ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА. КОЛЕБАНИЯ
Конспект лекций

Конспект лекций является составной частью учебно-методического комплекса по механике, разработанного на кафедре физики университета, и является результатом многолетнего практического опыта чтения лекций по физике для студентов университета.

Может быть полезен как студентам, так и преподавателям университета.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука о наиболее простых и вместе с тем наиболее общих формах движения материи и их взаимных превращениях. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая, электромагнитная) присутствуют во всех высших и более сложных формах движения материи (химических, биологических).

Физика тесно связана с другими науками: астрономией, геологией, химией, биологией и другими естественными науками.

Связь физики с техникой носит двусторонний характер. Физика выросла из потребностей техники. С другой стороны, от развития физики зависит технический уровень производства. Физика – база для создания новых отраслей техники: электронной, ядерной, новых информационных и нанотехнологий.

Курс физики является фундаментальной базой для теоретической подготовки инженеров и специалистов высокой квалификации.

Механика – это часть физики, которая изучает перемещение тел или частей тела относительно друг друга, т.е. механическое движение. Законам механики подчиняются тела, находящиеся на Земле, звезды и галактики, а также атомы, молекулы и микрочастицы.

Механику тел, движущихся с малыми скоростями $V \quad c = 3\cdot 10^8$ м/с, называют классической механикой. Основы классической механики разработаны И. Ньютоном. Движение тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, изучается теорией относительности, разработанной А. Эйнштейном. Движение микроскопических тел, т.е. атомов и элементарных частиц, изучает квантовая механика.

Механика подразделяется на три раздела: кинематику, динамику, статику.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, вызывающие это движение.

Динамика изучает законы движения тел и те причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел. Законы равновесия следуют из законов движения тел, поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

Единицы физических величин

Законы физики устанавливают связь между физическими величинами, их необходимо измерять. Для измерения и сравнения физических величин вводят **систему единиц**, в основу которой выбирают единицы нескольких не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называют **основными**. Остальные величины и их единицы выводятся из законов, связывающих эти величины с основными. Они называются **производными**.

В настоящее время обязательна к применению международная система единиц – Система Интернациональная (СИ), в которой используются семь основных единиц:

1) длины – метр [м];
2) массы – килограмм [кг];
3) времени – секунда [с];
4) силы тока – Ампер [А];
5) абсолютной температуры – Кельвин [К];
6) количества вещества – моль [моль];
7) силы света – кандела [кд].

Дополнительные единицы:

1) радиан [рад] – единица измерения плоского угла;
2) Стерадиан [Ср] – единица измерения телесного угла.

ЛЕКЦИЯ 1
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1 Понятие вектора и векторной величины

В физике приходится оперировать двумя видами величин: скалярными (для определения которых надо знать только численное значение) и векторными. **Векторная величина**, в отличие от скалярной, имеет направление, что необходимо учитывать при решении задач, при рассмотрении физических явлений. Математические операции над векторными величинами выполняются по определенным правилам.

Векторная величина полностью определена, если известны направление вектора и его модуль – абсолютное значение.

Графически **вектор** изображается отрезком прямой со стрелкой на конце (рис. 1.1), может быть показан в масштабе; рядом проставляется буквенное обозначение $\vec{A}$, точка (О) – начало вектора. В отличие от скаляра, в тексте векторная величина обозначается жирным шрифтом или со стрелкой. $|\vec{A}|$ – абсолютное значение вектора (иногда обозначается просто A).

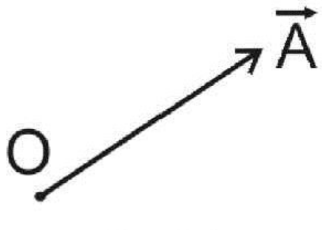


Рис. 1.1

Формально запись, например, операции сложения скаляров не отличается от такой же записи для векторов $a+b=c_1$ и $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}_2$, но здесь $c_1 \neq |\vec{c}_2|$ – результат может быть иной. По модулю можно складывать (вычитать) только векторы, направленные по одной прямой.

1.2 Умножение вектора на скаляр

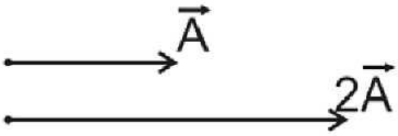


Рис. 1.2

Умножение вектора $\vec{A}$ на положительный скаляр n дает вектор того же направления, но больший в n раз. В случае $n = 2$ (рис. 1.2)

$$\vec{A} \cdot n = 2\vec{A}. \qquad (1.1)$$

Умножение на отрицательный скаляр $-n$ дает вектор противоположного направления в n раз больший.

Векторы, направленные вдоль параллельных прямых, называются **коллинеарными**. Векторы, которые лежат в параллельных плоскостях, – **компланарные**.

1.3 Сложение векторов

В результате выполнения операции сложения векторов необходимо несколько векторов произвольного направления заменить одним вектором, эквивалентным всем суммируемым:

$$\vec{A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}. \qquad (1.2)$$

Необходимо пристроить в любом порядке последовательно один вектор к другому. Результирующий вектор $\vec{A}$ будет направлен от начала первого к концу последнего (рис. 1.3).

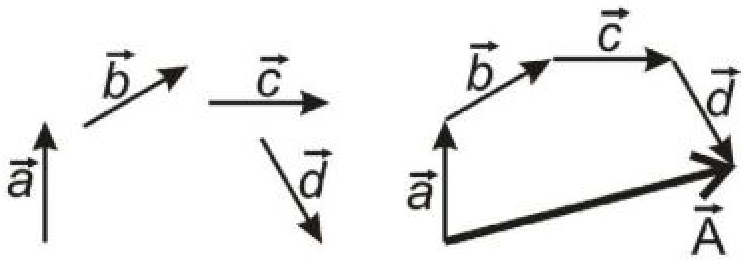


Рис. 1.3

1.4 Вычитание векторов

Вычитание векторов – это действие, обратное сложению (рис. 1.4). Вычитание векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ можно выполнять тремя способами:

1. Надо совместить начала векторов, вектор разности будет начинаться с конца одного вектора $\vec{b}$ и заканчиваться на конце уменьшаемого вектора $\vec{a}$.

2. Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ надо к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор ($-\vec{b}$).

3. Для сложения и вычитания двух векторов можно использовать метод параллелограмма (рис. 1.5).

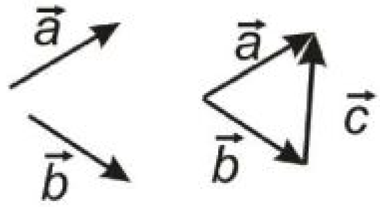


Рис. 1.4

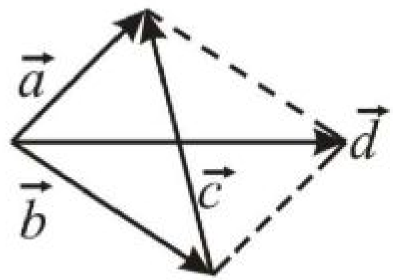


Рис. 1.5

Если построить из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм, то одна диагональ равна сумме – вектор $\vec{d}$, а другая – их разности – вектор $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b};$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

1.5 Произведение векторов

Существует скалярное и векторное произведения.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинусе угла α между ними (рис. 1.6):

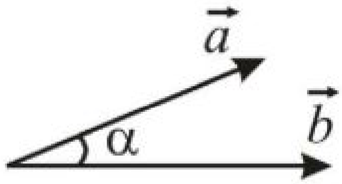


Рис. 1.6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha. \tag{1.3}$$

При $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ произведение положительно (угол острый), при $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$ произведение отрицательно (угол тупой).

Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно 0. Выражение (1.3) можно записать через проекции перемножаемых векторов на соответствующие оси координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.4}$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый формулой

$$\vec{c} = a \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \vec{n}, \tag{1.5}$$

где a и b – модули соответствующих векторов; α – угол между ними; $\vec{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости векторов.

Направление $\vec{n}$ выбирают так, чтобы последовательность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{n}$ образовывала правовинтовую систему: если смотреть вслед $\vec{n}$, то поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ должен происходить по кратчайшему пути по часовой стрелке (рис. 1.7).

Символически векторное произведение записывается как

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right], \text{или} \, \vec{a}\times\vec{b}\,; \tag{1.6}$$

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{b}\right] = a\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\vec{n}\,. \tag{1.7}$$

Геометрический смысл: модуль векторного произведения $a\cdot b\cdot\sin\alpha$ равен площади параллелограмма (рис. 1.8).

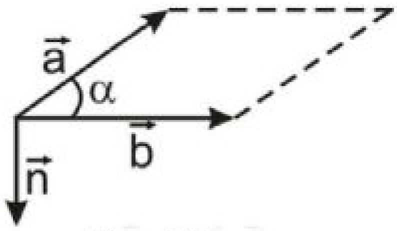


Рис. 1.7

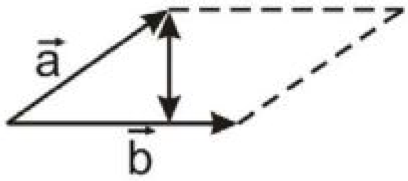


Рис. 1.8

Существует еще смешанное произведение $\vec{a}\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]$ и двойное векторное произведение $\vec{d} = \left[\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\cdot\vec{c}\right]\right]$.

1.6 Проекция вектора на оси координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат. В ней пользуются единичными векторами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ или $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которые называются **ортами**. Эти три вектора полностью определяют систему координат и называются **базисом координатной системы**. Рассмотрим вектор на плоскости *xy* (рис. 1.9).

На рисунке 1.9 a_x, a_y – проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат. Проекция вектора есть величина алгебраическая. Если вектор образует с направлением оси острый угол (α < 90°), то проекция положительна, если α > 90°, то проекция отрицательна.

$$\begin{cases} a_x = a\cdot\cos\alpha, \\ a_y = a\cdot\sin\alpha, \end{cases} \tag{1.8}$$

причем

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{1.9}$$

Вектор $\vec{a}$ можно представить через орты:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y, \ \ \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\ . \tag{1.10}$$

В общем случае для трех координат

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z, \tag{1.11}$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ . \tag{1.12}$$

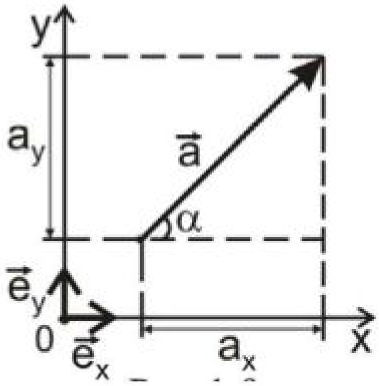


Рис. 1.9

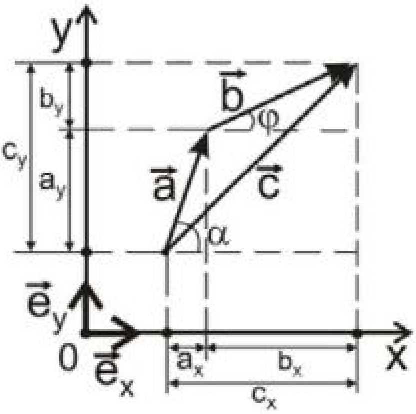


Рис. 1.10

Рассмотрим векторное равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости. Построим эти векторы и найдем их проекции (рис. 1.10).

Можно записать очевидное равенство:

$$\begin{cases} a_x + b_x = c_x, \\ a_y + b_y = c_y, \end{cases} \tag{1.13}$$

или

$$\begin{aligned} &c_x = a\cos\alpha + b\cos\varphi; \\ &c_y = a\sin\alpha + b\sin\varphi; \\ &c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Таким образом, по проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ легко можно найти проекции вектора $\vec{c}$ и его модуль.

ЛЕКЦИЯ 2
КИНЕМАТИКА

2.1 Системы отсчета

Система отсчета – это система координат, жестко связанная с абсолютно твердым телом, по отношению к которому определяется положение других тел, и снабженная часами.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми точками которого всегда остается неизменным.

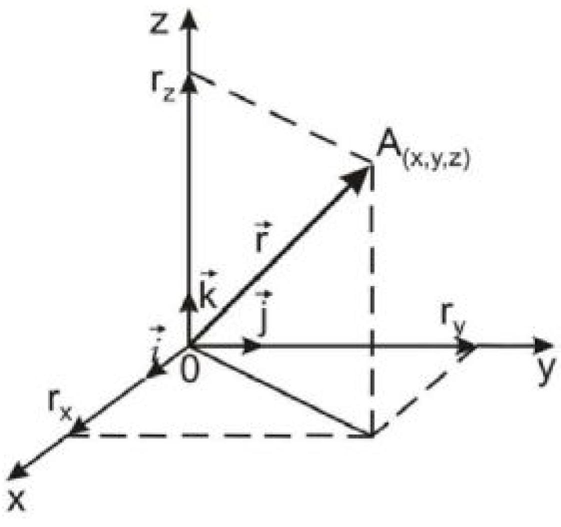


Рис. 2.1

Материальная точка – это тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче.

Наиболее часто используется прямоугольная система координат Декарта, показанная на рисунке 2.1. Положение точки A в этой системе координат можно задать, либо указав координаты точки – x, y, z, либо указав значение радиус-вектора $\vec{r}$.

Радиус-вектор – это вектор, проведенный из начала координат в данную точку пространства. При изменении положения точки A изменяются ее координаты, а также значение и направление радиус-вектора $\vec{r}$. Значения проекций радиус-вектора на оси координат можно представить как

$$\begin{aligned} r_x &= r \cdot \cos\alpha = x; \\ r_y &= r \cdot \cos\beta = y; \\ r_z &= r \cdot \cos\gamma = z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где α, β, γ – углы между $\vec{r}$ и соответствующими осями.

Для задания движения точки A в пространстве можно записать зависимость каждой координаты от времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Эти уравнения можно заменить одним: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

2.2 Путь и перемещение

Траекторией движения точки называется линия, описываемая этой точкой при ее движении относительно выбранной системы отсчета. В зависимости от траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Пусть точка движется по криволинейной траектории (рис. 2.2) из точки A в точку B. Длина пути S – это расстояние, пройденное точкой за данный промежуток времени, т.е. длина участка кривой AB. Вектор $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения точки в конечное, называется **перемещением**.

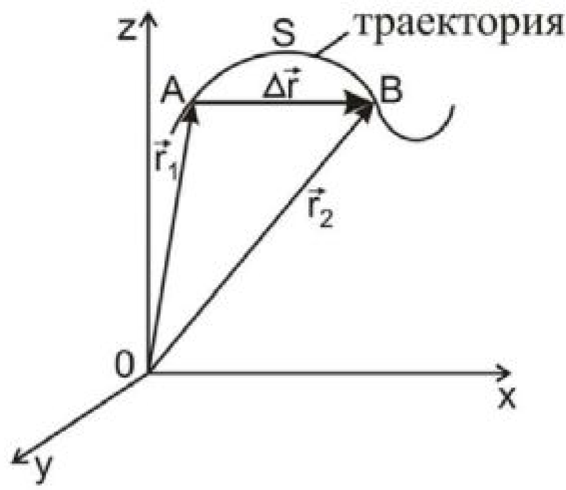


Рис. 2.2

При прямолинейном движении без изменения направления движения модуль вектора перемещения равен длине пути: $\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = S$, а в остальных случаях $\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| \neq S$.

2.3 Скорость

Изменение положения движущейся в пространстве материальной точки характеризуют: векторная величина – перемещение $\overrightarrow{\Delta r}$ и скалярная величина – путь S.

Пространственно-временной характеристикой движения является скорость. **Скорость** – векторная физическая величина, характеризующая быстроту движения тел.

Средняя путевая **скорость** при одномерном движении равна отношению пути ΔS к промежутку времени Δt, затраченному на его прохождение:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Единица измерения скорости – м/с. Часто используют и другие единицы, например, км/ч: $1\,\frac{\text{км}}{\text{час}} = \frac{1}{3{,}6}\frac{\text{м}}{\text{с}}$. В общем случае, когда изменяются все три координаты, средняя скорость определяется отношением перемещения $\overrightarrow{\Delta r}$ к интервалу времени Δt:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}. \tag{2.3}$$

Направление вектора средней скорости $\vec{V}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением перемещения $\overrightarrow{\Delta r}$.

Мгновенная скорость равна производной радиус-вектора по времени:

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}. \tag{2.4}$$

В общем случае $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{z}$. Проекции вектора скорости на оси координат (рис. 2.3) находятся как

$$V_x = \frac{dx}{dt};\, V_y = \frac{dy}{dt};\, V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль вектора скорости может быть найден из выражения

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}.$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения (рис. 2.4).

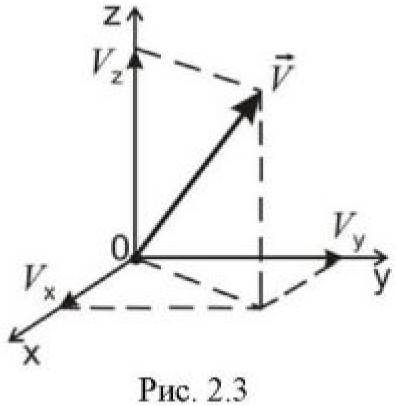


Рис. 2.3

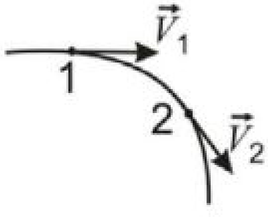


Рис. 2.4

2.4 Ускорение

Ускорением называется физическая величина $\vec{a}$, которая характеризует быстроту изменения скорости при неравномерном движении. **Среднее ускорение** равно отношению приращения скорости к интервалу времени, за который оно произошло:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} \quad \left[\text{м/с}^2\right]. \tag{2.5}$$

Мгновенное ускорение равно первой производной от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{2.6}$$

Так как $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. В трехмерном пространстве ускорение может быть представлено в виде

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси координат (рис. 2.5).

При **криволинейном движении** ускорение может иметь две составляющие: $\vec{a}_\tau$ – тангенциальное ускорение и $\vec{a}_n$ – нормальное (центростремительное) ускорение:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

При движении по криволинейной траектории (рис. 2.6) полное ускорение равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений. Модуль полного ускорения находится по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{2.7}$$

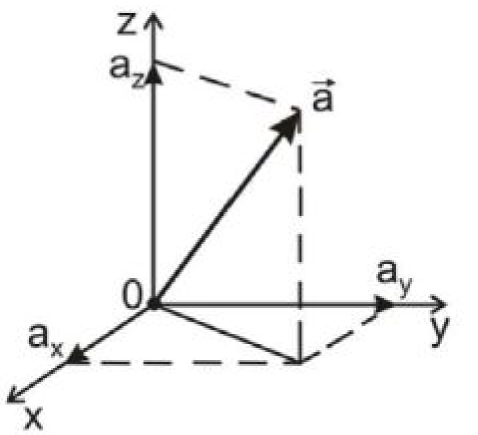


Рис. 2.5

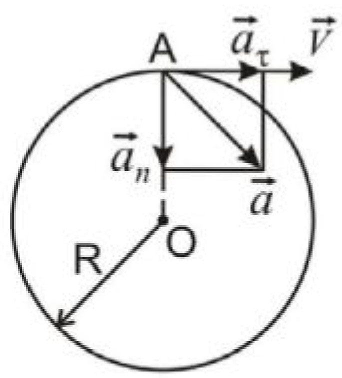


Рис. 2.6

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю или значению, направлено по касательной к траектории (рис. 1.6) и определяется выражением

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}. \qquad (2.8)$$

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению, направлено к центру кривизны траектории (рис. 2.6) и определяется выражением

$$a_n = \frac{V^2}{R}, \qquad (2.9)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке; V – значение скорости тела в этой точке.

1. При прямолинейном движении $a_n = 0$, следовательно, $a = a_\tau$.

2. При равномерном движении тела по окружности $\vec{a}_\tau = 0$, следовательно, $a = a_n$.

2.5 Уравнение пути прямолинейного движения

Если точка движется прямолинейно с постоянным ускорением вдоль одной оси координат, то зависимость скорости и пути от времени описывается следующими уравнениями (таблица 1).

Таблица 1

Равномерное движение	Ускоренное движение	Равнозамедленное движение
$a = 0$	$a = \text{const}$	$a = \text{const}$
$\begin{cases} V = \text{const} \\ x = x_0 + V \cdot t \end{cases}$	$\begin{cases} V = V_0 + at \\ x = V_0 t + \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} V = V_0 - at \\ x = V_0 t - \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$
	$2ax = V^2 - V_0^2$	$2ax = V_0^2 - V^2$

В таблице 1 V_0 – начальная скорость движения в момент t = 0, x_0 – начальная координата тела. Часто вместо x и x_0 записывают S и S_0.

2.6 Кинематика вращательного движения

В случае движения тела по окружности по аналогии с линейной скоростью и ускорением вводятся угловая скорость и угловое ускорение.

Пусть тело движется по окружности радиуса R из точки 1 в точку 2 (рис. 2.7). Положение тела через время Δt задается углом поворота $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ [рад]. Средняя угловая скорость $\vec{\omega}$ (омега) равна приращению угла поворота в единицу времени:

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \quad \left[\text{рад/с}\right]. \tag{2.10}$$

Мгновенная угловая скорость равна производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \tag{2.11}$$

здесь $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, направлен вдоль оси вращения, определяется правилом правого винта.

Направление вектора $\vec{\omega}$ задается правилом правого винта: вектор угловой скорости совпадает по направлению с поступательным движением острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности (рис. 2.8).

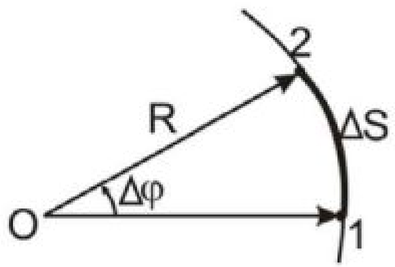


Рис. 2.7

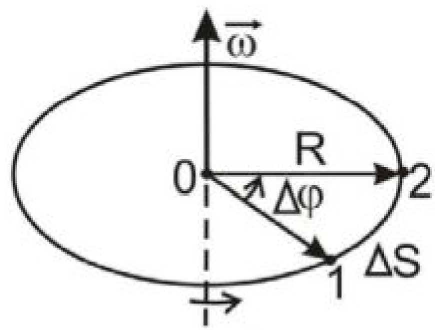


Рис. 2.8

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ (эпсилон) характеризует среднюю быстроту изменения угловой скорости и равно:

$$\vec{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \quad \left[\text{рад/с}^2\right]. \tag{2.12}$$

Мгновенное угловое ускорение:

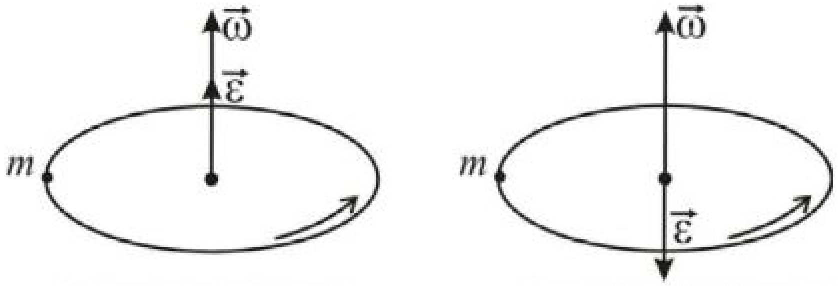
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{2.13}$$

Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и угловая скорость $\vec{\omega}_0$ при равноускоренном вращении и в противоположную сторону при равнозамедленном вращении (рис. 2.9).

Зависимость угла поворота φ и угловой скорости ω от времени приведены в таблице 2.

Таблица 2

Равномерное вращение	Равноускоренное вращение	Равнозамедленное вращение	
$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$	$\varphi = 2\pi N$
$\begin{cases} \omega = \text{const} \\ \varphi = \omega t \end{cases}$	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \varepsilon t \\ S = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$	$\omega = 2\pi\nu$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$



равноускоренное вращение   равнозамедленное вращение

Рис. 2.9

2.7 Связь линейных и угловых характеристик движения тела по окружности

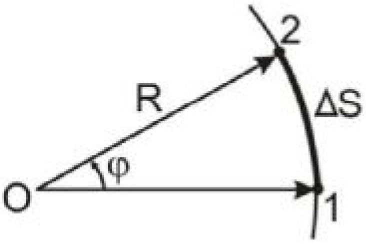


Рис. 2.10

Если ΔS мало (рис. 2.10), то $\Delta S = R \cdot \sin\Delta\varphi$ или $\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$. Разделим обе части равенства на Δt: $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = R\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, $\Rightarrow$ откуда

$$V = R \cdot \omega. \qquad (2.14)$$

Тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \qquad (2.15)$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (2.16)$$

Полное ускорение материальной точки, движущейся по окружности:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (\omega^2 R)}. \qquad (2.17)$$

1. **Период вращения *T*** – это время, за которое точка совершает один оборот:

$$T = \frac{t}{N}. \tag{2.18}$$

2. **Частота вращения *n*** – число оборотов, совершаемых телом в единицу времени, N – число оборотов:

$$n = \frac{N}{t} \; [1/\text{с; об/с}]. \tag{2.19}$$

ЛЕКЦИЯ 3
ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1 Сила
3.2 Законы Ньютона
3.3 Импульс тела и системы тел. Закон сохранения импульса

3.1 Сила

Сила ($\vec{F}$) – это векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия одного тела на другое. Единица измерения – Ньютон [Н].

Если на тело действуют несколько сил, то их действие можно заменить одной равнодействующей силой $\vec{F}$, равной их геометрической сумме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad (3.1)$$

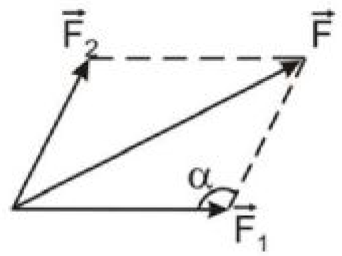


Рис. 3.1

Для двух сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, т.е. силы складываются по правилу параллелограмма (рис. 3.1), а модуль силы F находится по теореме косинусов:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha . \qquad (3.2)$$

Масса тела (m) [кг] – скалярная физическая величина, характеризующая инерционные и гравитационные свойства тел.

3.2 Законы Ньютона

I закон Ньютона: тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Или: если сумма действующих на тело сил равна нулю, то тело движется равномерно и прямолинейно или находится в покое.

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения называют **инертностью**, поэтому I закон Ньютона называют **законом инерции**. Системы отсчета, в которых выполняется I закон Ньютона, называют **инерциальными**. Инерциальные системы движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, в которых не выполняется I закон Ньютона, называются **неинерциальными**. Неинерциальными будут системы, движущиеся с ускорением, или вращающиеся.

II закон Ньютона: ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально сумме действующих на него сил и обратно пропорционально массе этого тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{3.3}$$

Этот закон является основным законом динамики поступательного движения и справедлив только в инерциальных системах отсчета.

Уравнение основного закона можно записать в виде:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ или в проекциях на оси системы координат:

$$\begin{cases} F_x = ma_x, \\ F_y = ma_y. \end{cases} \tag{3.4}$$

III закон Ньютона: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти тела:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \text{ и } \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|. \tag{3.5}$$

Эти силы приложены к разным телам, всегда действуют парами и являются силами одной природы (рис. 3.2):

$\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первое тело со стороны второго;

$\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого.

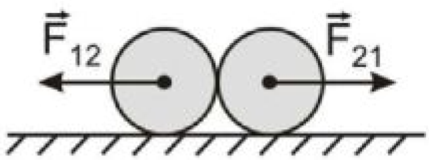


Рис. 3.2

3.3 Импульс тела и системы тел. Закон сохранения импульса

Импульс тела – векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{V} \;\left[(\text{кг}\cdot\text{м})/\text{с}\right]. \tag{3.6}$$

Импульс (количество движения) – одна из самых фундаментальных характеристик движения тела или системы тел.

Запишем II закон Ньютона в другой форме, учитывая, что ускорение $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$. Тогда $\vec{F} = \dfrac{md\vec{V}}{dt}$; $\vec{F} \cdot dt = d(m\vec{V})$, следовательно

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p}. \tag{3.7}$$

Произведение силы на время ее действия равно приращению импульса тела (рис. 3.3):

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \tag{3.8}$$

где $\vec{F} \cdot \Delta t$ – импульс силы, который показывает, что результат действия силы зависит не только от ее значения, но и от продолжительности ее действия.

Механической системой называют совокупность материальных тел, рассматриваемых как единое целое. Силы взаимодействия между телами, входящими в систему, называют **внутренними силами**. Силы, действующие на тела системы, со стороны тел, не входящих в эту систему, называют **внешними силами**.

Механическая система, на которую не действуют внешние силы или их действие скомпенсировано, называют *замкнутой системой тел.*

Импульсом системы тел ($\vec{p}_\text{c}$) называют векторную сумму импульсов всех тел системы:

$$\vec{p}_\text{c} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots$$

$$\vec{p}_\text{c} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i, \tag{3.9}$$

где n – число тел, входящих в систему. Для системы, состоящей из двух тел, импульс равен

$$\vec{p}_\text{c} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \tag{3.10}$$

Для системы тел (рис. 3.4) II закон Ньютона можно записать в виде

$$\vec{F}_\text{внеш} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}_\text{c}, \tag{3.11}$$

где $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ – внутренние силы; $\vec{N}_1$, $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_2$, $m_2\vec{g}$ – внешние силы.

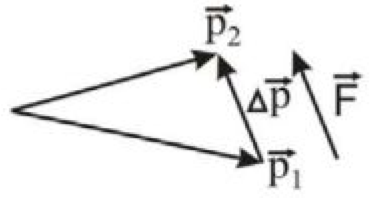


Рис. 3.3

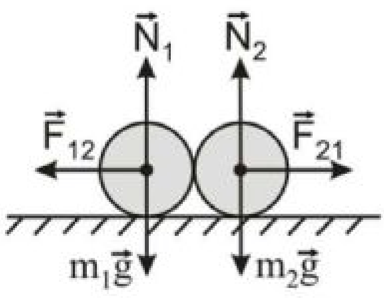


Рис. 3.4

Если система замкнута, т.е. $\vec{F}_\text{внеш} = 0$, то изменение импульса такой системы тоже равно нулю или $\vec{p}_\text{c} = \text{const}$.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным при любых взаимодействиях тел этой системы.

Если система незамкнута, но проекция внешних сил на некоторое направление равна нулю, то проекция импульса системы тел на это направление остается постоянной. Так как

$$F_x \cdot \Delta t = \Delta p_x, \text{ то при } F_x = 0,\ p_x = \text{const}. \qquad (3.12)$$

Примеры:

1. **Упругое взаимодействие тел**. На рисунке 3.5 показано упругое столкновение двух шаров: а) состояние до взаимодействия; б) после взаимодействия.

До взаимодействия импульс системы тел:

$$\vec{p}_c = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2.$$

После взаимодействия импульс системы тел $\vec{p}_c = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$.

Закон сохранения импульса системы тел:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

Или в проекции на ось x: $(m_1V_1 - m_2V_2) : (m_1u_1 + m_2u_2)$, где V_1, V_2 – скорости тел до взаимодействия; u_1, u_2 – скорости тел после взаимодействия.

2. **Неупругое взаимодействие тел**. На рисунке 3.6 иллюстрируется неупругое столкновение двух шаров (пластилиновых): а) состояние до взаимодействия; б) после взаимодействия.

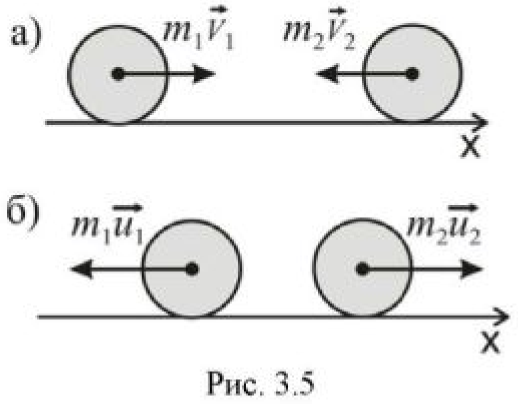


Рис. 3.5

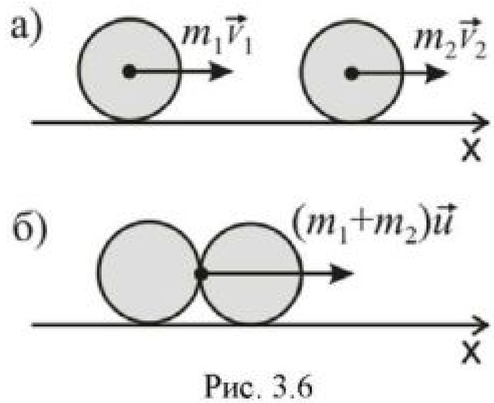


Рис. 3.6

Импульс системы тел до взаимодействия:

$$\vec{p}_c = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2.$$

Импульс системы тел после взаимодействия:

$$\vec{p}_c = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Закон сохранения импульса системы тел: $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$.

Или в проекции на ось x: $m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)u$, где V_1, V_2 – скорость тел до взаимодействия; u – скорость тел после взаимодействия; m_1, m_2 – массы взаимодействующих тел.

ЛЕКЦИЯ 4
РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

4.1 Понятие работы и энергии

Мерой поступательного движения является импульс тела, но эта характеристика не универсальная. Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является **энергия**. Формы энергии: механическая, тепловая, электрическая, ядерная, внутренняя и др. Энергия из одной формы может переходить в другую. **Энергия механической системы** количественно характеризует ее с точки зрения возможных количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы между собой и с внешними телами. Таким образом, движение и энергия неразрывно связаны между собой, а т.к. движение является неотъемлемой частью материи, то всякое тело обладает какой-либо энергией.

Рассмотрим механическую энергию.

В процессе взаимодействия тел происходит изменение механического движения и энергии тела. Для количественной характеристики этого процесса вводят понятие **работы, совершаемой силой**.

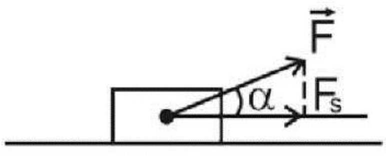


Рис. 4.1

Если тело движется прямолинейно и на него действует сила $\vec{F}$, составляющая угол α с направлением перемещения (рис. 4.1), то работа, совершаемая этой силой, равна:

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha = F_S \cdot S, \qquad (4.1)$$

где F_S – проекция силы $\vec{F}$ на направление движения; α – угол между направлением перемещения и направлением действия силы.

Работа равна нулю в двух случаях:

1) если точка не движется, то $S = 0$ и $A = 0$;
2) если $\alpha = 90°$, т.е. $\bar{F} \perp \bar{V}$, то $A = 0$.

В общем случае при перемещении в пространстве элементарная работа равна:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ – бесконечно малое приращение вектора перемещения.

Как известно, сила может изменяться по модулю и направлению, а тело может двигаться произвольным образом и формулой (4.1) нельзя воспользоваться. В этом случае необходимо путь разбить на малые (элементарные) участки (dS_i), в пределах которых движение можно считать прямолинейным, а силу – постоянной. Тогда элементарная работа определится так:

$$dA = F_i \cdot dS_i \cdot \cos\alpha_i.$$

На рисунке 4.2 приведена зависимость проекции силы F_S от пути S. Полная работа на всем пути OC найдется как

$$A = \int_o^c F_{si} \cdot dS. \tag{4.2}$$

Для вычисления интеграла нужно знать зависимость $F_S = f(S)$. Графически площадь под всей кривой и будет искомой работой.

Если тело движется прямолинейно и F = const, то получим известное выражение (4.1):

$$A = F\int_O^C dS \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\alpha \int_O^C dS = F \cdot S \cdot \cos\alpha,$$

где $S = OC$ – путь, пройденный телом (рис. 4.3).

Единица работы – Джоуль [Дж]: 1 Дж = 1 Н·м.

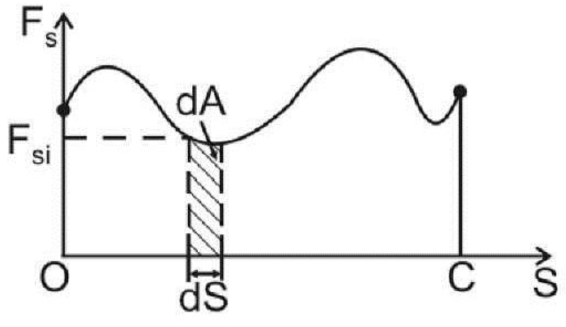


Рис. 4.2

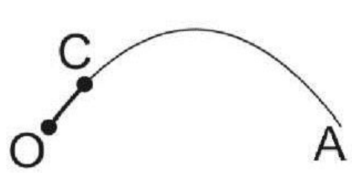


Рис. 4.3

Положительную силу F ($\alpha > 90°$) называют **движущей**, а отрицательную ($\alpha > 90°$) – **силой сопротивления**.

4.2 Консервативные силы

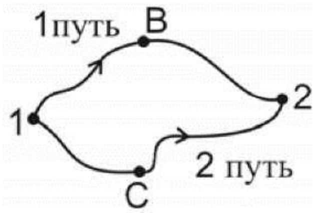


Рис. 4.4

Силы, действующие на тело, могут быть консервативными и неконсервативными. Сила называется **консервативной** или **потенциальной**, если работа, совершаемая этой силой при перемещении материальной точки из одного положения в другое, **не зависит** от вида траектории (формы пути) (рис. 4.4):

$$A_{1B2} = A_{1C2} = A_{12}.$$

В случае, если тело движется в обратном направлении $A_{12} = -A_{21}$, т.е. изменение направления движения по траектории на противоположное вызывает изменение знака работы. Следовательно, при движении материальной точки по замкнутой траектории работа консервативной силы равна нулю (например, поднятие и опускание груза):

$$\oint_L F_l \cdot dl = A_{1B2} + A_{2C1} = 0. \quad (4.3)$$

Консервативными силами являются силы гравитационного взаимодействия, силы упругости, электростатические силы. Силы, не удовлетворяющие условию (4.3), называются **неконсервативными**. К неконсервативным силам относят силы трения и сопротивления. Поле, в котором действуют консервативные силы, называется потенциальным.

4.3 Мощность

Мощность N – это физическая величина, численно равная работе, совершаемой за единицу времени:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \text{ [Дж/с] = [Вт]},$$

где N – средняя мощность.

Если тело движется с постоянной скоростью под действием силы F, то можно записать:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{F_S \cdot \Delta S}{\Delta t} = F_S V. \quad (4.4)$$

В случае **переменной мощности**, когда за малые промежутки времени совершается неодинаковая работа, вводится понятие **мгновенной мощности**: $N = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}$.

4.4 Энергия

Кинетической энергией тела называют энергию, являющуюся мерой его механического движения и определяемую работой, которую надо совершить, чтобы вызвать это движение.

Если под действием силы $\vec{F}$ тело из состояния покоя приходит в движение со скоростью $\vec{V}$, то будет совершаться работа, и энергия тела возрастает на величину затраченной работы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где $d\vec{r}$ – перемещение; dA – элементарная работа.

С учетом скалярной записи второго закона Ньютона:

$$F = ma = m\frac{dV}{dt},$$

получим

$$dA = mV \cdot dV.$$

А так как совершаемая работа равна приращению энергии, то

$$dA = dW_{\text{К}} = mV \cdot dV.$$

Полная энергия находится путем интегрирования, при изменении скорости от 0 до некоторого значения V:

$$W_{\text{К}} = \int_0^V mV \cdot dV = \frac{mV^2}{2}.$$

Кинетическая энергия всегда положительна. Кинетическая энергия системы материальных точек равна алгебраической сумме кинетических энергий всех материальных точек системы.

Кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, т.к. в различных инерциальных системах отсчета скорость неодинакова.

Потенциальная энергия – часть общей механической энергии системы, определяемая взаимным расположением тел, действующих друг на друга.

Если работа зависит от траектории, то силы называются **диссипативными** (сила трения).

Если тело находится в потенциальном поле сил, то оно будет обладать потенциальной энергией. Потенциальную энергию тела, связанного с нулевым уровнем системы отсчета, принимают нулевой, а энергию других положений отсчитывают относительно нулевого уровня.

Потенциальная энергия определяется работой, которую надо совершить силе, чтобы переместить тело из начального состояния, где $W_{\text{П}} = 0$, в некоторое положение, где $W_{\text{П}} \neq 0$.

Элементарная работа потенциальных сил при малом перемещении $d\vec{r}$ совершается за счет убыли энергии.

Значение потенциальной энергии зависит от характера силового поля. Например, для гравитационного поля Земли (при $h \ll R_З$)

$$W_П = mgh, \tag{4.5}$$

это энергия тела, поднятого над Землей на высоту h.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то $W_П$ может в общем случае принимать и отрицательные значения (например, $W_П$ на дне шахты).

Пример. Рассмотрим свободное падение камня массой m, брошенного в поле гравитации Земли из точки 1 в точку 2 (рис. 4.5).

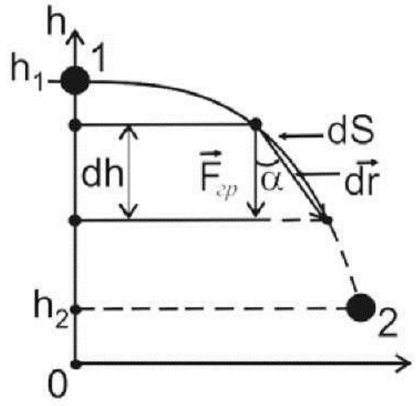


Рис. 4.5

Элементарная работа, совершаемая силой тяжести при перемещении камня, равна:

$$dA = \vec{F}_{гр} \cdot \overrightarrow{dr} = F_{гр}\,\underbrace{dS \cdot \cos\alpha}_{dh} = F_{гр} \cdot dh.$$

Полная работа на участке 1–2 находится как

$$A = \int_1^2 dA = \int_{h_1}^{h_2} F_{гр} \cdot dh = F_{гр} \cdot (h_2 - h_1),$$

где $F_{гр} = mg$ – сила тяжести; тогда получаем:

$$A = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1) = -mg\Delta h. \tag{4.6}$$

Из последнего выражения видно, что работа определяется только положением начальной и конечной точек траектории тела.

В общем случае потенциальной энергией механической системы называется величина, равная работе, которую совершают все действующие на систему потенциальные силы при переводе системы из данного состояния в состояние, соответствующее ее нулевому состоянию.

Пусть на материальную точку действует потенциальная сила $\vec{F}$. Элементарная работа, совершаемая этой силой, будет равна

$$dA = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -dW_П, \tag{4.7}$$

откуда

$$\vec{F} = -\frac{dW_П}{dr}.$$

Если $\vec{F}$ и $W_П$ – функции трех переменных x, y и z, то выражение (4.7) можно записать как

$$\vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz = -\left[\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x}dx + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y}dy + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}dz\right],$$

где dx, dy, dz – элементарное приращение каждой координаты.

Из последнего выражения следует, что если функция трех переменных (x, y, z), то можно записать следующие равенства:

$$F_x = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z};$$

$$\vec{F} = -\left[\underbrace{\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}\vec{k}}_{grad W_{\Pi}}\right]. \quad (4.8)$$

Вектор, стоящий в уравнении (4.8), называется градиентом функции W_{Π}, обозначается – $grad\, W_{\Pi}$.

Последнее уравнение читается так: сила, действующая на материальную точку в потенциальном поле, равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\vec{F} = grad\, W_{\Pi} \text{ и } \vec{F} = -\nabla W_{\Pi};$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \text{ – оператор Набла.}$$

Работа A_{12}, совершаемая потенциальными силами при изменении конфигурации системы, т.е. расположения отдельных ее частей относительно системы отсчета, не зависит от того, как происходит этот процесс, имеет значение только начальное и конечное положение системы. Тогда можно говорить о некоторой скалярной функции W_{Π}, определяющей положение данной системы:

$$A_{1-2} = W_{\Pi}(1) - W_{\Pi}(2),$$

$dA = -dW_{\Pi}$ – это элементарная работа потенциальных сил при малом изменении конфигурации системы или ее перемещении.

П р и м е р. Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела (пружины). Известно, что сила упругости пропорциональна деформации x:

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где k – коэффициент упругости; x – значение деформации; знак (–) указывает, что $F_{\text{упр}}$ направлена в сторону, противоположную деформации.

Для преодоления силы упругости необходимо приложить силу:

$$F = -F_{\text{упр}} = kx\,.$$

Элементарная работа – работа, совершаемая при бесконечно малой деформации:

$$dA = Fdx = kx \cdot dx.$$

Полная работа найдется как

$$A = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}.$$

Работа в данном примере идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Если при x – 0 $W_{оп}$ – 0, то c – 0. Потенциальная энергия упругодеформированного тела равна

$$W_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная механическая энергия системы равна энергии механического движения и энергия взаимодействия:

$$W_{\text{пол}} = W_{\text{К}} + W_{\text{П}}\,. \qquad (4.9)$$

4.5 Закон сохранения механической энергии

Это один из фундаментальных законов природы. Он подтверждает положение материализма о том, что движение является неотъемлемой частью материи, что оно неуничтожимо, а лишь преобразуется из одной формы в другую.

В замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела к другому, но ее общее количество остается неизменным.

Рассмотрим замкнутую систему из n точек с массами m_1, m_2, m_3, ... m_n, движущихся со скоростями $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, ..., $\vec{V}_n$. Пусть F_i^{I} и F_i^{I} равнодействующие внутренних консервативных сил и внешних, соответственно действующих на каждую точку. При v □ c массы всех точек неизменны (m – const). Запишем для этих точек второй закон Ньютона:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^{\text{I}} + \vec{F}_1\;;$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_2\;; \qquad (4.10)$$

……………………

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^{\text{I}} + \vec{F}_n^{\text{II}}.$$

Пусть все точки за некоторый интервал времени совершают перемещения dx_1, ..., dx_n.

Умножим обе части каждого уравнения на соответствующее перемещение dx_i:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} dx_1 = (\vec{F}_1 \ + \vec{F}_1^{\,||}) dx_1;$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} dx_2 = (\vec{F}_2 \ + \vec{F}_2^{\,||}) dx_2; \tag{4.11}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} dx_n = (\vec{F}_n \ + \vec{F}_n^{\,||}) dx_n.$$

И учитывая, что $dx_i = \overrightarrow{V_i} \cdot dt$, получим

$$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}_1^{\,|} + \vec{F}_1^{\,||}) dx_1 = 0;$$

$$m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}_2^{\,|} + \vec{F}_2 \ ) dx_2 = 0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}_n^{\,|} + \vec{F}_n \ ) dx_n = 0.$$

Сложим эти уравнения и, учитывая, что система замкнута, т.е. для внешних сил справедливо равенство

$$\vec{F}_1^{\,||} + \vec{F}_2^{\,||} + \ldots \vec{F}_n^{\,|} = 0,$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i dv_i - \sum_{i=1}^{n} F_i^{|} dx_i = 0, \tag{4.12}$$

где $\sum_{i=1}^{n} m_i v_i dv_i = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dW_{\text{К}}$ – бесконечно малое приращение кинетической энергии; $-\sum_{i=1}^{n} F_i dx_i = dA$ – бесконечно малая работа всех действующих консервативных сил с обратным знаком, численно равна изменению потенциальной энергии ($-dA = dW_{\text{П}}$).

Тогда уравнение (4.11) примет вид

$$dW_{\text{К}} + dW_{\text{П}} = 0. \tag{4.13}$$

Это уравнение показывает, что изменение механической энергии системы равно нулю.

Следовательно, полная механическая энергия замкнутой системы будет постоянной:

$$W_{К} + W_{П} = \text{const}. \tag{4.14}$$

Это закон сохранения механической энергии для замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы. В замкнутой системе тел, силы взаимодействия в которой консервативные, взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Такие системы называются **замкнутыми консервативными системами**.

4.6 Абсолютно упругие и неупругие удары

Удар – это взаимодействие двух или нескольких тел, которое продолжается малое время. Тела во время удара претерпевают деформацию. Возникают внутренние силы, значительно превышающие все внешние силы, которыми можно в этом случае пренебречь, поэтому соударяющиеся тела можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения энергии и импульса. Кроме того, эта система консервативна, т.е. внутренние силы консервативны, а внешние силы стационарны и консервативны. *Полная энергия консервативной системы не изменяется со временем.*

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого во взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладают тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию:

$$W_{\text{мех}} = \text{const},\; W_{\text{К до удара}} = W_{\text{К после удара}}.$$

В этом случае не происходит превращения механической энергии системы этих тел в другие виды. Рассмотрим столкновение двух шаров, когда малый шар (m_1) догоняет большой (m_2) (рис. 4.6).

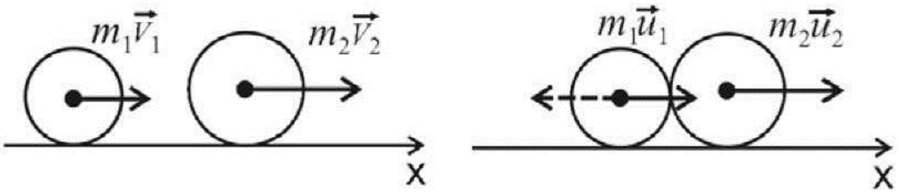


Рис. 4.6

Считаем удар центральным, т.е. тела движутся вдоль прямой, соединяющей центры малых шаров. Должен выполняться закон сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\begin{cases} m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ \dfrac{m_1V_1^2}{2} + \dfrac{m_2V_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}. \end{cases}$$

Совместное решение уравнений позволяет выразить скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)V_1 + 2m_2V_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.15}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)V_2 + 2m_1V_1}{m_1 + m_2}, \tag{4.16}$$

здесь V_1, V_2, u_1 и u_2 – проекции скоростей на ось x.

Рассмотрим два частных случая.

I. $V_2 = 0$, тогда выражения (4.15) и (4.16) примут вид

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1; \tag{4.17}$$

а) при $m_1 - m_2$ и $V_2 = V_1$ $u_1 = 0$, т.е. первый шар остановится;

б) при $m_1 > m_2$ первый шар продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью, скорость второго шара увеличится;

в) при $m_1 < m_2$ первый шар отскакивает обратно, второй шар продолжает двигаться в том же направлении, но с меньшей скоростью $(u_2 < u_1)$.

Для численных расчетов можно спроецировать скорости на ось x и оперировать с абсолютными значениями скоростей.

Скорости шаров после абсолютно упругого удара не могут быть одинаковы (в векторной форме); если $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$, то $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, и в этом случае шары не столкнутся.

II. $V_2 \neq 0$, $V_1 \neq V$, $m_1 - m_2$, $u_2 = V_1$, $u_1 = V_2$. Шары меняются скоростями.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела соединяются и продолжают движение как единое целое (два шара из пластилина).

Закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

В случае прямого удара:

$$m_1V_1 + m_2V_2 = (m_1 + m_2)u,$$

$$u = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.18}$$

Если $m_1 - m_2$, то $u = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$.

В абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не выполняется, но выполняется закон сохранения импульса. Потенциальная энергия шаров не меняется, меняется только кинетическая энергия – она уменьшается. Уменьшение механической энергии рассматриваемой системы обусловлено деформацией тел, которая сохраняется после удара.

Закон сохранения энергии можно записать в следующем виде:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + \Delta W,$$

где ΔW – часть механической энергии, которая переходит в другие виды: тепловую, внутреннюю, энергию деформации.

Неупругий удар находит широкое применение. Например, он имеет место при штамповке, ковке деталей, забивании свай, гвоздей.

ЛЕКЦИЯ 5
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Абсолютно твердым называется тело, которое не деформируется и при всех условиях расстояние между двумя произвольными точками этого тела остается постоянным.

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси ОО (рис. 5.1). Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, каждая из которых движется по окружности с одинаковой для всех точек угловой скоростью. Линейная скорость движения каждой точки определяется выражением

$$V = \omega r, \tag{5.1}$$

где r – расстояние от точки до оси вращения.

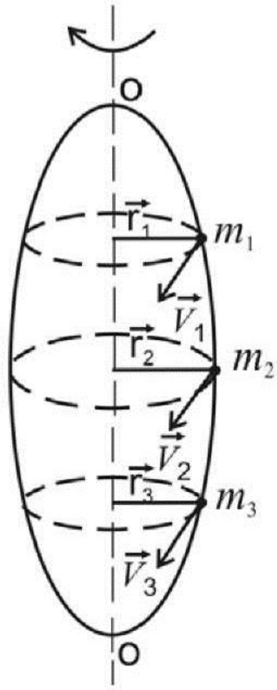


Рис. 5.1

5.1 Момент инерции

При рассмотрении динамики вращательного движения важно знать не только массу материальной точки, но и ее удаление от оси вращения. Мерой инертности тела при вращательном движении является **момент инерции** – J (йот).

Момент инерции точки равен произведению массы материальной точки на квадрат расстояния от точки до оси вращения (рис. 5.2):

$$\boxed{J = mr^2} \left[\text{кг} \cdot \text{м}^2 \right]. \tag{5.2}$$

Любое твердое тело можно разбить на множество материальных точек, поэтому момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции всех точек этого тела (рис. 5.3):

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2}. \tag{5.3}$$

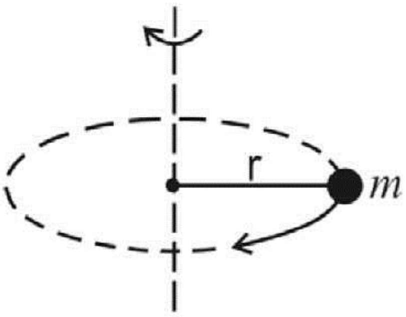


Рис. 5.2

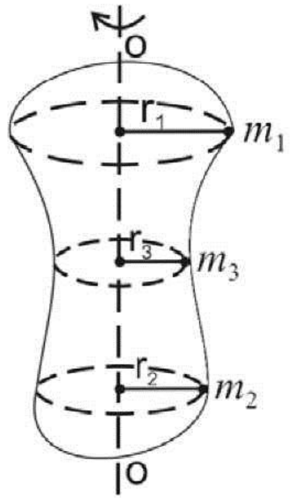


Рис. 5.3

Для сплошного тела, плотность которого постоянна, момент инерции может быть найден через интеграл:

$$J = \int_V \rho r^2 \cdot dV, \tag{5.4}$$

где ρ – плотность тела; r – расстояние от материальной точки до оси; V – объем тела.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении и зависит от распределения массы тела относительно оси вращения.

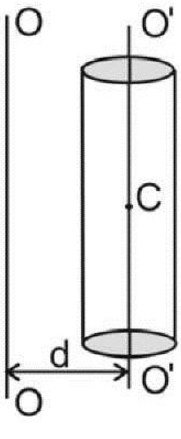


Рис. 5.4

5.2 Теорема Штейнера

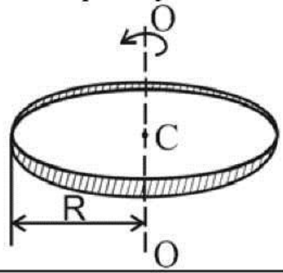
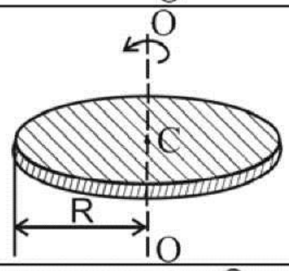
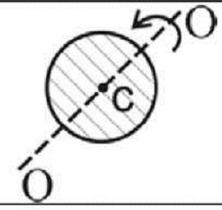
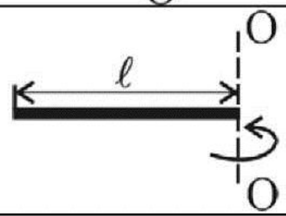
$$\boxed{J_{oo} = J_{o'o'} + md^2}. \tag{5.5}$$

Момент инерции тела относительно любой произвольной оси (J_{oo}) равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции тела (точка С на рисунке 5.4 параллельно выбранной оси ($J_{o'o'}$), и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

В таблице 3 приведены выражения для моментов инерции некоторых твердых тел.

Таблица 3

Моменты инерции некоторых твердых тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции	Пояснение
1. Обруч, тонкостенный цилиндр	Ось симметрии	$J = mR^2$	m – масса тела R – радиус тела 
2. Диск сплошной цилиндр	Ось симметрии	$J = \frac{1}{2}mR^2$	
3. Шар	Через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$	
4. Стержень	Через середину, перпендикулярно *стержню*	$J = \frac{1}{12}m\ell^2$	l – длина стержня 
5. Стержень	Через конец, перпендикулярно стержню	$J = \frac{1}{3}m\ell^2$	

5.3 Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Для того чтобы тело, закрепленное на оси, привести во вращение или изменить угловую скорость его вращения, к телу необходимо приложить силу $\vec{F}$. При вращении тела результат действия силы зависит не только от ее значения, но и от того, на каком расстоянии от оси вращения и под каким углом она приложена.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной оси вращения называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы на эту силу $\vec{F}$ (рис. 5.5):

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]. \tag{5.6}$$

Вектор $\vec{M}$ направлен вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 5.6). Модуль момента силы определяется выражением:

$$\boxed{M = r \cdot F \cdot \sin\alpha}, \tag{5.7}$$

где $r \cdot \sin\alpha = h$ – плечо силы F; α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

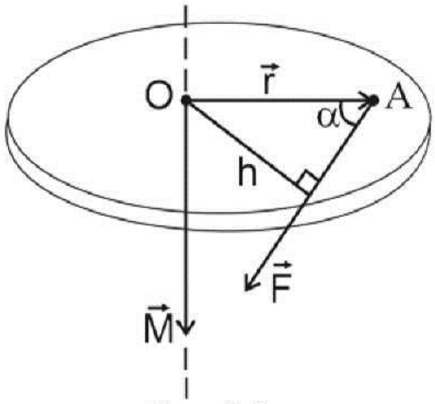


Рис. 5.5

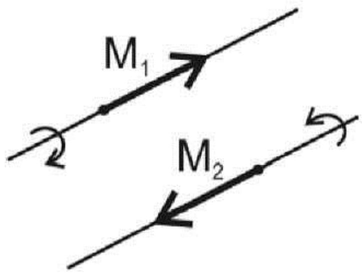


Рис. 5.6

Плечом силы *h* называют кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения (рис. 5.5). Таким образом, момент силы равен произведению силы на плечо этой силы:

$$\boxed{M = F \cdot h} \ [\text{Н} \cdot \text{м}]. \tag{5.8}$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела имеет вид

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}, \text{ или } \boxed{\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}}. \tag{5.9}$$

Момент действующих на тело сил равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

5.4 Работа при вращении тела

Найдем выражение для работы при вращении тела. При повороте тела на малый угол $d\varphi$ точка B приложения силы проходит путь $dS = r \cdot d\varphi$ (от B до B' на рис. 5.7). Работа силы $\vec{F}$ равна

$$dA = F_S \cdot dS = F \cdot \sin\alpha \cdot r d\varphi = M \cdot d\varphi,$$

$$dA = M \cdot d\varphi, \tag{5.10}$$

т.е. элементарная работа при вращении тела равна произведению момента действующей на тело силы на угол поворота тела. Полная работа находится путем интегрирования $A = \int\limits_{\varphi} M d\varphi$ и при постоянном моменте силы:

$$A = M \cdot \varphi. \tag{5.11}$$

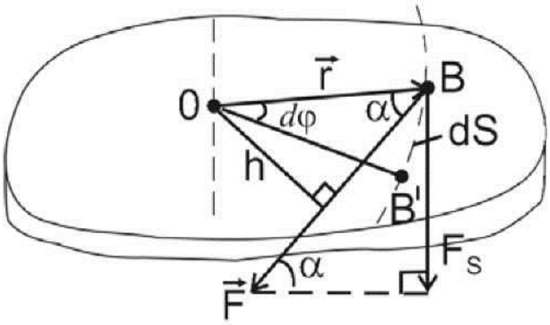


Рис. 5.7

5.5 Кинетическая энергия вращающегося тела

Разобьем вращающееся тело на отдельные точки (рис. 5.1), тогда кинетическая энергия вращающегося тела будет равна сумме кинетических энергий отдельных материальных точек:

$$W_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}. \tag{5.12}$$

Так как угловая скорость вращения всех точек одного и того же тела одинакова, линейная скорость каждой точки равна $V_i = \omega \cdot r_i$, следовательно:

$$W_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{\omega^2 J}{2},$$

$$\boxed{W_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}}. \tag{5.13}$$

Если тело катится по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения (рис. 5.8):

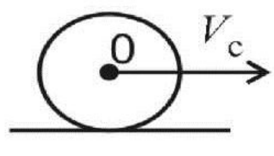


Рис. 5.8

$$W_{\text{кин}} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \tag{5.14}$$

Работа, затрачиваемая на изменение скорости вращения, равна изменению кинетической энергии тела:

$$A = \Delta W_{\text{вр}} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}. \qquad (5.15)$$

5.6 Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Количественной мерой движения при вращении тела является момент импульса (момент количества движения).

Моментом импульса *L* материальной точки относительно неподвижной оси называют векторное произведение радиус-вектора точки на ее импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad \text{или}$$

$$L = mvr \quad [(\text{кг} \cdot \text{м}^2)/\text{с}]. \qquad (5.16)$$

Момент импульса – это вектор, направленный вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 5.9).

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси равен сумме момента импульсов всех материальных точек тела:

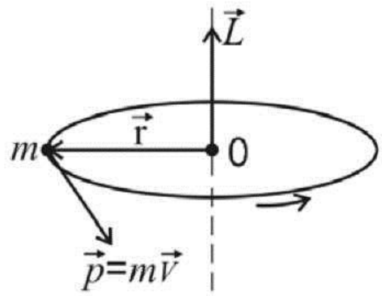


Рис. 5.9

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \omega \cdot r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2, \qquad (5.17)$$

или с учетом (5.3)

$$\boxed{\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}}. \qquad (5.18)$$

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения тела.

Продифференцируем уравнение (5.17) по времени:

$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \text{ т.к. } \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \text{ то}$$

$$\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = J\vec{\varepsilon}, \text{ или } \boxed{\frac{\overrightarrow{dL}}{dt} = \overrightarrow{M}}. \qquad (5.19)$$

Уравнение (5.18) является более общей формой основного закона динамики вращательного движения твердого тела: производная момента импульса системы тел относительно оси вращения равна моменту внешних сил, приложенных к данной системе относительно той же оси:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}. \qquad (5.20)$$

Если рассматриваемая механическая система замкнута, момент внешних сил $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$, следовательно

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}, \text{ или } \boxed{\vec{L} = \text{const}}. \qquad (5.21)$$

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы тел относительно неподвижной оси сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса лежит в основе работы гироскопа – устройства, широко применяющегося в навигационных приборах для автоматического управления движением тел – «автопилот», и во многих других устройствах навигации и управления.

Основные характеристики поступательного и вращательного движения тела приведены в таблице 4.

Таблица 4

Характеристики поступательного и вращательного движения тела

Характеристика	Поступательное движение	Вращательное движение
1. Мера инертности	масса – m (кг)	момент инерции $J = m \cdot r^2$
2. Мера взаимодействия тел	сила – F (Н)	момент силы $M = F \cdot h$ (Н·м)
3. Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$
4. Работа силы	$A = F_S \cdot S$ (Дж)	$A = M \cdot \varphi$ (Дж)
5. Кинетическая энергия	$W_к = \frac{mV^2}{2}$ (Дж)	$W_к = \frac{J\omega^2}{2}$ (Дж)
6. Количественная мера движения тела	импульс $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$ [(кг · м)/с]	момент импульса $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ [(кг · м^2)/с]
7. Связь меры взаимодействия и меры движения	$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$
8. Закон сохранения (замкнутая система)	$\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}$	$\vec{L}_{\text{сист}} = \text{const}$

ЛЕКЦИЯ 6
НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

6.1 Неинерциальные системы отсчета

До сих пор движение тела рассматривалось по отношению к какой-либо одной из бесчисленного множества инерциальных систем отсчета. В такой системе отсчета основным уравнением движения тела является уравнение, выражающее второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{6.1}$$

Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Относительно всех инерциальных систем данное тело движется с одинаковым ускорением $\vec{a}_{\text{ин}}$. Поставим теперь задачу найти уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, т.е. таких системах, в которых первый закон Ньютона не выполняется.

Любая неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальных систем с некоторым ускорением, поэтому ускорение тела в неинерциальной системе отсчета $\vec{a}_{\text{нс}}$ будет отлично от $\vec{a}_{\text{ин}}$.

Обозначим разность ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах символом $\vec{a}$:

$$\vec{a}_{\text{ин}} - \vec{a}_{\text{нс}} = \vec{a}. \tag{6.2}$$

В частном случае, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной поступательно, ускорение тела $\vec{a}$ одинаково для всех точек пространства ($\vec{a} = \text{const}$) и представляет собой ускорение неинерциальной системы отсчета.

6.2 Силы инерции при поступательном движении

Ускорение точки в неинерциальной системе отсчета можно в соответствии с (6.2) представить в виде:

$$\vec{a}_{\text{ин}} = \vec{a}_{\text{нс}} + \vec{a}. \qquad (6.3)$$

Подставим выражение (6.3) в уравнение (6.1) и получим:

$$m\vec{a}_{\text{нс}} = \vec{F} - m\vec{a}. \qquad (6.4)$$

Это и есть **уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета**. Если в неинерциальной системе отсчета определять силу как вектор, равный произведению массы материальной точки на ее ускорение в этой системе отсчета, то правая часть уравнения (6.4) и является силой, действующей на материальную точку, движущуюся ускоренно в неинерциальной системе отсчета. Эта сила слагается из двух существенно различных составляющих. Первая оставляющая $\vec{F}$ является результатом взаимодействия тел и проявляется в инерциальной системе отсчета.

Совсем иной характер имеет составляющая $-m\vec{a}$. Она возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за ускоренного движения системы отсчета. Она называется **поступательной силой инерции**. При переходе к другой ускоренно движущейся системе отсчета меняются и силы инерции. Эти силы инерции отличаются от настоящих сил, возникающих при взаимодействии тел. Второе отличие состоит в том, что силы инерции не подчиняются закону действия и противодействия (третьему закону Ньютона).

При описании движения тел относительно ускоренно движущейся поступательно системы отсчета наряду с силами, обусловленными взаимодействием тел друг с другом, необходимо учитывать так называемые силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$. Эти силы следует полагать равными произведению массы тела на взятое с обратным знаком ускорение движущейся неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}. \qquad (6.5)$$

Соответственно, уравнение движения в неинерциальной системе отсчета будет иметь вид

$$m\vec{a}_{\text{нс}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}. \qquad (6.6)$$

Существует много явлений, которые могут быть интерпретированы как проявление силы инерции. Когда поезд набирает скорость, пассажиры в вагоне испытывают действие силы, направленной против движения поезда. Это и есть сила инерции. Силы инерции вызывают перегрузки, действующие на летчика при больших ускорениях самолета. Если в ускоренно движущемся вагоне висит шарик массы m, то сила инерции отклоняет его в сторону, противоположную ускорению (рис. 6.1).

Нить отклоняется на такой угол, чтобы результирующая двух сил $(m\vec{g}+\vec{T})$ сообщала шарику ускорение $\vec{a}$, с которым движется вагон. Относительно системы отсчета, связанной с вагоном, шарик покоится. Это можно объяснить, если ввести силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}}=-m\vec{a}$, уравновешивающую результирующую двух сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$.

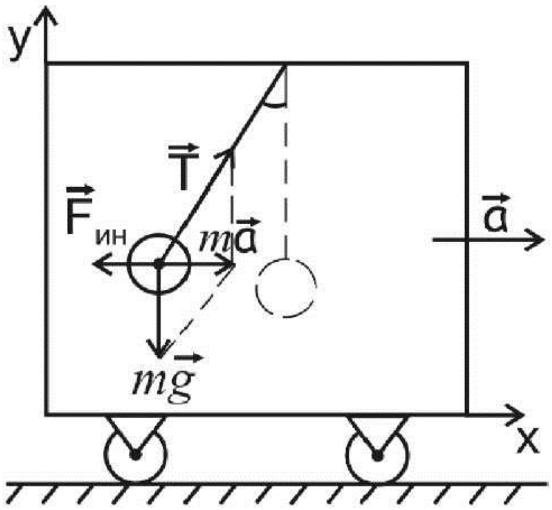


Рис. 6.1

Введение сил инерции дает возможность описывать движение тел в любых системах отсчета с помощью одних и тех же уравнений движения.

Силы инерции имеют характерные особенности: они не отражают взаимодействие тел, а обусловлены характером неинерциальных систем отсчета, поэтому для сил инерции неприменим третий закон Ньютона. Характерным свойством сил инерции является их пропорциональность массе тела. Благодаря этому свойству силы инерции оказываются аналогичными силам тяготения. Движение тел под действием сил инерции сходно с движением в гравитационном поле. В качестве примера можно привести невесомость, возникающую в свободно падающем лифте. В свободно падающем лифте вес $\vec{G}$ тела массой *m* всегда равен нулю: $G_{\text{не}}=0$.

Действительно:

$$\vec{G}=m\vec{g};\ \vec{a}=\vec{g};$$

$$\vec{G}_{\text{не}}=\vec{G}+\vec{F}_{\text{ин}}=m\vec{g}-m\vec{a}=m\vec{g}-m\vec{g}=0. \qquad (6.7)$$

Рассмотрим силы инерции, возникающие во вращающихся системах отсчета.

6.3 Центробежная сила инерции

Рассмотрим два случая проявления центробежной силы инерции.

Пример 1. Рассмотрим вращающийся диск с закрепленными на нем стойками с шариками, подвешенными на нитях (рис. 6.2). При вращении диска с постоянной угловой скоростью ω шарики отклоняются на некоторый угол, тем больший, чем дальше он находится от оси вращения. Относительно инерциальной системы отсчета (неподвижной) все шарики движутся по окружности соответствующего радиуса *R*, при этом на шарики действует результирующая сила $\vec{F}=\vec{P}+\vec{T}$ (рис. 6.3).

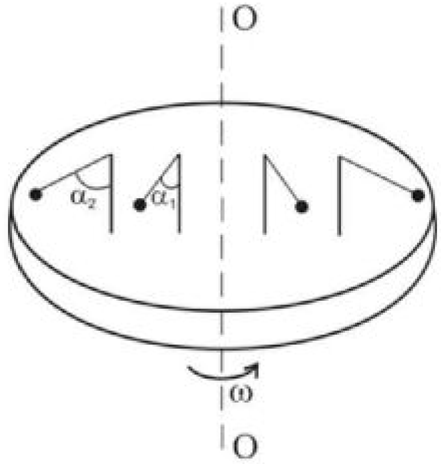


Рис. 6.2

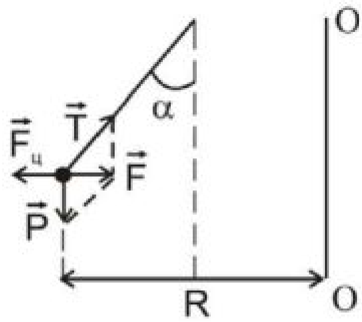


Рис. 6.3

Согласно второму закону Ньютона

$$F = m \cdot a_n = m \cdot \omega^2 \cdot R, \tag{6.8}$$

учитывая, что $F / P = tg\alpha$, можно записать

$$tg\alpha = \frac{\omega^2 R}{g},$$

т.е. угол отклонения шарика зависит от угловой скорости и от его удаления от оси вращения диска.

Относительно неинерциальной системы отсчета, связанной с вращающимся диском, шарик находится в покое.

Это возможно в том случае, если сила $\vec{F}$ (6.8) уравновешена силой инерции $\vec{F}_ц$, называемой **центробежной силой инерции**:

$$F_ц = -F = -m\omega^2 R. \tag{6.9}$$

Пример 2. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси z с угловой скоростью ω. Вместе с диском вращается надетый на тонкую спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной (рис. 6.4). Шарик занимает на стержне некоторое положение, при котором сила натяжения пружины $\vec{F}_{уп}$ (она будет центростремительной) оказывается равной произведению массы шарика m на его ускорение:

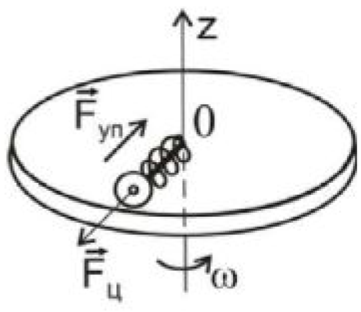


Рис. 6.4

$$F_{уп} = m\omega^2 r, \tag{6.10}$$

где $\omega^2 r = a_n$ – нормальное ускорение на шарике; r – расстояние от оси вращения до центра шарика.

Относительно системы отсчета, связанной с диском, шарик покоится. Это формально можно объяснить тем, что кроме силы упругости на шарик действует сила инерции, модуль которой равен силе упругости (6.7):

$$\boxed{F_ц = -m\omega^2 r}. \tag{6.11}$$

Сила инерции $\vec{F}_ц$ направлена вдоль радиуса от центра диска. Силу инерции (6.8), возникающую в равномерно вращающейся системе отсчета, называют **центробежной силой инерции**. Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчета, независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью $\vec{V}$. Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризовать радиус-вектором $\vec{r}$, то центробежную силу можно представить в виде

$$\boxed{\vec{F}_ц = m\omega^2 \vec{r}_\perp}, \tag{6.12}$$

где $\vec{r}_\perp$ – компонента радиус-вектора, направленная перпендикулярно оси вращения.

Центробежные силы, как и всякие силы инерции, **существуют только в ускоренно движущихся** (вращающихся) **системах отсчета** и исчезают при переходе к инерциальным системам отсчета.

Действию центробежной силы подвергается, например, пассажир в движущемся автобусе на поворотах. Если в центробежной машине подвесить на нитях несколько шариков и привести машину в быстрое вращение, то центробежные силы инерции отклонят шарики от оси вращения. Угол отклонения тем больше, чем дальше шарик отстоит от оси. Центробежные силы используются в центробежных сушилках для отжима белья, в сепараторах для отделения сливок от молока, в центробежных насосах, центробежных регуляторах и т.д. Их надо учитывать при проектировании быстровращающихся деталей механизмов.

6.4 Сила Кориолиса

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы, появляется еще одна сила, называемая **силой Кориолиса**.

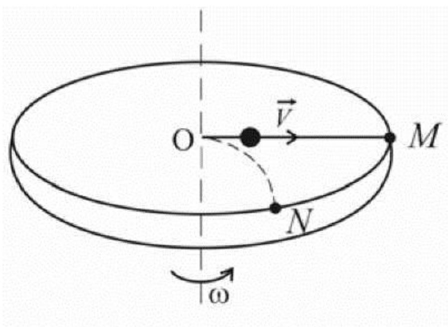


Рис. 6.5

Рассмотрим рисунок 6.5. Шарик массой m движется прямолинейно со скоростью $\vec{V}$ от центра к краю диска. Если диск неподвижен, то шарик попадает в точку M, а если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω, то шарик попадает в точку N. Это обусловлено тем, что на шарик действует сила Кориолиса.

Появление силы Кориолиса можно обнаружить, если рассмотреть пример с шариком на спице на вращающемся диске, но без пружины. Для того чтобы заставить шарик двигаться с некоторой скоростью $\vec{V}$ вдоль спицы, необходима боковая сила. Шарик вращается вместе с диском с постоянной угловой скоростью ω, поэтому его момент импульса равен:

$$L = mv_{\tau}r = m\omega^2 r. \qquad (6.13)$$

Если шарик будет перемещаться вдоль спицы с постоянной скоростью $\vec{V}^{|}$, то с изменением $\vec{r}_{\perp}$ момент импульса шарика изменится. А это означает, что на движущееся во вращающейся системе тело должен действовать некоторый момент силы, который согласно основному уравнению динамики вращательного движения равен

$$M = F_1 r_1,$$

$$r^{|} = \frac{dz}{dt} = \frac{d(m\omega r_1^2)}{dt} = 2m\omega r^{|}\frac{dz^{|}}{dt}.$$

Для того чтобы заставить шарик двигаться по вращающемуся диску вдоль радиальной прямой со скоростью $V^{|} = \dfrac{dz^{|}}{dt}$, необходимо прилагать боковую силу

$$F_{\perp} = \frac{M}{r^{|}} = 2m\omega v,$$

направленную перпендикулярно $r^{|}$. Относительно вращающейся системы (диска) шарик движется с постоянной скоростью.

Это можно объяснить тем, что сила $F_{\perp}$ уравновешивается приложенной к шарику силой инерции $\overrightarrow{F_k}$, перпендикулярной к скорости $\vec{V}^{|}$ (рис. 6.6). Сила $\overrightarrow{F_k}$ и есть Кориолисова сила инерции. Она определяется выражением

$$F_k = F_1 = 2m\omega v^{|}. \qquad (6.14)$$

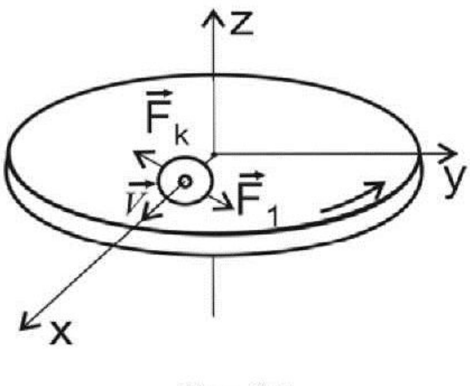


Рис. 6.6

С учетом направления силу Кориолиса $\overrightarrow{F_k}$ можно представить в виде

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{V}\vec{\omega}]. \qquad (6.15)$$

Сила Кориолиса всегда перпендикулярна скорости тела $\vec{V}$. Во вращающейся системе отсчета при $\vec{V} = 0$ эта сила отсутствует. Таким образом, Кориолисова сила инерции возникает только тогда, когда система отсчета вращается, а тело движется относительно этой системы. Действием силы Кориолиса объясняется ряд эффектов, наблюдающихся на поверхности Земли, например, поворот плоскости колебаний маятника Фуко относительно Земли, отклонение к востоку от линии отвеса свободно падающих тел, размытие правого берега рек в северном полушарии и левого в южном, неодинаковый износ рельсов при двухколейном движении.

ЛЕКЦИЯ 7
ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Классическая или ньютоновская механика достигла в течение двух столетий больших успехов. Однако с развитием науки обнаружились новые факты, которые не укладывались в рамки классической механики. Эти факты получили свое объяснение в новых теориях – специальной теории относительности и квантовой механике.

Специальная теория относительности (СТО), созданная Эйнштейном в 1905 г., – фундаментальная физическая теория, охватывающая всю физику. В ней подвергались радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привел к созданию релятивистской механики. Новая механика не привела к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнения релятивистской механики в пределе (для скоростей $V \ll c$) переходят в уравнения ньютоновской механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как ее частный случай и сохранила свое прежнее значение для описания движений, происходящих со скоростями, значительно меньшими скорости света c.

Созданная Эйнштейном СТО представляет собой физическую теорию пространства и времени. Все физические явления происходят в пространстве и времени, поэтому неудивительно, что внесение СТО новых воззрений на пространственные и временные измерения затронуло всю физику.

7.1 Преобразования Галилея

Опыт показывает, что существует определенная независимость явлений от состояния движения, которая заключается в равноправии всех инерциальных систем отсчета. Равномерное и прямолинейное движение замкнутой системы как целого не влияет на ход процессов, происходящих внутри системы. Утверждение об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета составляет содержание принципа относительности, впервые сформулированного Галилеем для механических явлений.

Многие физические законы формулируются при помощи уравнений. Вид этих уравнений не зависит от начального состояния системы. Таковы, в частности, уравнения механики. Наиболее известен второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}\ . \tag{7.1}$$

Согласно принципу относительности, математическая форма законов механики должна быть одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения движения должны быть инвариантны относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

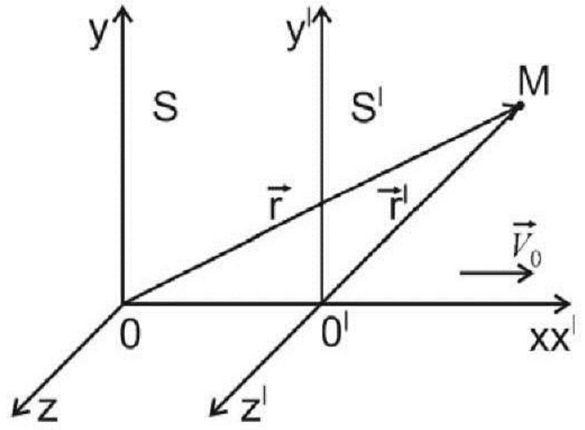


Рис. 7.1

Рассмотрим описание некоторого явления в двух инерциальных системах отсчета S и S'. Система S' движется относительно S с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ (рис. 7.1).

Для простоты можно принять, в начальный момент времени $t = 0$, координатные оси и начала координат двух систем отсчета S и S' совпадают. Кроме того, оси x и x' направим вдоль вектора $\vec{V}_0$. Пусть известно движение материальной точки в одной из этих систем, например в системе S'. Как найти движение той же точки в системе S?

Задача сводится к нахождению формул, выражающих координаты x', y', z' в системе S в один и тот же момент времени. В ньютоновской механике принималось как очевидный факт существование мирового времени t, одинакового во всех системах отсчета: $t = t'$. В действительности возможность измерять время во всех системах отсчета по одним и тем же часам связана с предположением о существовании сигналов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью. Таким образом, согласно классическим представлениям, промежуток времени между двумя событиями, в силу абсолютного характера времени, должен быть одинаковым во всех системах отсчета. Предполагалось также, что длина твердого стержня или расстояние между двумя точками, измеренное в некоторый момент времени, одинаковы во всех системах отсчета. Из этих предположений однозначно вытекает общий вид преобразования, связывающего координаты материальной точки в двух системах отсчета. Пусть в момент времени t движущаяся материальная точка находится в положении M (рис. 7.1). Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM'}$. За время t начало координат системы S' переходит из положения O в положение O', причем $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}_0 t$. Ввиду этого предыдущее соотношение принимает вид

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}_0 t, \;\; t = t', \tag{7.2}$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}\,' = \overrightarrow{OM'}$ – радиус-векторы точки в системах S и S' соответственно. Запишем соотношение (7.2) в проекциях на координатные оси:

$$x = x' + V_0 t, \;\; y = y', \;\; z = z', t = t'. \tag{7.3}$$

Эти формулы и дают решение поставленной задачи. Они называются **преобразованиями Галилея**. Дифференцируя соотношение (7.2) по времени t, получим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{V}_0 \text{ или } \vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0, \tag{7.4}$$

где $\vec{V}$ – скорость точки в системе S, а $\vec{V}'$ – в системе S'.

Эта формула выражает классический закон сложения скоростей. Дифференцируя второй раз в предположении постоянства $\vec{V}_0$, получим

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} \text{ или } \vec{a} = \vec{a}\,', \tag{7.5}$$

где $\vec{a}$ – ускорение в системе S, а $\vec{a}\,'$ – в системе S'.

Таким образом, ускорение в обеих системах отсчета одно и то же. Следовательно, ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея. Из второго закона Ньютона (7.1) следует, что силы, действующие на материальную точку в системах S и S', также будут одинаковы. Поэтому уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой, т.е. инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея. Практически это означает, что механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

7.2 Постулаты Эйнштейна

Принцип относительности ньютоновской механики, включающей преобразования Галилея и понятие абсолютного времени, правильно описывает обычные механические явления.

А как обстоит дело в электродинамике? Протекают ли электромагнитные и оптические процессы одинаково во всех инерциальных системах отсчета?

Явления природы не представляется возможным разделить на чисто механические и немеханические. Вещество состоит из заряженных частиц, и именно электрические силы лежат в основе строения вещества. Иными словами, все механические системы содержат электрические заряды, и во всех электродинамических системах движущиеся частицы имеют массу. Поэтому может быть приемлемо утверждение о том, что принцип относительности распространяется на все явления: как механические, так и электромагнитные, и оптические. Процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Все проведенные эксперименты подтверждают справедливость этого утверждения. Исторически более важными являются опыты, подтверждающие универсальный характер принципа относительности – это электродинамический опыт Троутона и Нобля с заряженным конденсатором, подвешенным на упругой нити, и оптический опыт Майкельсона и Морли с интерферометром специальной конструкции по обнаружению эфирного ветра.

В этих опытах, поставленных специально для обнаружения влияния движения связанной с Землей лаборатории на взаимодействие зарядов и распространение света, был получен отрицательный результат: никакого влияния обнаружено не было. Однако основные уравнения электродинамики не являются инвариантными относительно преобразований Галилея. Согласно этим уравнениям скорость распространения электромагнитных волн в вакууме одинакова по всем направлениям и равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Но, с другой стороны, в соответствии с классическим законом преобразования скорости, вытекающим из преобразований Галилея, скорость света может быть равна c только в одной инерциальной системе отсчета. Например, если скорость света равна c только в системе S, то в системе $S^{|}$ свет должен распространяться в положительном направлении оси x со скоростью $(c - V)$, а в отрицательном – со скоростью $c + V$. Отсюда можно сделать вывод, что уравнения электродинамики не инвариантны относительно преобразований Галилея. Таким образом, между электродинамикой и классической механикой имеют место определенные противоречия. Эксперимент свидетельствует об универсальном характере принципа относительности, а преобразования Галилея удовлетворяют этому принципу в отношении законов механики и не удовлетворяют в отношении законов электродинамики и оптики. Единственно правильный выход из глубокого кризиса, который переживала физика на рубеже XIX и XX вв., был найден Эйнштейном в 1905 г. ценой отказа от классических представлений о пространстве и времени и от основанных на них преобразований Галилея.

В основе теории относительности Эйнштейна лежат два твердо установленных экспериментально принципа или **постулата**:

1) принцип относительности Эйнштейна;
2) принцип постоянства скорости света.

Принцип относительности Эйнштейна является распространением механического принципа Галилея на все без исключения физические явления. Согласно этому принципу **все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета**, т.е. равноправие всех инерциальных систем распространяется на все явления, всю физику. **Принцип постоянства скорости света** утверждает, что **скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света**.

Из сформулированных выше постулатов вытекает ряд важных выводов, касающихся свойств пространства и времени. В классической физике время является абсолютным: для всех систем отсчета вводится одно и то же время. Это значит, что если два события происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для любого другого: понятие одновременности является также абсолютным, не зависящим от системы отсчета. Однако последнее утверждение находится в противоречии с принципом постоянства скорости света. Поэтому постулаты теории относительности потребовали внесения изменений в основные физические понятия, относящиеся к пространству и времени.

7.3 Преобразование промежутков времени

Начнем изложение теории относительности с простого примера применения двух принципов (постоянства скорости света и принципа относительности). Этот пример наглядно показывает, почему Эйнштейн счел необходимым изменить понятие времени: пусть два события в некоторой системе отсчета, скажем S^1, проходят в одной и той же точке и промежуток времени между ними равен τ_0 по часам системы S^1. Этот промежуток времени в системе S^1 измеренный по *неподвижным* часам называется **собственным временем**. Каким будет промежуток времени между этими же событиями, если измерить его по часам системы S, относительно которой S^1 движется со скоростью в направлении оси x? Для ответа на этот вопрос рассмотрим мысленный опыт со «световыми часами», устроенными следующим образом: на концах стержня длиной ℓ закреплены два параллельных зеркала, между которыми движется световой импульс. Пусть этот прибор неподвижен в системе S^1 и его стержень расположен перпендикулярно скорости S^1 относительно S. Рассмотрим один цикл таких часов, т.е. выход светового импульса от нижнего зеркала и его возвращение после отражения от верхнего зеркала, с точки зрения каждой из системы отсчета. В системе S оба рассматриваемых события происходят в одной и той же точке и промежуток времени между ними (собственное время) равен $\tau_0 = 2\ell / c$.

С точки зрения системы S световые часы находятся в движении, и световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно. Свет при этом проходит за один цикл больший путь, и, следовательно, промежуток времени τ между этими же событиями, измеряемый в системе S, больше, чем в $S^{|}$: $\tau > \tau_0$. Это утверждение опирается на то, что, согласно второму постулату, скорость света одинакова в S и $S^{|}$. Найдем связь между τ и τ_0. Как видно из рисунка 7.2, пройденный светом за один цикл путь равен

$$L = 2\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2},$$

и для определения τ можно написать уравнение

$$c\tau = 2\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2},$$

откуда

$$\tau = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

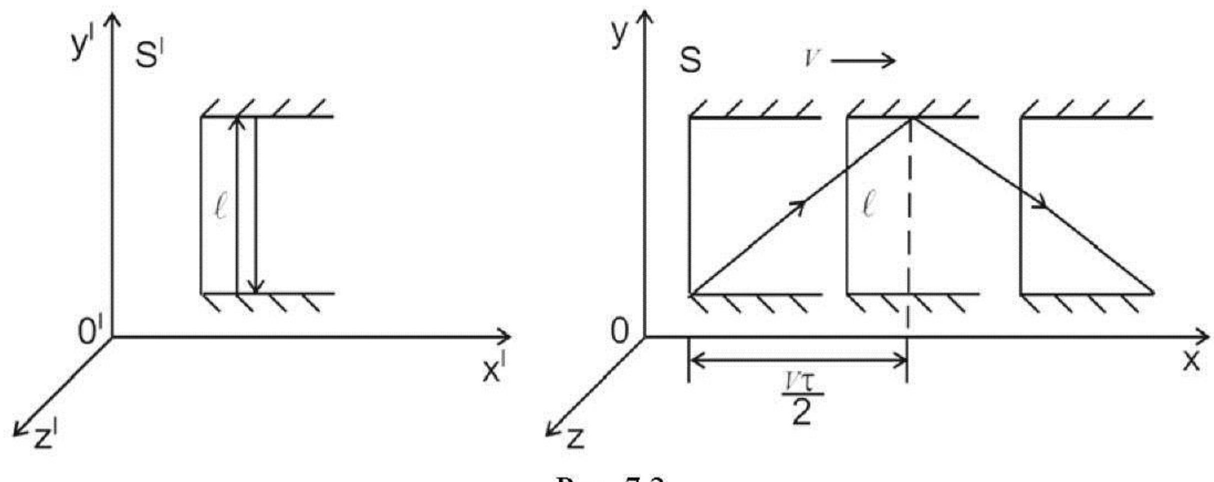


Рис. 7.2

Но, как мы видели выше, $\tau = 2\ell/c$ равно промежутку времени τ_0 между этими событиями в $S^{|}$. Поэтому

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (7.6)$$

Таким образом, величина промежутка времени между двумя событиями зависит от системы отсчета, т.е. является относительной. Так как при любой $V \neq 0$ $\tau > \tau_0$, то собственное время меньше, чем промежуток времени между этими же событиями, измеренный в любой другой системе отсчета. Этот эффект называется **релятивистским замедлением време-**

ни. С точки зрения наблюдателя S идентичные по устройству движущиеся часы (т.е. часы в системе $S^{|}$) идут медленнее, чем его собственные. Но может быть световые часы ведут себя так благодаря только особым свойствам света? Нет, любые часы, основанные на любом принципе, должны замедляться в движущейся системе, поскольку эффект замедления не имеет ничего общего с устройством конкретных часов.

Чтобы продемонстрировать это, представим себе световые часы, прочно соединенные с любыми другими произвольной конструкцией, скажем, с зубчиками или камнями, или основанных на радиоактивном распаде. Пусть две пары таких часов синхронизированы и показывают в неподвижной системе одно и то же время. Допустим, что одна пара часов начинает двигаться со скоростью V, причем световые часы, как им положено, замедляются, а другая модель – нет. Но тогда бы мы получили в свое распоряжение простой детектор равномерного движения: если показания обоих часов совпадают, то они покоятся, если же световые часы отстают, то можно сказать, что они движутся. А это нарушает принцип относительности, на котором основано наше рассмотрение. Что же выходит? Если все движущиеся часы замедляют свой ход, если любой способ измерения приводит к замедленному темпу течения времени, можно сказать, что само время, в определенном смысле, кажется в движущейся системе замедленным.

В 1960 г. явление замедления времени впервые наблюдалось экспериментально с использованием мессбауэровских часов – наиболее стабильных устройств отсчета времени, которые можно создать на современном уровне.

7.4 Сокращение масштабов

При рассмотрении эффекта релятивистского замедления времени длина стержня ℓ световых часов в направлении, перпендикулярном относительной скорости систем отсчета S и $S^{|}$ считалось одинаковым в обеих системах. Если предположить, что это не так, то можно сразу перейти к противоречию с равноправием систем S и $S^{|}$, т.е. с принципом относительности. В самом деле, рассмотрим следующий мысленный опыт. Расположим вдоль оси $y^{|}$ системы S жесткий стержень, длина которого в этой системе равна ℓ, и вдоль оси y системы S расположим точно такой же стержень, т.е. длина этого стержня равна ℓ для наблюдателя в системе S. В некоторый момент эти стержни оказываются рядом, и представляется возможность сравнить их непосредственно – конец одного стержня может сделать метку на другом. Совпадает ли метка с концом стержня? Принцип относительности дает положительный ответ на этот вопрос: метка должна совпадать с концом стержня, т.е. длина стержня в направлении, перпендикулярном к относительной скорости систем отсчета S и $S^{|}$, одинакова в обеих системах. В противном случае один из стержней оказался бы длиннее другого с точки зрения обеих систем отсчета, что противоречит принципу относительности. В отношении же размеров вдоль направления относительной скорости дело обстоит иначе.

Пусть стержень покоится в системе $S^{|}$, где он расположен вдоль оси $x^{|}$, т.е. в направлении относительной скорости систем S и $S^{|}$. Обозначим ее через ℓ_0, а длину стержня в системе S, относительно которой он движется со скоростью, через ℓ. Найдем связь между ℓ и ℓ_0. Для этого рассмотрим два события:

а) прохождение начала стержня мимо точки A на оси x системы S;

б) прохождение конца стержня мимо этой же точки.

В системе S эти события происходят в одной точке, и промежуток времени между ними в системе S является собственным временем, т.к. измеряется неподвижными часами (рис. 7.3).

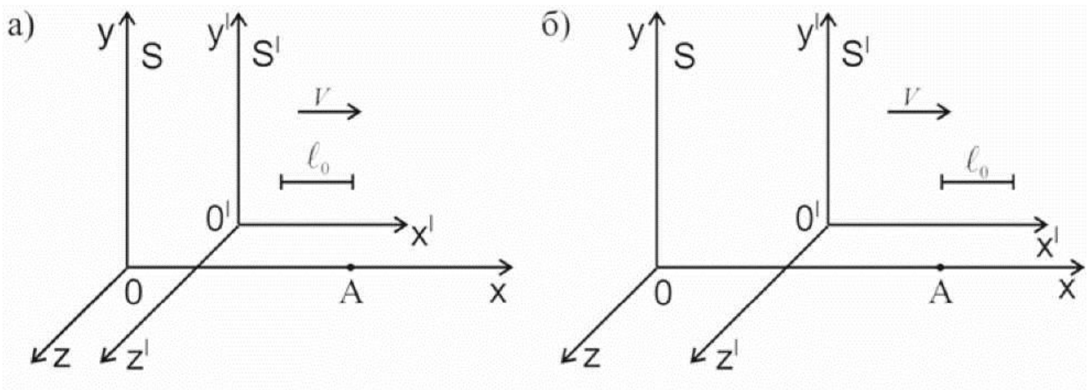


Рис. 7.3

Так как стержень движется со скоростью V относительно S, то можно написать: $\ell = V\tau_0$, но с точки зрения наблюдателя в системе $S^{|}$ точка A движется вдоль неподвижного стержня налево с такой же скоростью, поэтому $\ell_0 = V\tau$, где τ есть промежуток времени между событиями (а) и (б), измеренный по часам в системе $S^{|}$. Так как $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - V^2/c^2}$, то, комбинируя соотношения $\ell = V\tau_0$ и $\ell_0 = V\tau$, находим:

$$\ell = \ell_0 / \sqrt{1 - V^2/c^2}\,. \qquad (7.7)$$

Таким образом, длина стержня зависит от системы отсчета, в которой она измеряется, т.е. является относительной, при любой $V \neq 0$ $\ell < \ell_0$ (7.7). Длина стержня является наибольшей в той системе отсчета, в которой стержень покоится. Движущиеся относительно наблюдателя, находящегося в неподвижной системе отсчета, тела сокращаются в направлении своего движения. Этот релятивистский эффект носит название **Лоренцева сокращения**. Лоренцево сокращение движущегося стержня отражает относительный характер расстояния между точками в теории относительности (т.е. зависимость расстояния от системы отсчета) и не связано с каки-ми-либо процессами или явлениями в самом стержне, но, тем не менее, представляет собой вполне реальный эффект, столь же реальный, как, например, зависимость скорости стержня тела от выбора системы отсчета. Как видно из полученной формулы (7.7), эффект сокращения длины зависит от относительной скорости V систем отсчета и становится заметным для скоростей, сравнимых со скоростью света. При малых скоростях $(V \ll c)$ $\ell \approx \ell_0$ и $\tau \approx \tau_0$, т.е. расстояние между точками и промежутки времени между событиями приобретают практически абсолютный смысл в полном соответствии с классическими представлениями о пространстве и времени, возникшими из наблюдений над сравнительно медленными движениями, происходящими со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

7.5 Преобразования Лоренца

Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО Эйнштейна, хотя бы по той причине, что в них действует закон сложения скоростей $\vec{V} = V' + V_0$, и он будет находиться в противоречии с принципом постоянства скорости света $(c = c + V_0)$.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета S и S'. Система S' движется со скоростью $V_0 = \text{const}$. В начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат совпадают, излучается импульс света. По теории относительности $c = \text{const}$. За время Δt в системе S' луч пройдет путь от начала координат до точки A (рис. 7.4).

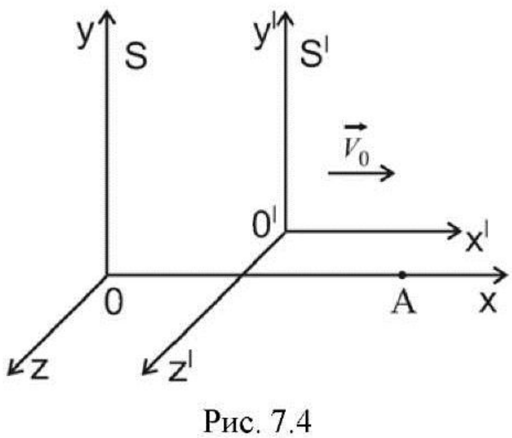


Рис. 7.4

Координата светового импульса в момент достижения точки A:

$$X = ct. \qquad (7.8)$$

В системе S' координата светового импульса в момент достижения точки A:

$$x' = ct'. \qquad (7.9)$$

Вычтем (7.8) из (7.9):

$$x' - x = c(t' - t). \tag{7.10}$$

Очевидно (см. рис. 7.4), что $x \neq x'$, ($x > x'$), тогда и $t \neq t'$, и $t > t'$.

Таким образом, интервал времени между одним и тем же событием (прохождением лучом света точки A) различен в разных системах отсчета, т.е. время носит относительный характер.

Классические преобразования Галилея при переходе от одной системы к другой имеют вид

от S к S, от S к S

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z = z \\ t = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

В СТО, когда точка будет двигаться со скоростью, соизмеримой скорости света, они заменяются преобразованиями Лоренца:

от S к S, от S к S

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z = z \\ t = \dfrac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \tag{7.11}$$

где $\beta = V/c$.

Видно, что при переходе от одной системы к другой меняется только знак скорости.

Преобразования Лоренца при $V \ll c$ переходят в преобразования Галилея – это суть принципа соответствия. Преобразования Лоренца верны при любых скоростях, а Галилея – только при малых.

Из преобразований Лоренца следует очень важный вывод о том, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Кроме того, как пространственные, так и временные преобразования не являются независимыми, поскольку в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты, т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

7.6 Следствие из преобразований Лоренца

Пусть в системе S в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе S' этим точкам соответствуют координаты x'_1 и x'_2 в моменты времени t'_1 и t'_2.

Если события в системе S происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и являются одновременными ($t_1 = t_2$), то согласно преобразованиям Лоренца $x'_1 = x'_2$ и $t'_1 = t'_2$.

Эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.

Если события в системе S пространственно разделены $x_1 \neq x_2$, но одновременны $t_1 = t_2$, то в системе S' (подставив в преобразование Лоренца)

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_1 = \frac{t - Vx_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - Vx_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x'_1 \neq x'_2, \quad t'_1 \neq t'_2.$$

Эти события в системе S' будут пространственно разделены и неодновременны.

В одних системах одно событие будет раньше другого, а в другой системе может быть наоборот.

7.7 Преобразование скоростей в релятивистской кинематике

Вновь вернемся к рисунку 7.4. Пусть некоторая материальная точка движется в системе S со скоростью $\vec{V}$ и в системе S' со скоростью $\vec{V}'$.

Как известно из кинематики,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k};$$

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = V'_x\vec{i} + V'_y\vec{j} + V'_z\vec{k},$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ – радиус-векторы точки в системах S и S'; V_x, V_y, V_z и V'_x, V'_y, V'_z – проекции скорости на соответствующие оси, которые можно найти из выражений

$$V_x=\frac{dx}{dt};\ V_y=\frac{dy}{dt};\ V_z=\frac{dz}{dt};\ V'_x=\frac{dx'}{dt};\ V'_y=\frac{dy'}{dt};\ V'_z=\frac{dz'}{dt}. \qquad (7.12)$$

В нашем упрощенном случае (см. рис. 7. 4), когда оси систем параллельны и $\vec{V}_0$ направлена вдоль оси ox и в $t = t' = 0$, начала координат совпадают. Запишем:

$$V'_x=\frac{dx'}{dt'}=\left(\frac{dx'}{dt}\right):\left(\frac{dt'}{dt}\right).$$

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца, возьмем производные:

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{V_x-V_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dt}=V_y;\ \frac{dz'}{dt}=V_y;$$

$$\frac{dt'}{dt}=\frac{1-V_0V_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (7.13)$$

где $\beta=V_0/c$, а V_0 – скорость движения системы S'.

После преобразований получим релятивистский закон сложения скоростей:

от S к S', от S' к S

$$V'_x=\frac{V_x-V_0}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\quad V_x=\frac{V'_x+V_0}{1+\frac{V_0V'_x}{c^2}};$$

$$V'_y=\frac{V_y\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\quad V_y=\frac{V'_y\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1+\frac{V_0V'_x}{c^2}}; \qquad (7.14)$$

$$V'_z=\frac{V_z\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1-\frac{V_0V_x}{c^2}}\quad V_z=\frac{V'_z\sqrt{1-V_0^2/c^2}}{1+\frac{V_0V'_x}{c^2}}.$$

При $c\to\infty$ уравнения приводят к обычному сложению скоростей в классической механике:

$$V'_x=\vec{V}_x-\vec{V}_0,\ V_x=V'_x+V_0;$$

$$V'_y=V_y,\ V'_z=V_z.$$

7.8 Понятие о релятивистской динамике

Из принципа относительности следует, что математическая запись любого закона физики должна быть одинаковой для всех инерциальных систем отсчета. То есть уравнение, описывающее какое-либо явление в системе отсчета $S^|$, получается из уравнений в системе S путем их простой замены. Это называется **условием ковариантности** уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.

Но основной закон динамики $F = ma$ или $\frac{d(mv)}{dt} = F$, в котором $m = \text{const}$, не является ковариантным по отношению к преобразованиям Лоренца. В релятивистской механике он в таком виде неприменим.

В СТО масса тела (m) зависит от скоростей (рис. 7.5); m_0 – масса покоя; приведена зависимость m/m_0 от V_0/c.

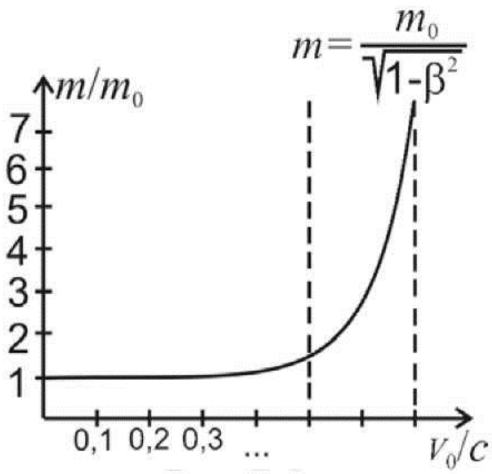


Рис. 7.5

Основное уравнение релятивистской динамики имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{V}\right) = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{P} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{V}$.

В релятивистской механике при малых скоростях оно переходит в обычное уравнение:

$$\vec{P} = m_0\vec{V}.$$

У всех тел масса покоя $m_0 > 0$ и с увеличением скорости тела релятивистская масса и импульс тела должны неограниченно возрастать при $V \to c$. Но все реальные силы конечны, их время действия ограничено, и, следовательно, они не могут сообщить телам бесконечно большой импульс. Тогда скорость тела по отношению к любой инерциальной системе отсчета не может быть равна скорости света в вакууме и всегда меньше ее.

В релятивистской механике выражение ($\vec{P} = m\vec{V}$) для импульса принимает вид

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}.$$

В данном случае m_0 – масса покоя при $V = 0$. При $V \neq 0$ масса тела изменяется в соответствии с выражением:

$$m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}},$$

где $m(V)$ – релятивистская масса.

ЛЕКЦИЯ 8
МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

8.1 Колебания

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания свойственны всем явлениям природы: пульсирует излучение звезд, с высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы, в земной ионосфере и атмосфере циркулируют потоки заряженных частиц, ветры возбуждают колебания воды на поверхности водоемов. Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные, ритмично повторяющиеся процессы, например, с удивительной надежностью бьется сердце, даже психика людей подвержена колебаниям. В виде сложнейшей совокупности колебаний частиц и полей можно представить «устройство» микромира.

В технике колебания либо выполняют определенные функциональные обязанности (маятник, колебательный контур, генератор), либо возникают как неизбежное проявление физических свойств (вибрация машин и сооружений, неустойчивости и вихревые потоки при движении тел в газах).

В физике выделяются колебания механические, электромагнитные и их комбинации. Это обусловлено той исключительной ролью, которую играют гравитационные и электромагнитные взаимодействия в масштабах, характерных для жизнедеятельности человека. С помощью распространяющихся механических колебаний плотности и давления воздуха, воспринимаемых нами как звук, а также очень быстрых колебаний электрических и магнитных полей, воспринимаемых нами как свет, мы получаем бо́льшую часть прямой информации об окружающем нас мире.

По мере изучения колебаний различной физической природы возникло убеждение о возможности общего, «внепредметного» подхода к ним, основанного на свойствах и закономерностях колебательных процессов вообще. В результате появилась теория колебаний и волн. Основным математическим аппаратом теории колебаний являются дифференциальные уравнения.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания и автоколебания.

Свободными или собственными называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей была сообщена энергия, либо система была выведена из положения равновесия (например, шарик, подвешенный на нити).

Вынужденными называют такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодической силы (например, колебания моста при прохождении по нему поезда или раскачивание человеком качелей).

Автоколебания, как вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако момент времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.

Простейшими являются гармонические колебания.

8.2 Гармонические колебания

Гармоническими называются колебания, при которых физическая (или любая другая) величина изменяется с течением времени по синусоидальному (косинусоидальному) закону:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (8.1)$$

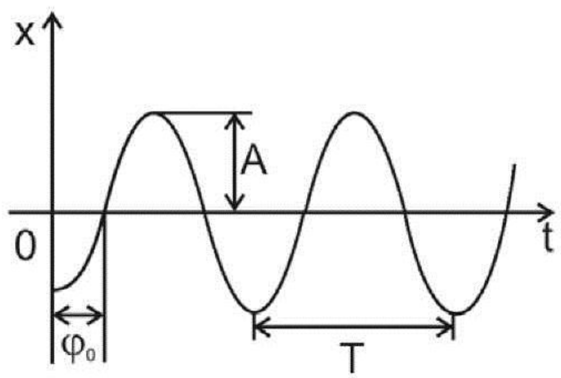


Рис. 8.1

где x – значение колеблющейся величины в данный момент времени t (для механических колебаний, например, смещение или скорость, для электрических – напряжение или сила тока); A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота колебаний; $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний (рис. 8.1).

Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам: во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим; во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Время, в течение которого совершается одно колебание, называют **периодом колебания** – T (с). Величину, обратную периоду и равную числу колебаний в единицу времени, называют **частотой колебания** (ν):

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ [Гц]}, \tag{8.2}$$

причем

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{8.3}$$

8.3 Типы маятников

Рассмотрим **пружинный маятник**. При малом смещении шарика вправо относительно положения равновесия (рис. 8.2) на него действует возвращающая сила F – сила упругости, пропорциональная смещению x и направленная к положению равновесия:

$$F = -kx, \tag{8.4}$$

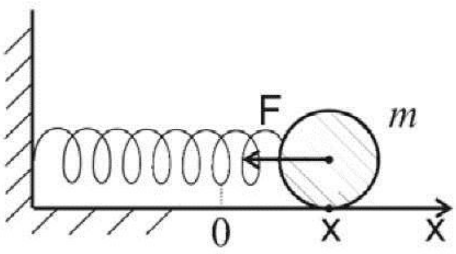


Рис. 8.2

где k – коэффициент упругости [Н/м].

Уравнение движения пружинного маятника определяется вторым законом Ньютона:

$$F = ma.$$

Так как $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, то уравнение движения шарика примет вид

$$-kx = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot m. \tag{8.5}$$

Преобразуем это уравнение:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0;$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{8.6}$$

где $\dfrac{k}{m}=\omega_0^2$, ω_0 – круговая частота собственных колебаний.

Следовательно, период собственных колебаний пружинного маятника будет определяться выражением

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \text{ или } T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (8.7)$$

Запишем общий вид дифференциального уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0.$$

Решением этого уравнения является функция $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, что можно проверить подстановкой. График $x(t)$ приведен на рисунке 8.3.

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на растяжимой и невесомой нити (рис. 8.4).

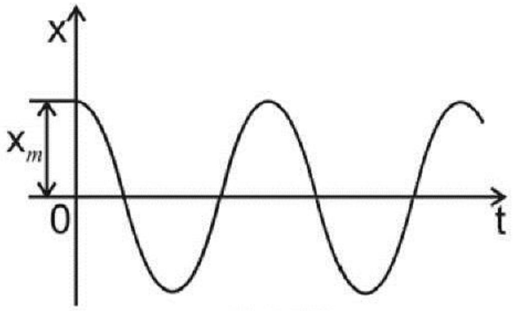


Рис. 8.3

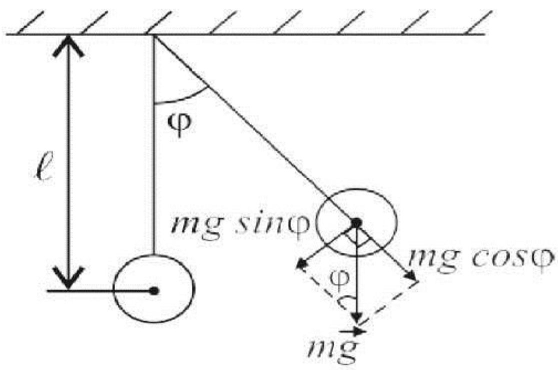


Рис. 8.4

Момент силы, действующей на маятник равен,

$$M=-mg\ell\sin\varphi.$$

Знак « – » указывает, что момент силы противоположен направлению поворота. Так как угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$ и $M=-mg\ell\varphi$. Основное уравнение динамики для вращающегося тела имеет вид

$$\vec{M}=J\cdot\vec{\varepsilon}.$$

Для математического маятника момент инерции $J=m\ell^2$, а угловое ускорение $\varepsilon=\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. Тогда как уравнение движения математического маятника запишется

$$-mg\ell\varphi=m\ell^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, решением которого является

$$\varphi = \varphi_{\max}\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где частота собственных колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, т.е. период собственных колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \qquad (8.8)$$

Выражение определено только для малых углов φ.

Физический маятник представляет собой твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс (центр тяжести) тела (рис. 8.5). Колебания маятника, как и в случае математического маятника, совершаются под действием силы тяжести:

$$mg\sin\varphi \approx mg\varphi.$$

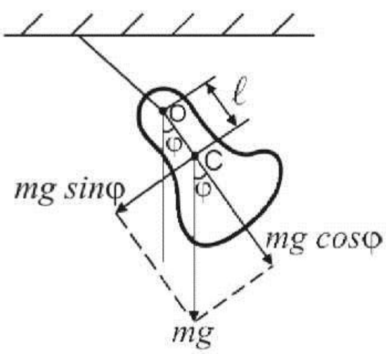


Рис. 8.5

Если маятник отклонить на некоторый угол φ от положения равновесия, то на него будет действовать момент силы:

$$M = mg\sin\varphi\ell$$

(или для малых углов $M = mg\varphi\ell$), возвращающий его в исходное положение, где ℓ – расстояние от точки подвеса O до центра тяжести маятника – C.

Воспользовавшись основным уравнением динамики вращательного движения $\vec{M} = J\cdot\vec{\varepsilon}$, запишем уравнение колебаний физического маятника:

$$-mg\varphi\ell = J\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mg\ell}{J}\cdot\varphi = 0.$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$\varphi = \varphi_{\max}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}$ – частота собственных колебаний маятника.

Таким образом, маятник будет совершать гармонические колебания, период которых определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\ell}}, \tag{8.9}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса; m – масса физического маятника; ℓ – расстояние от точки подвеса до центра тяжести маятника.

Свойствами маятников широко пользуются в различных приборах (в часах, в приборах для определения ускорения свободного падения, ускорений движущихся тел, колебаний земной коры, в гироскопических устройствах, в приборах для экспериментального определения момента инерции тел).

8.4 Энергия гармонических колебаний

Колебания любых физических величин почти всегда связаны с попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида.

Так, при отклонении маятника от положения равновесия увеличивается потенциальная энергия груза, запасенная им в поле тяжести; если груз отпустить, он падает, вращаясь около точки подвеса как около центра; в нижнем положении потенциальная энергия превращается в кинетическую, и груз проскакивает это положение равновесия, увеличивая снова потенциальную энергию. Далее процесс перекачки энергии повторяется, пока рассеяние (диссипация) энергии, обусловленное, например, трением, не приводит к полному прекращению колебаний (рис. 8.6).

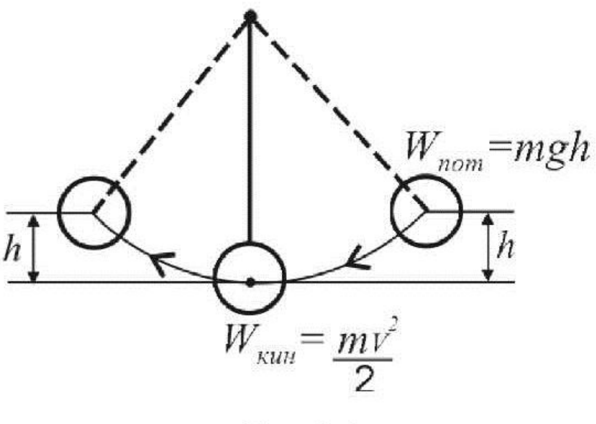


Рис. 8.6

Полная механическая энергия **пружинного** маятника в любой момент времени равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$W = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \tag{8.10}$$

где $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Мгновенная скорость маятника: $V = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$; подставив значение V и x в формулу для энергии, получим:

$$W = \frac{mA^2\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi)}{2} + \frac{kA^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)}{2}.$$

Так как $k = m\omega_0^2$, то

$$W = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\underbrace{\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\right]}_{=1} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \qquad (8.11)$$

Из выражения (8.11) следует, что полная энергия остается постоянной, если рассматриваемая система замкнута (нет рассеяния энергии). Графически зависимость энергии пружинного маятника от смещения x иллюстрируется на рисунке 8.7.

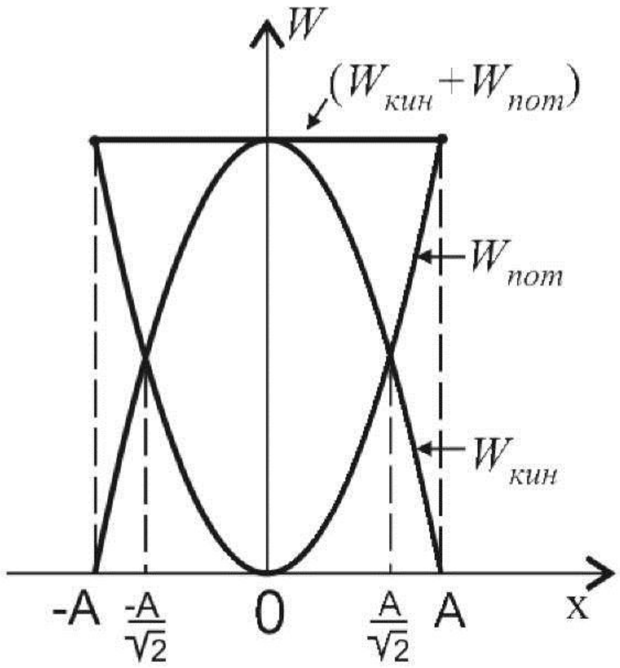


Рис. 8.7

8.5 Затухающие колебания

Затуханием колебаний называют уменьшение амплитуды колебаний с течением времени, обусловленное потерей энергии колебательной системой (например, превращение энергии колебаний в теплоту вследствие трения в механических системах). Затухание нарушает периодичность колебаний, потому они уже не являются периодическим процессом. Если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода колебаний – T (на рис. 8.8 A_0 – начальная амплитуда колебаний).

Затухающие механические колебания пружинного маятника происходят под действием двух сил: силы упругости $F = -kx$ и силы сопротивления:

$$F_{\text{сопр}} = -rv = -r\frac{dx}{dt},$$

где r – коэффициент сопротивления.

Воспользовавшись уравнением второго закона Ньютона, можно получить:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \text{ или } m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Разделим последнее уравнение на m и введем обозначение $\frac{r}{m} = 2\beta$ или $\beta = \frac{r}{2m}$, где β – коэффициент затухания, тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.12)$$

Данное выражение и есть дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Решением этого уравнения является

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.13)$$

Отсюда следует экспоненциальный характер затухающих колебаний, т.е. амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону (рис. 8.9):

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (8.14)$$

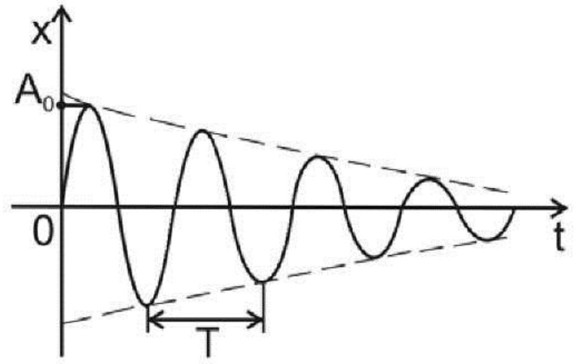


Рис. 8.8

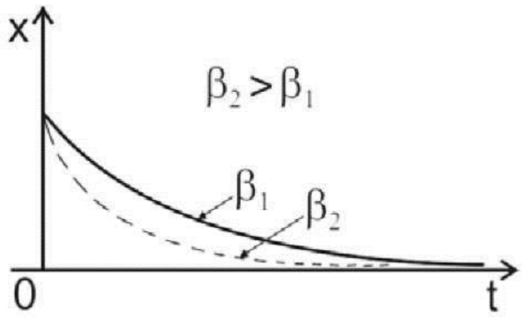


Рис. 8.9

Относительное уменьшение амплитуды колебаний за период характеризуется декрементом затухания, равным

$$\frac{A(t)}{A(T+t)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T} \quad (8.15)$$

или логарифмическим декрементом затухания:

$$\ln\frac{A(t)}{A(T+t)} = \beta T. \quad (8.16)$$

Коэффициент затухания β обратно пропорционален времени τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-1}; \text{ т.е. } \beta = \frac{1}{\tau}. \tag{8.17}$$

Частота затухающих колебаний всегда меньше частоты собственных колебаний и может быть найдена из выражения

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2,$$

где ω_0 – частота собственных колебаний системы.

Соответственно период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ или } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.18}$$

С увеличением трения период колебаний возрастает, а при $\beta = \omega_0$ период $T \Rightarrow \infty$. При дальнейшем увеличении β период становится мнимым, а движение точки **апериодическим** – выведенная из положения равновесия система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (рис. 8.10).

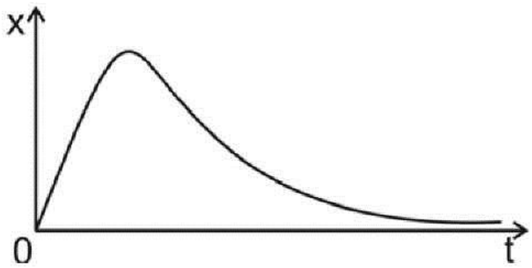


Рис. 8.10

Критическое затухание («успокоение») имеет большое значение в измерительных приборах, таких как баллистические гальванометры, которые испытывают резкие импульсивные воздействия в положении нулевого смещения.

8.6 Вынужденные колебания

Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие дополнительной переменной внешней силы, которая подталкивала бы материальную точку то в одну, то в другую сторону и работа которой непрерывно бы восполняла убыль энергии, затрачиваемой на преодоление трения. Такая переменная сила называется **вынуждающей** $F_{\text{вын}}$, а возникающие под ее действием незатухающие колебания – **вынужденными**.

Если вынуждающая сила изменяется в соответствием с выражением $F_{\text{вын}} = F_0 \cos\omega t$, то уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \tau\frac{dx}{dt} + F_0 \cos\omega t. \tag{8.19}$$

Так как $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{\tau}{m} = 2\beta$, то

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \tag{8.20}$$

где ω – циклическая частота вынуждающей силы.

Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Решение его может быть записано в виде

$$x = A\cos(\omega t - \varphi).$$

Уравнение описывает гармоническое колебание, происходящее с частотой, равной частоте вынуждающей силы, отличающееся по фазе на φ относительно колебаний силы.

Амплитуда вынужденного колебания:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0) + 4\beta^2\omega^2}}. \tag{8.21}$$

Разность фаз между колебаниями силы и системы находится из выражения

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega_0}. \tag{8.22}$$

График вынужденных колебаний показан на рисунке 8.11.

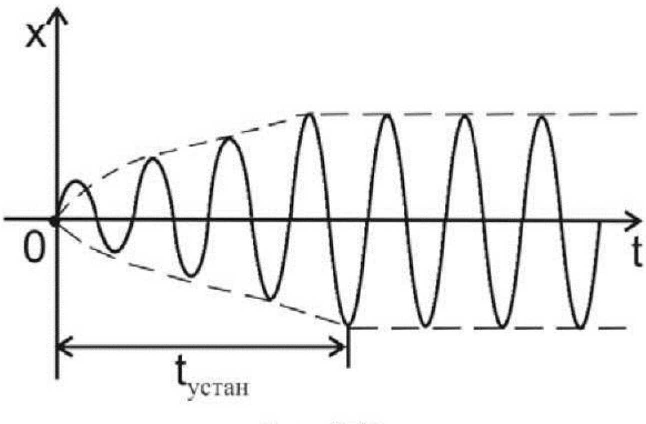


Рис. 8.11

При вынужденных колебаниях может наблюдаться такое явление, как резонанс. **Резонанс** – это резкое возрастание амплитуды колебаний системы.

Определим условие, при котором наступает резонанс, для этого рассмотрим уравнение (8.21). Найдем условие, при котором амплитуда принимает максимальное значение.

Из математики известно, что экстремум функции будет, когда производная равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial A}{\partial \omega} = 0.$$

Дискриминант равен

$$(\omega_0^2-\omega^2)+4\beta^2\omega^2=Д.$$

Следовательно $A=A_{max}$, если $Д=Д_{min}$ (см. (8.21))

$$\frac{\partial Д}{\partial\omega}=0 \text{ или } -2(\omega_0^2-\omega^2)\cdot 2\omega+4\cdot 2\beta^2\omega=0.$$

После преобразования получаем $\omega^2=\omega_0^2-2\beta^2$.

Следовательно $\omega_{рез}=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ – резонансная частота.

В простейшем случае резонанс наступает, когда внешняя периодическая сила F меняется с частотой ω, равной частоте собственных колебаний системы $\omega=\omega_0$.

В этом случае размах колебаний изменяется от периода к периоду в арифметической прогрессии – линейно (рис. 8.12).

В реальных условиях всегда существуют факторы, ограничивающие амплитуду колебаний и определяющие возможность существования резонанса. Это, прежде всего, рассеивание (диссипация) энергии в системе и неточное совпадение частоты вынуждающей силы с собственной частотой системы.

При $\omega=\omega_0$ механические колебания нарастают до тех пор, пока внешняя сила не уравновесится силой трения. Если же $\omega\neq\omega_0$, то даже при отсутствии трения колебания нарастают лишь до тех пор, пока фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ между скоростью системы и внешней силой не возрастает до $\frac{\pi}{2}$.

Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае будет определяться значением разности $(\omega-\omega_0)$. Таким образом, резонанс возможен, когда между внешней силой и вынужденными колебаниями устанавливаются такие фазовые отношения, при которых в систему поступает наибольшая мощность, т.к. скорость системы оказывается в фазе с внешней силой.

Зависимость амплитуды колебаний от частоты внешней силы графически может быть изображена так (рис. 8.13).

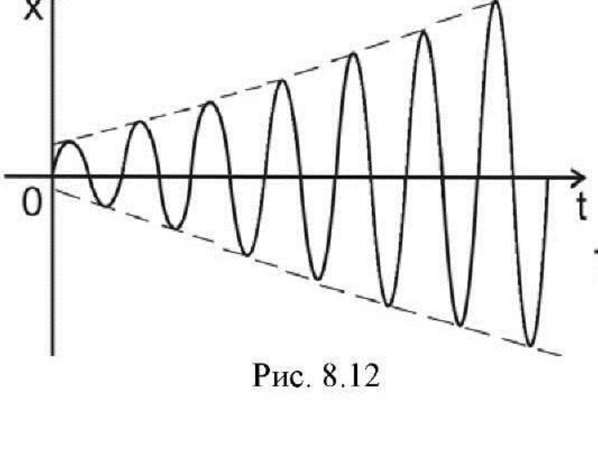


Рис. 8.12

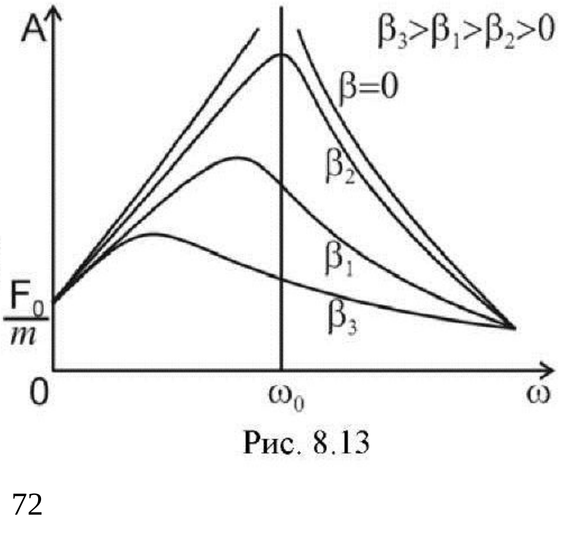


Рис. 8.13

Резонанс играет большую роль в природе, науке и технике. Резонанс сооружений и машин при периодических внешних воздействиях может являться причиной катастроф. Чтобы избежать резонансного воздействия, подбирают соответствующим образом свойства системы или используют успокоители колебаний, основанные на явлении антирезонанса. В радиотехнике благодаря резонансу можно отделить сигналы одной (нужной) радио- или телестанции от всех других.

8.7 Упругие волны

Процесс распространения колебаний в сплошной среде, периодический во времени и пространстве, называется **волновым процессом** или **волной**.

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передается лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством волн, независимо от их природы, является **перенос энергии без переноса вещества**.

Выделяют следующие типы волн:

1) волны на поверхности жидкости;

2) упругие волны;

3) электромагнитные волны.

Упругими (или механическими) **волнами** называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

В любой упругой волне одновременно существуют два вида движения: колебание частиц среды и распространение возмущения.

Волна, в которой колебания частиц среды и распространение волны происходят в одном направлении, называется **продольной**, а волна, в которой частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны, называется **поперечной**.

Продольные волны могут распространяться в средах, в которых возникают упругие силы при деформациях сжатия и растяжения, т.е. твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут распространяться в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т.е. в твердых телах. Таким образом, в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

Упругая волна называется **синусоидальной** (или гармонической), если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны** λ.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний:

$$\lambda = \upsilon \cdot T,$$

где υ – скорость распространения волны.

Так как $T = \frac{1}{\nu}$ (где ν – частота колебания), то

$$\upsilon = \lambda \cdot \nu.$$

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t, называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Бегущими волнами называют волны, которые переносят в пространстве энергию. Для вывода уравнения бегущей волны – зависимости смещения колеблющейся точки от координаты и времени – рассмотрим плоскую синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль оси x.

Пусть в точке O (рис. 8.14) расположен источник колебаний:

$$y(0,t) = A\cos\omega t.$$

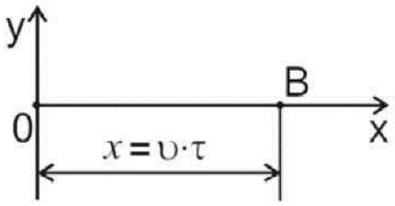


Рис. 8.14

В некоторой точке B, находящейся на расстоянии x от источника, колебания будут отставать по времени от колебаний в точке O, т.к. для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = \frac{x}{V}$, где V – скорость распространения волны.

Уравнение колебаний в точке B будет иметь вид

$$y(x,t) = A\cos\omega(t - \tau) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

В правой части уравнения раскроем скобки и преобразуем выражение $\frac{\omega x}{\upsilon}$.

Так как $\omega = 2\pi\nu$, а $\upsilon = \nu \cdot \lambda$, то

$$\frac{\omega x}{\upsilon} = \frac{2\pi\nu x}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x. \qquad (8.23)$$

После подстановки уравнение волны, бегущей вдоль оси x:

$$y(x;t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right).$$

В теории волн пользуются понятием **волнового вектора**:

$$\left|\vec{K}\right| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\upsilon}.$$

Абсолютное значение волнового вектора равно числу длин волн на отрезке 2π. Волновой вектор ориентирован в пространстве в направлении распространения волны.

Определим разность фаз колебаний двух точек одной волны. Пусть две точки имеют координаты x_1 и x_2, тогда уравнения колебаний этих точек:

$$y_1(x_1;t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_1);$$

$$y_2(x_2;t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_2).$$

Уравнение плоской волны, бегущей вдоль оси x, будет иметь вид

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - Kx). \qquad (8.24)$$

Разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_1 - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$, т.к. $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$, то

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\ell}{\upsilon}, \text{ или } \Delta\varphi = K\ell, \qquad (8.25)$$

где $\ell = x_2 - x_1$ – расстояние между двумя точками; ν – частота колебаний; υ – скорость распространения волны; K – волновой вектор.

В общем случае уравнение бегущей волны, распространяющейся в пространстве вдоль оси x, имеет вид

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - Kx + \varphi_0), \qquad (8.26)$$

где $K = \frac{\omega}{\upsilon}$ – волновое число, а $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ – фазовая скорость, или скорость распространения волны.

Фазовая скорость зависит от частоты ($\upsilon = \frac{\omega}{K}$).

Волновое уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \qquad (8.27)$$

Этому уравнению удовлетворяют плоская и сферическая волны.

ЛЕКЦИЯ 9
СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

9.1 Векторная диаграмма колебаний

Решение многих вопросов, в том числе сложение нескольких колебаний одного и того же направления, значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости (рис. 9.1).

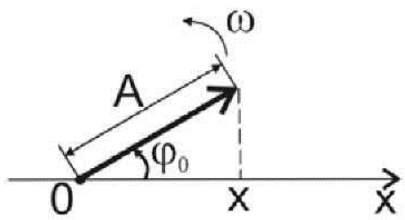


Рис. 9.1

Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $+A$ до $–A$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вращающегося вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол φ, равный начальной фазе колебания. Вращение вектора x может быть задано уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t.$$

9.2 Сложение колебаний одного направления. Биения

Возможны случаи, когда тело участвует одновременно в нескольких колебательных процессах, происходящих вдоль одного и того же направления. Например, шарик, подвешенный на пружине к потолку вагона, качающегося на рессорах, участвует в собственных колебаниях относительно вагона и в колебаниях вагона относительно Земли. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты, но с различными начальными фазами и амплитудами:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (9.1)$$

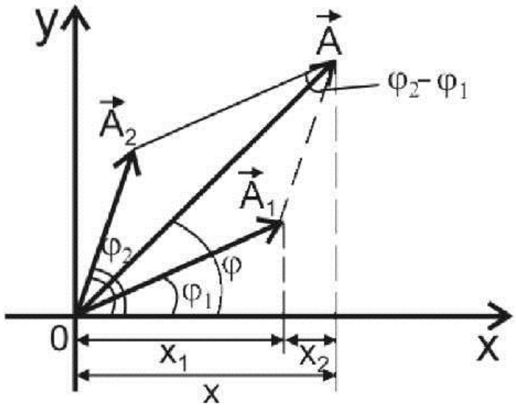


Рис. 9.2

Представим оба колебания на векторной диаграмме и построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\vec{A}$ (рис. 9.2).

Так как проекция $\vec{A}$ на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов, следовательно, вектор $\vec{A}$ представляет собой результирующее гармоническое колебание той же частоты ω, с амплитудой A и начальной фазой φ. Из построения видно, что по теореме косинусов можно записать:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cdot \cos\left[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\right],$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (9.2)$$

и

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (9.3)$$

Итак, при сложении двух гармонических колебаний одинаковой частоты, направленных по одной и той же прямой, результирующее движение – также гармоническое колебание с той же частотой ω и с амплитудой A, лежащей в пределах

$$(A_1 - A_2) \le A \le (A_1 + A_2). \qquad (9.4)$$

Если фазы обоих колебаний одинаковы $\varphi_2 = \varphi_1$, то амплитуды колебаний просто складываются $A = A_1 + A_2$.

Если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, то колебания находятся в противофазе, и $A = \left|A_1 - A_2\right|$, в частности, если $A_1 = A_2$, то $A = 0$, т.е. оба колебания взаимно уничтожаются.

Биениями называют периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами (рис. 9.3) (T – период биения).

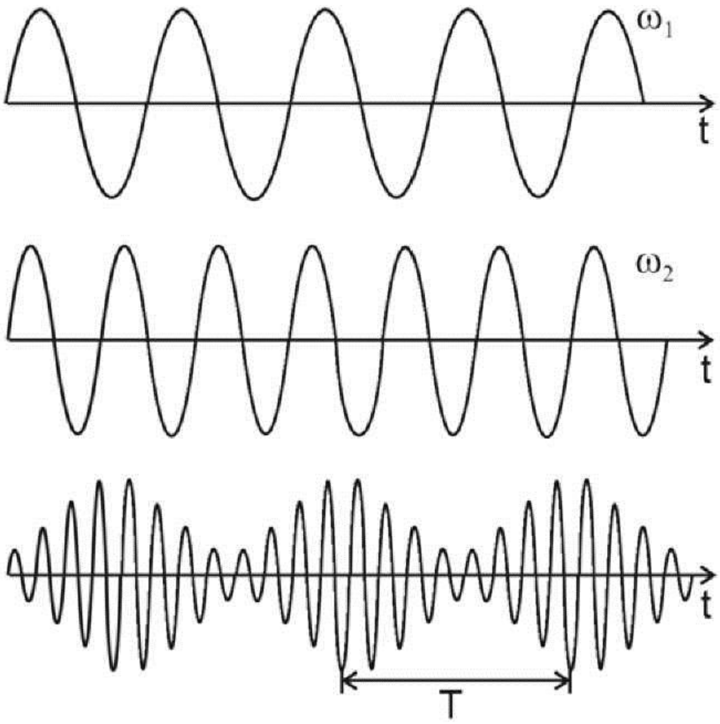


Рис. 9.3

Биение возникает вследствие того, что разность фаз между двумя колебаниями с различными частотами все время изменяется так, что оба колебания оказываются в какой-то момент времени в фазе, через некоторое время – в противофазе, затем снова в фазе и т.д. Если A_1 и A_2 – амплитуды двух накладывающихся колебаний, то при одинаковых фазах колебаний амплитуда достигает наибольшего значения $A = A_1 + A_2$, а когда фазы колебаний противоположны, амплитуда падает до наименьшего значения $A_1 - A_2$. В простейшем случае, когда амплитуды обоих колебаний равны, их сумма достигает значения $2A$ при одинаковых фазах колебаний и падает до нуля, когда они противоположны по фазе.

Результат наложения колебаний можно записать в виде

$$A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right), \qquad (9.5)$$

где ω_1 и ω_2 – циклические частоты двух накладывающихся гармонических колебаний.

Если ω_1 и ω_2 мало различаются, то величину $\left|2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$ в уравнении (9.5) можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду (огибающую) колебания, происходящего по закону

$$\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right).$$

Частота $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ называется циклической частотой биений.

$T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ – период биений.

По мере сближения частот ω_1 и ω_2 частота биения Ω уменьшается, исчезая при $\omega_1 \to \omega_2$ («нулевые» биения). Определение частоты биения между измеряемым и эталонным колебаниями – один из наиболее точных методов измерения частоты, широко применяемый на практике. Метод биений применяют для измерения емкости, индуктивности, для настройки музыкальных инструментов, при анализе слухового восприятия и т.д.

9.3 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим систему, обладающую двумя степенями свободы, т.е. такую систему, для задания положения которой нужны две координаты.

На рисунке 9.4 тяжелый шарик, подвешенный на легкой длинной пружине, совершает маятникообразные колебания в одной плоскости. Если растянуть и отпустить пружину, то шарик будет двигаться по некоторой сложной траектории, участвуя в двух колебаниях.

На рисунке 9.5 показан тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Этот шарик может совершать одновременно колебания во взаимноперпендикулярных направлениях, причем частоты колебаний одинаковы, в этом случае вид колебаний будет зависеть от разности фаз обоих колебаний.

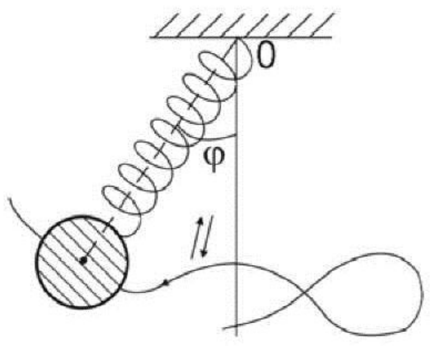


Рис. 9.4

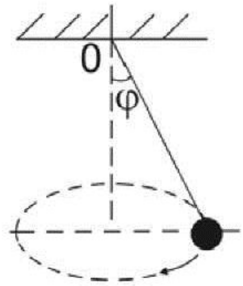


Рис. 9.5

Рассмотрим результат сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной и той же частоты ω, совершающихся вдоль координатных осей x и y. Уравнения этих колебаний запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x = A \cdot \cos \omega t, \\ y = B \cdot \cos(\omega t + \varphi), \end{cases} \tag{9.6}$$

где φ – разность фаз колебаний.

Чтобы получить уравнение траектории точки, нужно исключить из этих уравнений параметр t. Из первого уравнения следует, что

$$\cos\omega t = \frac{x}{A}, \tag{9.7}$$

тогда с учетом, что $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, можно записать

$$\sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \tag{9.8}$$

Преобразуем второе уравнение (9.6):

$$\frac{y}{B} = \cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi.$$

Подставим $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ (9.7) и (9.8) и избавимся от корня:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cdot \cos\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin\varphi.$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\left(\frac{x}{A} \cdot \cos\varphi - \frac{y}{B}\right)^2 = \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \cdot \sin\varphi\right)^2.$$

После преобразования имеем

$$\frac{x^2}{A^2} - 2\frac{xy}{AB} \cdot \cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi. \tag{9.9}$$

Как известно из аналитической геометрии, полученное уравнение является уравнением эллипса, ориентация и значение полуосей которого относительно осей x и y зависит от амплитуд A и B и разности фаз φ. Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

1. $\varphi = 0$. В этом случае уравнение примет вид

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

$$\text{или } y = \frac{B}{A} \cdot x.$$

Это уравнение прямой, следовательно, в этом случае точка движется по прямой (рис. 9.6).

2. $\varphi = \pm\pi$. Уравнение траектории примет вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

$$\text{или } y = -\frac{B}{A} \cdot x,$$

т.е. в этом случае точка гармонически колеблется вдоль прямой (рис. 9.7).

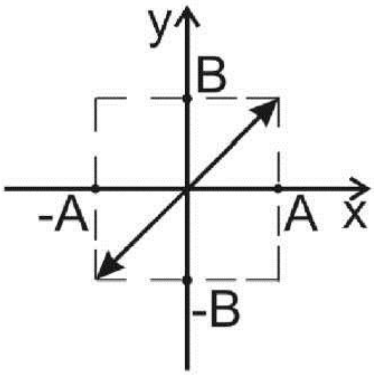


Рис. 9.6

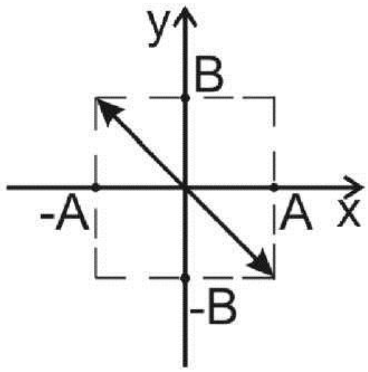


Рис. 9.7

3. При $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ уравнение траектории примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

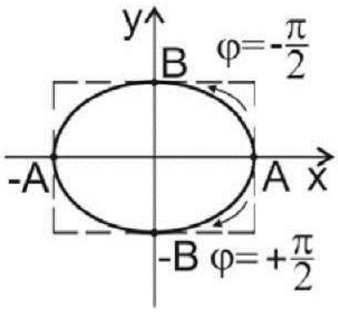


Рис. 9.8

Это уравнение эллипса, полуоси которого равны соответствующим амплитудам колебаний. Если $A = B$, эллипс вырождается в окружность; при $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ движение происходит по часовой стрелке, при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ точка движется по эллипсу против часовой стрелки (рис. 9.8).

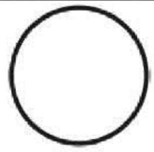
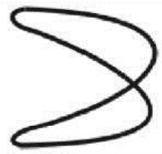
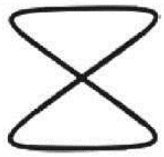
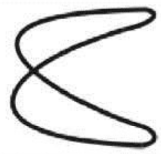
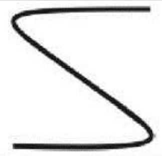
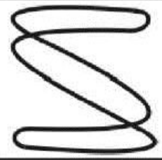
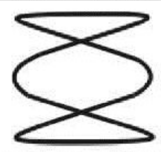
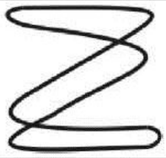
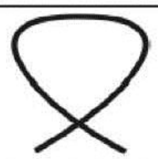
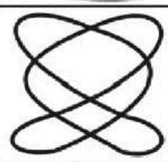
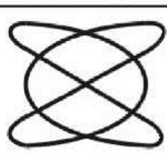
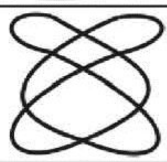
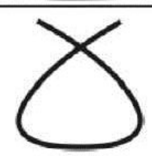
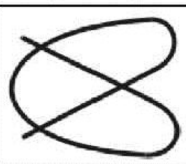
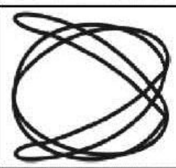
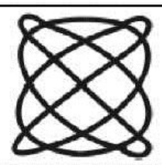
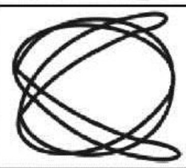
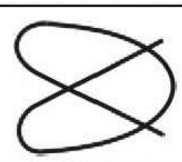
Фигуры Лиссажу

Если частоты двух взаимно перпендикулярных колебаний неодинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, называемых **фигурами Лиссажу** (таблица 5).

Метод фигур Лиссажу – широко распространенный способ сравнения (измерения) частот двух складываемых колебаний, т.к. отношение частот обратно пропорционально количеству точек касания кривой с соответствующей осью:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}.$$

Таблица 5

Отношение $\frac{n_x}{n_y}$	$\varphi = 0$	$\pi / 4$	$\pi / 2$	$3\pi / 4$	π
1:1					
1:2					
1:3					
2:3					
3:4					

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Детлаф, А. А Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 1989 ; 2000.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988. – 1 т.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высшая школа, 1998.