ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебно-методическое пособие для студентов
заочной формы обучения

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения по специальности 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство» при изучении дисциплины «Теоретическая механика». Оно содержит выдержки из учебной программы курса и тематический план, методические рекомендации по изучению дисциплины, список литературы, рекомендованной для самостоятельной работы. Особое внимание в пособии уделено организации работы над контрольным заданием, выполняемым самостоятельно. Приведены требования к оформлению контрольного задания и методические указания по его выполнению.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения по специальности 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство» при изучении дисциплины «Теоретическая механика». Оно содержит выдержки из учебной программы курса и тематический план, методические рекомендации по изучению дисциплины, список литературы, рекомендованной для самостоятельной работы.

Особое внимание в пособии уделено организации работы над контрольными заданиями, выполняемыми самостоятельно. Приведены требования к оформлению контрольных заданий и методические указания по их выполнению.

Контрольное задание №1 посвящено расчетам реакций опор, кинематическому анализу плоского механизма. Контрольное задание №2 посвящено решению второй задачи динамики и теореме о движении центра масс. Это связано с тем, что только при знании реакций опор можно определить максимальные внутренние силы, а по ним и максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях деталей. Опыт проведения кинематического анализа механизмов, полученный при выполнении настоящего задания, будет востребован при изучении последующих учебных дисциплин, выполнении курсовых работ и проектов по ряду специальных дисциплин и при выполнении дипломного проекта. Умение решать задачи динамики также имеет существенное значение в подготовке современного инженера.

Пособие содержит также примерный перечень теоретических вопросов для подготовки к сдаче отчетностей (контрольного задания и экзамена в третьем семестре).

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА» ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 190601 «АВТОМОБИЛИ И АВТОМОБИЛЬНОЕ ХОЗЯЙСТВО»

Теоретическая механика является одной из важнейших фундаментальных общенаучных дисциплин. Она играет существенную роль в подготовке инженеров специальности 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство». На результатах теоретической механики базируются общеинженерные дисциплины: сопротивление материалов, детали машин, теория механизмов и машин и другие.

Дисциплина «Теоретическая механика» изучается в течение двух семестров на лекциях, практических занятиях, при выполнении контрольных заданий и во время самостоятельной работы. Изучение дисциплины заканчивается экзаменом во втором семестре.

В основе теоретической механики лежат законы, подтвержденные практикой, отражающие определенный класс явлений природы, связанных с движением и взаимодействием материальных объектов. Эти законы, проверенные многовековой практикой, формулируются в виде аксиом и вместе с рядом основных понятий составляют научную основу теоретической механики.

Предметом изучения теоретической механики является механическое движение и взаимодействие материальных объектов.

Весь курс теоретической механики традиционно делится на три раздела: статику, кинематику, динамику.

Лекции по теоретической механике посвящены изложению содержания курса, анализу основных понятий, законов механики и методов решения тех или иных классов задач. При этом предполагается, что с частью понятий и теорем обучаемые знакомы из математики или физики. В порядке исключения допускается выносить краткие выводы некоторых положений или формул на самостоятельную проработку по учебнику, например, выражений проекций главного вектора и главного момента сил инерции вращающегося твёрдого тела на декартовые оси.

Практические занятия по курсу теоретической механики имеют очень важное значение. В основном эти занятия должны быть посвящены решению задач, связанных с будущей специальностью выпускника. Особое внимание при проведении занятий уделяется:

– формированию и развитию навыков естественно-научного, инженерного мышления;

– привитию навыков построения и анализа моделей простейших реальных задач;

– выработке умений решать несложные прикладные задачи, связанные с автомобильной тематикой;

– методам контроля правильности решения задач.

Для усвоения материала теоретической механики самостоятельная работа студентов заочного отделения является определяющей. Самостоятельная работа состоит из работы по самостоятельному изучению отдельных тем курса, по выполнению текущих заданий и работы по выполнению контрольных заданий по целым разделам (темам) дисциплины.

Система контроля работы студентов. Текущий контроль знаний студентов осуществляется опросом на практических занятиях по содержанию лекций, проверкой выполнения текущих заданий, проведением самостоятельных и контрольных работ, сдачей экзамена.

Контроль над выполнением контрольных заданий проводится в два этапа:

– предварительная проверка правильности письменных отчетов;

– защита контрольного задания в письменной или устной форме.

Окончательный итог подводится при сдаче экзамена за весь курс.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Номера и наименование разделов и тем	Всего учебных занятий	Учебных занятий с преподавателем	Из них по видам учебных занятий				
			Лекции	Практические занятия	Контрольное задание	Экзамен	Самостоятельная работа
1	2	3	4	5	6	7	8
1-й семестр							
Раздел 1. Статика.	2						
Тема 1.Системы сил.	25	4	2	2 (КЗ1 задача 1)			21
Тема 2. Центр тяжести тел.	25	2	2				21
Раздел 2. Кинематика.							
Тема 3. Кинематика точки и твердого тела.	36	4	2	2 (КЗ1 задача2)			32
ИТОГО за 1-й семестр	86	12	6	4			74
2-й семестр							
Раздел 3. Динамика.							
Тема 4. Динамика материальной точки	36	4	2	2 (КЗ2 задача 1)			32
Тема 5. Динамика механической системы.	25	8	4	4 (КЗ2 задача 2)			17
Тема 6. Элементы аналитической механики	25	2	2				23
ИТОГО за 2-й семестр	86	14	8	6			72
Всего по дисциплине	172	26	14	10		2	146

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Целевая установка.

Преподавание теоретической механики имеет целью:

– создание фундамента для последующего обучения студентов общепрофессиональным и специальным дисциплинам, таким как "Сопротивление материалов", "Теория механизмов и машин", "Гидравлика" и так далее;

– участие в формировании базиса для самостоятельного овладения всем новым, что понадобится осваивать специалисту в ходе научно-технического прогресса;

– расширение научного и инженерного кругозора и повышения общей культуры специалиста, развитие его интеллекта и способностей к логическому мышлению.

В результате изучения теоретической механики студент должен иметь представление и знать:

– о процессах и явлениях, происходящих в технических системах при эксплуатации автомобильной техники;

– о динамических закономерностях в природе, автомобильной технике;

– базовые понятия, типовые модели и отдельные законы движения механических систем;

– методы теоретического и экспериментального исследования в теоретической механике, используемые при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Содержание разделов и тем.

Раздел № 1. Статика.

Тема № 1. Системы сил.

Предмет статики. Объекты изучения: материальная точка, механическая система, понятие об абсолютно твердом теле. Основные понятия и аксиомы статики. Связи. Две задачи статики. Приведение систем сил к простейшему виду. Условия равновесия систем сил. Трение.

Контрольное задание. «Определение реакций опор балок. Кинематический анализ плоского механизма. Вторая задача динамики».

Тема № 2. Центр тяжести.

Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Методы нахождения центра тяжести.

Раздел № 2. Кинематика.

Тема № 3. Кинематика точки и твердого тела.

Предмет кинематики. Основные понятия кинематики. Способы задания движения точки. Поступательное движение. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение тела и движение плоской фигуры в ее плоскости.

Тема № 6. Сложное движение точки и твердого тела.

Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движения. Ускорение Кориолиса. Сложное движение тела.

Раздел № 3. Динамика.

Тема № 4. Динамика материальной точки.

Предмет динамики. Законы механики (аксиомы динамики) Галилея-Ньютона. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две задачи динамики точки. Колебания материальной точки. Относительное движение материальной точки.

Тема № 5. Динамика механической системы.

Моменты инерции. Силы внешние и внутренние. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Дифференциальные уравнения движения твердого тела. Кинетическая энергия материальной точки и системы. Работа и мощность силы. Принцип Даламбера для материальной точки и системы. Элементарная теория удара.

Тема № 6. Элементы аналитической механики.

Связи и их уравнения. Обобщенные координаты системы. Принцип возможных перемещений. Понятие об устойчивости равновесия. Принцип Гамильтона-Остроградского. Уравнения Лагранжа второго рода. Малые свободные колебания механической системы с двумя (или n) степенями свободы.

Экзамен.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Теоретическая механика. Курс лекций: // Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2002.

3. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 1. Статика. – Рязань: РВАИ, 2005.

4. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 2. Кинематика. – Рязань: РВАИ, 2005.

5. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 3. Динамика. – Рязань: РВАИ, 2005.

Дополнительная литература:

6. Теоретическая механика. Часть 1. Статика твердого тела. – Рязань: РВВАИУ, 1994.

7. Теоретическая механика. Часть 2. Кинематика. – Рязань: РВВАИУ, 1996.

8. Сборник контрольных заданий по теоретической механике. – Рязань: ВАИ, 1996.

9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. /Под ред. А.А.Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И СДАЧЕ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В процессе изучения дисциплины предполагается выполнение двух контрольных заданий. Каждое из контрольных заданий состоит из двух задач. Студенты выбирают варианты задач согласно своему порядковому номеру по списку из ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ следующим образом: первая из двух цифр номера по списку соответствует номеру схемы, вторая цифра – строке в таблице с данными.

Приступая к решению задачи, в первую очередь нужно повторить соответствующие разделы курса, внимательно изучить, а при необходимости выписать важнейшие формулы, используя курс лекций [1] или учебники [2,6,7], и ознакомиться с решениями задач и упражнений, приведенных в соответствующих подразделах практикумов [3,4,5].

Затем нужно тщательно проанализировать задачу и четко уяснить, что представляют собой неизвестные, что дано, в чем состоит условие задачи (какова связь между данными и неизвестными). Выписать известные в задаче величины. В числе известных необходимо отразить и те величины, которые не заданы явно в виде чисел, а только оговариваются или подразумеваются. Например, если в условии задачи сказано, что движение равномерное, а числовое значение скорости не задано, все-таки следует записать: υ=const, α^{τ}=0. Выписанные «неявно заданные» условия помогают глубже проанализировать и лучше понять задачу.

После чего следует записать буквенные обозначения всех величин, значения которых требуется найти.

После внимательного изучения задачи нужно уметь пересказать ее, выделив неизвестные и данные, и своими словами пояснить условие.

Прежде чем записать те или иные формулы или уравнения и приступить к их преобразованиям или вычислениям, нужно наметить общий план решения задачи, представить себе в общих чертах логические и математические операции, которые нужно выполнить для того, чтобы на основе имеющихся данных найти неизвестные, справочные данные, которые необходимо для этого добавить к заданным величинам.

Рекомендуется решать задачу в общем виде (в буквенных выражениях), подставляя числовые значения только при подсчете окончательных результатов.

Расчеты следует выполнять с помощью калькуляторов или ЭВМ. Допуская какие-либо округления или упрощения, нужно отчетливо представлять, как они будут влиять на окончательный результат. Все расчеты следует вести в единицах СИ. Необходимо указывать единицы измерения величин.

При защите выполненного контрольного задания необходимо:

– знать все формулы, встречающиеся в изученных темах, знать области их применения;

– уметь пользоваться этими формулами при решении задач;

– понимать физический смысл каждой входящей в формулы буквы, каждого знака;

– уметь объяснить логику решения предложенной в задании задачи, обосновать найденное решение;

– уметь решать задачи по темам курса, которые охватываются заданием.

Если после многих попыток найти решение задачи все же не удалось, можно обратиться к дополнительной литературе.

Однако при этом следует учитывать, что обычно причиной неудач оказывается не малое число просмотренных книг, а недостаточно твердое знание основного материала. Поэтому прежде чем обращаться к новым источникам, следует еще раз проверить свои знания по учебнику.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Статика.

Статика – раздел теоретической механики, изучающий методы эквивалентного преобразования систем сил, в частности, их максимального упрощения, и определения условий равновесия систем сил.

1.1. Реакции опор.

Связь – это тело, ограничивающее свободу перемещений объекта.

Реакция связи – это сила, действующая на объект со стороны связи.

При решении задач статики применяют принцип освобождаемости от связей – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

Виды связей и их реакции:

Нить, шарнирный стержень – реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню) (рисунок 1).

Гладкая поверхность – реакция направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи (рисунок 2).

Неподвижный цилиндрический шарнир – реакция проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и имеет произвольное направление в плоскости, перпендикулярной оси (рисунок 3).

Подвижный цилиндрический шарнир – реакция проходит через центр шарнира перпендикулярно его оси и плоскости опирания (рисунок 4).

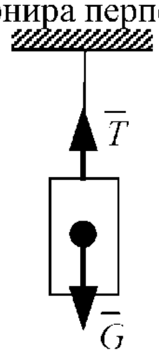

Рисунок 1.

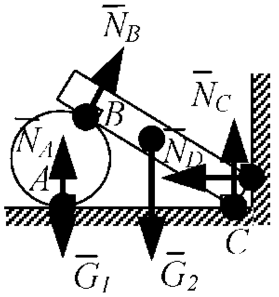

Рисунок 2.

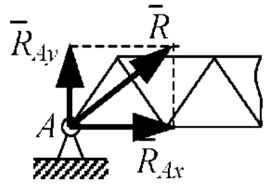

Рисунок 3.

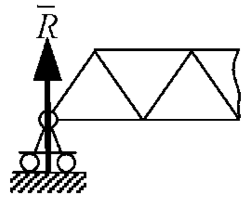

Рисунок 4.

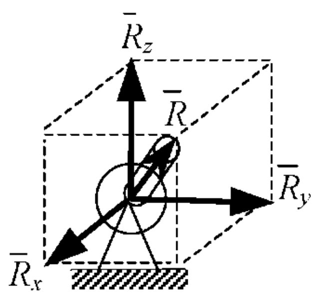

Рисунок 5.

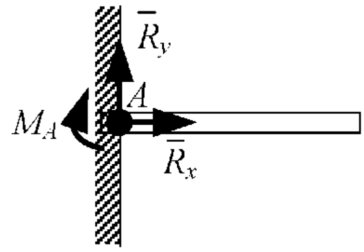

Рисунок 6.

Неподвижный сферический шарнир – реакция проходит через центр шарнира и имеет произвольное направление в пространстве (рисунок 5).

Жесткая плоская заделка (консоль) – возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$, а также реактивный момент (пара сил) M_A (рисунок 6).

Если связь препятствует одному или нескольким перемещениям, то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).

1.2. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

В теоретической механике сила рассматривается как векторная величина и изображается направленным отрезком.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия этой силы*.

При решении многих задач бывает необходимо находить проекции силы на координатные оси.

Проекцией силы $\vec{F}$, изображенной вектором $\vec{AB}$, на ось Ox, называется алгебраическая величина F_x, равная величине отрезка ab, заключенного между проекциями a и b начала и конца вектора $\vec{F}$ на эту ось (рисунок 1). Проекция положительна ($F_x>0$), если направление от a, проекции начала вектора, к b, проекции его конца, совпадает с направлением оси Ox, и отрицательна ($F_x<0$), если эти направления противоположны.

Из рисунка 7 очевидно, что, если угол α между осью Ox и силой $\vec{F}$ отсчитывать от направления оси против хода часовой стрелки, то проекция силы на ось равняется модулю силы, умноженному на косинус угла между направлением вектора и положительным направлением оси

$$F_x=|F|\cos\alpha,$$

Аналогично

$$F_y=|F|\sin\alpha.$$

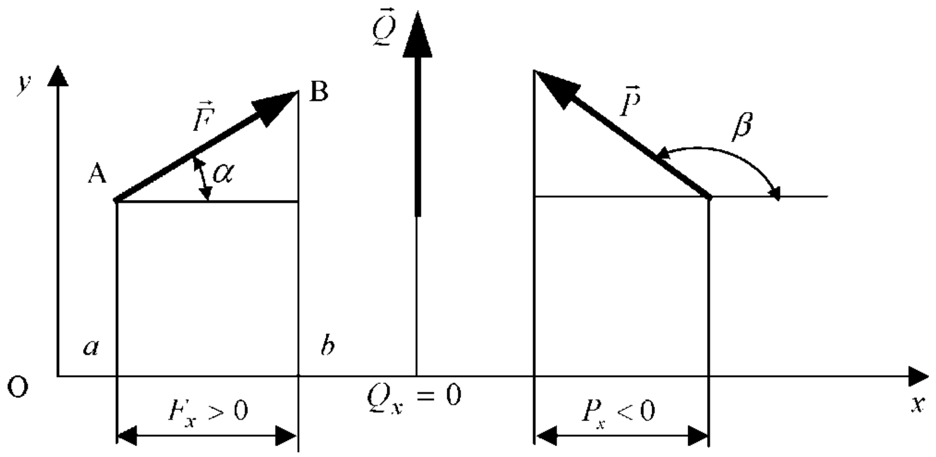

Рисунок 7.

Совокупность сил, действующих на данное тело, принято называть *системой сил.*

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *системой сходящихся сил.*

Для равновесия *пространственной системы сходящихся сил* необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Математически это условие записывается в виде трех уравнений равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0, \ \sum F_{kz} = 0.$$

Для равновесия *плоской системы сходящихся сил* необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух координатных осей, лежащих в плоскости действия сил системы, были равны нулю

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum \boldsymbol{F}_{ky} = 0.$$

Иногда при решении задач используется теорема о трех силах.

Если свободное тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Для системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N)$, линии действия которых произвольным образом расположены в одной плоскости, можно привести такое определение момента:

Момент силы относительно центра, лежащего в плоскости действия сил, есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно этого центра, взятая со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг этого центра против хода часовой стрелки и со знаком минус, если по ходу (рисунок 8).

$$m_0(\vec{F}) = \pm|\vec{F}| \cdot h,$$

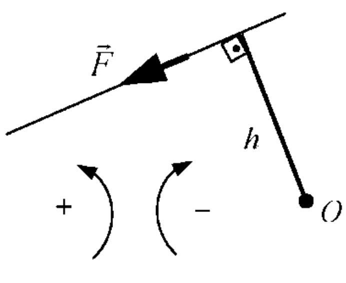

Рисунок 8.

где $m_0(\vec{F})$ – величина момента силы $\vec{F}$ относительно центра 0, Нм; $|\vec{F}|$ – модуль силы $\vec{F}, H$; h – плечо силы $\vec{F}$ относительно центра O, м.

Для плоской системы сил *теорема Вариньона* формулируется так:

Если плоская система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра в плоскости действия сил равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра, то есть

$$m_0(\vec{R}) = \sum m_0(\vec{F}_K).$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил можно записать в одной из следующих трех форм.

Первая форма условий равновесия:

для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю, то есть выполнялись три равенства

$$\sum F_{Kx} = 0, \ \sum F_{Ky} = 0, \quad \sum m_0(\vec{F}_K) = 0\,.$$

Вторая форма условий равновесия:

для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на ось, неперпендикулярную к прямой AB были равны нулю, то есть

$$\sum F_{Kx} = 0, \sum m_A(\vec{F}_K) = 0, \sum m_B(\vec{F}_K) = 0\,(Qx \perp AB).$$

Третья форма условий равновесия:

для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров, лежащих в плоскости действия сил системы и не лежащих на одной прямой, были равны нулю, то есть

$$\sum m_0(\vec{F}_K) = 0, \ \sum m_B(\vec{F}_K) = 0, \sum m_C(\vec{F}_K) = 0 \ \ (C \notin AB).$$

2. Кинематика.

Кинематика раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных объектов (точек, тел) с геометрической точки зрения, то есть вне связи с причинами, порождающими это движение.

2.1. Поступательное и вращательное движение тела.

Движение механической системы считается кинематически заданным, если известно положение этой системы относительно выбранной системы отсчёта в каждый момент времени. Векторное уравнение движения точки:

$$r = \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор движущейся точки, t – время.

Скорость $\vec{v}$ точки в данный момент есть векторная величина, равная первой производной по времени от её радиуса-вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ .$$

Ускорение $\vec{a}$ точки в данный момент равно первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}\ .$$

При координатном способе движение задаётся с помощью уравнений

$$\begin{array}{lll} x = x(t) & \qquad x = x(t) & \qquad x = x(t) \\ y = y(t) & \qquad y = y(t) & \\ z = z(t) & & \end{array}$$

в зависимости от того, движется ли точка по пространственной или по плоской кривой или по прямой Ox.

Данные уравнения представляют собой одновременно и уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из уравнений движения параметр t, можно найти уравнения траектории в обычной форме, то есть в виде зависимостей между её координатами x, y, z.

Проекции вектора скорости на неподвижные координатные оси Ox, Oy, Oz равны производным по времени от соответствующих координат.

Аналогично, проекции вектора ускорения на неподвижные координатные оси равны производным по времени от соответствующих проекций скорости или вторым производным по времени от соответствующих координат

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Тогда модуль вектора скорости и вектора ускорения найдётся по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ , \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

Направление вектора скорости можно определить по его направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}\,) = \frac{v_x}{v}; \qquad \cos(\vec{a}, \vec{i}\,) = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{j}\,) = \frac{v_y}{v}; \qquad \cos(\vec{a}, \vec{j}\,) = \frac{a_y}{a};$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{k}\,) = \frac{v_k}{v}. \qquad \cos(\vec{a}, \vec{k}\,) = \frac{a_z}{a}.$$

Вращательным называется такое движение твёрдого тела, при котором две жестко связанные с ним точки остаются неподвижными в течение всего времени движения.

Прямую, жёстко связанную с телом, все точки которой при вращении тела остаются неподвижными, называют *осью вращения тела.*

Угол φ между неподвижной полуплоскостью, проходящей через ось вращения, и полуплоскостью, жёстко связанной с вращающимся телом и также проходящей через ось вращения, называется *углом поворота или иначе угловым перемещением тела.*

Угол поворота тела считается положительным, если он отсчитывается от неподвижной полуплоскости в сторону, противоположную ходу часовой стрелки, если смотреть на него со стороны положительного направления оси вращения и отрицательным в противном случае.

Кинематическое уравнение вращательного движения тела имеет вид

$$\varphi - \varphi(t).$$

Угловая скорость тела ω равна по величине производной от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если угловая скорость n задана в об/мин, то в радианах/секунду она будет равна

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Угловая скорость – это вектор $\vec{\omega}$, модуль которого равен абсолютной величине угловой скорости и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение тела ε равно по величине первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения тела в ту же сторону, что и угловая скорость при ускоренном вращении и против направления угловой скорости – при замедленном.

Если угловое ускорение тела в течение всего времени движения остаётся равным нулю, то вращение тела называется равномерным.

При равномерном движении связь между углом поворота тела φ, величиной угловой скорости ω определяется следующими зависимостями:

$$\omega \quad \omega_0 \quad const,$$

$$\varphi \quad \varphi_0 \quad \omega_0 t,$$

где ω_0 и φ_0 – начальные угловая скорость и угол поворота тела.

Если угловое ускорение в течение всего времени движения остаётся постоянным, то вращение тела называют равнопеременным.

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = const,$$
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_0 \frac{t^2}{2}.$$

При вращательном движении тела величина скорости V любой его точки равна произведению угловой скорости на расстояние R от точки до оси вращения

$$v = \omega \cdot R.$$

Скорость любой точки твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, равна векторному произведению угловой скорости на радиус - вектор, проведённый в эту точку из произвольно выбранного на оси центра

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Последняя формула носит название формулы Л. Эйлера.

Касательное ускорение точки вращающегося тела по величине равно произведению углового ускорения на расстояние от этой точки до оси вращения

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R.$$

Нормальное ускорение точки вращающегося тела равно по величине произведению квадрата угловой скорости на расстояние от этой точки до оси вращения

$$a_n = \omega^2 \cdot R.$$

Угол μ, который вектор ускорения образует с радиусом окружности, описываемой точкой, определяется зависимостью:

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Плоским (*плоскопараллельным*) называется такое движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

2.2. Уравнения движения плоской фигуры. Скорости и ускорения при плоском движении.

Рассмотрим перемещение фигуры из положения I в положение II (рисунок 1). Это перемещение можно представить, как последовательное поступательное перемещение фигуры вместе с отрезком сначала из положения AB в положение A_1B_2, и затем поворот на угол φ в положение A_1B_1. Можно переместить фигуру и иначе: сначала поступательно в положение A_2B_1, а затем поворот вокруг точки B_1 на тот же угол φ в том же направлении (по часовой стрелке). Вариантов перемещений фигуры – бесконечное множество, так как за точку, вместе с которой фи-

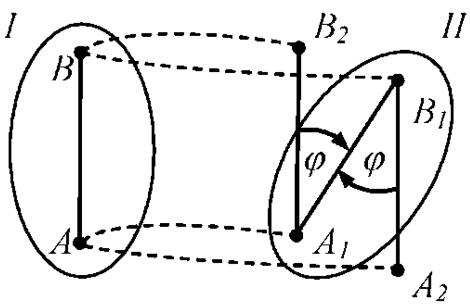

Рисунок 1.

гура перемещается поступательно, а затем поворачивается вокруг нее, можно принять любую точку фигуры. Точку плоской фигуры, относительно которой осуществляется поворот, называют *полюсом*. Таким образом, перемещение плоской фигуры из некоторого положения I в положение II можно представить, как последовательное осуществление поступательного движения вместе с полюсом A, а затем поворот на некоторый угол φ вокруг полюса.

На деле поступательное движение и вращение фигуры происходят одновременно. При этом поступательная часть движения зависит от выбора полюса, а вращательная – нет.

В свете изложенного, *уравнениями движения плоской фигуры* будут:

$$\overline{r}_A = \overline{r}_A(t), \quad \left(x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t)\right), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Первые два уравнения описывают движение полюса A, третье – вращение фигуры вокруг полюса.

Зная уравнения движения, можно рассчитать скорость v_A и ускорение a_A полюса, а также угловую скорость ω и угловое ускорение ε вращения фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вокруг полюса.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$$

Модуль скорости v_{BA}:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB.$$

Если известен угол между векторами $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{BA}$, то скорость точки B можно подсчитать по теореме косинусов:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A v_{BA} \cos\gamma}\ .$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на линию, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

Ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорения полоса и ускорения, которое точка получает при вращении фигуры вокруг полюса с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^\tau,$$

где $a_{MA}^n = \omega^2 \cdot l_{AM}$ и $\vec{a}^n{}_{MA} \parallel MA$; $\quad a_{MA}^\tau = \varepsilon^2 \cdot l_{AM}$ и $\vec{a}_{MA}^\tau \parallel AM$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_{MA}^n$ точки M, которое она получает за счёт вращательной составляющей плоского движения вокруг полюса A, направлено от M к A и равно произведению квадрата угловой скорости на величину расстояния точки M от полюса A.

Касательное (тангенциальное) ускорение $\vec{a}_{MA}^\tau$ точки M, которое она получает при вращении плоской фигуры вокруг полюса A, направлено перпендикулярно к отрезку AM и равно произведению величины углового ускорения на величину расстояния точки M от полюса.

2.3. Мгновенный центр скоростей (МЦС).

В каждый момент времени существует точка плоской фигуры P, скорость которой равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром скоростей* (МЦС).

$$AP = v_A / \omega.$$

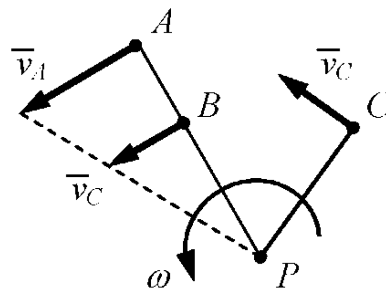

Рисунок 2.

Для определения положения мгновенного центра скоростей необходимо полупрямую, выходящую из полюса A в направлении вектора $\vec{v}_A$ повернуть на 90^0 в сторону вращения плоской фигуры и на этом перпендикуляре отложить отрезок $AP = v_A / \omega$.

Зная скорость некоторой точки A и расстояния от точек B, C, …, до МЦС P, можно рассчитать скорости этих точек. Направление вращения фигуры и векторов скоростей определим по направлению вектора скорости точки A, как вращательной вокруг МЦС P (рисунок 2).

Способы определения МЦС:

а) Известна скорость некоторой точки A и направление движения точки B (рисунок 3). Проводим перпендикуляры через точки A и B к направлениям их движения до взаимного пересечения в точке P, которая и будет являться МЦС. Определяем расстояния от точек A и B до МЦС – AP и BP. Угловую скорость фигуры определим по формуле $\omega = v_A / AP$, направление вращения – по направлению вектора $\bar{v}_A$. Скорость точки B найдем по формуле $v_B = \omega \cdot BP$, либо $v_B = v_A (BP / AP)$. Направлен вектор $\bar{v}_B$ согласно направлению вращения фигуры.

б) Скорости двух точек A и B параллельны между собой, а сами точки расположены на перпендикуляре к скоростям (рисунок 4). Для определения МЦС должны быть известны модули скоростей точек. Так как $v_B / v_A = BP / AP$, то концы векторов скоростей лежат на прямой, проходящей через МЦС (рисунок 4а,4б). Если скорости точек в какой-то момент времени равны между собой и параллельны, то перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности и угловая скорость $\omega = 0$ (рисунок 4в).

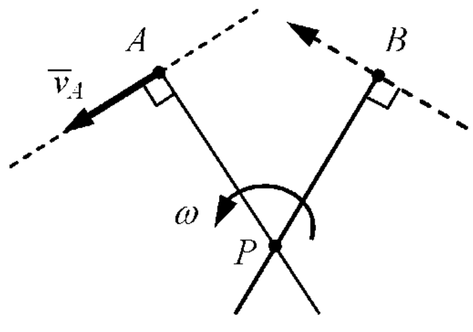

Рисунок 3.

в) Если скорости двух точек A и B плоской фигуры равны и параллельны между собой, но не перпендикулярны AB (рисунок 5), то МЦС лежит в бесконечности. При этом $\omega = v_A / \infty = 0$. Следовательно, расстояния от всех точек фигуры до МЦС равно бесконечности, и скорости всех ее точек равны. Если такое положение имеет место в некоторый промежуток времени, то движение тела в нем является поступательным. Если же это имеет место лишь для некоторого момента времени, то такое движение называют *мгновенно-поступательным*.

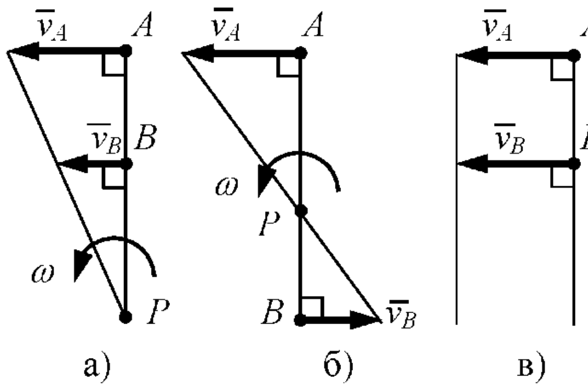

Рисунок 4.

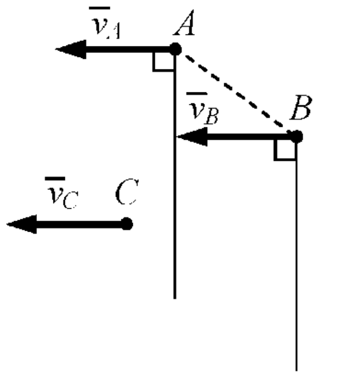

Рисунок 5.

3. Динамика.

Динамика раздел теоретической механики, в которой изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил. Силы в динамике в общем случае – величины переменные. Предметом динамики является изучение движения материальных объектов в связи с силами, действующими на эти объекты. К последним в теоретической механике относят материальную точку, твердое тело, механическую систему (систему твердых тел). Важнейшей характеристикой механических тел является их масса.

3.1. Законы (аксиомы) динамики. Задачи динамики.

Законы (аксиомы) динамики:

1. Закон инерции.

Изолированная от внешнего воздействия точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения (движения по инерции) до тех пор, пока приложенные к ней силы не заставят ее изменить это состояние.

2. Основной закон динамики (закон Ньютона).

Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно по модулю силе, действующей на эту точку, а направление ускорения совпадает с направлением действия силы.

Математически этот закон выражается следующим векторным уравнением:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Зависимость между модулем ускорения и силы следующая:

$$ma = F.$$

Из выражения (1) следует, что $a = F/m$, и чем больше масса точки (тела), тем меньше ее ускорение при одной и той же силе. Таким образом, масса является *мерой инертности точки (тела)*.

При действии на точку одновременно нескольких сил (системы сходящихся сил)

$$m\vec{a} = \vec{R},$$

где

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

3. Закон равенства действия и противодействия.

Две материальные точки (тела) действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил.

Ускорение, получаемое точкой при действии на нее системы сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых этой точке каждой силой по отдельности.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Уравнения в декартовой системе координат.

$$ma_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix};$$

$$ma_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy};$$

$$ma_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Уравнения в естественной системе координат.

$$ma_\tau = F_{1\tau} + F_{2\tau} + \overline{F}_{3\tau} + \ldots + \overline{F}_{n\tau} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau};$$

$$ma_n = F_{1n} + F_{2n} + F_{3n} + \ldots + F_{nn} = \sum_{i=1}^{n} F_{in};$$

$$ma_b = F_{1b} + F_{2b} + F_{3b} + \ldots + F_{nb} = \sum_{i=1}^{n} F_{ib},$$

где $a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0.$

Две основные задачи динамики:

Первая задача динамики – зная массу точки и уравнения ее движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определить модуль и направление равнодействующей R системы сил, приложенных к точке.

Вторая задача динамики материальной точки в канонической форме формулируется так: зная массу материальной точки, приложенные к ней силы и начальные условия ее движения, определить кинематические уравнения движения точки. Однако при решении конкретных задач возможны и некоторые отклонения от этой формулировки. Вообще же ко второй относят задачи, которые требуют для их решения интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Часто дифференциальные уравнения движения точки в естественных осях координат оказывается легче проинтегрировать, чем дифференциальные уравнения в декартовых координатах. Однако естественные уравнения можно использовать только в тех случаях, когда заранее известен радиус кривизны траектории точки в интересующем нас положении или его легко найти по условиям задачи.

Общая методика решения второй задачи динамики.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях координат имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{iz}.$$

Для решения первого уравнения запишем ускорение как производную от скорости:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{ix}.$$

Разделяем переменные. Это разделение зависит от конкретных зависимостей сил F_{ix}. Предположим, что силы постоянные или зависят от времени. Тогда уравнение примет вид:

$$mdv_x = \sum F_{ix}dt.$$

Можно уравнение предварительно разделить на m.

После чего можем написать интегралы (берем неопределенные интегралы):

$$\int mdv_x = \int \sum F_{ix}dt.$$

Предположим, что интеграл в правой части берется (решается в квадратурах). Имеем

$$mv_x = \Phi_x(t, C_1). \qquad (1)$$

Величина C_1 – произвольная постоянная, которую следует определить по *начальным условиям*. В качестве таковых берутся начальное время t_0 (часто полагают $t_0 = 0$), начальная координата x_0 и начальная скорость точки v_{0x}.

Подставляя v_{0x} в уравнение (1), получаем:

$$mv_{0x} = \Phi_x(t_0, C_1).$$

Из данного выражения определяем C_1.

Далее записываем скорость v_x как dx / dt и уравнение (1)

$$m\frac{dx}{dt} = \Phi_x(t, C_1).$$

Вновь разделяем переменные и интегрируем

$$\int m dx = \int \Phi_x(t, C_1).$$

Взяв интегралы в левой и правой частях уравнения, получим:

$$mx = Q_x(t, C_1, C_2). \qquad (2)$$

В уравнении (2) C_2 – вторая произвольная постоянная. Для ее определения используем начальное время и начальную координату – t_0 и x_0.

Получим уравнение

$$mx_0 = Q_x(t_0, C_1, C_2),$$

из которого находим постоянную интегрирования C_2. Таким образом, первое уравнение движения точки имеет вид

$$x = \frac{1}{m} Q_x(t, v_0, x_0).$$

Аналогично решаем второе и третье уравнения системы. Таким образом, получаем систему уравнений движения точки в декартовой системе координат:

$$x = \frac{1}{m} Q_x(t, v_0, x_0),$$

$$y = \frac{1}{m} Q_y(t, v_0, y_0),$$

$$z = \frac{1}{m} Q_z(t, v_0, z_0).$$

3.2. Механическая система. Центр масс механической системы.

Механическая система (система материальных точек) – такая совокупность материальных точек, положение и движение каждой из которых зависит от положения и движения остальных. Механическая система, как система материальных точек, может быть *свободной* и *несвободной.*

Примеры свободной механической системы: солнечная система, система спутников и т.д.

Примеры несвободной механической системы: любой механизм, машина.

Параметры механической системы:

1. Масса системы:

$$M = \sum_i m_i,$$

где m_i – масса i -той точки системы.

Координаты центра масс системы определяются по формулам:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{r}_i}{M}; \quad x_C = \frac{\sum\limits_i m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum\limits_i m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum\limits_i m_i z_i}{M}. \qquad (1)$$

Скорость центра масс получим, дифференцируя формулы (1) по времени:

$$\overline{v}_C = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{v}_i}{M}; \quad \dot{x}_C = \frac{\sum\limits_i m_i v_{ix}}{M}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum\limits_i m_i v_{iy}}{M}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum\limits_i m_i v_{iz}}{M}. \qquad (2)$$

Ускорение центра масс получим, дифференцируя формулы (2) по времени:

$$\overline{a}_C = \frac{\sum\limits_i m_i \overline{a}_i}{M}; \quad \ddot{x}_C = \frac{\sum\limits_i m_i a_{ix}}{M}, \quad \ddot{y}_C = \frac{\sum\limits_i m_i a_{iy}}{M}, \quad \ddot{z}_C = \frac{\sum\limits_i m_i a_{iz}}{M}. \qquad (3)$$

Центр масс – точка геометрическая.

Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.

Внешние – это силы, действующие на точки рассматриваемой системы со стороны точек и тел, не входящих в эту систему. *Внутренние* – это силы, действующие на точки рассматриваемой системы со стороны точек и тел этой же системы. Обозначим внешние силы верхним индексом (e), а внутренние – индексом (i).

Свойства внутренних сил.

Геометрическая сумма внутренних сил равна нулю:

$$\vec{R}^{(i)} = \sum_i \vec{F}_i^{(i)} = 0.$$

Иначе: главный вектор внутренних сил равен нулю. Проецируя на оси декартовой системы координат, получим три скалярных уравнения:

$$R_{x(y,z)}^{(i)} = \sum_I F_{ix(y,z)}^{(i)} = 0.$$

Геометрическая сумма моментов внутренних сил относительно любой точки равна нулю:

$$\vec{M}_O^{(i)} = \sum_i \vec{M}_{iO}^{(i)} .$$

Дифференциальные уравнения движения свободной механической системы:

$$m_i \ddot{x}_i = P_{ix}^{(e)} + P_{ix}^{(i)},$$

$$m_i \ddot{y}_i = P_{iy}^{(e)} + P_{iy}^{(i)},$$

$$m_i \ddot{z}_i = P_{iz}^{(e)} + P_{iz}^{(i)}.$$

Для каждого уравнения необходимо задать два начальных условия – начальную скорость и начальную координату. Итого – 6n начальных условий плюс начальное время.

Теорема о движении центра масс системы:

$$M\vec{a}_C = \sum_i \vec{P}_i^{(e)}.$$

Центр масс системы движется как материальная точка, имеющая массу системы, и к которой приложены все действующие на нее внешние силы.

В проекциях на оси декартовой системы координат:

$$Ma_{C\,x(y,z)} = \sum_i P_i^{(e)}{}_{x(y,z)}.$$

Из формул (6) и (7) следует, что внутренние силы не влияют на движение центра масс системы.

Следствия из теоремы.

Если $\sum_i \vec{P}_i^{(e)} = 0$ то $\vec{a}_C = 0$ и $\vec{v}_C = \text{const}$.

Если $\sum_i P_{ix(y,z)}^{(e)} = 0$ то $a_{Cx(y,z)} = 0$ и $v_{Cx(y,z)} = \text{const}$.

Эти следствия носят название *законов сохранения движения центра масс.*

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1.

Задача 1: определить реакции опор балки (рисунок 1, таблица 1).

Задача 2: найти скорость $\vec{\upsilon}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ ползуна, а также угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна в изображенном на рисунке 2 положении кривошипно-ползунного механизма (рисунок 2, таблица 2).

ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1)

Таблица 1 (к задаче 1).

Номер строки	$в$, м	a, м	α, град	β, град	F_1, кН	F_2, кН	M_1, кНм	q, кН/м	F_3, кН	F_4, кН	M_2, кНм	q_2, кН/м	F_5, кН	F_6, кН	M_3, кНм	q_3, кН/м	F_7, кН	F_8, кН	M_4, кНм	q_4, кН/м
1	7	1	30	30	16	-8	-8	5	0	8	-6	2	4	8	5	3	2	4	4	2
2	6	2	30	60	12	6	12	2	7	0	-5	3	6	2	0	4	4	-6	-3	-2
3	8	1,4	60	30	16	10	-4	3	5	6	-4	5	3	-2	7	0	3	4	2,	4
4	5	1	120	60	8	4	-12	-2	3	2	0	4	4	0	-4	1	2	5	6	3
5	7	2	30	120	12	-8	0	4	1	-6	4	0	5	6	-7	2	-1	3	3	2
6	5	1	45	30	4	6	10	-3	7	10	5	3	3	2	-4	6	4	-2	5	0
7	6	1,4	60	45	20	0	-6	-4	9	4	7	2	4	-5	3	0	3	4	-2	3
8	8	1	150	30	20	4	0	2,4	3	-2	9	-2	6	4	-8	1	0	1	3	4
9	5	2	30	150	10	5	-16	0	4	-8	6	0	8	2	0	4	7	8	2	0
0	6	1,4	60	60	10	-10	6	3,6	4	4	-3	1	5	-5	6	2	6	0	4	4
Примечание – Знак минус у силы или момента пары сил указывает, что направление этой силы или момента противоположно направлению, указанному на рисунке 1																				

Таблица 2 (к задаче 2).

Номер строки	l_{OA}, м	l_{AB}, м	ω_1, рад/с	γ, град	β, град
1	0,22	0,30	1	30	30
2	0,24	0,36	2	45	45
3	0,30	0,40	3	60	60
4	0,36	0,48	4	30	15
5	0,40	0,52	5	45	15
6	0,48	0,56	6	60	15
7	0,50	0,60	7	30	15
8	0,56	0,64	8	45	60
9	0,60	0,70	9	60	45
0	0,64	0,72	10	30	60

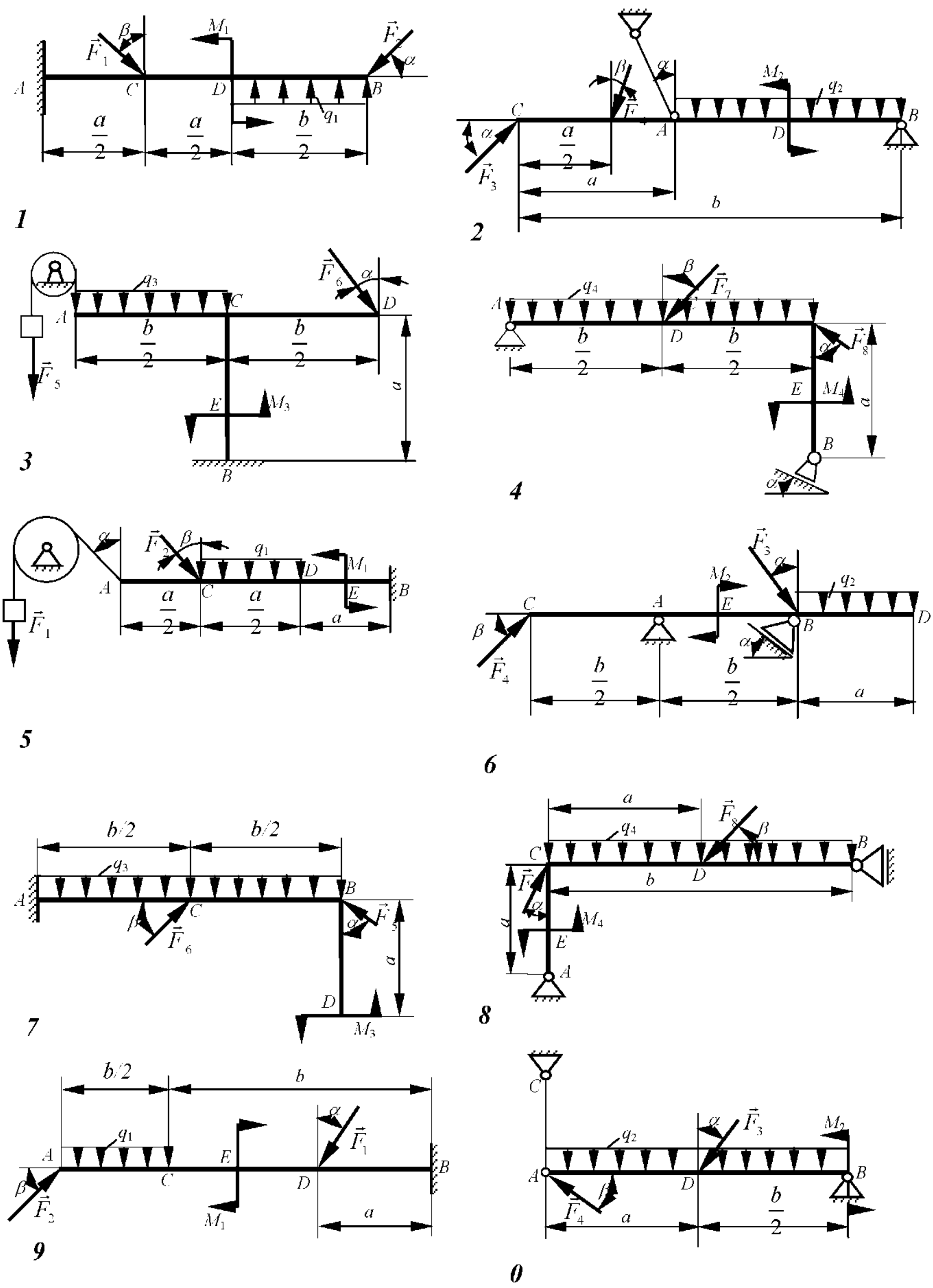

Рисунок 1 (к задаче 1).

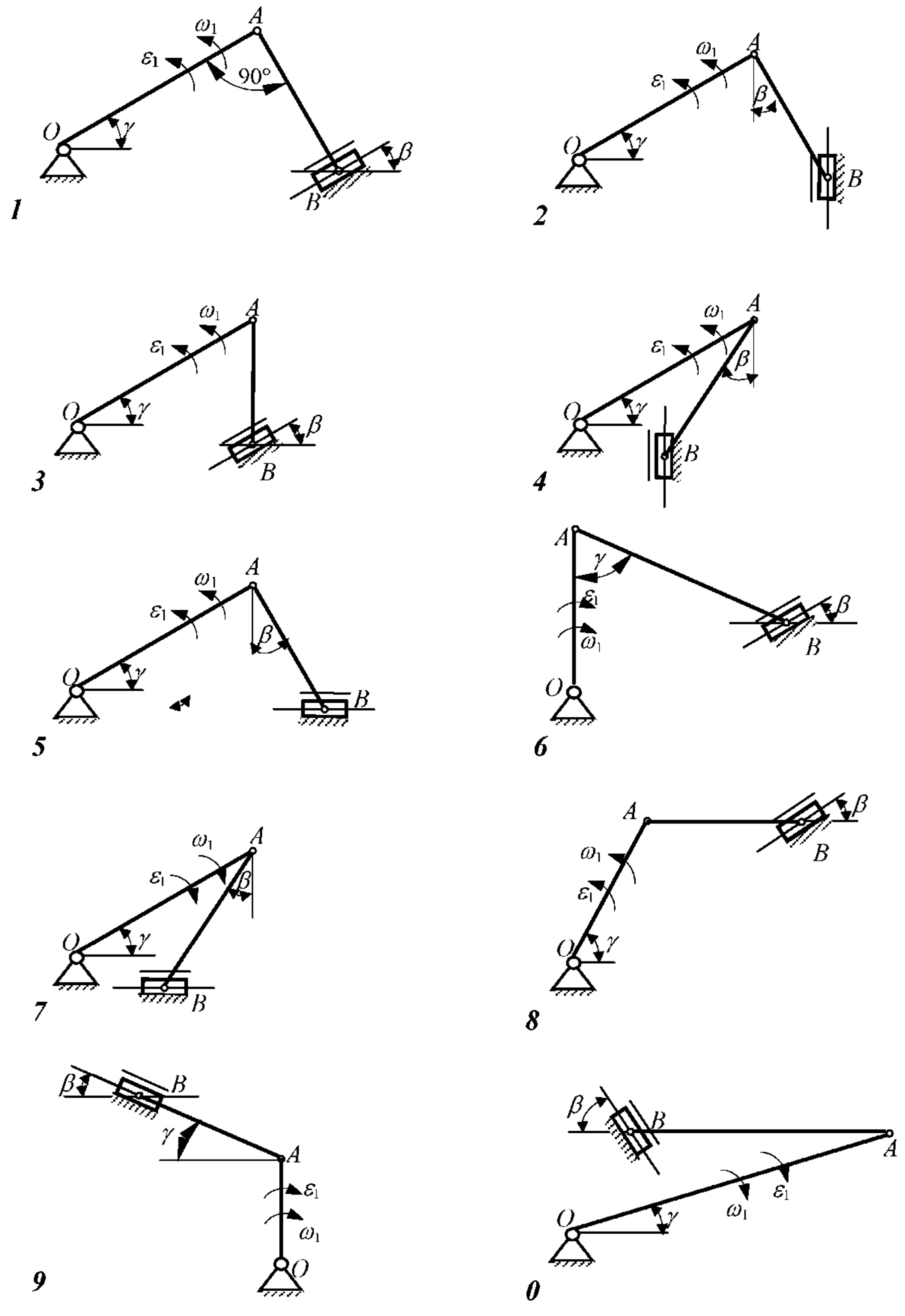

Рисунок 2 (к задаче 2).

Пример выполнения контрольного задания №1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При выполнении расчетов на прочность и жесткость деталей, в том числе и деталей автомобильной техники и средств ее обслуживания, необходимо, как правило, в первую очередь определить реакции опор, так как только при знании реакций опор можно определить максимальные внутренние силы, а по ним и максимальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях деталей.

Вторая задача посвящена кинематическому анализу – определению скоростей и ускорений ползуна и шатуна кривошипно-ползунного механизма, нашедшему широкое применение в автомобиле и средствах его обслуживания. В частности, он используется в двигателе внутреннего сгорания, в компрессоре, в насосах, в приводах различных систем автомобиля.

Опыт проведения кинематического анализа механизмов, полученный при выполнении настоящего задания, будет востребован при изучении последующих учебных дисциплин, выполнении курсовых работ и курсовых проектов по ряду специальных дисциплин и при выполнении дипломного проекта.

<u>Задача 1.</u> Определить реакцию заделки консольной балки, приведенной на рисунке 1, при следующих исходных данных:

величины сил	F_1=1 кН, F_2=2 кН;
момент пары сил	M=3 кНм,
интенсивность распределенной нагрузки	q=1 кН/м,
размеры конструкции	a=3 м, b=5 м,
угол	α=30°.

<u>Р е ш е н и е :</u> 1. Составим расчетную схему. Изобразим балку в масштабе

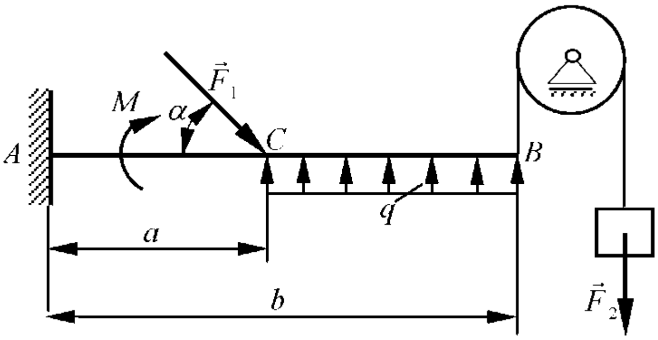

Рисунок 1.

и приложим к ней активные силы $\vec{F}_1$, M и $\vec{Q}$ – равнодействующую распределенной нагрузки (Q=q·(b–a)=1·2=2 кНм) и реакции связей: $\vec{F}_2$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и M_A (рисунок 2).

Силу $\vec{F}_1$ разложим на составляющие $\vec{F}_{1X}$ и $\vec{F}_{1Y}$, величины которых F_{1X}=$F_1\cos\alpha$ и F_{1Y}=$F_1\sin\alpha$.

2. Составим уравнения равновесия балки:

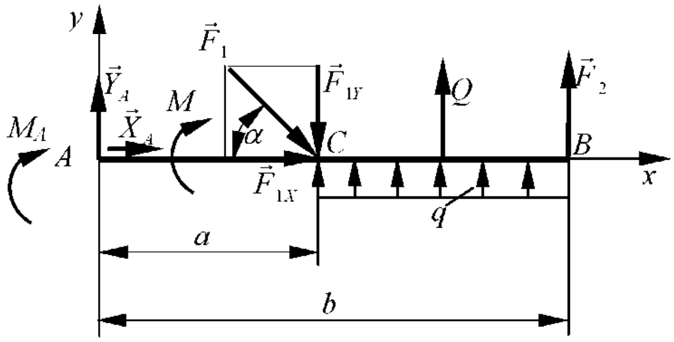

Рисунок 2.

$$\sum F_{KX} = 0 \qquad X_A + F_1\cos\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{KY} = 0 \qquad Y_A - F_1\sin\alpha + Q + F_2 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_K) = 0 \qquad -M_A - M - F_1\sin\alpha\cdot a + Q(a + \frac{b-a}{2}) + F_2\cdot b = 0. \qquad (3)$$

3. Решаем систему уравнений.

Из уравнения (1) находим

$$X_A = -F_1\cos30° = -1\cdot0{,}866 = -0{,}866 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2) находим

$$Y_A = F_1\sin30° - Q - F_2 = 1\cdot0{,}5-2-2 = -3{,}5 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3) находим

$$M_A = -M - F_1\sin30°\cdot a + Q\left(a+\frac{b-a}{2}\right) + F_2\cdot b = -3-1\cdot0{,}5\cdot3+2\left(3+\frac{5-3}{2}\right)+2\cdot5 = 13{,}5 \text{ кНм}.$$

Знак минус указывает, что истинные направления и $\vec{Y}_A$ противоположны указанным на рисунке 2.

4. Проверка правильности вычислений.

Воспользуемся для проверки уравнением

$$\sum m_B(\vec{F}_K) = 0 \qquad -M_A - Y_A b - M + F_1\sin30°(b \quad a) \quad Q\frac{b-a}{2} = 0.$$

Откуда

$$13{,}5-(-3{,}5)\cdot5-3+1\cdot0{,}5\cdot(5-3)-2\cdot\left(\frac{5-3}{2}\right)=0,$$

$$0=0.$$

Проверка подтвердила правильность полученных результатов.

Задача 2. Найти угловую скорость ω_{BC} и угловое ускорение ε_{BC} шатуна BC и скорость $\vec{\upsilon}_C$ и ускорение $\vec{a}_C$ ползуна C кривошипно-ползунного механизма (рисунок 3) при следующих исходных данных:

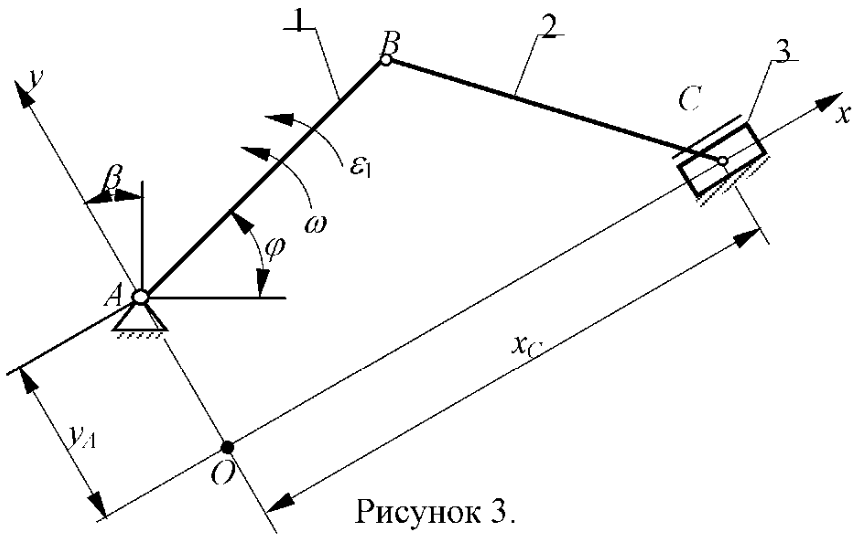

Рисунок 3.

угол наклона осей координат β=135°;
координаты шарниров A и C: y_A=0,09 м, x_C=-0,4 м, y_C=0,09 м;
угол наклона кривошипа к горизонту φ=30°;
длина кривошипа AB l_{AB}=0,24 м;
угловая скорость кривошипа ω_1=160 рад/с;
угловое ускорение кривошипа ε_1=10 рад/с.

Решение: 1. Построим схему (план) механизма в масштабе $\mu_l=200\ \frac{\text{мм}}{\text{м}}$ (рисунок 3) в следующей последовательности. Из произвольного центра O восстановим вертикаль Oy_1, под углом β=135° к которой проведем ось Oy, а затем перпендикулярно к ней ось Ox. Отложив вдоль оси Oy отрезок $OA=\mu_l y_A$, найдем положение центра шарнира A, через который проведем горизонталь Ax_1. Под углом φ к горизонтали Ax_1 проведем луч, на котором отложим отрезок $AB=\mu_l l_{AB}$, который изображает кривошип AB.

Отложив на оси Ox отрезок $OC=\mu_l x_C$ с учетом знака минус, найдем положение точки C – центра одноименного шарнира, а, следовательно, и положение ползуна C.

Соединив отрезком прямой точки B и C, завершим построение схемы механизма.

2. Найдем длину l_{BC} шатуна и его положение – угол φ (рисунок 4).

Для этого соединим со звеньями механизма векторы $\vec{l}_{OA}$, $\vec{l}_{AB}$, $\vec{l}_{BC}$ и $\vec{x}_C$ так, как показано на рисунке 5 Условие замкнутости векторного контура $OABCO$ имеет вид:

$$\vec{x}_C = \vec{y}_A + \vec{l}_{AB} + \vec{l}_{BC}\ . \qquad (1)$$

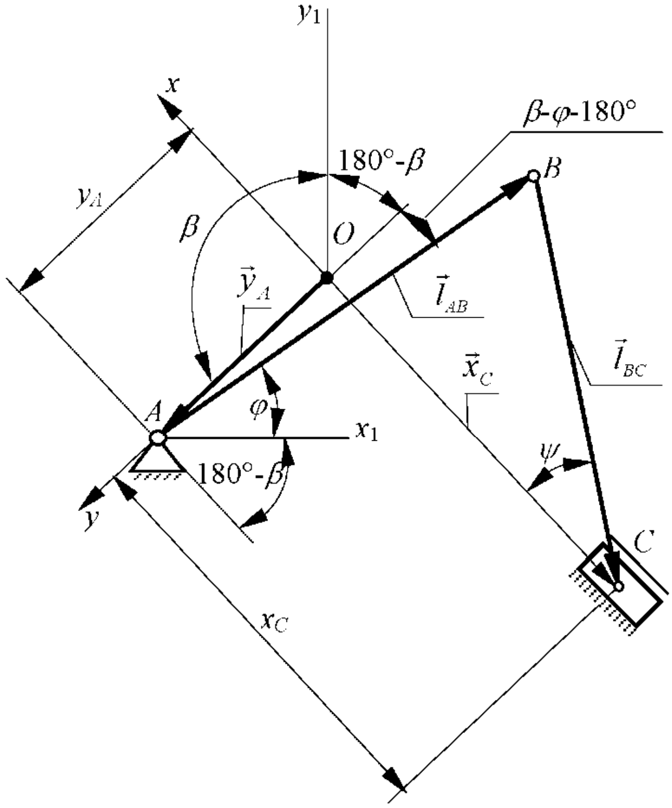

Рисунок 4.

Проецируя уравнение (1) на оси Ox и Oy получим:

$$\left.\begin{aligned} -x_C &= 0 - l_{AB}\sin(\beta-\varphi-90°) - l_{BC}\cos\psi, \\ 0 &= y_A - l_{AB}\cos(\beta-\varphi-90°) + l_{BC}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Неизвестными в системе уравнений (2) являются l_{BC} и ψ. Подставляя в нее исходные данные, получим:

$$\left.\begin{aligned} l_{BC}\cos\psi &= 0{,}4 - 0{,}24\sin(135° - 30° - 90°, \\ l_{BC}\sin\psi &= 0{,}24\cos(135° - 30° - 90°) - 0{,}09. \end{aligned}\right\}$$

Откуда

$$\left.\begin{aligned} l_{BC}\cos\psi &= 0{,}338, \\ l_{BC}\sin\psi &= 0{,}142. \end{aligned}\right\}$$

Разделив нижнее равенство на верхнее, найдем:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{0{,}142}{0{,}338} = 0{,}42 \text{ или } \psi{=}22{,}77°;\ \sin\psi{=}0{,}387,\ \cos\psi{=}0{,}922;$$

$$l_{BC} = \frac{0{,}142}{\sin\psi} = \frac{0{,}142}{0{,}387} = 0{,}37 \text{ м.}$$

Нашли l_{BC} и ψ аналитическим методом. Правильность полученных результатов легко проверить непосредственным измерением l_{BC} и ψ на плане механизма: $\psi \approx 23°$; $l_{BC} = \dfrac{BC}{\mu_e} = \dfrac{73{,}8}{200} = 0{,}369$ м.

3. Найдем скорости точек и звеньев механизма, используя рисунок 5.

Для кривошипа AB:

$$\omega_1 = 160 \text{ рад/с}, \ \upsilon_A = 0, \ \upsilon_B = \omega_1 l_{AB} = 160 \cdot 0{,}24 = 38{,}4 \text{ м/с}, \ \vec{\upsilon}_B \perp AB.$$

Для шатуна BC:

$$\upsilon_B = 38{,}4 \text{ м/с}, \ \vec{\upsilon}_B \perp AB, \ \vec{\upsilon}_C \parallel OC,$$

$$\vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon}_B + \vec{\upsilon}_{CB}, \tag{3}$$

где $\vec{\upsilon}_{CB} \perp BC$.

Проецируя векторное уравнение (3) на оси координатной системы Oxy, получим:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_C &= \upsilon_B \sin(180° - \beta + \varphi) - \upsilon_{CB} \sin\psi = 38{,}4 \sin(180° - 135° + 30°) - \upsilon_{CB} \cdot 0{,}387, \\ 0 &= -\upsilon_B \cos(180° - \beta + \varphi) - \upsilon_{CB} \cos\psi = -38{,}4 \cos(180° - 135° + 30°) - \upsilon_{CB} \cdot 0{,}922. \end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения системы находим υ_{CB}:

$$\upsilon_{CB} = -\frac{38{,}4}{0{,}922} \cos 75° = -10{,}78 \text{ м/с},$$

а из первого уравнения системы находим υ_C:

$$\upsilon_C = 38{,}4 \sin 75° - (-10{,}78) \cdot 0{,}387 = 41{,}263 \text{ м/с}.$$

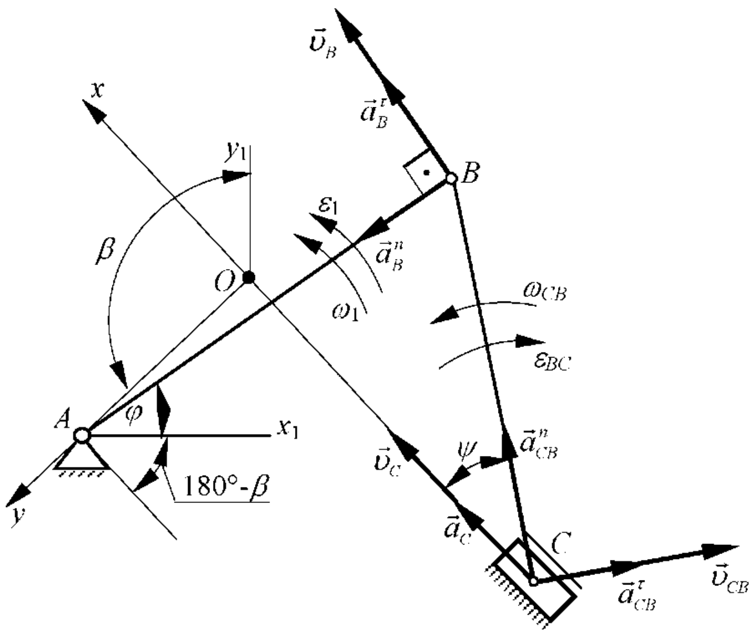

Рисунок 5.

Знак минус у υ_{CB} говорит о том, что истинное направление вектора $\vec{\upsilon}_{CB}$ противоположно указанному на рисунке 5.

Угловая скорость ω_{BC} шатуна

$$\omega_{BC} = \frac{\upsilon_{CB}}{l_{CB}} = \frac{10{,}78}{0{,}37} = 29{,}135 \text{ рад/с.}$$

Она направлена по ходу часовой стрелки, что согласуется с правильным направлением вектора $\vec{\upsilon}_{CB}$.

4. Найдем ускорения точек и звеньев механизма.

Для кривошипа AB: ε_1=10 рад/с, a_A=0,

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,\tau},$$

где $a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 160^2 \cdot 0{,}24 = 6144$ м/с^2, $\vec{a}_B^{\,n} \| AB$ и направлен от B к A;

$a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB} = 10 \cdot 0{,}24 = 2{,}4$ м/с^2, $\vec{a}_B^{\,\tau} \perp AB$ и направлен по ε_1.

Для шатуна BC:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,\tau} + \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,\tau}, \tag{4}$$

$a_{CB}^n = \omega_{BC}^2 l_{BC} = 29{,}135^2 \cdot 0{,}37 = 313{,}97$ м/с^2, $\vec{a}_{CB}^{\,n} \| CB$ от C к B; $\vec{a}_{CB}^{\,\tau} \| CB$.

Проецируя векторное уравнение (4) на оси координатной системы Oxy, получим:

$$a_C = a_B^n \cos 75° + a_B^\tau \sin 75° + a_{CB}^n \cos\psi - a_{CB}^\tau \sin\psi = 6144 \cos 75° + 2{,}4 \sin 75° +$$
$$+ 313{,}97 \cdot 0{,}922 - a_{CB}^\tau \cdot 0{,}387,$$
$$0 = a_B^n \sin 75° - a_B^\tau \cos 75° - a_{CB}^n \sin\psi - a_{CB}^\tau \cos\psi = 6144 \sin 75° - 2{,}4 \cos 75° -$$
$$- 313{,}97 \cdot 0{,}387 - a_{CB}^\tau \cdot 0{,}922.$$

Из второго уравнения полученной системы уравнений находим:

$$a_{CB}^\tau = \frac{6144 \cdot 0{,}966 - 2{,}4 \cdot 0{,}2588 - 121{,}506}{0{,}922} = 6304{,}75 \text{ м/с}^2,$$

а из первого уравнения – модуль ускорения a_C:

$$a_C = 6144 \cdot 0{,}2588 + 2{,}4 \cdot 0{,}966 + 289{,}48 - 6304{,}75 \cdot 0{,}387 = -558{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Знак минус указывает, что направление вектора $\vec{a}_C$ противоположно указанному на рисунке 5.

Угловое ускорение ε_{BC} шатуна

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{BC}} = \frac{6304{,}75}{0{,}37} = 17037{,}84 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{BC} противоположно ходу часовой стрелки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного расчета в задаче 1 определены реакции всех внешних связей, наложенных на балку, что позволяет, в частности, перейти к выполнению прочностного расчета, как самих балок, так и их опор.

При решении задачи 2 был проведен кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма, в результате чего найдены скорости и ускорения всех звеньев и длина шатуна. Скорости звеньев механизма определялись методом мгновенного центра скоростей, а ускорения методом полюса.

В третьем задании решена вторая задача динамики точки, то есть по заданным массе и силам, действующим на тело, найдены уравнения ее движения и затем, вычислены искомые параметры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретическая механика. Курс лекций: // Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2002.

3. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 1. Статика. – Рязань: РВАИ, 2005.

4. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 2. Кинематика. – Рязань: РВАИ, 2005.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2.

Задача 1: Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость $\vec{\upsilon}_0$, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рисунок 3). Угол наклона α=30°. На участке AB на груз кроме постоянной силы $\vec{Q}$, направление которой показано на рисунке 3, действует сила трения. В точке B груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения о трубу f=0,2) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_x на ось Ox задана. Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB=l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки В, найти закон движения груза на участке BC, то есть найти $x=f(t)$, где $x=BD$ (рисунок 3, таблица 3.).

Задача 2: В задании исследуется система, состоящая из прямоугольной вертикальной плиты 1 массой m_1, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза 2 массой m_2 (рисунок 4, таблица 4). В момент t=0, когда плита имеет скорость υ_0, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по имеющемуся на плите желобу. На схемах 1,2,3,4, приведенных на рисунок 4, желоб KE прямолинейный и при движении груза расстояние $s=AD$ изменяется по закону $s=f_1(t)$, а на схемах 5,6,7,8,9,0, приведенных на рисунок 4, ось желоба – окружность радиуса R и при движении груза угол изменяется по закону $\varphi=f_2(t)$.

Груз следует считать материальной точкой. Всеми сопротивлениями пренебречь. Необходимые данные приводятся в таблице 4. Величины, которые нужно найти в момент t_1=1 с:

L – перемещение плиты с начала движения, м;

υ_1 – скорость плиты, м/с;

a_1 – ускорение плиты, м/с^2;

N – нормальную реакцию направляющих, Н.

ТАБЛИЦЫ И СХЕМЫ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ (КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2)

Таблица 3 (к задаче 1).

Номер строки	m, кг	υ_0, м/с	Q, Н	l, м	t, с	F_x, Н
0	2,0	2,0	6	-	2,5	$2\sin 4t$
1	2,4	12	6	1,5	-	$6t$
2	4,5	18	9	-	3,0	$3\sin 2t$
3	6,0	14	18	5	-	$-3\cos 2t$
4	1,6	18	4	-	2,0	$4\cos 4t$
5	8,0	10	16	4	-	$-6\sin 2t$
6	1,8	15	5	-	2,0	$9t^2$
7	4,0	12	12	2,5	-	$-8\cos 4t$
8	3,0	22	9	-	3	$2\cos 2t$
9	4,8	10	12	4	-	$-6\sin 4t$

Таблица 4 (к задаче 2).

Номер строки	$s=f_1(t)$, м; $\varphi=f_2(t)$, рад	m_1, кг	m_2, кг	υ_0, м/с	R, м
1	$0{,}4(2t^2-1)$	20	8	3	–
2	$0{,}8\cos\frac{\pi}{6}t^2$	16	4	4	–
3	$1{,}8\cos\frac{\pi}{3}t$	22	4	2	–
4	$0{,}3(6t^2-5)$	15	7	5	–
5	$\frac{\pi}{3}(3-2t^2)$	10	2	1	0,9
6	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	12	6	3	1,2
7	$\frac{\pi}{2}t^2$	11	7	2	0,8
8	$\frac{\pi}{6}(3-4t^2)$	25	5	4	0,5
9	$\frac{\pi}{4}(5t^2-1)$	32	3	2	0,3
0	πt^2	18	6	3	1,1

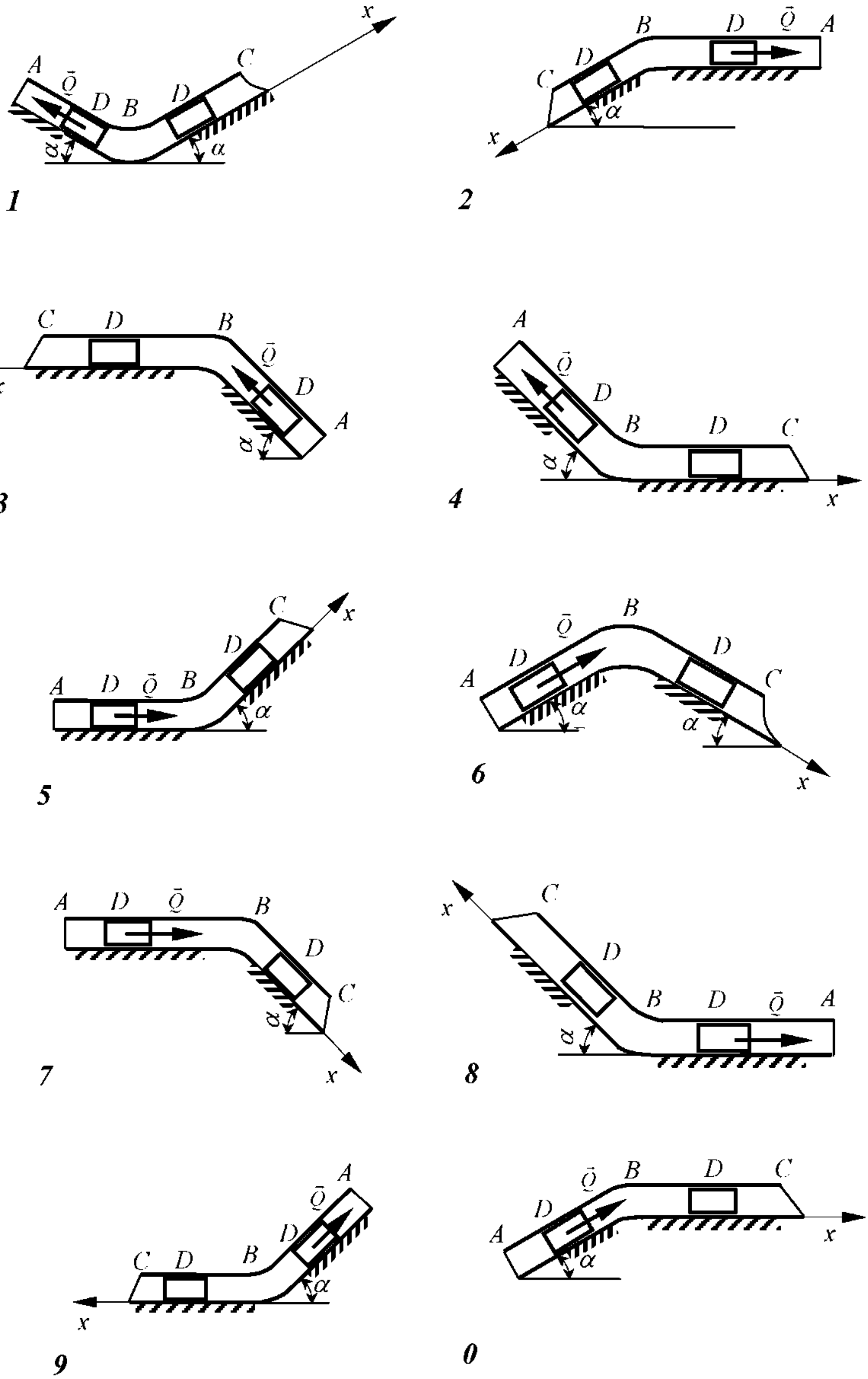

Рисунок 3 (к задаче 1).

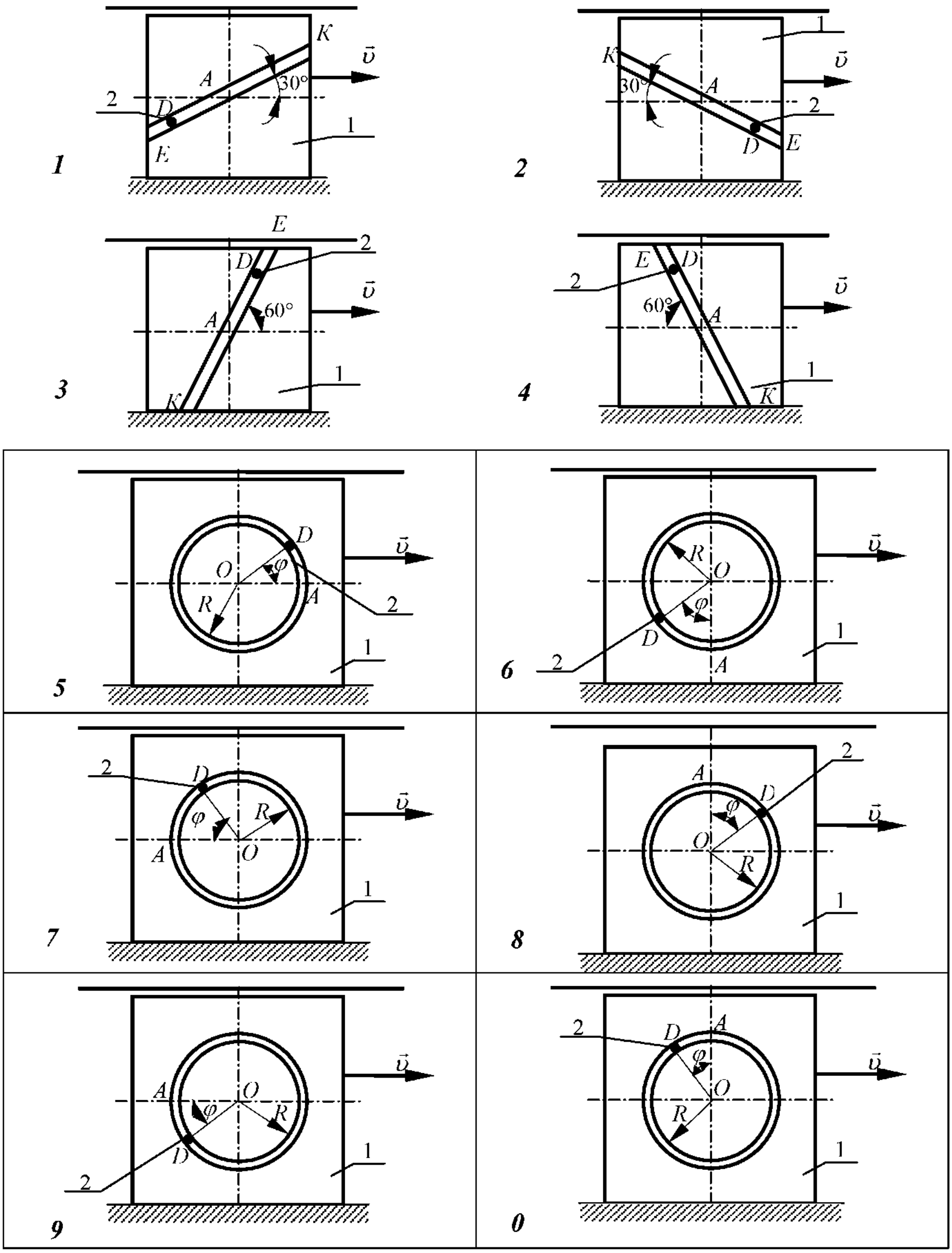

Рисунок 4 (к задаче 2).

Пример выполнения контрольного задания №2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Умение решать задачи динамики точки также имеет существенное значение в подготовке современного инженера. В первом задании необходимо решить вторую (основную) задачу динамики точки, то есть по заданным массе и силам, действующим на тело, принимаемое за материальную точку, нужно найти уравнения ее движения и затем, используя приемы кинематики, вычислить искомые параметры.

Любой механизм, двигатель, автомобиль, станок и тому подобное – все это механические системы большей или меньшей сложности. Для того, чтобы на стадии их проектирования предсказать их технические характеристики, уровень надежности и долговечности или объяснить причины отказов на стадии их эксплуатации, нужно уметь их исследовать. Второе задание и посвящено освоению некоторых приемов исследования механических систем. Конечно, исследовать реальную систему в задании нецелесообразно. Это займет очень много времени и может вызвать серьезные трудности как вследствие своей сложности и громоздкости, так и вследствие недостатка опыта у курсантов. Кроме того, для исследования могут потребоваться знания не только теоретической механики, но и специальных дисциплин. Но методика применения общих теорем динамики для изучения движения не зависит от степени сложности системы. Поэтому начальные навыки исследования можно получить и на примере таких простейших систем, как в данном задании.

Задача 1. Для защиты кюветов шоссе от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» C (рисунок 1). Учитывая возможность движения камня 1 из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость равной нулю, определить минимальную ширину b полки и скорость υ_c, с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l, камень движется τ секунд.

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Падающий камень принимаем за материальную точку.

Дано:

начальная скорость движения точки	$\upsilon_A=0$;
угол наклона участка AB	$\alpha=60°$;
длина участка AB	$l=4$ м;
время движения по участку AB	$\tau=1$ с;
коэффициент трения	$f\neq0$;
высота участка DB	$h=5$ м;
угол наклона участка DB	$\beta=75°$.

Определить:

скорость точки C	υ_C;
длину участка CD	b.

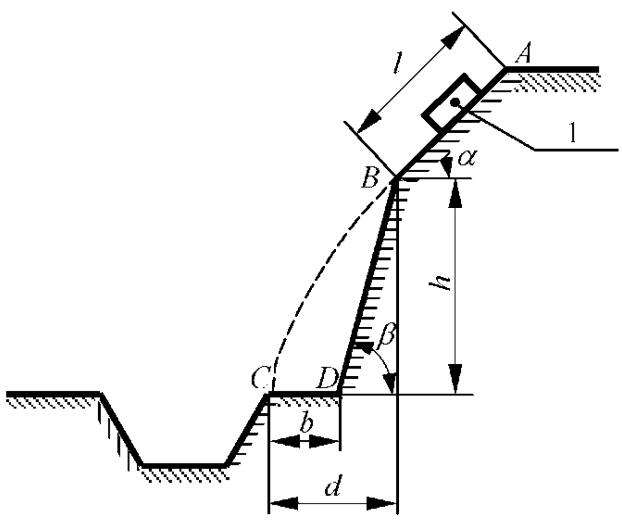

Рисунок 1.

Р е ш е н и е : 1. Исследуем движение точки на участке AB.

1.1. Составим расчетную схему участка AB.

Координатную ось Ax_1 направим вдоль траектории камня на участке AB от точки A к точке B, то есть в сторону его движения.

Изобразим точку на ее траектории в произвольном положении (рисунок 2), но так, чтобы выполнялось условие $\upsilon_x>0$.

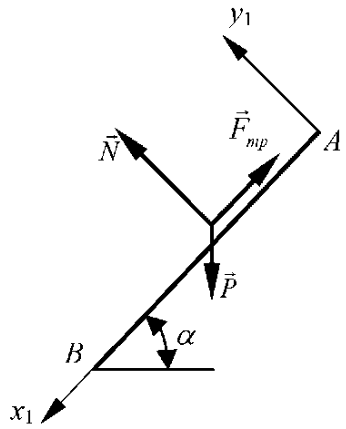

Рисунок 2.

Покажем на чертеже все активные и реактивные силы, действующие на точку. Такими силами будут:

сила тяжести $\vec{P}$;

сила нормального давления со стороны откоса $\vec{N}$;

сила трения камня об откос $\vec{F}_{тр}$.

Выберем на оси начало отсчета, совмещая его с начальным положением точки A, при этом должно выполняться соотношение $x_1>0$. Координатную ось Ay_1 направляем перпендикулярно наклонной плоскости вверх.

1.2. Запишем начальные условия движения точки на этом участке:

при $t=0$ $\qquad x_{10}=0,\ \upsilon_A=0.$

1.3. Запишем условия движения точки на границе участка, то есть в положении В:

при $t=\tau$ $\qquad x_1=l,\ \upsilon=\upsilon_B.$

1.4. Составим дифференциальные уравнения движения точки на участке AB.

Запишем систему дифференциальных уравнений в общем виде:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2}&=\sum F_{kx_1},\\ m\frac{d^2y_1}{dt^2}&=\sum F_{ky_1}.\end{aligned}\right\}$$

Спроецируем все силы, приложенные к точке, на оси координат и суммы проекций подставим в правые части дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= P\sin\alpha - F_{mp},\\ m\frac{d^2y_1}{dt^2} &= N - P\cos\alpha. \end{aligned}\right\}$$

Упростим полученные выражения. Так как y_1=const, поэтому $\frac{d^2y_1}{dt^2} = 0$ и из второго уравнения получим $N=P\cdot\cos\alpha$. Подставляя в первое уравнение значение $F_{mp}=f\cdot N=f\cdot P\cos\alpha$, получим

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = P\sin\alpha - f\cdot P\cos\alpha\,.$$

Откуда с учетом того, что $P=mg$, окончательно получим дифференциальное уравнение движения точки на участке AB

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha\,.$$

1.5. Проинтегрируем дифференциальные уравнения движения.

Представим полученное дифференциальное уравнение второго порядка в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\upsilon}{dt} &= g\sin\alpha - fg\cos\alpha,\\ \frac{dx_1}{dt} &= \upsilon. \end{aligned}\right\}$$

Разделим переменные в первом уравнении и проинтегрируем его:

$$\begin{aligned} \int d\upsilon &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int dt,\\ \upsilon &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Подставляем полученное значение υ во второе уравнение, разделяем переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1,\\ \int dx &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\int tdt + C_1\int dt,\\ x &= \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставив в уравнения (1) и (2) начальные условия, т.е. вместо t нуль, вместо x нуль и вместо υ величину υ_A, также равную нулю, найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2:

$$0=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)\cdot 0+C_1,$$

$$0=\frac{g}{2}(\sin\alpha-f\cos\alpha)\cdot 0^2+C_1\cdot 0+C_2.$$

Откуда

C_1=0, C_2=0.

1.6. Запишем кинематические уравнения движения точки на участке *AB*:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t, \\ x_1 &= \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

1.7. Исследуем полученное решение

Подставляя в найденные уравнения условия движения на границе участка (в точке *B*): $t=\tau$, $x_1=l$, $\upsilon=\upsilon_B$, получим:

$$\upsilon_B=g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau, \qquad (4)$$

$$l=g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2}. \qquad (5)$$

Решая полученную систему уравнений, найдем скорость камня в положении *B*:

из формулы (5) найдем

$$g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau=\frac{2l}{\tau},$$

подставив это выражение в (4), получим

$$\upsilon_B = \frac{2l}{\tau} = \frac{2\cdot 4}{1} = 8 \text{ м/с}.$$

2. Исследуем движение точки на участке *BC*.

2.1. Составим расчетную схему участка *BC*.

За начало координат принимаем точку *B* (начальное положение на этом участке). Координатную ось *Bx* направим по горизонтали в сторону движения точки, координатную ось *By* – по вертикали вниз, то есть также в сторону движения точки (рисунок 3).

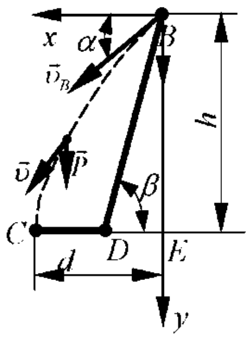

Рисунок 3.

Покажем условно произвольной кривой на рисунке 3 траекторию точки. Изобразим на ней точку в промежуточном положении, но так, чтобы в этом положении выполнялись условия:

$$x>0,\quad y>0,\quad \upsilon_x>0,\ \upsilon_y>0.$$

Покажем на рисунке все силы, действующие на точку. На нее действует только сила тяжести $\vec{P}$, так как сопротивлением воздуха в задаче пренебрегается.

2.2. Запишем начальные условия движения точки на участке BC:

при $t=0$ $\quad x_0=0;\quad y_0=0,$

$\upsilon_{ox}=\upsilon_B\cos\alpha,\quad \upsilon_{oy}=\upsilon_B\sin\alpha.$

2.3. Запишем условия движения точки на границе участка BC, то есть в положении C:

при $t=T$ $\quad x=d;\quad y=h,$

$\upsilon_x=V_{cx},\quad \upsilon_y=V_{cy}.$

2.4. Составим дифференциальные уравнения движения точки на участке BC.

Запишем систему дифференциальных уравнений в общем виде:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum F_{kx},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum F_{ky}.\end{aligned}\right\}$$

Спроецируем все силы, приложенные к точке, на оси координат. Суммы их проекций подставим в правые части дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 0,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= P.\end{aligned}\right\}$$

Поделив оба уравнения почленно на m, получим окончательно дифференциальные уравнения движения точки на участке BC:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= g.\end{aligned}\right\}$$

2.5. Проинтегрируем дифференциальные уравнения движения.

Представим каждое уравнение второго порядка в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\upsilon_x}{dt}=0,\\&\frac{dx}{dt}=\upsilon_x,\\&\frac{d\upsilon_y}{dt}=g,\\&\frac{dy}{dt}=\upsilon_y.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Разделим переменные и проинтегрируем первое и третье уравнения:

$$\upsilon_x=C_3,$$

$$\int d\upsilon_y=g\int dt\,,$$

$$\upsilon_y=gt+C_4.$$

Подставив в эти уравнения начальные условия, найдем постоянные интегрирования:

$$\upsilon_B\cos\alpha=C_3\qquad\Rightarrow\qquad C_3=\upsilon_B\cos\alpha,$$

$$\upsilon_B\sin\alpha=g\cdot 0+C_4\qquad\Rightarrow\qquad C_4=\upsilon_B\sin\alpha.$$

Подставляя полученные значения υ_x и υ_y во второе и четвертое уравнения системы (6), найдем

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_B\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt}=gt+\upsilon_B\sin\alpha.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dx=\upsilon_B\cos\alpha\int dt,\qquad x=\upsilon_B t\cos\alpha+C_5;$$

$$\int dy=g\int tdt+\upsilon_B\sin\alpha\int dt,\qquad y=g\frac{t^2}{2}+\upsilon_B t\sin\alpha+C_6.$$

Подставив в эти уравнения начальные условия, найдем постоянные интегрирования:

$$0=\upsilon_B\cdot 0\cdot\cos\alpha+C_5\qquad\Rightarrow\qquad C_5=0,$$

$$0=g\frac{0^2}{2}+\upsilon_B\cdot 0\cdot\sin\alpha+C_6\qquad\Rightarrow\qquad C_6=0.$$

2.6. Запишем кинематические уравнения движения точки на участке BC:

$$\left.\begin{aligned}&\upsilon_x=\upsilon_B\cos\alpha,\\&\upsilon_y=gt+\upsilon_B\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \upsilon_B t\cos\alpha, \\ y &= \frac{g}{2}t^2 + \upsilon_B t\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2.7. Исследуем полученное решение.

Найдем уравнение траектории камня на участке BC. Для этого решим уравнения (8) совместно, исключив из них параметр t:

$$t = \frac{x}{\upsilon_B\cos\alpha},$$

$$y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{\upsilon_B\cos\alpha}\right)^2 + \upsilon_B\left(\frac{x}{\upsilon_B\cos\alpha}\right)\sin\alpha,$$

$$y = \frac{gx^2}{2\upsilon_B^2\cos^2\alpha} + x\mathrm{tg}\alpha.$$

Подставив в это уравнение условия движения точки на границе участка BC, получим квадратное уравнение

$$h = \frac{gd^2}{2\upsilon_B^2\cos^2\alpha} + d\mathrm{tg}\alpha$$

или

$$\frac{9{,}81}{2\cdot 8^2\cdot\cos^2 60°}d^2 + \mathrm{tg}60°d - 5 = 0,$$

решив которое, найдем

d_1=2,1 м и d_2= –7,75 м.

Следовательно, d=2,1 м.

Определим минимальную ширину полки b (рисунок 1)

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\mathrm{tg}\beta} = 2{,}1 - \frac{5}{\mathrm{tg}75°} = 0{,}76 \text{ м}.$$

Запишем уравнения (7) и (8) для момента $t=T$, то есть для момента, когда камень окажется в положении C:

$$\upsilon_{Cx} = \upsilon_B\cos\alpha, \qquad (10)$$

$$\upsilon_{Cy} = gt + \upsilon_B\sin\alpha, \qquad (11)$$

$$d = \upsilon_B\cdot T\cos\alpha, \qquad (12)$$

$$h = \frac{g}{2}T^2 + \upsilon_B T\sin\alpha. \qquad (13)$$

Из уравнения (12) найдем время падения камня

$$T = \frac{d}{\upsilon_B\cos\alpha} = \frac{2{,}1}{8\cos 60°} = 0{,}525 \text{ с}.$$

Подставим найденные значения T в уравнение (13):

$$5 = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}525^2}{2} + 8 \cdot 0{,}525 \cdot \sin 60°,$$

$$5 \approx 4{,}989.$$

Принимаем окончательно T=0,53 с.

Скорость камня в точке C

$$\upsilon_C = \sqrt{\upsilon_{Cx}^2 + \upsilon_{Cy}^2} = \sqrt{(\upsilon_B \cos\alpha)^2 + (gT + \upsilon_B \sin\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{(8\cos 60°)^2 + (9{,}81 \cdot 0{,}53 + 8\sin 60°)^2} = 12{,}8 \text{ м/с}.$$

<u>Задача 2.</u> Механическая система (рисунок 4) состоит из вертикальной плиты 1, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза 2, принимаемого за материальную точку и движущегося по имеющемуся на плите желобу, ось которого представляет собой окружность радиуса R. В момент времени t=0 груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу.

Найти в момент времени t величину нормальной реакции N направляющих на плиту, скорость плиты υ_1, перемещение плиты L, ускорение плиты a_1 при следующих исходных данных:

масса плиты 1		m_1=18 кг;
масса груза 2		m_2=6 кг;
радиус желоба		R=0,8 м;
закон изменения угла $\varphi=\angle AOD$		$\varphi=\dfrac{\pi}{6}(1-t^2)$;
время движения		t=1 с;
начальные условия:		
при t=0	скорость движения плиты	υ_0=2 м/с;
	скорость груза относительно плиты	$\upsilon_2^r=0$.

Всеми сопротивлениями пренебречь.

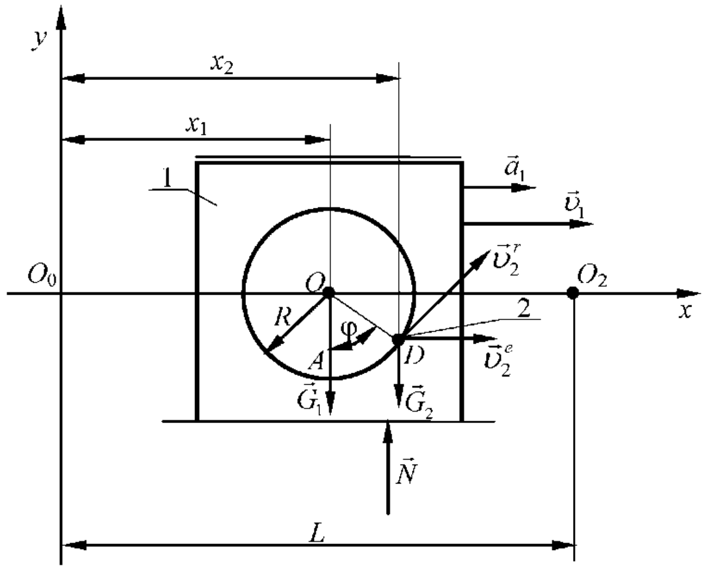

Рисунок 4

исунок 1 – Схема механической системы

<u>Решение:</u> 1. Составим расчетную схему для произвольного положения t механической системы (рисунок 4). Покажем на ней:

$\vec{G}_1$ – силу тяжести плиты, $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$;

$\vec{G}_2$ – силу тяжести груза, $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$;

x_1 – координату центра масс плиты в произвольном положении механической системы;

$\vec{\upsilon}_1$, $\vec{a}_1$ – скорость и ускорение плиты в том же положении;

$\vec{\upsilon}_2^r$, $\vec{\upsilon}_2^e$ - относительную и переносную скорости груза в том же положении;

O_0 и O_2 – начальное и конечное положения центра масс плиты.

За координатную ось O_0x примем траекторию движения центра масс плиты, выбрав за начало координат его начальное положение. Ось O_0y направим вертикально вверх.

2. Запишем теорему о движении центра масс механической системы.

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e = \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{G}_2, \tag{1}$$

где $M=m_1+m_2$ – масса механической системы.

3. Спроектируем векторное уравнение (1) на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} Ma_{CX} &= 0 \\ Ma_{CY} &= N - G_1 - G_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ M \neq 0 \\ M\frac{d^2y_C}{dt^2} &= N - G_1 - G_2 \end{aligned}\right\}.$$

4. Приведем полученные дифференциальные уравнения движения центра масс системы к наиболее простому виду

$$\ddot{x}_C = \frac{d\upsilon_{CX}}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_C = N - m_1g - m_2g = N - (m_1 + m_2)g. \tag{3}$$

5. Определим координаты центра масс системы

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M},$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{M},$$

Из рисунка 4 следует

$$x_2 = x_1 + R\sin\varphi; \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = -R\cos\varphi,$$

поэтому

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2(x_1 + R\sin\varphi)}{M} = \frac{(m_1 + m_2)x_1 + m_2R\sin\varphi}{m_1 + m_2};$$

$$y_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2(-R\cos\varphi)}{M};$$

Окончательно:

$$x_C = x_1 + \frac{m_2R}{m_1 + m_2}\sin\varphi; \tag{4}$$

$$y_C = -\frac{m_2R}{m_1 + m_2}\cos\varphi. \tag{5}$$

6. Найдем первую и вторую производные по времени от координат центра масс системы:

$$\dot{x}_C = \dot{x}_1 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi; \quad \ddot{x}_C = \ddot{x}_1 + \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\varphi}\cos\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\right), \qquad (6)$$

$$\dot{y}_C = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}\sin\varphi; \qquad \ddot{y}_C = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 \cos\varphi\right). \qquad (7)$$

7. Определим значения угла φ и его первой и второй производных по времени в начале и в конце движения:

$$\varphi = \frac{\pi}{6}\left(1 - t^2\right), \qquad \dot{\varphi} = \frac{\pi}{6}(-2t) = -\frac{\pi}{3}t; \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3};$$

при t=0 $\qquad \varphi = \frac{\pi}{6}; \qquad \dot{\varphi} = 0; \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3};$

при t=1с $\qquad \varphi = 0; \qquad \dot{\varphi} = -\frac{\pi}{3}; \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{\pi}{3}.$

8. Найдем величину N нормальной реакции направляющих на плиту. Подставив в уравнение (3) выражение для $\ddot{y}_C$ из второго равенства (7), получим

$$N = (m_1 + m_2)\ddot{y}_C + (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\frac{m_2 R}{m_1 + m_2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + (m_1 + m_2)g.$$

При t=1с

$$N = m_2 R\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + (m_1 + m_2)g =$$

$$= 6 \cdot 0{,}8\left(-\frac{\pi}{3}\sin 0^0 + \left(-\frac{\pi}{3}\right)^2\cos 0^0\right) + (18 + 6)\cdot 9{,}81 = 240{,}7H.$$

Знак плюс указывает на то, что направление реакции $\vec{N}$ на рисунке 4 показано верно.

9. Определим скорость плиты.

Из уравнения (2) получим $\frac{d\upsilon_{CX}}{dt} = 0$. Следовательно, проекция на ось O_0x скорости центра масс всей системы $\upsilon_{CX} = \text{const}$ в течение всего времени движения. Так как при $t = 0$ $\upsilon_{CX} = \dot{x}_C = \upsilon_0$, поэтому из первого уравнения системы (6) получим

$$\dot{x}_C = \dot{x}_1 + \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi = \upsilon_0.$$

Но $\dot{x}_1 = \upsilon_1$, поэтому скорость плиты

$$\upsilon_1 = \dot{x}_1 = \upsilon_0 - \frac{m_2 R}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

При $t=1$с скорость плиты

$$\upsilon_1 = 2 - \frac{6\cdot 0{,}8}{18+6}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos 0^0 = 2{,}21 \ \text{м}/\text{с}.$$

10. Найдем перемещение плиты за время движения $t=1$с.

Так как при t=0 x_1=0 (центр масс плиты в этот момент совпадает с началом координат O_0xy) и $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$, поэтому по формуле (4) найдем координату x_{C_0} центра масс системы в начале ее движения:

$$x_{C_0} = 0 + \frac{m_2R}{m_1+m_2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{m_2R}{m_1+m_2}\frac{1}{2}.$$

При t=1с x_1=L, φ=0 и x_C=x_{C_2}, поэтому, используя формулу (4), найдем

$$x_{C_2} = L + \frac{m_2R}{m_1+m_2}\sin 0° = L. \qquad (8)$$

Принимая во внимание, что проекция на ось O_0x скорости центра масс системы $\upsilon_{CX} = \upsilon_0 = \text{const}$, координату x_{C_2} можно найти так:

$$x_{C_2} = x_{C_0} + \upsilon_{Cx}t = x_{C_0} + \upsilon_0 t = \frac{m_2R}{2(m_1+m_2)} + 2\cdot 1 = \frac{m_2R}{2(m_1+m_2)} + 2. \qquad (9)$$

Приравняв левые и правые части равенств (8) и (9), получим

$$L = \frac{m_2R}{2(m_1+m_2)} + 2 = \frac{6\cdot 0{,}8}{2(18+6)} + 2 = 2{,}1\,м.$$

11. Найдем ускорение плиты.

Из второго равенства системы (6) получим, с учетом того, что $\ddot{x}_c = 0$ и $\ddot{x}_1 = a_1$,

$$0 = a_1 + \frac{m_2R}{m_1+m_2}\cdot\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

Откуда

$$a_1 = -\frac{m_2R}{m_1+m_2}\cdot\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

При $t=1$ c ($\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = -\dfrac{\pi}{3}$, $\ddot{\varphi} = -\dfrac{\pi}{3}$) найдем

$$a_1 = -\frac{6\cdot 0{,}8}{18+6}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\cos 0^0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right)^2\sin 0^0\right) = 0{,}21\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первом задании решена вторая задача динамики точки, то есть по заданным массе и силам, действующим на тело, найдены уравнения ее движения и затем, вычислены искомые параметры.

В результате расчетов во второй задаче получили следующие значения искомых характеристик движения плиты:

сила давления плиты на основание N–240,7 Н;

скорость движения плиты $\upsilon_1 = 2{,}21$ м/с;

перемещение плиты $L = 2{,}1$ м;

ускорение плиты $a_1 = 0{,}21$ м/с^2.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретическая механика. Курс лекций: // Электронное учебное пособие. – Рязань: РВАИ, 2005.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2002.

5. Иванов В.Д. Теоретическая механика. Практикум к решению задач. Часть 3. Динамика. – Рязань: РВАИ, 2005.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ЗАЩИТЫ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ И СДАЧИ ЭКЗАМЕНА

1. Основные понятия и аксиомы статики.
2. Связи. Две задачи статики.
3. Приведение систем сил к простейшему виду.
4. Условия равновесия систем сил. Трение.
5. Центр тяжести твердого тела и его координаты. Методы нахождения центра тяжести.
6. Основные понятия кинематики. Векторный способ задания движения точки. Координатный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки.
7. Поступательное движение.
8. Вращение тела вокруг неподвижной оси.
9. Плоское движение тела и движение плоской фигуры в ее плоскости.
10. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движения.
11. Ускорение Кориолиса.
12. Законы механики (аксиомы динамики) Галилея-Ньютона.
13. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
14. Две задачи динамики точки.
15. Колебания материальной точки.
16. Относительное движение материальной точки.
17. Осевые и центробежные моменты инерции.
18. Силы внешние и внутренние. Дифференциальные уравнения движения механической системы.
19. Кинетическая энергия материальной точки и системы.
20. Работа и мощность силы.
21. Принцип Даламбера для материальной точки и системы.
22. Элементарная теория удара.
23. Связи и их уравнения. Обобщенные координаты системы.
24. Принцип возможных перемещений. Понятие об устойчивости равновесия. Принцип Гамильтона-Остроградского.
25. Уравнения Лагранжа второго рода. Малые свободные колебания механической системы с двумя (или n) степенями свободы.