ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СТАТИКА

Методические указания по проведению практических занятий и выполнению расчетно-графической работы

Представленные методические указания по проведению практических занятий и выполнению расчетно-графического задания по теме «Статика» могут использоваться следующим образом: при непосредственное проведение практических занятий по указанной теме в качестве сборника задач, а также использоваться как справочник и руководство при подготовке к контрольным работам (в том числе и выполнению расчётно-графической работы), практическим занятиям, зачёту, тестированию «ФЭПО».

В содержательном плане представленные методические указания ориентированы на перечень тем, указанных в рабочей программе специальности, а также перечень дидактических единиц, которые содержатся в тестовых материалах «ФЭПО».

Методические указания содержит необходимый теоретический минимум (определения, теоремы), примеры решения задач, набор задач по каждому разделу из сборников задач известных авторов: И. В. Мещерский, О.Э. Кепе.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовки данных методических указаний автор учитывал следующие два документа: перечень дидактических единиц ГОС в тестовых материалах по механике «ФЭПО» для горных специальностей и рабочую программу специальности 130400.65 «Горное дело».

Согласно тестам «ФЭПО» в раздел (дидактическую единицу) «Статика» входят следующие 4 темы: реакции опор (направление); равновесие тел с учетом сил трения (тормоз); наименьший главный момент системы сил; координаты центра тяжести пластины.

Рабочая программа специальности указывает несколько больший список тем: классификация сил и систем сил; аксиомы статики; основные виды связей и их реакции; трение скольжение и качения; равнодействующая системы сходящихся сил; момент силы относительно центра; пара сил; момент силы относительно оси; условия равновесия системы сходящихся сил; теорема о параллельном переносе силы; приведение системы сил к произвольному центру; условия равновесия произвольных плоской и пространственной систем сил; расчет фермы. Можно отметить, что указанные темы являются как бы расшифровкой краткого перечня тем из списка дидактических единиц. На изложение тем, указанных в рабочей программе, отводится 6 часов. Понятно, что в этом случае лекционное изложение материала будет максимально сжатым, лаконичным и ориентированным на изложение только основных формул и примеров. На практических же занятиях возможно решение только основных, базовых задач

Представленные методические указания являются сборником коротких задач, дополненным минимально необходимой теорией, призванным помочь студентам в подготовке к лекциям, практическим занятиям; решению расчетно-графической работы; контрольным, зачёту, подготовке к тестированию «ФЭПО». В качестве центрального примера разобрано задание из расчётно-графической работы Д15 на тему «Равновесие произвольной плоской системы сил»

СТАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного положения материальных точек в пространстве.

Механическое взаимодействие – это такой вид взаимодействия материальных тел, который стремится изменить характер их механического движения.

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояния между любыми точками которого не меняется с течением времени.

В рамках теоретической механики исследуются механические движения и взаимодействия абсолютно твердых тел.

Опр. 1. Сила – это мера механического взаимодействия тел, которая устанавливает интенсивность и направление этого взаимодействия. Прямая, по которой направлена сила, называется **линией действия** силы.

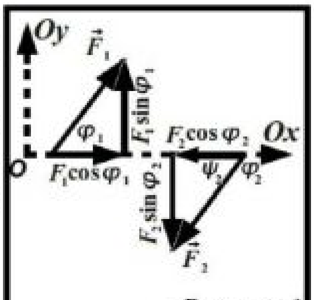
Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением, точкой приложения. Измеряется сила в Ньютонах $[F]=H=кг\cdot м/c^2$.

Замечание 1. Для изображения силы используют математическое понятие **вектор**. Из математики известно, что в пространстве вектор можно представить в виде суммы: $\vec{F}=F^X\cdot\vec{i}+F^Y\cdot\vec{j}+F^Z\cdot\vec{k}=\vec{F}_X+\vec{F}_Y+\vec{F}_Z$, где F^X, F^Y, F^Z – координаты вектора, $\vec{F}_X$, $\vec{F}_Y$, $\vec{F}_Z$ – составляющие вектора $\vec{F}$.

В дальнейшем нам потребуется такое математическое понятие, как проекция вектора на ось координат. Пусть даны вектор $\vec{F}$, и угол φ между вектором $\vec{F}$ и **положительным** направлением одной из осей координат (например, Ox); тогда проекции вектора на координатные оси – это вектора, которые расположены на осях с длинами, которые определяются по формулам (рисунок 1):

(1) $$F^X=F\cdot\cos\varphi,\quad F^Y=F\cdot\sin\varphi,$$

где знак «плюс» у выражений будет означать, что векторы сонаправлены с осями координат, а знак «минус» – что противоположно направлены.



– Рисунок 1

Замечание 2. Если угол $90^0<\varphi<180^0$, то по формулам приведения получим, что $\cos\varphi=\cos(180^0-\psi)=-\cos\psi$. То есть для вычисления проекций можно использовать только острые углы между вектором и одной из осей.

Пример 1. $F_1=4$, $F_2=10$ Н, $\varphi_1=60^0$, $\psi_2=45^0$ (рисунок 1). Найти проекции на координатные оси.

Решение. $F_1^X=F_1\cdot\cos\varphi_1=4\cdot\cos 60^0=4\cdot 0{,}5=2$, $F_1^Y=F_1\cdot\sin\varphi_1=4\cdot 0{,}866=3{,}464$ Н, $F_2^X=-F_2\cdot\cos\psi_2=-10\cdot\cos 45^0=-10\cdot 0{,}707=-7{,}07$, $F_2^Y=-F_2\cdot\sin\psi_2=-7{,}07$ Н.

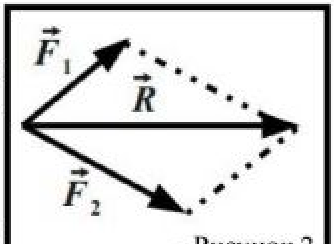
Ответ. $F_1^X=2$, $F_1^Y=3{,}464$, $F_2^X=-7{,}07$, $F_2^Y=-7{,}07$ Н.

Опр. 2. Система сходящихся сил – это совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Опр. 3. Равнодействующая сила – это сила, воздействие которой на тело совпадает с воздействием системы сил на это же тело.

Равнодействующая двух сходящихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ (рисунок 2). При этом модуль (величина) этой силы определяется по формуле:

(2) $$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\varphi},$$



- Рисунок 2.

где R, F_1, F_2 – модули исходных и равнодействующей сил, а направление равнодействующей силы определяется двумя углами, которые определяются по формулам:

(3) $$\sin(\vec R,\vec F_i)=F_j\cdot\sin(\vec F_i,\vec F_j)/R.$$

Опр. 4. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная в противоположную сторону по линии ее действия, называется **уравновешивающей.**

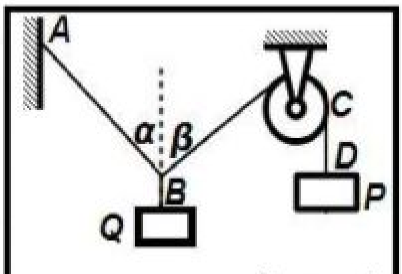
Опр. 5. Равновесие тела – это состояние покоя по отношению к другим телам.

Приведём условия равновесия тела под действием системы сходящихся сил $\vec F_1,...,\vec F_n$:

(4) $$\vec R=\vec F_1+...+\vec F_n=0,\ R^X=F_1^X+...+F_n^X=0,\ R^Y=F_1^Y+...+F_n^Y=0.$$

Пример 2. На тело действует две силы: $F_1=10$ Н и $F_2=20$ Н под углом $\varphi=60^0$ друг к другу. Определить направление и величину силы $\vec R$, которой можно было бы заменить данные две силы (рисунок 2).

Решение. По формуле (2) получим $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cos\varphi}=$ $\sqrt{10^2+20^2+2\cdot10\cdot20\cdot\cos60^0}=\sqrt{100+400+200}=\sqrt{700}\approx26{,}46$ Н. По формуле (3) найдем угол между заданной силой F_1 и равнодействующей: $\sin(\vec R,\vec F_1)=F_2\cdot\sin(\vec F_1,\vec F_2)/R=$ $=20\cdot\sin60^0/26{,}46=20\cdot0{,}866/26{,}46\approx0{,}65\Rightarrow\alpha_1\approx41^0$, второй угол можно вычислить из равенства: $\alpha_1+\alpha_2=\varphi$, откуда $\alpha_2\approx60^0-41^0=19^0$. **Ответ.** $R=26{,}46$ Н.



– Рисунок 3

Пример 3. К верёвке ***AB***, один конец которой закреплён в точке ***A***, привязаны в точке ***B*** груз ***P*** и верёвка ***BCD***, перекинутая через блок; в её конце ***D*** привязана гиря ***Q*** веса 100 ***Н***. Определить натяжение ***T*** верёвки ***AB*** и величину груза ***P***, если конструкция находится в положении равновесия (рисунок 3).

Решение. Рассмотрим стандартную систему координат ***Oxy***. Тогда первое условие равновесия из (4) будет иметь вид: $R^X=T^X+Q^X+P^X=-T\cdot\sin45^0+Q\cdot\sin60^0=0$, откуда можно сразу найти, что $T=\dfrac{Q\cdot\sin60^0}{\sin45^0}=\dfrac{100\cdot0{,}866}{0{,}707}=122{,}489$ Н, второе условие равновесия имеет вид: $R^Y=T^Y+Q^Y+P^Y=T\cdot\cos45^0+Q\cdot\cos60^0-P=0$, откуда, зная ***T*** и ***Q***, можно найти ***P***: $P=T\cdot\cos45^0+Q\cdot\cos60^0=122{,}489\cdot0{,}707+100\cdot0{,}5=136{,}599$ Н.

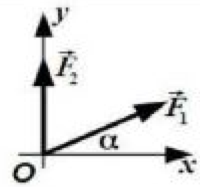
Ответ: $T=122{,}489$, $P=136{,}599$ Н.

Теорема. Если тело находится в равновесии под действием трёх сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

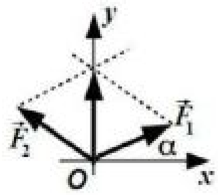
1 (1.1.1).

Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5$ Н, образующих между собой угол $\alpha = 45^0$. **Ответ:** $R = 9{,}24$ Н.



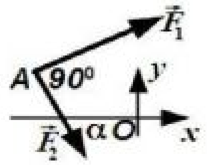
2 (1.1.2)

Определить углы в градусах между равнодействующей двух сил $F_1 = 10$, $F_2 = 8$ Н и осями координат. **Ответ:** с осью ***Ox*** – **56,3⁰**.



3 (1.1.3)

Равнодействующая ***R*** двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 15$ ***Н*** направлена по оси ***Oy*** и равна 10 ***Н***. Определить в градусах углы, образованные векторами сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ с положительным направлением оси ***Ox***. **Ответ:** для силы $\vec{F}_2$ **– 19,5⁰**.

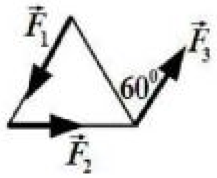


4 (1.1.7)

На твёрдое тело в точке *A* действуют две силы $F_1 = 6$, $F_2 = 3$ Н. Определить сумму проекций этих сил на оси координат ***Ox***, ***Oy***, если $\alpha = 60^0$. **Ответ:** сумма проекций на ось ***Ox*** – 0,402.

5 (1.1.19)

Определить в градусах угол между равнодействующей ***R*** двух сил $\vec{F}_1 = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ и $\vec{F}_2 = 5 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j}$ и положительным направлением осей координат. **Ответ**: угол между ***R*** и осью ***Oy*** равен **41,6⁰**.

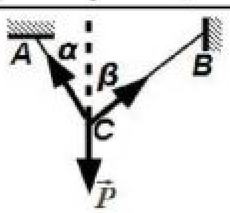


6 (2.2.5)

К вершинам равностороннего треугольника приложены равные силы $F = 1$ Н. Определить модуль векторной суммы этих сил. Ответ: $R = 1{,}00$.

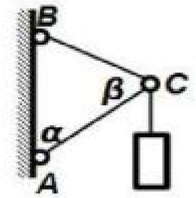
7 (1.2)

Буксир тянет три разные баржи, которые следуют одна за другой. Сила тяги винта буксира равна **18** кН. Сопротивление воды движению различно и равно: для буксира – **6** кН, для первой баржи – **6** кН; для второй баржи – **4** кН; для третьей баржи – **2** кН. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает растягивающую силу в **2** кН. Сколько канатов надо протянуть от буксира к первой баржи, от первой баржи ко второй, от второй к третьей, если движение прямолинейное и равномерное? **Ответ: 6**, **3**, **1** канат.



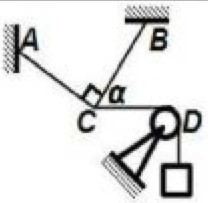
8 (1.2.2)

Определить натяжение ***T*** троса ***BC*** и силу тяжести ***P*** тела, если известно натяжение троса *AC* $Q = 15$ Н и углы $\alpha = 30^0$, $\beta = 75^0$ **Ответ:** $T = 7{,}76$ Н.



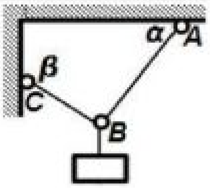
9 (1.2.5)

Шарнирный трёхзвенник $\boldsymbol{ABC}$ удерживает в равновесии груз, подвешенный к болту $\boldsymbol{C}$. Под действием груза стержень $\boldsymbol{AC}$ сжат силой $\boldsymbol{T=25}$ Н. Заданы углы $\boldsymbol{\alpha=60^0}$ $\boldsymbol{\beta=45^0}$. Определить усилие $\boldsymbol{Q}$ в стержне $\boldsymbol{BC}$ и вес груза $\boldsymbol{P}$. **Ответ**: $\boldsymbol{Q=48{,}3}$ Н.



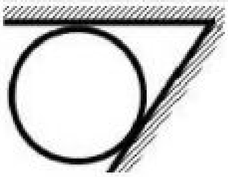
10 (1.2.13)

Два стержня $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ соединены шарниром $\boldsymbol{C}$, к которому через блок подвешен груз весом $\boldsymbol{P=12}$ Н. Определить усилия в стержнях. **Ответ**: усилие в стержне $\boldsymbol{BC}$ $\boldsymbol{T=-6}$ Н.



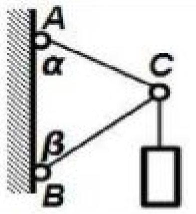
11 (2.10)

Лампа веса **20** Н подвешена к потолку на шнуре $\boldsymbol{AB}$ и затем оттянута к стене верёвкой $\boldsymbol{BC}$. Определить натяжение $\boldsymbol{T}$ шнура $\boldsymbol{AB}$ и натяжение $\boldsymbol{Q}$ верёвки $\boldsymbol{BC}$. **Ответ**: $\boldsymbol{T=14{,}6}$, $\boldsymbol{Q=10{,}4}$ Н.



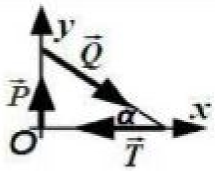
12 (1.2.17)

Однородный шар весом **40** Н опирается на две плоскости, которые пересекаются под углом $\boldsymbol{60^0}$. Определить величины давления шара на эти плоскости. **Ответ**: давление на наклонную поверхность равно **46,2** Н.



13 (2.6)

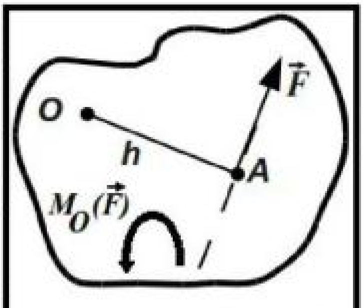
Стержни $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт $\boldsymbol{C}$ действует вертикальная сила $\boldsymbol{P=1000}$. Определить реакции в стержнях. **Ответ:** $\boldsymbol{T=866}$, $\boldsymbol{Q=500}$ Н.



14 (2.2.8)

К вершинам прямоугольного треугольника приложены три силы $\boldsymbol{P=3}$, $\boldsymbol{Q=6}$, $\boldsymbol{T=14}$ Н. Определить значение угла $\boldsymbol{\alpha}$ в градусах, при котором векторная сумма этих сил будет параллельна оси $\boldsymbol{Ox}$. **Ответ:** $\boldsymbol{\alpha=30^0}$.

2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ



- Рисунок 1

Воздействие силы на тело проявляется в двух основных типах движения: поступательном и вращательном. Для количественной характеристики вращательного воздействия силы на твердое тело с учетом направления, в котором сила стремится вращать тело относительно фиксированной точки, вводится понятие **алгебраического момента** силы относительно точки.

Пусть дано твердое тело с фиксированной точкой $\boldsymbol{O}$. К произвольной точке $\boldsymbol{A}$ этого тела приложена некоторая сила

$\vec{F}$, которая стремится повернуть тело по или против часовой стрелки вокруг точки $\boldsymbol{O}$ (рисунок 1).

Опр. 1. **Плечо** $\boldsymbol{h}$ силы $\vec{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O}$ – это кратчайшее расстояние между этой точкой $\boldsymbol{O}$ и линией действия силы $\vec{F}$.

Опр. 2. Алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O}$ – это произведение величины силы на плечо:

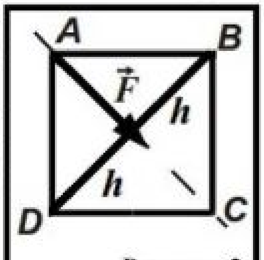
$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h, \tag{1}$$

где знак «плюс» выбирается, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки и «минус» в противном случае.

Замечание 1. Из формулы (1) и качественных соображений следует, что приложенная сила не может повернуть тело вокруг точки, лежащей на линии действия силы.

Пример 1. К вершине A квадратной пластины, длины сторон которой равны 0,2 м, приложена сила $F = 150$ Н. Определить момент этой силы относительно всех вершин пластины (рисунок 2).

Решение. Линия действия силы $\vec{F}$ – диагональ квадрата, поэтому плечи силы $\vec{F}$ относительно этих точек равны нулю и, следовательно, моменты силы $M_A(\vec{F}) = M_C(\vec{F}) = 0$. Моменты силы относительно вершин $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ будут совпадающими по величине и противоположными по знаку, так как при фиксации этих вершин тело под действием приложенной силы будет вращаться в противоположные стороны. Найдем плечо силы $\boldsymbol{h}$, как половину диагонали квадрата: $h = 0{,}5 \cdot \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} \approx 0{,}141$. Тогда $M_B(\vec{F}) = 150 \cdot 0{,}141 = 21{,}15$ и $M_D(\vec{F}) = -150 \cdot 0{,}141 = -21{,}15$.



– Рисунок 2

Ответ. $M_{B,D}(\vec{F}) = \pm 21{,}15$ Н·м.

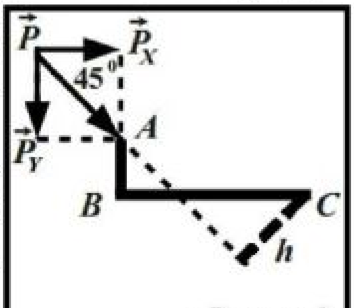
В большинстве прикладных задач вычисление плеча силы относительно выбранной точки представляет собой сложную или не разрешимую геометрическую задачу. В этих случаях применяют очень удобную **теорему Вариньона**:

Теорема 1. Пусть дана система сходящихся сил и известна её равнодействующая. Тогда момент равнодействующей силы относительно точки $\boldsymbol{O}$ равен сумме моментов системы относительно той же точки $\boldsymbol{O}$: $M_O(\vec{R}) = \sum M_O(\vec{F}_k)$.

Пример 2. Пусть дана балка $\boldsymbol{ABC}$, к которой приложена сила $\vec{P}$, при этом $AB = 0{,}5$, $BC = 2$ м, $P = 5$ Н. Вычислить момент $M_C(\vec{P})$ (Рисунок 3).

Решение. При вычисление момента по общей формуле (1) необходимо определить расстояние от точки $\boldsymbol{C}$ до прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$ параллельно вектору $\vec{P}$; это простая задача из аналитической геометрии, однако количество вычислений необходимых для её решения превышает количество вычислений при использовании теоремы Вариньона.

Разложим силу $\vec{P}$ на вертикальную и горизонтальную компоненты $\vec{P}_X$ и $\vec{P}_Y$ так, что образуется равенство $\vec{P} = \vec{P}_X + \vec{P}_Y$ (Рисунок 3). Тогда по теореме 1 получим равенство: $M_C(\vec{P}) = M_C(\vec{P}_X) + M_C(\vec{P}_Y)$. Величины компонент вектора $\vec{P}$ примут значения $P_X = P \cdot \sin 45^0 = 0{,}707 \cdot P$,



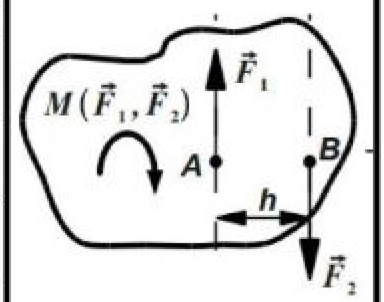
– Рисунок 3

$P_Y = P \cdot \cos 45^0 = 0{,}707 \cdot P$. Вычислим каждый момент $M_C(\vec{P}_X)$ и $M_C(\vec{P}_Y)$ в отдельности: $M_C(\vec{P}_X) = -P_X \cdot AB = -5 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}5 = -1{,}768$,
$M_C(\vec{P}_Y) = P_Y \cdot BC = 5 \cdot 0{,}707 \cdot 2 = 7{,}07$, следовательно, общий момент силы $\vec{P}$ относительно точки C $M_C(\vec{P}) = -1{,}768 + 7{,}07 = 5{,}302$.

Ответ: $M_C(\vec{P}) = 5{,}302$.

Помимо одной силы вращательное воздействие на тело также оказывает особая система сил, которая называется **пара сил**.

Опр. 3. Пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ – это система двух равных по модулю, параллельных и противоположных по направлению сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ (рисунок 4).



– Рисунок 4

По аналогии с алгебраическим моментом силы относительно точки вводится алгебраический момент пары сил.

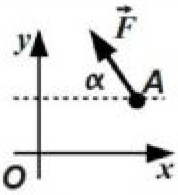
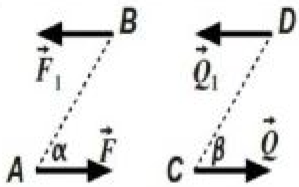
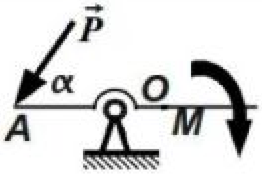
Опр. 4. Плечо ***h*** пары сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – это кратчайшее расстояние между линиями действия этих сил.

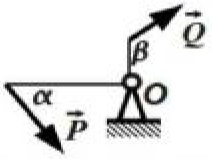
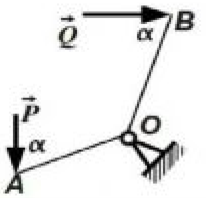
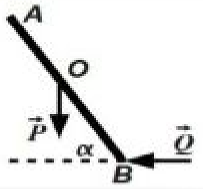
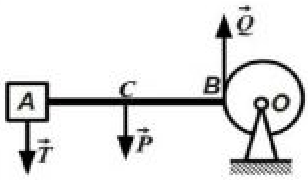
Опр. 5. Алгебраический момент пары сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – это величина, численно равная произведению одной из сил на плечо пары сил:

(2) $$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm F_1 \cdot h,$$

где знак «плюс» выбирается, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки и «минус» в противном случае. На чертежах обозначается полудугой со стрелкой, которая соответствует направлению вращения.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (2.1.3)** Сила $F = 420$ Н приложена в точке A. Определить момент силы относительно точки O, если координаты $x_A = 0{,}2$, $y_A = 0{,}3$ м и $\alpha = 30^0$.
	**2 (2.1.6)** На плиту в её плоскости действуют две пары сил $(\vec{F}; \vec{F}_1)$, $(\vec{Q}; \vec{Q}_1)$. Определить сумму моментов этих пар, если $F = 8$, $Q = 5$ Н, расстояния $AB = 0{,}25$, $CD = 0{,}2$ м. **Ответ**: $M = 0{,}792$
	**3 (2.1.14)** На рычаг с неподвижной осью O действуют пара сил с моментом $M = 3$ Н·м, и сила $\vec{P}$. Определить модуль силы, при которой рычаг находится в равновесии, если $\alpha = 45^0$, $OA = 0{,}3$ м. **Ответ:** $P = 14{,}1$ Н.

	**4 (2.1.11)** На рычаг с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ действуют силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$. Определить модуль силы Q, если $P=4$ Н, $AO=0{,}5$, $BO=0{,}6$ м. **Ответ:** $Q=2{,}72$ Н.
	**5 (2.1.13)** На рычаг с неподвижной осью $\boldsymbol{O}$ действуют силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$. Определить модуль силы Q, если $P=6$ Н, $AO=0{,}3$, $BO=0{,}4$ м, $\alpha=70^0$. **Ответ:** $Q=4{,}5$ Н.
	**6 (2.2.2)** Определить сумму моментов системы двух сил относительно точки A и B, если $P=1$, $Q=5$ Н, $AB=0{,}2$ м, $\alpha=60^0$, $AO=OB$. **Ответ**: $M_A=-0{,}916$ Н·м.
	**7** Дана лебёдка с рычагом AB и барабаном диаметра $d=0{,}25$ м с центром вращения в точке $\boldsymbol{O}$. К рычагу в точке $\boldsymbol{B}$ приложена активная сила $Q=20$ Н. Определить вес T противовеса A, если $AC=CB$, вес рычага $P=1$ Н и $OA=1{,}8$ м. **Ответ**: $T=0{,}89$ Н.

3. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Определять координаты центра тяжести линейных, плоских или объёмных тел необходимо в случае исследования равновесия тяжелых объектов: балок, стержней, ферм. Вычисление координат базируется на следующем положении: на каждую точку тела действует направленная вертикально вниз сила тяжести, в совокупности эти параллельные силы образуют поле сил тяжести с равнодействующей силой (весом тела) $\vec{P}$. Координаты центра тяжести определяются по формулам:

(1) $$x_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot x_k,\quad y_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot y_k,\quad z_C=\frac{1}{P}\sum p_k\cdot z_k,$$

где $\boldsymbol{P}$ – вес тела; p_k – вес каждой точки тела в отдельности; x_k, y_k, z_k – координаты каждой точки тела.

В случае однородного тела его вес оказывается пропорционален мере тела: длине, площади, объёму. Тогда в формулах (1) можно перейти от весового (физического) способа вычисления координат центра тяжести к геометрическому: через длины, площади и объёмы:

(2) $$x_C=\frac{1}{\Omega}\sum \omega_k\cdot x_k,\quad y_C=\frac{1}{\Omega}\sum \omega_k\cdot y_k,\quad z_C=\frac{1}{\Omega}\sum \omega_k\cdot z_k,$$

где $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ – мера тела и его частей.

На практике для вычисления координат цента тяжести используют следующие правила: симметрии, разбиение, дополнение, интегрирование, экспериментальный.

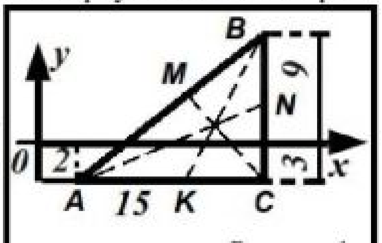
Первое правило: если однородное тело имеет плоскость, ось или точку симметрии, то его центр тяжести расположен именно на них.

Второе правило: если тело можно разбить на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно вычислить по формулам (1).

Третье правило: если тело имеет вырезы и при этом известны положения центров тяжести тела без выреза и отдельно вырезанной части, то можно применить второе правило, при этом мера вырезаемой области берётся со знаком минус.

Четвёртое правило: если тело нельзя разбить на несколько конечных частей с известными координатами цента тяжести, то переходят к бесконечно малым областям и формулы (2) преобразовываются к интегралам.

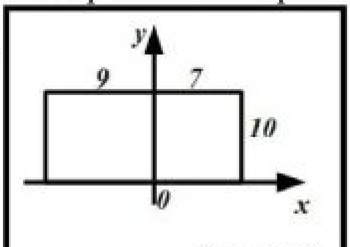
Пример 1. Дана однородная пластина в виде прямоугольного треугольника с вершинами в точках $A(2;-3)$, $B(17;9)$, $C(17;-3)$. Найти координаты центра тяжести D (рисунок 1).



– Рисунок 1

Решение. Центр тяжести треугольника лежит на точке пересечения его медиан. Найдём уравнения двух из них: CM и AN. Координаты точек M и N определятся как середины отрезков AB и BC: $M\left(\frac{2+17}{2};\frac{9-3}{2}\right)=M(9{,}5;3)$, $N\left(17;\frac{9-3}{2}\right)=N(17;3)$. Уравнение прямой AN найдём как уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_A}{x_N-x_A}=\frac{y-y_A}{y_N-y_A}\Rightarrow (x-x_A)\cdot(y_N-y_A)=(y-y_A)\cdot(x_N-x_A)\Rightarrow$ $\Rightarrow(x-2)\cdot 6=(y+3)\cdot 15\Rightarrow 6x-15y=57$. Аналогично получим уравнение прямой CM: $6x+7{,}5y=79{,}5$. Найдём точку пересечения этих прямых, решив систему уравнений: $y_D=1$, $x_D=12$. **Ответ**: $x_D=12$, $y_D=1$.

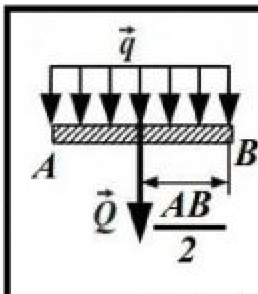
Замечание 1. Можно показать, что для прямоугольного треугольника точка пересечения медиан совпадает с точкой пересечения горизонтальной и вертикальной прямых, которые проходят на расстоянии одной трети катетов, отсчитанного от прямого угла. Тогда для примера 1 получим, что $x_D=17-\frac{15}{3}=12$ и $y_D=-3+\frac{12}{3}=1$.



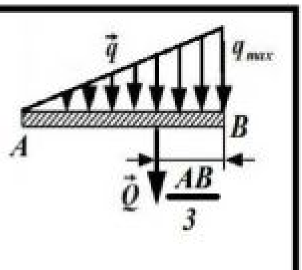
– Рисунок 2

Пример 2. Дана однородная прямоугольная пластинка. Найти её центр тяжести.

Решение. Так как прямоугольник симметричен относительно точки пересечения диагоналей или средних линий сторон, то именно эта точка и будет центром тяжести плоской пластины: $x_C=-9+\frac{16}{2}=-1$, $y_C=\frac{10}{2}=5$.



– Рисунок 3

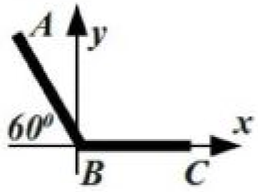


– Рисунок 4

Пример 3. Пусть на отрезке AB дана равномерно распределенная нагрузка $\vec{q}$. Тогда её равнодействующая сила $\vec{Q}$ будет проходить через центр тяжести прямоугольника, то есть через середину отрезка AB и равна $Q=AB\cdot q$ (Рисунок 3).

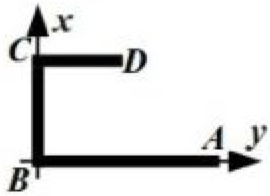
Пример 4. Пусть на отрезке AB действует сила, распределенная по линейному закону от $q=0$ до $q=q_{max}$. Тогда её равнодействующая сила $\vec{Q}$ будет проходить через центр тяжести прямоугольного треугольника, то есть на расстоянии $l=\frac{AB}{3}$ от точки с максимальной нагрузкой и равна $Q=0{,}5\cdot AB\cdot q$ (Рисунок 4).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ



1 (6.1.2)

Кронштейн ABC состоит из однородных стержней AB и BC с одинаковым линейным весом и $BC=0{,}2$ м. Какова должна быть длина стержня AB, чтобы координата x_D центра тяжести всего кронштейна равнялась нулю? Определить координату y_D. **Ответ**: $x_D=0{,}283$.

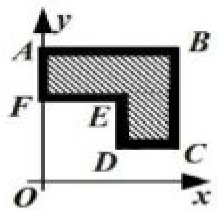


2 (6.1.3)

Определить координаты центра тяжести кронштейна, который состоит из однородных частей: $AB=0{,}2$, $BC=0{,}1$, $CD=0{,}06$ м, имеющих одинаковый линейный вес. Ответ: $y_D=0{,}0606$.

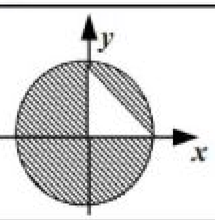
3 (6.2.1)

Определить абсциссу центра тяжести однородной пластины, которая имеет вид прямоугольного треугольника ABC, если $x_A=x_B=0{,}03$, $x_C=0{,}09$ м. **Ответ**: $x_D=0{,}05$.



4 (6.2.5)

Определить координаты центра тяжести фигуры, стороны которой параллельны осям координат, если $AB=1{,}2$, $BC=1{,}1$, $CD=0{,}4$, $DE=0{,}6$, $OA=1{,}6$ м. **Ответ:** $y_C=1{,}19$.



5 (6.2.8)

Определить координаты центра тяжести заштрихованной площади фигуры, если радиус $r=2$ м. **Ответ:** $x=-0{,}126$.

4. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Опр. 1. Свободное тело – это тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении. В противном случае тело называется несвободным.

Опр. 2. Связывающие тело (связь) – это тело, которое ограничивает свободу движения данного твердого тела, делает его несвободным.

Опр. 3. Реакции связи – это силы, которые действуют со стороны связи на несвободное тело в ответ на прикладываемые усилия.

Аксиома связей (принцип освобождения от связей). Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

Замечание 1. Необходимо отметить, что понятия связи, реакции связи являются **механическими моделями** тех реальных весьма сложных межмолекулярных физических процессов, которые происходят в связывающих телах.

Приведем основные типы геометрических связей и их реакций на плоскости:

1. *Нить* (гибкий элемент: трос, цепочка, веревка): трос с грузом для противовеса; реакция состоит из одной силы, которая направлена вдоль нити от груза.

2. *Невесомый стержень* (по сути тоже самое, что и нить, только жесткая и поэтому может располагаться под любым углом, и груз можно как подвесить на стержень, так и опереть на него): люстра, проектор на стержне; реакция также состоит из одной силы, которая направлена вдоль стержня в противоположную сторону от прилагаемой нагрузки.

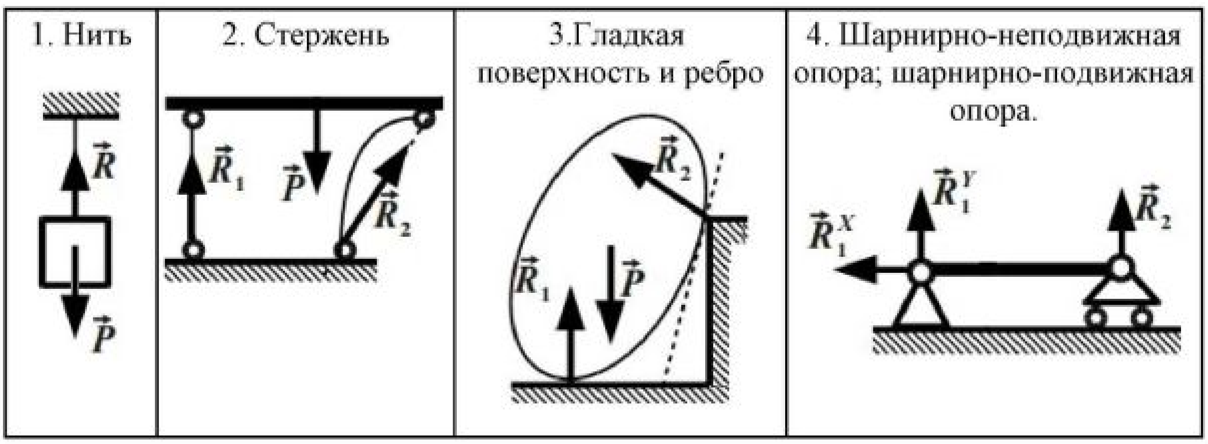
3. *Гладкая поверхность и ребро* (лестница, приставленная к стене); реакция состоит из одной силы, которая направлена перпендикулярно касательной к поверхности или телу в точке соприкосновения тела и поверхности или ребра.

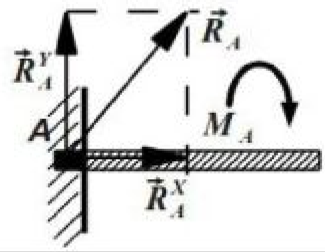
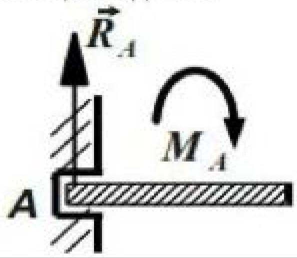
4.1. *Шарнирно-неподвижная опора* (цилиндрический шарнир): крепление, при котором одна деталь может свободно вращаться вокруг другой детали, крепление ножниц; реакция состоит из одной силы, которая может быть направлена в произвольную заранее неизвестную сторону, поэтому её раскладывают на две составляющие: горизонтальную и вертикальную.

4.2. *Шарнирно-подвижная опора* (цилиндрический шарнир, который может перемещаться вдоль прямой): нога в роликовом коньке, роликовая опора моста; реакция состоит из одной силы, которая направлена перпендикулярно поверхности, по которой катится опора.

5. Жёсткая заделка (балконная плита); реакция состоит из совокупности силы и пары сил. Сила может быть направлена в произвольную заранее не известную сторону, поэтому её раскладывают на две составляющие: горизонтальную и вертикальную. Пара сил с неизвестным по величине и знаку моментом.

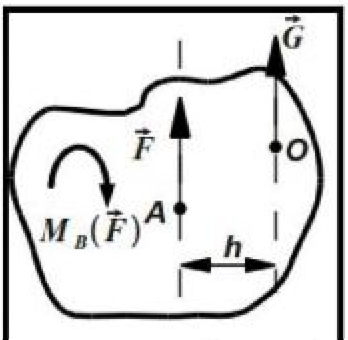
6. Скользящая заделка; реакция состоит из совокупности силы и пары сил. Сила направлена перпендикулярно скользящей балке, а пара сил с неизвестным по вличине и знаку моментом.



5. Жесткая заделка	6. Скользящая заделка
	

5. ПРЕВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА

Рассмотрим следующий частный **пример**: пусть к телу в точке A приложена сила $\vec{F}$, линия действия которой проходит через центр тела. В этом случае тело будем двигаться прямолинейно в сторону действия силы. Предположим, что эту силу перенесли в сторону (в некоторую точку O, не лежащую на линии действия силы $\vec{F}$). В этом случае изменится воздействие силы $\vec{F}$ на тело: вместе с поступательным движением тело будет совершать и вращательное. Возникает вопрос: как компенсировать это новое дополнительное вращательное воздействие наиболее эффективным способом. Ответом на этот вопрос служит **теорема Пуансо**.



– Рисунок 1

Теорема 1 (Пуансо). Воздействие силы $\vec{F}$ на тело не изменится, если её перенести из исходной точки A параллельно самой себе в любую точку твердого тела O, добавив при этом пару сил, момент которой равен моменту первоначальной силы $\vec{F}$ относительно новой точки приложения силы O (рисунок 1).

Следствие. Состояние тела под воздействием некоторой произвольной системы из n сил не изменится, если все силы этой системы перенести в некоторую выбранную точку O (центр приведения), добавив при этом n пар сил с соответствующими моментами.

Так как после применения следствия из **теоремы Пуансо** получим систему сходящихся сил, то её можно заменить одной равнодействующей силой. Аналогично, можно заменить все пары сил одной парой с суммарным моментом. Рассмотрим соответствующие определения.

Опр. 1. Главный вектор всех первоначальных сил $\vec{F}_k$ – это равнодействующая сила $\vec{R}$ всех перенесенных сил $\vec{G}_k$.

Опр. 2. Главный алгебраический момент системы сил $\vec{F}_k$ – это алгебраический момент M_O, равный сумме моментов всех сил: $M_O = \sum M_O(\vec{F}_k)$.

Установим теперь аналитическое условие равновесия под действием системы сил. Тело находится в равновесии, если оно не совершает никакого движения: ни поступательного, ни вращательного. Так как за поступательное движение относительно точки O отвечает главный вектор всех сил, то он должен быть равен нулю; за вращательное движение вокруг точки O отвечает пара сил, следовательно её момент тоже должен быть равен нулю:

(1) $$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0,$$

(2) $$M_O = M_O(\vec{F}_1) + \ldots + M_O(\vec{F}_n) = 0\,.$$

Замечание 1. Можно показать, что условия равновесия (1, 2) **не зависят** от выбора центра приведения. Это позволяет делать проверку правильности вычисления величин неизвестных сил с помощью критерия равенства нулю суммы всех моментов относительно какой-либо другой точки, которая не совпадает с центром приведения ***O***.

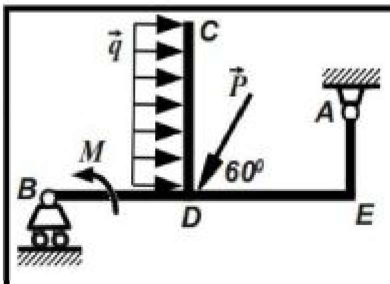
Рассмотрим практический аспект применения формул (1, 2). Для удобства применения формулы (1) переходят к её координатной записи, найдя проекции на оси ***Ox*** и ***Oy*** соответственно. То есть векторное уравнение (1) преобразуется к двум координатным уравнениям вида:

(3) $$R^X = F_1^X + F_2^X + \ldots + F_n^X = 0\,,\quad R^Y = F_1^Y + F_2^Y + \ldots + F_n^Y = 0$$

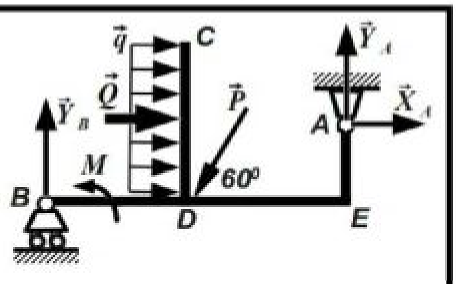
Таким образом получается система из трёх линейных алгебраических уравнений. Следовательно, максимальное количество неизвестных в ней тоже может быть равно максимум трём.

Пример 1. Рассмотрим закреплённый брус, при этом известно, что $AE = 1$ см, $DE = BD = CD = 2$ см, $P = 20$ кН, $M = 10$ кН·см, $q = 2$ кН/см. Найти **все** реакции связей и сделать проверку (Рисунок 2).

Решение. Заменим распределённую нагрузку $\vec{q}$ сосредоточенной нагрузкой $\vec{Q}$, величина которой согласно параграфу 3 будет равна $Q = 2 \cdot 2 = 4$ кН, а точка приложения в середине отрезка ***DC***. В схеме закрепления бруса задействованы две связи: шарнирно-подвижная опора ***B*** и шарнирно-неподвижная опора ***A***. Учитывая реакции связей из параграфа 4, в опоре ***B*** будет одна вертикальная реакция $\vec{Y}_B$, а в опоре ***A*** будут две перпендикулярные компоненты $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$. Запишем условия равновесия (2,3).



– Рисунок 2



– Рисунок 3

$$R^X = Q^X + P^X + Y_B^X + X_A^X + Y_A^X = Q - P\cdot\cos 60^0 + X_A = 4 - 20\cdot\cos 60^0 + X_A = \\ = 4 - 10 + X_A = -6 + X_A = 0 \Rightarrow X_A = 6\,;$$

$$R^Y = Y_B^Y + P^Y + Q^Y + X_A^Y + Y_A^Y = Y_B - P\cdot\sin 60^0 + Y_A = Y_B - 20\cdot\sin 60^0 + Y_A = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y_A + Y_B = 17{,}321\,;$$

$$M_D = M_D(\vec{Y}_B) + M_D(\vec{Q}) + M_D(\vec{X}_A) + M_D(\vec{Y}_A) + M = \\ = -2\cdot Y_B - 4 - X_A + 2\cdot Y_A + 10 = 0 \Rightarrow Y_A - Y_B = 0\,.$$

Тогда $Y_A = 8{,}661$, $Y_B = 8{,}661$, $X_A = 6$.

Проверим полученное решение, найдя сумму моментов относительно точки ***A***. Здесь представляет определенную сложность вычисление момента $M_A(\vec{P})$ силы $\vec{P}$, поэтому воспользуемся теоремой Вариньона. Найдем длины вертикальной и горизонтальной составляющих силы $\vec{P} = \vec{P}_X + \vec{P}_Y$: $|P_X| = 20\cdot\cos 60^0 = 10$, $|P_Y| = 20\cdot\sin 60^0 = 17{,}321$. Тогда получим, что $M_A(\vec{P}) = M_A(\vec{P}_X) + M_A(\vec{P}_Y) = -10 + 17{,}321\cdot 2 = 24{,}642$. Теперь вычислим сумму всех моментов: $M_A = +M + M_A(\vec{Y}_B) + M_A(\vec{Q}) + M_A(\vec{P}) + M_A(\vec{X}_A) + M_A(\vec{Y}_A) =$ $= 10 - 4\cdot 8{,}661 + 24{,}642 = -0{,}002 \approx 0$.

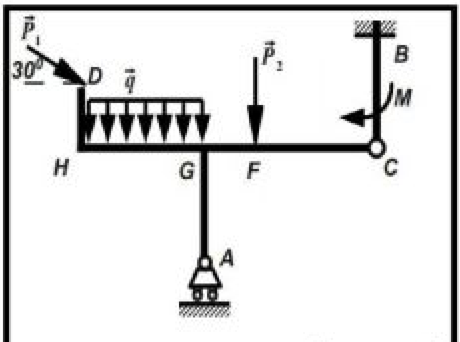
Так как сумма моментов относительно другой точки приблизительно равна нулю, то все переменные найдены верно.

Ответ: $Y_A = 8{,}661$, $Y_B = 8{,}661$, $X_A = 6$ кН.

Рассмотрим более сложный случай, когда несколько тел с помощью сочленения образуют единую конструкцию. При решении вопроса о равновесии такой конструкции с помощью формул (2, 3) может оказаться, что количество неизвестных превосходит количество уравнений, то есть будет больше трех. В этом случае необходимо расчленить исходную составную конструкцию на отдельные элементы, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями. Необходимо учитывать, что при переходе от одной части конструкции к другой эти реакции будут иметь противоположное, на равное по модулю, направление. Кроме того, если в соединительном блоке образуется момент, то для левой и правой частей он будет иметь разные знаки. После этого решается задача о равновесии каждой части в отдельности.

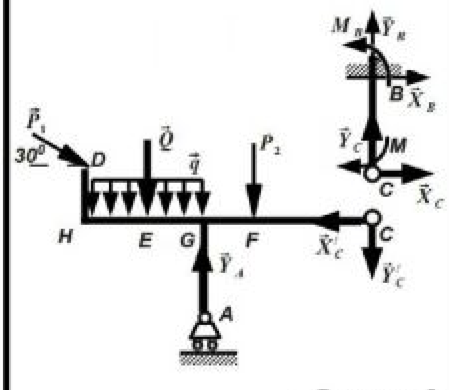
Пример 2. Конструкция состоит из двух частей, которые соединены шарниром. Найти реакции всех опор и сделать проверку, если известно, что $P_1 = 10$, $P_2 = 12$ кН, $M = 17$ кН·м, $q = 1{,}6$ кН/м, $DH = GF = 1$, $AG = BC = 1{,}5$, $HG = 2$, $FC = 3$ м (Рисунок 4).

Решение. Заменим распределённую нагрузку $\vec{q}$ сосредоточенной нагрузкой $\vec{Q}$, величина которой согласно параграфу 3 будет равна $Q = 1{,}6 \cdot 2 = 3{,}2$ кН, а точка приложения в точке E. Рассмотрим всю конструкцию целиком. Имеются следующие реакции: вертикальная реакция $\vec{Y}_A$ для шарнирно-подвижной опоры, вертикальная и горизонтальная реакции $\vec{Y}_B$ и $\vec{X}_B$, а так же пара сил с моментом M_B для жесткой заделки. Таким образом, необходимо определить четыре переменные на основе трех уравнений равновесия, что невозможно. Поэтому расчленим исходную конструкцию на две части с помощью шарнира C. Тогда левая часть всей конструкции и шарнир C будут играть роль связывающего тела для правой части и наоборот, правая часть и шарнир C будут связывающими телами для левой части.



– Рисунок 4

Как указано в параграфе 4, шарнирному соединению соответствует одна реакция, направление которой заранее неизвестно, поэтому её раскладывают на вертикальную и горизонтальную компоненты. Добавим четыре реакции, которые попарно компенсируют друг друга: вертикальные $\vec{Y}_C$, $\vec{Y}^{/}_C = -\vec{Y}_C$ и горизонтальные $\vec{X}_C$, $\vec{X}^{/}_C = -\vec{X}_C$. Таким образом, учитывая первые четыре неизвестные реакции, необходимо найти шесть неизвестных.



– Рисунок 5

Составим уравнения равновесия для всей конструкции в целом (тогда реакции в шарнире C попарно уничтожатся).

$$R^X = P_1^X + Q^X + P_2^X + Y_A^X + X_B^X + Y_B^X =$$
$$= P_1 \cdot \cos 30^0 + X_B = 10 \cdot 0{,}866 + X_B = 8{,}66 + X_B = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_B = -8{,}66\ ;$$

$$R^Y = P_1^Y + Q^Y + P_2^Y + Y_A^Y + X_B^Y + Y_B^Y = -P_1 \cdot \sin 30^0 - Q + Y_A - P_2 + Y_B =$$

$$= -10 \cdot 0{,}5 - 3{,}2 + Y_A - 12 + Y_B = Y_A + Y_B - 20{,}2 = 0 \Rightarrow \ Y_A + Y_B = 20{,}2\ ;$$

$$M_D = M_D(\vec{P}_1) + M_D(\vec{P}_2) + M_D(\vec{Q}) + M_D(\vec{Y}_A) + M_D(\vec{X}_B) + M_D(\vec{Y}_B) - M + M_B =$$

$$= -12 \cdot 3 - 3{,}2 \cdot 1 + Y_A \cdot 2 - X_B \cdot 0{,}5 + Y_B \cdot 6 - M + M_B =$$

$$= 2 \cdot Y_A - 0{,}5 \cdot (-8{,}66) + 6 \cdot Y_B - 39{,}2 - 17 + M_B = 0 \Rightarrow 2 \cdot Y_A + 6 \cdot Y_B + M_B = 51{,}87\ .$$

Рассмотри равновесие более простой правой части.

$$R^X = X_B^X + Y_B^X + X_C^X + Y_C^X = X_B + X_C = -8{,}66 + X_C = 0 \Rightarrow X_C = 8{,}66\ ;$$

$$R^Y = X_B^Y + Y_B^Y + X_C^Y + Y_C^Y = Y_B + Y_C = 0\ ;$$

$$M_C = M_C(\vec{X}_B) - M + M_B = 8{,}66 \cdot 1{,}5 - 17 + M_B = 0 \Rightarrow M_B = 4{,}01\ .$$

Решая совместно систему из шести уравнений, получим, что $X_B = -8{,}66$, $Y_B = 1{,}865$, $Y_A = 18{,}335$, $M_B = 4{,}01$.

Сделаем проверку, вычислив величину главного момента для всей конструкции относительно точки G:

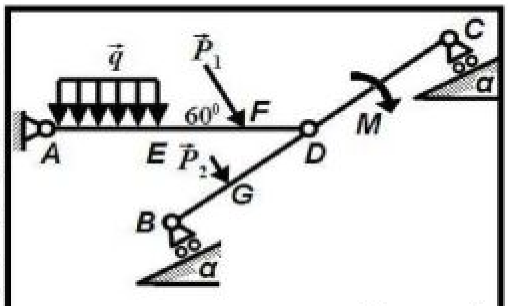
$$M_G = -P_1 \cdot \cos 30^0 \cdot 1 + P_1 \cdot \sin 30^0 \cdot 2 + Q \cdot 1 - P_2 \cdot 1 - X_B \cdot 1{,}5 + Y_B \cdot 4 + M_B - M =$$

$= -10 \cdot 0{,}866 + 10 \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 3{,}2 - 12 + 8{,}66 \cdot 1{,}5 + 1{,}865 \cdot 4 + 4{,}01 - 17 = 0$, так как сумма равна нулю, то все неизвестные найдены верно.

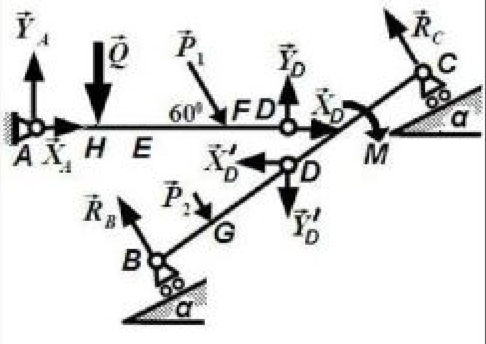
Ответ: $X_B = -8{,}66$, $Y_B = 1{,}865$, $Y_A = 18{,}335$, $M_B = 4{,}01$.

В качестве следующего примера рассмотрим **задание *Д*-15 *В*-30** из сборника задач А. А. Яблонского.

Пример 4. $P_1 = 3$, $P_2 = 5$ кН, $q = 2$ кН/м, $AE = ED = 2\,FD = 4$, $BD = DC = 2\,BG = 5$ м, $M = 10$ кН·м, (рисунок 4). Найти реакции опор.



– Рисунок 4



– Рисунок 5

Решение. Вычислим величину равнодействующей $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8$ кН, точка её приложения будет в середине отрезка AE – точке H. Так как реактивных сил четыре, то опять, как и в предыдущем примере, необходимо разбить конструкцию на две части (рисунок 5). Составим уравнения равновесия для левой части:

$$R^X = X_A + P_1 \cos 60^0 + X_D = 0\ ,$$

$$R^Y = Y_A - Q - P_1 \cdot \sin 60^0 + Y_D = 0\ ,$$

$$M_F = -6 \cdot Y_A + 4 \cdot Q + 2 \cdot Y_D = 0\ .$$

Составим уравнения равновесия для правой части:

$$R^X = -R_B \cdot \cos 60^0 + P_2 \cdot \cos 60^0 - X_D - R_C \cdot \cos 60^0 = 0\ ,$$

$$R^Y = R_B \cdot \sin 60^0 - P_2 \cdot \sin 60^0 - Y_D + R_C \cdot \sin 60^0 = 0\ ,$$

$$M_D = -5 \cdot R_B + 2{,}5 \cdot P_2 + 5 \cdot R_C - M = 0\ .$$

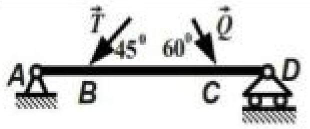
Подставляя в уравнения известные величины, получим следующую систему уравнений: $X_A + X_D = -1{,}500$, $Y_A + Y_D = 12{,}330$, $-3 \cdot Y_A + Y_D = -16$, $R_B + 2 \cdot X_D + R_C = 2{,}5$, $R_B - 1{,}155 \cdot Y_D + R_C = 5$, $-R_B + R_C = -0{,}5$.

Откуда следует, что $Y_A = 7{,}083$, $Y_D = 5{,}248$, $R_C = 5{,}281$, $R_B = 5{,}781$, $X_D = -4{,}265$, $X_A = 2{,}765$.

Сделаем проверку: $M_A = -Q \cdot 2 - P_1 \cdot \cos 30^0 \cdot 6 + Y_D \cdot 8 = -8 \cdot 2 - 30 \cdot 0{,}866 + 8 \cdot 5{,}248 =$ $= -16 - 25{,}98 + 41{,}984 = -0{,}004$.

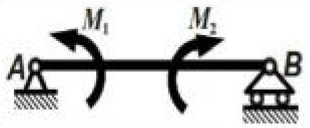
Ответ: $Y_A = 7{,}083$, $R_C = 5{,}281$, $R_B = 5{,}781$, $X_A = 2{,}765$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ



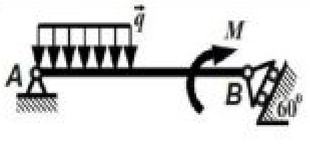
1 (2.4.2)

Найти реакции всех связей, если $T = 84{,}6$, $Q = 208$ Н, а размеры $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = 2$ м. Сделать проверку.



2 (2.4.3)

Найти реакции всех связей, если $AB = 3$ м, $M_1 = 2$, $M_2 = 8$ Нм. Сделать проверку. Сделать проверку.

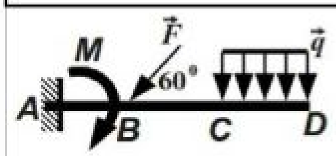


3 (2.4.4)

Определить момент M пары сил и реакцию опоры A, если реакция опоры B равна 250 Н, интенсивность $q = 150$ Н/м; $AC = CB = 2$ м. Сделать проверку.

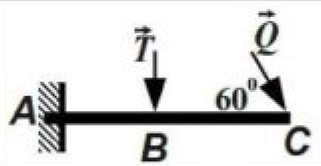
4 (2.4.7)

На балку AC действует распределённая нагрузка интенсивностью $q_{max} = 2{,}5$ Н/м и пары сил с моментами $M_1 = 4$ и $M_2 = 2$ Нм. Определить реакции, если размеры $AB = 4$, $BC = 2$ м. Сделать проверку.



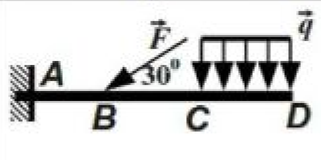
5 (2.4.34)

К балке AD приложена пара сил с моментом $M = 200$ Нм, распределённая нагрузка интенсивностью $q = 20$ Н/м и сила F. Какой должна быть эта сила, чтобы момент в заделке A равнялся 650 Нм, если размеры $AB = BC = CD = 2$ м? Определить величины остальных реакций. Сделать проверку.



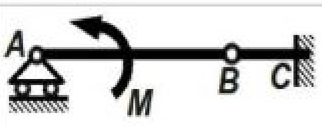
6 (2.4.35)

Определить реакции в заделке A, если $T = 50$ Н, $Q = 100$ Н, а размеры $AB = BC = 2$ м. Сделать проверку.



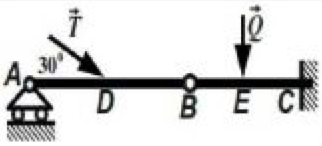
7 (2.4.37)

Определить силу F, при которой момент в заделке A равен 3700 Нм, если интенсивность распределённой нагрузки $q = 200$ Н/м, а размеры $AB = BC = 2$ м, $CD = 3$ м. Определить также остальные реакции. Сделать проверку.



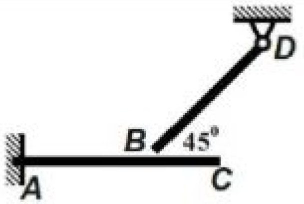
8 (3.2.3)

На балку AB действует пара сил с моментом $M = 800$ Нм. Определить реакции в опорах, если $AB = 2$, $BC = 0{,}5$. Сделать проверку.



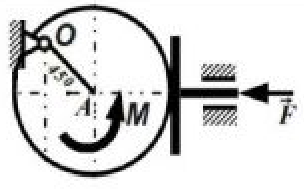
9 (3.2.9)

Два стержня соединены в шарнире B. Определить реакции в опорах, если $T=60$, $Q=60$ Н и $AD=DB=2$, $BE=EC=3$ м. Сделать проверку.



10 (3.2.19)

Однородный брус 2 весом **400** Н свободно опирается в точке B на однородную балку 1. Чему должен равняться вес балки 1, для того чтобы момент в заделке A был равен 265 Нм, если размеры $AB=1$, $BC=0{,}8$, $BD=2$ м. Сделать проверку.



11 (3.3.5)

На толкатель 1 кулачкового механизма действует сила $F=100$ Н. При каком моменте M пары сил, приложенных к кулачку 2, возможно равновесие механизма, если расстояние $OA=0{,}1$ м. Сделать проверку.

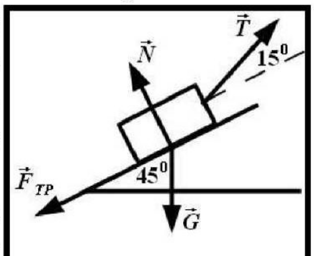
7. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ

Опр. 1. Сила трения скольжения – сила сопротивления относительному скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого.

Экспериментально установлено, что максимальное значение трения определяется по линейному закону Кулона: $F_{TP}=f\cdot N$, где F_{TP} – это величина силы трения скольжения; f – это **коэффициент трения скольжения**; N – величина нормального к поверхности давления (Рисунок 1).

Коэффициент трения f определяется по формуле $f=tg\,\alpha$, где α – это угол между горизонтальной поверхностью и парой тел, коэффициент трения между которыми необходимо найти; также это и угол между нормальным давлением и равнодействующей нормального давления и силы трения.

Пример 1. Тело, сила тяжести которого $G=100$ Н, удерживается в равновесии силой $\vec{T}$ на шероховатой плоскости, имеющей угол наклона $\alpha=45^0$. Коэффициент трения скольжения $f=0{,}6$. Сила T действует на тело под углом в 15^0 вверх по наклону. Определить значение силы T в случае равновесия (рисунок 1). Считать, что все силы пересекаются в одной точке.



- Рисунок 1

Решение. Составим уравнения равновесия (так как силы пересекаются в одной точке, то сумма моментов будет равна нулю):

$$R^X=T\cdot\cos15^0-F_{TP}-G\cdot\cos45^0=0{,}966\cdot T-F_{TP}-70{,}711=0;$$

$$R^Y=T\sin15^0+N-G\cdot\sin45^0=0{,}259\cdot T+N-70{,}711=0.$$

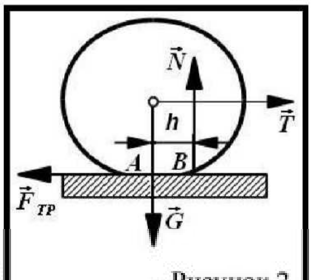
Применим закон Кулона: $F_{TP}=\pm0{,}6\cdot N$, где знак выбирается в зависимости от величины силы T: знак +, если $T=T_{min}$ и знак –, если $T=T_{max}$. Тогда получим систему: $0{,}966\cdot T\mp0{,}6\cdot N=70{,}711$, $0{,}259\cdot T+N=70{,}711$. Откуда $T_{min}=34{,}876$, $T_{max}=100{,}926$.

Ответ. $T_{min}=34{,}876$, $T_{max}=100{,}926$ Н.

Опр. 9. Трение качение – это сила сопротивления, которая возникает при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим колесо радиуса $\boldsymbol{R}$ и веса $\vec{G}$, который лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. Приложим в оси колеса силу $\vec{T}$. Так как тела деформируются, то касание колеса и поверхности происходит не в одной точке, а на некотором отрезке ***AB.***

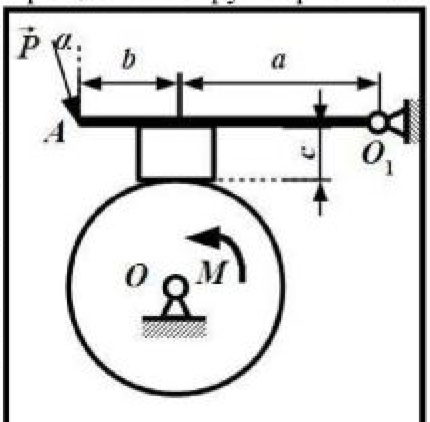
Интенсивность давления в точке *A* будет убывать, а в точке ***B*** нарастать, поэтому реакция $\vec{N}$ будет не в середине отрезка ***AB***, а в его крайней точке – ***B***. В этой же точке будет приложена сила трения $\vec{F}_{TP}$. Таким образом, появляются две пары сил: ($\vec{G}$, $\vec{N}$) и ($\vec{T}$, $\vec{F}_{TP}$) с моментами $M(\vec{G},\vec{N})=N\cdot h$ и $M(\vec{T},\vec{F}_{TP})=-(T\cdot R)$ (Рисунок 2). Составим уравнения равновесия: $R^X=T-F_{TP}=0$, $R^Y=N-G=0$, $N\cdot h-T\cdot R=0$. Тогда получим, что $T=F_{TP}$, $N=G$ и $h=\dfrac{T\cdot R}{N}$. При увеличении силы тяги $\vec{T}$ увеличивается расстояние ***h***. Предельное значение расстояния ***h***, при котором нарушается равновесие называется **коэффициентом трения качения** $\boldsymbol{\delta}$ **.**



- Рисунок 2

Замечание 3. Можно отметить, что коэффициент трения скольжения – безразмерная величина, а коэффициент трения качения – размерная: $[h]=м$.

Пример 2. К барабану радиуса $R=0{,}1$ м, который вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку ***O***, приложен постоянный момент $M=10$ кН•м. Для торможения используют колодку на подвижной рукоятке ***AO₁***, при этом $a=1$, $b=0{,}5$, $c=0{,}3$ м. К концу рукоятки приложена сила ***P*** под углом $\alpha=30^0$, коэффициент трения скольжения равен $f=0{,}4$. Определить наименьшую силу ***P***, необходимую для равновесия, а также все реакции опор (рисунок 3).



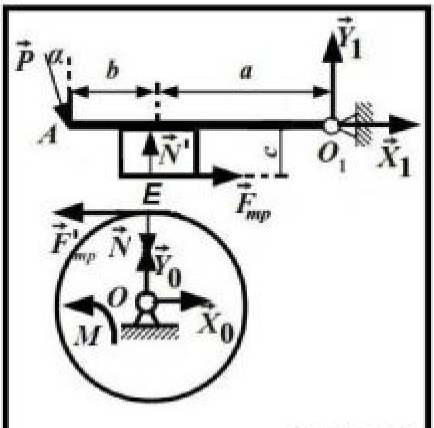
– Рисунок 3

Решение. В задаче необходимо определить 7 неизвестных: $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$, $\vec{X}_1$, $\vec{Y}_1$, $\vec{F}_{mp}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$. Если по аналогии с **примерами 3, 4** из предыдущего параграфа разделить всю конструкцию на две части, то можно записать 2 системы уравнений равновесия по 3 уравнения в каждой.

Добавляя соотношение между $\vec{F}_{mp}$ и $\vec{N}$ по закону Кулона, получим всего 7 уравнений (рисунок 4).

Уравнения равновесия для колеса имеют вид:
$R^X=X_0+F_{mp}=0$, $R^Y=Y_0-N=0$,
$M_0=-F_{mp}\cdot R+M=0$ и $F_{mp}=0{,}4\cdot N$. Отсюда
$F_{mp}=M/R=100$ кН, $X_0=-F_{mp}=-100$ кН, $N=250$ кН, $Y_0=N=250$ кН.

Уравнения равновесия для рукоятки имеют вид:
$R^X=X_1+P\cdot\sin\alpha-F_{mp}=0$, $R^Y=Y_1-P\cdot\cos\alpha+N=0$,
$M_1=-F_{mp}\cdot c-N\cdot a+P\cdot\cos\alpha\cdot(a+b)=0$, следовательно, $P=\dfrac{N\cdot a+F_{mp}\cdot c}{\cos\alpha\cdot(a+b)}$, $X_1=F_{mp}-P\cdot\sin\alpha$,



– Рисунок 4

$Y_1=P\cdot\cos\alpha-N$ и $P=\dfrac{250\cdot1+100\cdot0{,}3}{0{,}866\cdot1{,}5}=215{,}550$,

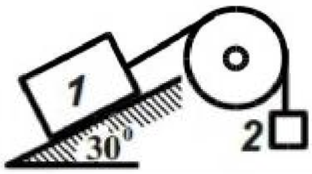
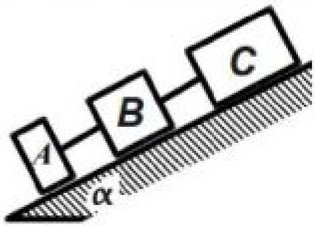
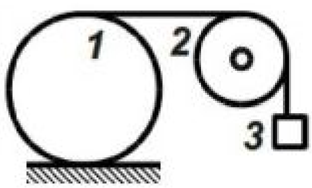
$X_1 = 100 - 215{,}550 \cdot 0{,}5 = -7{,}775$, $Y_1 = 215{,}550 \cdot 0{,}866 - 250 = -63{,}334$.

Сделаем проверку, вычислив сумму всех моментов относительно точки E.

$$M_E = M_E(\vec{P}) + M_E(\vec{X}_0) + M_E(\vec{X}_1) + M_E(\vec{Y}_1) + M =$$
$$= b \cdot P \cdot \cos\alpha - c \cdot P \cdot \sin\alpha + R \cdot X_0 - c \cdot X_1 + a \cdot Y_1 + M =$$
$$= 0{,}5 \cdot 215{,}550 \cdot 0{,}866 - 0{,}3 \cdot 215{,}550 \cdot 0{,}5 - 0{,}1 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 7{,}775 - 63{,}334 + 10 = -0{,}0001 \approx 0 .$$

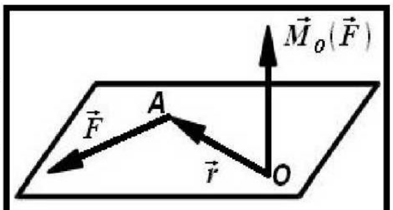
Ответ: $P = 215{,}550$, $Y_0 = 250$, $X_1 = -7{,}775$, $Y_1 = -63{,}334$. $X_0 = -100$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

	**1 (2.5.3)** Определить наименьший вес тела 1, при котором оно скользит вниз по плоскости *DE*, если вес груза 2 равен **320** Н, коэффициент трения $f = 0{,}2$. **Ответ**: 979 Н
	**2 (5.8)** Три груза *A*, *B*, *C* веса **10**, **30**, **60** Н соответственно, которые соединены тросами, лежат на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны $f_A = 0{,}1$, $f_B = 0{,}25$, $f_C = 0{,}5$. Определить угол α , при котором тела равномерно движутся вниз по плоскости и натяжения тросов между грузами. **Ответ**: $\alpha = 20{,}807^0$, $T_{AB} = 2{,}7$, $T_{BC} = 6{,}5$ Н.
	**3 (2.6.15)** Однородный каток весом **10** кН и радиусом **0,5** м связан с грузом 3, вес которого равен **80** Н. Определить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток останется в покое. **Ответ**: 0,008

8. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть дан куб, который пытаются одновременно повернуть вокруг двух осей, проходящих через центры перпендикулярных граней. Возникает вопрос: вокруг какой оси будет происходить вращение куба? Для ответа на этот вопрос надо научиться складывать вращательные воздействия сил и пар сил, если эти силы действуют в не параллельных плоскостях. Это можно сделать, если обобщить понятия алгебраических моментов силы относительно точки и пары сил, если они действуют в пространстве.



– Рисунок 1

Пусть дана сила $\vec{F}$, которая приложена к телу в точке A, и произвольная точка пространства O.

Опр. 1. Рассмотрим вектор, который удовлетворяет следующим трём условиям:

1) Вектор перпендикулярен плоскости, содержащей силу $\vec{F}$ и точку O;

2) Вектор направлен таким образом, что сила стремится вращать тело против часовой стрелки, если смотреть из конца этого вектора;

3) Длина этого вектора равна модулю алгебраического момента силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Из математики известно, что этот вектор определяет векторное произведение двух векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}=\vec{OA}$. В механике этот вектор называется **векторным моментом** силы $\vec{F}$ относительно точки O – $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Таким образом, можно записать формулу:

(1) $$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F},$$

где $\vec{r}$ – это вектор, соединяющий точку O и точку приложения силы A.

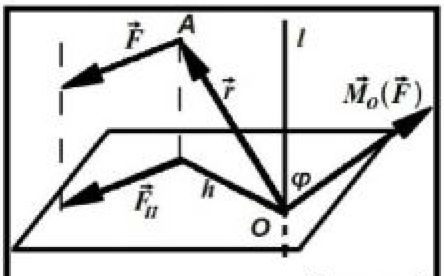
Если рассматривать пару сил, которая приложена к телу, то можно определить **векторный момент пары сил**, как вектор, который удовлетворяет аналогичным трём условиям:

1) Вектор перпендикулярен к плоскости действия пары сил;

2) Вектор направлен таким образом, что пара вращает тело против часовой стрелки, если смотреть навстречу этому вектору;

3) Длина этого вектора равна алгебраическому моменту заданной пары.

Поскольку в пространстве сила может вращать тело не только вокруг точки, но и вокруг оси, то необходимо определить количественную характеристику такого вращательного воздействия. Пусть дана сила $\vec{F}$, которая приложена к телу в точке A, и ось вращения Ol. Разложим силу $\vec{F}$ на две компоненты: перпендикулярную оси $\vec{F}_П$ и параллельную ей $\vec{F}_L$. Вращательное воздействие силы относительно оси будет оказывать только её перпендикулярная компонента $\vec{F}_П$.

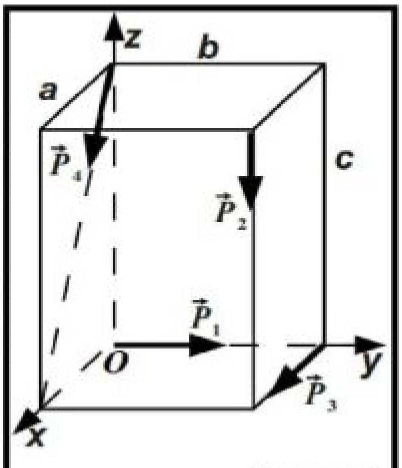


– Рисунок 2

Опр. 2. Момент силы относительно оси – это число, равное алгебраическому моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную к заданной оси, относительно точки пересечения оси и плоскости: $M_l(\vec{F})=M_O(\vec{F}_П)=\pm F_П\cdot h$.

Замечание 1. Между моментом силы относительно оси и векторным моментом силы относительно точки на этой оси существует взаимосвязь: $M_l(\vec{F})=M_O(\vec{F})\cdot\cos\varphi$, где φ – это угол между векторным моментом и осью (рисунок 2).

Замечание 2. Можно показать, что $\vec{M}_O=M_x\cdot\vec{i}+M_y\cdot\vec{j}+M_z\cdot\vec{k}$, где M_x, M_y, M_z – моменты силы $\vec{F}$ относительно осей координат, которые пересекаются в точке O.



– Рисунок 3

Пример 1. Дано: $a=30$, $b=50$, $c=40$ см, $P_1=10$, $P_2=4$, $P_3=4$, $P_4=11$ кН. Найти главный вектор и главный момент момент всех сил относительно точки O (рисунок 3).

Решение. Главный вектор – это геометрическая формальная сумма всех сил в пространстве. Проще всего её находить как сумму проекций заданных векторов. Получим следующее: $\vec{P}_1$: $P_1^X=0$, $P_1^Y=P_1=10$, $P_1^Z=0$; $\vec{P}_2$: $P_2^X=0$, $P_2^Y=P_2=0$, $P_2^Z=-P_2=-4$; $\vec{P}_3$: $P_3^X=P_3=4$, $P_3^Y=0$, $P_3^Z=0$; $\vec{P}_4$: $P_4^X=P_4\cdot\cos\alpha$, $P_4^Y=P_4=0$, $P_4^Z=-P_4\cdot\sin\alpha$. Из прямоугольного треугольника $\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+c^2}=0{,}6$, $\sin\alpha=0{,}8$, следовательно $P_4^X=11\cdot0{,}6=6{,}6$, $P_4^Z=-8{,}8$. Тогда $R^X=4+6{,}6=10{,}6$, $R^Y=10$, $R^Z=-4-8{,}8=-12{,}8$ и $R=\sqrt{(R^X)^2+(R^Y)^2+(R^Z)^2}=19{,}4$.

Главный момент относительно выбранной точки – это сумма моментов всех сил относительно этой точки. Согласно ***замечанию 2*** достаточно вычислить моменты M_x, M_y, M_z всех сил относительно координатных осей, а затем найти длину вектора $\vec{M}_O$.

Для силы P_1: $M_x(\vec{P}_1)=0$, $M_y(\vec{P}_1)=0$, $M_z(\vec{P}_1)=0$ (сила $\vec{P}_1$ не может повернуть параллелепипед вокруг оси Ox); для силы $\vec{P}_2$: $M_x(\vec{P}_2)=-b\cdot P_2=-200$, $M_y(\vec{P}_2)=a\cdot P_2=120$, $M_z(\vec{P}_2)=0$ (сила $\vec{P}_2$ может повернуть тело вокруг осей Ox, Oy); для силы $\vec{P}_3$: $M_x(\vec{P}_3)=0$, $M_y(\vec{P}_3)=0$, $M_z(\vec{P}_3)=-b\cdot P_3=-200$ (сила $\vec{P}_3$ может повернуть тело вокруг оси Oz); для силы $\vec{P}_4$: $M_x(\vec{P}_4)=0$, $M_y(\vec{P}_4)=P_4\cdot c\cdot\sin\alpha=264$, $M_z(\vec{P}_4)=0$. Тогда $M_x=-200$, $M_y=384$, $M_z=-200$ и $M_O=\sqrt{M_x^2+M_y^2+M_z^2}=477$.

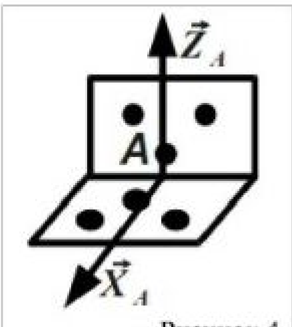
Ответ. $R=19{,}4$ кН; $M_O=477$ кН·см.

Замечание 3. В пространстве к перечню связей и их реакций можно добавить ещё четыре: **подшипник**, **подпятник**, **сферический шарнир**, **жесткая заделка**.

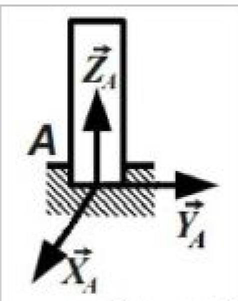
1. *Подшипник* представляет собой шарнирно-неподвижную опору, цилиндрический шарнир (дверная петля (рисунок 4), соединение ножниц, крепление козырьков против солнца в автомобилях); реакция направлена произвольным образом в плоскости, перпендикулярной подшипнику, поэтому её раскладывают на две составляющие: $\vec{R}_A=\vec{X}_A+\vec{Z}_A$

2. *Подпятник* – это подшипник с упором (закопанный столб в земле) (рисунок 5) и ***сферический шарнир*** – соединение, которое может поворачиваться как угодно в пространстве (кость в суставной сумке) (рисунок 6); реакция направлена произвольным об разом в пространстве, поэтому её раскладывают на три составляющие $\vec{R}_A=\vec{X}_A+\vec{Y}_A+\vec{Z}_A$.

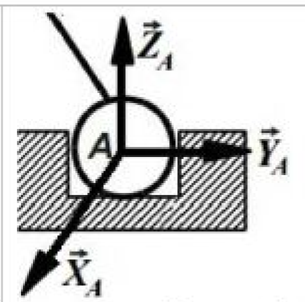
3. *Жесткая заделка* – жесткое соединение, которое не позволяет перемещаться вдоль трех координатных осей, а также поворачиваться вокруг них; реакции распадаются на силу и пару сил. Сила направлена произвольным образом в пространстве, поэтому её раскладывают на составляющие: $\vec{R}_A=\vec{X}_A+\vec{Y}_A+\vec{Z}_A$. Пара сил вращает балку вокруг заранее не известной оси, поэтому её воздействие раскладывают на воздействие трёх пар сил с соответствующими осевыми моментами $\vec{M}_A=M_x\cdot\vec{i}+M_y\cdot\vec{j}+M_z\cdot\vec{k}$ (рисунок 7).



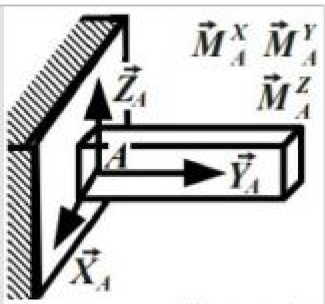
– Рисунок 4



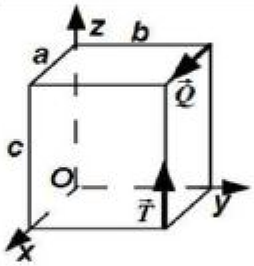
– Рисунок 5



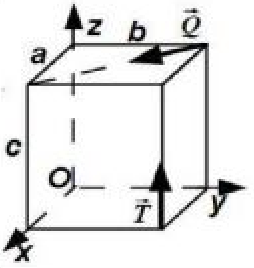
– Рисунок 6



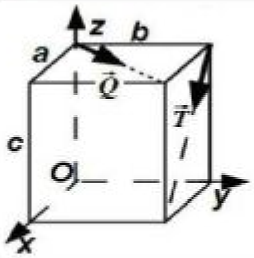
– Рисунок 7



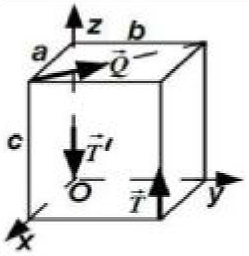
1.
Вычислить главный вектор и главный момент всех сил относительно точки O, если $a=0{,}3$, $b=0{,}6$, $c=1$ м, $T=50$, $Q=30$ Н.



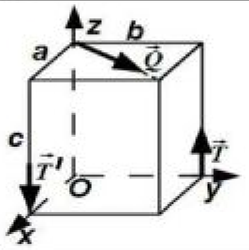
2.
Вычислить главный вектор и главный момент всех сил относительно точки O, если $a=0{,}4$, $b=1{,}6$, $c=1$ м, $T=20$, $Q=70$ Н.



3.
Вычислить главный вектор и главный момент всех сил относительно точки O, если $a=0{,}7$, $b=1{,}3$, $c=2$ м, $T=40$, $Q=10$ Н.



4.
Вычислить главный вектор и главный момент силы и пары сил относительно точки O, если $a=0{,}5$, $b=1{,}3$, $c=1{,}5$ м, $T=70$, $Q=40$ Н.



5.
Вычислить главный вектор и главный момент силы и пары сил относительно точки O, если $a=0{,}3$, $b=1{,}7$, $c=2{,}8$ м, $T=70$, $Q=40$ Н.

9. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же как и в случае плоскости условие равновесия имеет вид: $\vec{R}_O=0$, $\vec{M}_O=0$. Запишем это условие в аналитической форме с учетом ***замечания 2*** (при этом в качестве точки $\boldsymbol{O}$ будем использовать начало координат):

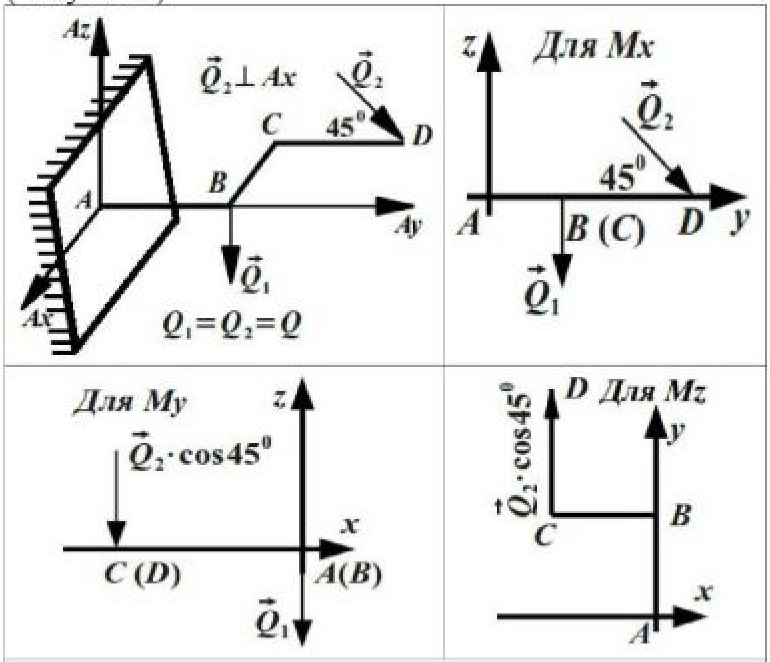
(1) $$\sum_k F_k^X=0,\ \sum_k F_k^Y=0,\ \sum_k F_k^Z=0,$$

(2) $$\sum_k M_x(\vec{F}_k)=0,\ \sum_k M_y(\vec{F}_k)=0,\ \sum_k M_z(\vec{F}_k)=0.$$

В качестве примера рассмотрим задание ***С-7 вариант 30*** из сборника задач Яблонского.

Пример 1. $Q=5$ кН, $AB=CD=40$, $BC=10$ см. Найти реакции опор конструкции (Рисунок 1).

Решение. В точке A – жёсткая заделка, следовательно в ней три компоненты реактивной силы: $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, а также пара сил с неизвестным моментом – $\vec{M}(A)$. Для вычисления моментов сил относительно координатных осей найдём проекции всех сил на эти плоскости (Рисунок 1).



– Рисунок 1

Составим уравнения равновесия для главного вектора:
$R^Y=Y_A+Q_2\cdot\cos 45^0=Y_A+0{,}707\cdot Q_2=0$, $R^X=X_A=0$, $R^Z=Z_A-Q_1-Q_2\cdot\sin 45^0=0$ откуда $X_A=0$, $Y_A=-3{,}535$, $Z_A=8{,}535$.

Найдём компоненты главного момента: $M_x=M(A)_x-AB\cdot Q_1-(AB+CD)\cdot Q_2\cdot\sin 45^0=$
$=M(A)_x-200-282{,}8=M(A)_x-482{,}8=0\Rightarrow M(A)_x=482{,}800$,
$M_y=M(A)_y+BC\cdot Q_2\cdot\cos 45^0=M(A)_y+35{,}35=0\Rightarrow M(A)_y=-35{,}350$
$M_z=M(A)_z-BC\cdot Q_2\cdot\cos 45^0=M(A)_z-35{,}35=0\Rightarrow M(A)_z=35{,}350$.

Для проверки вычислим осевые моменты в предположении, что новое начало координат расположено в точке C. В этом случае проекции на координатные плоскости останутся прежними, однако точка, относительно которой будут вычисляться моменты, будет расположена в точке C:

$M_x=-Z_A\cdot AB+Q_2\cdot\sin 45^0\cdot CD+M(A)_x=-8{,}535\cdot 40-5\cdot 0{,}707\cdot 40+482{,}800=0$,
$M_y=Z_A\cdot BC-Q_1\cdot BC+M(A)_y=(8{,}535-5)\cdot 10-35{,}350=0$,
$M_z=Y_A\cdot BC+M(A)_z=-3{,}535\cdot 10+35{,}350=0$. Так как сумма всех моментов равна нулю, то все реакции найдены верно.

Ответ: $X_A = 0$ кН, $Y_A = -3{,}535$ кН, $Z_A = 8{,}535$ кН, $R_A = 9{,}238$ кН, $M(A)_x = 482{,}800$ кН·см, $M(A)_y = -35{,}350$ кН·см, $M(A)_z = 35{,}350$ кН·см, $M(A) = 485{,}392$ кН·см.

Условия (1, 2) для главного вектора и момента соответствует ситуации равновесия тела под действием системы произвольных сил. Рассмотрим другие основные соотношения для векторов $\vec{R}_O$ и $\vec{M}_O$.

1) $\vec{R}_O = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, что соответствует паре сил с моментом $\vec{M}_O$, значение которого не зависит от выбора моментной точки O.

2) $\vec{R}_O \neq 0$, $\vec{M}_O = 0$, что соответствует равнодействующей $\vec{R}_O$, линия действия которой проходит через точку O.

3) $\vec{R}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \perp \vec{R}_O$, что также соответствует равнодействующей $\vec{R}_O$, но её линия действия проходит на расстоянии $d = \dfrac{M_O}{R}$ от точки O.

4) $\vec{R}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \| \vec{R}_O$, что соответствует равнодействующей $\vec{R}_O$ и паре сил с моментом $\vec{M}_O$; полученную совокупность называют динамическим винтом с осью, которая направлена вдоль равнодействующей $\vec{R}_O$ через точку O, и моментом M_O. Момент динамического винта в этом случае меньше, чем момент M_O одной пары сил в отдельности, и определяется по формуле:

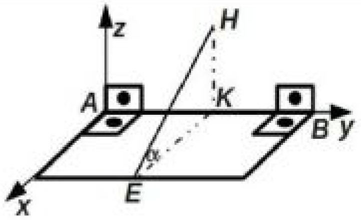
$$M^* = \frac{\vec{R}_O \cdot \vec{M}_O}{R_O} = \frac{R^X \cdot M_X + R^Y \cdot M_Y + R^Z \cdot M_Z}{R_O}. \quad (3)$$

5) $\vec{R}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, $\vec{M}_O \neg \| \vec{R}_O$, $\vec{M}_O \neg \perp \vec{R}_O$, что также соответствует динамическому винту, но при этом его ось не проходит через центр O. Момент динамического винта в этом случае также определяется по формуле (3).

Замечание 1. Если $\vec{M}_O \| \vec{R}_O$, то можно показать, что $M^* = M_O$.

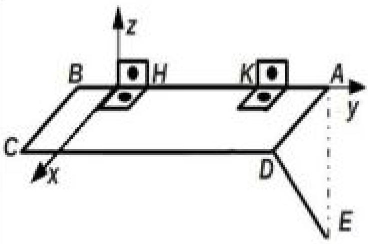
Пример 2. Известны главный вектор $\vec{R}_O$ и главный момент $\vec{M}_O$: $\vec{R}_O = 8 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{k}$, $\vec{M}_O = 3 \cdot \vec{i} - 17 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$. Определить момент динамического винта (наименьший главный момент).

Решение. Определим угол между векторами $\vec{R}_O$ и $\vec{M}_O$: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{R}_O \cdot \vec{M}_O}{R_O \cdot M_O} = \dfrac{24 + 36}{10 \cdot 18{,}275} = 0{,}328 \Rightarrow \alpha = 70{,}83^0$. Таким образом, это случай 5. Применим формулу (3), тогда $M^* = \dfrac{8 \cdot 3 + 0 \cdot (-17) + 6 \cdot 6}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \dfrac{24 + 36}{10} = 6$ Нм.



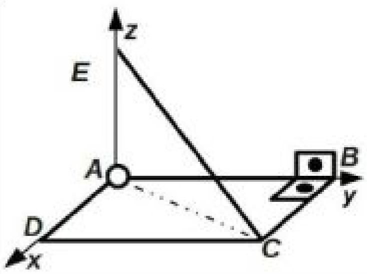
1 (8.18)

Прямоугольная однородная полка ***ABCD*** веса $G = 100$ Н удерживается в горизонтальном положении тросом ***EH***, который образует с плоскостью полки угол $\alpha = 60^0$. Определить натяжение троса ***T*** и реакции петель ***A***, ***B***, если известно, что $AK = KB = DE = EC$, $HK \perp AB$. **Ответ:** $T = 57{,}736$ Н, $X_A = X_B = 14{,}433$, $Z_A = Z_B = 25$ Н.



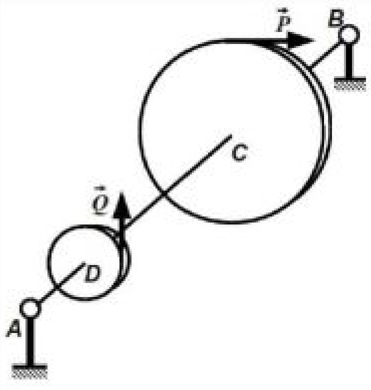
2 (8.25)

Прямоугольная однородная полка ***ABCD*** веса $G = 800$ Н может вращаться вокруг оси ***AB***, но удерживается в горизонтальном положении стержнем ***ED***. Определить усилие в стержне ***T*** и реакции петель ***H***, ***K***, если известно, что $AB = 1{,}5$, $AD = 0{,}6$, $AK = BH = 0{,}25$, $ED = 0{,}75$ м. **Ответ:** $T = 666{,}7$ Н, $X_K = -666{,}7$, $Z_K = -100$, $X_H = 133{,}3$ $Z_H = 500$ Н.



3 (8.24)

Однородная прямоугольная плита веса $G = 200$ Н прикреплена к стене при помощи сферического шарнира ***A*** и петли ***B*** и удерживается в горизонтальном положении верёвкой ***CE***. Определить натяжение верёвки ***T*** и опорные реакции. **Ответ:** $T = 200$, $X_A = 86{,}6$, $Y_A = 150$, $Z_A = 100$, $X_B = Z_B = 0$ Н.



4 (8.14)

На горизонтальный вал ***AB*** насажены зубчатое колесо ***C*** радиуса 1 м и шестерня ***D*** радиуса 0,1 м. Размеры конструкции: $AD = 0{,}1$, $DC = 0{,}8$, $CB = 0{,}1$ м. К колесу ***C*** по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне ***D***, также по касательной, приложена вертикальная сила ***Q***. Определить силу ***Q*** и реакции подшипников ***A*** и ***B*** в положении равновесия. **Ответ:** $Q = 1000$, $X_A = -10$, $X_B = -90$, $Z_A = -900$ $Z_B = -100$ Н.