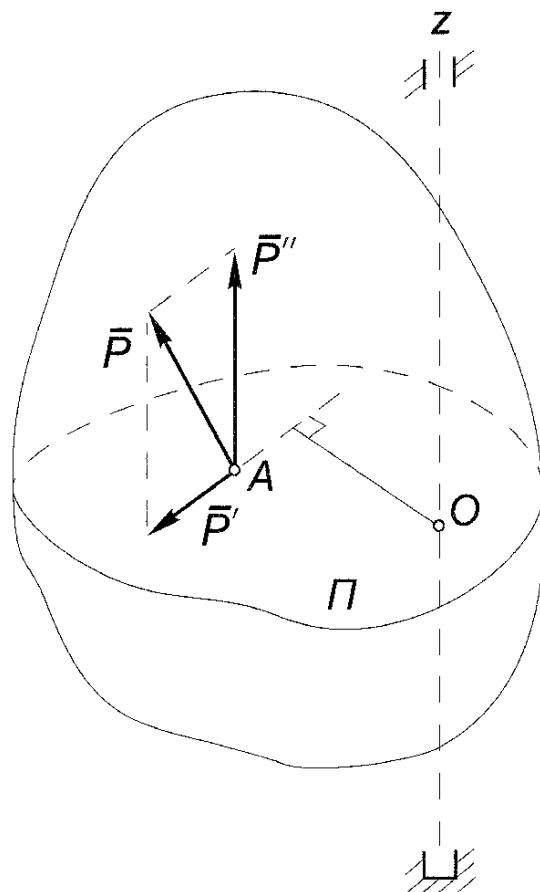


Рис. 6.1

Проведем через точку A плоскость Π , перпендикулярную к этой оси и пересекающую эту плоскость в точке O и разложим силу P по правилу параллелограмма на две составляющие P' и P'' , где $P'' \parallel Oz$, а $P' \perp Oz$ и $P' \in \Pi$.

Очевидно, что сила P'' стремится лишь переместить тело вдоль этой оси, а вращательное действие силы P целиком определяется ее составляющей P' , которая представляет собой *проекцию силы P на плоскость Π* .

Отметим, что проекция силы на плоскость является вектором в отличие от проекции силы на ось.

Теперь можно сформулировать следующее

Определение. Чтобы вычислить момент силы P относительно некоторой оси Oz нужно спроектировать силу P на плоскость, перпендикулярную к этой оси, а затем вычислить момент этой проекции относительно точки пересечения плоскости с осью.

Правило знаков. Момент силы P относительно оси считается положительным, если выполняется правило правого винта, то есть смотря навстречу этой оси, мы видим вращение проекцией P' плоскости Π происходящим против хода часовой стрелки.

Отметим, что момент силы P относительно оси будет равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или проходит через эту ось.

Теперь выясним, как связаны моменты силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку.

Теорема. Проекция вектор-момента силы относительно точки на ось, проходящую через нее, равна моменту силы относительно этой оси.

Для доказательства рассмотрим вектор-момент силы $\bar{P} = AB$, приложенной в точке с радиус-вектором OA (Рис.6.2).

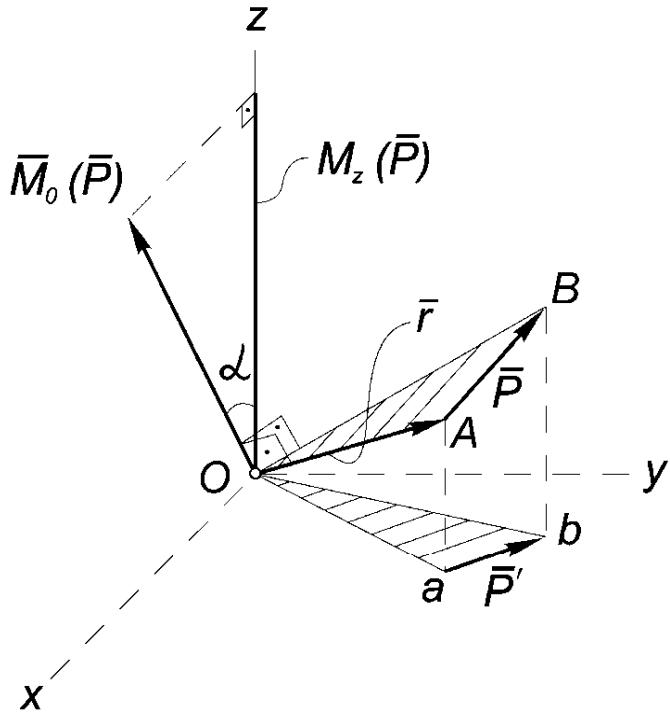


Рис. 6.2

Напомним, что по определению модуль этого вектор-момента равен удвоенной площади треугольника OAB , поэтому его проекция на ось Oz равна:

$$M_{0z}(P) = |M_0| \cdot \cos \alpha = 2 S \Delta_{OAB} \cdot \cos \alpha = \pm 2 S \Delta_{Oab} = M_O(P') = M_z(P),$$

где α – угол между вектором M_0 и ортом оси Oz . Теорема доказана.

Таким образом, вектор-момент силы можно представить в виде:

$$\mathbf{M}_\theta = M_x \cdot \mathbf{i} + M_y \cdot \mathbf{j} + M_z \cdot \mathbf{k} .$$

6.2. Приведение пространственной системы сил

Для пространственной системы сил, как и для плоской, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Произвольную пространственную систему сил можно заменить одной силой \mathbf{R}_θ - главным вектором системы, приложенным в центре приведения и равным геометрической сумме всех сил системы, и главным моментом системы \mathbf{M}_θ , равным геометрической сумме вектор-моментов всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Доказательство этой теоремы не отличается от соответствующего доказательства для плоской системы сил, приведенного в § 4.2.

При этом главный вектор пространственной системы сил: $\mathbf{R}_\theta = \sum \mathbf{P}_i$ отличается от главного вектора плоской системы сил только наличием третьей компоненты, поэтому его модуль будет равен:

$$R_\theta = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2} . \quad (6.1)$$

Главный момент пространственной системы сил: $\mathbf{M}_\theta = \sum \mathbf{M}_\theta (\mathbf{P}_i)$ – это вектор, модуль которого находится аналогично:

$$M_\theta = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2} , \quad (6.2)$$

где M_x , M_y , M_z – суммы моментов всех сил системы относительно соответствующих осей.

В зависимости от значений главного вектора и главного момента, а также от их взаимного расположения возможны следующие варианты приведения пространственной системы сил:

- 1) $R_\theta = 0, M_\theta = 0$ – система сил находится в равновесии;
- 2) $R_\theta = 0, M_\theta \neq 0$ – система эквивалентна паре сил с моментом, равным главному моменту системы, который в этом случае не зависит от выбора центра приведения;
- 3) $R_\theta \neq 0, M_\theta = 0$ – система эквивалентна равнодействующей \mathbf{R} , равной и эквивалентной главному вектору системы \mathbf{R}_θ , линия действия которой проходит через центр приведения: $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\theta$, $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}_\theta$;
- 4) $R_\theta \neq 0, M_\theta \neq 0$ и $\mathbf{R}_\theta \perp \mathbf{M}_\theta$ – система эквивалентна равнодействующей \mathbf{R} , равной главному вектору системы \mathbf{R}_θ , ее линия действия проходит на расстоянии $d = |M_\theta| / R_\theta$ от центра приведения.
- 5) $R_\theta \neq 0, M_\theta \neq 0$ и главный вектор \mathbf{R}_θ неперпендикулярен главному моменту \mathbf{M}_θ – система эквивалентна скрещивающимся силам или динаме.

При этом скрещивающимися называются силы, которые непараллельны и не лежат в одной плоскости, а динамой называется система, состоящая из силы и пары сил, плоскость которой перпендикулярна этой силе.

Динамиа, приложенная к твердому телу, стремится вызвать его винтовое движение, которое представляет совокупность вращательного и поступательного движений.

ПРИМЕЧАНИЕ. Для пространственной системы сил, как и для плоской, справедлива следующая

Теорема Вариньона. Момент равнодействующей пространственной системы сил относительно произвольного центра (оси) равен геометрической (алгебраической) сумме моментов всех сил этой системы относительно данного центра (оси).

6.3. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Необходимым и достаточным условием равновесия пространственной системы сил является равенство нулю главного вектора и главного момента системы:

$$\mathbf{R}_\theta = 0; \quad \mathbf{M}_\theta = 0. \quad (6.3)$$

С учетом выражений (6.1) и (6.2) отсюда следуют уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & \sum M_x(P_i) &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & \sum M_y(P_i) &= 0; \\ \sum Z_i &= 0; & \sum M_z(P_i) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таким образом, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из координатных осей, а также суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялись нулю.

В частных случаях системы сходящихся или параллельных сил уравнения (6.4) будут линейно зависимы, и только три уравнения из шести будут линейно независимыми.

Например, уравнения равновесия системы сил, параллельных оси Oz , имеют вид:

$$\sum Z_i = 0; \quad \sum M_x(P_i) = 0; \quad \sum M_y(P_i) = 0. \quad (6.5)$$

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Для произвольной плоской системы сил уравнения равновесия можно было представить в трех различных формах: (4.3), (4.4) или (4.5).

Аналогичное замечание можно сделать и в отношении произвольной пространственной системы сил, для которой помимо (6.4) можно записать еще три других формы уравнений равновесия, которые получаются заменой уравнений в форме проекций на моментные уравнения.

2. Для пространственной системы параллельных сил все обстоит схожим образом: помимо уравнений (6.5) можно записать две других формы уравнений равновесия.

3. Нетрудно доказать, исходя из общей системы уравнений (6.4), что для систем сходящихся сил на плоскости и в пространстве, рассмотренных во второй главе, также возможны формы уравнений равновесия, альтернативные приведенным ранее.

ГЛАВА 7. ПРИВЕДЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

После того как было рассмотрено приведение к центру плоской системы и произвольной пространственной системы сил, мы опять возвращаемся к рассмотрению частного случая системы параллельных сил.

Нетрудно выяснить, с чем это связано, если взглянуть на название следующей – 8 главы.

7.1. Приведение двух параллельных сил

В ходе рассмотрения такой системы сил возможны три следующих случая приведения.

1. Система двух коллинеарных сил. Рассмотрим систему двух параллельных и направленных в одну сторону сил P и Q , приложенных в точках A и B . Будем считать, что силы перпендикулярны к этому отрезку (Рис.7.1а).

Выберем в качестве центра приведения точку C , принадлежащую отрезку AB и удовлетворяющую условию:

$$AC/CB = Q/P. \quad (7.1)$$

Главный вектор системы $R_C = P + Q$ по модулю равен сумме этих сил: $R_C = P + Q$.

Главный момент относительно центра C с учетом (7.1) равен нулю: $M_C = P \cdot AC - Q \cdot CB = 0$.

Таким образом, в результате приведения мы получили: $R_C \neq 0$, $M_C = 0$. Это означает, что главный вектор эквивалентен равнодействующей, проходящей через центр приведения, то есть:

Равнодействующая коллинеарных сил равна по модулю их сумме, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внутренним образом.

Отметим, что положение точки C не изменится, если силы P и Q повернуть на угол α . Точка C , обладающая таким свойством называется *центром параллельных сил*.

2. Система двух антиколлинеарных и не равных по модулю сил. Пусть силы P и Q , приложенные в точках A и B , параллельны, направлены в противоположные стороны и по модулю не равны (Рис.7.1б).

Выберем в качестве центра приведения точку C , удовлетворяющую по-прежнему соотношению (7.1) и лежащую на той же прямой, но за пределами отрезка AB .

Главный вектор этой системы $R_C = P + Q$ по модулю теперь будет равен разности модулей векторов: $R_C = Q - P$.

Главный момент относительно центра C по-прежнему равен нулю: $M_C = P \cdot AC - Q \cdot CB = 0$, поэтому

Равнодействующая антисколлинеарных и не равных по модулю сил равна их разности, направлена в сторону большей силы, а ее линия действия делит отрезок, соединяющий точки их приложения, обратно пропорционально модулям этих сил внешним образом.

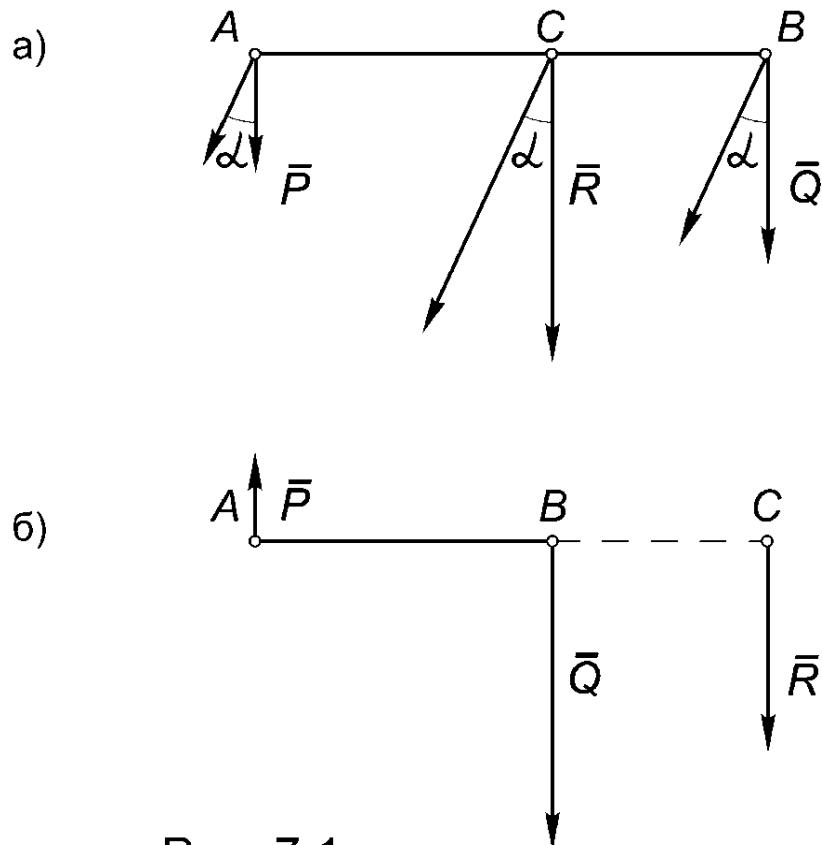


Рис. 7.1

3. Система двух антисколлинеарных и равных по модулю сил.
Возьмем за исходный предыдущий случай приведения. Зафиксируем силу P , а силу Q устремим по модулю к силе P .

Тогда при $Q \rightarrow P$ в формуле (7.1) отношение $AC/CB \rightarrow 1$. Это означает, что $AC \rightarrow CB$, то есть расстояние $AC \rightarrow \infty$.

При этом модуль главного вектора $R_C \rightarrow 0$, а модуль главного момента не зависит от положения центра приведения и остается равным первоначальному значению:

$$M_C = P \cdot AC - Q \cdot CB = P(AC - CB) = P \cdot AB.$$

Итак, в пределе мы получили систему сил, для которой $R_C = 0$, $M_C \neq 0$, а центр приведения удален в бесконечность, которую нельзя заменить равнодействующей. В этой системе нетрудно узнать пару сил, поэтому

Пара сил равнодействующей не имеет.

7.2. Центр системы параллельных сил

Рассмотрим систему n сил \bar{P}_i , приложенных в точках A_i (x_i, y_i, z_i) и параллельных осях Ov с ортом \bar{l} (Рис.7.2).

Если заранее исключить случай системы, эквивалентной паре сил, нетрудно на основании предыдущего параграфа доказать существование ее равнодействующей \bar{R} .

Определим координаты центра C (x_c, y_c, z_c) параллельных сил, то есть координаты точки приложения равнодействующей этой системы.

Воспользуемся с этой целью теоремой Вариньона, на основании которой:

$$\bar{M}_\theta(\bar{R}) = \sum \bar{M}_{\theta i}(\bar{P}_i).$$

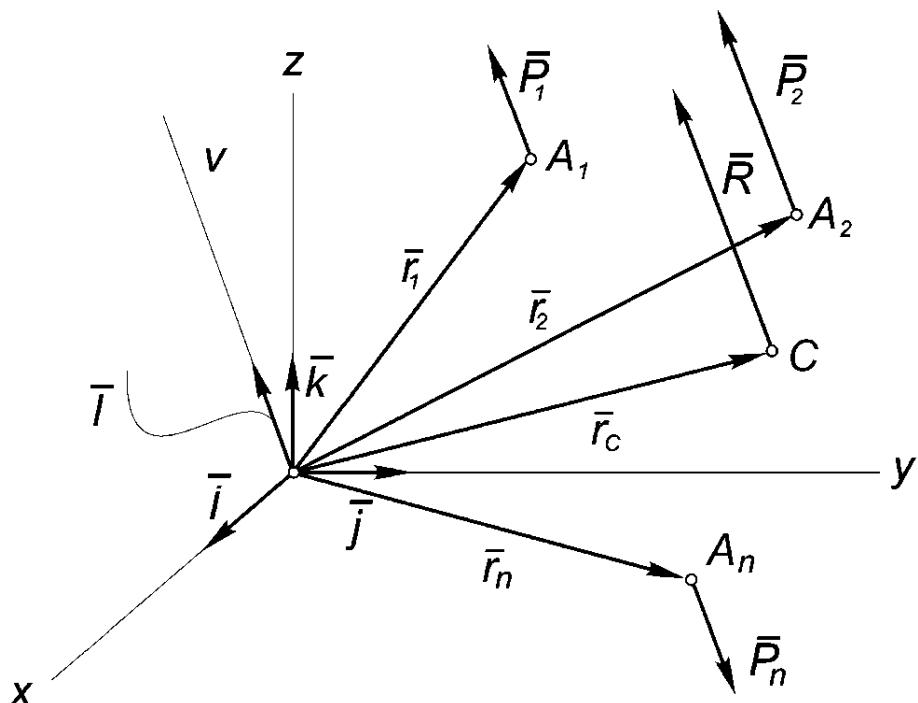


Рис. 7.2

Вектор-момент силы можно представить в виде векторного произведения, поэтому:

$$\bar{M}_\theta(\bar{R}) \stackrel{(3.1)}{=} \bar{r}_c \times \bar{R} = \sum \bar{M}_{\theta i}(\bar{P}_i) = \sum (\bar{r}_i \times \bar{P}_i).$$

Учитывая, что $\bar{R} = R_v \cdot \bar{l}$, а $\bar{P}_i = P_{vi} \cdot \bar{l}$ и воспользовавшись свойствами векторного произведения, получим:

$$\bar{r}_c \times R_v \cdot \bar{l} = \sum (\bar{r}_i \times P_{vi} \cdot \bar{l}),$$

$$\bar{r}_c R_v \times \bar{l} = \sum (\bar{r}_i P_{vi} \times \bar{l}) = \sum (\bar{r}_i P_{vi}) \times \bar{l},$$

или:

$$[\mathbf{r}_c R_v - \sum (\mathbf{r}_i P_{vi})] \times \mathbf{l} = 0.$$

Последнее выражение справедливо только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю. Поэтому, опуская индекс v и учитывая, что равнодействующая $R = \sum P_i$, отсюда получим:

$$\mathbf{r}_c = (\sum P_i \mathbf{r}_i) / (\sum P_i).$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси координат, получим искомое выражение координат центра параллельных сил:

$$\begin{aligned} x_c &= (\sum P_i x_i) / (\sum P_i); \\ y_c &= (\sum P_i y_i) / (\sum P_i); \\ z_c &= (\sum P_i z_i) / (\sum P_i). \end{aligned} \tag{7.2}$$

ГЛАВА 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. Центр тяжести однородного тела

Рассмотрим твердое тело весом P и объемом V в системе координат $Oxyz$, где оси x и y связаны с поверхностью земли, а ось z направлена в зенит.

Если разбить тело на элементарные части объемом ΔV_i , то на каждую его часть будет действовать сила притяжения ΔP_i , направленная к центру Земли.

Предположим, что размеры тела значительно меньше размеров Земли, тогда систему сил, приложенных к элементарным частям тела можно считать не сходящейся, а параллельной (Рис.8.1), и к ней применимы все выводы предыдущей главы.

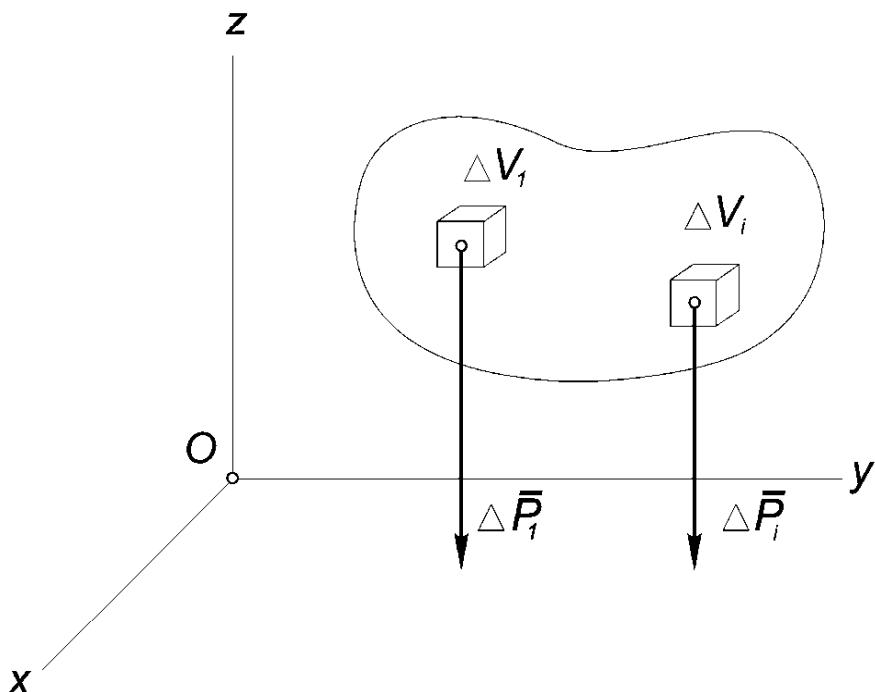


Рис. 8.1

Определение. Центром тяжести твердого тела называется центр параллельных сил тяжести элементарных частей этого тела.

Напомним, что удельным весом элементарной части тела называется отношение ее веса ΔP_i к объему ΔV_i : $\gamma_i = \Delta P_i / \Delta V_i$. Для однородного тела эта величина является постоянной: $\gamma_i = \gamma = P/V$.

Подставляя в (7.2) $\Delta P_i = \gamma_i \cdot \Delta V_i$ вместо P_i , учитывая последнее замечание и сокращая числитель и знаменатель на γ , получим выражения координат центра тяжести однородного тела:

$$\begin{aligned}x_c &= (\sum \Delta V_i x_i) / (\sum \Delta V_i); \\y_c &= (\sum \Delta V_i y_i) / (\sum \Delta V_i); \\z_c &= (\sum \Delta V_i z_i) / (\sum \Delta V_i).\end{aligned}\quad (8.1)$$

Рассмотрим частные случаи последних формул. Пусть тело имеет вид тонкой пластиинки площадью F и толщиной t , лежащей в плоскости Oxy . Подставляя в (8.1) $\Delta V_i = t \cdot \Delta F_i$, получим координаты центра тяжести однородной пластиинки:

$$\begin{aligned}x_c &= (\sum \Delta F_i x_i) / (\sum \Delta F_i); \\y_c &= (\sum \Delta F_i y_i) / (\sum \Delta F_i).\end{aligned}\quad (8.2)$$

Для тела в виде тонкого криволинейного стержня длиной L с площадью поперечного сечения a элементарный объем $\Delta V_i = a \cdot \Delta L_i$, поэтому координаты центра тяжести тонкого криволинейного стержня будут равны:

$$\begin{aligned}x_c &= (\sum \Delta L_i x_i) / (\sum \Delta L_i); \\y_c &= (\sum \Delta L_i y_i) / (\sum \Delta L_i); \\z_c &= (\sum \Delta L_i z_i) / (\sum \Delta L_i).\end{aligned}\quad (8.3)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. В этом разделе курса мы не делаем разницы между силой притяжения, силой тяжести и весом тела. В действительности сила тяжести представляет собой разность между силой притяжения Земли и центробежной силой, вызванной ее вращением.

8.2. Методы определения положения центра тяжести

Рассмотрим практические методы определения положения центра тяжести, основанные на применении формул (8.1) – (8.3).

1. Метод интегрирования. Переходя в указанных выражениях к пределу при $\Delta V_i \rightarrow 0$, а числе элементарных объемов $n \rightarrow \infty$, получим формулы, которые имеют не только механическую, но и математическую интерпретацию:

Координаты центра тяжести *объема*:

$$x_c = \frac{1}{V} \int_V x dV; \quad y_c = \frac{1}{V} \int_V y dV; \quad z_c = \frac{1}{V} \int_V z dV. \quad (8.1')$$

Координаты центра тяжести *площади*:

$$x_c = \frac{1}{F} \int_F x dF; \quad y_c = \frac{1}{F} \int_F y dF. \quad (8.2')$$

Координаты центра тяжести *пространственной кривой*:

$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dL; \quad y_c = \frac{1}{L} \int_L y dL; \quad z_c = \frac{1}{L} \int_L z dL. \quad (8.3')$$

2. Учет симметрии. Из последних формул следует, что(8.2)

Если тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести расположен соответственно: в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии.

3. Метод разбиения. Рассмотрим суть этого метода на примере плоской фигуры. Тело сложной формы представляют комбинацией простых фигур, у которых площади и положения центров тяжести известны.

Например, пластинку, ограниченную ломаной линией, удобно разбить на треугольники, для каждого из которых нетрудно найти площадь – F_i и положение центра тяжести – $C_i(x_i, y_i)$. После этого положение центра тяжести заданной пластиинки можно найти по формулам:

$$\begin{aligned} x_c &= (\sum F_i x_i) / (\sum F_i); \\ y_c &= (\sum F_i y_i) / (\sum F_i), \end{aligned} \quad (8.4)$$

которые отличаются от формул (8.2) только тем, что соответствуют разбиению пластиинки не на элементарные – ΔF_i , а на конечные площади – F_i .

4. Метод отрицательных площадей. Также рассмотрим на примере плоской фигуры.

Тело в виде пластиинки с вырезом представляют комбинацией сплошной пластиинки (без выреза) с площадью F_1 и площади вырезанной части F_2 .

Положение центра тяжести такой пластиинки определится по формулам:

$$\begin{aligned} x_c &= (F_1 x_1 - F_2 x_2) / (F_1 - F_2); \\ y_c &= (F_1 y_1 - F_2 y_2) / (F_1 - F_2), \end{aligned}$$

где $C_1(x_1, y_1)$ – центр тяжести сплошной пластиинки без выреза, а $C_2(x_2, y_2)$ – центр тяжести вырезанной части.

5. Метод группировки. Является хорошим дополнением двух последних методов. После разбиения фигуры на составные элементы часть их бывает удобно объединить вновь, чтобы затем упростить решение путем учета симметрии этой группы. Поясним на следующем примере.

Пример 8.1. Определить положение центра тяжести фермы, все стержни которой имеют одинаковую погонную плотность (Рис.8.2).

Напомним, что в физике плотность тела ρ и его удельный вес γ связаны соотношением: $\gamma = \rho g$, где g – ускорение свободного падения. Чтобы найти массу такого однородного тела, нужно плотность умножить на его объем.

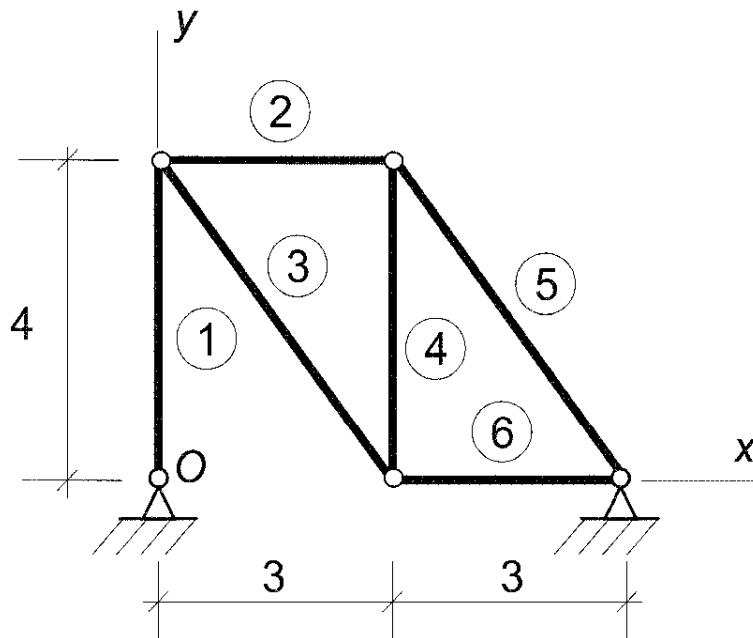


Рис. 8.2

Термин «линейная» или «погонная» плотность означает, что для определения массы стержня фермы нужно погонную плотность умножить на длину этого стержня.

Для решения задачи можно воспользоваться методом разбиения. Представив заданную ферму в виде суммы 6 отдельных стержней, получим:

$$x_c = \left(\sum_{i=1}^{i=6} L_i x_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{i=6} L_i \right); y_c = \left(\sum_{i=1}^{i=6} L_i y_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{i=6} L_i \right),$$

где – L_i длина i -го стержня фермы, а x_i, y_i – координаты его центра тяжести.

Решение этой задачи можно упростить, если сгруппировать 5 последних стержней фермы. Нетрудно видеть, что они образуют фигуру, имеющую центр симметрии, расположенный посередине четвертого стержня, где и находится центр тяжести этой группы стержней.

Таким образом, заданную ферму можно представить комбинацией всего двух групп стержней.

Первая группа состоит из первого стержня, для нее $L_1 = 4$ м, $x_1 = 0$ м, $y_1 = 2$ м. Вторая группа стержней состоит из пяти стержней, для нее $L_2 = 20$ м, $x_2 = 3$ м, $y_2 = 2$ м.

Координаты центра тяжести фермы находим по формуле:

$$x_c = (L_1 x_1 + L_2 x_2) / (L_1 + L_2) = (4 \cdot 0 + 20 \cdot 3) / 24 = 5/2 \text{ м};$$

$$y_c = (L_1 y_1 + L_2 y_2) / (L_1 + L_2) = (4 \cdot 2 + 20 \cdot 2) / 24 = 2 \text{ м}.$$

Отметим, что центр C лежит на прямой, соединяющей C_1 и C_2 и делит отрезок $C_1 C_2$ в отношении: $C_1 C / C C_2 = (x_c - x_1) / (x_2 - x_c) = L_2 / L_1 = 2,5 / 0,5$. •

8.3. Центры тяжести простейших фигур

1. Центр тяжести треугольника. Рассмотрим треугольник, лежащий в плоскости Oxy , координаты вершин которого известны: $A_i(x_i, y_i)$, ($i = 1, 2, 3$) .

Разбивая треугольник на узкие полоски, параллельные стороне $A_1 A_2$, придем к выводу, что центр тяжести треугольника должен принадлежать медиане $A_3 M_3$ (Рис.8.3).

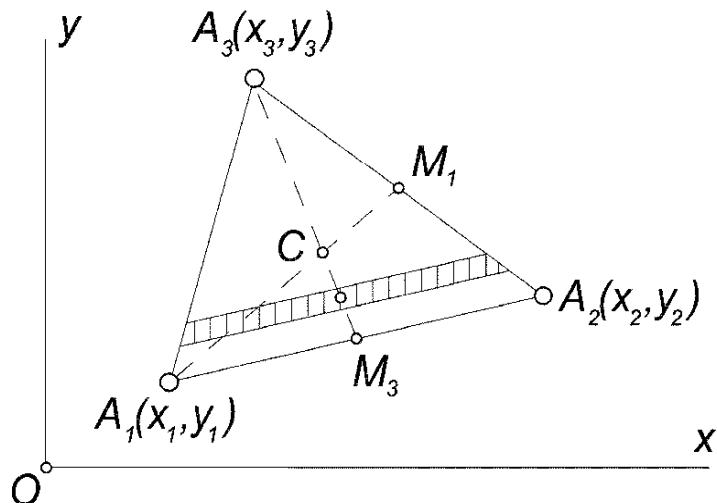


Рис. 8.3

Разбивая треугольник на полоски, параллельные стороне $A_2 A_3$, можно убедиться, что он должен лежать на медиане $A_1 M_1$. Таким образом, *центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан*, которая, как известно, отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.

В частности, для медианы $A_1 M_1$ получим, учитывая, что координаты точки M_1 – это среднее арифметическое координат вершин A_2 и A_3 :

$$x_c = x_1 + (2/3) \cdot (x_{M1} - x_1) = x_1 + (2/3) \cdot [(x_2 + x_3) / 2 - x_1] = (x_1 + x_2 + x_3) / 3.$$

Таким образом, координаты центра тяжести треугольника представляют собой среднее арифметическое из координат его вершин:

$$x_c = (1/3) \sum x_i; \quad y_c = (1/3) \sum y_i.$$

2. Центр тяжести кругового сектора. Рассмотрим сектор круга радиуса R с центральным углом 2α , расположенный симметрично относительно оси Ox (Рис.8.4) .

Очевидно, что $y_c = 0$, а расстояние от центра круга, из которого вырезан этот сектор, до его центра тяжести можно определить по формуле (8.2'):

$$x_c = \frac{1}{F} \int_F x dF. \quad (8.5)$$

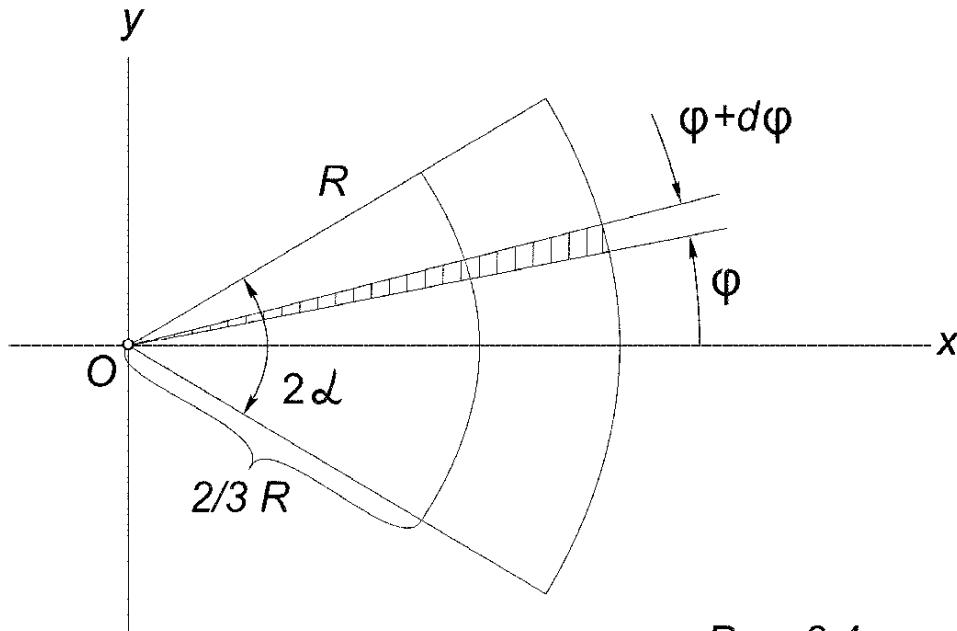


Рис. 8.4

Проще всего этот интеграл вычислить, разбивая область интегрирования на элементарные секторы с углом $d\varphi$. С точностью до бесконечно малых первого порядка такой сектор можно заменить треугольником с основанием, равным $R \cdot d\varphi$ и высотой R . Площадь такого треугольника $dF = (1/2) R^2 \cdot d\varphi$, а его центр тяжести находится на расстоянии $2/3 R$ от вершины, поэтому в (8.5) положим $x = (2/3)R \cdot \cos\varphi$. Подставляя в (8.5) $F = \alpha R^2$, получим:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{\alpha R^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R \cos\varphi \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \frac{R}{3\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = \left. \frac{R \sin\varphi}{3\alpha} \right|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{R}{3\alpha} [\sin\alpha - \sin(-\alpha)] = \\ &= \frac{2R \sin\alpha}{3\alpha}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

С помощью последней формулы вычислим, в частности, расстояние до центра тяжести *полукруга*.

Подставляя в (8.6) $\alpha = \pi/2$, получим: $x_c = (4R)/(3\pi) \approx 0,4 R$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Куликов И.С., Трянина Н.Ю.** Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.С. Куликов, Н.Ю. Трянина. – Н.Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2002. – 84с.
- 2. Мещерский И.В.** Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
- 3. Сб. заданий для курсовых работ по теоретической механике:** Учебное пособие / Под ред. А.А.Яблонского. – М. Высш. школа, 1985 – 367 с.
- 4. Тарг С.М..** Краткий курс теоретической механики. Учебник для вузов/ С.М.Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 478 с.
- 5. Теоретическая механика.** Статика: учебное пособие / Е.Е. Антонов, Г.В.Аржаева, В.В. Родионов. Н.Новгород, ННГАСУ, 1998. – 91с.
- 6. Яблонский А.А., Никифорова В.М.** Курс теоретической механики. ч. I. Статика. Кинематика. Учебник. Изд. 4-е, перераб. и посл. издания./ А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1971. – 424 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие.....	3
Глава 1. Введение.....	4
1.1. Предмет механики и ее задачи.....	4
1.2. Предмет теоретической механики.....	5
1.3. Основные понятия статики.....	6
1.4. Аксиомы статики.....	7
1.5. Простейшие типы связей.....	10
Глава 2. Система сходящихся сил.....	14
2.1. Определение и теорема о трех силах.....	14
2.2. Графическое определение равнодействующей.....	15
2.3. Аналитическое задание силы.....	16
2.4. Аналитическое определение равнодействующей.....	18
2.5. Условия и уравнения равновесия системы сходящихся сил.....	18
2.6. Решение задач.....	19
Глава 3. Теория пар сил.....	23
3.1. Момент силы относительно центра.....	23
3.2. Пара сил и ее свойства.....	25
3.3. Теоремы об эквивалентности пар.....	26
3.4. Сложение пар сил.....	30
3.5. Равновесие систем пар.....	32
Глава 4. Приведение плоской системы сил.....	34
4.1. Лемма Пуансо.....	34
4.2. Теорема о приведении плоской системы сил.....	35
4.3. Частные случаи приведения плоской системы сил.....	36
4.4. Уравновешенная система сил.....	37
Глава 5. Определение опорных реакций плоских стержневых систем.....	40
5.1. Система параллельных сил.....	40
5.2. Произвольная плоская система сил.....	43
5.3. Расчет составных систем.....	48
5.4. Графическое определение опорных реакций.....	53
Глава 6. Пространственная система сил	56
6.1. Момент силы относительно точки и оси.....	56
6.2. Приведение пространственной системы сил.....	58
6.3. Уравнения равновесия пространственной системы сил.....	59
Глава 7. Приведение параллельных сил	61
7.1. Приведение двух параллельных сил.....	61
7.2. Центр системы параллельных сил.....	63
Глава 8. Центр тяжести твердого тела	65
8.1. Центр тяжести однородного тела.....	65
8.2. Методы определения положения центра тяжести	66
8.3. Центры тяжести простейших фигур.....	69
Литература.....	71