**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**
**КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА**
Примеры решения задач

## *1. Кинематика поступательного движения.*

$\vec{v}_{ср.} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ – средняя скорость;

$v_{ср.} = \dfrac{S}{t}$ – средняя скорость вдоль траектории;

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ – мгновенная скорость;

$v = \dfrac{dS}{dt}$ – величина мгновенной скорости;

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$ – проекция скорости на ось $OX$;

$\vec{a}_{ср.} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ – среднее ускорение;

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – мгновенное ускорение;

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ – проекция ускорения на ось $OX$;

$\vec{v}_{абс.} = \vec{v}_{пер.} + \vec{v}_{отн.}$ – закон сложения скоростей.

Равнопеременное движение ($\vec{a}$=const):

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}$ – радиус-вектор материальной точки;

$\Delta S = v_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$; $\Delta S = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a_\tau}$; $\Delta S = \dfrac{v + v_0}{2}t$ – длина пути;

$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ – скорость при равнопеременном движении.

## Примеры решения задач.

*Задача 1.*

Начальная скорость брошенного под некоторым углом к горизонту камня равна 10 м/с, а спустя 0.5 с скорость камня равна 7 м/с. На какую максимальную высоту над начальным уровнем поднимется камень?

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $v_0$=10 м/с<br>v=7 м/с<br>t=0.5 с | |
| Найти:<br>h=? | |

Максимальная высота подъема тела, брошенного под углом к горизонту, может быть найдена из общей формулы пути при равнопеременном движении в проекции на вертикальную ось

$$h = S_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y}$$

с учетом, что в наивысшей точке траектории отсутствует вертикальная составляющая скорости $v_y$=0, а $a_y = -g$:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}. \qquad (1)$$

Неизвестную проекцию начальной скорости на вертикальную ось $v_{0y}$ можно найти из формулы скорости при равнопеременном движении $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ в проекции на вертикальную ось:

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad (2)$$

и теоремы Пифагора для полной скорости в начальный момент времени и спустя время t после начала движения:

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2, \qquad (3)$$

$$v^2 = v_{0x}^2 + v_y^2 \ . \qquad (4)$$

Здесь учтено, что проекция скорости на горизонтальную ось $v_x = v_{0x} + a_x t$ не изменяется, так как $a_x = 0$. Вычтем почленно (4) из (3), и с учетом (2) получим:

$$v_0^2 - v^2 = 2v_{0y}gt - (gt)^2. \qquad (5)$$

Из (5) находим $v_{0y}$:

$$v_{0y} = \frac{v_0^2 - v^2 + (gt)^2}{2gt} = \frac{10^2 - 7^2 + (9{,}8 \cdot 0.5)^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 7.65 м/с.$$

Далее из (1) находим высоту подъема:

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{7.65^2}{2 \cdot 9.8} = 2.99 м.$$

Ответ: h=2.99 м.

*Задача 2.*

Уравнение движения тела имеет вид $x=5t+0.8t^3$. Определить ускорение и скорость тела в начальный момент времени, а также среднее ускорение за первые 5 секунд движения.

| Дано: $x=5t+0.8t^3$ $\Delta t=5c$ <br><br> Найти: $a_0=?$ $v_0=?$ $a_{ср.}=?$ | Решение: <br> Поскольку $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, то $$v=\frac{dx}{dt}=5+0.8\cdot 3t^2. \quad (1)$$ Далее, из $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ получим $$a=\frac{dv}{dt}=2.4\cdot 2t=4.8t. \quad (2)$$ Подставив в (1) и (2) t=0, найдем $v_0=5$ м/с, $a_0=0$ м/с$^2$. <br> Среднее ускорение находим по определению $\vec{a}_{ср.}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, то есть $a_{ср.}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_t-v_0}{t}$, где скорость в момент времени t=5c находим из (1): $v_t=v_5=5+2.4\cdot 5^2=65$ м/с. Окончательно $a_{ср.}=\frac{65-5}{5}=12$ м/с$^2$. |
|---|---|

Ответ: $a_0=0$ м/с$^2$;
$v_0=5$ м/с;
$a_{ср.}=12$ м/с$^2$.

## *2. Кинематика поступательного и вращательного движения.*

$a_\tau=\frac{dv}{dt}$ – величина тангенциального (касательного) ускорения;

$a_n=\frac{v^2}{R}$ – величина нормального (центростремительного) ускорения;

$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$ – полное ускорение;

$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ – модуль полного ускорения;

$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – угловая скорость;

$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – угловое ускорение;

$\Delta S=R\Delta\varphi$; $v=R\omega$; $a_\tau=R\varepsilon$ – связь линейных и угловых величин (путь, скорость и ускорение);

$\Delta\varphi=2\pi N$ – угловой путь;

$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}$ – связь угловой скорости с частотой и периодом вращения.

Равнопеременное вращательное движение (ε=const):

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ – угловая координата;

$\Delta\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$; $\Delta\varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t$ – угловой путь;

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ – угловая скорость.

## **Примеры решения задач**.

*Задача 3.*

Определить тангенциальное, нормальное и полное ускорение точки окружности диска для момента времени 10 с от начала движения, если радиус окружности 0.2 м, а угол между осью OX и радиус-вектором точки изменяется по закону: $\varphi=3-t+0.2t^3$.

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $\varphi=3-t+0.2t^3$<br>$t=10$ с<br>$R=0.2$ м | По формулам $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ находим угловую скорость и угловое ускорение точки: $\omega=-1+0.2\cdot3t^2$ , $\varepsilon=0.6\cdot2t$. Из формулы связи углового и линейного тангенциального ускорения найдем: $a_\tau=R\cdot\varepsilon=R\cdot(0.6\cdot2t)=1.2Rt=1.2\cdot0.2\cdot10=24$ м/с$^2$. |
| Найти:<br>$a_\tau$=?<br>$a_n$=?<br>$a$=? | Нормальное ускорение найдем из формулы $a_n = \frac{v^2}{R}$, где скорость $v=R\cdot\omega=R\cdot(-1+0.2\cdot3t^2)=R\cdot(0.6t^2-1)=$<br>$=0.2\cdot(0.6\cdot10^2-1)=11.8$ м/с; $a_n = \frac{11.8^2}{0.2} = 696 м/с^2$.<br>Теперь находим полное ускорение: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{24^2 + 696^2} = 697 м/с^2$. |

Ответ: $a_\tau=24$ м/с$^2$;
$a_n=696$ м/с$^2$;
$a=697$ м/с$^2$.

## ***3. Динамика. Работа, энергия. Законы сохранения.***

$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}$; $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ($\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$) – второй закон Ньютона;

$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс тела;

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ – третий закон Ньютона;

$F_{тяг.} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ – закон всемирного тяготения;

$F_{тяж.} = mg$ – сила тяжести;

$P = m(g \pm a)$ – вес тела;

$F_{упр.} = -k\Delta l$ – сила упругости;

$F_{тр.} = \mu N$ – сила трения;

$\rho = \dfrac{m}{V}$ – плотность тела;

$\vec{r}_{ц.масс} = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}$ – радиус-вектор центра масс.

Если $\sum\limits_i \vec{F}_i^{внешних} = 0$, то $\sum\limits_i \vec{p}_{i\,нач.} = \sum\limits_i \vec{p}_{i\,кон.}$ – закон сохранения импульса;

$dA = \vec{F}d\vec{S} = FdS\cos\alpha$ ; $A = \int \vec{F}d\vec{S}$ – работа силы;

$P = \dfrac{dA}{dt}$ ; $P = \vec{F}\vec{v}$ мощность;

$\eta = \dfrac{A_{полез.}}{A_{затр.}}$ – коэффициент полезного действия;

$\Delta E = A_{внешн.сил}$ ; $E_{полн.1} = E_{полн.2} + A_{системы\ против\ внешних\ сил}$ – закон изменения полной энергии системы;

$E_{мех.1} = E_{мех.2} + A_{системы\ против\ внешних\ сил} + A_{системы\ против\ диссипативных\ сил}$ – закон изменения механической энергии;

$E_{кин.} = \dfrac{m v^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения;

$E_{пот.} = mgh$ – потенциальная энергия тела, поднятого над Землей на небольшую высоту ($h \ll R_{Земли}$);

$E_{пот.} = \dfrac{k(\Delta l)^2}{2}$ – потенциальная энергия упруго деформированного тела;

$\vec{F} = -gradE_{пот.}$ $\left(F_x = -\dfrac{dE_{пот.}}{dx}\right)$ – связь потенциальной энергии и консервативной силы.

Если $\sum\limits_i \vec{F}_i^{внешних} = 0$, то $E_{полн.1} = E_{полн.2}$ – закон сохранения полной энергии.

Если $\sum\limits_i \vec{F}_i^{внешних} = 0$ и отсутствуют диссипативные силы, то $E_{механич.1} = E_{механич.2}$ – закон сохранения механической энергии.

## **Примеры решения задач**.

*Задача 4.*

С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью 5 км/с. На какую высоту она поднимется?

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $v_0 = 5000$ м/с | На ракету действует сила притяжения Земли, которая по |
| $R_{Земли} = 6.4 \cdot 10^6$ м | закону всемирного тяготения равна: |

| | |
|---|---|
| Найти: <br> h=? | $$F = \gamma \frac{M_З m}{r^2},$$ где m – масса ракеты, $M_З$ – масса Земли, $r=R_{Земли}+h$ – расстояние до центра Земли. Элементарная работа против силы тяжести при перемещении ракеты вверх на dr равна: dA=Fdr; полная работа при перемещении ракеты от поверхности Земли до высоты h рассчитывается интегрированием: $$A = \int_{R_З}^{r} F dr = \int_{R_р}^{r} \gamma \frac{M_З m}{r^2} dr = -\gamma \frac{M_З m}{r}\Bigg\vert_{R_З}^{r} = \gamma M_З m \left( \frac{1}{R_З} - \frac{1}{r} \right).$$ По закону сохранения энергии кинетическая энергия, которой обладала ракета на Земле, будет израсходована на работу против силы притяжения: $\frac{mv_0^2}{2} = A$. Тогда получим уравнение: $$\frac{mv_0^2}{2} = \gamma M_З m \left( \frac{1}{R_З} - \frac{1}{r} \right).$$ После сокращения на m и подстановки $r=R_{Земли}+h$ получим выражение для высоты: $$h = \frac{R_З}{\frac{2gR_З}{v_0^2} - 1} = 1.59 км.$$ Здесь учтено, что $g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$ - ускорение свободного падения на поверхности Земли. |

Ответ: h=1.59 км.

### *4. Динамика вращательного движения.*

$\vec{M} = \left[ \vec{r} \times \vec{F} \right]$ $(M = Fl)$ – момент силы;

$J = \int_m r^2 dm$ $(J = \sum_i m_i r_i^2)$ – момент инерции тела;

$J_{мат.точки} = mr^2$ – момент инерции материальной точки;

$J_{кольца} = mR^2$; $J_{цилиндра} = \frac{mR^2}{2}$; $J_{толст.кольца} = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$; $J_{шара} = \frac{2mR^2}{5}$; $J_{C\,стержня} = \frac{ml^2}{12}$ – моменты инерции тел относительно оси, проходящей через центр масс; $J_{стержня} = \frac{ml^2}{3}$ – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец;

$J = J_C + md^2$ – теорема Штейнера;

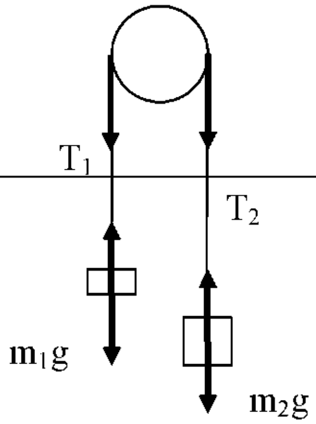
$\varepsilon_z = \dfrac{\sum M_z}{J_z}$ – закон динамики вращательного движения.

**Примеры решения задач.**

*Задача 5.*

Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязаны грузики массой 100 г и 110 г. С каким ускорением будут двигаться грузики? Какова сила натяжения шнура по обе стороны блока? Масса блока 400 г.

Дано:
$m_1$=0.1 кг
$m_2$=0.11 кг
$m$=0.4 кг




Решение:

Запишем второй закон Ньютона для поступательного движения в проекции на вертикальную ось,

| Найти: $a$=? $T_1$=? $T_2$=? | направленную вверх, для обоих грузиков: $$m_1 a = T_1 - m_1 g; \qquad (1)$$ $$-m_2 a = T_2 - m_2 g; \qquad (2)$$ Здесь учтено, что модули ускорений обоих грузов одинаковы, так как шнур считаем нерастяжимым. За положительное направление вращения блока примем вращение по часовой стрелке; запишем для него закон динамики вращательного движения: $$J\varepsilon = M_2 - M_1, \qquad (3)$$ где J– момент инерции сплошного диска (или цилиндра): $$J = \frac{mR^2}{2}; \qquad (4)$$ $\varepsilon$ – угловое ускорение блока, связано с линейным ускорением обода блока и шнура (предполагаем, что проскальзывания нет): $$a = R\varepsilon, \qquad (5)$$ здесь R – радиус блока; модули моментов сил натяжения шнура относительно оси вращения: $$M_1 = R \cdot T_1, \qquad (6)$$ $$M_2 = R \cdot T_2 \qquad (7)$$ Решая систему уравнений (1-7), получим: $$\frac{mR^2}{2}\frac{a}{R} = R\left(m_2(g-a) - m_1(a+g)\right),$$ откуда находим ускорение: $$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = 0.24 м/с^2,$$ а затем из (1) и (2) – силы натяжения шнура: $T_1 = m_1(a+g) = 0.1$ Н; $T_2 = m_2(g-a) = 1.05$ Н. |
|---|---|

Ответ: $a$=0.24 м/с$^2$;
$T_1$= 0.1 Н;
$T_2$=1.05 Н.

### *5. Динамика вращательного движения. Работа, энергия. Законы сохранения энергии и момента импульса.*

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$; $\vec{L} = J\vec{\omega}$ – момент импульса тела;

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ($\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$) – закон динамики вращательного движения в импульсной форме (закон изменения момента импульса).

Если $\sum_i \vec{M}_i = 0$, то $\sum_i \vec{L}_{i\,нач.} = \sum_i \vec{L}_{i\,кон.}$ – закон сохранения момента импульса.

$dA = Md\varphi$ – работа при вращательном движении;

$E_{кин.} = \dfrac{J\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения.

**Примеры решения задач**.

*Задача 6.*

Шар массой 1 кг, катящийся без скольжения со скоростью 10 см/с, ударяется о стенку и откатывается от нее со скоростью 8 см/с. Найти количество теплоты, выделившейся при ударе.

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $m$=1 кг<br>$v_0$=0.1 м/с<br>$v$=0.08 м/с<br>Найти:<br>$Q$=? | Будем считать стенку массивной и неподвижной. Тогда по закону сохранения энергии выделившаяся при ударе теплота равна изменению механической энергии шара: $$Q=E-E_0. \quad (1)$$ Полная кинетическая энергия катящегося тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс тела и кинетической энергии вращательного движения тела относительно центра масс, так как качение тела является суперпозицией этих двух движений: $$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (2)$$ Так как качение происходит без проскальзывания, то линейная скорость движения центра масс и угловая скорость вращения связаны соотношением: $$v=\omega R, \quad (3)$$ где R – радиус шара, J – момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс: $$J = \frac{2mR^2}{5}. \quad (4)$$ Подставив (3) и (4) в (2), получим формулу для энергии катящегося шара: $$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2}{5}\frac{\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = 0.7mv^2. \quad (5)$$ Аналогично, начальная кинетическая энергия шара: $$E_0 = 0.7mv_0^2. \quad (6)$$ Подставляем (5) и (6) в (1) и получаем искомую теплоту: $$Q = 0.7m\left(v^2 - v_0^2\right) = 0.7\cdot 1\cdot\left(0.1^2 - 0.08^2\right) = 2.52мДж$$ |

Ответ: Q=2.52 мДж.

## *6. Упругие свойства твердых тел.*

$\varepsilon_{||}=\dfrac{\Delta l}{l}$ – относительное удлинение;

$\varepsilon_{\perp}=\dfrac{\Delta d}{d}$ – относительное поперечное сжатие;

$\sigma=\dfrac{dF}{dS}$ ($\tau=\dfrac{dF}{dS}$) – нормальное (тангенциальное) механическое напряжение;

$F=k\Delta l$; $\varepsilon_{||}=\dfrac{\sigma}{E}$ – закон Гука;

$K_{\Pi}=\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{||}$ – коэффициент Пуассона;

$\gamma=\dfrac{\tau}{G}$ – закон Гука для деформации сдвига; где $\gamma$ – деформация сдвига (угол сдвига);

$\mathrm{G}=\dfrac{\mathrm{E}}{2(1+\mathrm{K}_{\Pi})}$; $G\approx 0.4E$ – связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

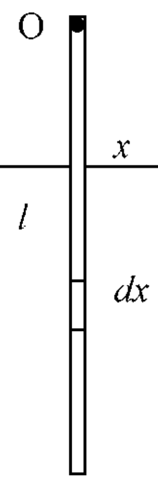
| Вещество | Плотность, кг/м$^3$ | Модуль Юнга, $E\cdot 10^{-10}$ Па | Предел прочности, $\sigma_{пр}\cdot 10^{-8}$ Па |
|---|---|---|---|
| Алюминий | 2600 | 6.9 | 1.1 |
| Железо | 7900 | 19.6 | 6 |
| Латунь | 8400 | - | - |
| Медь | 8600 | 11.8 | 2.4 |
| Платина | 21400 | - | - |
| Сталь | 7700 | 21.6 | 7.85 |
| Цинк | 7000 | - | - |

### **Примеры решения задач**.

*Задача 7.*

Однородный медный стержень длиной 1 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. При какой частоте вращения стержень разорвется?

Дано:
$l$=1 м
$\sigma_{пр}=2.4\cdot 10^8$ Па
$\rho$=8600 кг/м$^3$




Решение:

Найдем зависимость силы натяжения F стержня от координаты $x$. На расстоянии $x$

| | |
|---|---|
| Найти:<br>$\nu$=? | от оси вращения выделим фрагмент стержня бесконечно малой длины $dx$ и массой $dm=\rho S dx$. На него действуют силы: сила натяжения стержня F – вверх, сила натяжения стержня F+dF (со стороны нижней части стержня) – вниз и сила тяжести $gdm$ – тоже вниз. Запишем второй закон Ньютона для массы $dm$: $adm - F-(F+dF)- gdm$, |

где $a=\omega^2 x$ – центростремительное ускорение. Отсюда

$$dF=-dm(g+\omega^2 x)=-\rho S dx(g+\omega^2 x),$$

или:

$$\frac{dF}{dx}=-S\rho\left(g+\omega^2 x\right).$$

Зависимость F(x) теперь можно найти, интегрируя предыдущее выражение или найдя первообразную от выражения $\left(-S\rho\left(g+\omega^2 x\right)\right)$ и учтя очевидное граничное условие: F($l$)=0:

$$F(x)=-S\rho\left(gx+\frac{\omega^2 x^2}{2}\right)+S\rho\left(gl+\frac{\omega^2 l^2}{2}\right).$$

Максимальное натяжение будет при x=0:

$$F(0)=S\rho\left(gl+\frac{\omega^2 l^2}{2}\right),$$

а соответствующее механическое напряжение приравняем к пределу прочности:

$$\sigma_{пр.}=\frac{F(0)}{S}=l\rho\left(g+\frac{\omega^2 l}{2}\right).$$

Решаем полученное уравнение относительно угловой скорости и затем находим частоту:

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{l}\left(\frac{\sigma_{пр.}}{l\rho}-g\right)}=38Гц$$

Ответ: $\nu$=38 Гц

## *7. Механические колебания и волны.*

$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$; $v=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$; $a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)$ – смещение из положения равновесия, скорость и ускорение колеблющейся точки;

$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$ – дифференциальное уравнение гармонических колебаний;

$F=-\omega^2 mx=-kx$ – возвращающая сила при гармонических колебаниях;

$T_{пруж.} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$; $T_{матем.} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; $T_{физ.маятн.} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$ ; $\mathrm{T}_{\text{крут.маят.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{k}_{\text{крут.}}}}$ (здесь $k_{крут.} = -\dfrac{M}{\alpha}$ – модуль кручения) – период колебаний пружинного, математического, физического и крутильного маятников;

$E_{полн.} = \dfrac{kA^2}{2} = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$; $\dfrac{m\mathrm{v}^2}{2} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$ – закон сохранения энергии;

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$; $\varphi_0 = arctg\dfrac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}$ – амплитуда и начальная фаза результирующего колебания при сложении однонаправленных колебаний одинаковой частоты;

$\dfrac{x^2}{A_1^2} + \dfrac{y^2}{A_2^2} - 2\dfrac{xy}{A_1A_2}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi)$ – уравнение траектории точки, колеблющейся с одинаковыми частотами в перпендикулярных направлениях;

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ – дифференциальное уравнение затухающих колебаний;

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$ – круговая частота собственных незатухающих колебаний;

$\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания;

$F_{сопр.} = -r\mathrm{v}$ – сила сопротивления при затухающих колебаниях;

$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_{затух.}t + \varphi_0)$ – уравнение затухающих колебаний;

$\omega_{затух.} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – круговая частота затухающих колебаний;

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний;

$\lambda = \ln\dfrac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T$ – логарифмический декремент затухания;

$Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$ – добротность;

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$ (здесь $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$) – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний;

$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$; $\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{f}_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$; $\varphi_0 = arctg\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ – смещение из положения равновесия, амплитуда и фаза вынужденных колебаний;

$\omega_{рез.} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ – резонансная частота;

$\xi = A\cos(\omega t - kx)$, $\xi = \dfrac{A}{r}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$– уравнения плоской и сферической волн;

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{\mathrm{v}}$ – волновое число (волновой вектор);

$\lambda = \mathrm{v}T = \dfrac{\mathrm{v}}{\nu}$ – длина волны;

$\mathrm{v}_{звук.прод.} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$; $\mathrm{v}_{звук.попер.} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ – скорость распространения продольных и поперечных волн в твердом теле;

$\mathrm{v}_{газ.} = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$ – скорость звука в газе;

$\mathrm{v}_{струна.} = \sqrt{\dfrac{F}{\rho S}}$ – скорость распространения поперечной волны по струне.

**Примеры решения задач**.

*Задача 8.*

Найти частоту колебаний груза массой $m$=0.2 кг, подвешенного на пружине и помещенного в масло, если коэффициент сопротивления в масле $r$=0.5 кг/с, а коэффициент жесткости пружины k=50 Н/м .

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $m$=0.2 кг<br>$r$=0.5 кг/с<br>k=50 Н/м . | Колебания груза в масле являются затухающими, их круговая частота: $\omega_{затух.} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, |
| Найти:<br>$\nu$=? | где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$ – круговая частота собственных незатухающих колебаний; $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания. Тогда частота затухающих колебаний $\nu = \dfrac{\omega_{затух.}}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} - \left(\dfrac{\mathrm{r}}{2\mathrm{m}}\right)^2} = 2.51$Гц |

Ответ: $\nu$=2.51 Гц

## 8. Акустика.

$I = \dfrac{dW}{\Delta S dt} = wc$ – интенсивность волны ($c$ – скорость звука);

$w = \dfrac{\rho A^2 \omega^2}{2}$ – средняя объемная плотность энергии;

$L_I = \lg\dfrac{I}{I_0}$ (Б) ; $L_I = 10\lg\dfrac{I}{I_0}$ (дБ) – уровень интенсивности звука (здесь $I_0$=$10^{-12}$ Вт/м$^2$ – порог слышимости); уровень громкости, выраженный в фонах (фон), на частоте 1000 Гц совпадает с уровнем интенсивности, выраженным в децибелах.

$L_P = 20\lg\dfrac{\Delta p}{\Delta p_0}$ (дБ) – уровень звукового давления;

$\Delta p = \sqrt{2\rho c I} = \rho\omega c A$ – амплитуда звукового давления;

$\nu' = \nu \dfrac{c \pm \mathrm{v}_{наблюдателя}}{c \mp \mathrm{v}_{источника}}$ – доплеровский сдвиг частоты, здесь верхние знаки – для сближающихся источника звука и наблюдателя, нижние – для удаляющихся.

$Z = \rho c$ – волновое сопротивление среды;

$$\beta = \frac{4\dfrac{Z_1}{Z_2}}{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2} + 1\right)^2}; \quad r = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$$ – коэффициенты проникновения и отражения звука при переходе из одной среды в другую.

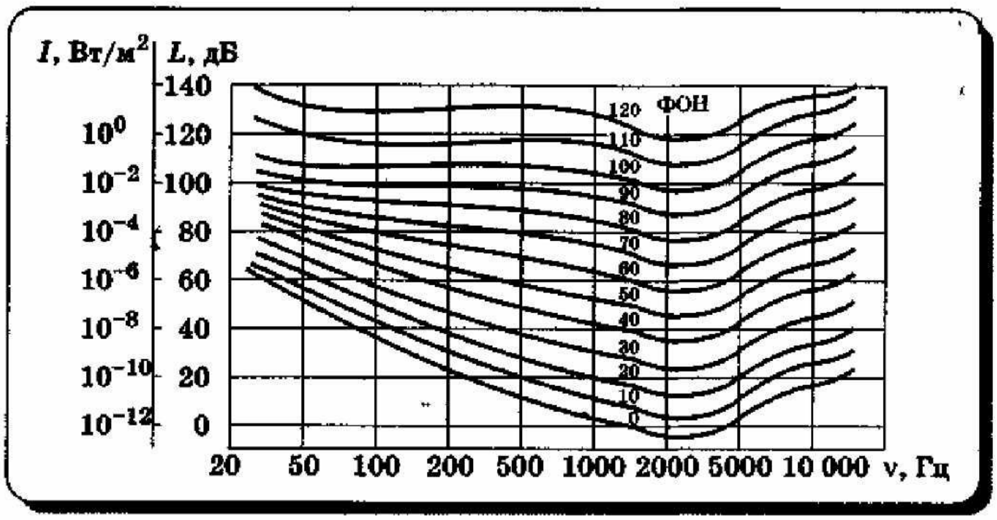



Рис.2. Кривые равной громкости.

## **Примеры решения задач**.

*Задача 9.*

Шуму на оживленной улице соответствует уровень громкости 70 фон, крику – 80 фон. Какой будет уровень громкости звука, полученного в результате сложения крика и шума улицы? Считать частоту равной 1 кГц.

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| $E_1$=70 фон | Для частоты 1000 Гц уровень громкости по определению |
| $E_2$=80 фон | совпадает с уровнем интенсивности, выраженному в |

| | |
|---|---|
| Найти:<br>E=? | децибелах, тогда<br>$$E = L_I = 10\lg\frac{I}{I_0}.$$<br>Выразим интенсивность звука: $I = I_0 \cdot 10^{\frac{E}{10}}$, тогда получим для шума и для крика соответственно интенсивности звука: $I_1 = I_0 \cdot 10^7$; $I_2 = I_0 \cdot 10^8$. Интенсивность результирующего звука можно найти сложением двух звуков:<br>$$I=I_1+I_2=I_0 \cdot 10^7(1+10).$$<br>Теперь можно найти уровень громкости по определению:<br>$$E = L_I = 10\lg\frac{I}{I_0} = 10\lg\frac{I_0 \cdot 11 \cdot 10^7}{I_0} = 80.4\text{фон}$$ |

Ответ: E=80.4 фон

## *9. Теория относительности.*

$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ – релятивистское сокращение длины;

$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивистское замедление времени;

$E_0 = mc^2$ – энергия покоя;

$E_{кин.} = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)$ – кинетическая энергия;

$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – полная энергия;

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ – взаимосвязь энергии и импульса;

$v = \frac{v' + v_0}{1+\frac{v'v_0}{c^2}}$; $v' = \frac{v - v_0}{1-\frac{vv_0}{c^2}}$ – релятивистский закон сложения скоростей;

$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$; $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивистский импульс;

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ – закон динамики в теории относительности.

### **Примеры решения задач**.

*Задача 10.*

Импульс релятивистской частицы массой $m$ равен $mC$. Под действием внешней силы импульс частицы увеличился в 2 раза. Во сколько раз при этом возрастет энергия частицы: 1) кинетическая; 2) полная?

| Дано: | Решение: |
| --- | --- |
| $p_1=mC$<br>$p_2=2mC$ | Воспользуемся формулой взаимосвязи импульса и полной энергии: $E^2-p^2c^2=m^2c^4$. Тогда получим для двух состояний частицы: |
| Найти:<br>$\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=?$<br>$\frac{E_1}{E_2}=?$ | $$E_1=\sqrt{p_1^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{(mc)^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{2}mc^2,$$ $$E_2=\sqrt{p_2^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{(2mc)^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{5}mc^2,$$ откуда $\frac{E_1}{E_2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=1.58$.<br>Кинетическая энергия равна разности полной и энергии покоя: $E_{кин.}=E-E_0$. Тогда $$E_{k1}=E_1-E_0=\sqrt{2}mc^2-mc^2=mc^2\left(\sqrt{2}-1\right),$$ $$E_{k2}=E_2-E_0=\sqrt{5}mc^2-mc^2=mc^2\left(\sqrt{5}-1\right).$$ И, наконец: $$\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}-1}=3.01.$$ |

Ответ: $\frac{E_1}{E_2}=1.58$;

$$\frac{E_{k1}}{E_{k2}}=3.01$$

## *10. Механика жидкостей и газов.*

$S_1v_1=S_2v_2$ – уравнение неразрывности;

$p=\frac{dF}{dS}$ – давление;

$p_{гидростат.}=\rho gh$ – гидростатическое давление;

$F_{Арх.}=\rho_ж V_{погр.}g$ – закон Архимеда;

$\rho gh+\frac{\rho v^2}{2}+p=const$ – уравнение Бернулли;

$\vec{F}=-\eta\frac{d\vec{v}}{dx}S$ – сила вязкого трения между слоями жидкости или газа;

$\nu=\frac{\eta}{\rho}$ – кинематическая вязкость;

$\mathrm{Re}=\frac{\langle v\rangle d}{\nu}$ – число Рейнольдса;

$\vec{F}_{Стокса}=-6\pi\eta r\vec{v}$ – закон Стокса;

$Q = \frac{dV}{dt}$ – объемный расход;

$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l}$ – формула Пуазейля.

**Примеры решения задач**.

*Задача 11.*

В трубе с внутренним диаметром 3 см течет вода. Определить максимальный массовый расход воды при ламинарном течении. Вязкость воды 0.001 Па·с. Ламинарность движения жидкости сохраняется при числе Рейнольдса

| Дано: | Решение: |
|---|---|
| d=3 см<br>η=0.001 Па·с<br>$Re_{кр.}$=3000 | Массовый расход жидкости – это, аналогично объемному расходу, масса жидкости, протекающей через сечение трубы за единицу времени: |
| Найти:<br>$Q_m$=? | $$Q_m = \frac{dm}{dt}.$$ Так как m=ρV, то $$Q_m = \rho\frac{dV}{dt}. \quad (1)$$ Считаем течение ламинарным вплоть до критического числа Рейнольдса, тогда $$Re_{кр} = \frac{vd}{\nu}, \quad (2)$$ где кинематическая вязкость связана с динамической: $$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (3)$$ а средняя скорость движения жидкости v позволит найти путь, пройденный частицами воды за время dt: dl=vdt и объем протекшей через поперечное сечение S за это время жидкости: $$dV=Sdl=Svdt. \quad (4)$$ Решая систему уравнений (1-4), получим: $$Q_m = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\frac{Svdt}{dt} = \rho Sv = \rho S\frac{Re_{кр}\,\nu}{d} = \rho S\frac{Re_{кр}\,\eta}{\rho d} = S\frac{Re_{кр}\,\eta}{d}.$$ Наконец, выразим площадь сечения трубы через диаметр: $$S = \frac{\pi d^2}{4},$$ тогда: $$Q_m = S\frac{Re_{кр}\,\eta}{d} = \frac{\pi d\,Re_{кр}\,\eta}{4} = \frac{3.14\cdot 0.03\cdot 3000\cdot 0.001}{4} = 0.071 кг/с$$ |

Ответ: $Q_m$=0.071 кг/с