ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания к решению задач

В методических указаниях приводится краткая теория и общие рекомендации к решению задач по курсу "Теоретическая механика". Тематика практических заданий охватывает кинематику материальной точки, механику Ньютона и механику Лагранжа. Для некоторых задач приведены решения, иллюстрирующие применение основных методов.

1. Кинематика материальной точки

Кинематика — раздел теоретической механики, изучающий движение только с геометрической точки зрения, вне зависимости от причин, обуславливающих движение, и материальных свойств движущихся тел. Единственной возможностью обнаружить движение тела в пространстве является наличие какого-либо другого тела — тела отсчета, относительно которого можно рассматривать и изучать движение. Тело отсчета, связанная с ним система координат и отсчитывающие время часы образуют *систему отсчета*. Движение тела считается известным тогда, когда в любой момент времени можно указать его точное положение в пространстве относительно выбранной системы отсчета, т. е. определить координаты тела как функции времени.

В случае поступательного движения тела или изучения области движения настолько большой, что размеры тела не играют никакой роли, его можно принять за *материальную точку*. Кроме того, поскольку движение всякого тела складывается из движения отдельных его точек, то определив движение каждой точки в отдельности, можно определить и движение всего тела. Таким образом, для каждой точки, например, в декартовой системе координат, должны быть известны зависимости $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, которые называются *законом движения*. Эти три уравнения эквивалентны одному векторному уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$, задающему радиус-вектор точки $\vec{r}$ в функции от времени. Если из уравнений движения исключить время t, то можно получить *траекторию* движения – геометрическое место положений движущейся точки.

Часто положение точки удобно определять не декартовыми, а какими-либо криволинейными координатами q_1, q_2, q_3, за которые могут быть приняты любые непрерывные однозначные функции от x, y и z: $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, удовлетворяющие необходимым требованиям дифференцируемости и условию однозначной разрешимости этих зависимостей относительно x, y, z, т. е. однозначного нахождения $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$. Так, для *цилиндрической* системы координат, когда радиус-вектор $\vec{r}$ определяется тремя координатами ρ, φ и z, имеем

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$

а для *сферической* ($\vec{r} = \vec{r}(r, \varphi, \vartheta)$) —

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Средней скоростью точки называется отношение перемещения точки, совершенного за какой-либо промежуток времени к величине этого промежутка времени. Поскольку перемещение представляет собой приращение радиус-вектора, то *скорость в данный момент времени* есть вектор, равный производной по времени от радиус-вектора точки

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Для выбранной ортогональной системы координат вектор скорости можно записать как:

$$\vec{v} = H_1\, \dot{q}_1\, \vec{q_1}^0 + H_2\, \dot{q}_2\, \vec{q_2}^0 + H_3\, \dot{q}_3\, \vec{q_3}^0,$$

где $\vec{q_\nu}^0$ $(\nu = 1, 2, 3)$ орт ν-ой оси криволинейных координат, а величины H_ν, называемые коэффициентами Ламэ, определяются следующим образом:

$$H_\nu = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\nu}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2}.$$

Если координата представляет собой некоторый угол, то соответствующую скорость называют обычно *угловой* скоростью. Часто это наименование применяется к производной от полярного угла φ в плоском движении точки $(\omega = \dot{\varphi})$. В ряде задач пользуются понятием *секторной* скорости точки σ, равной площади, очерчиваемой радиус-вектором в единицу времени. В случае плоского движения для полярной системы координат

$$\sigma = \frac{1}{2}\, r^2\, \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2 \dot{\varphi}$$

(в пространственном случае $\vec{\sigma} = 1/2\, [\vec{r} \times \vec{v}]$).

Ускорением называется изменение скорости точки, отнесенное к единице времени

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Вектор скорости при движении точки непрерывно поворачивается вместе с касательной к траектории, поэтому вектор $\Delta\vec{v}$, а следовательно, и вектор ускорения, направлен в сторону вогнутости траектории. Таким образом, ускорение можно записать в виде

$$\vec{w} = \frac{dv}{dt}\, \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\, \vec{n}.$$

Здесь первое слагаемое представляет собой вектор, направленный по касательной к траектории (*касательное* или *тангенциальное* ускорение), второе вектор, направленный по главной нормали к центру кривизны траектории радиуса ρ (*нормальное* ускорение). Касательное ускорение характеризует изменение величины скорости, а нормальное изменение скорости по направлению.

Проекции ускорения на оси криволинейной системы координат определяются следующим образом:

$$w_\nu = \frac{1}{H_\nu}\Big\{\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{v^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{v^2}{2}\Big\}, \qquad \nu = 1,\,2,\,3.$$

Задачи.

1. Определить скорость и ускорение точки в цилиндрической и сферической системах координат.

2. Движение снаряда задано уравнениями $x(t) = kt$ и $y(t) = kt - gt^2/2$. Определить уравнение траектории, максимальную высоту подъема h и дальность полета l снаряда, скорость v_1 в наивысшей точке траектории и скорость v_2 в момент падения на землю.

3. Уравнения движения материальной точки в декартовых координатах имеют вид : $x = R\cos^2(kt/2), y = (R/2)\sin kt, \quad z = R\sin(kt/2)$. Определить траекторию точки и найти уравнения ее движения в сферических координатах.

4. Точка движется по эллипсу $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ с ускорением, направленным параллельно оси y. Определить ускорение как функцию y, если $\vec{r}(0) = (0, b),\ \vec{v}(0) = (v_0, 0)$.

5. Точка движется по эллипсу $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ так, что угловая скорость радиус-вектора, проведенного из центра эллипса к точке, постоянна и равна ω. Определить скорость точки, если в начальный момент времени $x(0) = a$.

6. Точка движется по эллипсу с полуосями a и b с постоянной по величине скоростью v_0. Определить ускорение и скорость точки как функции координат.

7. Точка движется в плоскости с постоянной по величине скоростью v_0 и постоянной угловой скоростью ω. Определить $\vec{v}(t)$.

8. Точка движется в плоскости с постоянной величине скоростью v_0 и постоянной секторной скоростью σ_0. Найти $\vec{v}(t)$, если $\rho(0) = 2\sigma_0/v_0$.

9. Точка описывает логарифмическую спираль с уравнением $r = r_0 e^{a\varphi}$. В начальном положении $r = r_0$, скорость $v = v_0$. Секторная скорость постоянна. Найти величину скорости, а также величину и направление ускорения как функции от r.

10. Закон движения точки дан уравнениями: $x = R\cos\omega t$, $\quad y = R\sin\omega t$, $z = ut + at^2/2$. Найти касательное, нормальное ускорение точки и радиус кривизны ее траектории.

11. Точка начинает двигаться вдоль прямой, проходящей через точку O, из некоторого начального положения r_0 со скоростью u, пропорциональной расстоянию r, т. е. $u = kr$. Сама прямая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центра O в плоскости. Найти траекторию, скорость, ускорение точки и радиус кривизны ее траектории.

2. Интегрирование уравнений движения

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором движение тел рассматривается в зависимости от действующих на них сил. Если для материальной точки массы m известен закон движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то дифференцируя его дважды по времени и подставляя полученное выражение $\ddot{\vec{r}}$ в основное уравнение динамики $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$, можно получить результирующую силу $\vec{F}$, действующую на точку. В случае, когда закон движения представлен зависимостями координат от времени, то подстановка их вторых производных в соответствующие проекции уравнения движения на координатные оси позволяет находить проекции силы, а по ним ее абсолютную величину и направление.

Задача определения закона движения точки по известным действующим на точку силам сводится к интегрированию уравнения движения, проекции которого на оси выбранной системы координат, например, декартовой, представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Решение данной системы зависит от шести произвольных постоянных, определение которых возможно лишь в том случае, если заданы шесть дополнительных условий. С этой целью обычно задают положение и скорость точки в некоторый момент времени t_0, который принимают за начало отсчета времени, полагая $t_0 = 0$, т. е. значения координат $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, $z_0 = z(0)$ и их первых производных $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$. Эти шесть условий называются *начальными условиями.* Стоит отметить, что при записи проекций уравнения движения на оси какой-либо криволинейной системы координат, выбор которой должен отражать особенности заданных сил и начальных условий, необходимо спроектировать начальные условия на выбранные координатные оси.

Существует широкий класс сил, являющихся сложными функциями некоторых аргументов, в связи с чем решение системы дифференциальных уравнений движения оказывается непростым. В классической механике ограничиваются зависимостями сил от времени, от положения точки в пространстве и от скорости точки. Запишем в общем виде уравнение движения с начальными условиями

$$m\ddot{\vec{r}} = F(r, \dot{\vec{r}}, t), \quad \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$$

и приведем его решения в частных случаях одномерного движения и зависимости сил только от одной переменной.

а) При $F_x = F_x(t)$ имеем $m\ddot{x} = F_x(t)$. Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий, получаем его общее решение

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{t} F_x(t)\ dt + \dot{x}_0, \quad x = \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\int\limits_{t_0}^{t} F_x(t')\ dt'\Big)\ dt + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0.$$

б) В случае зависимости силы от положения точки $F_x = F_x(x)$ обе части уравнения $m\ddot{x} = F_x(x)$ целесообразно умножить на dx. С учетом того, что

$$\ddot{x}\, dx = \frac{d\dot{x}}{dt}\ dx = \dot{x}\, d\dot{x},$$

интегрирование даст

$$\dot{x} = \pm\Big[\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F_x(x)\ dx + \dot{x}_0^2\Big]^{1/2}, \quad t - t_0 = \pm\int\limits_{x_0}^{x}\Big[\frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{x} F_x(x')\ dx' + \dot{x}_0^2\Big]^{-1/2} dx.$$

Здесь выбирается тот знак, который имеет $\dot{x}$ при $x = x_0$.

в) Если $F = F(\dot{x})$, то $m\ddot{x} = F_x(\dot{x})$ и

$$t - t_0 = m\int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})}.$$

Выразив из этого выражения $\dot{x}$ как функцию t, можно получить

$$x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}(t)\ dt.$$

Другой прием интегрирования состоит в получении зависимости $x = x(\dot{x})$ при умножении обоих частей уравнения движения на dx. Это дает

$$x = x_0 + m\int\limits_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \frac{\dot{x}\,dx}{F_x(\dot{x})}.$$

В качестве примера, когда система дифференциальных уравнений движения оказывается связанной, рассмотрим следующую задачу: определить траекторию движения заряда e массы m, попавшего в однородное стационарное магнитное поле напряженности $\vec{H}$ с начальной скоростью $\vec{v}_0$, перпендикулярной направлению магнитного поля.

На заряд, двигающийся в магнитном поле, действует только сила Лоренца. Запишем уравнение движения и начальные условия в векторном виде

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}\,[\dot{\vec{r}}, \vec{H}], \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0.$$

Далее, для описания движения выберем декартову систему координат, в которой ось Oz направим по направлению напряженности магнитного поля $\vec{H}$, и спроектируем уравнение движения и начальные условия на координатные оси:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \dfrac{e}{c}\,H\dot{y}, & x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \\ m\ddot{y} = -\dfrac{e}{c}\,H\dot{x}, & y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \\ m\ddot{z} = 0, & z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Интегрирование третьего уравнения дает $z(t) = z_0$. Следовательно, движение будет происходить в плоскости xy. Одним из приемов, позволяющих проинтегрировать первые два уравнения, является переход к комплексной функции $\eta = x(t) + iy(t)$, который даст следующее уравнение движения и соответствующие ему начальные условия

$$\ddot{\eta} = -i\omega_{\text{H}}\dot{\eta}, \quad \eta(0) = \eta_0 = x_0 + iy_0, \quad \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = \dot{x}_0 + i\dot{y}_0,$$

где $\omega_{\text{H}} = \dfrac{eH}{mc}$ - циклотронная частота. Результатом стандартного интегрирования этого уравнения является зависимость

$$\eta(t) = \eta_0 + i\,\frac{\dot{\eta}_0}{\omega_{\text{H}}}\,(\exp(-i\omega_{\text{H}}t) - 1),$$

выделяя из которой реальную и мнимую части, получаем закон движения точки

$$x(t) = x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega_{\text{H}}} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_{\text{H}}}\,\sin\omega_{\text{H}}t - \frac{\dot{y}_0}{\omega_{\text{H}}}\,\cos\omega_{\text{H}}t,$$
$$y(t) = y_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega_{\text{H}}} + \frac{\dot{x}_0}{\omega_{\text{H}}}\,\cos\omega_{\text{H}}t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_{\text{H}}}\,\sin\omega_{\text{H}}t.$$

Исключив из закона движения время, имеем уравнение траектории

$$\left(x - x_0 - \frac{\dot{y}_0}{\omega_{\text{H}}}\right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega_{\text{H}}}\right)^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{\omega_{\text{H}}^2},$$

которое показывает, что материальная точка в плоскости, перпендикулярной $\vec{H}$, движется по окружности.

Задачи.

1. Материальная точка движется по закону $x = a\sin kt$, $y = b\cos kt$, $z = 0$. Определить действующую на точку силу.

2. Материальная точка массы m движется по гладкой горизонтальной плоскости согласно уравнению $x = \dfrac{m}{k}\, v_0\Big[1 - \exp\Big(-\dfrac{k}{m}\, t\Big)\Big]$, где v_0 - начальная скорость ее движения. Считая, что движение происходит в среде, сила сопротивления которой движению является только функцией скорости, определите силу, действующую на точку со стороны среды.

3. Материальная точка массы m движется вблизи поверхности Земли. Определить ее траекторию, закон движения и максимальную высоту подъема h для случая, когда начальная скорость точки $\vec{v}_0$ направлена: а) вертикально вверх; б) под углом α к горизонту.

4. Определить траекторию движения заряда e массы m попавшего в однородное электрическое поле, меняющееся по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t$, со скоростью $\vec{v}_0$, перпендикулярной направлению электрического поля.

5. Заряд e массы m движется во взаимно перпендикулярных электрических полях с напряженностями $E_1\cos\omega t$ и $E_2 \sin\omega t$. При каких начальных условиях и значениях амплитуд E_1 и E_2 траекторией заряда будет циклоида?

6. Точка движется вдоль оси Ox под действием силы $F_x = \alpha x - \gamma x^3$. Найти закон движения точки, если $x(0) = \sqrt{2\alpha/\gamma}$, $\dot{x}(0) = 0$.

7. Точка массы m движется под действием силы отталкивания от начала координат, изменяющейся по закону $\vec{F} = k^2 m\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки. Определить траекторию точки, если в начальный момент времени она имела координаты $(a; 0)$ и скорость v_0, направленную параллельно оси Oy.

8. Заряд e в начальный момент времени покоится на расстоянии h от бесконечной проводящей незаряженной плоскости. Определить время, за которое заряд достигнет плоскости.

9. Точка массы m движется вдоль оси x и в начальный момент времени имеет скорость $\dot{x}_0$ и координату x_0. На точку действует сила сопротивления, линейная по скорости. Найти закон движения точки и определить путь, который она пройдет до остановки.

10. Шарик массы m падает без начальной скорости на горизонтальную плоскость с высоты h. Найти высоту подъема шарика после упругого удара о плоскость, если движение происходит в среде с квадратичным по скорости сопротивлением.

11. Заряд e массы m движется в скрещенных постоянных однородных гравитационном и магнитном полях со взаимно перпендикулярными напряженностями. Найти закон движения частицы и определить ее среднюю скорость, если в начальный момент времени частица имела скорость $\vec{v}_0$.

12. Заряд e массы m движется в однородном стационарном магнитном поле $\vec{H}$ в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное первой степени скорости. Найти закон движения частицы и определить расстояние, которое частица пройдет вдоль поля и время, за которое скорость частицы уменьшится в $e = 2.71$ раз, если в начальный момент времени частица имела скорость $\vec{v}_0$.

3. Общие теоремы динамики

Первым интегралом движения называется функция, зависящая от времени t, координат $\vec{r}$ и скоростей $\dot{\vec{r}}$ точек, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение, определенное начальными условиями, т. е.

$$f(t, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, ..., \dot{\vec{r}}_N) = const = f(t_0, \vec{r}_{10}, ..., \vec{r}_{N0}, \dot{\vec{r}}_{10}, ..., \dot{\vec{r}}_{N0}).$$

Отсутствие скорости среди аргументов такой функции определяет *второй интеграл движения.*

Если для системы N материальных точек известны $6N$ независимых первых интегралов движения $f_\alpha(t, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, ..., \dot{\vec{r}}_N) = C_\alpha$, где $\alpha = 1, ..., 6N$, то уравнения движения $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$, $(i = 1, ..., N)$, можно считать проинтегрированными, поскольку $\vec{r}_i$ и $\dot{\vec{r}}_i$ в этом случае определяются как функции времени и $6N$ произвольных постоянных. Для ряда конкретных задач механики при достаточно общих предположениях о силах взаимодействия нахождение первых интегралов существенно упрощает процесс решения. Во многих случаях первые интегралы уравнений движения определяются из общих теорем динамики, к которым относятся теорема о количестве движения, теорема о моменте количества движения и теорема о кинетической энергии.

Импульсом или *количеством движения* точки называется вектор $\vec{p}$, равный произведению массы точки на вектор ее скорости: $\vec{p} = m\vec{v}$. Согласно основному уравнению динамики, скорость изменения импульса точки равна действующей на нее силе

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Следовательно, импульс сохраняется ($\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = \vec{p}_0 = const$), если $\vec{F} = 0$. В проекциях на оси декартовой системы координат получаем три первых интеграла $\dot{x} = c_1$, $\dot{y} = c_2$, $\dot{z} = c_3$, что означает постоянство скорости точки. Если равняется нулю не сам вектор силы, а только какая-либо его проекция, например, $F_x = 0$, то сохраняется соответствующая проекция импульса $p_x = m\dot{x} = p_{x0} = const$.

Теорема о *моменте количества движения* ($\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$) является следствием основного уравнения динамики и состоит в том, что скорость изменения момента импульса равна *моменту силы* ($\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{F}]$), определенному относительно того же центра, что и момент импульса:

$$\dot{\vec{M}} = \vec{L}.$$

Для сохранения момента количества движения требуется равенство нулю действующего на точку момента силы, т. е. $\vec{M} = \vec{M}_0 = const$, если $\vec{L} = 0$. При равенстве нулю проекции момента силы на какую-либо неподвижную ось сохраняется проекция момента импульса на ту же ось. В качестве одного из результатов этой теоремы можно указать на постоянство секторной скорости $\vec{\sigma}$ материальной точки, движущейся под действием *центральной силы*

силы, линия действия которой все время проходит через некоторый центр.

Скалярное умножение основного уравнения динамики на вектор $d\vec{r}$ позволяет получить теорему о *кинетической энергии* в дифференциальной форме: дифференциал от кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе приложенной к ней силы

$$dT = d(mv^2/2) = \vec{F}d\vec{r}.$$

Интегрирование этого уравнения вдоль пути точки дает следующее выражение:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A,$$

согласно которому изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении из одного положения в другое равно работе силы, приложенной к этой точке, на этом перемещении. Следовательно, для вычисления работы необходимо знание закона движения точки по траектории.

В случае движения точки в *потенциальном поле* сил (в поле, в котором циркуляция вдоль любого замкнутого контура равна нулю ($\oint\limits_C \vec{F}d\vec{r} = 0$) или же вихрь силы в любой точке поля равен нулю ($\mathrm{rot}\vec{F} = 0$)), работа силы на конечном перемещении точки не зависит от формы траектории и равна разности значений некоторой скалярной функции U в начальном и конечном положениях точки. Функцию U называют *потенциальной энергией* и определяют по заданной силе

$$U = -\int \vec{F}d\vec{r} + C.$$

Здесь произвольная постоянная C определяет нулевой уровень потенциальной энергии. Сила, зависящая не только от положения точки, но и от времени, также может удовлетворять условию потенциальности $\mathrm{rot}\vec{F}(\vec{r}, t) = 0$, и в общем случае элементарная работа потенциальных сил dA^p равна

$$dA^p = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}\,dt.$$

Если на точку кроме потенциальной действуют *гироскопическая* $\vec{F}^g$ (сила, линейно зависящая от скорости и направленная всегда перпендикулярно к скорости) и *диссипативная* $\vec{F}^d$ (сила, направленная всегда противоположно скорости тела относительно среды, вызывающей торможение) силы, то результирующая элементарная работа складывается из элементарных работ каждой силы. Отмечая, что гироскопическая сила работы не совершает, и определяя *полную механическую энергию* точки как сумму кинетической и потенциальной энергий $E = T + U$, получаем *закон изменения полной механической энергии*: скорость изменения полной энергии точки равна сумме частной производной по времени потенциальной энергии и мощности диссипативных сил

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}^d\vec{v}.$$

Полная механическая энергия материальной точки остается постоянной при движении, если действующие на нее потенциальные силы стационарны, а диссипативные силы отсутствуют, т. е. $m\dot{\vec{r}}^2/2 + U(\vec{r}) = const$, если $\partial U/\partial t = 0$ и $\vec{F}^d = 0$. Закон сохранения полной энергии дает один первый интеграл — интеграл энергии, который позволяет, не решая уравнения движения, отыскивать величину скорости как функцию положения точки.

Задачи.

1. Точка массы m, находясь на расстоянии r_0 от некоторого центра, начинает двигаться без начальной скорости под действием силы притяжения к этому центру, прямо пропорциональной расстоянию от центра. Найти скорость точки в момент достижения ею центра притяжения, если в начальный момент величина силы равна F_0.

2. Материальная точка закреплена на конце нерастяжимой нити, часть которой пропущена в вертикальную трубку. Точка вращается вокруг оси трубки по окружности радиуса R, делая n оборотов в минуту. Медленно втягивая нить в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины при которой гирька описывает окружность радиуса $R/2$. Найти число оборотов точки по этой окружности.

3. Однородный стержень длины l в начальный момент времени занимает вертикальное положение и опирается на гладкую горизонтальную поверхность. Затем под весьма малым случайным воздействием он начинает падать на плоскость. Определить траекторию верхнего конца стержня.

4. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если ее энергия равна нулю.

5. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2(x/a)$, где $U_0 > 0$. Найти закон движения точки.

6. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = -\alpha^2(x^2 - a^2)$. Найти закон движения точки, если ее энергия равна нулю.

7. Материальная точка покоится в верхней точке абсолютно гладкой сферы радиуса R, а затем начинает скользить вниз по поверхности сферы под действием силы тяжести. Какое расстояние она пройдет до точки отрыва от сферы?

8. Тело массы m подвешено на нерастяжимой невесомой нити длины l. Какую начальную скорость, направленную перпендикулярно нити, нужно сообщить телу, чтобы оно описало полную окружность?

9. Тело падает на Землю с большой высоты H. Пренебрегая сопротивлением воздуха найти время T, по истечении которого тело достигнет поверхности Земли, и скорость v, которую оно приобретет за это время. Радиус Земли равен R_0.

10. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = \alpha^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$. Найти закон движения точки $x = x(t)$, если ее энергия равна нулю.

11. Груз массы m падает без начальной скорости с высоты H на пружину жесткости k. Под действием упавшего груза пружина сжимается на величину h. Вычислить время сжатия пружины, пренебрегая ее массой и силами трения.

4. Движение несвободной материальной точки

а) Уравнение Лагранжа с реакциями связей

При ограничении движения материальной точки посредством поверхностей различных тел, стержней, нитей и т. п., положение, скорость и ускорение точки удовлетворяют определенным условиям, не вытекающим из уравнения движения. В этом случае говорят о движении несвободной материальной точки с наложенными на нее *связями*. Аналитически связи выражаются уравнениями

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, t) = 0.$$

Например, если точка вынуждена двигаться по поверхности $f(x, y, z) = 0$, то координаты точки все время будут удовлетворять этому уравнению, и оно будет являться уравнением связи. При движении точки вдоль прямой связь выражается уравнениями двух пересекающихся плоскостей.

Действительным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение под действием как заданных сил, так и реакций связи (сил, с которыми тела, осуществляющие связи, действуют на точку), т. е. перемещение, которое реально совершает точка. Оно удовлетворяет уравнению движения и уравнениям связи. *Возможным перемещением* называется перемещение материальной точки, удовлетворяющее только уравнениям связи. Понятие о *виртуальных перемещениях* - воображаемых бесконечно малых перемещениях точки, удовлетворяющих уравнению связи в некоторый фиксированный момент времени, позволяет определить широкий класс идеальных связей, делающих задачу динамики несвободной материальной точки определенной. Связь называется *идеальной*, если виртуальная работа сил реакции связи $\vec{R}$ на виртуальном перемещении $\delta\vec{r}$ равна нулю, т. е. $\delta A = \vec{R}\delta\vec{r} = 0$. Любые подвижные и неподвижные гладкие поверхности или кривые являются идеальными связями. Даже при наличии трения можно считать связь идеальной, если силу трения рассматривать как активную силу, действующую на точку.

Задача динамики несвободной материальной точки состоит в нахождении закона движения и реакций связи по заданным активным силам, уравнениям связи и совместимыми с ними начальным условиям, и сводится к решению системы $3 + k$ уравнений

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla f_\alpha, \quad f_\alpha(\vec{r}, t) = 0,$$

где k - количество связей, наложенных на материальную точку, λ - неопределенные множители Лагранжа. Сумма $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla f_\alpha$ определяет действующую на материальную точку реакцию связи $\vec{R}$. Уравнения движения, входящие в эту систему, называются *уравнениями Лагранжа первого рода.*

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Точка массы m движется по поверхности полусферы радиуса R. Считая, что на точку действует сила тяжести, параллельная z, и зная, что в начальный момент времени точка имела скорость v_0 и находилась на высоте h_0 от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте h от основания купола.

Так как в направлении угла φ нет действующих сил и уравнение связи от φ не зависит, то спроектируем уравнение Лагранжа первого рода и уравнение связи на оси цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 2\lambda r \\ m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \\ m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z \\ r^2 + z^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

При этом соответствующие начальные условия будут

$$\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2 + \dot{z}_0^2 = v_0^2, \quad z_0 = h_0.$$

Сила, с которой точка давит на купол по модулю равна силе реакции N, проекции которой на оси цилиндрической системы координат $N_r = 2\lambda r$, $N_\varphi = 0$, $N_z = 2\lambda z$. Для нахождения параметра λ воспользуемся следствием уравнения связи

$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0.$$

Выражения для $\ddot{r}$ и $\ddot{z}$ следуют непосредственно из уравнений движения. При этом производная $\dot{\varphi}$ определяется из второго уравнения и равна $\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0/r^2$. Однократное интегрирование первого и третьего уравнений дает

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\varphi}_0^2 - \frac{r_0^4\dot{\varphi}_0^2}{r^2} + \frac{2\lambda}{m}(r^2 - r_0^2), \quad \dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 - 2g(z - z_0) - \frac{2\lambda}{m}(z^2 - z_0^2).$$

Таким образом, для параметра λ и, следовательно, для силы реакции N получаем

$$\lambda = \frac{m}{2R^2}(3gz - 2gz_0 - v_0^2), \quad N = 2\lambda\sqrt{r^2+z^2} = 2\lambda R = \frac{mg}{R}\Big(3z - 2z_0 - \frac{v_0^2}{g}\Big).$$

В результате, давление точки, находящейся на высоте h от основания купола, на купол будет равно

$$P(h) = \frac{mg}{R}\Big(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\Big).$$

б) Уравнение Лагранжа в обобщенных координатах

Для решения задачи, заключающейся в нахождении закона движения несвободной материальной точки без определения сил реакций связи, целесообразно использовать уравнения Лагранжа в обобщенных (независимых) координатах. Задание обобщенных координат $\{q_i\}$ обеспечивает автоматическое удовлетворение уравнений связи и позволяет последние исключить из рассмотрения. Число независимых координат, однозначно определяющих положение точки, равно числу ее степеней свободы $s = 3 - k$, где k – количество наложенных на точку связей.

В случае произвольной действующей на точку силы F, уравнения Лагранжа в независимых координатах имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i.$$

Для их составления необходимо записать кинетическую энергию T через обобщенные координаты и скорости, т. е. определить $T = T(q_1, \ldots, \dot{q}_1, \ldots, t)$ и подставить частные производные от T по q_i и $\dot{q}_i$ в левую часть уравнения Лагранжа. Обобщенная сила Q_i может быть вычислена по формуле

$$Q_i = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

В результате получается система s дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $q_i(t)$, которые и определяют закон движения точки.

Если действующая на точку сила является потенциальной, т. е. $F_i = -\nabla_i U$, то обобщенная сила $Q_i = -\partial U/\partial q_i$. Далее, поскольку потенциальная энергия U является функцией только обобщенных координат q_i и, следовательно, имеет производную по обобщенной скорости $\dot{q}_i$ равную нулю, то вводя в уравнение Лагранжа функцию $L = T - U$, называемой *функцией Лагранжа*, будем

иметь
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Для равновесия системы, подчиненной идеальным удерживающим связям и находящейся под действием активных сил, имеющих потенциал, необходимо и достаточно, чтобы потенциальная энергия U принимала стационарное значение. Таким образом положение равновесия определяется из решения системы уравнений $\partial U/\partial q_i = 0$, или
$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}=0} = 0, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Кроме того, если в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия есть *положение устойчивого равновесия.*

Задачи.

1. Материальная точка движется в однородном поле тяжести по гладкой неподвижной плоскости, образующей с горизонтом угол α. Определить закон движения точки и реакцию плоскости.

2. Тяжелая точка массы m движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса R. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой и ось цилиндра вертикальной, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна v_0 и составляет угол α с горизонтом.

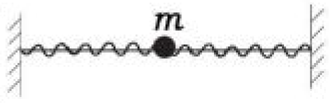
3. Точка массы m движется по пересечению неподвижной гладкой сферы радиуса a и гладкой горизонтальной плоскости, движущейся в вертикальном направлении по закону $z = a\sin\omega t$. Найти закон движения точки и реакции связей.

4. Точка массы m движется в поле тяжести по расширяющейся гладкой цилиндрической поверхности с вертикальной осью. Найти закон движения точки и реакцию связи, если радиус цилиндра увеличивается с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$.

5. Тяжелая материальная точка скатывается по поверхности гладкого параболического цилиндра $y^2 = 2px$, имея в начальный момент ординату $y_0 = 2p$ и скорость $v_0 = 0$. Определить точку срыва с поверхности, а также величину и направление скорости в этот момент, считая ось Oy направленной вертикально вверх.

6. Написать функцию Лагранжа математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого движется в вертикальной плоскости по закону $x = x(t),\ y = y(t)$.

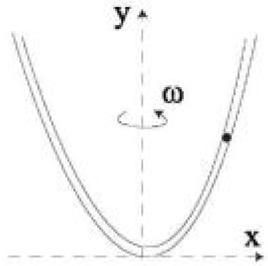
7. Шарик массы m движется по неподвижному гладкому стержню, расположенному горизонтально. К шарику прикреплены две одинаковые пружины жесткости k и длины l. Определить частоту собственных колебаний данной системы.



8. Шарик массы m прикреплен к нерастяжимой нити длины l, конец которой, в свою очередь, прикреплен к верхней точке неподвижного блока радиуса R. Предполагая, что при движении шарика в плоскости, перпендикулярной оси блока, нить остается натянутой, найти функцию Лагранжа и записать уравнения Лагранжа.

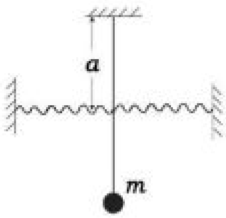
9. На одном конце легкой нерастяжимой нити, перекинутой через гладкий блок пренебрежимо малой массы, закреплен груз массы m_1. По другому концу нити перемещается груз массы m_2 по закону $\xi(t)$ относительно нити. Найти функцию Лагранжа системы и закон движения груза m_2 относительно блока.

10. По какой кривой следует изогнуть трубку, чтобы помещенный в нее в любом месте шарик оставался по отношению к трубке в равновесии, если трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy?

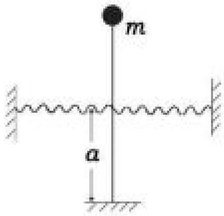


11. Точка массы m движется по гладкому тонкому стержню, вращающемуся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через неподвижную точку стержня. Ось и материальная точка соединены между собой пружиной жесткости k и длиной l в ненапряженном состоянии. Определить собственную частоту колебаний точки около положения устойчивого равновесия и найти закон движения точки.

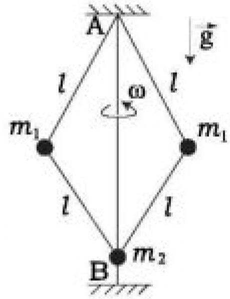
12. Маятник состоит из жесткого стержня длины l и массы m на конце. К стержню прикреплены две пружины жесткостью k на расстоянии a от точки подвеса. Найти частоту малых колебаний маятника.



13. Предполагая, что маятник, описанный в задаче 11 установлен так, что масса m расположена выше точки подвеса, найти частоту малых колебаний маятника и определить условие устойчивости равновесия в верхнем положении.



14. Механическая система, изображенная на рисунке, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси AB. Найти функцию Лагранжа этой системы, определить положения равновесия и установить, какое из них является устойчивым, а какое – нет. Тело массы m_2 может двигаться вдоль вертикальной оси AB без трения.



5. Колебания систем с несколькими степенями свободы

Исследование систем с s степенями свободы, как правило, начинается с выбора обобщенных координат и построения функции Лагранжа. При малых отклонениях системы от какого-либо ее положения устойчивого равновесия q_i^0, определяемое из решения системы уравнений $(\partial L/\partial q_i)_{\dot{q}_i=0} = 0$, целесообразен переход к новым обобщенным координатам, имеющих смысл отклонений от положений равновесия

$$\xi_i = q_i - q_i^0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Записав в новых координатах функцию Лагранжа, следует стоящие в ней слагаемые разложить в ряд по малым ξ с удержанием членов до квадратичных включительно. В этом случае уравнения Лагранжа второго рода будут представлять систему s линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik}\ddot{\xi}_k + c_{ik}\xi_k) = 0,$$

общее решение которой ищется в виде

$$\xi_k = A_k\, e^{\lambda t}, \quad k = 1, \ldots, s.$$

Подстановка ξ_k в систему позволяет определить неизвестные коэффициенты A_k из уравнений:

$$\sum_{k=1}^{s} (c_{ik} + \lambda^2 a_{ik}) A_k = 0.$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\lambda^2 a_{11} & c_{12}+\lambda^2 a_{12} & \dots & c_{1s}+\lambda^2 a_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1}+\lambda^2 a_{s1} & c_{s2}+\lambda^2 a_{s2} & \dots & c_{ss}+\lambda^2 a_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называется *характеристическим* и представляет собой уравнение s-й степени относительно λ^2. В общем случае его решение дает s вещественных отрицательных корней, которые определяют *собственные частоты колебания системы* ω_j:

$$\lambda_j^{\pm} = \pm i\omega_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Коэффициенты A_k, отвечающие различным значениям λ_j^2, имеют вид:

$$A_k^{(j)} = d_j\, \Delta_{mk}(\lambda_j^2),$$

где d_j – произвольная комплексная постоянная, $\Delta_{mk}(\lambda_j^2)$ – алгебраическое дополнение элемента $c_{mk}+\lambda_j^2 a_{mk}$ в определителе системы, взятого при значении λ_j^2 (m выбирается произвольно, но так, что хотя бы одно $\Delta_{mk}(\lambda_j^2)$ было отлично от нуля).

Таким образом, для каждой обобщенной координаты ξ_k получается s различных решений вида

$$\xi_k^{(j)} = d_j\, \Delta_{mk}^{(j)}\, e^{i\omega_j t}.$$

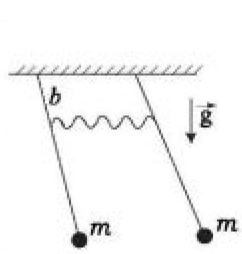
Представляя произвольную постоянную d_j в виде $\alpha_j\, e^{i\beta_j}$ и переходя в общем решении к вещественной части, можно записать

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{s} \Delta_{mk}^{(j)} \alpha_j \cos(\omega_j t + \beta_j).$$

Постоянные α_j и β_j определяются из начальных условий.

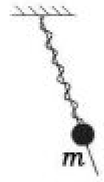
Задачи.

1. Два математических маятника одинаковой длины l и массы m связаны между собой пружиной жесткости k, укрепленной на расстоянии b от точки подвеса. Пружина подобрана так, что при одинаковом отклонении маятников от положения равновесия ее натяжение равно нулю. Определить частоты малых колебаний и закон движения системы вблизи ее положения устойчивого равновесия.



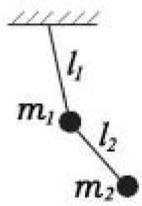
2. Два тела массы m могут без трения перемещаться по длинному горизонтальному стержню. Они соединены между собой и с одним из концов стержня одинаковыми пружинами жесткости k и длины l в ненапряженном состоянии. Найти закон движения системы вблизи ее положения устойчивого равновесия.

3. Стержень, подвешенный за один из концов может совершать движения в вертикальной плоскости. По стержню без трения может скользить точка массы m, соединенная с точкой подвеса пружиной жесткости k и длины l в ненапряженном состоянии. Определить собственные частоты малых колебаний данной системы.

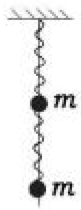


4. Две точки одинаковой массы m находятся на неподвижном гладком горизонтально расположенном стержне длины $3l$. Эти точки соединены друг с другом и с концами стержня тремя пружинами жесткости k и длины l в ненапряженном состоянии. Найти закон движения системы вблизи ее положения устойчивого равновесия.

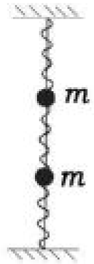
5. Определить функцию Лагранжа двойного плоского математического маятника. Получить уравнения движения и определить собственные частоты малых колебаний системы.



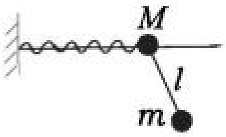
6. Два тела массы m могут без трения перемещаться по жестко закрепленному вертикальному стержню. Тела соединены между собой и с точкой подвеса одинаковыми пружинами жесткости k и длины l в ненапряженном состоянии. Определить собственные частоты малых колебаний системы вблизи положения устойчивого равновесия.



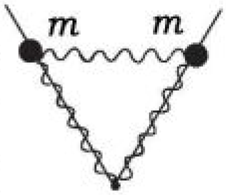
7. Два тела массы m могут без трения перемещаться по вертикальному стержню длины $3l$. Тела соединены между собой и с концами стержня одинаковыми пружинами жесткости k и длины l в ненапряженном состоянии. Определить закон движения системы вблизи положения устойчивого равновесия.



8. Материальная точка массы M соединена с пружиной жесткости k, другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться без трения по горизонтальному стержню. К точке прикреплен математический маятник массы m и длины l. Определить собственные частоты малых колебаний системы.



9. Два шарика с массами m могут скользить по двум горизонтально расположенным гладким полупрямым, образующими между собой угол 60^o. Шарики связаны между собой, а также с вершиной угла одинаковыми пружинами жесткости k и длиной l в ненапряженном состоянии. Определить собственные частоты малых колебаний системы.



Литература.

1. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики, Наука, 1975.
2. Н.Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, Наука, 1969.
3. М.И. Бать. Теоретическая механика в примерах и задачах, Наука, 1990.
4. И.И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков, Наука, 1970.
5. Ю.Г.Павленко. Лекции по теоретической механике, Физматлит, 2002.
6. Ф.Р.Гантмахер. Лекции по аналитической механике, Физматлит, 2001.
7. Е.М. Никитин. Теоретическая механика для техникумов, Наука, 1988.
8. Н.В. Бутенин. Курс теоретической механики, СПб., Из-во "Лань", 2002.
9. И.В.Мещерский. Задачи по теоретической механике, СПб., Из-во "Лань", 2001.
10. Г.Л.Коткин и В.Г.Сербо. Сборник задач по классической механике, Наука, 1977.