ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания по выполнению
контрольной работы для студентов
заочной формы обучения

Методические указания содержат: общие рекомендации по выполнению и защите контрольной работы; краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач и успешной защиты работы; требования к оформлению и условные обозначения; примеры решения задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ И ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ЕЁ ОСВОЕНИЯ

«Теоретическая механика» – одна из фундаментальных естественнонаучных дисциплин физико-математического цикла. На материале теоретической механики базируются дисциплины (или разделы дисциплин): «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Теория механизмов и машин», «Детали машин и основы конструирования», «Гидравлика», а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвященных изучению динамики и управления машин, используемых в различных отраслях экономики. Изучение теоретической механики дает фундаментальные знания, на основе которых будущий специалист сможет самостоятельно решать производственные и научные задачи.

Теоретическая механика делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статика изучает условия, при которых механическое взаимодействие тел не нарушает их относительного покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения.

Кинематика изучает движение объектов с геометрической точки зрения, то есть без учета их масс и сил, приложенных к ним.

Динамика изучает движение материальных объектов с учетом действующих на них сил.

В процессе освоения дисциплины студент должен получить представление о предмете теоретической механики, возможностях ее аппарата и границах применимости ее моделей, прибрести навыки решения типовых задач по всем разделам теоретической механики.

В связи с тем, что количество аудиторного времени, выделяемого на освоение дисциплины «Теоретическая механика», различно для разных специальностей ниже сформулированы некоторые усредненные требования к уровню подготовки по данному предмету.

В результате изучения теоретической механики ***студент должен знать***:

- основные понятия и аксиомы статики;
- основные типы связей и их реакции; принцип освобождаемости от связей;
- теорию моментов: момент силы относительно точки; момент силы относительно оси; пара сил;
- условия равновесия плоской системы сил: сходящихся, параллельных и расположенных произвольно; частные случаи этих условий;
- условия равновесия пространственной системы сил: сходящихся, параллельных и расположенных произвольно; частные случаи этих условий;
- методы нахождения реакций связей материальных систем, сочлененных из двух и более твердых тел;
- способы нахождения центров тяжести линий, фигур и тел;
- законы трения скольжения и трения качения;
- способы задания движения точки;
- уравнения различных видов движения твердого тела;

– кинематические характеристики движения тела и его точек при различных видах движения;
– как определить скорость и ускорение точки, принадлежащей твердому телу, участвующему в различных видах движения;
– теорию сложного движения точки;
– дифференциальные уравнения движения точки в различных формах;
– как следует применять дифференциальные уравнения движения точки для решения двух основных задач динамики;
– основное уравнение динамики;
– теоремы об изменении количества движения, кинетического момента и кинетической энергии материальной системы;
– теорему о движении центра масс материальной системы;
– дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоскопараллельного движения твердого тела;
– теорему Штейнера-Гюйгенса;
– принцип Даламбера;
– уравнения Лагранжа второго рода;
– теорию удара.

Студент должен уметь:

– составлять уравнения равновесия свободного абсолютно твердого тела, находящегося под действием любой системы сил;
– находить положения центров тяжести фигур и тел;
– находить скорости и ускорения точек, принадлежащим телам, совершающим различные виды движения;
– составлять дифференциальные уравнения движения материальных точек и тел, участвующих в поступательном, вращательном и плоском движениях;
– вычислять кинетическую энергию многомассовой системы;
– вычислять работу сил, приложенных к твердому телу, при его поступательном, вращательном и плоском движениях;
– составлять уравнения Лагранжа второго рода для механических систем с одной степенью свободы.

ГЛАВА 2. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ

Контрольная работа предполагает самостоятельное решение задач по трём разделам теоретической механики по следующим темам:

1. С-1. Произвольная плоская система сил. Определение реакций связей сплошной конструкции.
2. С-2. Произвольная пространственная система сил. Определение реакций связей.
3. К-1. Кинематика точки. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения.
4. К-2. Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма.
5. К-3. Сложное движение точки. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки.
6. Д-1. Динамика материальной точки. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.
7. Д-2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.

Каждая задача задается одним из 10 рисунков подраздела и дополнительными условиями, содержащимися в таблице. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, обозначение *рис. С 1.4* означает: рисунок 4 к задаче С-1.

Чтобы определиться с заданием, *Вам необходимо во всех задачах выбрать* ***номер рисунка по предпоследней цифре шифра в Вашей зачетной книжке, а номер дополнительного условия в таблице – по последней цифре.*** К примеру, если *«23»* - две последние цифры шифра в Вашей зачетной книжке, то это означает, что номер варианта Вашего задания *«23»*, и, следовательно, при решении любой задачи Вам необходимо взять рисунок под № 2, а дополнительные условия из строки под № 3 таблицы.

2.2. ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Прежде чем приступить к выполнению задачи необходимо:

1. Изучить теоретический материал по теме задания.
2. Ознакомиться с указаниями по выполнению задания.
3. Рассмотреть решение типовой задачи, предложенной в данных методических указаниях.
4. Уяснить содержание задачи, проанализировать её и найти наилучший вариант решения.

Решенные задачи оформляются на бумаге для машинописных работ формата А4 в соответствии с требованиями ЕСКД.

Примеры оформления титульного листа и содержания приведены в справочном приложении А. Примеры выполнения и оформления задач – в основной части методических указаний.

Чертеж к задаче должен быть выполнен карандашом. Чертеж должен быть наглядным и аккуратным, его размеры должны позволять, показать все силы или векторы скоростей и ускорений и пр.; на чертеже обязательно должны быть нанесены (если этого требует решение задачи) координатные оси. Решение задач следует сопровождать пояснениями (на основании каких теорем, свойств, формул решается задача), подробно демонстрировать весь ход расчетов. Формулы и уравнения необходимо нумеровать в пределах одной задачи. Записи вести только на лицевой стороне листа. При оформлении задач следует использовать условные обозначения, приведенные в справочном приложении А. Расчеты проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Результаты вычислений рекомендуется заносить в таблицу ответов.

2.3. Защита контрольной работы

Выполненная и исправленная после проверки преподавателем работа подлежит «защите». *Во время «защиты» контрольной работы студент должен:*

- показать знание теоретического материала по разделам, относящимся к заданиям;
- объяснить и обосновать данное им решение задачи;
- уметь решать задачи по темам контрольной работы.

ГЛАВА 3. СТАТИКА

3.1. Порядок решения задач по статике на равновесие

Для решения задачи по статике на равновесие необходимо:

- выбрать объект, равновесие которого следует рассмотреть, чтобы решить задачу;
- изобразить и обозначить все активные силы и связи, действующие на объект;
- применив принцип освобождаемости от связей, заменить отброшенные связи их реакциями;
- установить, какая система сил действует на этот объект;
- применить условие равновесия для полученной системы сил и найти неизвестные.

3.2. Проецирование силы на ось и на плоскость

Проекцией силы на ось называется *скалярная* ***величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.*** *Проекция будет положительной*, если угол между направлением силы и положительным направлением оси – острый, и *отрицательной*, если этот угол – тупой (рис. 3.1).

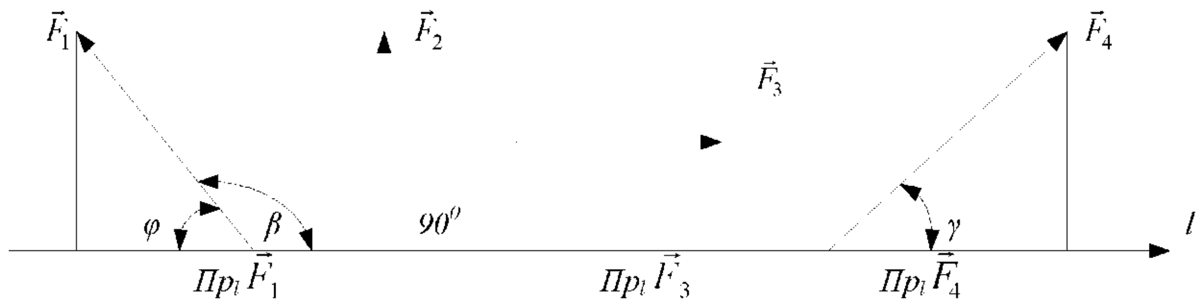


Рис. 3.1.

$Пр_l \vec{F}_1 - F_1 \cdot cos\beta = -F_1 \cdot cos\varphi;$ $Пр_l \vec{F}_2 - F_2 \cdot cos90^0 = 0;$

$Пр_l \vec{F}_3 - F_3 \cdot cos0^0 = F_3;$ $Пр_l \vec{F}_4 - F_4 \cdot cos\gamma = F_4 \cdot cos\gamma.$

Проекцией силы на плоскость называется *векторная* ***величина, заключенная между проекциями начала и конца вектора силы на эту плоскость*** (рис. 3.2).

$$\vec{Q} = Пр_{xoy}\vec{F},$$

$$Q = F \cdot \cos\alpha,$$

$$Пр_x\vec{F} = F\cos\alpha \cdot \cos\beta,$$

$$Пр_y\vec{F} = F\cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$Пр_z\vec{F} = F\sin\alpha.$$

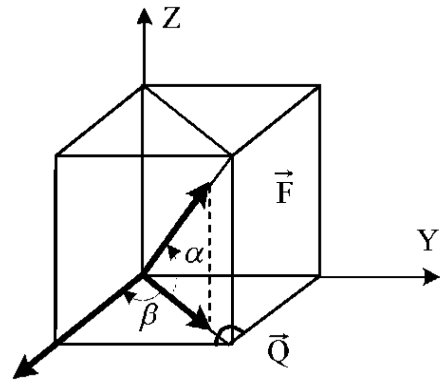


Рис. 3.2

3.3. *Основные типы связей и их реакции*

Тела, ограничивающие перемещение данного объекта, называются ***связями***.

Связи реализуются в виде поверхностей, нитей, стержней и т.п.

Сила, с которой связь действует на объект, называется ***силой реакции связи*** *или* ***реакцией связи***.

3.3.1. *Принцип освобождаемости от связей*

Любой несвободный объект можно рассматривать как свободный, если, освободив его от связей, заменить их реакциями связей.

3.3.2. *Типы связей*

1. **Гладкая неподвижная поверхность,** на которую тело ***M*** опирается точкой или линией. Реакция $\vec{R}_A$ направлена по нормали к этой поверхности (рис. 3.3).
2. **Неподвижная точка или гладкая линия:** тело ***M*** опирается на неподвижную точку или линию. Реакции $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ направлены по нормали к линии или поверхности рассматриваемого тела (рис. 3.4).

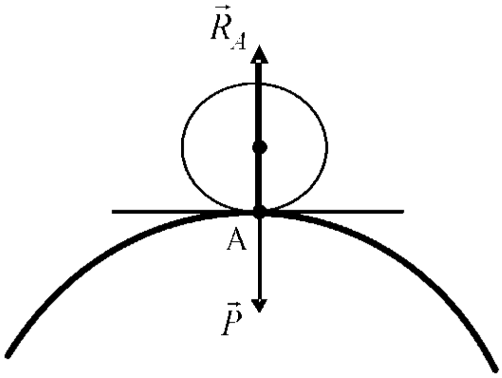


Рис. 3.3

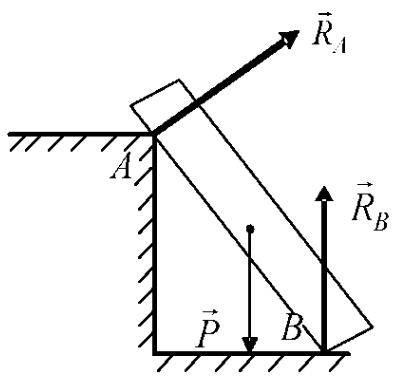


Рис. 3.4

3. **Гибкие связи (цепи, канаты, тросы).** Реакции $\vec{T}_A, \vec{T}_B, \vec{T}_C$ направлены вдоль гибкой связи от тела ***M*** к точке подвеса (рис. 3.5).

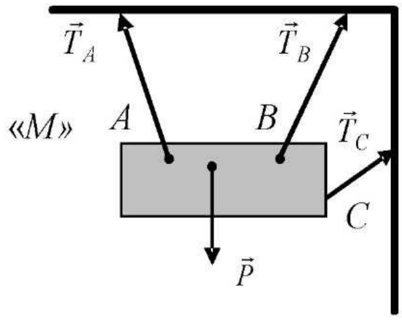


Рис. 3.5

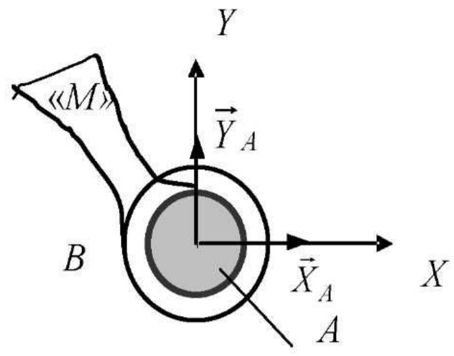


Рис. 3.6

4. **Неподвижный цилиндрический шарнир или подшипник** (рис. 3.6): на неподвижный болт ***A*** надета втулка ***B***, жестко скрепленная с телом ***M***, причем внутренний диаметр втулки почти равен диаметру болта. Тело ***M*** может вращаться вокруг оси шарнира, перпендикулярной к плоскости рисунка. Внешние силы, действующие на тело ***M***, должны быть перпендикулярны оси шарнира, чтобы втулка не была снята с болта. Если пренебречь трением в шарнире, то реакция неподвижного болта направлена по нормали к его цилиндрической поверхности, и, в зависимости от величин и направлений сил, приложенных к телу, может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Поскольку направление реакции неизвестно, то такую реакцию необходимо представить в виде двух ее составляющих: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и тогда $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

5. **Сферический шарнир или подпятник** (рис. 3.7)**:** реакция может иметь любое направление. При решении задач реакцию необходимо разложить на три составляющие по осям прямоугольной системы координат:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}, \quad \vec{X}_A = X_A \cdot \vec{i}; \quad \vec{Y}_A = Y_A \cdot \vec{j}; \quad \vec{Z}_A = Z_A \cdot \vec{k}.$$

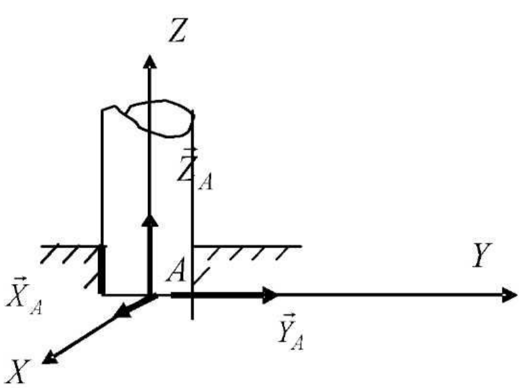


Рис. 3.7

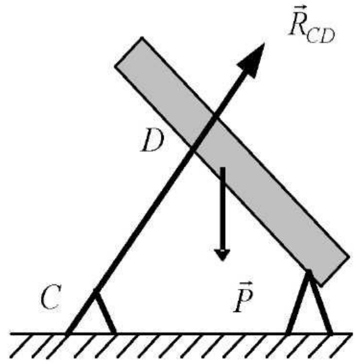


Рис. 3.8

6. **Невесомый стержень** (рис. 3.8): сила реакции стержня $\vec{R}_{CD}$ направлена вдоль оси стержня.

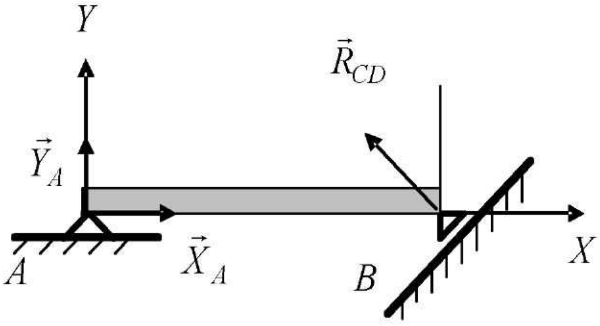


Рис. 3.9

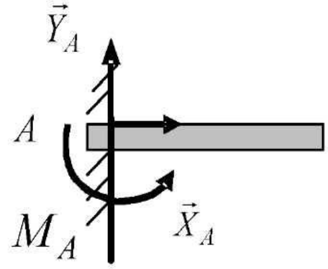


Рис. 3.10

7. Шарнирно-подвижная опора (опора на катках) и шарнирно-неподвижная опора (рис. 3.9): реакция шарнирно-подвижной опоры $\vec{R}_B$ перпендикулярна поверхности (плоскости) «катков»; реакция шарнирно-неподвижной опоры $\vec{R}_A$ должна быть представлена двумя ее составляющими: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$.

8. Жесткая заделка (рис. 3.10): реакция жесткой заделки эквивалентна силе $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$ и паре сил с моментом $\widetilde{M}_A$.

Примечание: все связи рассмотрены без учета силы трения.

3.4. Теория моментов сил

3.4.1. Момент силы относительно точки

Векторный момент (или ***вектор-момент***) ***силы относительно точки*** (или ***центра***) ***есть векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы:*** $\overrightarrow{mom_0}\,\vec{F} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$ относительно центра, $\vec{r} = \overline{OA}$ (рис. 3.11).

Вектор $\overrightarrow{mom_0}\,\vec{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы и направлен в ту сторону, откуда виден воображаемый поворот вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{F}$ (до их совмещения) на наименьший угол против хода часовой стрелки (рис. 3.11).

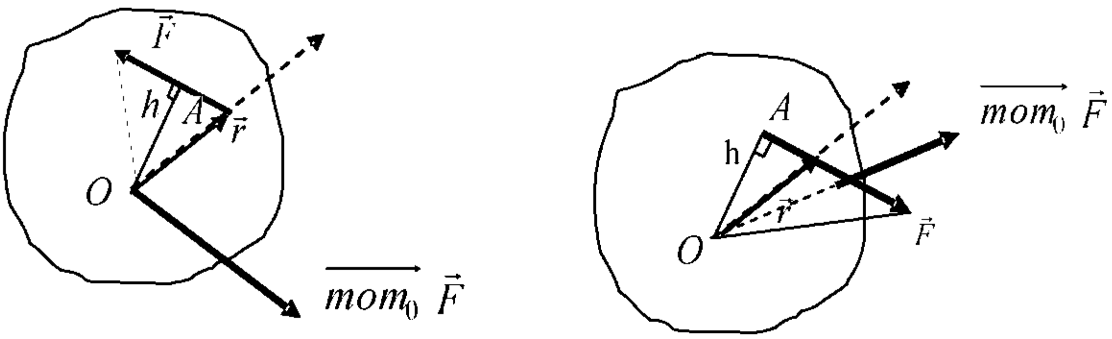


Рис. 3.11.

Модуль момента силы относительно точки равен произведению модулей радиуса-вектора точки приложения силы и вектора силы на синус угла между этими векторами или произведению модуля силы на *плечо силы*:

$$\left|\overrightarrow{mom_O}\vec{F}\right|=\left|\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]\right|=rF\sin\alpha=Fh=2S_{\Delta OAB}\ .$$

Плечо силы относительно точки (или центра) – длина перпендикуляра, опущенного из моментной точки ***O*** (или центра) на линию действия силы.

Скалярный момент силы относительно точки есть произведение модуля силы на плечо, взятое со знаком «плюс», если сила стремится повернуть тело вокруг моментной точки (или ***центра***) ***против часовой стрелки, и со знаком «минус» - в противном случае*** (рис. 3.12):

$$m\tilde{o}m_A\vec{F}_1=+F_1h_1\ ;\ m\tilde{o}m_A\vec{F}_2=-F_2h_2\ .$$

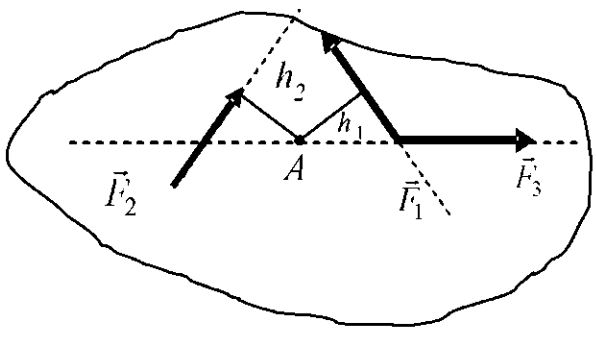


Рис. 3.12

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы относительно точки не изменится, если силу переносить вдоль линии ее действия.
2. Момент силы относительно точки не изменится, если моментную точку переносить вдоль линии, параллельной линии действия силы.
3. Момент силы относительно точки равен нулю, если моментная точка принадлежит линии действия силы: $m\tilde{o}m_A\vec{F}_3=-F_3h_3=0$, так как $h_3=0$ относительно точки *A* (рис. 3.12).
4. $\overrightarrow{mom_O}\ \vec{F}=-\overrightarrow{mom_O}\left(-\vec{F}\right)$, если силы принадлежат одной линии действия.

3.4.2. Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси есть проекция на эту ось момента силы, вычисленного относительно точки, лежащей на оси: $\widetilde{mom}_l\vec{F} = Пр_l\overrightarrow{mom_O}\ \vec{F}$ (рис 3.13).

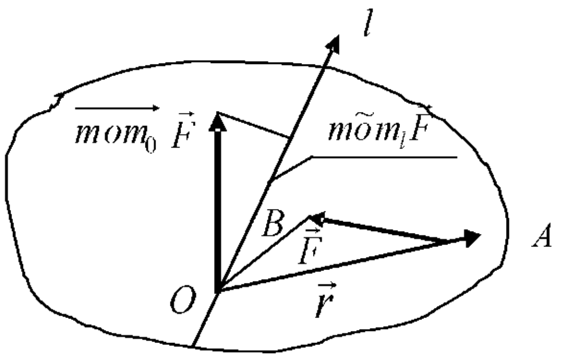


Рис. 3.13

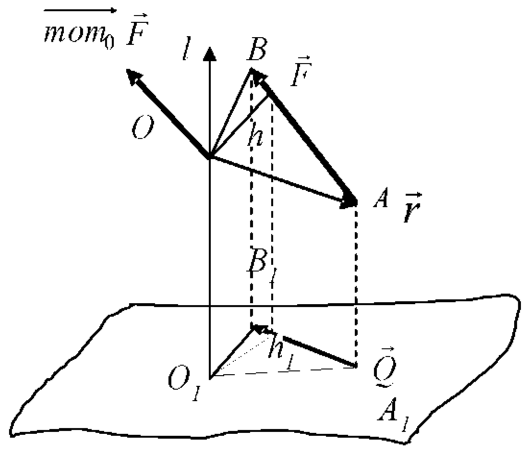


Рис. 3.14

Чтобы вычислить момент силы относительно оси, надо спроецировать эту силу на плоскость, перпендикулярную оси, найти модуль момента проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью, а затем присвоить полученному значению знак «плюс», если сила стремится повернуть тело вокруг данной оси против часовой стрелки и «минус» - в противном случае: $\widetilde{mom}_l\vec{F} = Пр_l\overrightarrow{mom_O}\ \vec{F} = \pm Qh_1$ (рис.3.14).

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси не зависит от выбора точки на оси.
2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает данную ось или сила параллельна оси, то есть в том случае, когда ось и сила лежат в одной плоскости.

Главный момент силы относительно некоторого центра О есть сумма моментов всех сил системы относительно этого центра: $\vec{M}_O = \sum_{\nu=1}^{n}\overrightarrow{mom_0}\vec{F}_\nu$.

Главный момент силы относительно некоторой оси есть сумма моментов всех сил системы относительно этой оси: $M_l = \sum_{\nu=1}^{n} mom_l\vec{F}_\nu$.

3.5. С-1. Произвольная плоская система сил. Определение реакций связей сплошной конструкции

Произвольной плоской называется такая система сил, линии действия сил которой расположены в одной плоскости произвольно.

3.5.1. Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Векторная форма условия равновесия: *для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы её главный вектор был равен нулю и главный момент системы сил относительно произвольной точки был равен нулю:* $\vec{R}=0$, $\vec{M}_0=0$.

Аналитическая форма условия равновесия:

– *для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси OX и OY были равны нулю, и сумма скалярных моментов сил системы относительно произвольной точки была равна нулю:*

$$\sum_1^n X_\nu=0; \quad \sum_1^n Y_\nu=0; \quad \sum_1^n m\widetilde{o}m_0\vec{F}_\nu=0;$$

– *для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы скалярных моментов сил системы относительно трёх точек, не лежащих на одной прямой, были равны нулю:*

$$\sum_1^n m\widetilde{o}m_A\vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n m\widetilde{o}m_B\vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n m\widetilde{o}m_C\vec{F}_\nu=0;$$

– *для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы скалярных моментов сил системы относительно двух произвольно выбранных точек были равны нулю и сумма проекций всех сил системы на ось, не перпендикулярную отрезку, соединяющему эти две точки, была равна нулю:*

$$\sum_1^n m\widetilde{o}m_A\vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n m\widetilde{o}m_B\vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n \Pi p_l\vec{F}_\nu=0; \; l_{не} \perp AB.$$

3.5.2. Дано: жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С.1.0 - С.1.9, табл. С -1), закреплена в точке ***A*** шарнирно, а в точке ***B*** прикреплена или к невесомому стержню, или к шарнирной опоре на катках.

В точке ***C*** к раме привязан трос, перекинутый через блок, и несущий на конце груз весом P=30 *кН*. На раму действуют пара сил с моментом M=50 *кНм* и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице С -1. В расчетах принять: a= 1*м*.

Определить: реакции связей в точках ***A***, ***B***, вызванные заданными нагрузками.

Указания. При решении задачи следует учесть, что натяжения обеих ветвей троса, перекинутого через блок, будут одинаковыми. При вычислении момента силы $\vec{F}$ удобнее разложить её на две составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, для которых проще определить значения плеч, а затем воспользоваться теоремой Вариньона: $m\widetilde{o}m_A\vec{F}=m\widetilde{o}m_A\vec{F}'+m\widetilde{o}m_A\vec{F}''$.

3.5.3. Пример С-1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С-1), закреплена в точке ***A*** шарнирно, а в точке ***B*** прикреплена к невесомому стержню.

Таблица С-1

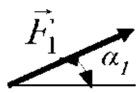
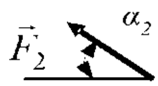
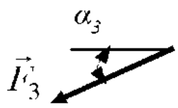
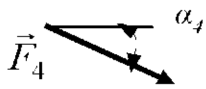
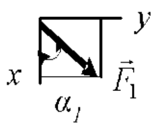
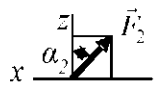
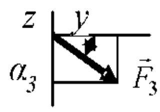
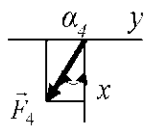
Силы								
	F_1=10 кН		**F_2=20 кН**		**F_3=30 кН**		**F_4=40 кН**	
Номер условия	**Точка приложения силы**	**α_1, град.**	**Точка приложения силы**	**α_2, град.**	**Точка приложения силы**	**α_3, град.**	**Точка приложения силы**	**α_4, град.**
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

Таблица С-2

Силы								
	F_1=6 кН		**F_2=8 кН**		**F_3=10 кН**		**F_4=12 кН**	
Номер условия	**Точка приложения силы**	**α1, град.**	**Точка приложения силы**	**α 2, град.**	**Точка приложения силы**	**α 3, град.**	**Точка приложения силы**	**α 4, град.**
0	E	60	H	30	-	-	-	-
1	-	-	D	60	E	30	-	-
2	-	-	-	-	K	60	E	30
3	K	30	-	-	D	0	-	-
4	-	-	E	30	-	-	D	60
5	H	0	K	60	-	-	-	-
6	-	-	H	90	D	30	-	-
7	-	-	-	-	H	60	K	90
8	D	30	-	-	K	0	-	-
9	-	-	D	90	-	-	H	30

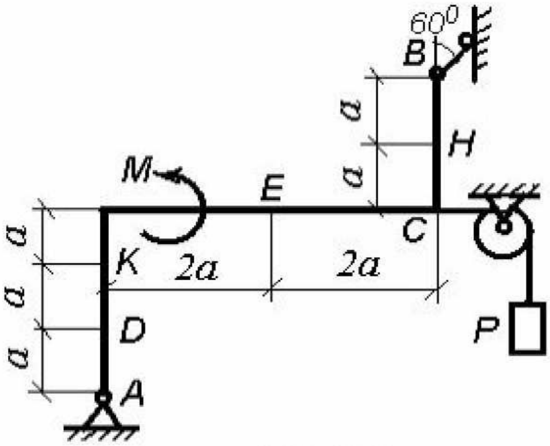


Рис. 1.0

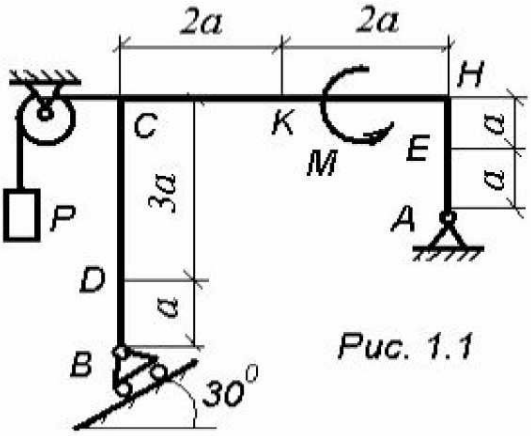


Рис. 1.1

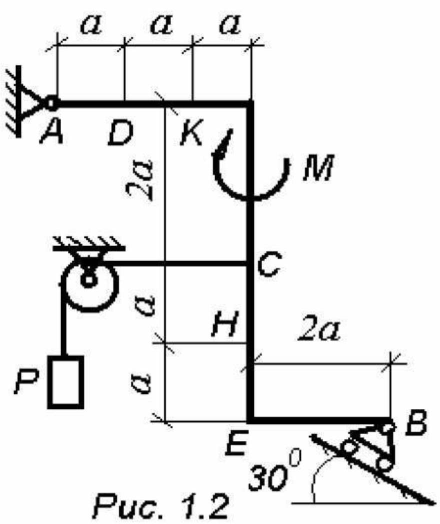


Рис. 1.2

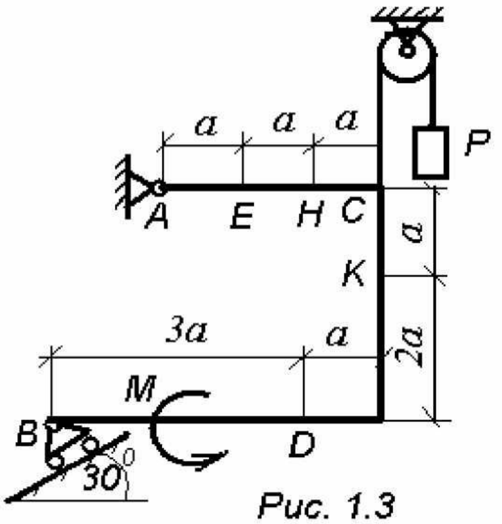
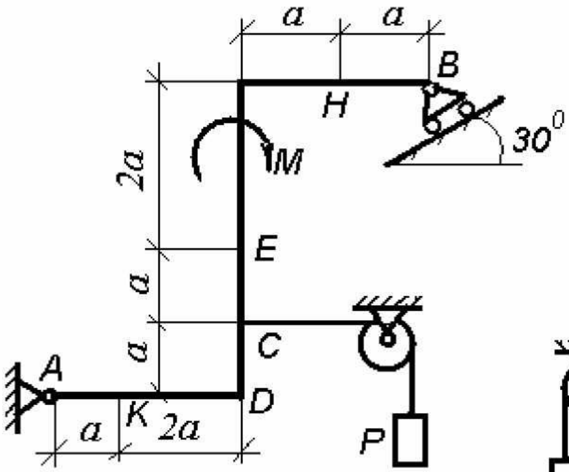


Рис. 1.3



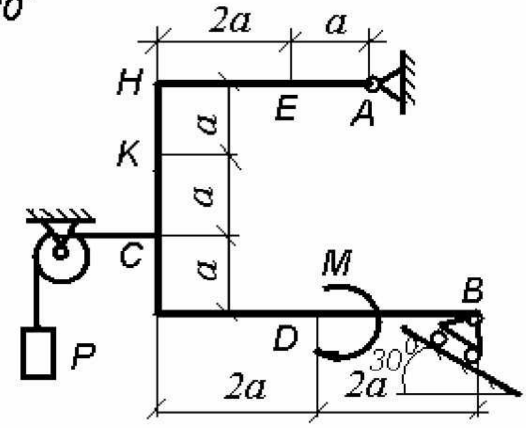


Рис. 1.4.

Рис. 1.5.

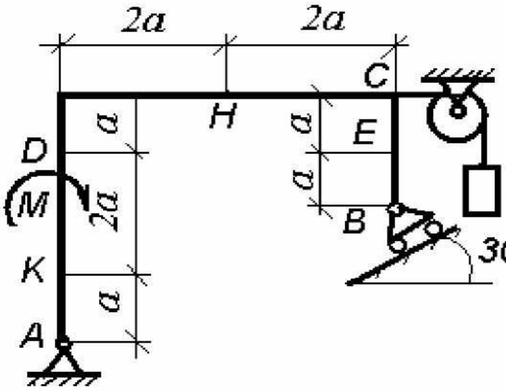


Рис. 1.6

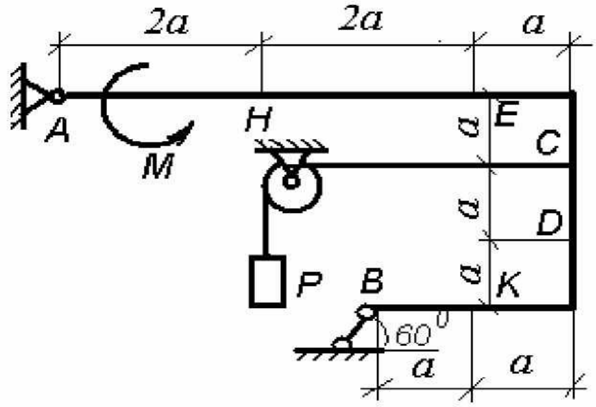


Рис. 1.7

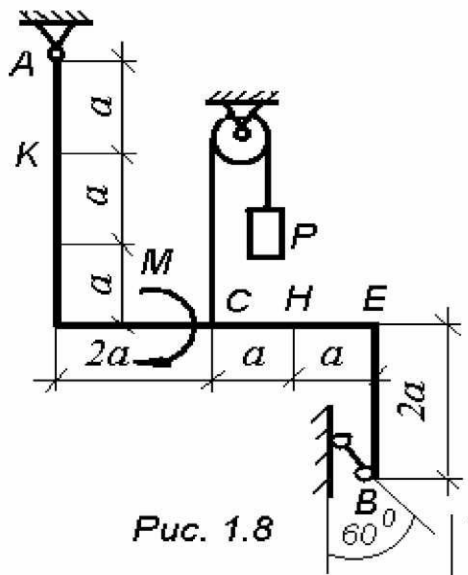


Рис. 1.8

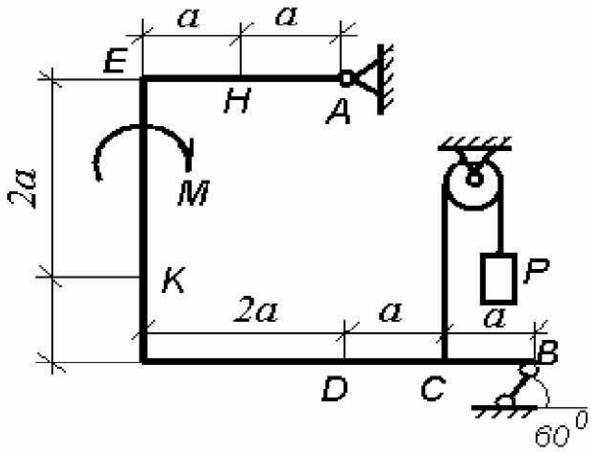


Рис. 1.9

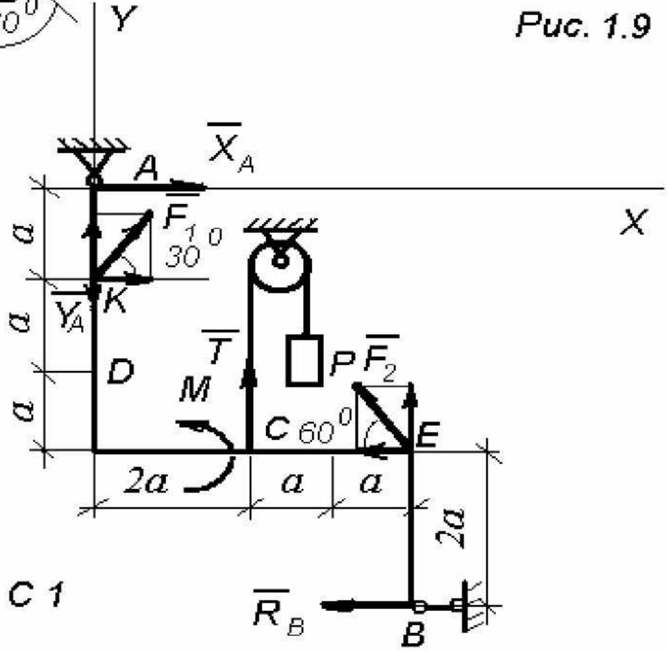


Рис. С 1

В точке **С** к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $\vec{P}$. На раму действуют: пара сил с моментом M и две сосредоточенные в точках ***К*** и ***Е*** силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}$. В расчетах принять: a= 1м.

Дано: F_1 =*10 кН;* F_2 = *20 кН;* P *30 кН;* M *40 кНм;* a *1 м.*

Определить: реакции в точках A, B, вызванные заданными нагрузками.

Решение

1. Рассмотрим равновесие рамы (рис. С -1).
2. Изобразим и обозначим все силы, действующие на раму, включая реакции связей: $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{T}, M, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$. Реакцию неподвижной шарнирной опоры в точке ***А*** заменим двумя её составляющими, а реакцию в стержне направим по стержню. Следует отметить, что натяжение в тросе по модулю равно силе тяжести груза, закрепленного на его конце: $T=P$.
3. Для полученной плоской произвольной системы сил воспользуемся известным условием равновесия и составим уравнения равновесия:

$$\sum_1^n X_v = X_A + F_1 \cdot \cos 30^0 - F_2 \cdot \cos 60^0 - R_B = 0;$$

$$\sum_1^n Y_v = -Y_A + F_1 \cdot \cos 60^0 + F_2 \cdot \cos 30^0 + T = 0;$$

$$\sum_1^n m\tilde{o}m_A \vec{F}_v = F_1 \cdot \cos 30^0 \cdot a + T \cdot 2a - F_2 \cdot \cos 60^0 \cdot 3a + F_2 \cdot \cos 30^0 \cdot 4a - R_B \cdot 5a + M = 0.$$

4. Подставим в составленные уравнения значения заданных величин и определим искомые реакции.

Ответ: X_A–*30,8 кН;* Y_A– *52,3 кН;* R_B –*29,5 кН.*

Модуль реакции в шарнире A равен: $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 60{,}7 кН$.

Проверка: для проверки правильности решения необходимо составить условие равновесия для данной системы сил в новой системе координат.

3.6. С-2. Произвольная пространственная система сил. Определение реакций связей

Произвольной пространственной называется такая система сил, линии действия сил которой произвольно расположены в пространстве.

3.6.1. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Векторная форма условия равновесия: *для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы её главный вектор был равен ну-*

ло и главный момент системы сил относительно произвольной точки был равен нулю: $\vec{R}=0, \quad \vec{M}_0=0.$

Аналитическая форма условия равновесия:

- для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенной к свободному абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трёх координатных осей были равны нулю, и суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей были равны нулю:

$$\sum_1^n X_\nu=0; \quad \sum_1^n Y_\nu=0; \quad \sum_1^n Z_\nu=0;$$

$$\sum_1^n mom_X \vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n mom_Y \vec{F}_\nu=0; \quad \sum_1^n mom_Z \vec{F}_\nu=0;$$

3.6.2. **Дано:** две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке ***А***, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке ***В*** и невесомым стержнем ***1*** (рис. С 2.0 – С 2.7) или же двумя подшипниками
в точках ***А*** и ***В*** и двумя невесомыми стержнями ***1*** и ***2*** (рис. С 2.8, С 2.9). Все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках. Вес большей плиты $P_1=5$ *кН*, вес меньшей плиты $P_1=3$ *кН*. Каждая из плит расположена параллельно одной из плоскостей проекций (π_1 - горизонтальной, π_2 - фронтальной, π_3 - профильной). При расчетах принять $a=0{,}6$ *м*.

На плиты действуют пара сил с моментом $M=4$ *кНм*, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения сил, их направления и точки приложения указаны в таблице С-2. Силы F_1 и F_4 лежат в плоскостях, параллельных плоскости π_1; сила F_2 – в плоскости, параллельной плоскости π_3; сила F_3 – в плоскости параллельной плоскости π_2. Точки приложения сил (*D, E, H, K*) находятся в углах или серединах сторон плит.

Определить: реакции связей в точках *А*, ***В*** и реакцию стержня (стержней).

Указания. При решении задачи необходимо учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении момента силы её следует разложить на составляющие, параллельные координатным осям.

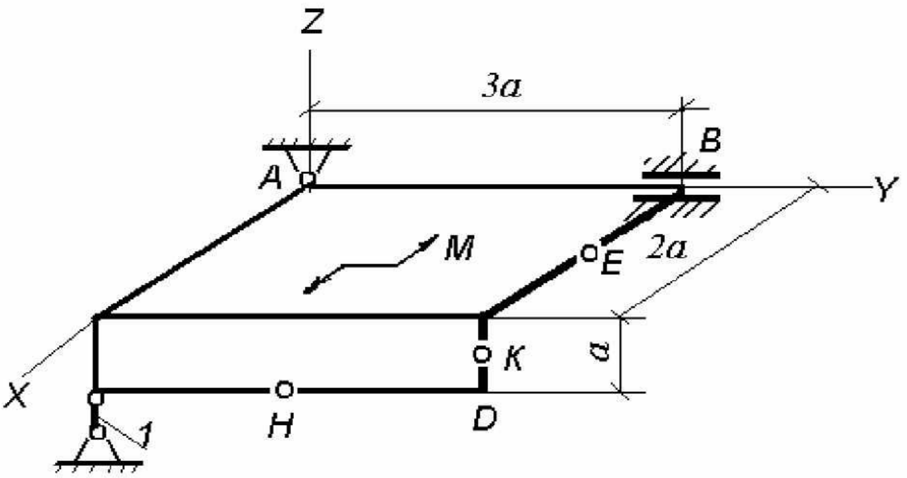


Рис. 2.0

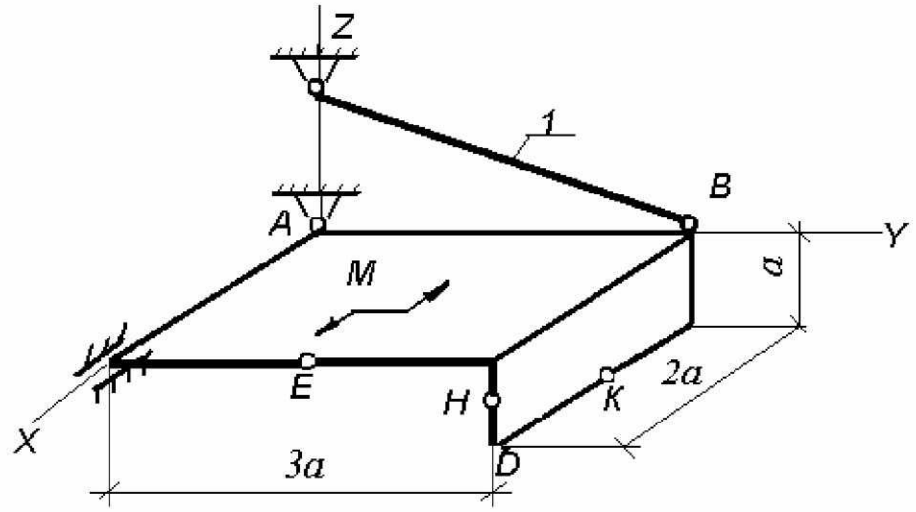


Рис. 2.1

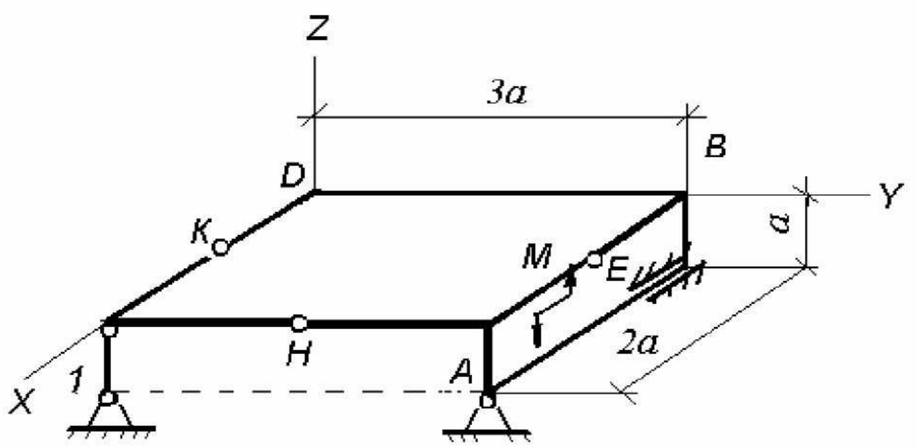


Рис. 2.0

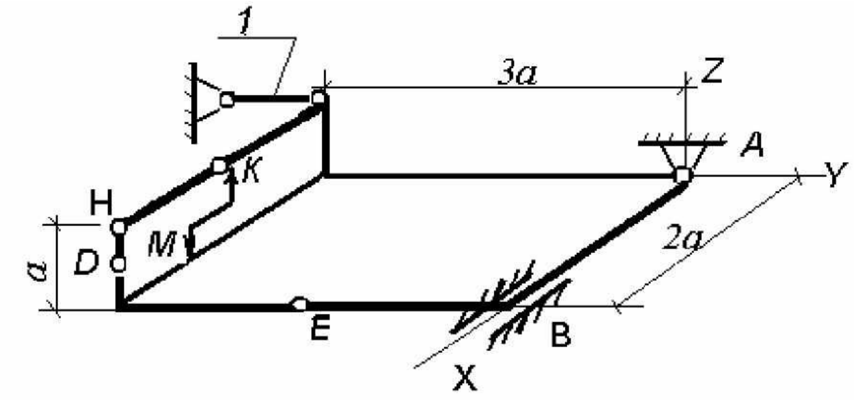


Рис. 2.3

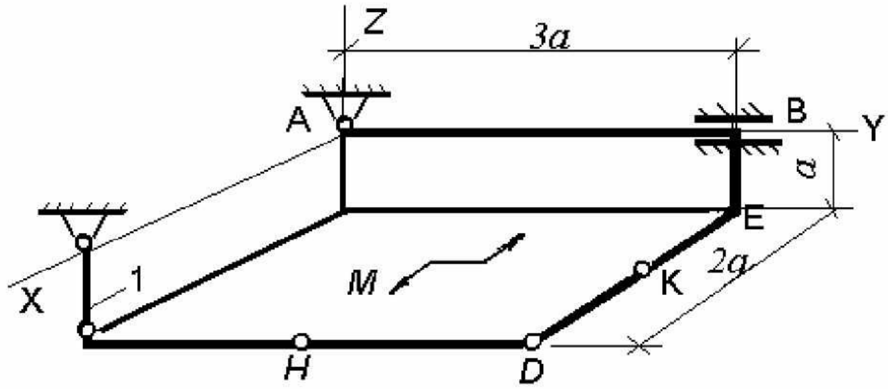


Рис. 2.4

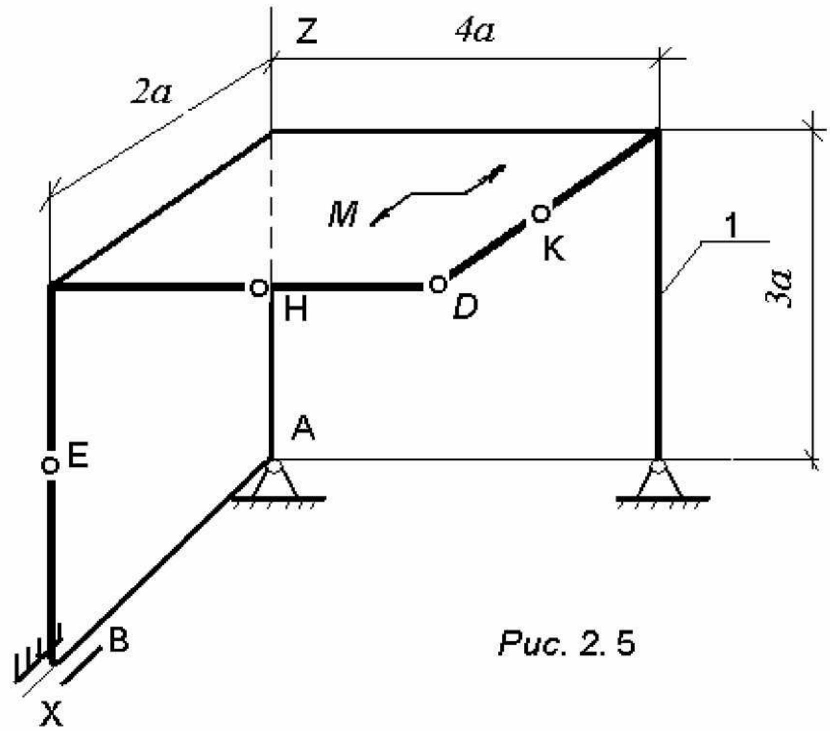


Рис. 2. 5

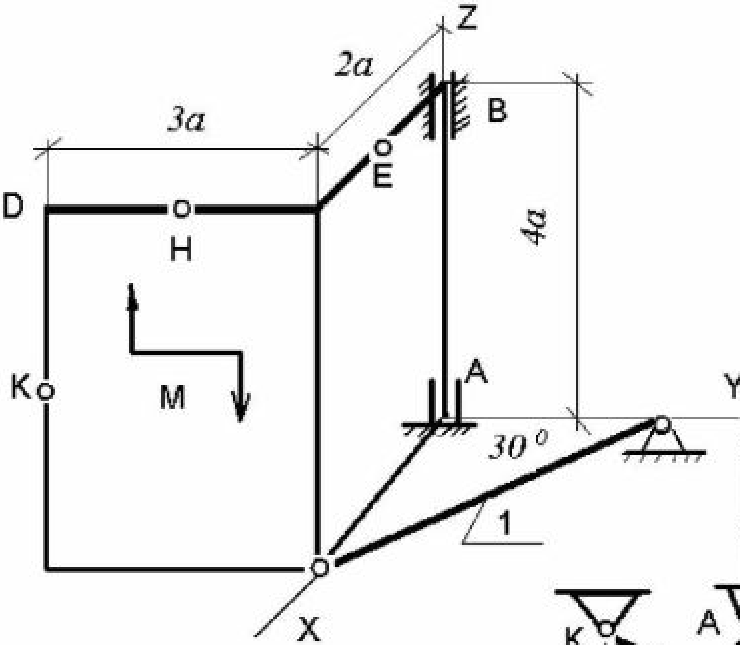


Рис. 2.6

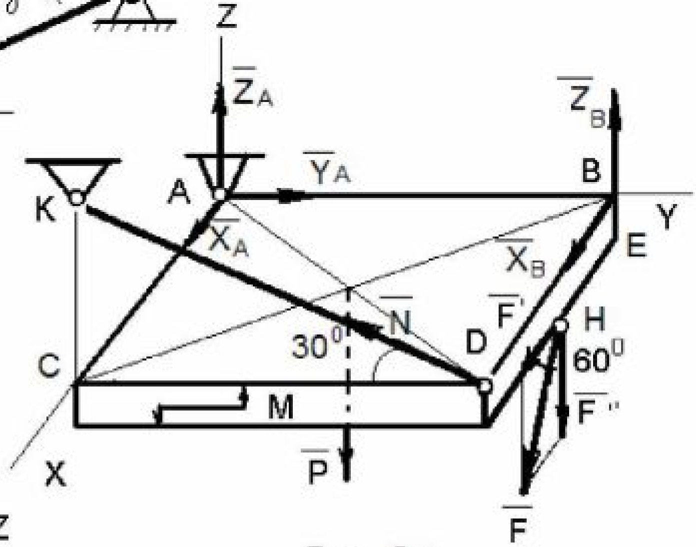


Рис. C2

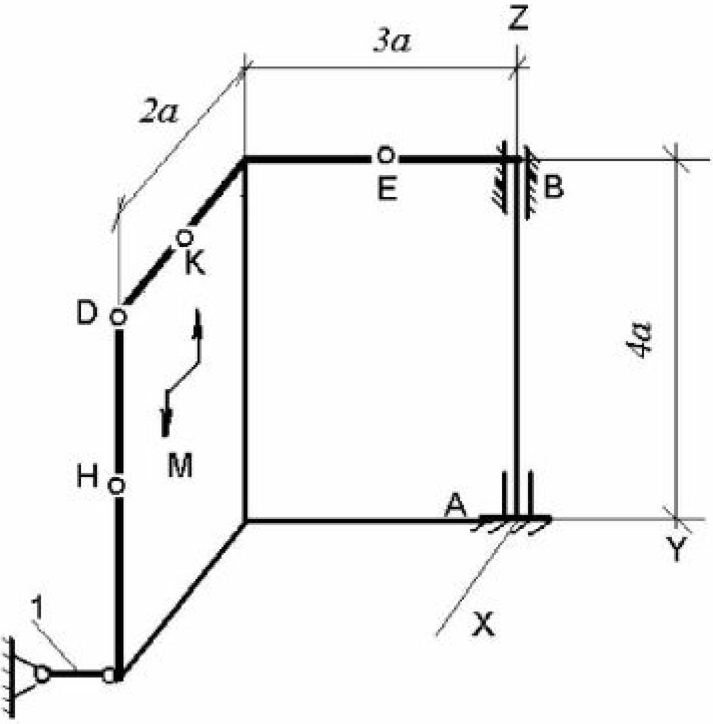


Рис. 2.7

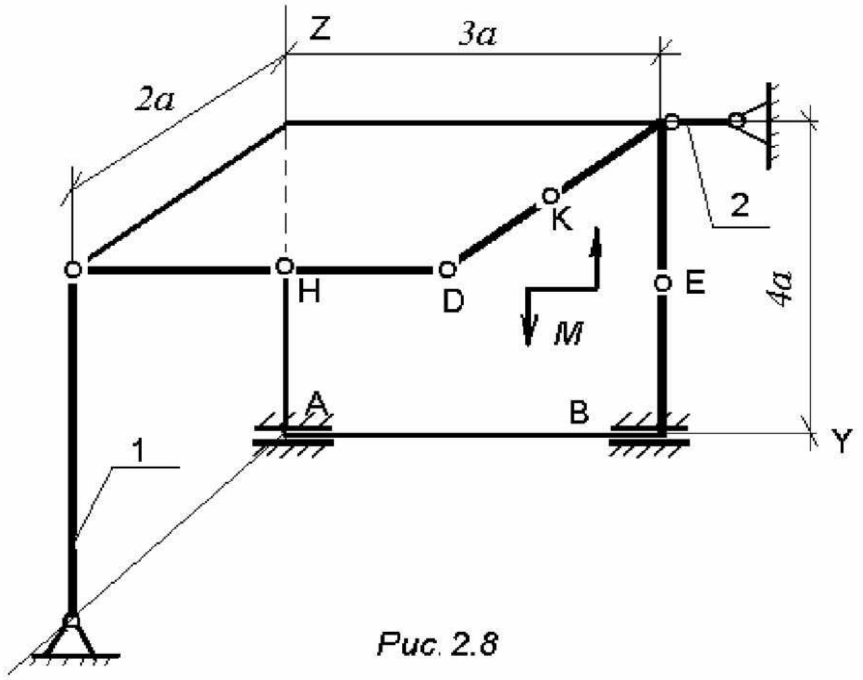


Рис. 2.8

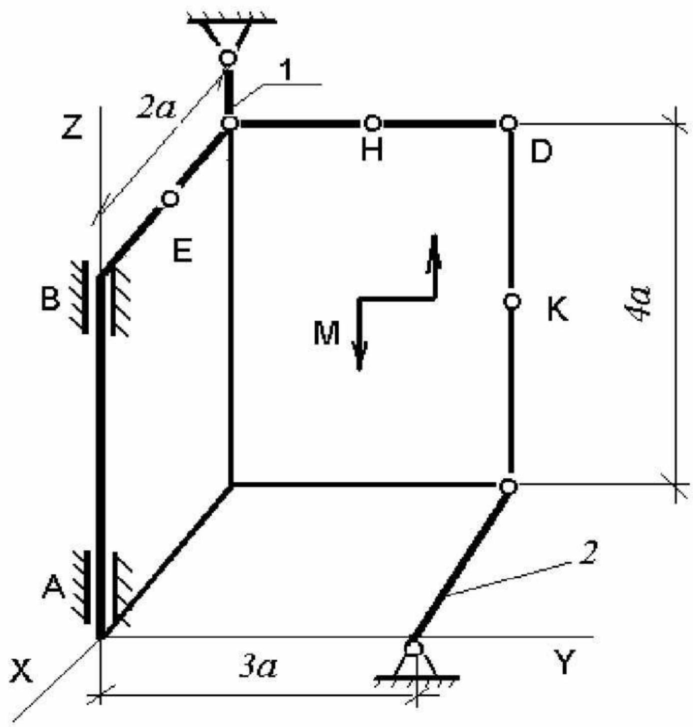


Рис. 2.9

3.6.2. Пример С-2

Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С-2) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром в точке B и невесомым стержнем DK. На плиту в плоскости, параллельной плоскости π_3, действует сила F, а в плоскости, параллельной π_2 , – пара сил с моментом M.

Дано: *P =3 кН; F = 8 кН; M= 4 кНм; α=60°; AC=0,8 м; BE=0,4 м; AB=1,2 м; EH=0,4 м.*

Определить: реакции в шарнирах A, B и стержне DK.

Решение

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы P, F и пара сил с моментом M, а также реакции связей.
2. Систему координат выбираем таким образом, чтобы её начало совпадало с точкой A, а оси OX, OY были направлены по рёбрам плиты AC и AB.
3. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, цилиндрического шарнира – на две составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, принадлежащие плоскости, перпендикулярной оси подшипника. Реакцию N стержня направляем вдоль стержня от D к K, предполагая, что он растянут.
4. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия пространственной системы сил, действующей на плиту (1-6):

$$\sum_1^n X_\nu = X_A + X_B + F\cos 60^0 = 0;$$

$$\sum_1^n Y_\nu = Y_A - N\cos 30^0 = 0;$$

$$\sum_1^n Z_\nu = Z_A + Z_B - P + N\sin 30^0 - F\sin 60^0 = 0;$$

$$\sum_1^n mom_X \vec{F}_\nu = M - P\cdot\frac{AB}{2} + Z_B AB - F\sin 60^0\cdot AB + N\sin 30^0\cdot AB = 0;$$

$$\sum_1^n mom_Y \vec{F}_\nu = P\cdot\frac{AC}{2} - N\sin 30^0\cdot AC + F\sin 60^0\cdot\frac{AC}{2} - F\cos 60^0\cdot BE = 0;$$

$$\sum_1^n mom_Z \vec{F}_\nu = -X_B\cdot AB - N\cos 30^0\cdot AC - F\cos 60^0\cdot AB = 0.$$

Для определения моментов силы $\vec{F}$ относительно координатных осей разлагаем её на две составляющие $\vec{F}'$, $\vec{F}''$, параллельные осям OX, OY ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$). Аналогично разложим по осям OY, OZ реакцию $\vec{N}$ в стержне DK. Вычисляя моменты сил относительно координатных осей, ***следует помнить:*** *момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекает ось или ей параллельна.*

Подставив в полученные уравнения численные значения всех заданных величин и решив совместно эти уравнения, находим искомые реакции.

Ответ: X_A *3,46 кН;* Y_A *5,18 кН;* Z_A *4,80 кН;* X_B *-7,46 кН;* Z_B *2,15 кН;* $N{-}5{,}96$ *кН.*

Знак «-» указывает, что истинное направление составляющей силы реакции в точке *B* противоположно первоначально выбранному (рис. С -2).

Модуль реакции в шарнире *A* равен: $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=7{,}86кН$, модуль реакции в шарнире *B* равен: $R_B=\sqrt{X_B^2+Z_B^2}=7{,}76кН$.

Проверка: для проверки правильности решения необходимо составить условие равновесия для данной системы сил в новой системе координат.

ГЛАВА 4. КИНЕМАТИКА

4.1. Кинематика точки. Способы задания движения точки

Задать движение точки – значит указать способ, с помощью которого можно определить положение точки, её скорость и ускорение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчёта.

Существуют три способа задания движения точки: *векторный, координатный и естественный.*

Векторный способ задания движения точки: *выбирается система отсчета и задается радиус-вектор движущейся точки **М** как функция времени.*

Эта функция должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой по времени $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

Траектория точки – это кривая линия, которую описывает точка (рис. 4. 1).

Скорость точки в данный момент времени равна пределу средней скорости при стремлении промежутка времени, в течение которого произошло перемещение, к нулю *или* ***первой производной радиуса-вектора точки по времени:***

$$\vec{V}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{или} \quad \vec{V}=\dot{\vec{r}}$$

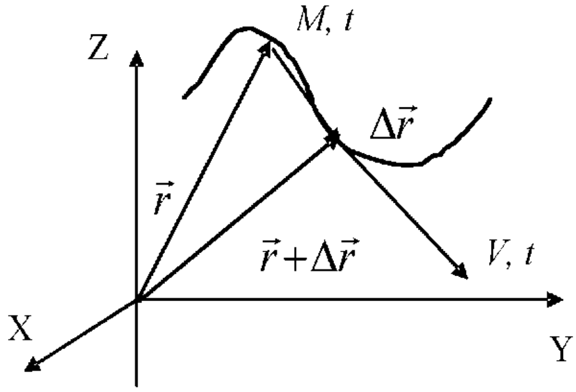


Рис. 4.1

Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории её движения.

Ускорение точки в данный момент времени равно пределу среднего ускорения при стремлении промежутка времени, в течение которого произошло приращение скорости, к нулю *или* ***первой производной от скорости по времени*** *или* ***второй производной от радиуса-вектора точки по времени:***

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{или} \quad \vec{a}=\dot{\vec{V}}=\ddot{\vec{r}}$$

Координатный способ задания движения точки: *выбирается система отсчёта* (рис. 4.2), *задаются конечные уравнения движения точки, выражающие зависимость координат от времени:* ***x=x(t), y=y(t), z=z(t)***

конечные уравнения движения точки являются параметрическими уравнениями её траектории.

Чтобы найти уравнение траектории точки в координатной форме, необходимо:

1. Исключить параметр *t* (время) из уравнения движения.
2. Найти область изменения координат, то есть определить, какие ограничения накладывают уравнения движения на движение точки по траектории.

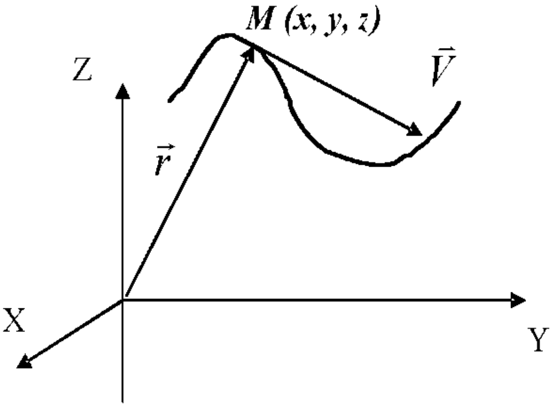


Рис. 4.2

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}; \quad \vec{V}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}; \quad V_x=\dot{x}; \quad V_y=\dot{y}; \quad V_z=\dot{z}$$

Проекции скорости точки на оси координат равны первым производным от конечных уравнений движения по времени.

Модуль скорости точки определяется формулой:

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ .$$

Проекции ускорения точки на оси координат равны первым производным от соответствующих проекций скорости по времени или вторым производным от конечных уравнений движения по времени:

$$\vec{a}=\dot{V}_X\vec{i}+\dot{V}_Y\vec{j}+\dot{V}_Z\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{a}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}$$

где $a_X=\dot{V}_X; \quad a_Y=\dot{V}_Y; \quad a_Z=\dot{V}_Z;$ или $a_X=\ddot{x}; \quad a_Y=\ddot{y}; \quad a_Z=\ddot{z}.$

Модуль ускорения точки определяется формулой:

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}\ .$$

Естественный способ задания движения точки: *задать траекторию точки; выбрать начало отсчета дуг на траектории; задать положительное и отрицательное направления отсчёта дуг; задать закон, выражающий зависимость естественной координаты* ***S*** *от времени* ***S(t) –***

закон движения точки.

Под естественной координатой S понимают расстояние, отсчитываемое по дуге траектории в соответствующем направлении (рис. 4.3).

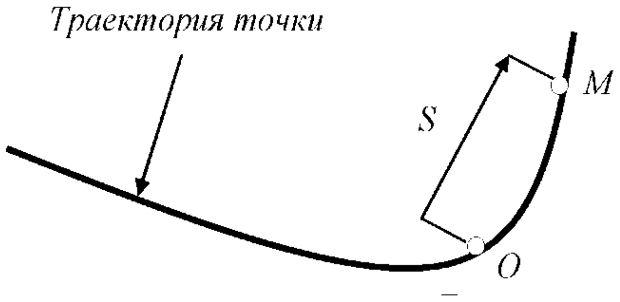


Рис. 4.3

Скалярной скоростью точки в данный момент времени называют предел средней скалярной скорости при $\Delta t \to 0$:

$$\tilde{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{V}_{CP}.$$

Скалярная скорость точки в данный момент времени равна производной от естественной координаты по времени:

$$\tilde{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

Скалярным касательным ускорением точки в данный момент времени называют предел среднего скалярного касательного ускорения точки при $\Delta t \to 0$:

$$\tilde{a}^{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \tilde{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{V}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{V}}{dt} = \dot{\tilde{V}} \quad \text{или} \quad \tilde{a}^{\tau} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \ddot{S}.$$

Скалярное касательное ускорение точки в данный момент времени равно первой производной от скалярной скорости по времени или второй производной от естественной координаты по времени.

Модуль нормального ускорения точки в данный момент времени определяется выражением:

$a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории в точке.

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории, нормальное – по главной нормали в сторону вогнутости траектории.

Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости, а нормальное – изменение направления скорости.

Ускорение точки при движении по любой траектории равно сумме касательного и нормального ускорения:

$$\vec{a}=\vec{a}^{\tau}+\vec{a}^{n}, \qquad a=\sqrt{a_{\tau}^{2}+a_{n}^{2}}\ .$$

Классификация движений точки по ускорениям:

1. $\vec{a}^{\tau}\neq 0, \quad \vec{a}^{n}=0$ – движение неравномерное, прямолинейное;

2. $\vec{a}^{\tau}\neq 0, \quad \vec{a}^{n}\neq 0$ – движение неравномерное, криволинейное;

3. $\vec{a}^{\tau}=0, \quad \vec{a}^{n}\neq 0$ – движение равномерное, криволинейное;

4. $\vec{a}^{\tau}=0, \quad \vec{a}^{n}=0$ – движение равномерное, прямолинейное.

4.1.1. К -1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

Дано: точка ***B*** движется в плоскости XOY. Закон движения точки задан уравнениями: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$ (табл. К -1), где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Определить: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1=1c$ найти скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Указания: задача К1 относится к кинематике точки; скорость и ускорение точки в декартовых координатах определяются по формулам координатного способа задания движения точки, а касательное и нормальное ускорения точки - по формулам естественного способа задания её движения.

По предпоследней цифре шифра зачетной книжки выбирается уравнение, задающее изменении координаты *X(t)*, а по последней – *Y(t)*.

В задаче все искомые величины следует определить для момента времени $t_1=1c$.

ТАБЛИЦА К-1

№№ п/п	$x=f_1(t)$	$y=f_2(t)$		
		Для строк 0-2	**Для строк 3-6**	**Для строк 7-9**
0	6cos(πt/6) – 3	12sin(πt/6)	$2t^2+2$	4cos(πt/6)
1	4cos(πt/6)	-6cos(πt/3)	8sin(πt/4)	$6\cos^2(\pi t/6)$
2	2 – 3cos(πt/6)	$-3\sin^2(\pi t/6)$	$(2+t)^2$	4cos(πt/3)
3	t-4	9sin(πt/6)	$2t^3$	10cos(πt/6)
4	4-2t	3cos(πt/3)	2cos(πt/4)	$-4\cos^2(\pi t/6)$
5	2-t	10sin(πt/6)	$2 - 3t^2$	12cos(πt/3)
6	2t	$6\sin^2(\pi t/6)$	2sin(πt/4)	-3cos(πt/6)
7	8sin(πt/6) – 2	-2sin(πt/6)	$(t+1)^3$	-8cos(πt/3)
8	12sin(πt/6)	9cos(πt/3)	$2 - t^3$	9cos(πt/6)
9	4 – 6sin(πt/6)	-8sin(πt/6)	4cos(πt/4)	-6cos(πt/3)

4.1.2. Пример К-1

Дано: уравнения движения точки в плоскости XOY:

$x=12sin(\pi t/6)$, $y=4cos(\pi t/6)$, где x, y – в сантиметрах, t – в секундах.

Определить: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1=1c$ найти скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из данных уравнений движения параметр t:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right); \\ \dfrac{y}{4}=\cos\left(\dfrac{\pi t}{6}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{12^2}=\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right); \\ \dfrac{y^2}{4^2}=\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{6}\right); \end{cases}$$

$\dfrac{x^2}{12^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ – уравнение траектории точки – эллипс с полуосями *12 см* и *4 см* (рис. К -1).

2. Определим положение точки на траектории в момент времени $t_1=1c$:

$x_1=12sin(\pi t/6)=6(см)$, $y_1= 4cos(\pi t/6)= 3,48$ *(см)*.

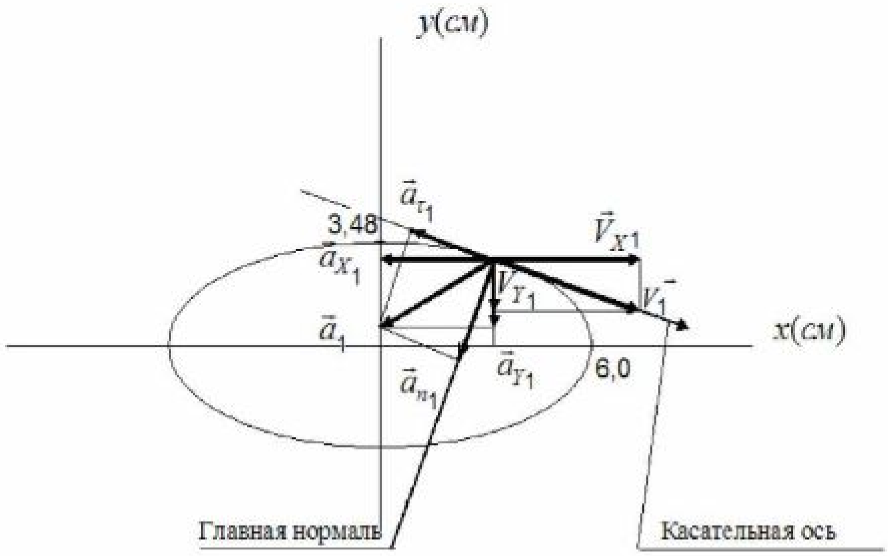


Рис. К-1

3. Скорость точки находим по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2\pi\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \qquad v_{1x} = 5{,}46(см/с);$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \qquad v_{1y} = -1{,}05(см/с);$$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, при $t_1 - 1c$ $\quad v_1 = 5{,}56(см/с)$.

4. Аналогично найдём ускорение точки при $t_1 - 1c$:

$$a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right); \qquad a_{1x} = -1{,}64(см/с^2);$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right); \qquad a_{1y} = -0{,}95(см/с^2);$$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, при $t_1 - 1c$ $\; a_1 = 1{,}89(см/с^2)$.

5. Находим касательное ускорение точки, зная численные значения всех величин, входящих в правую часть выражения:

$a^{\tau} = \dfrac{dv}{dt} = \left|\dfrac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|$; при $t_1 - 1c$ $\; a_1^{\tau} = 1{,}43(см/с^2)$.

6. Нормальное ускорение точки определяем по формуле $a^n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2}$, подставляя известные численные значения. При $t_1 = 1c$ получим $a_1^n = 1{,}24(см/с^2)$.

7. Определяем радиус кривизны траектории: $\rho - v^2/a^n$ при $t_1 - 1c$ $\rho_1 - 24{,}93$ *(см)*.

Ответ: $v_1 - 5{,}56$ *(см/с)*; $a_1 - 1{,}89$ *(см/с²)*; $a_{1\tau} - 1{,}43$ *(см/с²)*; $a_{1n} - 1{,}24$ *(см/с²)*; $\rho_1 = 24{,}93$ *(см)*.

4.2. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ПЛОСКОЕ) ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела – движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

4.2.1. Скорость точки при плоском движении

Скорость точки при плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки при вращении вокруг полюса (рис. 4.4):

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + [\vec{\omega} \times \vec{\rho}] = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$$

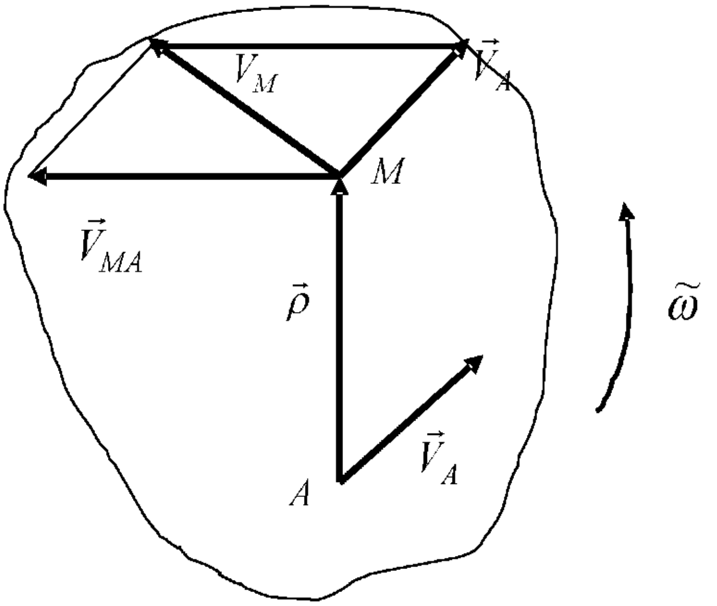


Рис. 4.4

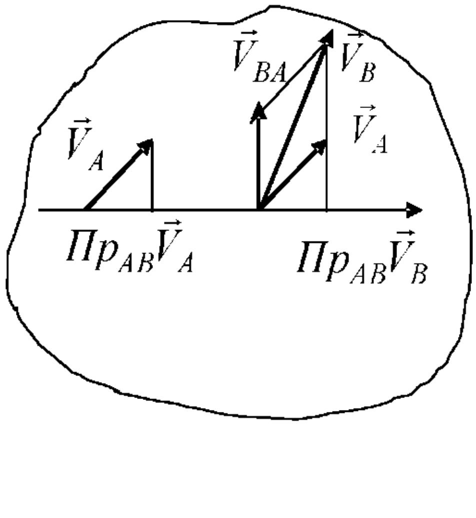


Рис. 4.5

4.2.2. Теорема о проекциях скоростей

При плоском движении тела проекции скоростей двух его точек на ось, проходящую через эти точки, равны между собой
(рис.4.5): $Пр_{AB}\vec{V}_A = Пр_{AB}\vec{V}_B$.

4.2.3. Теорема о распределении скоростей

Скорости точек тела при плоском движении в каждый момент времени таковы, как если бы, начиная с данного момента времени, плоская фигура стала вращаться вокруг мгновенной оси скоростей с угловой скоростью $\vec{\omega}$: $\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}$; $\omega = \frac{V_A}{PA}$.

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – *это такая точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, при условии, что угловая скорость плоской фигуры не равна нулю.*

Ось, проходящая через МЦС перпендикулярно плоской фигуре, называется мгновенной осью скоростей.

Геометрические методы нахождения МЦС приведены на рис. 4.6 (а, б). Мгновенный центр скоростей лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей точек.

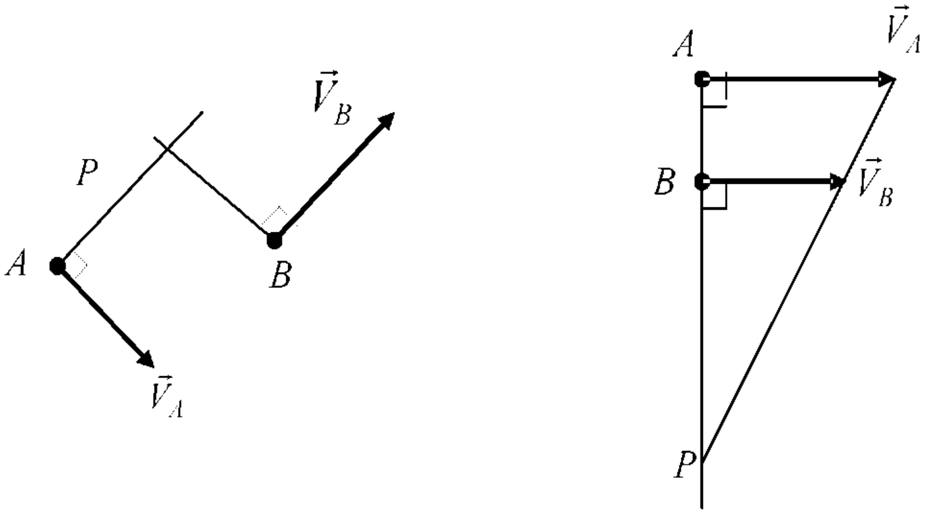


Рис. 4.6, а

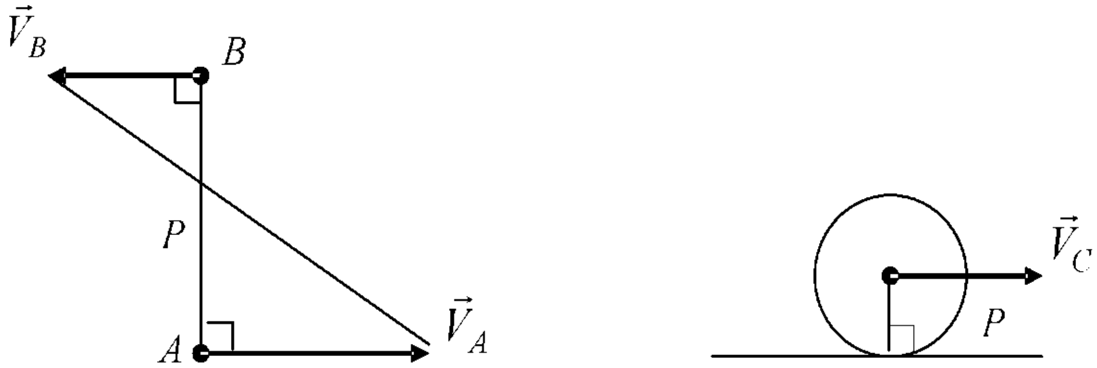


Рис. 4.6, б

Если векторы скоростей двух точек параллельны, направлены в одну сторону и скорости точек равны, то мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится в бесконечности, при этом мгновенная угловая скорость тела равна нулю, скорости всех точек тела одинаковы, а ускорения различны. В этом случае тело находится в состоянии мгновенно поступательного движения.

4.2.4. Ускорение точки тела при плоском движении

Ускорение точки при плоском движении тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки при вращении вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \text{ ,}$$

где $\vec{a}_{BA}=\left[\vec{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{AB}\right]+\omega^2\cdot\overrightarrow{BA}$ – ускорение точки *B* при вращении вокруг полюса *A*.

4.2.5. К-2. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма

Дано: плоский механизм состоит из **1, 2, 3** и ползунов ***B*** и ***E*** (рис. К 2.0 – К 2.1) или из стержней **1, 2, 3, 4** и ползунов ***B*** или ***E*** (рис. К 2.2 – К 2.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точки ***D, B*** и ***K*** находятся в серединах соответствующих стержней. Длины стержней равны соответственно: l_1 *0,4 м*, l_2 *1,2 м*, l_3 *1,4 м*, l_4 *0,6 м*. Положение механизма определяется углами: $\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в таблицах К -2.1 (для рис. К 2.0 – К 2.4) и К 2.2 (для рис. К 2.5 – К 2.9); при этом в табл. К - 2.2 ω_1, ω_4 – величины постоянные.

Определить: скорости и ускорения точек и звеньев плоского механизма, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Указания: построение чертежа следует начинать со стержня, направление которого определяется углом α; дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки.

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\vec{v}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ от точки ***B*** к *b* (рис. К 2.0 – К 2.4).

При решении задачи для определения скоростей точек многозвенного механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и теоремой о распределении скоростей. При определении ускорений точек механизма следует исходить из векторного равенства $\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{BA}$.

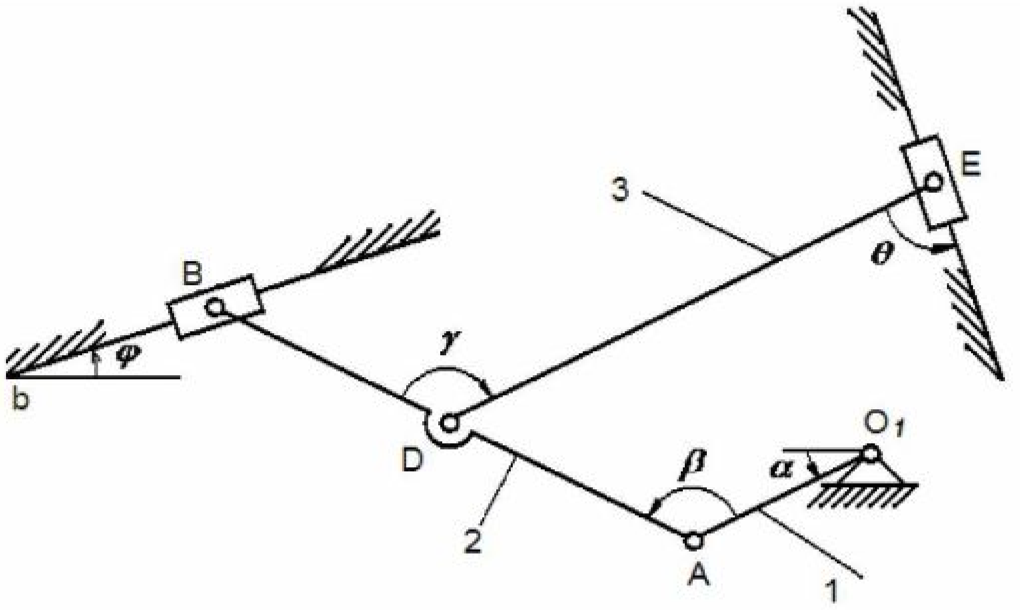


Рис. К2.0

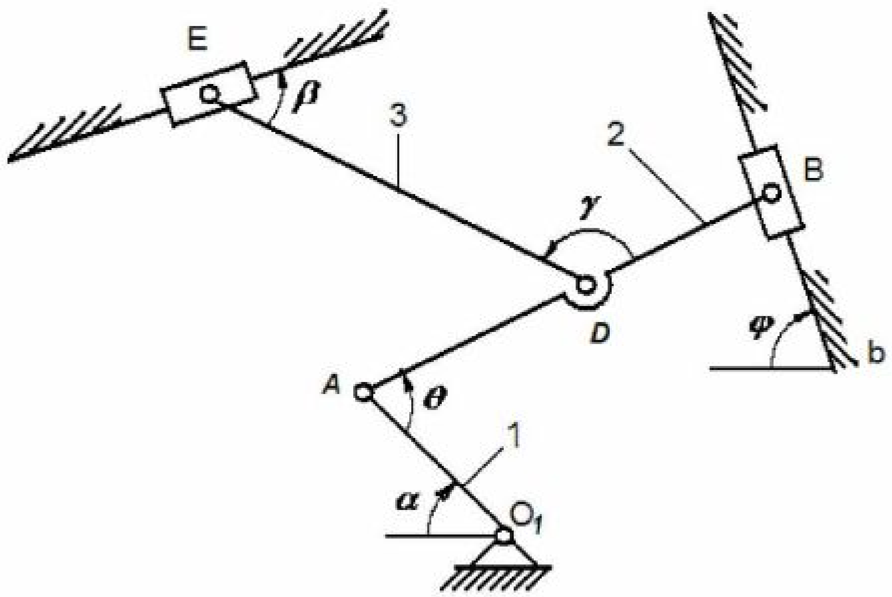


Рис. К2.1

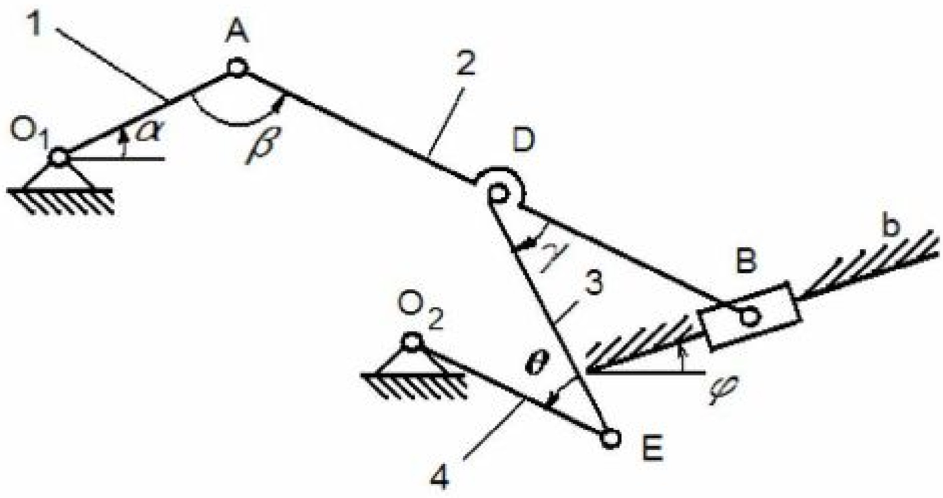


Рис. К2.2

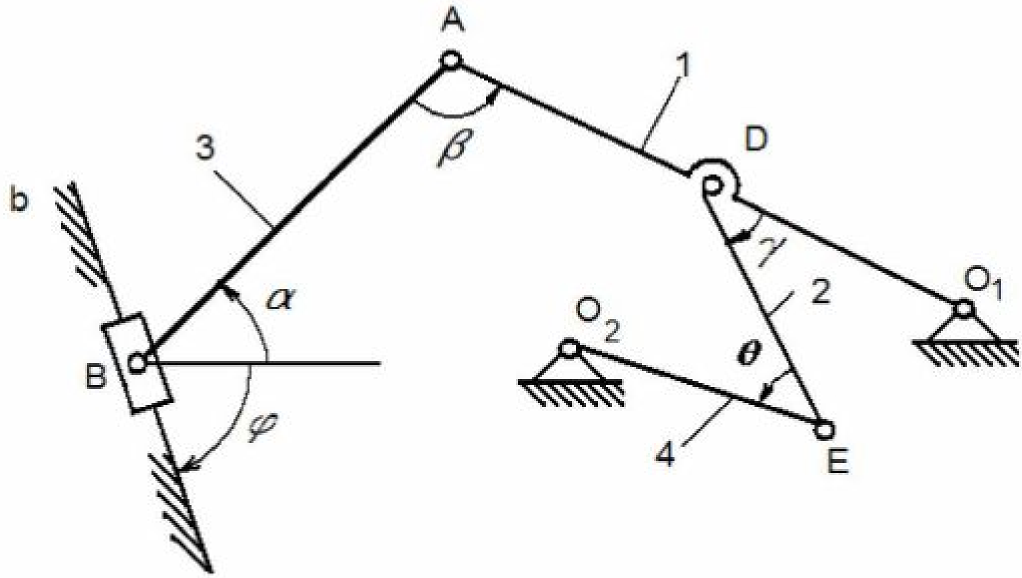


Рис. К2.3

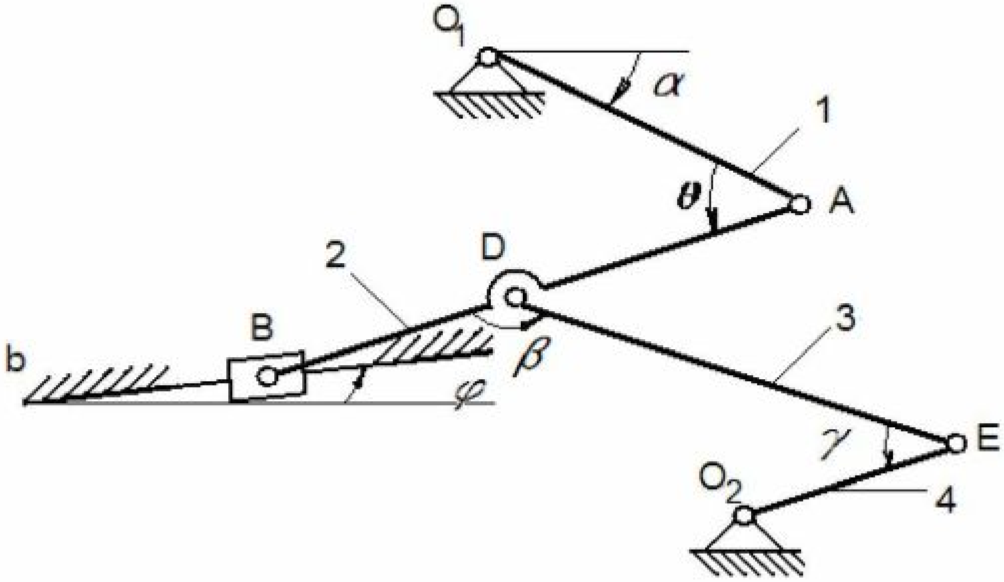


Рис. К2.4

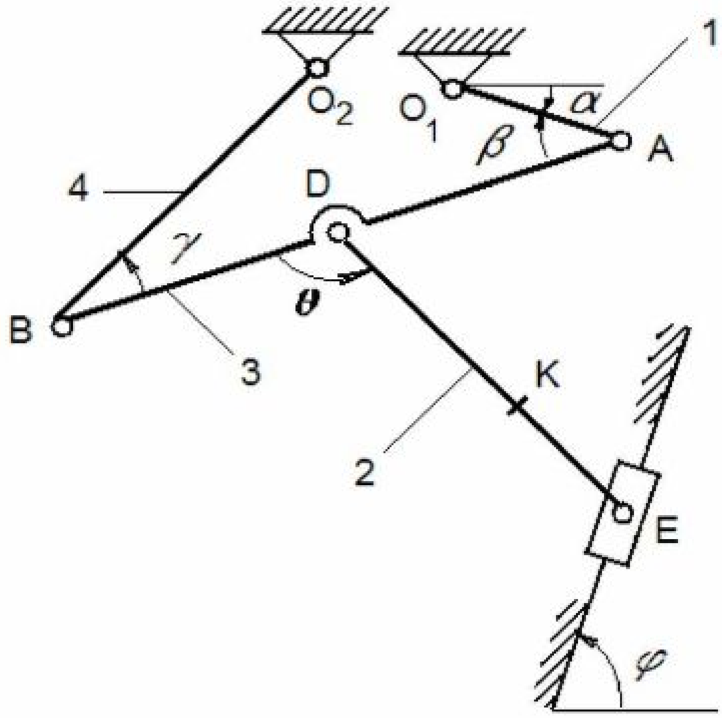


Рис. К2.5

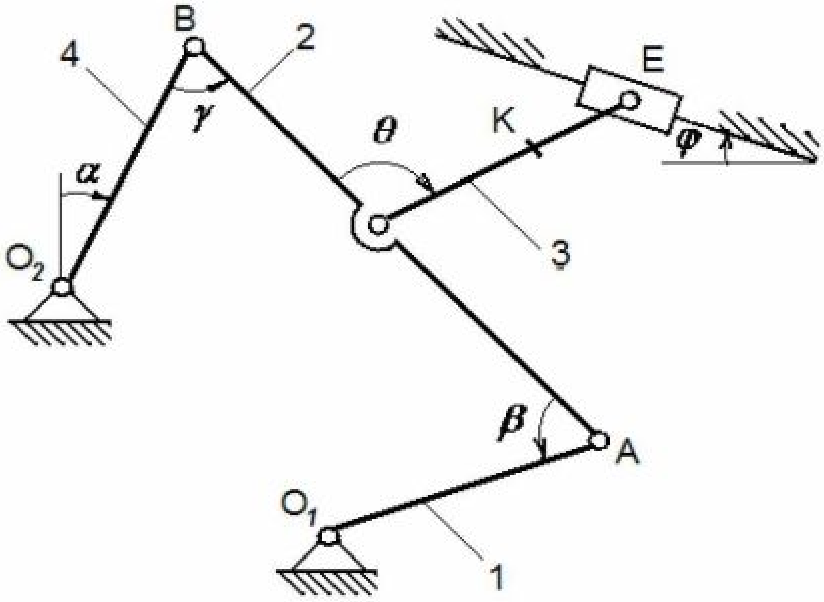


Рис. К2.6

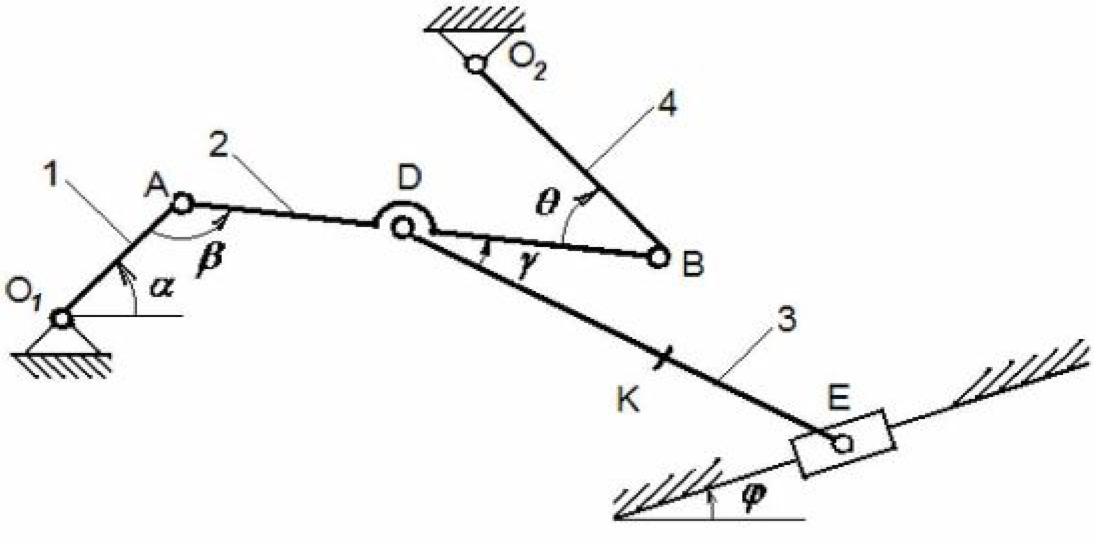


Рис. К2.7

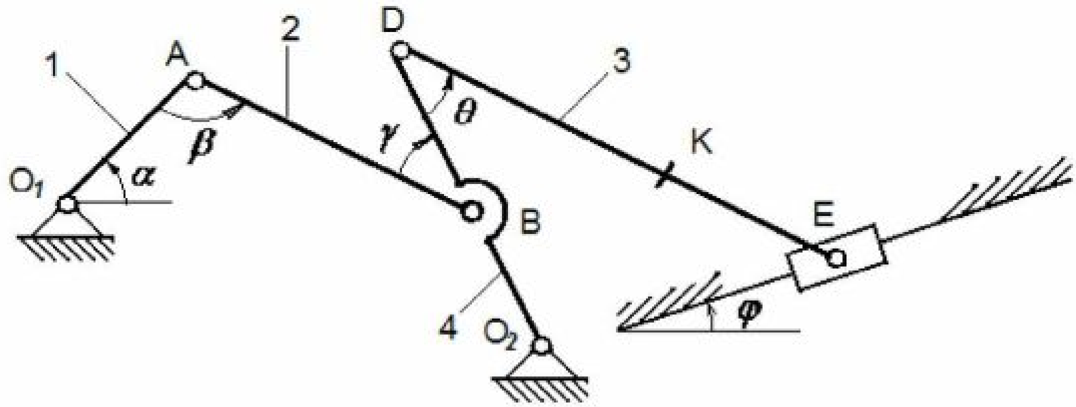


Рис. К2.8

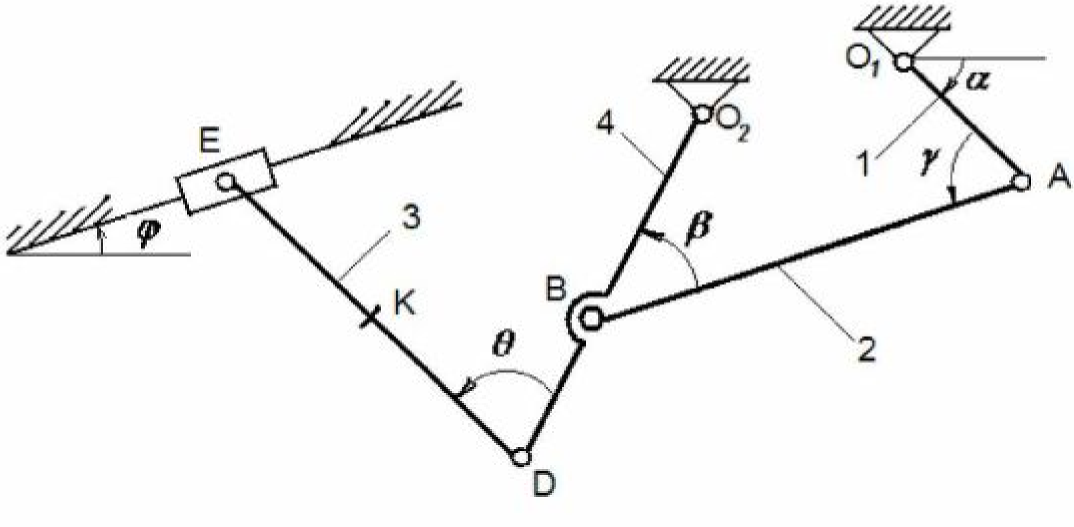


Рис. К2.9

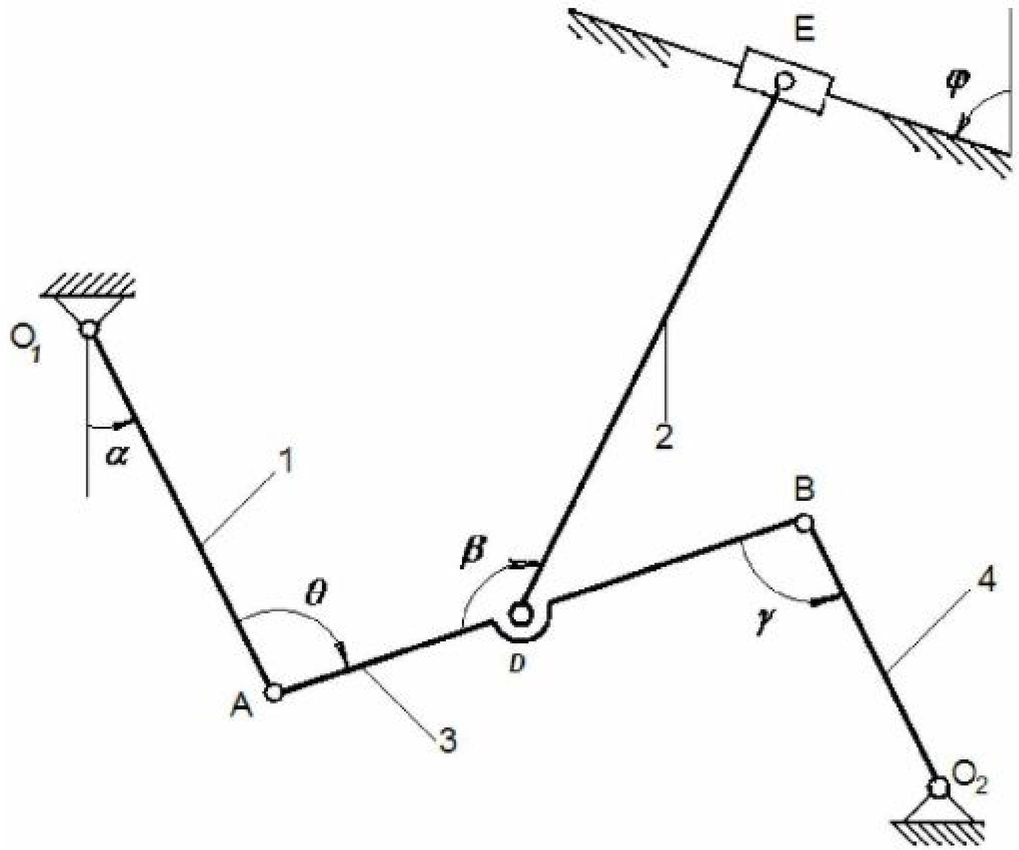


Рис. К8,а

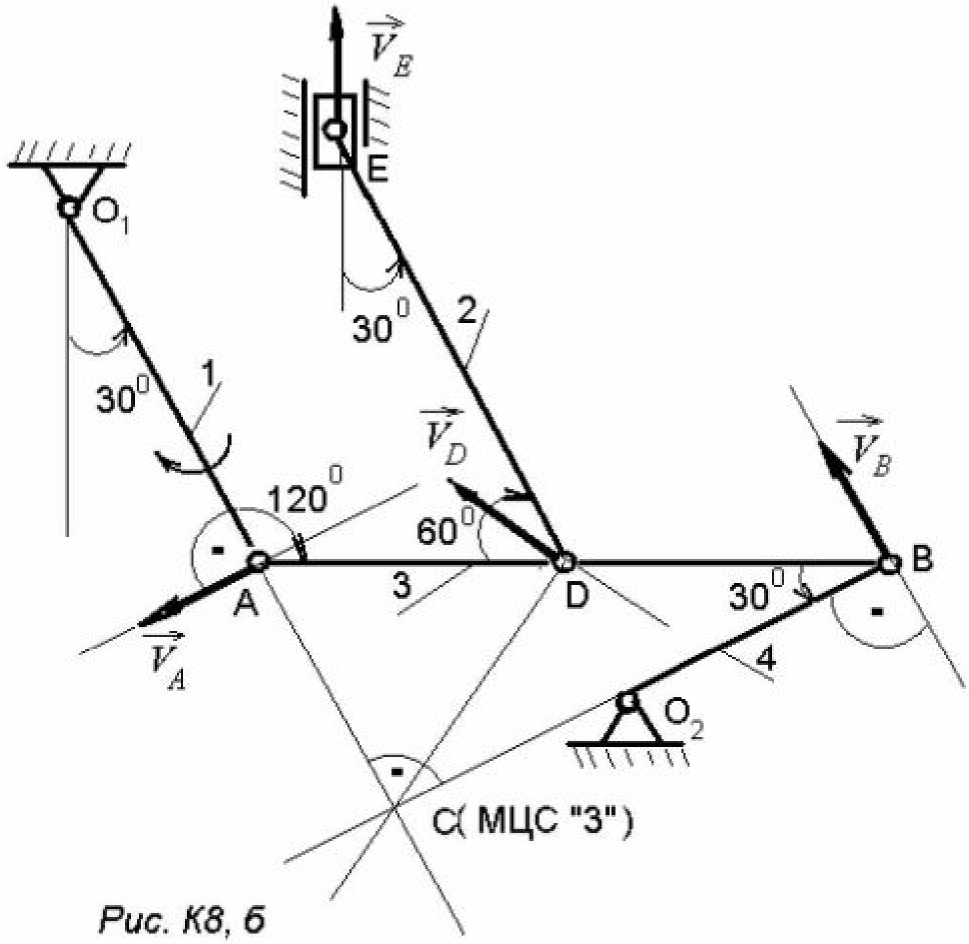


Рис. К8, б

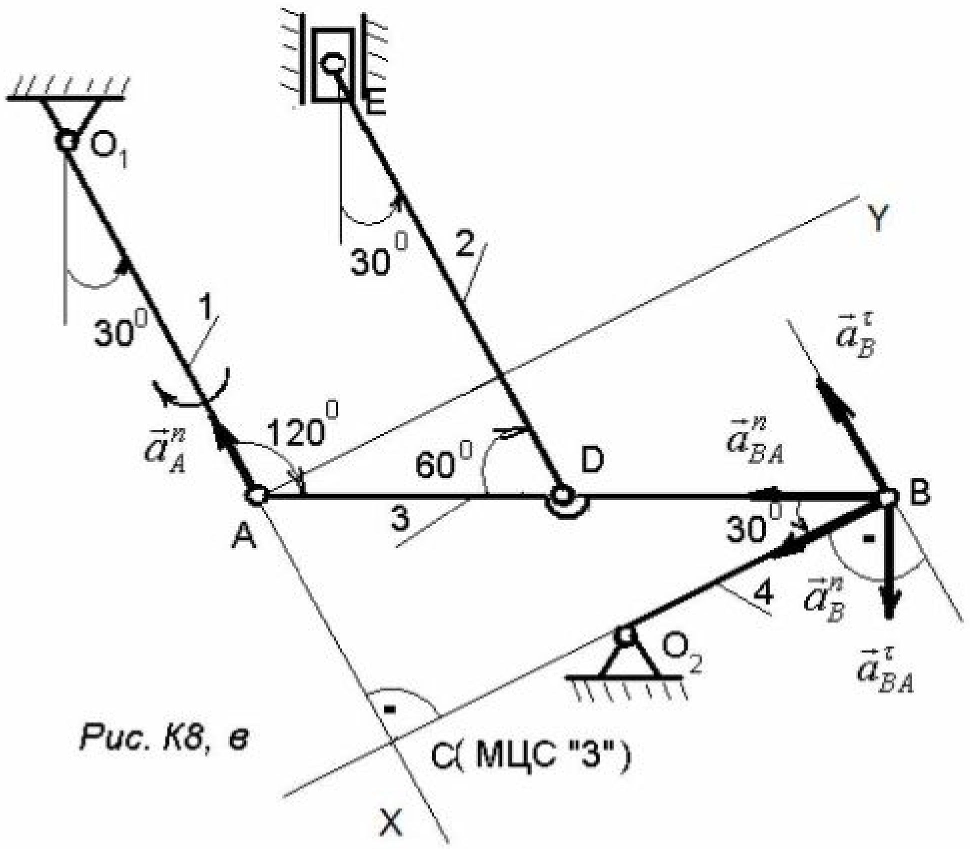


Рис. К8, в

4.2.6. Пример К-2

Механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *E*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами (рис. К-2).

Дано: $l_1=0{,}4$ *м*, $l_2=1{,}2$ *м*, $l_3=1{,}4$ *м*, $l_4=0{,}6$ *м*, $\alpha=30^o$, $\beta=60^o$, $\gamma=30^o$, $\varphi=0^o$, $\theta=120^o$; $AD=DB$; $\omega_1=5$ *рад/с с направлением - по ходу часовой стрелки.*

Определить: v_B, v_E, a_B, ω_{AB}, ε_{AB}.

Решение

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К-2, а).

Кинематический анализ:

- звенья O_1A и O_2B совершают вращательное движение;
- звенья *AB* и *DE* совершают плоскопараллельное движение;
- ползун *E* движется поступательно.

2. Для того, чтобы определить скорость точки *B*, принадлежащей звену *AB*, необходимо найти скорость какой-либо точки этого звена. Такой точкой является точка *A*, принадлежащая одновременно и звену O_1A, совершающему вращательное движение с угловой скоростью $\omega_1=5$ *рад/с* по ходу часовой стрелки относительно неподвижного шарнира в точке O_1. Точка *A* движется вместе с кривошипом O_1A по окружности радиуса, равного длине звена $l_1=0{,}4$ *м*. Скорость точки А может быть определена выражением: $v_A=\omega_1 l_1=5\cdot 0{,}4=2$ *(м/с)*. Вектор скорости точки *A* перпендикулярен звену *1* (O_1A) и направлен в сторону вращения кривошипа.

3. На основании теоремы о проекциях скоростей двух точек, принадлежащих телу, совершающему плоское движение, находим направление и модуль скорости точки *B*:

$\text{Пр}_{AB}\vec{v}_A=\text{Пр}_{AB}\vec{v}_B$, $v_A\cdot\cos 30^0=v_B\cdot\cos 60^0$, $v_B=3{,}46$ *(м/с)*. Вектор скорости точки *B* перпендикулярен звену *4* (O_2B), поскольку точка *B* вместе со звеном *4* совершает движение по окружности радиуса l_4.

ТАБЛИЦА К-2.1 (К РИС. К 2.0-К 2.4)

Номер условия	Углы, град.					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 рад/с	ε_1 рад/с^2	V_B м/с	a_B м/с^2	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	30	120	30	0	60	2	4	-	-	B,E	AB	B	AB
1	0	120	90	0	120	-	-	4	6	A,D	DE	A	AB
2	60	60	60	90	120	3	5	-	-	B,E	DE	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A,E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B,E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D,E	DE	A	AB
6	0	120	90	0	120	5	8	-	-	B,E	AB	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A,E	DE	A	AB
8	90	120	90	90	60	6	10	-	-	B,E	AB	B	AB
9	60	60	60	90	120	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

ТАБЛИЦА К-2.2 (К РИС. К 2.5-К 2.9)

Номер условия	Углы, град.					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1 рад/с	ω_4 рад/с	V точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B,K	DE	B	AB
1	90	150	120	90	30	-	4	A,E	DE	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,K	AB	B	AB
3	60	150	120	90	30	-	5	A,E	DE	A	AB
4	30	30	30	0	120	4	-	D,K	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A,E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B,E	DE	B	AB
7	0	60	30	0	120	-	2	A,K	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D,E	AB	B	AB
9	30	30	30	0	120	-	8	A,K	AB	A	AB

4. Для определения линии действия вектора скорости точки D построим мгновенный центр скоростей (МЦС) звена AB: МЦС$_{AB(3)}$ – точка C, лежащая на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к векторам их скоростей $\vec{v}_A, \vec{v}_B$. Вектор скорости точки D перпендикулярен отрезку DC расстояние от точки D до мгновенного центра скоростей звена AB, которому точка D принадлежит.

5. Определяем угловую скорость звена AB: $\omega_{AB(3)} = v_A/AC$, где AC - катет, лежащий против угла равного 30^0, $AC=0{,}5 \cdot AB=0{,}7$ $(м)$; $\omega_{AB(3)} = 2/0{,}7=2{,}86$ $(рад/с)$.

6. Определяем линию действия, направление и модуль вектора скорости ползуна, принятого за материальную точку E.

Линия действия вектора $\vec{v}_E$ параллельна направляющим ползуна (совпадает с осью ползуна), который движется поступательно. Направление вектора $\vec{v}_E$ и его модуль находим, используя теорему о проекциях скоростей двух точек, принадлежащих одному и тому же телу, совершающему плоское движение:

$$Пр_{ED}\vec{v}_E = Пр_{ED}\vec{v}_D\ , \quad v_E \cdot \cos 30^0 = v_D \cdot \cos 30^0\ , \quad v_E = v_D = v_A = 2\ (м/с).$$

7. Определяем a_B . Точка B принадлежит звену AB. Чтобы найти её ускорение, необходимо знать ускорение какой-нибудь точки этого звена (полюса) и траекторию точки B. Точка В движется по окружности вместе с кривошипом O_2B, и поэтому направление вектора $\vec{a}_B$ заранее известно.

Ускорение точки B при плоском движении тела равно геометрической сумме ускорения полюса A и ускорения точки B при вращении вокруг полюса A:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}\ .$$

Разложив векторы ускорений на составляющие по естественным осям, получим следующее векторное равенство:

$$\vec{a}^n{}_B+\vec{a}_B^\tau=\vec{a}^n{}_A+\vec{a}_A^\tau+\vec{a}^n{}_{BA}+\vec{a}_{BA}^\tau \ .$$

Векторы ускорений будут направлены следующим образом: вектор $\vec{a}^n{}_B$ – по радиусу O_2B к центру O_2 окружности; вектор $\vec{a}^\tau{}_B$ – перпендикулярно O_2B в любую сторону; вектор $\vec{a}^n{}_A$ – по радиусу O_1A к центру O_1 вращения; вектор $\vec{a}^n{}_{BA}$ – по радиусу BA к центру A вращения; вектор $\vec{a}^\tau{}_{BA}$ – перпендикулярно BA в любую сторону. Поскольку по условию задачи точка A, принадлежащая звену O_1A, движется равномерно, то её касательное ускорение равно 0 $\left(a_A^\tau=0\right)$, и поэтому на чертеже вектор $\vec{a}^\tau{}_A$ не изображаем.

8. Спроецируем обе части уравнения на координатные оси X и Y:

$$X:\ \ -a_B^\tau=-a_A^n+a_{BA}^\tau\cos30^0-a_{BA}^n\cos60^0;$$

$$Y:\ \ -a_B^n=-a_{BA}^\tau\cos60^0-a_{BA}^n\cos30^0.$$

9. Определяем $a^n{}_B$, $a^n{}_A$, $a^n{}_{BA}$:

$$a_A^n=\omega_1^2 l_1=25\cdot0{,}4=10(м/с^2);\quad a_B^n=\frac{v_B^2}{l_4}=19{,}95(м/с^2);$$

$$a_{BA}^n=\omega_{3(AB)}^2 l_3=2{,}86^2\cdot1{,}4=11{,}45(м/с^2).$$

10. Подставляя известные значения в уравнения, полученные при проецировании векторной суммы, находим $a^\tau{}_{BA}$ и $a^\tau{}_B$: $a^\tau{}_B$ = *-1,66 (м/с²)*, $a^\tau{}_{BA}$ *=20,07(м/с²)*. Знак « - » означает, что вектор касательного ускорения точки B фактически имеет направление противоположное выбранному в ходе решения задачи.

11. Находим полное ускорение точки B: $a_B=\sqrt{a_B^{n\,2}+a_B^{\tau\,2}}=20{,}02(м/с^2)$.

12. Угловое ускорение звена AB определяется выражением:

$$\varepsilon_{3(AB)}=\frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{l_3}=14{,}34(рад/с^2).$$

Ответ: v_B=*3,46(м/с)*, v_E =*2(м/с)*, a_B =*20,02(м/с)*, ω_{AB}=*2,86(м/с)*, ε_{AB} *14,34(рад/с²)*.

4.3. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Движение точки относительно системы координат, принимаемой за неподвижную, называют сложным, если его можно представить как движение точки относительно подвижной системы координат и движение точки вместе с подвижной системой относительно неподвижной.

4.3.1. Основные определения и правила в теории сложного движе-

Абсолютным движением, скоростью, ускорением точки *называют её движение, скорость, ускорение относительно неподвижной системы координат.*

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей $\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_e$.

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_k$.

Относительным движением, скоростью $\left(\vec{V}_r\right)$***, ускорением*** $\left(\vec{a}_r\right)$ ***точки*** *называют её движение, скорость, ускорение относительно подвижной системы координат.*

Переносным движением *называют движение подвижной системы координат относительно неподвижной.*

Переносной скоростью $\left(\vec{V}_e\right)$ ***точки*** *называют её скорость в переносном движении.*

Переносным ускорением точки $\left(\vec{a}_e\right)$ *называют её ускорение в переносном движении.*

Чтобы вычислить ***относительную скорость (относительное ускорение)****, надо мысленно остановить подвижную систему координат, не останавливая движения точки, и вычислить скорость (ускорение) точки относительно мысленно остановленной системы координат.*

Чтобы вычислить ***переносную скорость (переносное ускорение)****, надо мысленно остановить точку в подвижной системе координат и вычислить скорость (ускорение) того места подвижной системы координат, с которым совпадает точка в данный момент времени.*

Ускорение Кориолиса *точки есть удвоенное векторное произведение переносной угловой скорости на относительную скорость точки* $\vec{a}_k=2\left[\vec{\omega}_e\times\vec{V}_r\right]$.

Вектор ускорения Кориолиса перпендикулярен плоскости, которой принадлежат векторы угловой переносной и относительной скорости точки, и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{V}_r$ на наименьший угол виден происходящим против хода часовой стрелки. Если векторы не лежат в одной плоскости, следует мысленно перенести вектор угловой переносной скорости параллельно самому себе в заданную точку и применить сформулированное выше правило.

Иногда нахождение направления ускорения Кориолиса облегчает применение ***правила Жуковского***: *спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой переносной скорости, и повернуть полученную проекцию в этой плоскости вокруг известной точки на угол* 90^0 *в сторону переносного вращения.*

4.3.2. К-3. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Дано: прямоугольная пластина (рис. К 3.0 – К 3.4) или круглая пластина радиуса $R = 60$ *см* (рис. К 3.5 – К 3.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в табл. К - 3. Положительное направление отсчета угла показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0,1,2,5,6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3,4.7,8,9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой *BD* (рис. К3.0 - К3.4) или по окружности радиуса *R* (рис. К3.5 – К3.9) движется точка *M*; закон ее относительного движения, то есть зависимость $s=AM=f_2(t)$ (*s* - в сантиметрах, *t* – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. К3.0 - К3.4 и для рис. К3.5 – К3.9; там же даны размеры *a* и *h*. На рисунках точка *M* показана в положении, при котором $s=AM>0$ (при $s<0$ точка *M* находится по другую сторону от точки *A*).

Определить: абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M* в момент времени $t_1 = 1$ *с*.

Указания: для решения задачи необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует определить, где находится точка на пластине в момент времени $t_1 = 1$ *с* и изобразить точку именно в этом положении.

4.3.3. Пример К– 3

По пластине вдоль прямой *BD* движется точка *M*; пластина вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости пластины, по известному закону (рис. К-3).

Дано: $\varphi=2t^3\ \ t^2$ *(рад)*; $s=AM=18\sin(\pi t/4)$ *см*; $t_1=2/3$ *с*; $a=25$ *см*.

Определить: для момента времени t_1 абсолютную скорость и абсолютное ускорение.

Таблица К-3

Номер рисунка	Для всех рисунков $\varphi=f_1(t)$	Для рис. К 3.0-К 3.4		Для рис. К 3.5-К 3.9	
		a, см	$S=AM=f_2(t)$	h	$S=AM=f_2(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$(\pi R/3)\cdot(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	4R/3	$(\pi R/2)\cdot(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$(\pi R/3)\cdot(2t^2-1)$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$(\pi R/3)\cdot(t^4-3t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$(\pi R/6)\cdot(3t-t^2)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$(\pi R/3)\cdot(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	3R/4	$(\pi R/2)\cdot(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$(\pi R/6)\cdot(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$(\pi R/3)\cdot(3t^2-t)$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	4R/3	$(\pi R/2)\cdot(t-2t^2)$

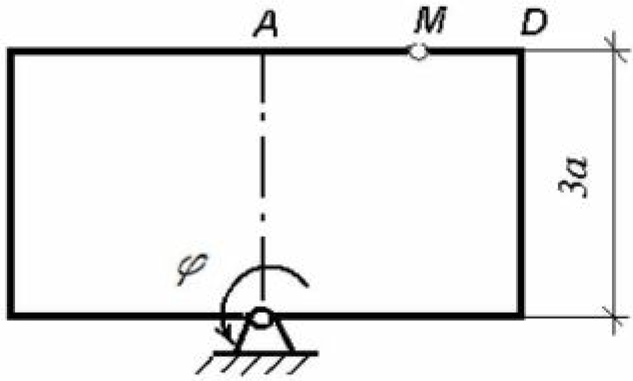


Рис. К 3.0

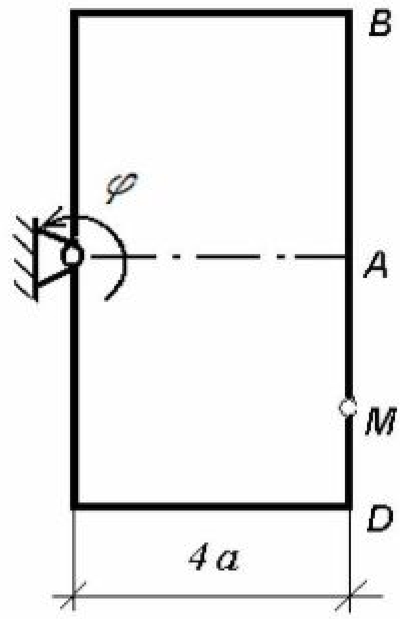


Рис. К 3.1

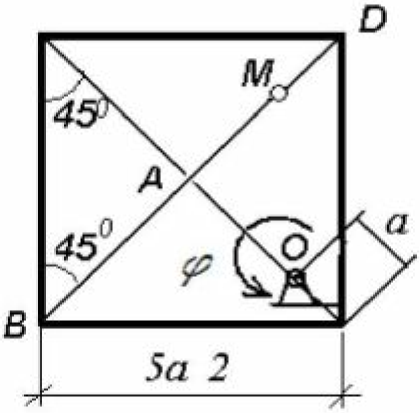


Рис. К 3. 2

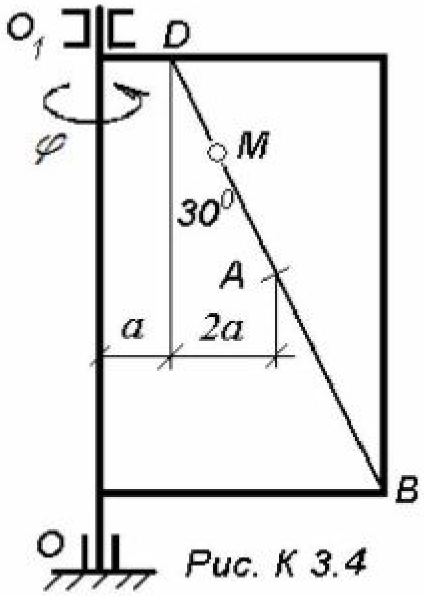


Рис. К 3.4

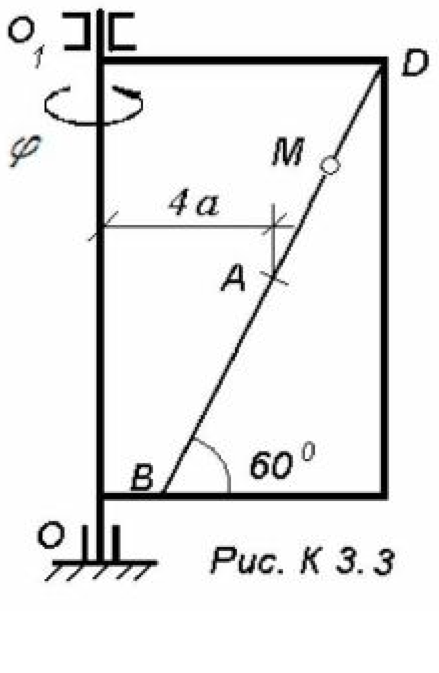


Рис. К 3. 3

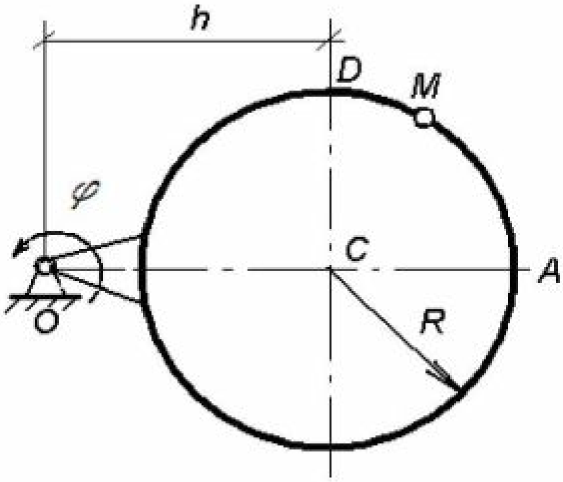


Рис. 3.5

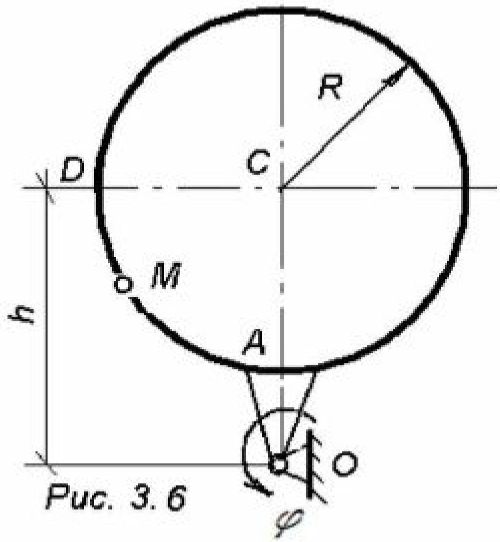


Рис. 3.6

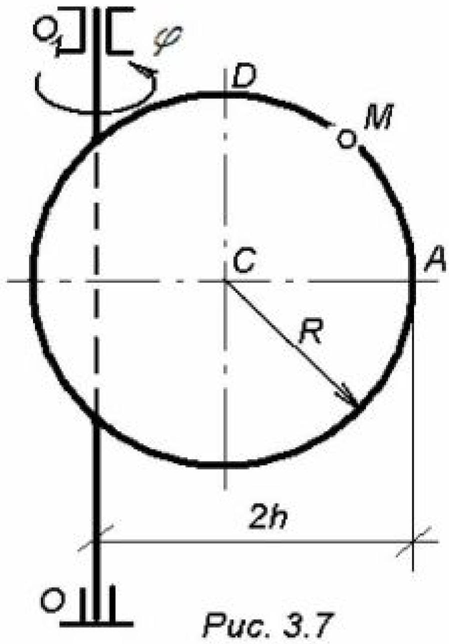
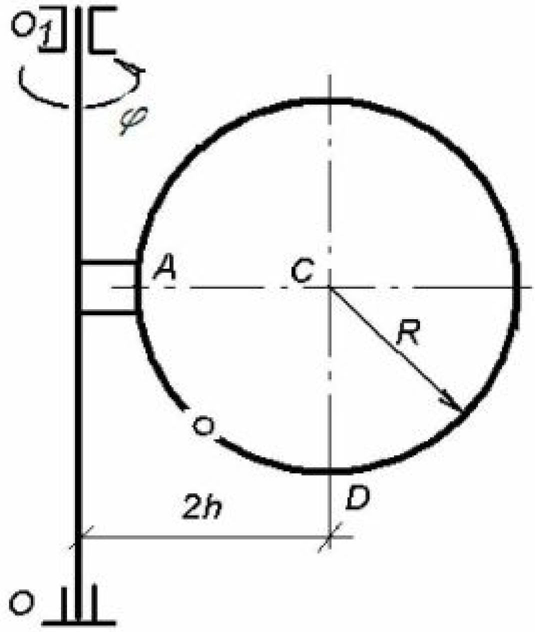


Рис. 3.7



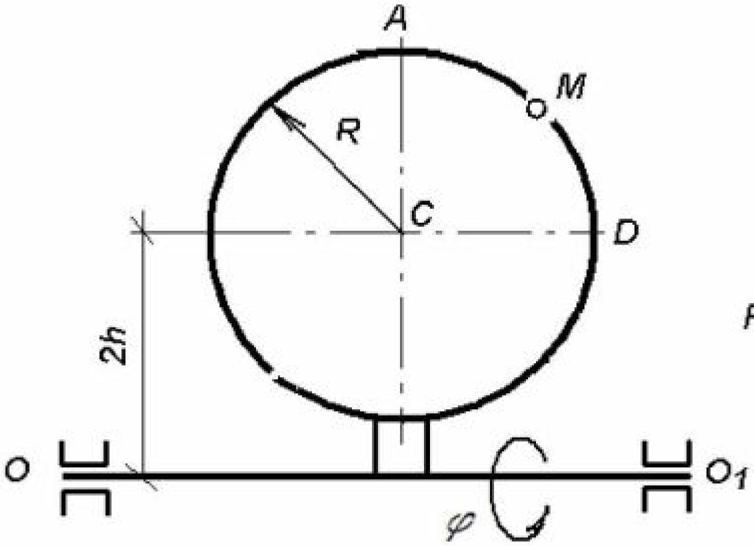


Рис. 3.9

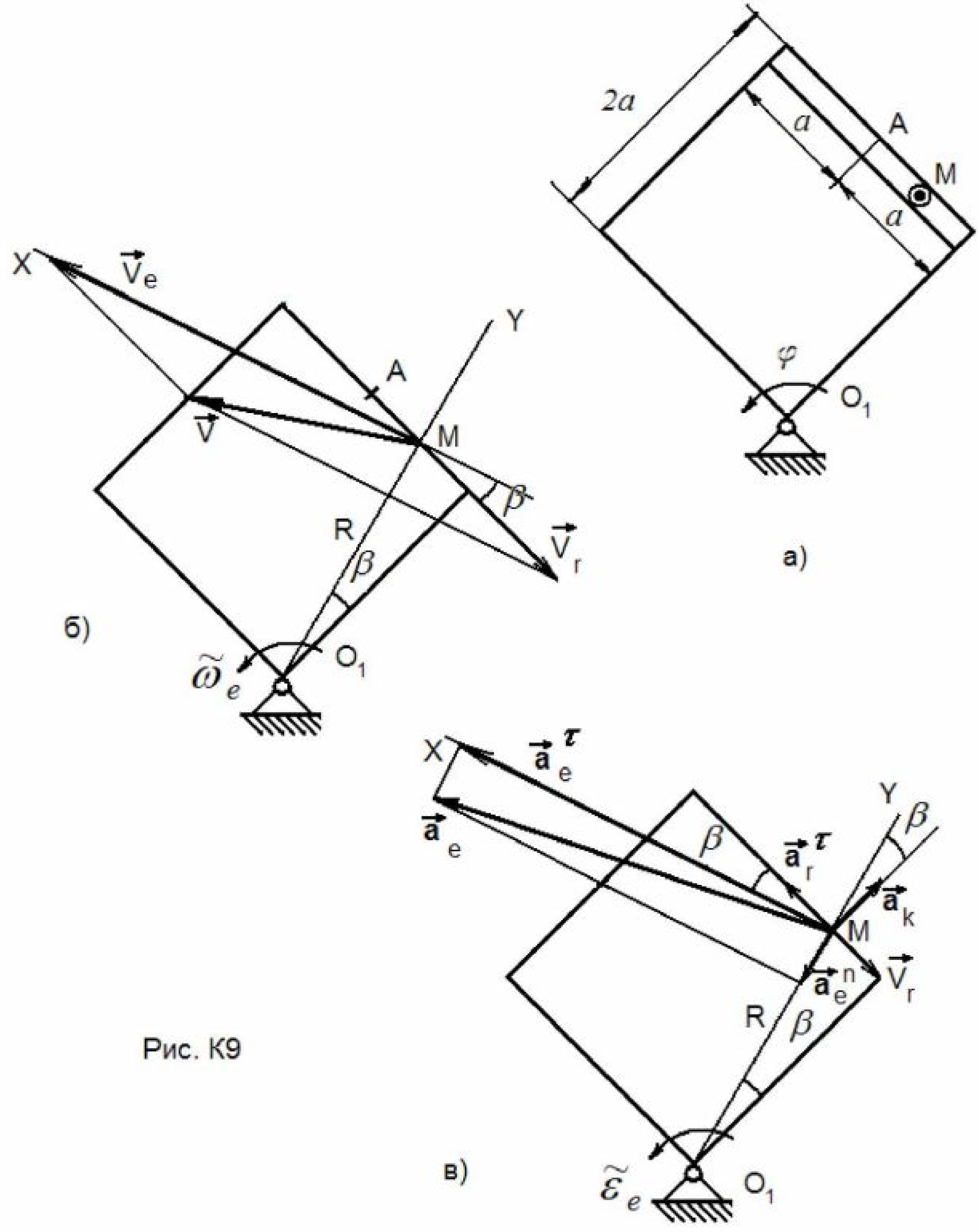

2a
a
A
M
a
φ
O_1
а)
X
$\vec{V}_e$
Y
A
$\vec{V}$
M
β
R
$\vec{V}_r$
β
б)
$\widetilde{\omega}_e$
O_1
X
$\vec{a}_e^{\tau}$
$\vec{a}_e$
β
$\vec{a}_r^{\tau}$
Y
β
$\vec{a}_k$
M
$\vec{a}_e^n$
$\vec{V}_r$
R
β
в)
$\widetilde{\varepsilon}_e$
O_1

Рис. К9

Решение

1. *Анализ задания*: точка M совершает сложное движение, так как она движется по пластине вдоль прямой BD и вместе с пластиной, вращающейся вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости пластины.
2. Выберем две системы координат: неподвижную с началом координат в точке O_1 и подвижную с началом координат в точке M:
   - абсолютное движение точки М – её движение относительно неподвижной системы координат $O_1X_1Y_1$;
   - относительное движение точки M – её движение относительно подвижной системы координат OXY, то есть движение точки по прямой BD; траекторией является прямая;
   - переносное движение – движение подвижной системы координат относительно неподвижной, то есть вращение пластины относительно оси, ей перпендикулярной.
3. Положение точки на прямой BD определяется расстоянием $s=AM=18\sin(\pi t/4)$ *см*, при $t_1=2/3$ *с*, $s=AM=9$ *см*.
4. Абсолютную скорость точки М найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей: $\vec{V}=\vec{V}_r+\vec{V}_e$.
5. Относительная скорость точки M равна $\widetilde{V}_r=\dfrac{dS}{dt}=4{,}5\pi\cos\dfrac{\pi t}{4}$ *(см/с)*, при $t_1=2/3$ *с* $V_r=12{,}24$ *(см/с)*. Вектор относительной скорости направлен в сторону возрастания s, так как $V_r > 0$.
6. Определим переносную скорость точки M, мысленно остановив движение точки по прямой BD. В переносном движении точка M описывает окружность радиуса $R=OM$:

$$\widetilde{\omega}_e=\dot{\varphi}_e=6t^2-2t \quad (рад/с)$$, при $t_1=2/3$ *с* $\widetilde{\omega}_e=1{,}33(рад/с)$;

$$R=\sqrt{(a-OM)^2+4a^2}=52{,}50(см); \qquad V_e=\omega_e\cdot R=1{,}33\cdot 52{,}50=69{,}82(см/с)$$

Вектор переносной скорости направлен по касательной к окружности в сторону вращения пластины.

7. Найдем модуль абсолютной скорости по формуле: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$, где

   $V_x=V_e-V_r\cdot\cos\beta=69{,}82-12{,}24\cdot 0{,}95=58{,}17$ *(см/с)*;
   $V_y=-V_r\cdot\sin\beta=-12{,}24\cdot 0{,}31=-3{,}73$ *(см/с)*;
   $V=58{,}29$ *(см/с)*.

8. Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_k \text{ или } \vec{a}=\vec{a}^n{}_r+\vec{a}_r^\tau+\vec{a}^n{}_e+\vec{a}_e^\tau+\vec{a}_k .$$

9. Для определения относительного ускорения точки M мысленно остановим подвижную систему координат и вычислим относительное касательное ускорение: $\widetilde{a}_r^{\tau}=\dfrac{d^2S}{dt^2}=-\dfrac{9\pi^2}{8}\sin\dfrac{\pi t}{4}$, при $t_1=2/3$ с

$a^{\tau}_r = -5,55$ (см/с^2).

Знак *«минус»* показывает, что вектор относительного касательного ускорения направлен в сторону отрицательных значений S: движение замедленное.

Относительное нормальное ускорение равно нулю, поскольку движение точки M вдоль BD – прямолинейное.

10. Переносное касательное ускорение определяем, мысленно остановив точку M в подвижной системе координат:

$$a_e^n=\omega_e^{\,2}\cdot R=52{,}50\cdot 1{,}33^2=92{,}87\ \left(см/c^2\right);$$

$$a_e^{\tau}=\left|\varepsilon_e\right|\cdot R=\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot R,\qquad при\quad t_1=\frac{2}{3}c,\quad a_e^{\tau}=315\ \left(см/c^2\right).$$

Знаки угловой скорости и углового ускорения переносного вращения одинаковы, и, следовательно, движение является ускоренным, направления векторов угловой скорости и углового ускорения совпадают. Векторы касательного ускорения и скорости в переносном движении направлены в одну сторону. Вектор нормального ускорения переносного вращательного движения направлен по радиусу к центру окружности, которую описывает тот пункт подвижной системы координат, с которым совпадает точка M в данный момент времени.

11. Определяем модуль ускорения Кориолиса: $a_k=2\left|\omega_e\right|\cdot\left|V_r\right|\cdot\sin\alpha$, где α – угол между вектором относительной скорости и вектором угловой переносной скорости (оси вращения). В нашем случае это угол равен 90^0, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор относительной скорости. В момент времени $t_1=2/3$ с $a_k = 32,56$ (см/с^2). Направление вектора ускорения Кориолиса находим по правилу Жуковского: так как вектор относительной скорости лежит в плоскости вращения, перпендикулярной оси вращения, то, повернув его на 90^0 в направлении угловой переносной скорости, то есть против хода часовой стрелки, найдем направление вектора ускорения Кориолиса.

12. Модуль абсолютного ускорения точки M найдем, предварительно спроецировав обе части векторного равенства, представленного выше, на координатные оси:

$$a_x=a_e^{\tau}+a_r^{\tau}\cdot\cos\beta-a_k\cdot\sin\beta=310{,}35\quad\left(см/c^2\right);$$

$$a_y=a_r^{\tau}\cdot\sin\beta+a_k\cdot\cos\beta-a_e^{n}=-60{,}18\quad\left(см/c^2\right);$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=316{,}13\quad\left(см/c^2\right).$$

Ответ: $V=58,29$ см/с, $a=316,13$ см/с^2.

ГЛАВА 5. ДИНАМИКА

5.1. ДИНАМИКА ТОЧКИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Динамика изучает движение материальных объектов с учетом действующих на них сил.

Основной закон динамики: *в инерциальной системе отсчета вектор ускорения материальной точки пропорционален вектору силы, действующей на точку* $m\vec{a}=\vec{F}$, где m – масса материальной точки.

Движение материальной точки может быть задано дифференциальными уравнениями движения:

– *в векторной форме*

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t);$$

– *в координатной форме*

$$m\ddot{x}=X(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t);$$

$$m\ddot{y}=Y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t);$$

$$m\ddot{z}=Z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t);$$

– *в естественной форме*

$$m\tilde{a}_\tau=F_\tau; \quad ma_n=F_n; \quad 0=F_b.$$

Основные задачи динамики:

– ***первая задача динамики***: *задано движение материальной точки массой* ***m****; найти силу, действующую на точку;*

– ***вторая задача динамики***: *по заданной массе* ***m****, действующим на точку силам и известным начальным условиям определить движение этой точки.*

5.2. Д -1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННЫХ СИЛ

Дано: груз ***D*** массой ***m***, получив в точке *А* начальную скорость v_0 , движется в изогнутой трубе ***ABC***, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д 1.0-Д1.9, табл. Д -1).

На участке ***AB*** на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$, зависящая от скорости $\vec{v}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке ***AB*** пренебречь.

В точке **В** груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок **ВС** трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения о трубу $f=0,2$) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x на ось **x** задана в таблице.

Определить. Считая груз материальной точкой и зная расстояние ***AB=l*** или время t_1 движения груза от точки *А* до точки ***В***, найти закон движения груза на участке ***ВС***, т.е. ***x=f(t)***, где ***x=BD***.

Указания. Задача решается в два этапа:

- сначала следует составить уравнение движения точки (груза) на участке ***АВ***, с учетом начальных условий проинтегрировать уравнение методом разделения переменных; затем, зная время движения груза на участке ***АВ*** или длину этого участка, определить скорость груза в точке ***В***. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке ***ВС***;
- составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке ***ВС*** с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке ***В***, и принимая в этот момент $t=0$; при интегрировании уравнения движения на участке ***АВ*** в случае, когда задана длина ***l*** участка, целесообразно перейти к переменному ***x***, учитывая, что $\frac{dv_x}{dt}=v_x\frac{dv_x}{dt}$.

ТАБЛИЦА Д-1

Номер условия	**m, кг**	**V_0, м/с**	**Q, H**	**R, H**	**l, м**	**t_1, c**	**F_x, H**
0	2	20	6	0,4v	-	2,5	2sin(4t)
1	2,4	12	6	$0,8v^2$	1,5	-	6t
2	4,5	24	9	0,5v	-	3	3sin(2t)
3	6	14	22	$0,6v^2$	5	-	-3cos(2t)
4	1,6	18	4	0,4v	-	2	4cos(4t)
5	8	10	16	$0,5v^2$	4	-	-6sin(2t)
6	1,8	24	5	0,3v	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0,8v^2$	2,5	-	-8cos(4t)
8	3	22	9	0,5v	-	3	2cos(2t)
9	4,8	10	12	$0,2v^2$	4	-	-6sin(4t)

5.2.1. Пример Д -1

На наклонном участке *АВ* трубы на груз *D* массой *m* действует сила тяжести, постоянная сила $\vec{Q}$ и сила сопротивления $\vec{R}$ (рис. Д -1). Движение точки от точки *А* при $v_0 = 22$ *м/с* до точки *В* происходит в течение *t* с.

На горизонтальном участке *ВС* на груз кроме силы тяжести действует сила трения $\vec{F}_{тр}$ и переменная сила $\vec{F}=\vec{F}(t)$.

Дано: m –3 *кг*; v_0– 22 *м/с*; Q – 9 *Н*; R –μv(*Н*); μ–0,5 *кг/с*; t– 3*с*; F–4$\sin(2t)$; α–30^0.

Определить: закон движения груза на участке *BC*.

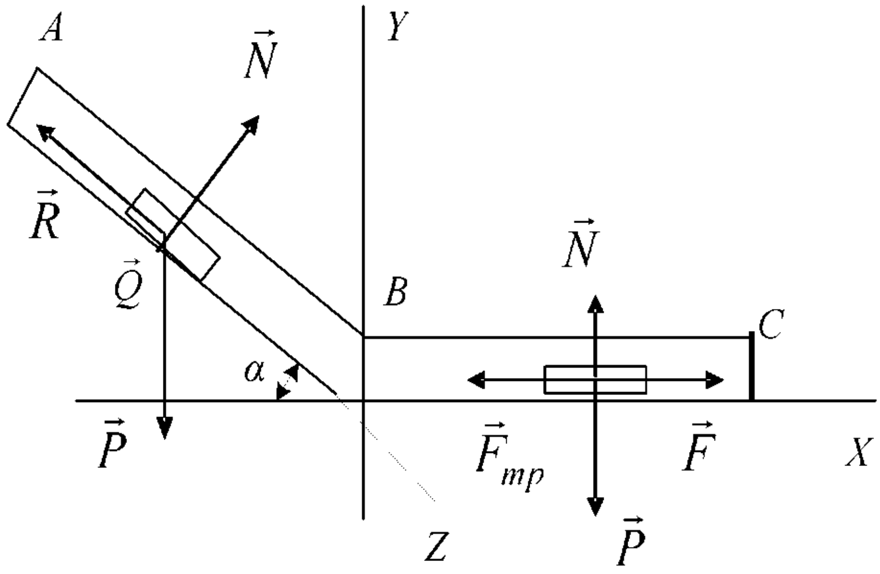


Рис. Д-1

Решение

1. Рассмотрим движение груза на участке *AB*, считая груз материальной точкой. Изобразим в произвольном положении груз и действующие на него силы: $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}$. Проведем ось *AZ* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекциях на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt}=\Sigma F_{kz} \quad \text{или} \quad m\frac{dv_z}{dt}=P\sin\alpha-Q-\mu v$$

или

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{\mu}{m}\left(\frac{mg\sin\alpha}{\mu}-\frac{Q}{\mu}-v\right).$$

2. Введем обозначение:

$a=\left(\frac{mg\sin\alpha}{\mu}-\frac{Q}{\mu}\right)$, откуда при заданных известных значениях получим a–12 *м/с* при g–10 *м/с*^{2}.

3. Разделив в уравнении переменные и взяв интегралы от обеих частей равенства, получим:

$$\frac{dv}{a-v}=\frac{\mu}{m}dt, \qquad -\ln(a-v)=\frac{\mu}{m}t+C_1 .$$

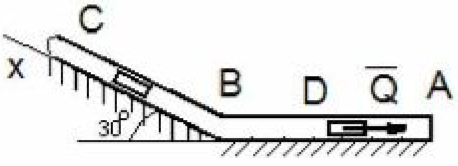


Рис. Д1.0

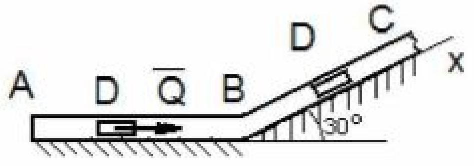


Рис. Д1. 1

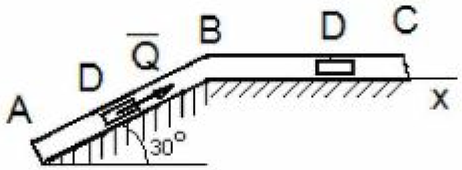


Рис. Д1. 2

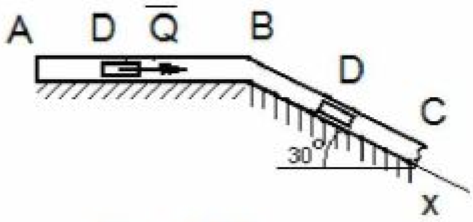


Рис. Д1.3

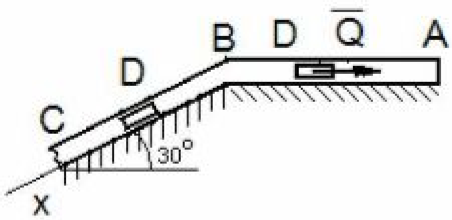


Рис. Д1.4

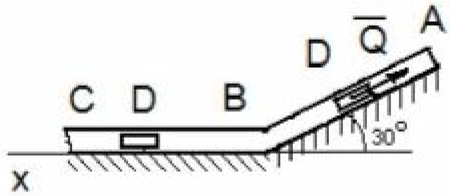


Рис. Д1.5

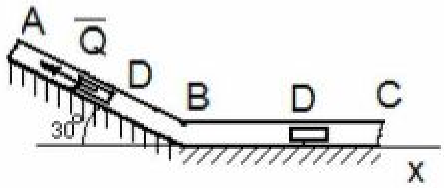


Рис. Д1.6

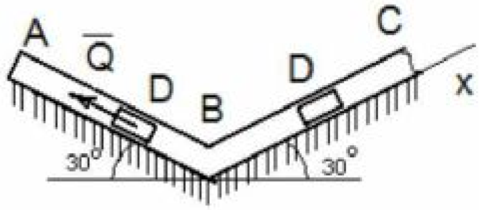


Рис. Д1.7

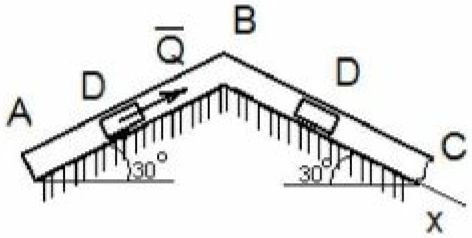


Рис. Д1.8

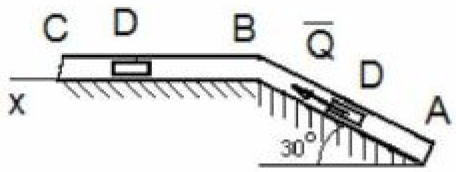


Рис. Д1.9

4. При известных начальных условиях: $t=0$, $v_0= 22$ *м/с* получаем $C_1= -ln(a-22)$. Тогда уравнение примет вид:

$$\ln(a-22)-\ln(a-v)=\frac{\mu}{m}t.$$

5. После преобразования получим:

$$\ln\frac{a-22}{a-v}=\frac{\mu}{m}t \quad \text{или} \quad \frac{a-22}{a-v}=e^{\frac{\mu}{m}t}.$$

6. Из п. 5 находим:

$$v=a-\frac{a-22}{e^{\frac{\mu}{m}t}}$$

Полагая, что $t=3$ *с*, и заменив a, μ, m известными численными значениями, определяем скорость груза в точке B: $v_B= 18,1$ *м/с*.

7. Рассмотрим движение груза на участке BC. Найденная скорость v_B будет для движения груза на этом участке являться начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изобразим в произвольном положении груз и действующие на него силы: $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{mp}$, $\vec{F}$.

8. Проведем из точки B оси BX и BY и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось BX:

$$m\frac{dv_x}{dt}=-F_{mp}+F ,$$

где $F_{mp}=fN$.

9. Для определения N составим уравнение в проекции на ось BY. Так как в направлении BY нет движения, то $\ddot{y}=0$, поэтому $0=N-mg$, откуда $N=mg$. Следовательно, $F_{mp}=fmg$. Учитывая, что $F=4sin(2t)$, уравнение примет вид:

$$m\frac{dv_x}{dt}=-fmg+4\sin(2t).$$

Разделив обе части равенства на m, получим:

$$\frac{dv_x}{dt}=-fg+\frac{4}{m}\sin(2t) \quad \text{или} \quad \frac{dv_x}{dt}=1{,}33\sin(2t)-2,$$

где $4/m=1,33$; $fg=2$ *м/с*^{2} при $f=0,2$.

10. Умножив обе части уравнения на dt и проинтегрировав его, найдем

$$v_x=-\frac{1{,}33}{2}\cos(2t)-2t+C_2 .$$

11. При известных начальных условиях: $t=0$, $v_0 = v_B= 18,1$ *м/с* - получим $C_2=18,1 + 1,33/2=18,8$.

12. Уравнение при найденной C_2 примет вид:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 18{,}8 - 2t - 0{,}67\cos(2t) \cdot$$

13. Умножая обе части на dt и снова интегрируя, получим:

$$x = 18{,}8t - t^2 - 0{,}33\sin(2t) + C_3 \cdot$$

14. При $t=0$, $x=0$ $C_3=0$, тогда закон движения груза окончательно будет представлен выражением:

$$x = 18{,}8t - t^2 - 0{,}33\sin(2t) \cdot$$

Ответ: $x = 18{,}8t - t^2 - 0{,}33\sin(2t)$

5.3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Изменение кинетической энергии материальной системы на ее конечном перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении:

$$T - T_0 = \sum_1^n A_\nu^e + \sum_1^n A_\nu^i \ ,$$

где $\boldsymbol{T_0}$ – начальное значение кинетической энергии системы.

5.3.1. Формулы для подсчёта кинетической энергии твердого тела в различных видах его движения

5.3.1.1. Тело движется поступательно

Скорости всех точек твердого тела одинаковы и равны скорости центра масс тела, поэтому:

$$T = \frac{MV_c^2}{2} \ ,$$

где M – масса твердого тела, *кг*; V_c – скорость центра масс тела, *м/с*.

5.3.1.2. Тело вращается вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} \ ,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения тела, *кг·м*^{2}; $\tilde{\omega}$ – угловая скорость вращения тела, *1/с*.

5.3.1.3. Тело совершает плоское движение

Плоское движение может быть рассмотрено как сумма поступательного движения тела со скоростью центра масс и вращательного движения тела вокруг оси Cz', перпендикулярной присоединенной плоскости и проходящей через центр масс тела, поэтому:

$$T=\frac{J_{Cz'}\omega^2}{2}+\frac{MV_c^2}{2},$$

где J_{Cz}' – момент инерции тела относительно оси вращения Cz', *кг·м²*; $\widetilde{\omega}$ - угловая скорость вращения тела, *1/с*; *М* – масса твердого тела, *кг*; V_c – скорость центра масс тела, *м/с*.

5.3.1.4. Тело вращается вокруг неподвижной точки

$$T=\frac{J_\omega\omega^2}{2},$$

где J_ω – момент инерции тела относительно мгновенной оси скоростей, *кг·м²*.

Примечание: 1. Момент инерции цилиндра: $J_Ц=\frac{mr^2}{2}$; 2. Момент инерции ступенчатого шкива: $J_{ШК}=m\rho^2$; 3. Момент инерции блока, масса которого равномерно распределена по ободу: $J_{БЛ}=mr^2$.

5.3.2. Примеры вычисления работы сил

1. Сумма работ внутренних сил системы в общем случае отлична от нуля.
2. Если материальная система представляет собой абсолютно твердое тело, то сумма работ внутренних сил равна нулю.
3. Работа любой силы равна нулю, если сила приложена в неподвижной точке, скорость которой равна нулю в данный момент времени.
4. Работа внутренних сил натяжений гибких нерастяжимых тросов, канатов и т.п. равна нулю.
5. ***Работа силы тяжести*** *равна произведению веса материальной системы на вертикальное перемещение центра масс, взятому со знаком «плюс», если центр масс опускается, и со знаком «минус», если центр масс поднимается:* $A=\pm Mgh_c$, где М – масса материальной системы, *кг*; h_c – вертикальное перемещение центра масс, *м*; *g* – ускорение свободного падения, *м/с²*.
6. ***Работа силы, приложенной к вращающемуся вокруг оси абсолютно твердому телу***, равна: $A=\pm M^П(\varphi-\varphi_0)$, где $M^П$- момент пары сил, приложенной к телу, *Нм*; $\varphi-\varphi_0$ – значение конечного угла поворота тела.
7. ***Работа силы трения***: $A= - F_{тр}\cdot S$, где *S*- перемещение, *м*. Работа силы трения всегда отрицательна.
8. ***Работа сил упругости пружины***: $A=0,5c\cdot(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)$, где *с* - коэффициент жесткости пружины; λ - удлинение пружины, *м*. Работа положительна при $\lambda_0>\lambda_1$ и отрицательна при $\lambda_0<\lambda_1$.

5.3.3. Д -2. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Дано. Механическая система состоит из катков ***1*** и ***2*** (или катка и подвижного блока), ступенчатого шкива ***3*** с радиусами ступеней $R_3= 0,3$ *м*, $r_3 = 0,1$ *м* и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0,2$ *м*, блока ***4*** радиуса $R_4= 0,2$ *м* и грузов ***5*** и ***6*** (рис. Д 2.0 – Д 2.9, табл. Д-2); тела ***1*** и ***2*** считать сплошными однородными цилиндрами, а массу блока ***4*** – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость ***f=0,1***. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив ***3*** (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости ***c***.

Под действием силы ***F=f(s),*** зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив ***3*** действует постоянный момент ***М*** сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Все катки катятся по плоскостям без скольжения.

Если по заданию массы грузов ***5*** и ***6*** или массы катков ***1*** (рис. Д 2.0-2.4) и ***2*** (рис. Д 2.5-2.9) равны нулю, то на чертеже их можно не изображать.

Определить: значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение ***s*** станет равным $s_1= 0,2$ *м*. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д 2, где обозначено: ω_3 – угловая скорость тела ***3***; ε_4 – угловое ускорение тела ***4***; v_5 – скорость тела ***5***; a_{c2}- ускорение центра масс тела ***2*** и т.п.

Указания. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию следует выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении энергии для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей. При вычислении работы необходимо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учитывая при этом, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

5.3.4. Пример Д -2

Механическая система состоит из грузов *1* и *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3, радиусом инерции ρ_3 относительно оси вращения, блока *4* радиуса R_4 и подвижного блока *5* (коэффициент трения грузов о плоскость равен f).Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*.

К центру блока *5* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Таблица Д-2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	m_6, кг	c, Н/м	M, Нм	F=f(s), Н	Найти
0	2	0	4	0	6	0	180	1,2	80(3+4s)	v_{c1}
1	0	2	0	6	0	4	120	0,6	20(6+5s)	a_6
2	6	0	0	2	4	0	400	1,8	60(4+s)	ω_4
3	0	4	6	0	0	2	240	0,3	40(3+8s)	ε_3
4	4	0	0	2	0	6	320	1,5	50(5+2s)	v_6
5	2	0	4	0	0	6	100	0,9	30(4+3s)	a_{c1}
6	0	4	0	6	2	0	160	2,4	60(2+5s)	v_5
7	6	0	0	4	0	2	120	0,3	80(1+4s)	ε_4
8	0	6	2	0	4	0	200	1,2	20(8+3s)	ω_3
9	0	2	0	4	6	0	100	0,6	40(3+2s)	a_{c2}

Дано: m_1–0 кг, m_2–5 кг, m_3–6 кг, m_4–0 кг, m_5–4 кг, R_3–0,3 м, r_3– 0,1 м, ρ_3–0,2 м, f–0,1, c–240 Н/м, M–0,6 Нм, F–80(3+2S)Н, s_1–0,2 м.

Определить: v_{c5} в тот момент, когда s– s_1.

Решение

1.Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *2, 3, 5* и невесомых тел *1* и *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные F, $F_{упр}$, P_2 , P_3 , P_5 , $F_{тр2}$, момент сопротивления M, натяжение нити S_5 и реакции связей N_2, N_3, N_4 .

2. Для определения v_{c5} воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии: $T - T_0 = \sum\limits_1^n A_v^e + \sum\limits_1^n A_v^i$, где $\sum\limits_1^n A_v^e, \sum\limits_1^n A_v^i$ – соответственно, сумма работ внешних и внутренних сил системы.

Для рассматриваемой системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, работа внутренних сил равна нулю.

В начальном положении все элементы механизма находились в покое, скорости всех тел были равны нулю, поэтому $T_0=0$.

3. Кинетическая энергия системы равна сумме энергий всех тел системы:

$$T - T_2 + T_3 + T_5.$$

4. Выполним кинематический анализ:

– тело *2* движется поступательно;

– тело *3* вращается вокруг неподвижной оси;

– тело *5* участвует в плоскопараллельном движении.

Исходя из этого, кинетическая энергия системы может быть представлена выражением:

$$T = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_5 v_{c5}^2}{2} + \frac{J_{c5} \omega_5^2}{2} .$$

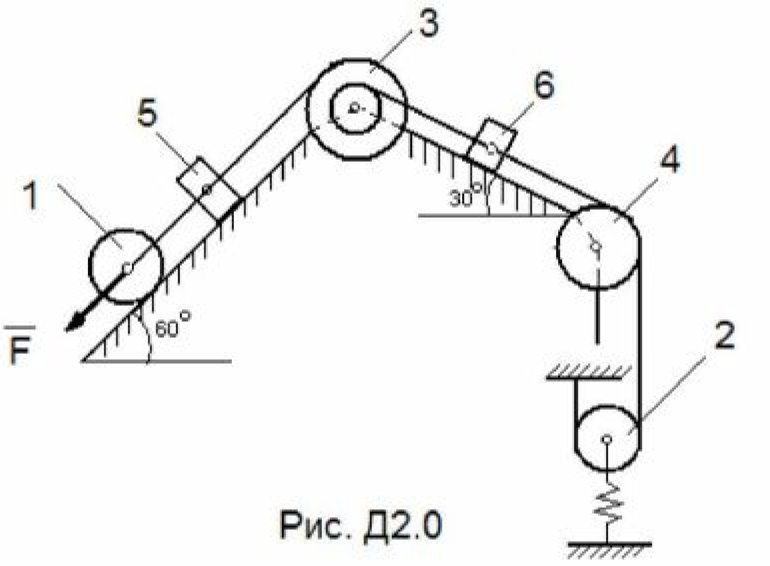


Рис. Д2.0

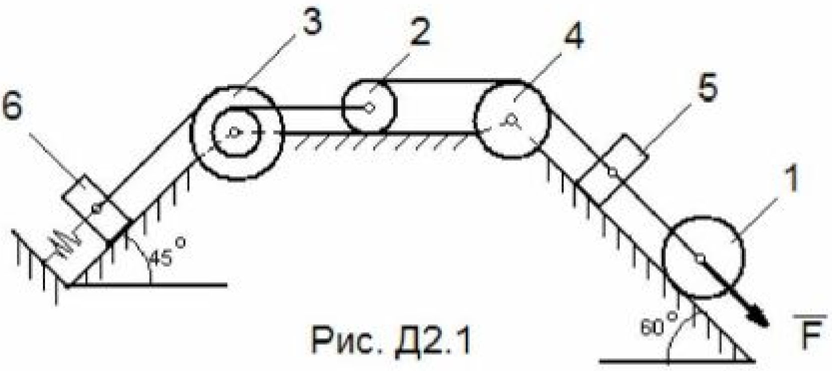


Рис. Д2.1

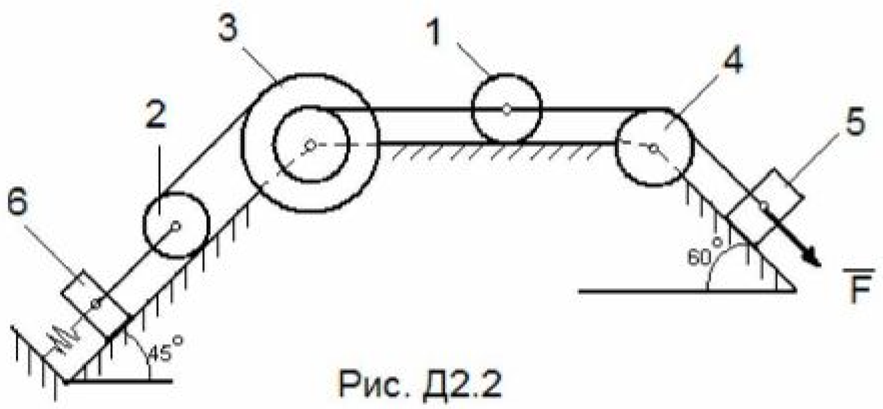


Рис. Д2.2

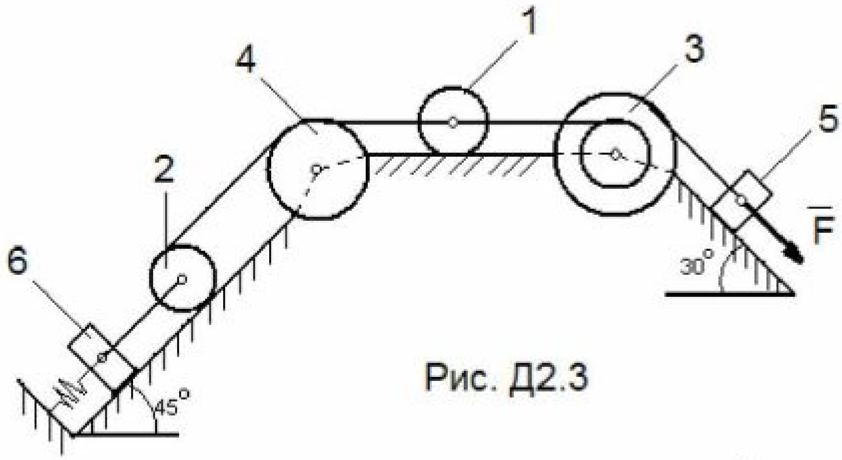


Рис. Д2.3

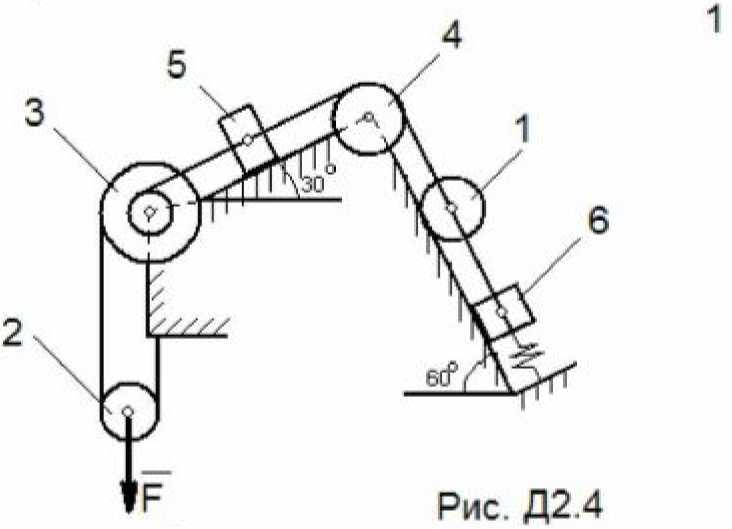


Рис. Д2.4

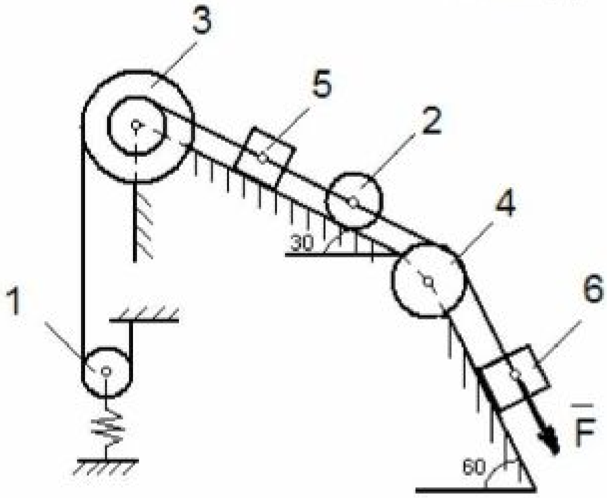


Рис. Д2.5

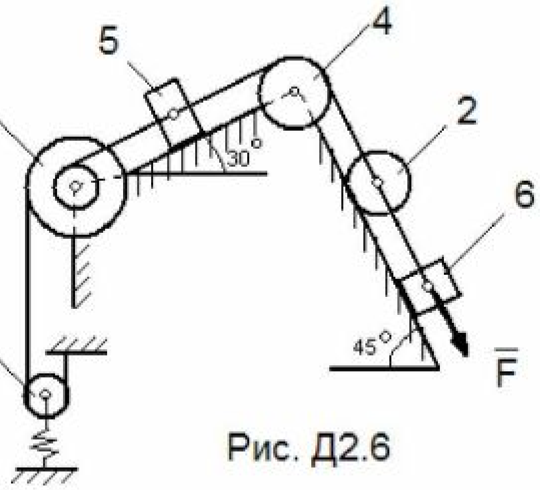


Рис. Д2.6

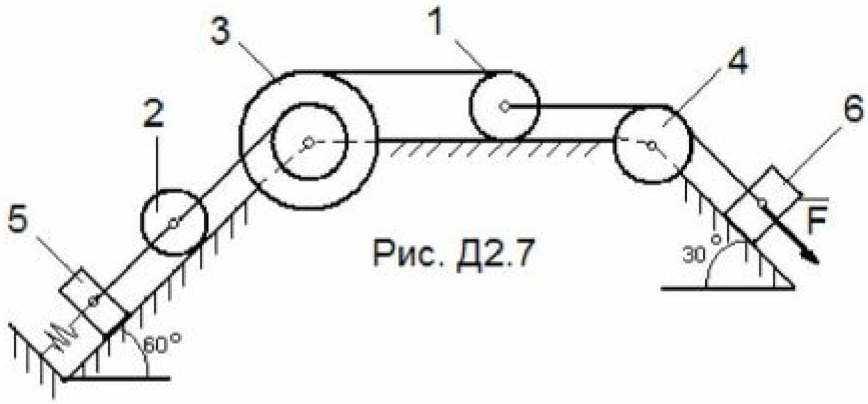


Рис. Д2.7

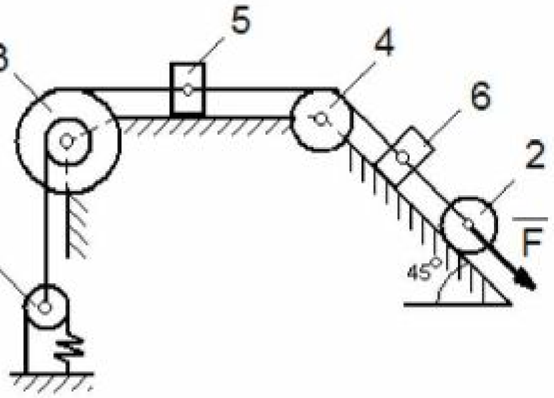


Рис. Д2.8

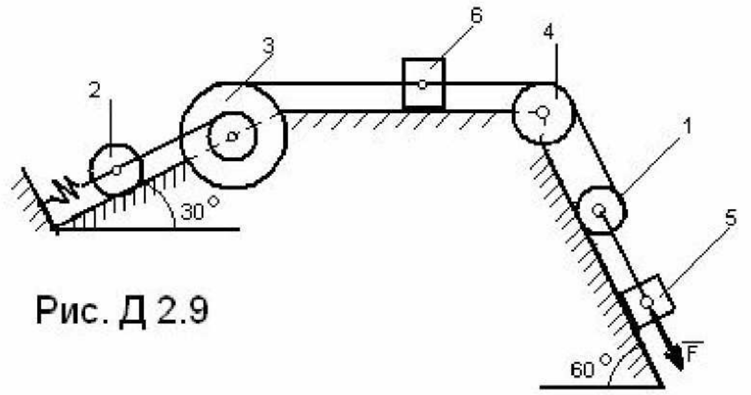


Рис. Д 2.9

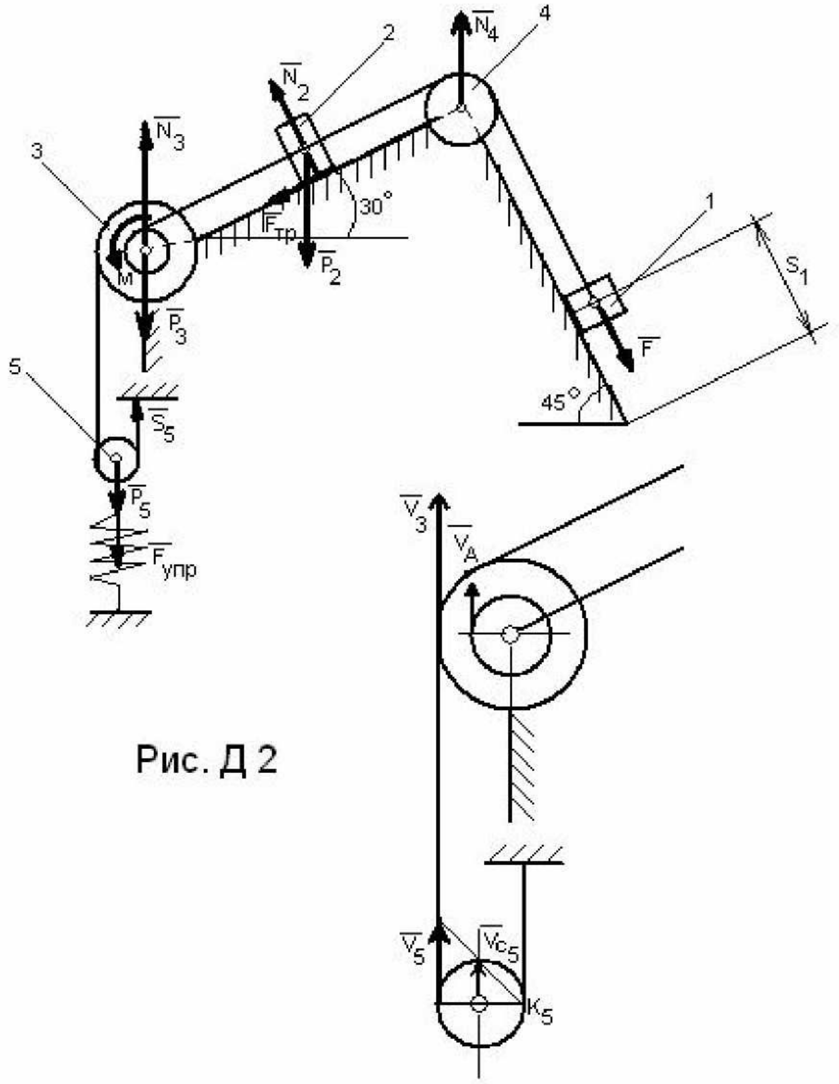


Рис. Д 2

5. Кинетическая энергия T, которую получила система после того, как груз переместился вдоль наклонной плоскости на расстояние s_1, зависит от искомой скорости v_{c5}. Поэтому все скорости, входящие в выражение кинетической энергии данной механической системы, выразим через скорость v_{c5}.

6. Поскольку грузы *1* и *2* связаны нерастяжимой нитью, то их скорости равны. В свою очередь эта нерастяжимая нить перекинута через малый обод шкива *3*, следовательно: $v_1=v_2=v_A$, где v_A – любая точка обода радиуса r_3 шкива *3*.

7. Линейные скорости шкива *2* и блока *5* зависят от одной угловой скорости ω_3: $v_2=\omega_3 r_3$, $v_5=\omega_3 R_3$.

8. Поскольку точка K_5 является мгновенным центром скоростей для блока *5* (он как бы «катится» по участку нити K_5L), то $v_5=2v_{c5}$. Тогда:

$$\omega_5=\frac{v_{c5}}{R_5};\qquad \omega_3=\frac{2v_{c5}}{R_3};\qquad \Rightarrow\qquad v_2=\frac{2v_{c5}}{R_3}\cdot r_3.$$

9. Осевые моменты инерции подвижного блока *5* и ступенчатого шкива *3* определяется выражениями:

$$J_{c5}=\frac{m_5R_5^2}{2};\qquad J_3=m_3\rho_3^2.$$

10. Выполнив подстановку всех приведенных выше значений в выражение кинетической энергии для заданной механической системы, получим:

$$T=v_{c5}\left(\frac{2m_2r_3^2}{R_3^2}+\frac{2m_3\rho_3^2}{R_3^2}+\frac{3m_5}{4}\right).$$

11. Находим работу всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда груз 1 пройдет путь $s_1=0{,}2$ *м*. Введем следующие обозначения: s_2 – перемещение груза *2* ($s_2=s_1$); φ_3 – угол поворота шкива *3*; h_5 – перемещение центра масс блока *5*; λ_0, λ_1 –начальное и конечное удлинение пружины.

Сумма работ всех внешних сил равна:

$$\sum_1^n A_\nu^e=A_F+A_{P_2}+A_{F_{тр2}}+A_M+A_{P_5}+A_{F_{упр}}\text{ , где}$$

$$A_F=\int_0^{s_1}80(3+2s)ds=80(3s_1+s_1^2);$$

$$A_{P_2}=-P_2\cdot s_1\cdot\sin 45^0;$$

$$A_{F_{тр}}=-f\cdot P_2\cdot s_1\cdot\cos 45^0;$$

$$A_M=-M\cdot\varphi_3;$$

$$A_{P_5}=-P_5\cdot h_5=-P\cdot s_{c5};$$

$$A_{F_{упр}}=\frac{c}{2}(\lambda_0{}^2-\lambda_1{}^2).$$

Работы остальных сил равны нулю:

– точка K_5 – мгновенный центр скоростей, поэтому работа силы натяжения
– нити S_5 равна нулю;
– реакция опоры N_2 перпендикулярна перемещению груза 2, а поэтому работы не совершает;
– реакции N_3 , N_4, приложенные в неподвижных точках, не совершают работы.

По условию задачи $\lambda_0 = 0$, тогда $\lambda_1 = s_{c5}$ – перемещение конца пружины. Выразим величины s_{c5} и φ_3 через заданное перемещение s_1. Зависимость между перемещениями такая же, как между соответствующими им скоростями:

$$\omega_3 = \frac{2v_{c5}}{R_3}; \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_3 = \frac{2s_{c5}}{R_3}.$$

12. Поскольку $v_5 = v_3 = \omega_3 R_3$ и $v_{c5} = 0,5v_5$, то $v_{c5} = 0,5\omega_3 R_3$. Следовательно, $\lambda_1 = s_{c5} = 0,5\varphi_3 R_3 = 0,5(s_1 R_3)/r_3$.

13. При найденных значениях φ_3 и λ_1 получим выражение для подсчета суммы работ всех внешних сил, действующих на механическую систему:

$$\sum_1^n A_v^e = 80(3s_1 + s_1^2) - P_2 \cdot s_1 \cdot \sin 45^0 - fP_2 \cdot s_1 \cdot \cos 45^0 - M\frac{s_1}{r_3} - P_5\frac{s_1 R_3}{2r_3} - \frac{cs_1^2 R_3^2}{8r_3^2}.$$

14. Кинетическую энергию приравниваем к работе:

$$v_{c5}\left(\frac{2m_2 r_3^2}{R_3^2} + \frac{2m_3\rho_3^2}{R_3^2} + \frac{3m_5}{4}\right) =$$

$$= \sum_1^n 80(3s_1 + s_1^2) - P_2 \cdot s_1 \cdot \sin 45^0 - fP_2 \cdot s_1 \cdot \cos 45^0 - M\frac{s_1}{r_3} - P_5\frac{s_1 R_3}{2r_3} - \frac{cs_1^2 R_3^2}{8r_3^2}.$$

Подставив в полученное выражение известные численные значения заданных величин, найдем искомую скорость v_{c5}.

Ответ: $v_{c5} = 2,10$ (м/с).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аршинова, В.А. Конспект лекций по теоретической механике: учебное пособие / В.А. Аршинова, А.И.Зайцев. – Ярославль: ЯГТУ, 1998. – 176 с.: ил.
2. Голдобина Л.А. Теоретическая механика: контрольные задания и методические указания к выполнению курсовой работы для студентов специальности 311300 – «Механизация сельского хозяйства» дневной и заочной форм обучения / Л.А. Голдобина, К.А.Зиновьев. – Ярославль: ЯГСХА, 2000. – 64 с.: ил.
3. Первов, А.А. Методические указания к решению задач по теоретической механике для студентов механических и технологических специальностей. – Ярославль: ЯПИ, 1984. – 25 с.: ил.
4. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных высших учебных заведений/ Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг и др.; под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1989. – 111 с.: ил.
5. Теоретическая механика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников машиностроительных, строительных, транспортных, приборостроительных высших учебных заведений/ Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг и др.; под ред. С.М. Тарга. – 4-е изд. – М.: Высш. шк., 1978. – 88 с.: ил.

Приложение А.2. Пример оформления содержания работы

Содержание

Приложение А.3. Условные обозначения

№ п/п	Наименование величин	Обозначение
1	Вектор силы	$\vec{N},\vec{Q},....\vec{F}_1,\vec{F}_2,....\vec{F}_n$
2	Модуль силы	$N, Q, ...F_1, F_2, ... F_n$
3	Проекции силы на координатные оси	X_A, Y_A, Z_A
4	Векторный момент силы относительно точки	$m\vec{o}m_A\vec{F}_k$
5	Скалярный момент силы относитнельно точки	$m\tilde{o}m_A\vec{F}_k$
6	Момент силы относительно оси	$mom_l\vec{F}_k$
7	Относительные: скорость, ускорение	$\vec{V}_r,\vec{a}_r(V_r,a_r)$
8	Переносные: скорость, ускорение	$\vec{V}_e,\vec{a}_e(V_e,a_e)$
9	Угловая скорость	$\vec{\omega}\ (\tilde{\omega})$
10	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon})$
11	Ускорение Кориолиса	$\vec{a}_k(a_k)$