ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

Учебное пособие для подготовки к зачету и экзамену

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задача повышения качества образования поставлена концепцией модернизации российского образования, одним из шагов которой является введение рейтинговой системы одновременно с широким использованием тестирования, усиливающего роль и значение самостоятельной работы студента.

Тестирование позволяет наиболее полно и дифференцировано оценить уровень знаний и умений каждого студента по учебной дисциплине. Контроль качества усвоения и понимания изучаемого предмета, через мыслительную деятельность тестируемого, служит самообучающим источником знаний. Организация тестового контроля по теоретической механике имеет свою особенность в силу обилия теорем и законов, записанных в математической форме. Тесты по теоретической механике существенно отличаются от вербальных тестов, так как в них используется большое количество векторов, изображающих физические величины.

Тестовое задание по теоретическому материалу курса, отражает основные понятия, законы и уравнения теоретической механики.

Настоящее учебное пособие предназначено для проведения самоконтроля перед текущим и промежуточным тестированием. В основу пособия положены вопросы самоконтроля из "Курса теоретической механики" Яблонского А. А.

Рекомендуется перед использованием пособия изучить курс теоретической механики по одному из учебников, приведенных в библиографическом списке.

Пособие рассчитано на студентов очной и заочной форм системы обучения и может быть использовано в качестве справочного пособия для инженеров и других специалистов.

ВОПРОСЫ И ОТВЕТЫ ПО СТАТИКЕ

Что называется связью?

Тело, ограничивающее свободу движения данного твёрдого тела, является по отношению к нему связью.

В чём заключается принцип освобождаемости от связей?

Несвободное твёрдое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей.

Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакции известны.

а) гладкая плоскость (реакция направлена перпендикулярно к плоскости);

б) нить, канат (реакция направлена вдоль нити);

в) шарнирно-подвижная опора (реакция проходит через центр шарнира перпендикулярно к опорной плоскости);

г) опорный стержень с шарнирами на концах (реакция направлена по стержню).

Как определяется направление равнодействующей системы сходящихся сил?

Равнодействующая $\overline{R}$ сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил $\overline{F}_k$ и равна их геометрической сумме.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n$$

Равнодействующая направлена по прямой, соединяющей начало первой и конец последней силы.

Каковы условия и уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил?

Условиями равновесия выражаются замкнутостью силового многоугольника, т. е. начало первой и конец последней силы совпадают.

Для плоской сходящейся системы сил имеем два уравнения равновесия.

$$\sum X_k = 0, \ \sum Y_k = 0.$$

Как формулируется план решения задач статики на равновесие сил?

Все задачи на равновесие сил, приложенных к некоторому телу, решаются по следующему плану:

а) Показываем действующие на тело задаваемые силы.

б) Мысленно освобождаем тело от связей, заменяя их действие реакциями связей.

в) К полученной системе сил применяем условия равновесия, соответствующие этой системе.

г) Определяем искомые величины.

Как формируется теорема о равновесии трёх непараллельных сил?

Линии действия трёх непараллельных, взаимно уравновешивающихся сил пересекаются в одной точке.

В чём заключается сущность способа вырезания узлов?

Способ вырезания узлов состоит в том, что мысленно вырезают узлы фермы, прикладывают к ним соответствующие внешние силы и реакции стержней и составляют по два уравнения равновесия сил, приложенных к данному узлу. Реакции стержней направляют от узлов. Если в результате вычислений получат ответ со знаком минус, то соответствующий стержень сжат.

Каковы леммы о нулевых стержнях?

Если усилия в отдельных стержнях загруженной фермы равны нулю, стержни принято называть нулевыми стержнями.

Лемма 1. Если в незагруженном узле фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю.

Лемма 2. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, из которых два расположены по одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в двух первых стержнях равны между собой.

Лемма 3. Если в узле фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю данной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

Сформулируйте теоремы о парах сил на плоскости.

а) Пару сил можно перемещать в любое положение в плоскости её действия.

б) Пары сил, моменты которых численно равны и одинаковы по знаку, эквивалентны.

в) Момент пары сил, эквивалентной рассматриваемой системе пар на плоскости, равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

Сформулируйте условие равновесия пар на плоскости.

Пары сил на плоскости уравновешиваются в том случае, если алгебраическая сумма их моментов равна нулю.

Как направлены реакции опор балки, нагруженной парой сил и лежащей на двух опорах, одна из которых – шарнирно-неподвижная, а другая – на катках?

Так как заданная нагрузка состоит только из пары сил, то реакции опор должны составить пару сил, параллельных реакции опоры на катках и направленную в сторону обратную направлению приложенной пары сил.

Зависит ли главный вектор и главный момент заданной системы сил от выбора центра приведения?

Главный вектор, равный геометрической сумме всех сил системы, не зависит от выбора центра привидения.

Главный момент, равный алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра привидения, зависит от выбора этого центра, так как выбор центра привидения влияет на величину и знак главного момента.

Каковы возможные случаи приведения сил, произвольно расположенных на плоскости?

а) Главный вектор $\overline{P} = 0$, главный момент $M_O = 0$. В этом случае силы взаимно уравновешиваются.

б) Главный вектор $\overline{P} = 0$, главный момент $M_O \neq 0$. Система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту сил относительно центра приведения.

в) Главный вектор $\overline{P} \neq 0$, главный момент $M_O = 0$. Система сил приводится к равнодействующей силе, равной главному вектору сил, линия действия которой проходит через центр приведения.

г) Главный вектор $\overline{P} \neq 0$, главный момент $M_O \neq 0$. Система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит от центра приведения на расстоянии $d = {}^{M_O}\!/_{P}$.

Сформулируйте теорему Вариньона.

Момент равнодействующей силы относительно любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

$$M_O\left(\overline{R}\right) = \sum_k M_O\left(\overline{F}_k\right).$$

Запишите системы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

$$a) \quad \sum X_k = 0, \quad \sum Y_k = 0, \quad \sum M_{k\,A} = 0;$$

$$б) \quad \sum X_k = 0, \quad \sum M_{k\,A} = 0, \quad \sum M_{k\,B} = 0;$$

$$в)\quad \sum M_{k_A} = 0,\quad \sum M_{k_B} = 0,\quad \sum M_{k_C} = 0.$$

Какие задачи называются статически определимыми?

Задачи, которые можно решать методами статики твёрдого тела, то есть задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил, называются статически определимыми.

В чём состоит условие равновесия сил, приложенных к рычагу?

При равновесии сил, приложенных к рычагу, алгебраическая сумма моментов всех задаваемых сил, относительно опорной точки равна нулю.

$$\sum M_{k_o} = 0.$$

Что называется коэффициентом устойчивости?

Коэффициентом устойчивости при опрокидывании принято определять отношением величины удерживающего момента к величине опрокидывающего момента.

$$k = \frac{M_{уд}}{M_{опр}}$$

В случае устойчивого равновесия $k > 1$.

В чём заключается сущность способа Риттера?

В ферме проводится сечение, рассекающее не более трёх стержней. Мысленно отбрасываем одну из частей фермы, заменяя её действие реакциями, направленными по стержням в сторону отброшенной части. Для определения известных усилий в стержнях составляем уравнения моментов относительно точек пересечения стержней (точки Риттера). Знак минус при решении уравнений означает, что стержень сжат.

Как определяется величина и направление силы трения?

При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения скольжения, модуль которой пропорционален нормальному движению N, а направление этой силы противоположно направлению скорости тела, равная $F_{тр} = f\,|N|$, где f — коэффициент трения скольжения.

Как аналитически определить равнодействующую пространственной системы сходящихся сил?

Модуль равнодействующей равен:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,;$$

где $X = \sum_k F_{k_X}$, $Y = \sum_k F_{k_Y}$, $Z = \sum_k F_{k_Z}$.

Направление равнодействующей определяется направляющими косинусами

$$\cos\left(\bar{R}, \bar{i}\right) = \frac{X}{R},\ \cos\left(\bar{R}, \bar{j}\right) = \frac{Y}{R},\ \cos\left(\bar{R}, \bar{k}\right) = \frac{Z}{R}.$$

Запишите условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

$$\sum_k F_{k_X} = 0,\ \sum_k F_{k_Y} = 0,\ \sum_k F_{k_Z} = 0.$$

Как определяется момент пары сил в пространстве?

Момент пары сил в пространстве рассматривают как вектор, направленный по перпендикуляру к плоскости пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару стремящейся вращать плоскость против движения часовой стрелки:

$$\bar{M}\left(\bar{F};\ \bar{F}'\right) = \overline{BA} \times \bar{F} = \overline{AB} \times \bar{F}' = \bar{M}_B\left(\bar{F}\right) = \bar{M}_A\left(\bar{F}'\right).$$

Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары

$$\bar{M}\left(\bar{F};\ \bar{F}'\right) = \pm F\,d = \pm F'\,d\,.$$

Перечислите теоремы о парах сил в пространстве.

а) Заданную пару сил, не изменяя её действия на твёрдое тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости движения пары.

б) Пары сил эквивалентны, если их моменты геометрически равны.

в) Момент пары сил, эквивалентной данной системе пар в пространстве, равен геометрической сумме моментов составляющих систему пар.

Запишите условия равновесия пар в пространстве.

Пары сил, расположенные произвольно в пространстве, уравновешиваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю

$$\sum_k \bar{M}_k = 0 .$$

Запишите момент силы относительно точки как векторное произведение.

Вектор момента силы $\bar{M}_o$ относительно точки можно рассматривать как векторное произведение радиуса вектора $\bar{r}$, проведённого из центра момента в точку приложения силы, на вектор силы $\bar{F}$.

$$\bar{M}_o = \bar{r} \times \bar{F} .$$

Как вычисляется момент силы относительно оси?

Моментом силы $\bar{F}$ относительно оси z называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля проекции $\bar{F}_1$ силы $\bar{F}$ на плоскость, перпендикулярную оси, на её плечо d_1 относительно точки O пересечения оси с плоскостью:

$$M_z = \pm F_1\, d_1 .$$

Какая зависимость существует между моментами силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку?

Проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, равна моменту силы относительно оси:

$$M_z = M_o \cos\left(\bar{M}_o, \bar{k}\right).$$

Выразите моменты силы относительно координатных осей через проекции силы на эти оси.

$$M_x = yZ - zY\,,\; M_y = zX - xZ\,,\; M_z = xY - yX\,.$$

Запишите главные моменты системы сил относительно точки и относительно оси.

Момент, равный геометрической сумме моментов всех заданных сил относительно точки O, называется главным моментом системы сил относительно этой точки.

$$\bar{M}_o = \sum_k M_{O_K} = \sum_k \bar{r}_k \times \bar{F}_k\,.$$

Момент, равный алгебраической сумме моментов всех заданных сил относительно оси z, называется главным моментом системы сил относительно оси z.

$$\bar{M}_Z = \sum_k \bar{M}_{Z_K} = \sum_k \bar{r}_{k_{XY}} \times \bar{F}_{k_{XY}}\,.$$

Какая зависимость существует между моментами силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку?

Проекция главного момента системы сил относительно некоторой точки на ось, проходящую через эту точку, равна главному моменту заданной системы сил относительно этой оси:

$$M_o \cos\left(\bar{M}_o, \bar{k}\right) = M_z\,.$$

К чему могут быть приведены силы, произвольно расположенные в пространстве?

Силы, произвольно расположенные в пространстве, всегда могут быть приведены к одной силе, равной их главному вектору, приложенной в центре приведения, и к паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.

Как вычисляются главный вектор и главный момент пространственной системы сил?

Модуль и направление главного вектора $\bar{P}$ определяются по формулам:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

$$\cos(\bar{P}, \bar{i}) = \frac{X}{P}, \ \cos(\bar{P}, \bar{j}) = \frac{Y}{P}, \ \cos(\bar{P}, \bar{k}) = \frac{Z}{P},$$

$$X = \sum X_k, \ Y = \sum Y_k, \ Z = \sum Z_k.$$

Модуль и направление главного момента $\bar{M}_o$ определяется по формулам:

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$\cos(\bar{M}_o, \bar{i}) = \frac{M_x}{M_o}, \ \cos(\bar{M}_o, \bar{j}) = \frac{M_y}{M_o}, \ \cos(\bar{M}_o, \bar{k}) = \frac{M_z}{M_o},$$

$$M_x = \sum (y_k Z_k - z_k Y_k), \ M_y \sum (z_k X_k - x_k Z_k), \ M_z = \sum (x_k Y_k - y_k X_k).$$

Каковы условия равновесия произвольной пространственной системы сил?

Равновесию произвольной пространственной системы сил соответствуют два условия равновесия

$$\bar{M} = \bar{M}_o = 0, \ \bar{P} = 0,$$

которым соответствуют шесть уравнений равновесия

$$\sum X_k = 0, \ \sum Y_k = 0, \ \sum Z_k = 0,$$

$$\sum M_{k_x} = 0, \ \sum M_{k_y} = 0, \ \sum M_{k_z} = 0$$

Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?

Равновесию пространственной системы параллельных сил соответствуют три условия равновесия:

$$\sum Z_k = 0,\ \sum M_{k_x} = 0,\ \sum M_{k_y} = 0.$$

Как формулируется теорема Вариньона для пространственной системы мил?

Момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этой точки, а момент равнодействующей силы относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

$$\overline{M}_O\left(\overline{R}\right) = \sum_k \overline{M}_O\left(\overline{F}_k\right).$$

К какому простейшему виду можно привести пространственную систему сил, если главный момент относительно различных точек:

а) имеет одно и то же значение, не равное нулю;

б) равен нулю;

в) имеет различные значения и перпендикулярен к главному вектору;

г) имеет различные значения и не перпендикулярен главному вектору?

а) В случае, если $\overline{M}_o = const$, главный вектор $\overline{P} = 0$ и силы приводятся к паре сил с моментом равным главному моменту заданных сил относительно центра приведения.

б) Если $\overline{M}_o = 0$, а $\overline{P} \neq 0$, силы приводятся к равнодействующей силе, линия действия которой проходит через центр приведения.

в) Если $\overline{M}_o \perp \overline{P}$, силы приводятся к равнодействующей равной главному вектору $\overline{P}$ и приложенной в точке K, находятся на расстоянии $OK = {}^{M}\!/_{P}$ от точки O.

г) Если $\bar{M}_o$ не перпендикулярен $\bar{P}$, систему сил можно привести к силовому винту – динаме, представляющей собой совокупность силы и пары сил расположенной в плоскости, перпендикулярной к линии действия этой силы, с моментом равным:

$$M^* = M_o \cos\left(\bar{M}_o, \bar{P}\right) = \frac{\bar{P} \cdot \bar{M}_o}{P}.$$

Назовите инварианты системы сил.

а) Главный вектор данной системы сил инвариантен по отношению к центру приведения.

б) Скалярное произведение главного вектора на главный момент данной системы сил инвариантно по отношению к центру приведения:

$$\bar{P} \cdot \bar{M}_o = const.$$

в) Проекция главного момента системы сил относительно любого центра на направление главного вектора есть величина постоянная:

$$\bar{M}^* = \bar{M}_o \cos\left(\bar{M}_o, \bar{P}\right).$$

Запишите уравнение центральной оси системы.

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z} = \frac{M^*}{R}.$$

Что называется параметром динамы?

Постоянная линейная величина, равная $p = \frac{\bar{M}^*}{P} = \frac{\bar{P} \cdot \bar{M}_o}{P^2}$, называется параметром винта или динамы.

Каким свойством обладает центр тяжести?

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется центром тяжести. Направление сил притяжения отдельных частиц тела к Земле практически параллельны между собой. Равнодействующая этих параллельных сил, равная их сумме, есть вес тела, а центр этой системы сил, в котором приложен вес тела, называется центром тяжести. В твердом теле центр тяжести не зависит от расположения тела в пространстве.

По каким формулам вычисляется положение центра тяжести однородного тела?

Радиус-вектор и координаты центра тяжести однородного тела определяются по формулам:

$$\overline{r}_c = \frac{\sum\limits_k \overline{r}_k\ \Delta P_k}{P} \text{ или } x_c = \frac{\sum\limits_k x_k\ \Delta P_k}{P},\ y_c = \frac{\sum\limits_k y_k\ \Delta P_k}{P},\ z_c = \frac{\sum\limits_k z_k\ \Delta P_k}{P},$$

где $\overline{r}_k$, x_k, y_k, z_k — радиус-векторы и координаты центров тяжести отдельных частей тела.

По каким формулам определяются координаты объема тела, плоских фигур к линии?

Координаты объёма тела определяются по формулам:

$$\overline{r}_c = \frac{1}{V}\int\limits_V \overline{r}\ dV \text{ или } x_c = \frac{1}{V}\int\limits_V x\ dV,\ y_c = \frac{1}{V}\int\limits_V y\ dV,\ z_c = \frac{1}{V}\int\limits_V z\ dV.$$

Координаты центра тяжести пластинок (плоских фигур) определяются по формулам:

$$\overline{r}_c = \frac{1}{S}\int\limits_S \overline{r}\ dS \text{ или } x_c = \frac{1}{S}\int\limits_S x\ dS,\ y_c = \frac{1}{S}\int\limits_S y\ dS.$$

Координаты центра тяжести линий определяются по формулам:

$$\overline{r}_c = \frac{1}{\ell}\int\limits_\ell \overline{r}\ d\ell_k \text{ или } x_c = \frac{1}{\ell}\int\limits_\ell x\,d\ell,\ y_c = \frac{1}{\ell}\int\limits_\ell y\,d\ell,\ z_c = \frac{1}{\ell}\int\limits_\ell z\ d\ell.$$

Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси? Как он вычисляется и какую размерность имеют?

Сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав площади фигуры, на алгебраические значения их расстояний до некоторой оси, называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно этой оси.

$$S_x = \sum y_k\ S_k = S\ y_c\ ;\ S_y = \sum x_k\ S_k = S\ x_C$$

Статический момент площади плоской фигуры относительно оси измеряется в $см^3$.

Статический момент площади плоской фигуры относительно оси, проходящей через центр тяжести фигуры, равен нулю.

Какими вспомогательными теоремами пользуются при определении положения центра тяжести?

Теорема 1. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то его центр тяжести находится в этой плоскости.

Теорема 3. Объём тела вращения, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры, но не пересекающей её, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описанной её центром тяжести.

Теорема 4. Площадь поверхности вращения, полученной вращением плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой, но её не пересекающей, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной её центром тяжести.

Какими способами можно определить положение центра тяжести площади в случае, если известны положения центров тяжести отдельных её частей?

а) Метод группировки или разбиения.

Если определить центры тяжести отдельных частей фигуры, то центр тяжести можно определить по формулам:

$$x_c = \frac{S_1\, x_1 + S_2\, x_2 + \ldots}{\sum S_k};\; y_c = \frac{S_1\, y_1 + S_2\, y_2 + \ldots}{\sum S_k}.$$

б) Метод отрицательных площадей.

Если в пластине имеется отверстие, то отверстие рассматривается как площадь с отрицательной массой.

Назовите основные аксиомы статики.

а) Под действием взаимно уравновешивающихся сил материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

б) Две силы, приложенные к твёрдому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны, и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.

в) Если к твёрдому телу, находящемуся под действием некоторой системы сил, приложить уравновешенную систему или исключить такую систему сил, то получится система сил эквивалентная заданной системе.

г) Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

д) Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

е) Равновесие сил, приложенных к деформирующемуся телу, сохраняется при его затвердевании.

Как определяется проекция силы на ось?

Проекция силы $\overline{F}$ на ось определяется произведением модуля силы на косинус угла α между положительным направлениям оси и силы

$$F_x = F\cos\alpha \, .$$

а) Проекция положительна, если $\angle\alpha < 90$ $F_x = F\cos\alpha$,

б) Проекция равна нулю, если $\angle\alpha = 90$ $F_x = F\cos 90 = 0$,

в) Проекция отрицательна, если $\angle\alpha > 90$ $F_x = F\cos\alpha = -F\cos\beta$, где β — острый угол между линией действия силы с осью.

Как определяется момент силы относительно точки на плоскости?

Моментом силы относительно некоторой точки O на плоскости называется произведение модуля силы не её плечо относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус:

$$M_o = \pm Fd \, .$$

Плечом d силы $\overline{F}$ относительно точки O называют длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы.

Момент силы относительно точки O будем считать положительным, если сила $\overline{F}$ стремится повернуть плоскость чертежа вокруг точки O в сторону, противоположную движению часовой стрелки, и отрицательным – в обратном случае.

ВОПРОСЫ И ОТВЕТЫ ПО КИНЕМАТИКЕ

Какие кинематические способы задания движения точки существуют и в чём состоит каждый из этих способов?

Существуют: естественный, векторный и координатный способы задания движения точки.

а). Естественный способ задания движения применяется в случае, когда траектория точки заранее известна (прямая или кривая линия). Положение движущейся точки на траектории определяется дуговой координатой, отсчитываемой от начала отсчёта:

$$S = f(t).$$

б). При векторном способе задания движения положение точки в пространстве определяется заданием радиус-вектора $\bar{r}$, проведённого из неподвижного центра в данную точку.

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

в). При координатном способе задания движения положение точки в декартовой системе координат Ox, Oy, Oz определяется тремя координатами.

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t),\ \ z = f_3(t).$$

Чем является траектория точки при векторном способе задания движения точки?

Траектория точки является годографом её радиус-вектора $\bar{r}$.

Как по уравнениям движения точки в координатной форме определить её траекторию?

Для получения уравнения траектории необходимо исключить из уравнений движения параметр t (время).

Если движение точки в плоскости задано уравнениями:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t).$$

то, решив первое уравнение относительно t, получим $t = \varphi(x)$. Подставив t во второе уравнение, получим уравнение траектории:

$$y = f_2[\varphi(x)].$$

Чему равен вектор скорости точки в данный момент и какое направление он имеет?

Скорость $\overline{v}$ – это векторная величина, характеризующая быстроту и направление движения точки в данной системе отсчёта. Вектор скорости равен производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}}.$$

Вектор скорости точки $\overline{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Как связан орт касательной к кривой с радиус-вектором движущейся точки?

$$\overline{\tau} = \frac{d\,\overline{r}}{d\,s}.$$

Чему равна проекция скорости точки на касательную к её траектории и модуль её скорости?

Производная от дуговой координаты по времени ds/dt представляет собой проекцию вектора скорости $\overline{v}$ на касательную к траектории:

$$\overline{v} = \overline{\tau}\frac{ds}{dt} = \overline{\tau}\,\dot{s}.$$

Модуль скорости точки равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени $v = |\dot{s}|$.

Как определяются проекции скорости точки на неподвижные оси декартовой системы координат?

$$v_x = \dot{x}\,;\ v_y = \dot{y}\,;\ v_z = \dot{z}\,.$$

Как определяется величина и направление вектора скорости при координатном способе задания движения точки?

Величина вектора скорости определяется через его проекции:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,.$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\overline{v}, x) = \frac{v_x}{v}\,;\ \cos(\overline{v}, y) = \frac{v_y}{v}\,;\ \cos(\overline{v}, z) = \frac{v_z}{v}\,.$$

Чему равен вектор ускорения точки и как он направлен по отношению к годографу скорости?

Ускорение $\vec{a}$ — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения модуля и направления скорости точки.

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}}\,.$$

Как направлены естественные координатные оси в каждой точке кривой?

Естественными координатными осями называются три взаимно перпендикулярные оси: касательная, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, главная нормаль, направленная в сторону вогнутости кривой и бинормаль, направленная перпендикулярно плоскости проведённой через касательную и главную нормаль.

Каковы величина и направление вектора кривизны $\overline{\chi}$ кривой в данной точке?

Вектор кривизны кривой в данной точке равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате:

$$\overline{\chi} = \frac{d\overline{\tau}}{dt}.$$

Вектор кривизны $\overline{\chi}$ расположен в соприкасающейся плоскости и направлен по главной нормали к центру кривизны кривой:

$$\overline{\chi} = \overline{n}\frac{1}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны кривой.

В какой плоскости расположено ускорение точки и чему равны его проекции на естественные координатные оси?

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и равен геометрической сумме двух векторов, один из которых направленный по главной нормали, называется нормальным ускорением, а другой, направлен по касательной, называется касательным ускорением.

$$\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau.$$

Проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки на радиус кривизны.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Проекция ускорения на касательную равна первой производной от алгебраической величины скорости или второй производной от дуговой координаты по времени

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}.$$

Как определяется величина и направление ускорения точки при естественном способе задания движения?

Величина ускорения равна:

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2}\ .$$

Направление ускорения определяется углом β между вектором $\vec{a}$ и главной нормалью:

$$\beta = arctg\frac{a_\tau}{a_n}.$$

Что характеризует собой касательное ускорение?

Касательное ускорение существует лишь при неравномерном движении и характеризует изменение скорости по величине.

При каком движении точки равно нулю касательное ускорение, и при каком – нормальное?

Касательное ускорение равно нулю $(a_\tau = 0)$, при равномерном движении точки.

Нормальное ускорение равно нулю $(a_n = 0)$ в случае прямолинейного движения точки.

Как классифицируются движения точки по ускорениям?

Если во всё время движения касательное ускорение равно нулю $a_\tau = \dot{v} = 0$, то движение называется равномерным.

Если касательное ускорение точки во всё время движения постоянно $a_\tau = const$, то движение называется равнопеременным.

Как определяются проекции ускорения на неподвижные оси декартовых координат?

Проекции ускорения на неподвижные оси равны первым производным по времени от проекций скоростей на соответствующие оси или вторым производным от соответствующих координат точки:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Как определяется модуль и направление ускорения при координатном способе задания движения точки?

Модуль ускорения определяется через проекции:

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}.$$

Направление ускорения $\overline{a}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\overline{a}, x) = \frac{a_x}{a},\ \cos(\overline{a}, y) = \frac{a_y}{a},\ \cos(\overline{a}, z) = \frac{a_z}{a}.$$

Что характеризует собой нормальное ускорение?

Нормальное ускорение существует лишь при криволинейном движении и характеризует изменение направления скорости.

В какие моменты времени нормальное ускорение в криволинейном движении может обратиться в нуль?

Нормальное ускорение в данный момент времени может быть равно нулю $a_n = 0$ в том случае, когда в данный момент скорость точки обращается в нуль (точка меняет направление движения), или, когда движущаяся точка находится в точке перегиба своей траектории $\rho = \infty$.

В какие моменты времени касательное ускорение в неравномерном движении может обратиться в нуль?

Если в данный момент времени $a_\tau = 0$, то в этот момент величина скорости достигает максимума или минимума.

Если $a_\tau = 0$ в течение некоторого промежутка времени, то на этом интервале времени численная величина скорости постоянна и движение является равномерным криволинейным, а ускорение направлено по главной нормали.

Чем отличается график пути от графика движения точки?

Графиком движения точки называется график зависимости её дуговой координаты s от времени t.

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени, представляет собой сумму абсолютных значений элементарных перемещений за этот промежуток времени, т. е. линия этого графика непрерывно поднимается вверх независимо от направления движения.

Как по графику движения определить алгебраическую величину скорости точки?

Для определения скорости точки в любой момент времени следует провести касательную к графику движения в соответствующей точке, определить угол α наклона этой касательной к оси t и определить скорость

$$v = tg(\alpha).$$

Как по графику скорости определить алгебраическую величину касательного ускорения точки?

Для определения касательного ускорения точки следует провести касательную к графику скорости в соответствующей точке и найти угол наклона β этой касательной к оси t. Тангенс угла β определяет алгебраическую величину касательного ускорения:

$$a_\tau = tg(\beta).$$

В каком случае полное ускорение точки в течение некоторого промежутка времени может быть равно нулю.

Полное ускорение может быть равно нулю $\overline{a} = 0$, когда точка движется относительно выбранной системы отсчёта равномерно и прямолинейно.

Назовите основные виды движения твёрдого тела.

Различают пять видов движения твёрдого тела: поступательное, вращательное, плоскопараллельное (плоское), сферическое и общий случай движения твёрдого тела.

Какое движение твёрдого тела называется поступательным?

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Все точки твёрдого тела, движущегося поступательно, описывают тождественные и параллельные между собой траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Какое движение твёрдого тела называется вращательным?

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на прямой, называемой осью вращения.

При этом все остальные точки движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Как определяется положение вращающегося тел?

Положение вращающегося тела в любой момент времени определяется углом поворота φ, являющегося функцией времени t.

$$\varphi = f(t).$$

Это уравнение представляет собой уравнение вращательного движения тела.

Какая величина называется угловой скоростью?

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется угловой скоростью тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Какая величина называется угловым ускорением?

Алгебраическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется угловым ускорением тела

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Какое вращение называется равномерным?

Если во всё время движения $\omega = const$ $(\varepsilon = 0)$, то вращение называется равномерным.

Какое вращение называется равнопеременным?

Вращение тела, при котором угловое ускорение постоянно $\varepsilon = const$, называют равнопеременным вращением. При этом если абсолютная величина угловой скорости увеличивается, вращение называют равноускоренным, а если уменьшается — равнозамедленным

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Каким образом характеризуется вращение твёрдого тела векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$?

Состояние движения вращающегося твёрдого тела в данный момент характеризуется вектором $\overline{\omega}$, направленным по оси вращения в ту сторону, откуда вращение представляется происходящим против часовой стрелки.

Угловое ускорение вращающегося твёрдого тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}}$, направленного вдоль оси вращения. При этом направление $\overline{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\overline{\omega}$, когда тело вращается ускоренно, и противоположно $\overline{\omega}$, когда вращение является замедленным.

Как определяется скорость точки вращающегося тела?

Модуль вращательной скорости точки твёрдого тела равен произведению кратчайшего расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела:

$$v = \omega h .$$

Вектор вращательной скорости $\overline{v}$ направлен перпендикулярно радиусу в сторону вращения.

Как определяется вектор скорости $\overline{v}$ при помощи формулы Эйлера?

Вращательная скорость точки равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки относительно оси вращения:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} .$$

Как определяются проекции скорости точки на оси координат по формулам Эйлера, если осью вращения является ось z?

$$v_x = -\omega\, y ,\ v_y = \omega\, x ,\ v_z = 0 ,$$

где x, y - координаты точки.

Как определяется ускорение точки вращающегося твёрдого тела?

Ускорение точки вращающегося твёрдого тела равно геометрической сумме нормального и касательного ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_n + \overline{a}_\tau .$$

Как определяются величины нормального и касательного ускорений точки вращающегося тела?

Модуль нормального ускорения равен произведению кратчайшего расстояния (радиуса) от точки до оси вращения на квадрат полной угловой скорости тела:

$$a_n = \omega^2 h .$$

Модуль касательного ускорения равен произведению кратчайшего расстояния (радиуса) от точки до оси вращения на абсолютное значение углового ускорения тела:

$$a_\tau = \varepsilon h .$$

Как определяется величина полного ускорения точки вращающегося твёрдого тела?

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau{}^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} .$$

Направление определяется углом β, составленным полным ускорением $\overline{a}$ с радиусом окружности, тангенс которого:

$$tg(\beta) = \frac{\varepsilon}{\omega^2} .$$

При равномерном вращении $\omega = const \Rightarrow \varepsilon = 0$:

$$\overline{a} = \overline{a}_n \text{ и } a = \omega^2 h .$$

В этом случае ускорение $\vec{a}$ направлено по радиусу к центру окружности, описываемой точкой.

Как определяются векторы касательного $\overline{a}_\tau$ и нормального $\overline{a}_n$ ускорений?

Касательное ускорение точки вращающегося твёрдого тела равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки относительно оси вращения:

$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} .$$

Нормальное ускорение точки вращающегося твёрдого тела равно векторному произведению вектора угловой скорости тела на вращательную скорость этой точки:

$$\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right).$$

Как вычисляются проекции ускорения точки тела, вращающегося вокруг оси z?

$$a_x = -\varepsilon y - \omega^2 x,\ a_y = \varepsilon x - \omega^2 y,\ a_z = 0.$$

Какое движение твёрдого тела называется плоским?

Плоскопараллельным (или плоским) движением твёрдого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно неподвижной (основной) плоскости.

Назовите основные виды движения плоской фигуры.

Положение плоской фигуры определяется тремя параметрами: координатами полюса $x_c = f_1(t)$, $y_c = f_2(t)$ и углом поворота относительно полюса $\varphi_c = f_3(t)$.

Основными видами движения плоской фигуры являются поступательное движение вместе с полюсом c и вращательное движение относительно полюса. Причём, поступательное движение зависит от выбора полюса, а вращательное от выбора полюса не зависит.

Как определяется скорость любой точки плоской фигуры при разложения плоского движения на поступательное и вращательное?

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\overline{v}_c$ и вращательной скорости этой точки относительно полюса $\overline{v}_{MC}$:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_C + \overline{v}_{MC}.$$

Вектор $\overline{v}_{MC} = \overline{\omega} \times \overline{MC}$ перпендикулярен прямой (MC), соединяющей точку M с полюсом C.

Скорость точки изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке на скорости полюса, перенесённой в точку, и вращательной скорости точки вокруг полюса.

Назовите следствия из теоремы о скоростях точек плоской фигуры.

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую их соединяющую равны между собой.

Следствие 2. Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками.

Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей?

Точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей (МЦС). Мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости точки $\overline{v}_M$, на расстоянии от точки, равном $\frac{v_M}{\omega}$.

Как определяются скорости точек плоской фигуры при помощи мгновенного центра скоростей?

Скорость любой точки плоской фигуры в данный момент времени представляет собой вращательную скорость этой точки вокруг мгновенного центра скоростей:

$$v_M = PM\ \omega,\ \overline{v}_M \perp PM,$$

т. е. скорость любой точки плоской фигуры имеет модуль, равный произведению мгновенной угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры.

Модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_M}{v_A} = \frac{PM}{PA}.$$

Сформулируйте теорему Шаля.

Плоскую фигуру можно переместить из одного положения в любое другое положение на плоскости одним поворотом этой фигуры вокруг некоторого неподвижного центра.

Предельным положением центра поворота является точка неподвижной плоскости, с которой в данный момент совпадает мгновенный центр скоростей плоской фигуры. Эта точка называется мгновенным центром вращения фигуры.

Что представляет собой неподвижная и подвижная центроиды и что происходит с центрами при действительном движении плоской фигуры?

Кривая, представляющая геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости, называется неподвижной центроидой.

Кривая, представляющая геометрическое место мгновенных центров скоростей, неизменно связанная с подвижной плоской фигурой, называется подвижной центроидой.

При действительном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде (теорема Пуансо).

Как определяется ускорение любой точки плоской фигуры?

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении вокруг полюса.

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^{вр} + \overline{a}_{MA}^{цс}$$

где $a_{MA}^{вр} = MA\,\varepsilon$, $\overline{a}_{MA}^{вр} \perp MA$, $a_{MA}^{цс} = MA\,\omega^2$, $\overline{a}_{MA}^{вр} \to (\cdot)A$.

Ускорение точки M плоской фигуры определяется путём построения многоугольника ускорений.

Назовите следствия теоремы об ускорениях точек плоской фигуры.

Следствие 1: Проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проведённую из произвольного полюса через эту точку, не может быть больше проекции ускорения полюса на ту же ось.

Следствие 2: Концы ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между этими точками.

Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром ускорений, и может ли мгновенный центр ускорений совпадать с мгновенным центром скоростей?

Точка Q, ускорение которой в данный момент равно нулю, называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q являются различными точками плоской фигуры.

Перечислите известные вам способы определения положения мгновенного центра ускорений.

а) По условию задачи известна точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Эта точка является мгновенным центром ускорений.

б) Известны модуль и направление ускорения точки плоской фигуры, алгебраические величины угловой скорости ω и углового ускорения ε.

МЦУ находится на отрезке, составляющем с вектором ускорения $\overline{a}_M$ угол $\alpha = arctg\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$, который отложен от вектора ускорения точки в сторону ε на расстоянии от точки M, равном:

$$MQ = \frac{a_M}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

в) Известны модули и направления ускорений двух точек A и M плоской фигуры.

Примем точку A за полюс, тогда:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}.$$

Построим при точке M параллелограмм ускорений по заданной диагонали $\overline{a}_M$ и одной из сторон $\overline{a}_A$. Другая сторона параллелограмма определит ускорение $\overline{a}_{MA}$. Ускорение $\vec{a}_{MA}$ составляет угол $\alpha = arctg\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ с отрезком MA. Отложим угол α от ускорений точек A и M по направлению ε. Точка пересечения полупрямых Q и будет мгновенным центром ускорений.

Как определяются ускорения точек плоской фигуры через мгновенный центр ускорений?

Модули ускорений точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы ускорений составляют с отрезками, соединяющими эти точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол $\alpha = arctg\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

$$a_M = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \frac{a_M}{a_B} = \frac{QM}{QB}$$

Какими параметрами определяется положение твёрдого тела с одной неподвижной точкой?

Движение твёрдого тела, одна из точек которого во всё время движения остаётся неподвижной, называют сферическим движением твёрдого тела. При таком движении все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям. Положения тела в этом случае определяются тремя углами Эйлера:

$$\psi = f_1(t)\,,\ \theta = f_2(t)\,,\ \varphi = f_3(t)\,,$$

где ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения.

Как формулируется теорема Эйлера-Даламбера о перемещении твёрдого тела с одной неподвижной точкой?

Твёрдое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

Что называют мгновенной осью вращения твёрдого тела с одной неподвижной точкой и каковы уравнения мгновенной оси вращения в неподвижной и подвижной системах осей декартовых координат?

Мгновенная ось представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент равны нулю.

Уравнения мгновенной оси в неподвижной системе осей:

$$\left.\begin{aligned} \omega_y z - \omega_z y = 0 \\ \omega_z x - \omega_x z = 0 \\ \omega_x y - \omega_y x = 0 \end{aligned}\right\} \text{или } \frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

Здесь x, y, z - координаты точек мгновенной оси.

Уравнения мгновенной оси в подвижной системе осей:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\varsigma}\zeta-\omega_{\zeta}\varsigma=0\\ \omega_{\zeta}\xi-\omega_{\xi}\zeta=0\\ \omega_{\xi}\varsigma-\omega_{\varsigma}\xi=0\end{aligned}\right\}\text{ или }\frac{\xi}{\omega_{\xi}}=\frac{\varsigma}{\omega_{\varsigma}}=\frac{\zeta}{\omega_{\zeta}}.$$

Здесь ξ,ς,ζ — координаты точек мгновенной оси.

Как определяется модуль и направление углового ускорения тела при сферическом движении?

Вектор углового ускорения равен производной от вектора производной от вектора угловой скорости:

$$\overline{\varepsilon}=\dot{\overline{\omega}},$$

т. е. угловое ускорение тела геометрически равно линейной скорости конца вектора угловой скорости. Прямая по которой направлен вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon}$, называется осью углового ускорения.

Как определяются скорости точек тела при сферическом движении?

Скорость любой точки тела можно определить как скорость во вращательном движении вокруг мгновенной оси:

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r},$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор точки, проведённый из неподвижной точки.

Модуль скорости точки определяется:

$$v=\omega\, r\sin(\gamma)=\omega\; h_{\omega},$$

где γ — угол между $\vec{r}$ и мгновенной осью вращения,

h_{ω} — кратчайшее расстояние точки от мгновенной оси вращения.

Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат определяются по формулам Эйлера:

$$V_x=\omega_y\, z-\omega_z\, y,\quad V_y=\omega_z\, x-\omega_x\, z,\quad V_z=\omega_x\, y-\omega_y\, x.$$

Какие модули и направления имеют составляющие ускорения точки тела при сферическом движении?

Ускорение любой точки тела при сферическом движении определяется как геометрическая сумма её вращательного и осестремительного ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}^{вр} + \overline{a}^{ос}.$$

Вектор вращательного ускорения $\overline{a}^{вр} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{r}$ в ту сторону, откуда поворот $\overline{\varepsilon}$ к $\overline{r}$ на наименьший угол виден проходящим против часовой стрелки.

Модуль вращательного ускорения:

$$a^{вр} = h_{\varepsilon}\varepsilon,$$

где h_{ε} — кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси углового ускорения.

Вектор осестремительного ускорения $\overline{a}^{ос} = \overline{\omega} \times \overline{V}$ направлен перпендикулярно к мгновенной оси вращения.

Модуль осестремительного ускорения:

$$a^{ос} = h_{\omega}\omega^2,$$

где h_{ω} - кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси вращения.

Модуль ускорения точки как диагонали параллелограмма ускорений определяется:

$$a = \sqrt{a^{вр2} + a^{ос2} + 2a^{вр}a^{ос}\cos(\overline{a}^{вр}, \overline{a}^{ос})}.$$

На какие составляющие движения можно разложить движение свободного твёрдого тела и как они зависят от выбора полюса?

Движение свободного твёрдого тела можно рассматривать как сложное, состоящее из поступательного вместе с полюсом, и сферическое движение вокруг этого полюса.

Таким образом, движение свободного твёрдого тела определяется шестью уравнениями:

$$x_0 = f_1(t),\ y_0 = f_2(t),\ z_0 = f_3(t),$$
$$\psi = f_4(t),\ \theta = f_5(t),\ \varphi = f_6(t).$$

Поступательная часть движения зависит от выбора полюса, сферическая часть от выбора полюса не зависит.

Как определяются скорости точек свободного твёрдого тела?

Скорость любой точки свободного твёрдого тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости точки в её сферическом движении вокруг полюса

$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r}\ .$$

Как определяются ускорения точек свободного твёрдого тела?

Ускорение точки свободного твёрдого тела равно геометрической сумме ускорения полюса, осестремительного ускорения и её вращательного ускорения, определённых относительно мгновенной оси и оси углового ускорения, проходящего через полюс

$$\overline{a} = \overline{a}_0 + \overline{a}^{вр} + \overline{a}^{ос}\ .$$

Дайте определение относительного, переносного и абсолютного движения точки.

Движение точки по отношению к подвижной системе отсчёта называют относительным движением точки.

Движение подвижной системы отсчёта и неизменно связанного с ней тела по отношению к неподвижной системе отсчёта является для точки переносным движением.

Движение точки по отношению к неподвижной системе отсчёта называют абсолютным.

Как определяется абсолютная скорость точки в составном движении?

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме её переносной и относительной скоростей:

$$\overline{v} = \overline{v}_e + \overline{v}_r .$$

Так как абсолютная скорость точки определяется диагональю параллелограмма, построенной на переносной скорости $\overline{v}_e$ и относительной скорости $\overline{v}_r$, то её модуль можно вычислить по формуле:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\left(\overline{v}_e, \overline{v}_r\right)} .$$

Как определяется абсолютное ускорение точки при непоступательном переносном движении?

В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова (поворотного) ускорений.

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c .$$

Как определяется абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении?

В случае поступательного переносного движения абсолютное ускорение равно геометрической сумме её переносного и относительного ускорений.

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r .$$

Каковы причины появления кориолисова (поворотного) ускорения?

Появление ускорения Кориолиса (поворотного ускорения) обуславливается двумя причинами:

а) вследствие относительного движения точки, перемещающейся по отношению к подвижной системе отсчёта, изменяется переносная скорость точки;

б) вследствие вращательного переносного движения дополнительно изменяется направление относительной скорости по отношению к неподвижной системе отсчёта.

Каковы модуль и направление ускорения Кориолиса и при каких условиях ускорение оно равно нулю?

$$\overline{a}_c = 2\,\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r$$

Модуль ускорения Кориолиса:

$$a_c = 2\,\omega_e\, v_r \sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r\right).$$

Направление ускорения Кориолиса определяется по правилу векторного произведения.

Ускорение Кориолиса равно нулю в трёх случаях:

1) если $\overline{\omega}_e = 0$;

2) если $\overline{v}_r = 0$;

3) если $\sin\left(\overline{\omega}_e, \overline{v}_r\right) = 0$, т. е. в случае, когда относительная скорость точки $\overline{v}_r$ параллельна оси переносного вращения.

Что представляет собой абсолютное движение тела, которое участвует в нескольких вращениях вокруг сходящихся мгновенных осей?

Если твёрдое тело одновременно совершает вращение вокруг нескольких мгновенных осей, пересекающихся в одной точке результирующим движением, будет вращение с угловой скоростью $\overline{\omega}$ абсолютного вращения тела, равной геометрической сумме скоростей составляющих движений.

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_k .$$

Как определяется угловая скорость твёрдого тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в одном направлении?

Модуль абсолютной угловой скорости равен сумме модулей угловых скоростей составляющих вращений:

$$\omega = \omega_r + \omega_e .$$

Мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры лежит в плоскости, проходящей через оси переносного и относительного вращений, и будучи им параллельной, делит расстояние между осями внутренним образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Как определяется угловая скорость твёрдого тела, вращающегося вокруг двух параллельных осей в разных направлениях?

Модуль абсолютной угловой скорости равен разности угловых скоростей составляющих вращений:

$$\omega = \omega_r - \omega_e .$$

Мгновенная ось абсолютного вращения плоской фигуры параллельна осям переносного и относительного вращений и лежит в плоскости, проходящей через эти оси, угловая скорость вращения вокруг которой больше.

Расстояния между осью абсолютного вращения и осями переносного и относительного вращения обратно пропорционально угловым скоростям.

Что называют парой вращений и чему равна скорость этого результирующего движения?

Совокупность двух вращений тела, направленных в противоположные стороны и имеющих равные модули угловых скоростей, называют парой вращений.

Результирующим движением является поступательное движение со скоростью, равной произведению модуля угловой скорости ω на расстояние d между осями вращения:

$$V = \omega\, d .$$

Вектор $\overline{v}$ направлен перпендикулярно плоскости пары угловых скоростей $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

ВОПРОСЫ И ОТВЕТЫ ПО ДИНАМИКЕ

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Сформулируйте основные законы механики.

Основные законы механики (законы Галилея-Ньютона):

- Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.
- Закон пропорциональности силы и ускорения. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.
- Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.
- Закон независимости действия сил. Несколько одновременно действующих на точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Какое уравнение называется основным уравнением динамики?

Соотношение, устанавливающее связь между силой $\overline{F}$, массой m и ускорением $\overline{a}$ материальной точки называется основным уравнением динамики

$$\overline{F} = m\overline{a}.$$

Какова мера инертности твердых тел при поступательном движении?

В классической механике масса движущего тела принимается равной массе покоящегося тела, т. е. она рассматривается как постоянная величина, являющаяся мерой инертности тела.

Зависит ли вес тела от местонахождения тела на Земле?

Вес тела $P = mg$, а т. к. ускорение свободного падения g зависит от геометрической широты места и от его высоты над уровнем моря, то в отличие от массы тела его вес не является постоянной величиной.

Какую систему отсчета называют инерциальной?

Система отсчета, в которой проявляются первый и второй законы, называется инерциальной системой отсчета. Для большинства задач за такую систему отсчета можно принять систему осей, связанных с Землей.

К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?

Сила инерции материальной точки представляет собой противодействие материальной точки изменению ее скорости и приложена к телу, сообщающему этой точке ускорение. Сила инерции равна по модулю произведению массы материальной точки на модуль ее ускорения и направлена в сторону, противоположную ускорению

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}\ .$$

Каковы модули и направления касательной и нормальной сил инерции материальной точки?

При неравномерном криволинейном движении точки силу инерции, представленной в виде касательной $(\bar{\Phi}_\tau)$, и нормальной $(\bar{\Phi}_n)$ силами инерции. Эти силы направлены противоположно касательному и нормальному ускорению

$$\bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau,\ \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n,\ \Phi_\tau = m\frac{dv}{dt}, \Phi_n = m\frac{v^2}{\rho}\ .$$

При каком движении материальной точки равна нулю ее касательная сила инерции и при каком — нормальная?

В случае равномерного движения точки по кривой $\overline{\Phi}_\tau = 0$. В случае равномерного движения точки по прямой $\overline{\Phi}_n = 0$.

По каким формулам вычисляются модули вращательной и центробежной сил инерции точки, принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси?

Если точка принадлежит твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то модуль ее вращательной и центробежной сил инерции определяется по формулам:

$$\Phi_\tau = mR|\varepsilon|,\ \Phi_n = mR\omega^2,$$

где ε, ω — угловое ускорение и угловая скорость тела.

Какие уравнения динамики являются естественными уравнениями движения материальной точки?

Естественными уравнениями движения точки являются:

$$m\ddot{s} = \sum F_i \cdot \cos(\overline{F}_i, \overline{\tau}),\ m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_i \cdot \cos(\overline{F}_i, \overline{n}), \sum F_i \cdot \cos(\overline{F}_i, \overline{b}) = 0.$$

Каковы две основные задачи динамики точки, которые решаются с помощью дифференциальных уравнений движения материальной точки?

- Первая задача динамики. Зная массу точки m и уравнения ее движения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.
- Вторая задача динамики. Зная силы, действующие на точку, ее массу m, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнения движения точки.

Как определяются постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

Значения постоянных интегрирования определяют по начальным условиям движения t_0, x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Эти значения подставляют в уравнения, представляющие общие решения дифференциальных уравнений движения точки.

Динамика несвободной материальной точки.

В каких случаях материальную точку называют несвободной и каковы дифференциальные уравнения движения этой точки?

Несвободной материальной точкой называется точка, движение которой ограничивается связями. Дифференциальные уравнения движения этой точки имеют вид

$$m\ddot{x} = X + N_x,\ m\ddot{y} = Y + N_y,\ m\ddot{z} = Z + N_z,$$

где $N_x, N_y\ , N_z$ — проекции нормальной реакции $\overline{N}$ на оси x, y z.

Дайте определения стационарных и нестационарных, голономных и неголономных связей.

Если равенства, выражающие связи явно не содержат время, их называют стационарными, а если в эти равенства явно входит время – нестационарными.

Связь называется голономной, если она выражается уравнением не содержащим производных от координат.

Если дифференциальное уравнение, выражающее связь, не интегрируемо, то эта связь называется неголономной.

Какие связи называют двусторонними? односторонними?

Связь называется двусторонней, если накладываемые ее на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих поверхности, на которых должна находиться эта точка. Двусторонняя связь препятствует перемещению точки в двух противоположных направлениях. Ограничения, накладываемые на координаты точки односторонней связью, выражаются неравенствами. Односторонняя связь препятствует перемещению точки тела лишь в одном направлении.

В чем сущность принципа освобождаемости от связей?

Принцип освобождаемости от связей позволяет рассматривать движение несвободной материальной точки как движение свободной точки под действием задаваемых сил и реакций связей.

Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа? Что называют множителем Лагранжа?

Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа имеют вид:

$$m\ddot{x} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}; \quad m\ddot{y} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \quad m\ddot{z} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

где $\lambda = \dfrac{N}{\Delta f}$ – множитель Лагранжа; N – нормальная реакция; $f(x, y, z)$ – уравнение поверхности, по которой движется точка.

Динамика относительного движения материальной точки.

Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции?

Переносная сила инерции $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ численно равная произведению массы на переносное ускорение ma_e и направлена противоположно переносному ускорению $\bar{a}_e$.

Сила инерции $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ численно равна произведению массы на ускорение ma_c и направлена противоположно ускорению Кориолиса $\bar{a}_c$.

В чем заключается различие между дифференциальными уравнениями относительного и абсолютного движений материальной точки?

Уравнение динамики относительного движения точки в случае непоступательного переносного движения можно рассматривать как абсолютное если к действующим на точку силам присоединить переносную и кориолисову силы инерции

$$m\overline{a}_\tau = \sum \overline{F}_i + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c.$$

Как определяются переносная и кориолисова силы инерции в различных случаях переносного движения?

Если переносное движение – неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, то переносная сила инерции имеет две составляющие: вращательную $\overline{\Phi}_e^{вр} = -m\overline{a}_e^{вр}$ и центробежную $\overline{\Phi}_e^{ц} = -m\overline{a}_e^{n}$

$$\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_e^{вр} + \overline{\Phi}_e^{ц}.$$

Переносная вращательная сила инерции $\overline{\Phi}_e^{вр}$ направлена противоположно вращательному ускорению, а ее модуль

$$\Phi_e^{вр} = mr\left|\varepsilon_e\right|.$$

Переносная центробежная сила инерции $\overline{\Phi}_e^{ц}$ направлена противоположно центростремительному ускорению, т. е. направлена по радиусу от оси вращения, а ее модуль

$$\Phi_e^{ц} = mR\omega_e^2$$

Сила инерции Кориолиса $\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c$ направлена противоположно ускорению Кориолиса, и ее модуль

$$\Phi_c = 2m\left|\overline{\omega}_e\right| \cdot \left|\overline{V}_r\right| \cdot \sin(\overline{\omega}_e, \overline{V}_r).$$

В чем состоит сущность принципа относительности классической механики?

Принцип относительности классической механики можно сформулировать так: никакие механические явления, происходящие в среде, не могут обнаружить ее прямолинейного и равномерного поступательного движения.

Какие системы отсчета называются инерциальными?

Системы координат, в которых относительное движение точки по отношению к подвижной системе отсчета, движущейся поступательно прямолинейно и равномерно, происходит так же, как и по отношению к неподвижной системе, называются инерциальными.

Каково условие относительного покоя материальной точки?

Материальная точка находится в состоянии относительного покоя, если геометрическая сумма приложенных к точке сил и переносной силы инерции равны нулю.

$$\sum \bar{F}_i + \bar{\Phi}_e = 0 .$$

В каких точках земной поверхности сила тяжести имеет наибольшее и наименьшее значения?

Наибольший вес тело имеет на полюсе, а наименьший на экваторе.

Чем объясняется отклонение падающих тел к востоку?

Тела, падающие на землю, незначительно отклоняются от вертикали на восток за счет того, что сила инерции Кориолиса направлена на восток,

$$\Phi_c = 2m\left|\bar{\omega}_e\right| \cdot \left|\bar{V}_r\right| \cdot \cos\varphi ,$$

где φ — широта, на которой находится точка.

В каком направлении отклоняется тело, брошенное вертикально вверх?

Тело, брошенное вертикально вверх, отклоняется от вертикали на запад, т. к. сила инерции Кориолиса в этом случае направлена перпендикулярно плоскости меридиана к западу.

СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Как классифицируют в динамике силы, действующие на точки механической системы?

Силы, действующие на систему несвободных точек можно разделить на:

- задаваемые (активные силы и реакции связей)
- внешние и внутренние ($\overline{F}^e$ и $\overline{F}^i$).

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек, не входящих в состав системы.

Внутренними силами называют силы взаимодействия между точками данной системы.

Что называют центром масс системы точек и как определяют его координаты?

Центром масс системы называется геометрическая точка, в которой сосредоточена масса системы, радиус вектор которой

$$\overline{r}_c = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{\sum m_i}.$$

Координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Что называют моментом инерции твердого тела относительно плоскости, оси и точки?

Моментом инерции твердого тела относительно плоскости называют скалярную величину, равную сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до плоскости

$$I_{y0x} = \sum m_i x_i^2,\ I_{z0x} = \sum m_i y_i^2,\ I_{x0y} = \sum m_i z_i^2.$$

Моментом инерции твердого тела относительно оси называют скалярную величину, равной сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2),\ I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2),\ I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Моментом инерции относительно полюса (полярным моментом инерции) называют скалярную величину, равную сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от точки до этого полюса

$$I_0 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Между этими моментами существует зависимости:

$$I_0 = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y + I_z),\ I_x = I_{z0x} + I_{x0y},\ I_y = I_{x0y} + I_{y0z},\ I_z = I_{y0z} + I_{z0x}$$

Какую величину называют радиусом инерции тела относительно оси?

Радиус инерции i_z определяет расстояние от оси z до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы момент инерции точки относительно этой оси был равен моменту инерции тела

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{m}}.$$

Каковы размерности момента инерции в системах единиц МКС, СГС и МКГСС?

Единицей измерения момента инерции в системе МКС является 1 $кг \cdot м^2$, в системе СГС — 1 $г \cdot см^2$, в системе МКГСС — 1 $кГс \cdot м \cdot с^2$, в системе СИ — 1 $кг \cdot м^2$.

Какова зависимость между моментами инерции, а также между радиусами инерции тела относительно параллельных осей?

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси z_1, равен моменту инерции относительно параллельной оси z, проходящей через его центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния d между осями

$$I_{z_1} = I_{C_x} + md^2 .$$

Зависимость между радиусами инерции относительно этих осей

$$i_{z_1}^2 = i_z^2 + d^2 .$$

Что представляет собой эллипсоид инерции и какие оси называют главными осями инерции твердого тела в данной точке?

Уравнение $Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1$ представляет поверхность, по которой перемещается точка N, при изменении направления оси ν при условии $ON = \dfrac{1}{\sqrt{I_\nu}}$ этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции.

Три оси симметрии эллипсоида инерции называются главными осями инерции тела в точке O, а моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции.

Коэффициенты A, B, C представляют собой моменты инерции относительно главных осей инерции в данной точке, а D, E, F – центробежные моменты инерции.

При каких условиях некоторая ось является главной осью инерции в данной точке?

Некоторая ось является главной осью инерции, если центробежные моменты инерции равны нулю.

Что называется центробежным моментом инерции твердого тела?

Величины $I_{yz} = \sum m_i y_i z_i$, $I_{zx} = \sum m_i z_i x_i$, $I_{xy} = \sum m_i x_i y_i$ называют центробежными моментами инерции. Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Как определить по эллипсоиду инерции, относительно какой оси из всех осей, проходящих через данную точку, момент инерции твердого тела имеет наибольшее значение?

Момент инерции тела относительно оси можно определить на расстоянии ON_1 от начала координат О до точки N_1, в которой ось Y_1, пересекает эллипсоид инерции

$$I_{v_1} = \frac{1}{(ON_1)^2}.$$

Какими свойствами обладают главные и главные центральные оси инерции?

Главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех свои точек.

Главная ось инерции, не проходящая через центр масс твердого тела, является главной осью инерции лишь в одной своей точке.

Если однородное тело имеет ось симметрии, то эта ось является его главной центральной осью инерции.

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то во всех точках этой плоскости одна из главных осей инерции направлена по перпендикуляру к этой плоскости.

Как вычисляют момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей или не проходящей через центр масс тела?

Если ось проходит через центр масс тела, то вычисляют моменты инерции тел A, B, C относительно главных центральных осей инерции и определяют момент инерции относительно центральной оси C_ν

$$I_{C\nu} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

где α, β, γ — углы между осью ν и главными центральными осями инерции.

Если ось не проходит через центр масс тела, то сначала определяют его момент инерции относительно оси $C\nu$, параллельной оси ν и проходящей через центр C масс тела. Затем прибавляют произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$I_\nu = I_{c\nu_1} + md^2.$$

Относительно какого полюса момент инерции данного тела имеет наименьшее значение?

Центр масс тела является полюсом, относительно которого полярный момент инерции тела имеет наименьшее возможное значение

$$I_C = \tfrac{1}{2}\left(I_{Cx} + I_{Cy} + I_{Cz}\right).$$

Что называют тензором инерции тела в данной точке и что он характеризует?

Матрица

$$I_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

называется симметричным тензором инерции второго ранга. Тензор инерции характеризует распределение массы тела относительно данной точки O.

Теорема о движении центра масс.

Сформулируйте теорему о движении центра масс системы.

Центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все силы, действующие на систему.

Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, имеющей массу данного тела, и почему?

Поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной из его точек. Следовательно, решив задачу о движении центра масс тела как материальной точки с массой тела, можно определить поступательное движение всего тела.

При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя и при каких условиях он движется равномерно и прямолинейно?

Если главный вектор внешних сил остается все время равным нулю и начальная скорость V_{C_0} центра масс равна нулю, то центр масс находится в покое.

Если главный вектор внешних сил остается все время равным нулю и начальная скорость $\overline{V}_{C_0} \neq 0$, то центр масс движется равномерно и прямолинейно.

При каких условиях центр масс системы не перемещается вдоль некоторой оси?

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось остается все время равной нулю и проекция скорости на эту ось равна нулю, то координата центра масс по этой оси остается постоянной.

Какое действие на свободное твердое тело оказывает приложенная к нему пара сил?

Если приложить пару сил к свободному твердому телу, находящемуся в покое, то под действием этой пары сил тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

Теорема об изменении количества движения.

Как определяется импульс переменной силы за конечный промежуток времени? Что характеризует импульс силы?

Импульс переменной силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равен

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F}\, dt .$$

Импульс силы характеризует передачу телу механического движения со стороны действующих на нее тел за данный промежуток времени.

Чему равны проекции импульса постоянной и переменной силы на оси координат?

Проекции импульса переменной силы на оси координат равны

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt ,\ S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt ,S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt .$$

Проекции импульса постоянной силы на оси координат за промежуток времени τ равны

$$S_x = F_x \tau ,\ S_y = F_y \tau ,\ S_z = F_z \tau .$$

Чему равен импульс равнодействующей?

Импульс равнодействующей нескольких сил за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов составляющих сил за этот же промежуток времени

$$\overline{S} = \sum \overline{S}_i .$$

Как изменяется количество движения точки, движущейся равномерно по окружности?

При равномерном движении точки по окружности изменяется направление количества движения $m\overline{V}$, но сохраняется его модуль mV.

Что называется количеством движения механической системы?

Количеством движения механической системы называется вектор равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движений всех точек системы

$$\overline{K} = \sum m_i \overline{V}_i = M\,\overline{V}_c .$$

Чему равно количество движения маховика, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр тяжести?

Количество движения маховика, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр тяжести, равно нулю, т. к. $V_C = 0$.

Сформулируйте теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы в дифференциальной и конечной формах. Выразите каждую из этих теорем векторным уравнением и тремя уравнениями в проекциях на оси координат.

Дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу действующих на точку сил

$$d(m\overline{V}) = \overline{F}\,dt .$$

Изменение количества движений точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени

$$m\overline{V}_2 - m\overline{V}_1 = \sum \overline{S}_i .$$

В проекциях эти теоремы имеют вид

$$d(mV_x)=F_x dt\,,\ d(mV_y)=F_y dt\,,\ d(mV_z)=F_z dt$$

$$mV_{2x}-mV_{1x}=\sum S_{ix}\,,\ mV_{2y}-mV_{1y}=\sum S_{iy}\,, mV_{2z}-mV_{1z}=\sum S_{iz}\,.$$

Производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на систему

$$\frac{d\overline{K}}{dt}=\overline{R}^e\,.$$

Производная по времени от проекции количества движения механической системы на любую ось равна проекции главного вектора внешних сил на ту же ось

$$\frac{dK_x}{dt}=R_x^e\,,\ \frac{dK_y}{dt}=R_y^e\,,\frac{dK_z}{dt}=R_z^e\,.$$

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе, за тот же промежуток

$$\overline{K}_2-\overline{K}_1=\sum\overline{S}_i^e\,.$$

Изменение проекции количества движения системы на любую ось равно сумме проекций импульсов всех внешних сил, действующих на систему, на ту же ось

$$K_{2x}-K_{1x}=\sum S_{ix}^e\,,\ K_{2y}-K_{1y}=\sum S_{iy}^e\,, K_{2z}-K_{1z}=\sum S_{iz}^e\,.$$

При каких условиях количество движения механической системы не изменяется? При каких условиях не изменяется его проекция на некоторую ось?

Если главный вектор внешних сил за рассматриваемый промежуток времени равен нулю, то количество движения системы постоянно.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Почему происходит откат орудия при выстреле?

Откат орудия при выстреле по горизонтальному направлению обусловлен тем, что проекция количества движения на горизонтальную ось x не изменяется при отсутствии горизонтальных сил

$$m_{сн}V_{сн_x} + m_{оруд}V_{оруд_x} = 0\,, V_{оруд_x} = -\frac{m_1}{m_2}V_{сн_x}\,.$$

Могут ли внутренние силы изменить количество движения системы или количество движения ее части?

Т. к. главный вектор внутренних сил равен нулю, то они не могут изменить количество движения системы.

Теорема об изменении кинетического момента.

Как определяются моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси? Какова зависимость между ними?

Кинетический момент материальной точки относительно центра равен векторному произведению радиуса вектора $\overline{r}$, проведенного от центра О в точку, на вектор количества движения $m\overline{V}$

$$\overline{l}_O = \overline{r} \times m\overline{V}\,.$$

Кинетический момент точки относительно оси, походящую через центр О, равен проекции момента количества движения относительно этого центра на эту ось

$$l_{Oz} = l_O \cdot \cos(\overline{l}_O, \overline{k})\,.$$

При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси равен нулю?

Если вектор количества движения точки $m\overline{V}$ параллелен или пересекает ось, то его момент относительно этой оси равен нулю.

Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов сил, действующих на точку, относительно того же центра

$$\frac{d\overline{l}_O}{dt} = \sum m_O(\overline{F}_i).$$

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой неподвижной оси центра равна алгебраической сумме моментов сил, действующих на систему, относительно этой же оси

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_i).$$

Почему траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы, лежит в одной плоскости?

Так как линия действия центральной силы проходит через неподвижный центр, момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным

$$\overline{l}_O = const.$$

Что называют кинетическим моментом механической системы относительно центра или оси?

Кинетическим моментом (или главным моментом количеств движений механической системы) относительно данного центра называют вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\overline{L}_O = \sum \overline{l}_{iO} = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{V}_i.$$

Кинетическим моментом механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этой оси.

$$L_z = \sum l_{iz} = L_O \cdot \cos(\bar{L}_O, \bar{k}).$$

Сформулируйте теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно центра и относительно оси.

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно того же центра

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^e.$$

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна главному моменту внешних сил относительно той же оси

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{Oz}^e.$$

При каких условиях остается постоянным кинетический момент механической системы относительно центра, и при каких — кинетический момент относительно оси?

Если главный момент внешних сил $(\bar{M}_O^e)$ относительно неподвижного цента равен нулю, то кинетический момент $\bar{L}_O$ механической системы относительно этого центра остается постоянным.

$$\bar{M}_O^e = 0, \ \bar{L}_O = const.$$

Если главный момент внешних сил (M_{Oz}^{e}) относительно оси остается все время равным нулю, то кинетический момент $\overline{L}_{Oz}$ относительно этой оси остается постоянным

$$M_{Oz}^{e} = 0, \; L_{Oz} = const.$$

Какова кинетическая интерпретация теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно центра?

Скорость конца вектора кинетического момента механической системы относительно неподвижного центра геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра (теорема Резаля)

$$\overline{U} = \frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^{e}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии.

Каковы две меры механического движения и соответствующие им измерители действия силы?

В механике рассматривается два случая преобразования механического движения:

- механическое движение переносится с одной системы на другую в качестве механического движения (количество движения). Мерой движения силы в этом случае является вектор импульса силы $\overline{S}$.
- механическое движение превращается в другую форму движения (потенциальной энергии, теплоты и т. д.). В качестве меры механического движения выступает кинетическая энергия. Мерой действия силы в этом случае является работа.

Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?

Работа постоянной силы равна произведению модуля силы на длину пути, пройденного точкой приложения силы и на косинус угла между направлениями вектора силы и вектора перемещения точки ее приложения.

$$A = F\,S\cos(\overline{F},\overline{S}).$$

Чему равна работа силы трения скольжения, если эта сила постоянна по модулю и направлению?

Работа постоянной силы трения скольжения равна $A = -F_{mp}\,S$.

Каким простым способом можно вычислить работу постоянной по модулю и направлению силы на криволинейном перемещении?

При вычислении работы силы на криволинейном перемещении криволинейное перемещение можно заменить прямолинейным и определить работу по формуле

$$A = \overline{F}\cdot\overline{S}.$$

Чему равна работа равнодействующей силы?

Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении

$$A = \sum\int_{M_1}^{M_2}\overline{F}_i\cdot d\overline{r}.$$

Как выразить элементарную работу силы через элементарный путь точки приложения силы и как — через приращение дуговой координаты этой точки?

Элементарная работа силы $\overline{F}$ на участке dS определяется по формуле

$$\delta A = F\,dS\cos(\overline{F},\overline{V}).$$

Работу на перемещении dS совершает только касательная составляющая силы $F_\tau = F\cos(\overline{F},\overline{\tau})$

$$\delta A = F_\tau \cdot dS .$$

Каково векторное выражение элементарной работы?

Элементарную работу силы $\overline{F}$ на элементарном перемещении $d\overline{r}$ можно представить как скалярное произведение $\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r}$.

Каково выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси координат?

Элементарная работа силы $\overline{F}$ на перемещении $d\overline{r}$ через проекции F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz может быть представлена в виде

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Напишите различные виды криволинейного интеграла, определяющего работу переменной силы на конечном криволинейном перемещении.

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M2} F \cos\left(\overline{F},\overline{V}\right) dr , \ A_{1,2} = \int_{M_1}^{M2} F \cos\left(\overline{F},\overline{\tau}\right) dS , \ A_{1,2} = \int_{M_1}^{M2} F_\tau dS ,$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M2} \overline{F} \cdot d\overline{r} , A_{1,2} = \int_{M_1}^{M2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right).$$

В чем состоит графический способ определения работы переменной силы на криволинейном перемещении?

Для графического определения работы силы $\overline{F}$ на перемещении M_1M_2 по оси абсцисс откладываются значения дуговой координаты точки S, а по оси ординат – соответствующие значения проекции силы на касательную F_τ. Работа силы $\overline{F}$ на перемещении M_1M_2 изобразиться площадью фигуры, ограниченной осью абсцисс, кривой $F_\tau = f(s)$ и ординатами ac и bd, соответствующими точками M_1 и M_2.

Как вычисляются работа силы тяжести и работа силы упругости?

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории. Работа силы упругости определяется по формуле

$$A_{1,0} = -c\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = -\frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right),$$

где x_0 — начальная деформация.

На каких перемещениях работа силы тяжести: а) положительна, б) отрицательна, в) равна нулю?

Работа силы тяжести на перемещении M_1M_2:

а) положительна, если точка M_1 расположена выше точки M_2

б) отрицательна, если точка M_1 расположена ниже точки M_2

$$A_{1,2} = \pm GH\,,$$

где знак плюс соответствует перемещению точки вниз, а знак минус – перемещению точки вверх.

В каком случае работа силы упругости положительна и в каком — отрицательна?

Работа силы упругости отрицательна в том случае, когда деформация увеличивается, т. е. когда сила упругости направлена противоположно перемещению ее точки приложения, и положительна, когда деформация уменьшается.

Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен сумме элементарных работ, приложенных к точке сил

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\sum\delta A_i\,.$$

Изменение кинетической энергии точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении

$$\frac{mV_2^2}{2}-\frac{mV_1^2}{2}=\sum A_i\,.$$

Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении. Почему равна нулю работа кориолисовой силы инерции?

Выражение теоремы об изменение кинетической энергии для относительного движения точки имеет вид

$$\frac{mV_{2r}^2}{2}-\frac{mV_{1r}^2}{2}=\sum\int_{M_1}^{M_2}F_i\cos\left(\overline{F}_i,\overline{V}_r\right)dS_r+\int_{M_1}^{M_2}\Phi_e\cos\left(\overline{\Phi}_e,\overline{V}_r\right)dS_r\,.$$

Сила инерции Кориолиса $\overline{\Phi}_c$ всегда перпендикулярна относительной скорости точки $\overline{V}_r$. Следовательно, работа силы инерции Кориолиса на относительном перемещении точки равна нулю.

Какова сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела?

Т. к. каждой внутренней силе соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению, то сумма элементарных работ всех внутренних сил равна нулю.

Как вычисляется сумма элементарных работ внешних сил, приложенных к твердому телу: а) в случае поступательного движения; б) в случае его вращения вокруг неподвижной оси и в) в общем случае его движения?

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно, равна элементарной работе главного вектора внешних сил, приложенного в любой точке тела

$$\delta A^e = \overline{R}^e \cdot d\overline{r}\,.$$

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота

$$\delta A = M_z^e\, d\varphi\,.$$

Элементарная работа внешних сил, приложенных к свободному твердому телу в общем случае его движения, равна сумме элементарных работ их главного вектора на перемещение точки его приложения и главного момента этих сил относительно мгновенной оси, проходящей через полюс, на перемещение при повороте вокруг этой оси

$$\delta A = \overline{R}^e \cdot d\,\overline{r}_O + M_O^e\, \delta\varphi\,.$$

Как вычисляется мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω?

Изменение работы за единицу времени называется мощностью силы

$$N = \frac{dA}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{V} = F\,V \cos(\overline{F},\overline{V}) = F_x V_x + F_y V_y + F_z V_z\,.$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω то мощность сил определяется по формуле

$$N = M_z^e \omega\,.$$

Что представляет собой сопротивление качению? Что называется коэффициентом трения качения и какова его размерность?

При качении цилиндрического катка по не абсолютно твердой поверхности происходит деформация соприкасающихся поверхностей и линия действия нормальной реакции оказывается сдвинутой в сторону движения катка на некоторое расстояние δ от линии действия силы веса P. Реакция плоскости N и вес P образуют пару сил сопротивления с плечом δ. Момент этой пары называется моментом сопротивления качению

$$M_{mp} = N\delta .$$

Коэффициент трения качения δ имеет размерность длины.

Сформулируйте теорему Кенига о кинетической энергии механической системы в общем случае ее движения.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее движении относительно центра масс

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \sum \frac{m_i V_{ir}^2}{2} .$$

Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в различных случаях его движения?

Кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости

$$T = \frac{1}{2} m V^2 .$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 .$$

При плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии в поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии во вращении тела относительно подвижной оси, проходящей через центр масс

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 .$$

Кинетическая энергия твердого тела, совершающего сферическое движение равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенной оси вращения на квадрат угловой скорости тела

$$T = \frac{1}{2} I_\Omega \omega^2 .$$

При этом значение момента инерции I_Ω непрерывно изменяется. Кинетическая энергия твердого тела в общем случае его движения равна сумме кинетической энергии тела, в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и сферическом движении относительно центра масс

$$T = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_\Omega \omega^2 .$$

Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

Дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ внешних $\overline{F}_i^e$ и внутренних сил $\overline{F}_i^i$ системы

$$dT = \sum A_i^e + \sum \delta A_i^i .$$

Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил системы

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_i^e + \sum N_i^i .$$

Изменение кинетической энергии системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^i \ .$$

Потенциальное силовое поле.

Какое силовое поле называется потенциальным?

Стационарное силовое поле называют потенциальным, если существует такая функция, однозначно зависящая от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются так:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Что называется силовой функцией?

Функцию $U = U(x_i, y_i, z_i)$, где $i = 1...n$ называют силовой функцией.

Как определить элементарную работу сил потенциального поля и работу этих сил на конечном перемещении системы, если известна силовая функция поля?

Если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле равна полному дифференциалу силовой функции.

$$\delta A = dU \ .$$

Какова работа сил, действующих на точки системы в потенциальном поле, на замкнутом перемещении?

Работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положении и не зависит от формы траектории точки

$$A_{1,2} = \int_1^2 dU = U_2 - U_1 .$$

Работа сил, действующих на точки механической системы в потенциальном поле на всяком замкнутом перемещении равна нулю, т. к. $U_2 = U_1$.

Чему равна потенциальная энергия системы в любом ее положении?

Потенциальная энергия системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенные к ее точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое

$$\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i) .$$

Чему равно изменение потенциальной энергии механической системы при перемещении ее из одного положения в другое?

Изменение потенциальной энергии механической системы при перемещении ее из одного положения в другое равно работе сил, приложенных к точкам системы, на том же перемещении

$$\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 = A_{1,2} .$$

Какая зависимость существует между силовой функцией потенциального поля и потенциальной энергией системы, находящейся в этом поле?

Потенциальная энергия системы Π отличается от силовой функции U, взятой со знаком минус, на постоянную величину U_0

$$\Pi = U_0 - U .$$

Как определяются проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на любую точку системы?

Проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на каждую точку системы, равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим координатам этой точки

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i},\ Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}.$$

Какие поверхности называются эквипотенциальными и каковы их уравнения?

Геометрическое место точек пространства, в которых потенциальная энергия имеет одно и то же значение называется поверхностью равного потенциала или эквивалентной поверхностью и определяется уравнением

$$\Pi(x_i, y_i, z_i) = C.$$

Как направлена сила, действующая на материальную точку в потенциальном поле, по отношению к эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку?

Сила $\overline{F}$ направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Чему равна потенциальная энергия материальной точки и механической системы, находящихся под действием сил тяжести?

Потенциальная энергия материальной точки, находящейся под действием силы тяжести, равна

$$\Pi = G z + C.$$

Потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием силы тяжести, равна произведению веса системы на высоту ее центра масс над нулевой эквипотенциальной поверхностью

$$\Pi = G z_C.$$

Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести и ньютоновой силы тяготения?

Эквипотенциальные поверхности поля силы тяжести представляют собой горизонтальные плоскости. Сила тяжести направлена перпендикулярно этим плоскостям в сторону уменьшения значений потенциальной энергии.

Эквипотенциальные поверхности поля силы притяжения представляют собой сферические поверхности с центром в точке О. Уравнение эквипотенциальных поверхностей имеет вид

$$r = const\,.$$

В чем заключается закон сохранения и превращения механической энергии?

При движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы при движении остается постоянной.

$$T + П = const\,.$$

Почему под действием центральной силы материальная точка описывает плоскую кривую?

Если материальная точка движется под действием центральной силы, то момент количества движения точки относительно центра постоянен и точка движется в плоскости перпендикулярной вектору $\overline{l}_O$.

Что называют секторной скоростью и как выразить ее модуль в полярных координатах?

Величина $\dfrac{d\overline{F}}{dt} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{r} \times \dfrac{d\overline{r}}{dt}\right|$ называется секторной скоростью.

В чем заключается закон площадей?

При движении точки под действием центральной силы площадь, описывается радиусом — вектором точки, изменяется пропорционально времени

$$F = ct + F_O\,.$$

Какой вид имеет дифференциальное уравнение в форме Бине, определяющее траекторию точки, движущейся под действием центральной силы?

Уравнение движения точки в форме Бине: $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=-\frac{r^2P_r}{4mc^2}$.

В случае притяжения, когда $P_r<0$, траектория обращена к полюсу О вогнутостью.

Принцип Даламбера.

В чем заключается сущность принципа Германа — Эйлера — Даламбера для материальной точки?

Геометрическая сумма всех приложенных к точке сил и силы инерции этой точки равны нулю.

$$\sum \overline{F}_k + \overline{\Phi} = 0.$$

Каким условиям удовлетворяют в любой момент времени главные векторы внешних задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек несвободной механической системы и главные моменты этих сил относительно любого неподвижного центра?

В любой момент времени геометрическая сумма главных векторов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек системы равны нулю.

В любой момент времени для всякой несвободной механической системы геометрическая сумма главных моментов задаваемых сил, реакций связей и сил инерции относительно любого неподвижного центра равна нулю.

Каковы модуль и направление главного вектора сил инерции механической системы?

Главный вектор сил инерции равен:

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}_C.$$

Модуль главного вектора сил инерции

$$\Phi = ma_C .$$

К чему приводятся силы инерции точек твердого тела:

а) при поступательном движении тела;

при поступательном движении силы инерции приводятся к равнодействующей силе, приложенной в центре масс тела, равной по модулю произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направлены противоположно этому ускорению;

б) при вращении тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной этой плоскости;

при вращении твердого тела, имеющего плоскость материальной симметрии, вокруг оси перпендикулярной этой плоскости, силы инерции приводятся к равнодействующей силе, лежащей в плоскости симметрии. Модуль и направление этой силы равны главному вектору сил инерции, а расстояние от ее линии действия до точки пересечения оси вращения с плоскостью симметрии равно

$$h = \frac{M^{\Phi}}{\Phi};$$

в) при плоском движении тела, имеющего плоскость материальной симметрии?

Если твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции $\overline{\Phi} = -m\overline{a}_C$, и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии, числовое значение момента которой определяется формулой:

$$M^{\Phi} = -I_C \varepsilon .$$

При каких условиях динамические давления вращающегося тела на опоры равны нулю?

Динамические составляющие реакций подшипников равны нулю в том случае, если ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела.

Принцип возможных перемещений.

Что представляют собой обобщенные координаты механической системы?

Независимые величины q_i, однозначно определяющие положение всех точек механической системы называются обобщенными координатами этой системы.

Чему равно число степеней свободы механической системы?

Для голономных систем число независимых обобщенных координат q_i механической системы равно числу степеней свободы этой системы.

В каком случае декартовы координаты точек системы зависят не только от обобщенных координат, но и от времени?

При наличии нестационарных связей декартовы координаты всех точек механической системы являются функциями не только обобщенных координат, но и времени

$$x_i = x_i(q_1, q_2 ... q_s, t),$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2 ... q_s, t),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2 ... q_s, t).$$

Что называют возможными перемещениями механической системы?

Возможными (или виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.

Зависят ли возможные перемещения от действующих на систему сил?

Возможные перемещения от действующих сил не зависят.

Какие связи механической системы называют идеальными?

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными.

Почему связь, осуществленная с трением, не является идеальной связью?

Так как возможное перемещение точки приложения силы трения лежит в плоскости, касательной опорной поверхности, и сила трения лежит в этой же плоскости, работа силы трения $-F_{тр}\,\delta S \neq 0$ и условие идеальности связей не выполняется.

Как формулируется принцип возможных перемещений?

Необходимое и достаточное условие равновесия системы сил, приложенных к механической системе, подчиненной стационарным двусторонним и идеальным связям, заключается в равенстве нулю суммы элементарных работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого ее положения.

Какие виды может иметь уравнение работ?

$$\sum \overline{F}_i \cdot \delta\overline{r}_i = 0,$$
$$\sum F_i \cos\left(\overline{F}_i, \delta\overline{S}_i\right)\delta S_i = 0,$$
$$\sum F_{i\tau}\,\delta S_i = 0.$$

Почему принцип возможных перемещений упрощает вывод условий равновесия сил, приложенных к несвободным системам, состоящим из большого числа тел?

Если система, состоящая из большого числа тел, имеет одну степень свободы, то принцип возможных перемещений устанавливает сразу условие равновесия задаваемых сил, приложенных к системе.

Как составляются уравнения работ для сил, действующих на механическую систему с несколькими степенями свободы?

Если система имеет несколько степеней свободы, то уравнения работ составляются для каждого независимого перемещения системы в отдельности и получается столько условий равновесия, сколько степеней свободы имеет механическая система.

Какова зависимость между движущей силой и силой сопротивления в простейших машинах?

Для установления зависимости движущей силы $\overline{F}$ или вращающего момента $M_{вр}$ и силы сопротивления $\overline{R}$ или момента сопротивления $M_{сопр}$ сообщает машине возможное перемещение и составляют уравнение работ

$$\overline{F} \cdot \delta \overline{r}_F + \overline{R} \cdot \delta \overline{r}_R = 0 \quad \text{или} \quad M_{вр}\,\delta\varphi - M_{сопр}\,\delta\varphi = 0 .$$

Как формулируется золотое правило механики?

То, что выигрывается в силе, теряется в скорости:

$$\frac{|F_\tau|}{|R_\tau|} = \frac{V_R}{V_F} \quad \text{или} \quad \left|\frac{M_{вр}}{M_C}\right| = \frac{\omega_C}{\omega} .$$

Каким образом определяют реакции связей с помощью принципа возможных перемещений?

Отбрасывают ту связь, реакцию которой требуется определить. Действие связи заменяют реакцией, которая переходит в число задаваемых сил. Системе сообщают возможное перемещение, соответствующее полученной степени свободы. Составляют уравнение работ, в которое входят задаваемые силы и реакция отброшенной связи. Из этого уравнения определяют искомую реакцию.

Общее уравнение динамики.

Какой вид имеет общее уравнение динамики?

Общее уравнение динамики показывает, что в любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции точек несвободной механической системы с двусторонними идеальными связями на любом возможном ее перемещении равна нулю.

$$\sum \overline{F}_i \cdot \delta \overline{r}_i + \sum \overline{\Phi}_i \cdot \delta \overline{r}_i = 0,$$

$$\sum \left[(X_i + \Phi_{ix}) \delta x_i + (Y_i + \Phi_{iy}) \delta y_i + (Z_i + \Phi_{iz}) \delta z_i \right] = 0,$$

$$\sum \left[(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \right] = 0.$$

Что называется обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате системы, и какую она имеет размерность?

Обобщенной силой Q_j, соответствующей обобщенной координате q_j, называют скалярную величину, определяемую отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванное элементарным приращением координаты q_j к величине этого приращения

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j}.$$

Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты q_j.

Чему равны обобщенные реакции идеальных связей?

В случае стационарных связей обобщенные реакции идеальных связей равны нулю.

Запишите общее уравнение динамики в обобщенных силах.

Общее уравнение динамики в обобщенных силах имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{s} \left(Q_j + Q_j^{\Phi} \right) \delta q_j = 0 \quad \text{или} \quad Q_j + Q_j^{\Phi} = 0, \ \ (j = 1 ... s).$$

Какой вид имеют условия равновесия сил, приложенных к механической системе, полученные из общего уравнения динамики в обобщенных силах?

Если механическая система находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, условия равновесия имеют вид:

$$Q_j = 0, \ \ (j = 1...s).$$

Какими формулами выражаются обобщенные силы через проекции сил на неподвижные оси декартовых координат?

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right).$$

Как определяются обобщенные силы в случае консервативных и в случае неконсервативных сил?

В случае консервативных сил $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j} \ \ (j = 1...s)$.

Каков вид условий равновесия сил, имеющих потенциал?

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \ \ (j = 1...s).$$

Дифференциальные уравнения в обобщенных координатах.

Функцией каких аргументов является вектор скорости точки, принадлежащей механической системе с s степенями свободы?

В случае стационарных связей вектор скорости точки является функцией обобщенных скоростей и обобщенных координат

$$\overline{V}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Чему равна частная производная от вектора скорости точки системы по какой-либо обобщенной скорости?

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j}.$$

Функцией каких аргументов является кинетическая энергия системы, подчиненной голономным нестационарным связям?

Кинетическая энергия в случае голономных нестационарных связей является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$T = T\left(q_s, \dot{q}_s, t\right).$$

Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2 \ldots s).$$

Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы.

Какой вид принимают уравнения Лагранжа второго рода в случае, когда на систему действуют одновременно консервативные и неконсервативные силы?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j^F.$$

Что представляет собой функция Лагранжа, или кинетический потенциал?

Кинетический потенциал является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

$$L = L(q_s, \dot{q}_s, t) = T - \Pi.$$

Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots s).$$

В зависимости от каких переменных величин должна быть выражена кинетическая энергия механической системы при составлении уравнений Лагранжа?

$$T = \sum_{m,j=1}^{s} m_i \frac{\partial \overline{r_i}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \overline{r_i}}{\partial q_m} \dot{q}_j \, \dot{q}_m.$$

Как определяется потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием сил упругости?

Потенциальная энергия механической системы, находящейся под действием сил упругости:

$$П = c\, f_{cm}\, z_c + c\frac{z_c^2}{2},$$

где f_{cm} – статическое удлинение пружины;

z_c – отклонение центра масс от положения покоя.

Какие обобщенные координаты называют циклическими и какой вид имеют циклические интегралы?

Обобщенные координаты, которые не входят явно в выражение кинетического потенциала L, называются циклическими координатами. Так, например, если тяжелая материальная точка массы m движется в пространстве, то при отсутствии сопротивления координаты x и y являются циклическими.

Равенства $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C_j = const \quad (j = 1, 2 \ldots s)$ называются циклическими интегралами.

При решении каких задач динамики голономных систем целесообразно использовать уравнения Нильсена?

Уравнения вида

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_j} - 2\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1,2...s)$$

называются уравнениями Нильсена.

Уравнения Нильсена целесообразно использовать при решении задач, связанных с расчетом систем, имеющих большое число степеней свободы.

Каково выражение кинетической энергии механической системы со стационарными связями?

Кинетическая энергия механической системы со стационарными связями является квадратичной формой обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k .$$

Каково выражение кинетического потенциала механической системы со стационарными связями?

В случае стационарных связей

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \Pi(q_s).$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Простейшие движения твердого тела

Каковы дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела?

$$m\ddot{x}_c = X^e,\ m\ddot{y}_c = Y^e, m\ddot{z}_c = Z^e .$$

По какой формуле вычисляется кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, относительно этой оси?

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела

$$L_z = I_z \omega .$$

Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси?

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum m_z(\overline{F}_i) .$$

При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси: а) ускоренно; б) равномерно; в) замедленно?

Если $\sum m_z(\overline{F}_i) > 0$, тело вращается ускоренно;

Если $\sum m_z(\overline{F}_i) < 0$, тело вращается замедленно;

Если $\sum m_z(\overline{F}_i) = 0$, вращение тела равномерное.

Мерой чего является момент инерции твердого тела относительно оси?

Момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении.

Каковы основные типы задач, которые можно решать с помощью дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси?

По дифференциальному уравнению вращательного движения можно решать следующие задачи:

1) По заданному уравнению вращения тела $\varphi = f(t)$ и его моменту инерции I_z определять главный момент внешних сил

$$M_z^e = I_z \ddot{\varphi}$$

2) По заданным внешним силам, начальным условиям φ_o и ω_O, и по моменту инерции тела I_z находить уравнение вращения тела $\varphi = f(t)$.

3) Определять момент инерции тела I_z относительно оси вращения, зная M_z^e и $\ddot{\varphi}$.

Какое положение механики иллюстрируется с помощью скамейки Жуковского?

Закон сохранения кинетического момента вращающейся системы иллюстрируется с помощью скамейки Жуковского

$$L_z = I_z\omega = const.$$

Что называют приведенной длиной, центром и осью качания физического маятника?

Формула $l = \frac{I_x g}{Gd} = \frac{I_x}{md}$ определяет приведенную длину физического маятника, т. е. длину такого математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Точка O_1, находящаяся на расстоянии $l = \frac{i_{Cx}^2}{d} + d$ от оси привеса, называется центром качаний. Ось, проходящая через центр качаний параллельно оси привеса, называется осью качаний.

Каким свойством обладают ось и привеса ось качаний физического маятника?

Если ось качаний физического маятника сделать осью привеса, то прежняя ось привеса станет его осью качаний.

По какой формуле вычисляется период малых колебаний физического маятника?

Период малых колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{Gd}}$.

Назовите способы опытного определения моментов инерции твердых тел и укажите, в чем заключается их сущность.

Способ качаний. Наблюдают время δ определенного числа колебаний n. По этим данным определяют период колебаний $T = \dfrac{\tau}{n}$ и определяют момент инерции детали относительно оси привеса

$$I_x = \frac{T^2 G d}{4\pi^2}.$$

Способ крутильных колебаний. Определяют период колебаний эталона T_1 и период крутильных колебаний испытуемой детали T_2. Зная момент инерции эталона I_{1z}, определяют момент инерции детали

$$I_{2z} = I_{1z}\frac{T_2^2}{T_1^2}.$$

Способ падающего груза. Определяют время падения груза G_1 с высоты H, повторяют тот же опыт с другим грузом G_2, определяя время его падения. Момент инерции махового колеса определяют по формуле

$$I_{Cx} = r^2\frac{\frac{1}{2H}\left(G_1 - G_2\right) - \frac{1}{g}\left(\frac{G_1}{T_1^2} - \frac{G_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}.$$

Динамика плоского движения.

Сформулируйте теорему о зависимости между кинетическими моментами механической системы относительно неподвижного центра и относительно центра масс системы в векторной форме.

Кинетический момент механической системы относительно неподвижного центра равен геометрической сумме момента относительно этого центра главного вектора количества движения, условно приложенного в центре масс, и кинетического момента системы в ее относительном движении относительно центра масс

$$\overline{L}_O = \overline{r}_c \times \overline{K} + \overline{L}_C = \overline{L}_{O\overline{K}} + \overline{L}_C .$$

Как формулируется теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс в векторной форме?

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра масс системы в ее относительном движении по отношению к этому центру геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на систему относительно центра масс

$$\frac{d\overline{L}_{Cr}}{dt} = \overline{M}_c^e .$$

В проекциях на оси координат имеем

$$\frac{dL_{xr}}{dt} = M_x^e , \ \frac{dL_{yr}}{dt} = M_y^e , \frac{dL_{zr}}{dt} = M_z^e .$$

Почему сила тяжести не влияет на изменение кинетического момента механической системы относительно центра масс и относительно любой оси, проходящей через центр масс системы?

Если единственной внешней силой, приложенной к системе, является сила тяжести, то главные моменты внешних сил относительно центра масс и относительно любой оси, через него проходящей, равны нулю. В этом случае кинетический момент относительно любой оси, проходящей через центр масс, остается постоянным.

Почему кинетический момент Солнечной системы относительно ее центра масс не изменяется?

Движение тел Солнечной системы происходит под действием внутренних сил взаимного притяжения между телами системы. Поэтому кинетический момент солнечной системы относительно ее центра масс должен оставаться неизменным по величине и направлению.

Какой вид имеют дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела и на основании каких теорем они получены?

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела имеют вид:

$$m\ddot{x}_c = \sum F_{ix}^e\,,\ m\ddot{y}_c = \sum F_{iy}^e\,, I_{C_z} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\vec{F}_i^e)\,.$$

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела получены из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении тела по отношению к центру масс.

Каким видом дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела удобно пользоваться, если задана траектория центра масс тела?

Если траектория центра масс задана, удобно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения точки С в проекциях на касательную и нормаль к этой траектории.

$$m\ddot{S}_C = \sum F_{i\tau}^e\,,\ \frac{mV_C^2}{\rho} = \sum F_{in}^e\,, I_{Cz} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\vec{F}_i^e)\,,$$

где S_C — угловая координата центра масс, V_C — его скорости, ρ — радиус кривизна траектории.

Динамика сферического и свободного движения твердого тела.

По каким формулам вычисляются кинетические моменты твердого тела относительно неподвижной точки и относительно координатных осей при его сферическом движении?

Кинетический момент твердого тела, совершающего сферическое движение относительно неподвижной точки, определяется по общей формуле:

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{V}_i .$$

Кинетические моменты тела, совершающего сферическое движение, относительно координатных осей имеют вид:

$$L_x = I_x\omega_x - I_{zy}\omega_y - I_{zx}\omega_z,$$
$$L_y = -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z,$$
$$L_z = -I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z.$$

Чему равны кинетические моменты твердого тела относительно главных осей инерции, проведенных из неподвижной точки тела, при его сферическом движении?

Если за оси приняты главные оси инерции в неподвижной точке O, то центробежные моменты инерции I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} равны нулю и кинетические моменты относительно этих осей определяются по формулам:

$$L_x = I_x\omega_x, \;\; L_y = I_y\omega_y, \;\; L_z = I_z\omega_z.$$

Какой вид имеют динамические уравнения Эйлера?

Динамические уравнения Эйлера имеют вид:

$$I_x\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) = M_z^e,$$
$$I_y\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x\left(I_x - I_z\right) = M_y^e,$$
$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z\omega_y\left(I_y - I_x\right) = M_z^e,$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно его осей инерции в точке О;

M_x^e, M_y^e, M_z^e – главные моменты внешних сил, приложенных к телу, относительно этих же осей.

$$\omega_x = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

где ψ, θ, φ – углы Эйлера.

Какое твердое тело называют гироскопом?

Гироскопом называется тяжелое твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

Чему равен и как направлен кинетический момент быстровращающегося гироскопа относительно его неподвижной точки?

Кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O направлен вдоль оси симметрии гироскопа и равен

$$L_o = I_\xi \omega,$$

где I_ξ – момент инерции гироскопа.

Какими физическими свойствами обладает быстровращающийся гироскоп с тремя степенями свободы?

Гироскоп с тремя степенями свободы обладает способностью противодействовать силам, стремящимся изменить направление его оси вращения.

Какой эффект производит действие одной и той же силы, приложенной к оси неподвижного и быстровращающегося гироскопа с тремя степенями свободы?

Под действием силы $\overline{F}$ неподвижный гироскоп начинает вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости, проходящей через линию действия силы $\overline{F}$ и неподвижную точку C. После прекращения действия силы гироскоп продолжает вращаться по инерции вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью, которую он приобрел под действием силы $\overline{F}$. Под действием силы $\overline{F}$ смещение оси гироскопа происходит не по направлению действия силы, а по направлению ее момента, перпендикулярно направлению силы.

После прекращения действия силы гироскоп вращается вокруг своей оси симметрии, отклоненной от первоначального положения на угол α.

Выведите формулу для вычисления угловой скорости прецессии оси гироскопа.

Ось симметрии гироскопа вращается вокруг неподвижной оси OZ с некоторой угловой скоростью ω_1, описывая коническую поверхность. Это движение гироскопа называется регулярной прецессией, а угловая скорость ω_1 – угловой скоростью прецессии.

Угловая скорость прецессии ω_1 тем меньше, чем больше угловая скорость ω вращения гигроскопа вокруг его оси симметрии.

$$\omega_1 = \frac{Gd}{I_\xi \omega}.$$

В чем состоит разница в свойствах гироскопов с двумя и тремя степенями свободы?

Гироскоп с двумя степенями свободы не обладает способностью противодействовать изменению направления его оси вращения.

Какова физическая сущность гироскопического эффекта и при каких условиях он наблюдается?

Гироскопический момент $М_Г$ представляет собой момент пары, составленной силами инерции гироскопа и равен по величине

$$M_Г = I_\xi \omega \omega_1.$$

Гироскопический эффект проявляется всегда, когда изменяется направление оси быстровращающегося гироскопа.

По каким формулам определяются динамические реакции подшипников, в которых вращается рама вращающегося гироскопа с двумя степенями свободы?

Динамические реакции подшипников равны по величине

$$R_A^{дин} = R_B^{дин} = I_\xi \omega \omega_1 / AB.$$

Каковы дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела?

Шесть дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела имеют вид:

$$m\ddot{x}_c = R_x^e, \quad I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta \left(I_\zeta - I_\eta\right) = M_\zeta^e,$$
$$m\ddot{y}_c = R_y^e, \quad I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi \left(I_\xi - I_\zeta\right) = M_\eta^e,$$
$$m\ddot{z}_c = R_z^e, \quad I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta \left(I_\eta - I_\xi\right) = M_\xi^e.$$

При каких условиях движение свободного твердого тела является поступательным?

Для поступательного движения твердого тела необходимо, чтобы в начальный момент движения кинетический момент тела относительно центра масс был равен нулю и главный момент внешних сил относительно центра масс тела все время оставался равным нулю.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ

Каким может быть состояние покоя механической системы?

Состояние покоя механической системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным.

Состояние покоя называется устойчивым, если система, выведенная из положения покоя, совершает малые колебания около этого положения.

Состояние покоя называется неустойчивым, если при сколь угодно малом отклонении из положения покоя система удаляется от этого положения.

Состояние называется безразличным, если при отклонении системы из положения покоя она и в новом положении может оставаться в состоянии покоя.

Каков критерий устойчивости состояния покоя механической системы, устанавливаемый теоремой Лагранжа — Дирихле?

Те положения покоя консервативной системы, в которых потенциальная система достигает минимума, являются ее устойчивыми состояниями покоя.

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q_{покоя}} > 0.$$

Как установить вид состояния покоя механической системы с одной степенью свободы в том случае, если $(\partial^2 \Pi / \partial q^2)_{q=q_{покоя}} = 0$?

Если $\left(\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q_{покоя}} = 0$, необходимо вычислить последовательные производные $\left(\dfrac{\partial^k \Pi}{\partial q^k}\right)_{q=q_{покоя}}$. Если первая не равная нулю производная имеет четный порядок и при этом положительна, то при $q = q_{покоя}$ потенциальная энергия имеет минимум и устойчивое положение.

Каков порядок исследования состояния покоя механической системы на устойчивость?

Выбирается обобщенная координата. Записывается потенциальная энергия как функция обобщенной координаты. Находится первая и вторая производные по обобщенным координатам и выясняется, имеет ли потенциальная энергия в заданном положении минимум.

Под действием какой силы совершаются свободные колебания материальной точки?

Колебательное движение материальной точки происходит при условиях, если на точку, отклоненную от положения покоя, действует сила, стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется восстанавливающей.

Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки?

Уравнение $\ddot{x} + k^2 x = 0$ называется дифференциальным уравнением свободных колебаний материальной точки.

От каких факторов зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний материальной точки?

Частота $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ и период $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ свободных колебаний точки зависят от массы этой точки и коэффициента с, характеризующего восстанавливающую силу.

Каков вид графиков свободных и затухающих колебаний, а также апериодического движения материальной точки?

Свободные колебания материальной точки под действием линейной восстанавливающей силы являются гармоническими колебаниями (рис. 3.7).

График затухающих колебаний заключен между двумя симметричными относительно оси абсцисс кривыми (рис. 3.9), имеющих уравнения

$$x = Ae^{-nt} \text{ и } x = -Ae^{-nt},$$

где $n = \dfrac{\mu}{2m}$ — коэффициент затухания, μ — коэффициент пропорциональности, численно равный силе сопротивления при скорости движения точки равной единице.

Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки и каково его общее решение?

Уравнение $\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \delta)$ представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки. Общее решение имеет вид

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta).$$

Из каких составляющих движений складывается движение материальной точки, находящейся под действием восстанавливающей и возмущающей сил?

При одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное колебательное движение, представляющее собой результат наложения свободных и вынужденных колебаний точки.

Каковы частота и период вынужденных колебаний материальной точки?

Частота p и период $\tau = \dfrac{2\pi}{p}$ вынужденных колебаний совпадают с частотой и периодом возмущающей силы.

Какие вынужденные колебания называются колебаниями малой частоты и какие — колебаниями большой частоты? Чем характеризуется тот и другой вид колебаний?

Вынужденные колебания, частота p которых меньше частоты k свободных колебаний, называются вынужденными колебаниями малой частоты. Фаза вынужденных колебаний большой частоты $(pt+\delta-\pi)$ отличается от фазы возмущающей силы $(pt+\delta)$ на величину π, т. е. фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы противоположны.

От каких факторов зависит амплитуда вынужденных колебаний точки?

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты собственных колебаний и частоты возмущающей силы

$$A=\frac{h}{k^2-p^2}.$$

Что называют коэффициентом динамичности и каков график его зависимости от отношения p/k?

Отношение η амплитуды вынужденных колебаний A к статическому смещению A_0 называется коэффициентом динамичности

$$\eta=\frac{A}{A_0}=\frac{1}{1-\left(p/k\right)^2}.$$

График зависимости (рис. 3.17, рис. 3.18) показывает, что при увеличении частоты возмущающей силы от $p=0$ до $p=k$ коэффициент динамичности растет от единицы до бесконечности, а при дальнейшем увеличении p до бесконечности коэффициент динамичности убывает от бесконечности до нуля.

При каком условии возникает явление биений? Каков график биений?

При частоте возмущающей силы, близкой к частоте свободных колебаний, наступает явление, называемое биениями (рис. 3.15, рис. 3.16).

При каких условиях возникает резонанс и каковы уравнение и график вынужденных колебаний материальной точки при резонансе?

Явление резонанса возникает при совпадении частот вынужденных и свободных колебаний $(p = k)$. Вынужденные колебания при резонансе имеют вид (рис. 3.13)

$$x_в = \frac{h}{2k} t \cdot \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Уравнение показывает, что амплитуда вынужденных колебаний при резонансе возрастает пропорционально времени.

Как влияет сопротивление, пропорциональное скорости, на амплитуду, фазу, частоту и период вынужденных колебаний?

При установившемся режиме при наличии сопротивления движение точки состоит из вынужденных колебаний

$$x_в = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}} \cdot \sin(pt + \delta - \varepsilon).$$

Амплитуда вынужденных колебаний при наличии сопротивления определяется по формуле

$$A_в = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

откуда следует, что большому сопротивлению среды (большому значению коэффициента затухания n) соответствует меньшая амплитуда вынужденных колебаний.

Фаза вынужденных колебаний при наличии сопротивления $(pt + \delta - \varepsilon)$ отстает от фазы возмущающей силы $(pt + \delta)$ на величину ε, называемую сдвигом фазы

$$\varepsilon = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Для вынужденных колебаний большой частоты $(p < k)$ $\varepsilon = \pi$. Частота p и период $T = \frac{2\pi}{p}$ равна частоте и периоду возмущающей силы.

Как определить максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний при данном значении коэффициента затухания n?

Максимальное значение амплитуды при данном сопротивлении

$$A_{в_{\max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

При каком значении коэффициента затухания максимум амплитуды вынужденных колебаний не существует?

При $n > \frac{\sqrt{2}}{2}k$ максимума амплитуды не существует.

Какова зависимость сдвига фазы колебаний ε *от частоты изменения возмущающей силы* p *и от коэффициента затухания?*

Величина $\varepsilon = arctg\frac{2\nu z}{1 - z^2}$ зависит от отношения $z = \frac{p}{k}$ и от отношения $\nu = \frac{n}{k}$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. т. 1, 2; М., 1985 и предыдущие издания.

2. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М., 1983.

3. Старжинский В. М. Теоретическая механика. М., 1980.

4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., 1986 и предыдущие издания.

5. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. т. 1, 2; М., 1984 и предыдущие издания.

6. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1986 и предыдущие издания.

7. Сборник задач по теоретической механике // Под ред. К. С. Колесникова. М., 1983.

Дополнительная

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. т. 1, 2; М., 1984 и предыдущие издания.

2. Сборник задач по теоретической механике // Бражниченко Н. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л. и др. М,, 1987.

3. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ, М., 1986,

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике // Под ред. А. А. Яблонского. М., 1985 и предыдущие издания (содержит примеры решения задач).