ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
Учебно-методическое пособие

Пособие имеет целью познакомить читателя с конструктивным подходом к анализу задачи, с тем, чтобы на практических занятиях студент не только знакомился со специальными приемами решения отдельных задач, но и приобретал умения самостоятельно справляться с незнакомыми задачами.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть пособия содержит общие рекомендации к решению задач с детально разобранными примерами из курса теоретической механики. Во второй части пособия показано применение приведенной методологии на некоторых задачах из разделов: «дифференциальные вариационные принципы механики» и «уравнения Лагранжа второго рода».

Пособие предназначено для студентов младших курсов физико-математических направлений вузов.

Содержание

Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным, и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Д. Пойа

Введение

Разные авторы термину «задача» дают различные определения, но все они сходятся в том, что задача — это ситуация, требующая от человека целенаправленного умственного действия для нахождения неизвестного, опираясь на его связи с известным. «Основная часть нашего сознательного мышления связана с решением задач. Когда мы не развлекаемся и не мечтаем, наши мысли направлены к какой-то конечной цели. Мы ищем пути и средства к достижению этой цели», – писал Д. Пойа [1].

Для человека, решающего задачу, возможен один из трех случаев:

- человек обладает способом этого действия, т. е. знает способ решения задачи. Такие задачи называют **стандартными**;
- способ действия в принципе существует, но человек им не владеет. Он должен найти этот способ сам. Такого рода задачи обычно называют **нестандартными** (поисковыми, творческими, проблемными);
- способ действия неизвестен не только человеку, решающему задачу, но и науке. Это так называемые **оригинальные** задачи.

Задачи, которые вы решаете на занятиях по различным дисциплинам, отличаются по содержанию и целям, но по структуре деятельности, нужной для решения, они практически одинаковы. Более того, сравнительный анализ показывает, что деятельность по решению инженерно-технических и учебных задач имеет общую структуру.

Решение любой задачи включает в себя четыре принципиально важных этапа:

- *изучение (анализ) содержания задачи, краткая запись условий и требований;*
- *поиск способа (принципа) решения и составление плана решения;*
- *осуществление решения, проверка правильности и его оформление;*
- *обсуждение (анализ) проведенного решения, отбор информации, полезной для дальнейшей работы.*

Существование общности позволит вам в процессе решения учебных задач по теоретической механике овладеть умениями, необходимыми для решения разного рода задач в его дальнейшей учебной и производственной деятельности.

Упражнения в решении задач относятся к практическим методам обучения и выполняют те же функции, что и обучение теоретической механике: **образовательную, воспитательную, развивающую.**

При решении задачи вы получаете определенные знания, приобщаетесь к специфическим физическим и общенаучным методам и принципам научного познания, у вас вырабатываются практические умения и навыки. На материале задач вы находите объяснение части теоретического материала. Физический смысл различных определений, правил, законов становится действительно понятным лишь после неоднократного применения их к конкретным частным примерам-задачам. Знания считаются усвоенными только тогда, когда вы можете применять их на практике. Решение задач – практическая деятельность. Поэтому задача выступает и в качестве критерия усвоения знаний. По умению решать задачу судят, насколько глубоко вы понимаете данное явление, закон, умеете ли вы увидеть в рассматриваемом процессе проявление какой-либо физической закономерности.

Решение учебных задач воспитывает и общечеловеческие качества: требует трудолюбия, пытливости ума, смекалки, самостоятельности в суждениях, интереса к учению, воли и характера, упорства в достижении поставленной цели. «Обучение искусству решать задачи есть воспитание воли. Решая не слишком легкую для себя задачу, ученик учится быть настойчивым, когда нет успеха, учится ценить скромные достижения, терпеливо искать идею решения и сосредоточиваться на ней всем своим «я», когда эта идея возникает» [1].

Наконец отметим, что при решении задачи включаются все мыслительные процессы: внимание, восприятие, память, воображение, мышление. В этом реализуется развивающая функция упражнений в решении задач.

Учебная задача по теоретической механике требует от студента:

- мыслительных и практических действий, основанных на знании им понятий и законов теоретической механики и направленных на закрепление, углубление и развитие этих знаний;
- формирования умений применять знания на практике;
- развития научного мышления, т.е. способности анализировать явления (процессы), находить в них общие черты и различия, устанавливать причинные связи, отыскивать функциональные зависимости и, наконец, сопоставлять факты с теоретическими предпосылками.

Решить учебную задачу по механике – значит найти последовательность общих положений механики (законов, формул, определений, правил), использование которых позволяет получить то, что требуется в задаче, — ее ответ. Процесс решения задачи по теоретической механике предполагает следующие действия:

- изучение условий и требований задачи;
- запись условий в буквенных выражениях;
- графическое изображение процесса, описанного в задаче;
- поиск пути решения;
- составление плана решения;
- осуществление решения;
- запись искомых величин в виде формул и вычисление их значений с требуемой точностью;
- проверку правильности решения;
- оценку полученных результатов по здравому смыслу;
- анализ процесса решения задачи и отбор информации, полезной для дальнейшей деятельности.

Правильное и рациональное исполнение этих действий требует определенной системы знаний как разделов механики, к которым относится данная конкретная задача, так и полученных ранее знаний по физике, математике и другим учебным дисциплинам, а также знаний четырех общих этапов решения задач, особенностей и роли каждого из этих этапов.

Вы можете и должны овладеть устойчивым умением решать задачи по механике и другим дисциплинам. Для серьезного овладения любым умением необходимо осознанное желание человека. Целеустремленное желание мобилизует внимание, повышает интерес, создает настроение выполнить любую работу, нужную для овладения этим умением. Желание — важнейшее условие для любой самостоятельной деятельности, оно любое дело превращает в творческий процесс. А творческий труд всегда оказывается более легким, более рациональным, ибо он сродни самой природе человека. С самого начала изучения курса регулярно прорабатывайте и осваивайте материал по учебным пособиям, лекциям серьезно ведите подготовку к практическим занятиям и старайтесь задачи, рассматриваемые в аудитории и задаваемые на дом, решать ***самостоятельно***. Нельзя научиться решать задачи, только наблюдая за тем, как это делают другие! Ни в коем случае не следует использовать при решении задач многочисленные «решебники» и прочие «пособия», наводнившие книжный рынок. «Когда задачу решает другой, все ясно, когда решаешь сам, ничего не выходит» (Леонард Эйлер). Только при возникновении конкретной трудности следует обращаться за помощью к преподавателю или товарищам. Серьезные затруднения, возникающие при выполнении домашних заданий, нужно устранять на ближайшей же консультации с помощью преподавателя. Только основательная теоретическая подготовка и правильно организованная самостоятельная работа способствуют осознанному решению задач по механике и целенаправленному формированию нужных для дальнейшей учебы и профессиональной деятельности умений.

В задачниках по теоретической механике приводятся задачи двух видов: на усвоение учебного материала (стандартные задачи) и активное использование изученного материала. Основная учебная функция упражнений по решению стандартных задач — перевод знаний, усвоенных на уровне воспроизведения, на уровень знаний-умений. Для таких задач имеются способы решения, одни из которых описаны в самих задачниках, другие анализируются преподавателями на занятиях. Решение задач на активное использование изученного материала — нестандартных или проблемных, поисковых, творческих задач, вызывает затруднения иногда даже у наиболее подготовленных студентов. И это понятно: самостоятельный поиск способа решения задачи — дело непростое. Он требует от человека не только глубоких знаний, но и проявления находчивости, целеустремленности и большого напряжения умственных способностей. Только при решении нестандартных задач труд студента можно сравнить с трудом исследователя. Только на нестандартных задачах реализуется в полной мере развивающая функция обучения механике.

«Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!» (Д. Пойа). Но представление о том, что практика – это единственный метод формирования умения решать задачи, ошибочно. Вместо бездумного решения большого количества задач полезнее решать их несколько меньше, но обстоятельно. Решение должно заключать в себе глубокое изучение этих задач, сущности их решения, выявление общих методов и приемов, используемых в решении.

Для того чтобы у вас выработалась привычка все приемы по решению задач выполнять правильно, полуавтоматически, следует при решении и стандартных, и нестандартных задач сознательно выделять каждый из четырех этапов решения.

Особое внимание обращайте на формирование осознанного подхода к поискам и конструированию методов решения, выработке дисциплинированного мышления в процессе решения, развитию эстетического взгляда на решение задач, предполагающего оценку решения не только с точки зрения его безупречной логической правильности, но и красоты и изящества. На протяжении всех лет обучения в университете сама деятельность по решению задач должна быть объектом глубокого изучения.

Часть I

I.1. Анализ условий и требований задачи

Зачем и как нужно анализировать условия и требования задачи? Решение задачи начинается с ознакомления с ее содержанием и детального анализа содержания. Такой анализ позволяет представить суть описанного в задаче явления или процесса, установить, что в рассматриваемой ситуации следует считать первостепенным, а что второстепенным, найти «стержень» рассматриваемого в задаче явления. Анализ содержания задачи необходим для четкого выделения явно и выявления неявно заданных величин, уточнения условий (состояний), в которых протекает процесс, описанный в задаче, и, наконец, выяснения ее требований. Часто условия задачи необходимо предварительно упростить, абстрагироваться от реальных условий. Одни упрощения оговариваются в тексте задачи, другие приходится делать самим решающим.

Исключительно важен детальный анализ каждой фразы, каждого слова в словесной формулировке задачи. Как правило, ничто из того, что содержится в словесной формулировке задачи, не бывает приведено без соответствующей цели.

Все четыре этапа решения задачи тесно связаны между собой. Успех каждого последующего в значительной степени зависит от качества выполнения предыдущих этапов. Анализ содержания задачи неотделим от поиска способа ее решения. Они переплетаются, так что общие положения механики и частные условия задачи непрерывно соотносятся друг с другом. В ходе анализа выявляются новые свойства объекта, новые отношения между элементами задачи. Детальный анализ условий и требований задачи помогает сосредоточить все внимание на решаемой задаче и заставляет вашу мысль двигаться только в круге понятий и идей, имеющих прямое или косвенное отношение к ней. Он способствует осознанию величин, фигурирующих в формулировке задачи, выявлению зависимостей между величинами, прямо выраженных в тексте задачи и скрытых в нем.

Важны две материализованные формы анализа содержания задачи:

- краткая запись условий и требований;
- схематическое изображение (рисунок, чертеж, схема, график) процесса или ситуации, описанных в задаче.

Краткая запись условий и требований воссоздает общую картину, представленную в задаче, помогает удержать в памяти исходные данные и требования, способствует уяснению прямо заданных в тексте зависимостей.

Под краткой формой записи условий и требований задачи понимают запись всех данных в задаче величин через общепринятые буквенные обозначения. При этом числовые значения физических величин должны обязательно сопровождаться соответствующими единицами. Для различения нескольких значений одной и той же величины следует снабжать соответствующее ей буквенное обозначение индексами в виде цифр. Одноименные же величины, например силу трения и силу сопротивления среды, — индексами в виде начальных букв слов, обозначающих величину. Наиболее приемлемой представляется такая последовательность данных в краткой записи задачи:

- вопрос, требование задачи;
- указание явления или объекта, о котором идет речь в задаче;
- значения величин, указанных в тексте задачи;
- значения величин, взятых из таблиц и справочников.

Такая запись акцентирует внимание на отыскание искомой величины, позволяет дописывать все необходимые данные из таблиц и справочников.

Краткую запись условий и требований задачи следует выполнять так, чтобы по ней можно было восстановить всю заданную ситуацию в целом.

Схематическое изображение содержания задачи выступает не только и не столько в роли наглядного представления конкретного содержания задачи и описанных в ней зависимостей, сколько в роли модели, помогающей выявлению скрытых зависимостей между величинами.

Полезно выработать привычку: пока не выполнен глубокий, всесторонний анализ содержания задачи (задачной ситуации), не произведена краткая запись ее условий и требований, не построена, если можно, графическая модель задачной ситуации, не приступать к самому решению задачи. Поспешность в решении задачи вредна!

Как проводить детальный анализ содержания задачи? Исходным звеном любого познавательного процесса, в том числе и анализа содержания учебной задачи, является вопрос. Вопрос — это продуктивная форма мысли, представляющая собой переход от незнания к знанию, от неполного и неточного знания к более полному и точному. Именно вопрос вызывает первое пробуждение мысли. Вопрос толкает мысль на устранение возникшей неясности. Он предшествует и способствует образованию новых суждений, наводит на новые ассоциации, помогает становлению нового знания.

Умение правильно ставить вопросы не менее важно, чем нахождение способов получения ответов. «Хорошо поставить вопрос — значит наполовину решить его» (Д.И. Менделеев). Поэтому вам надлежит как можно скорее научиться ставить и формулировать вопросы. Такое умение, нужное при анализе содержания задачи, в еще большей степени понадобится при поиске способов ее решения.

Приведем систему контрольных вопросов:

- о каком объекте идет речь в задаче? (материальная точка, система материальных точек, твердое тело, и т. д.);
- о каком явлении идет речь в задаче? (движение, равновесие и т. д.);
- в каких условиях находится объект?
- в каких условиях протекает явление (процесс)?
- какую величину нужно найти?
- известно ли вам определение искомой величины?
- размерной или безразмерной является искомая величина?
- скалярной или векторной является искомая величина?
- известна ли вам единица измерения искомой величины?
- постоянна или переменна искомая величина в процессе, описанном в задаче?
- какие величины даны в условии задачи?
- известны ли вам определения заданных величин?
- содержит ли условие задачи величины, заданные в неявном виде?
- значения каких величин нужно взять из справочных таблиц?
- можно ли явление (процесс), описанное в задаче, изобразить схематически?

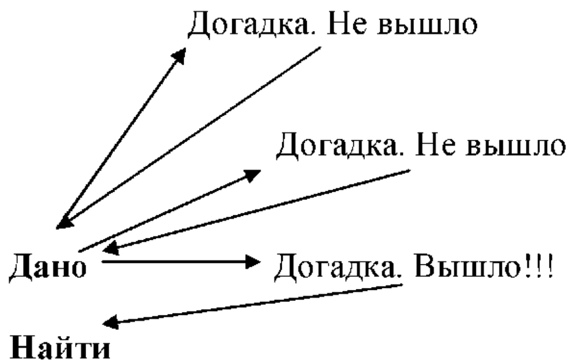
Разумеется, этот перечень не охватывает всей совокупности вопросов, необходимых для анализа содержания задачи, и каждый решающий задачу может и должен расширить его дополнительными вопросами.

I.2. Поиск плодотворной идеи. План решения

Если с помощью краткой записи и схемы удается полностью восстановить первоначальный текст задачи, то можно считать, что условия и требования задачи поняты правильно. Теперь нужно приступать ко второму этапу решения. Он является самым интересным, самым сложным этапом, так как нет единого, универсального метода для его преодоления. Тем не менее, существуют приемы, которые при умелом их использовании заметно облегчают решение многих трудных задач. Разработкой таких приемов занимается эвристика — учение о творческом мышлении человека, учение о тех мыслительных процессах, которые оказываются полезными при поиске решения задач. Эвристические приемы люди используют не только при поиске решения учебных задач, но и для принятия решений по производственным и научным вопросам, и отыскания выхода из затруднительных ситуаций в жизненных условиях.

Вообще говоря, при решении задач по механике и другим учебным дисциплинам вы пользуетесь эвристическими (интуитивными) приемами. Только делаете это, сами того не подозревая. Поиску подхода к решению нестандартной задачи чаще помогают не доводы логики, а случайно подмеченная аналогия, навеянное примерами предположение (которое вовсе не является логически обоснованным), опыт, интуиция и другие психологические факторы. «Догадка предшествует доказательству» (А. Пуанкаре).

Путь от понимания постановки задачи до формирования плана решения не всегда оказывается прямым. Главный шаг на пути к решению задачи состоит в том, чтобы выработать идею плана. Схематически процесс отыскания плодотворной идеи можно представить так:



Здесь нужны умения и навыки целенаправленного поиска, знание приемов догадки, о которых подробно рассказано, например, в книге Д. Пойа [1]. Овладеть такими приемами поможет умение составлять систему целенаправленных вопросов. Любой творческий процесс по сути своей является напряженным поиском ответа на поставленный вопрос, т.е. представляет собой применение эвристической процедуры. «Ключом ко всякой науке, бесспорно, является вопросительный знак; вопросу как? — мы обязаны большею частью великих открытий» (О. Бальзак).

Для примера приведем несколько вопросов:

- Имеется ли между искомой и заданными величинами прямая функциональная связь?
- Имеется ли между искомой и заданными величинами косвенная функциональная связь?
- Не решалась ли мною ранее аналогичная задача?
- Можно ли и в данной задаче применять этот же метод решения?
- Можно ли задачу разбить на несколько более простых?
- Можно ли решить задачу в предельных случаях?
- Нельзя ли задачу сформулировать иначе?
- Можно ли придумать более доступную задачу? Более общую? Более частную?

Такие вопросы, если их глубоко продумать, очень часто с самого начала помогают правильно направить ход мыслей. Они задают верный подход к решению задачи, позволяют выделять существенные моменты, определяют рациональную последовательность действий. Метод задавания вопросов имеет целью развить способности человека, а не просто какие-либо технические навыки. Круг вопросов должен быть не столь большим, но вопросы должны повторяться достаточно часто и применяться естественно и в разнообразных ситуациях. В конце концов, они должны быть усвоены вами и обратиться в привычную функцию ума.

Однако не стоит думать, что приведенные вопросы обладают магической силой и в состоянии помочь всегда. Если эти вопросы не помогли при решении какой-либо конкретной задачи, то следует придумать более подходящие для ее решения вопросы. Таким и только таким образом можно научиться хорошо решать задачи. «Только преодолевая ошибку за ошибкой, вскрывая противоречия, мы получаем все более близкое решение проблемы» (П. Капица). Подход к поиску решения задачи с помощью системы последовательно и целенаправленно поставленных вопросов позволит овладеть сразу двумя важными качествами: умением решать нестандартные задачи и умением грамотно ставить вопросы.

Найти решение задачи — это значит установить функциональную связь между искомой и заданными физическими величинами. Поиску такой связи может помочь и использование языка теории графов: величины изображают точками или кругами (вершинами), а связи между ними — направленными стрелками (ребра графа). Изображение хода рассуждений при анализе задачи в виде графа способствует составлению плана решения или системы уравнений. Помощь заключается в том, что, проводя рассуждения и фиксируя их, можно придти к решению задачи более целенаправленно, не сбиваясь на беспорядочный перебор формул. Применение графов помогает не только найти способ решения задачи, но и выявить скрытые и недостающие величины, а также глубже понять физическую сущность задачи.

Д. Пойа подчеркивал необходимость постоянно иметь в виду условие задачи: «Я читаю условие задачи, смотрю на него, еще раз читаю — до тех пор, пока в голову не приходит решение». Приведем также некоторые вопросы, которые следует повторять не только на первом, но и на последующих этапах решения задачи каждый раз, когда наступает заминка: Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти? Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Нет ли связи данной задачи с какой-либо задачей с известным решением? Или с задачей с более простым решением?

I.3. Осуществление плана. Оформление решения

Преодолены первые два этапа решения задачи: выполнен анализ содержания задачи; найден способ решения и выработан его план, т.е. найдена плодотворная идея. Очередной этап — осуществление плана, правильное и грамотное оформление решения задачи. Он имеет свои отличительные особенности.

Начнем с того, что на предыдущем этапе при поиске способа решения и составлении его плана на достижение цели можно и нужно было направить все свои интеллектуальные способности: догадку, интуицию, опыт, знания и разного рода правдоподобные рассуждения. Без всего этого арсенала приемов не обойтись при отыскании плодотворной идеи для решения задачи.

При осуществлении плана на третьем этапе применяются четкие научные знания и строгая логика. Здесь должна господствовать логическая последовательность научно обоснованных действий. Осуществляя решение, вы должны обосновывать правильность каждого своего «шага». И делать это нужно осознанно, т. е. уметь показать или доказать; почему именно это и никакое другое правило (закон, принцип, теория) должно быть использовано в данном конкретном случае. Нелишне при этом привести формулировку соответствующего правила. Запишите математические соотношения (систему уравнений), связывающие искомую величину с заданными. Приводите все преобразования этих выражений, выделяя при этом логическую последовательность действий и обосновывая их. Запишите выражение искомой величины через известные величины в буквенных обозначениях. Иначе говоря, решите задачу в общем виде. Проверьте размерности: если они равны в обеих частях равенства, то это первый признак правильности выведенной формулы. После этого подставьте в конечную формулу числовые значения входящих в нее величин в том же порядке, что и их символы, и вычислите результат. Помните, что число значащих цифр в конечном результате определяется не возможностями калькулятора, а правилами приближенных вычислений. Оцените полученный результат по здравому смыслу: он должен соответствовать реальности и быть разумным.

Задача считается решенной, если сделан рисунок (схема, чертеж, график), принципиально верно изображающий условия задачи; точно установлена функциональная зависимость между неизвестной и известными физическими величинами; получен правильно округленный верный количественный ответ.

Немаловажное значение имеет оформление решения задачи. Оформление решения задачи начинается с краткой записи условий и требований задачи. Графическая схема должна отражать процессы и явления в динамике. Для этого обычно делают два или более рисунков: один, соответствующий началу процесса, описываемого в тексте задачи, другой — его окончанию, при необходимости следует отражать в рисунках и промежуточные этапы решения. Изложение хода решения задачи проводится в той же последовательности, в которой оно осуществлялось. При этом подчеркнем, что каждое действие должно быть обосновано. Оформлять решение надлежит так, чтобы был «виден» ход мыслей в процессе его выполнения. Оно должно быть понятно каждому, пожелавшему посмотреть тетрадь. Поэтому в тетради должно быть отражено все, что касается данной задачи, все до мелочей.

I.4. Анализ решения задачи

Вы проанализировали содержание задачи, нашли способ ее решения, тщательно изложили в тетради ход решения, проверили его и имеете достаточное основание считать решение задачи правильным. Тем не менее, работа над решением задачи еще не завершена. Необходимо еще раз вернуться к решению и провести его детальный анализ. Зачем?

Во-первых, не исключена возможность ошибок. Поэтому дополнительная проверка решения всегда полезна. Во-вторых, если вспомнить цель решения учебных задач, то вам еще нужно ответить себе подробно на вопрос: чему полезному и новому я научился в процессе решения данной задачи.

Цели заключительного этапа — анализа решения задачи:

- выяснение недостатков решения, нахождение других, возможно, более рациональных способов решения;
- выделение главной идеи решения, существенных его моментов;
- обобщение решения и составление метода решения всех задач данного типа;
- систематизация знаний, полученных в процессе решения задачи.

К сожалению, студенты обычно не обращают должного внимания на начальный и заключительный этапы решения задачи. Забывая о главной цели решения учебных задач, они основное свое внимание уделяют поиску ответа и оформлению решения задачи.

Умение решать задачи не находится в прямой зависимости от числа решенных задач. Можно перерешать большое количество отдельных задач, но до тех пор, пока у вас не сформировался общий подход к решению (анализ содержания задачи, поиск и осуществление плана решения, оформление решения и проверка правильности решения и, наконец, обсуждение и анализ проведенного решения), нельзя утверждать, что вы научились самостоятельно решать задачи.

Приведем некоторые рекомендации по проведению анализа решения задачи. Прежде всего, еще раз изучите найденное решение. Каждый ли шаг решения задачи должным образом обоснован? Подумайте, нельзя ли решить задачу другим методом? Получить тот же результат другим методом — это лучший способ убедиться в правильности результата. Встречались ли вам раньше задачи такого типа? Если да, то опишите в тетради причины затруднений в решении именно данной задачи. Если нет, перечислите в тетради особенности решения этого нового для вас типа задач. (Неплохо иметь специальную тетрадь для анализа и размышлений, записи методов решения.)

Попытайтесь отыскать новый, более рациональный, более общий, более изящный способ решения задачи, чем найденный.

Изучите еще раз содержание задачи, способ ее решения и результат. Выявите то полезное, ради чего стоило решать данную задачу. Обратите внимание на теоретические положения, которые явились ключевыми при отыскании решения задачи.

Исследуйте особые случаи решения данной задачи. Соотнесите результат решения с предельными значениями отдельных элементов задачи.

Обобщите результаты решения данной задачи. Подумайте, при решении каких задач их можно было бы применить. На основе решенной задачи составьте более общую задачу, решите ее и сформулируйте метод решения задач данного типа.

I.5. Самостоятельное составление задач

Учитесь составлять задачи. Еще раз подчеркнем, что при решении задач по любой дисциплине, включая теоретическую механику, нужно не только осваивать методы решения отдельных типов задач, но изучать связанную с их решением деятельность, а также общие приемы, пригодные для решения любых задач. Все эти знания и умения нужны и для самостоятельного составления и формулировки новых задач. Увидеть задачу, сформулировать ее и предложить для решения совсем непростое дело. Для каждой конкретной задачи очень важна верная, грамотная формулировка содержания.

Задача — это всегда отражение определенной ситуации, требующей направленного размышления и действия. Для выявления такой ситуации нужно уметь наблюдать явления, устанавливать связи между величинами, характеризующими явления, выделять цель поиска и формулировать ее как конечный результат.

Анализ ситуации, которую вы хотите отразить в задаче, должен начинаться с вопросов, позволяющих ознакомиться с данной ситуацией и осмыслить ее. Эти вопросы очень сходны с теми, которые используются при обычном анализе условий задачи. В частности, нужно уточнить, какой процесс будет рассмотрен в задаче, в каком объекте и при каких условиях данный процесс представлен в наиболее ярком виде, какие свойства объекта при этом должны оставаться постоянными, какие свойства объекта и внешних условий необходимо контролировать при наблюдении процесса, какие величины, характеризующие процесс, могут быть заданы и измерены прямо, какие постоянные нужно использовать для решения задачи.

Существуют различные способы составления учебных задач. Самый простой из них — это составление задачи, обратной уже решенной, с использованием этого же сюжета и значений физических величин. Нужно только сделать искомую величину известной, а одно из данных задачи — искомым.

Другой способ составления задачи — это использование других числовых значений физических величин и сюжета. Фактически нужно сформулировать новую задачу, опираясь на разобранную задачу. Схема текста известна и вы должны подобрать новый сюжет и данные.

Можно сформулировать задачу так, чтобы результатом ее решения было нахождение другой физической величины. Условие задачи дано. Нужно найти дополнительную физическую величину, зависящую от данных, приведенных в условии задачи.

Можно составить и обобщенную задачу. Обобщенная задача формулируется так, чтобы ее условия и требования направляли процесс решения на построение математической модели, описывающей все возможные частные случаи изменений состояния рассматриваемого объекта. Для составления обобщенной задачи необходимо:

- проанализировать уравнение (математическую модель), выражающее связь между величинами, характеризующими рассматриваемое явление;
- выделить величины, изменение которых при выбранной математической модели отражается на значении искомой величины;
- установить, исходя из реальных физических условий, возможные частные случаи;
- учесть в обобщенной формулировке весь диапазон изменения условий.

Умение составить и решить обобщенные задачи свидетельствует о том, что вы глубоко и всесторонне изучили теоретический материал данного раздела, усвоили, при каких условиях и как протекает процесс, хорошо разобрались в особенностях физических величин, введенных для количественного описания изученного процесса, вникли в суть законов, устанавливающих связь между этими величинами.

Немаловажно литературное оформление условий и требований задачи. При формулировке утвердительной части следует как можно более полно и четко описать изучаемое явление. Используйте при этом логически законченные, правильно построенные и простые предложения. Такое описание будет способствовать раскрытию внутренних связей между данными и искомыми элементами задачи. Требовательно-вопросительная часть задачи должна быть точной и конкретной. Вопрос, по возможности, надо помещать в начале условия задачи, так как с него начинается активная мыслительная деятельность решающего. Старайтесь, чтобы вопрос ставил только одну проблему. Не объединяйте в одно предложение два вопроса. Если оба вопроса нужны, то каждый из них формулируйте отдельно. Вопрос не должен направлять решающего задачу на неправильные рассуждения, поэтому при составлении задачи особое внимание уделяйте выделению искомой величины и формулировке вопроса.

I.6. Примеры решения задач

Прежде всего, решим задачу ЕГЭ 2009 года по физике. Это интересная и весьма содержательная задача. С одной стороны, на ней хорошо демонстрируются все этапы решения задач, с другой стороны, для ее понимания достаточно знакомства со школьной физикой. Вторая задача кинематическая, т.е. относится к числу задач, с которых начинаются практические занятия по теоретической механике. Таким образом, с первого же этапа работы над курсом теоретической механики вы может пользоваться предлагаемым пособием. В третьей задаче рассматривается плоское движение тела. К ней можно обратиться при изучении соответствующей темы курса теоретической механики.

Задача 1. *На гладком полу находится длинная доска массой $M=5$ кг. По доске под действием постоянной горизонтальной силы тяги движется брусок. Коэффициент трения между доской и бруском $\mu=0,2$. Скорость бруска v относительно пола постоянна и равна 0,8 м/с. Первоначально доска относительно пола покоится. К моменту, когда движение бруска относительно доски прекращается, доска проходит по столу расстояние $L=0,8$ м. Чему равна масса бруска?*

А. Анализ условия задачи

Необходимо хорошо понять задачу, осмыслить ее условие в целом и в деталях, иллюстрировать задачу четким рисунком или схемой.

С чего начать?

Кратко запишем условие задачи.

Что требуется найти? Массу бруска m.

Что дано?

- Масса доски $M = 5$ кг.
- Скорость бруска $v = 0,8$ м/с (относительно пола!)
- Расстояние, на которое перемещается доска $L = 0,8$ м.
- К бруску приложена горизонтальная постоянная сила, величина которой неизвестна.
- Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0,2$.

Значения всех известных величин в условии задачи приведены в системе единиц СИ.

Каковы главные элементы задачи?
Пол, доска, брусок.
Пол неподвижен. Брусок и доска находятся в движении.
Брусок движется **относительно пола** с постоянной скоростью.
Как относительно пола движется доска?
Обозначим скорость доски через u. В начальный момент $(t = 0)$ доска неподвижна $(u_0 = 0)$.
Со временем скорость u изменяется.
Обратим внимание на то, что в условии речь идет как о движении относительно пола, так и об относительном движении бруска и доски.

На каком интервале времени рассматривается движение тел?
Начальный момент времени $t = 0$. О финальной ситуации $(t = t_*)$ в условии сказано, что движение бруска относительно доски прекращается. *Как это понять?*

Нельзя ли выразить это еще по-другому? Можно.
Брусок и доска движутся относительно пола. Прекращение движения бруска относительно доски означает, что их скорости относительно пола одинаковы.
В момент времени t_* скорости бруска и доски сравнялись $u_* = v$.

Иллюстрируем условие задачи рисунком.

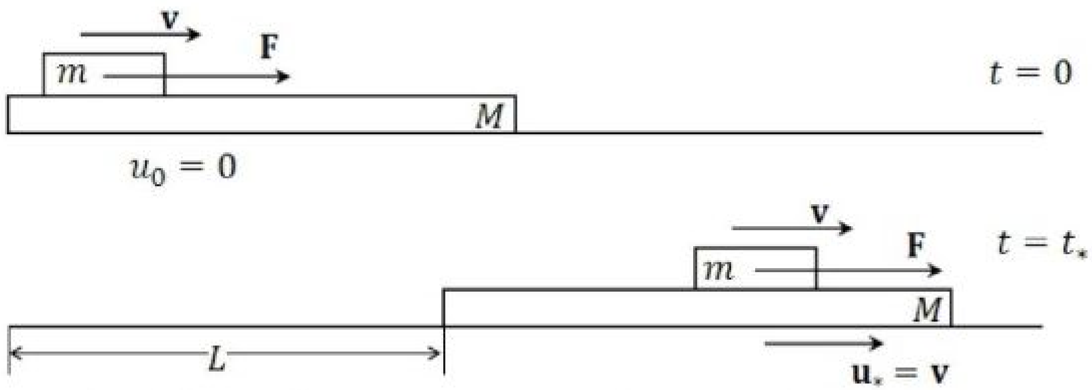


Рис. 1. Система брусок–доска в начальный и конечный моменты времени

Б. Ищем плодотворную идею и составляем план решения

Изучите цель, поставленную задачей. Хорошо понять вопрос – значит уже наполовину ответить на него. Не начинайте решение задачи вслепую. Выберите направление поиска плана решения задачи, руководствуясь целью задачи. Если это полезно, то видоизмените данную ситуацию.

Что требуется найти? Массу бруска m.

Что известно о бруске? К нему приложена горизонтальная сила тяги. Он равномерно движется относительно неподвижного пола.
Систему отсчета, связанную с полом, можно считать инерциальной.

Прямолинейное движение бруска в инерциальной системе отсчета будет равномерным, когда сумма сил, приложенных к нему, равна нулю.

Хорошо. *Что компенсирует силу тяги?*
Трение между бруском и доской. Покажем на рисунке.

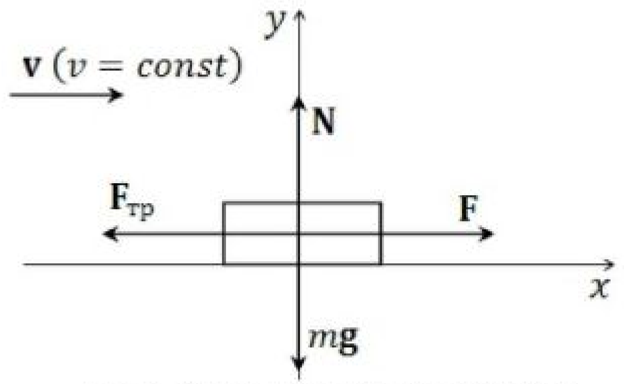


Рис. 2. Силы, действующие на брусок

По вертикали:
$m\mathbf{g}$ – сила тяжести,
$\mathbf{N}$ – сила реакции опоры – доски.

Высказывая догадку, старайтесь сразу подкрепить ее рассуждениями. Догадка должна быть правдоподобной.

А что происходит при этом с доской?
Она в начальный момент покоилась. *Возможно ли движение доски?* Да. Доска лежит на гладком полу, т.е. трение между доской и столом отсутствует.
Если к доске приложить в горизонтальном направлении силу (даже малую), то она придет в движение. Хорошо.

Откуда берется эта сила?
При взаимодействии доски с бруском в горизонтальном направлении возникает сила трения. Она и обеспечивает равномерное движение бруска.
Но силы возникают парами: действие–противодействие (3 закон Ньютона).
Значит, на доску действует сила $\mathbf{F}'_{тр} = -\mathbf{F}_{тр}$.

Сила трения порождает ускоренное движение доски. Брусок увлекает за собой доску посредством силы трения.

Кроме силы трения $\mathbf{F}'_{тр}$, на доску действуют также:
$M\mathbf{g}$ – сила тяжести,
$\mathbf{F}_{нд}$ – сила нормального давления бруска, $\mathbf{F}_{нд} = -\mathbf{N}$ (3 закон Ньютона),
$\mathbf{N}_1$ – сила реакции пола.

Покажем на рисунке

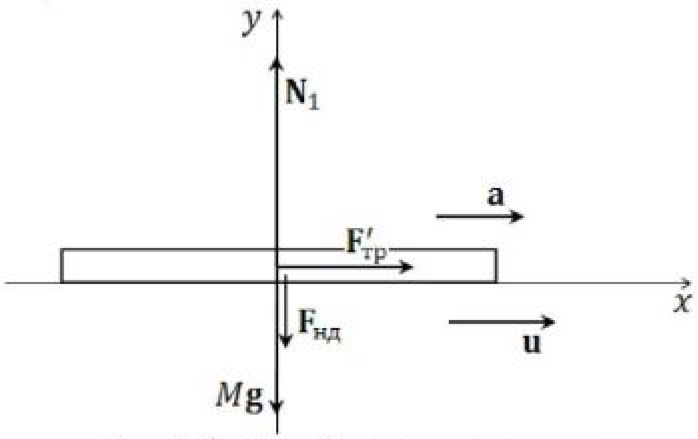


Рис. 3. Силы, действующие на доску

Очень хорошо!

Теперь у нас есть план решения:

а. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел – бруска и доски. Из этих уравнений придем к выражению для ускорения, в которое войдет искомая масса бруска.

б. Начальная и конечная скорости доски известны, знаем также путь, проходимый доской. Воспользовавшись кинематическими соотношениями и выражением для ускорения, должны получить связь массы бруска с известными величинами.

В. Оформление решения задачи

Коротко и ясно оформляйте его. Обосновывайте каждый шаг в найденном решении. Оформляйте решение задачи в виде связного рассказа с рисунками и схемами.

а. Запишем второй закон Ньютона для бруска (в решении приведите рис. 1)

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} = 0.$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеем

$$F - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$N - mg = 0 \quad \rightarrow \quad N = mg.$$

Запишем второй закон для доски (рис. 2)

$$\mathbf{F}_{\text{тр}}' + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{\text{нд}} + M\mathbf{g} = M\mathbf{a}.$$

В проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеем

$$F_{\text{тр}}' = Ma,$$

$$N_1 - Mg - F_{\text{нд}} = 0.$$

Запишем выражение для силы трения

$$F_{\text{тр}} = \mu F_{\text{нд}}\ ,\ F_{\text{нд}} = N\ (3\ \textit{закон}) \quad \rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \mu mg.$$

Воспользовавшись третьим законом Ньютона $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}^{'}$ и выражением для силы трения, найдем ускорение доски

$$a = {}^{\mu mg}/_{M}.$$

б. Доска движется прямолинейно с постоянным ускорением. За время t_* ее скорость изменяется от нуля до v. При этом она проходит расстояние L:

$$v = at_*, \quad L = \frac{at_*^2}{2}.$$

Исключая t_*, получим $L = \frac{v^2}{2a}$.

в. После подстановки выражения для ускорения находим

$$L = {}^{Mv^2}/_{2\mu mg} \quad \rightarrow \quad m = {}^{Mv^2}/_{2\mu gL}.$$

Запишем выражение для массы в числовом виде, подставив значения известных величин и приняв значение ускорения свободного падения $g \approx 10\ \text{м/с}^2$.

$$m \approx \frac{5\cdot 0{,}8^2}{2\cdot 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}8} = 1\ \text{кг}.$$

Г. Анализ решения

Решив задачу, посмотрите все решение заново. Изложение должно быть отчетливым. Изучите решение, проконтролируйте имеющиеся выкладки и обоснование. Проверьте размерность. Установите то, что полезно запомнить, что пригодиться в дальнейшем.

Проверим размерность $m = {}^{Mv^2}/_{2\mu gL}$: $\quad \text{кг} = \text{кг}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 / \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,\text{м}.$

Что следует запомнить?

При описании движения тел следует всегда иметь в виду, в какой системе рассматриваются характеристики движения.

Решение задачи – это небольшая исследовательская работа. Изобретайте новые решения и новые задачи. Старайтесь подойти к задаче и ее решению с разных сторон. Чаще задавайте себе вопрос: «А нельзя ли ..?» или «А что, если так …?»

1. *А что будет происходить после выравнивания скоростей, то есть при $t > t_*$?*

Доска не может беспредельно разгоняться относительно бруска (иначе – при движущемся с постоянной скоростью бруске). Если бы доска «обогнала» брусок, то сила трения изменила бы направление. Но это невозможно.

Что изменится в нашем описании? Мы в решении считали, что брусок движется относительно доски, и записали выражение для трения скольжения. Но во время t_* относительное движение прекращается. Брусок покоится относительно доски.

Как изменится сила трения? На смену трению скольжения «придет» трение покоя. Брусок и доска будут двигаться как одно целое ускоренно.

2. *А нельзя ли решать задачу иначе?*

Рассмотрим систему брусок–доска. На нее действует постоянная горизонтальная сила F. Остальные силы скомпенсированы.
Под действием этой силы количество движения системы изменяется со временем:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}t \quad \rightarrow \quad \Delta(\mathbf{p}_б + \mathbf{p}_д) = \mathbf{F}t.$$

В проекции на ось x можем записать

$$(Mv + mv) - mv = Ft_*.$$

Отсюда выразим время движения

$$t_* = {}^{Mv}\!/_{F}.$$

Обратимся теперь к кинематическим соотношениям, описывающим движение доски:

$$v = at_*, \ L = \frac{at_*^2}{2}.$$

Исключим ускорение доски:

$$L = \frac{vt_*}{2}.$$

Подставляя в это выражение t_*, находим

$$L = \frac{Mv^2}{2F} = \frac{Mv^2}{2\mu mg}.$$

Отсюда

$$m = \frac{Mv^2}{2\mu gL}.$$

Получили более простое и изящное решение задачи.

3. *Нельзя ли предложить еще один вариант решения, прибегнув к энергетическими соображениями?*

Постоянная сила тяги совершает работу, которая идет на увеличение кинетической энергии системы. Изменение кинетической энергии за время t_* легко вычисляется:

$$\Delta K = \left(\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) - \frac{mv^2}{2}.$$

Как вычислить работу?

Работа равна произведению силы F на перемещение бруска. Но это перемещение нам неизвестно.

Что делать?

Обратим внимание на то, что силы, действующие на брусок, скомпенсированы, то есть над бруском работа не совершается. А сила $F'_{тр} = F$ работает над доской и эта работа равна FL.

Таким образом, над системой совершается работа $A = FL$.

Из теоремы об изменении кинетической энергии $\Delta K = A$ следует $\frac{Mv^2}{2} = FL$. С учетом $F = \mu mg$ находим $m = \frac{Mv^2}{2\mu gL}$.

Задача 2 [6]. *Самолет A движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$. *В момент, когда самолет пролетает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость* $\mathbf{v}_2$, *все время направленную к точке A,* $v_2 = 2v$. *Найти уравнение траектории ракеты в системе осей* $A\xi\eta$, *движущейся с самолетом. Найти также время полета ракеты T с момента вылета до момента поражения самолета и величину ее ускорения как функцию угла* φ.

А. Анализ условий задачи

Кратко запишем условие задачи.

Что требуется найти?

- Уравнение траектории ракеты в осях $A\xi\eta$.
- Время полета ракеты T.
- Модуль ускорения ракеты $w(\varphi)$.

Что дано?

- $\mathbf{v}_1$ – скорость самолета (и, следовательно, скорость центра системы осей $A\xi\eta$). Скорость $\mathbf{v}_1$ постоянна по модулю ($v_1 = v$) и по направлению (горизонтальное).
- $\mathbf{v}_2$ – скорость ракеты относительно Земли. Скорость $\mathbf{v}_2$ постоянна по модулю ($v_2 = 2v$). Направление $\mathbf{v}_2$ задается подвижной точкой A.
- H - высота самолета, т.е. координата y точки A.

Каковы главные элементы задачи?

Самолет – материальная точка, совершающая горизонтальное движение с постоянной скоростью. Ракета – материальная точка, совершающая плоское движение.

Изобразим схематически задачную ситуацию.

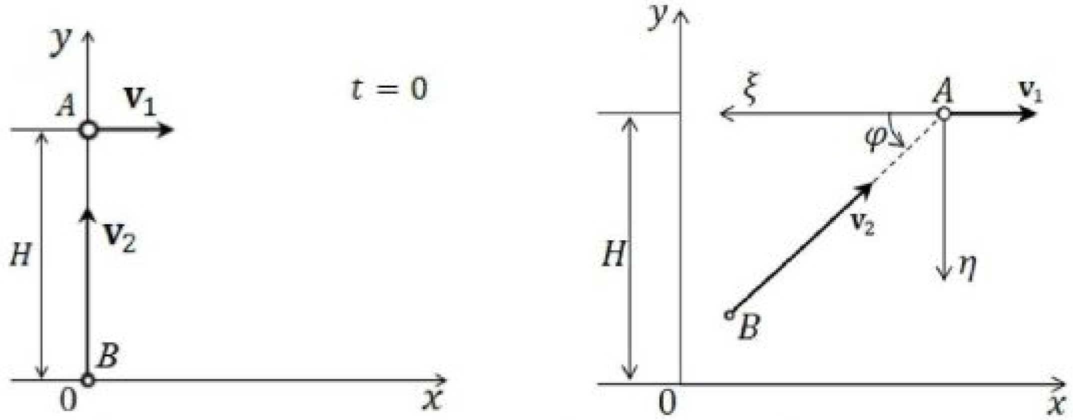


Рис. 1. Система самолет–ракета в начальный и произвольный моменты времени

Выберем неподвижную систему осей $0xy$, связанную с Землей, точка отсчета 0 соответствует положению ракетной установки, так что в начальный момент времени скорость $\mathbf{v}_2$ ракеты направлена вертикально вверх.

Б. Поиск способа решения, составление плана решения
Что нужно найти? Закон движения ракеты.
Что задано? Скорости.

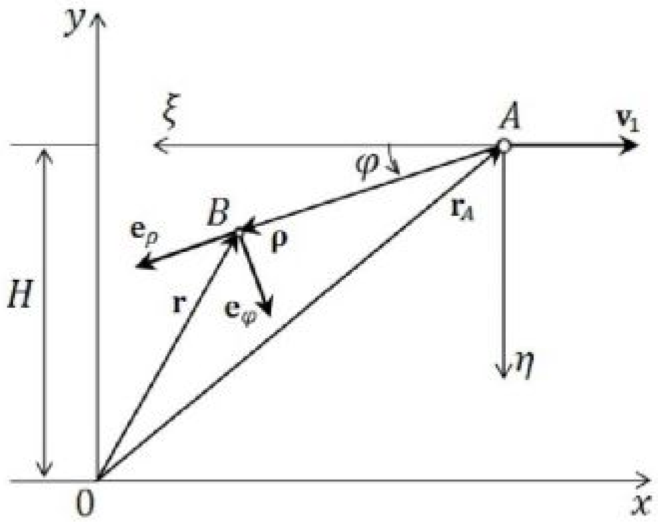


Рис. 2. Описание движения ракеты относительно Земли и относительно самолета

Значит, следует составить дифференциальные уравнения, связывающие координаты точки и производные от них. Введены две системы координат: $0xy$ – неподвижная, связанная с Землей, $A\xi\eta$ – подвижная, связанная с самолетом. Нужно установить связь между координатами ракеты в одной системе и в другой (рис. 2).

Обозначим $\mathbf{r}$ – радиус-вектор ракеты в неподвижных осях $0xy$, а $\boldsymbol{\rho}$ - радиус-вектор в подвижных осях $A\xi\eta$. Как видно из рис. 2,

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_A$ – радиус-вектор центра подвижной системы координат относительно неподвижной.

Продифференцировав обе части уравнения (1) по времени, получим соотношение для скорости ракеты:

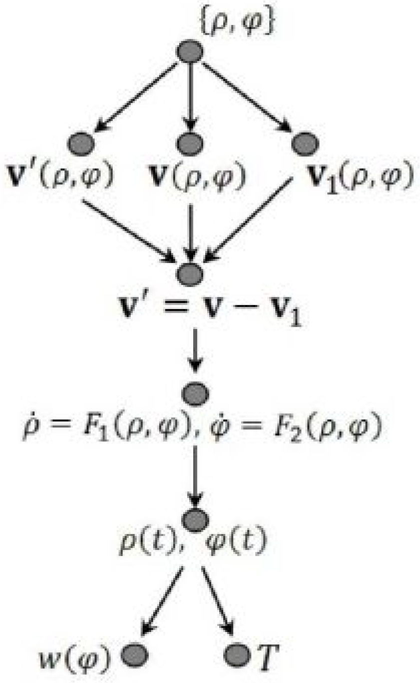
$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}'$ – скорость ракеты относительно самолета, $\mathbf{v}$ – скорость ракеты относительно Земли, $\mathbf{v}_1$ – скорость самолета.

Записав уравнение (2) в проекциях на подвижные оси координат, получим систему дифференциальных уравнений.

Как удобнее решать?

Соотношение для скоростей (2) можно проецировать на оси ξ, η, но в итоге получатся громоздкие уравнения. Удобнее работать в полярных подвижных координатах $\{\rho, \varphi\}$, так как в этом случае скорость ракеты относительно Земли $\mathbf{v}$ имеет только одну проекцию. В итоге план решения задачи можно представить в виде графа (рис. 3).



а. Вводим полярные координаты. Записываем соотношение для скоростей (2) в проекциях на полярные оси.

б. Из дифференциальных уравнений для полярных координат определяем закон движения.

в. По найденным соотношениям находим ускорение ракеты и время полета. Время полета определяем из условия, что в момент времени, когда ракета достигнет самолета, $\rho = 0$.

Рис. 3. Граф решения задачи

В. Оформление решения

а. Распишем соотношение для скоростей

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1.$$

Скорость ракеты относительно самолета в полярных координатах в общем виде запишется так:

$$\mathbf{v}' = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi ,$$

где $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ – единичные векторы, задающие направления полярных осей (рис. 2).

Скорость ракеты относительно Земли:

$$\mathbf{v} = -2v\mathbf{e}_\rho.$$

Скорость самолета:

$$\mathbf{v}_1 = -v\, cos\varphi\mathbf{e}_\rho + v\, sin\varphi\mathbf{e}_\varphi.$$

Спроецировав уравнение (2) на полярные оси, получим:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v(cos\varphi - 2), \\ \dot{\varphi} = -\frac{v\,sin\varphi}{\rho}. \end{cases} \qquad (3)$$

б. Найдем уравнение траектории $\rho(\varphi)$. Для этого разделим первое уравнение системы (3) на второе:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho(2 - cos\varphi)}{sin\varphi}.$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{(2 - cos\varphi)}{sin\varphi} d\varphi.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = 2\int \frac{d\varphi}{sin\varphi} - \int \frac{cos\varphi\, d\varphi}{sin\varphi}$$

или

$$ln(\rho) = \int \frac{d\varphi}{sin\varphi} - ln(sin\varphi) + ln(\hat{C}).$$

Отсюда получаем нужную зависимость $\rho(\varphi)$:

$$\rho = \frac{C\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}{sin\varphi}.$$

Замечание: При вычислении интеграла $\int \frac{d\varphi}{sin\varphi}$ нужно воспользоваться стандартной заменой $u = tg\frac{\varphi}{2}$.

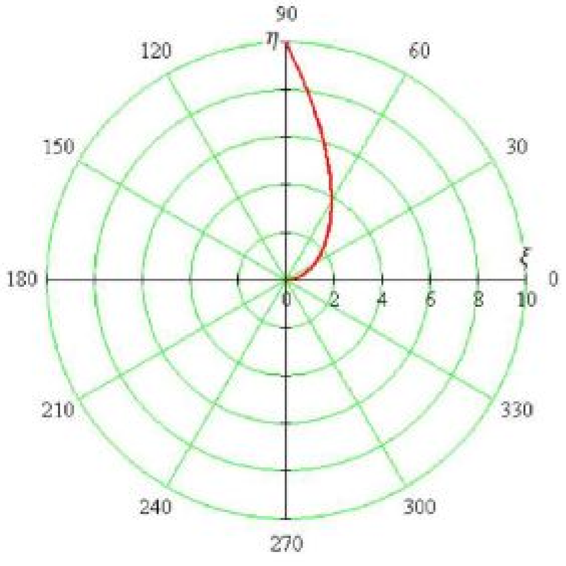


Рис. 4. Траектория ракеты в полярных подвижных координатах

Константу C определим из начальных условий (рис. 1): в начальный момент времени $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = H \rightarrow C = H$,

$$\rho(\varphi) = \frac{H\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^2}{sin\varphi}.$$

Или с учетом того, что $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{sin\varphi}{1+cos\varphi}$, получим окончательно уравнение траектории ракеты в подвижных полярных осях:

$$\rho(\varphi) = \frac{Hsin\varphi}{(1+cos\varphi)^2}. \qquad (4)$$

На рис. 4 показана траектория ракеты в полярных координатах.

в. Время полета ракеты найдем из условия, что когда точка B достигнет точки $A, \rho = 0 \ \rightarrow \ \varphi = 0$.

Найдем закон изменения полярного угла $\varphi(t)$ из второго уравнения системы (3) с учетом выражения (4):

$$\dot{\varphi} = -\frac{v\, sin\varphi}{\rho} = -\frac{v}{H}(1 + cos\varphi)^2.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{d\varphi}{(1 + cos\varphi)^2} = -\frac{v}{H}dt.$$

Проинтегрировав обе части уравнения с учетом начальных условий $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$, получим зависимость $t(\varphi)$:

$$t(\varphi) = \frac{H}{v}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{6}tg^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right).$$

Условие поражения ракетой цели: $\varphi = 0$, отсюда время полета ракеты:

$$T = t(0) = \frac{2}{3}\frac{H}{v}.$$

Вычислим ускорение ракеты $w(\varphi)$. В полярных осях ускорение имеет координаты:

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Определим компоненты ускорения с помощью уравнений (3) и (4):

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2 sin^2\varphi}{\rho} - \frac{v^2 sin^2\varphi}{\rho} = 0.$$

Радиальная компонента ускорения равна нулю, следовательно,

$$w = w_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} = \frac{2v^2}{H}(cos\varphi - 1)(1 + cos\varphi)^2 + \frac{2v^2}{H}(2 - cos\varphi)(1 + cos\varphi)^2$$
$$= \frac{2v^2}{H}(1 + cos\varphi)^2.$$

Г. Анализ проведенного решения

1. Выполним проверку по размерностям для найденных величин.

Время полета ракеты $T = \frac{2}{3}\frac{H}{v}$: $[T] = \frac{\text{м}}{\text{м/с}} = \text{с}$;

ускорение ракеты $w = \frac{2v^2}{H}(1 + cos\varphi)^2$: $[w] = \frac{(\text{м/с})^2}{\text{м}} = \text{м/с}^2$.

2. *Что следует запомнить?*

Выбор системы координат, в нашем случае полярных, упрощает решение и делает его более наглядным. Если бы мы работали в декартовых координатах (попробуйте самостоятельно), получили бы громоздкие выражения.

Задача 3. *В упражнении с обручем гимнастка сообщает центру однородного кругового обруча радиуса r горизонтальную скорость v_0 и закручивает его с угловой скоростью ω_0. Коэффициент трения между обручем и полом равен f. Обруч во время движения не подпрыгивает. Как должны быть связаны величины v_0 и ω_0 для того, чтобы обруч вернулся в исходное положение за время T, определяемое музыкальным сопровождением?*

А. Анализ условия задачи.

Что требуется найти?

Связь начальных скоростей поступательного v_0 и вращательного ω_0 движений.

Что дано?

- Коэффициент трения f.
- Время движения обруча вперед-назад T.

Главный элемент задачи – обруч.

Считаем, что обруч все время движения остается в одной плоскости, т.е. обруч совершает плоское движение.

За время T он совершает движение вперед и обратно, возвращаясь в исходное положение. В начальный момент времени обруч может быть закручен по часовой стрелке или против нее.

Как следует поступить гимнастке?

Если обруч закрутить по часовой стрелке, то он будет двигаться только вперед. Значит, гимнастка закручивает обруч против часовой стрелки.

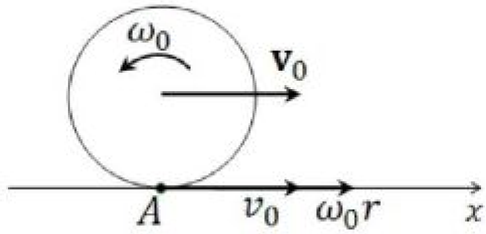


Рис. 1. Начальные скорости обруча

Б. Ищем плодотворную идею и составляем план решения.

С чего начать?

Движение обруча может происходить с проскальзывания и без проскальзывания (скорость точки A обруча относительно пола равна нулю).

От гимнастки обруч движется с проскальзыванием (в точке A скорости поступательного и вращательного движений направлены в стороны движения и в сумме не равны нулю).

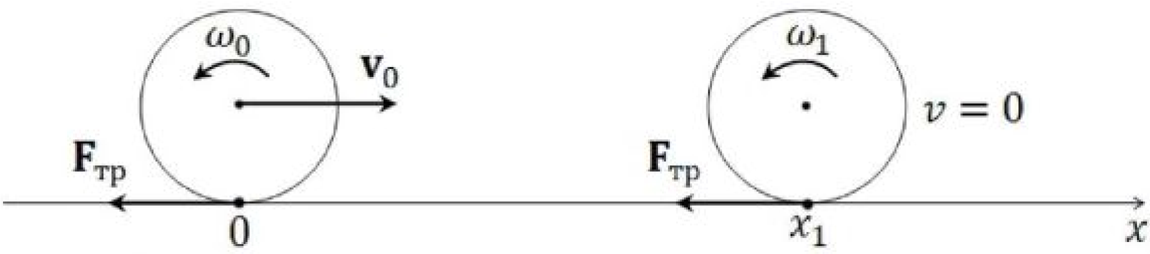


Рис. 2. Обруч в исходном состоянии и в наиболее удаленном положении от гимнастки

В чем особенность описания такого движения? В отсутствие проскальзывания скорость поступательного движения и угловая скорость связаны равенством $v = \omega r$, где r – радиус обруча. При проскальзывании следует записать уравнения поступательного и вращательного движений и вычислить $v(t)$ и $\omega(t)$.

Движение в обратном направлении начинается из состояния, в котором скорость поступательного движения равна нулю, а угловая скорость ω_1 попрежнему направлена против часовой стрелки, т.е. на начальном этапе движения в обратном направлении обруч продолжает проскальзывать относительно пола.

В дальнейшем осуществляется одна и двух ситуаций:

– обруч до момента возвращения к гимнастке движется с проскальзыванием,

– часть пути в обратном направлении обруч проскальзывает относительно пола, а на завершающем этапе движения катится без проскальзывания.

Сформировался план решения задачи. Оно состоит из двух частей:

1. рассматривается происходящее с проскальзыванием движение обруча от гимнастки;
2. изучается движение обруча в обратном направлении (описываются последовательно два указанных случая).

В. Оформление решения задачи.

1. ***Движение вперед*** происходит с проскальзыванием. Уравнения движения обруча

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mgf, \\ I\varepsilon &= -mgfr, \end{aligned} \tag{1}$$

где m – масса обруча, I – момент инерции относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно его плоскости, ε – угловое ускорение.

Из первого уравнения находим

$$v_x = v_0 - fgt, \quad x = v_0 t - \frac{fgt^2}{2}.$$

Крайнее положение при движении вперед ($x = x_1$) обруч принимает в момент времени $t = t_*$.

Из $v_x = 0 = v_0 - fgt_*$ следует $t_* = {}^{v_0}/_{fg}$. Затем находим $x_1 = {}^{v_0^2}/_{2fg}$.

Интегрируя второе уравнение системы (1), получим, что

$$\omega_z = \omega_0 - \frac{gf}{r}t.$$

В крайнем правом положении

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{gf}{r}t_* = \omega_0 - \frac{v_0}{r}.$$

2. ***Движение в обратном направлении*** может быть

– с проскальзыванием (а);

– без проскальзывания (б).

Рассмотрим условия, при которых реализуется та или иная возможность.

а. Если $\omega_0 r \geq 3v_0$, то все время движения обруч проскальзывает.
При $\omega_0 r = 3v_0$ лишь в момент времени $t = 2t_*$, когда обруч возвращается к гимнастке, проскальзывание прекращается. Изменение скорости вращательного движения точки A представлено прямой 1 на рис. 3, а изменение скорости поступательного движения показано на графике прямой 2. В момент времени $2t_*$ значения скоростей равны по величине и противоположно направлены.
В этом случае, а также при $\omega_0 r > 3v_0$ скорость поступательного движения обруча изменяется по закону $v_x = v_0 - fgt,$ (прямая 2 на рис. 3), а закон движения центра обруча $x = v_0 t - \frac{fgt^2}{2}$.

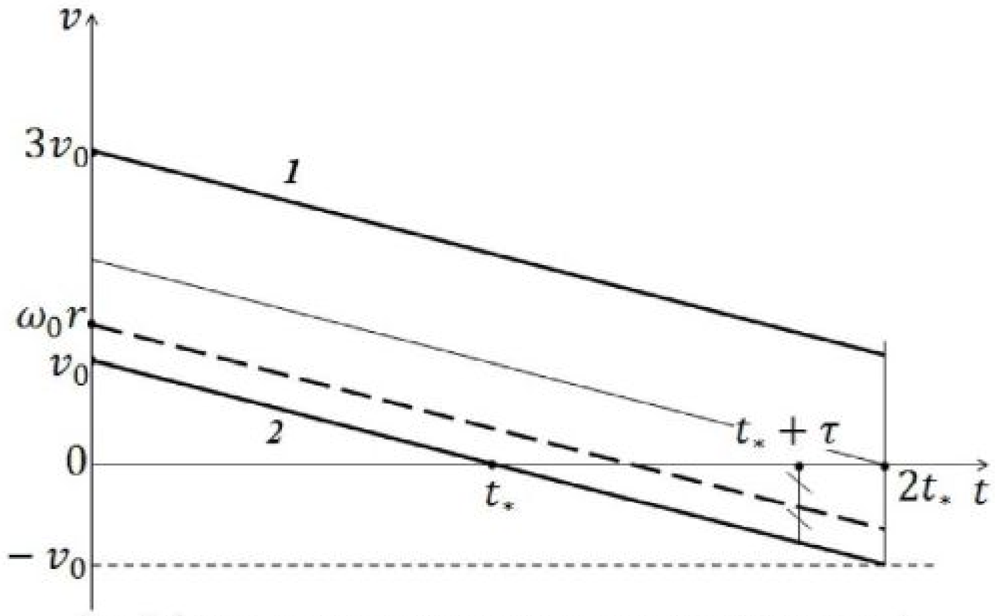


Рис. 3. Зависимость от времени составляющих скорости точки A

Условие возвращения обруча $x = 0$. Время возвращения $t = T = \frac{2v_0}{fg} = 2t_*$.
Обруч возвращается к гимнастке с той же скоростью v_0, с которой она его запустила.
Таким образом, при $\omega_0 \geq 3v_0/r$ $v_0 = {}^{Tfg}/_{2}$.

Как обстоит дело в случае $v_0 < \omega_0 r < 3v_0$?
При движении обруча от гимнастки до крайнего положения (время t_*) и в обратном направлении $t_* < t < t_* + \tau$ наблюдается проскальзывание.

После $t_* + \tau$ проскальзывания нет.
Движение происходит с постоянными

$$v(t_* + \tau) \text{ и } \omega(t_* + \tau).$$

Предполагаем, что трение качения отсутствует.
На отрезке времени $(0,\ t_* + \tau)$

$$v_x = v_0 - fgt,$$

$$\omega_z = \omega_0 - \frac{fg}{r}t,$$

$$x = v_0 - \frac{fgt^2}{2}.$$

При $t = t_* + \tau$

$v_x + \omega_z r = 0$ (нет проскальзывания),

$$v_0 - fg(t_* + \tau) + \omega_0 r - fg(t_* + \tau) = 0,$$

$$t_* + \tau = \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg},$$

$$\tau = \frac{\omega_0 r - v_0}{2fg},$$

$$x' = v_0(t_* + \tau) - \frac{fg(t_* + \tau)^2}{2},$$

$$v_x' = v_0 - fg(t_* + \tau) = \frac{v_{0-\omega_0 r}}{2}.$$

На интервале времени $t_* + \tau \le t \le T$

$$x = x' + v_x'[t - (t_* + \tau)].$$

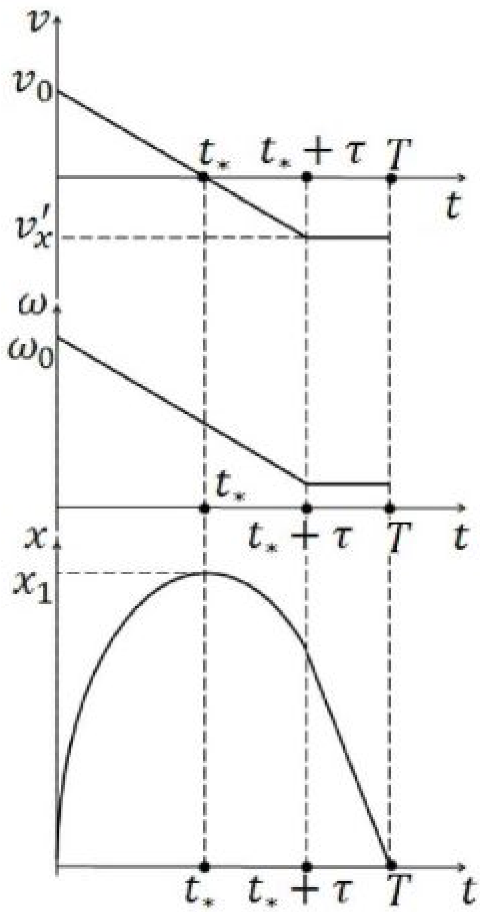


Рис. 4. Изменение во времени скорости поступательного движения, угловой скорости и координаты центра обруча

Условие окончания движения обруча $x = 0$:

$$x = x' + v_x'[T - (t_* + \tau)] = 0,$$

$$v_0(t_* + \tau) - \frac{fg(t_* + \tau)^2}{2} - \frac{v_0 - \omega_0 r}{2}(t_* + \tau) = \frac{\omega_0 r - v_0}{2}T,$$

$$\frac{v_0 + \omega_0 r}{2} \cdot \frac{v_0 + \omega_0 r}{2fg} - \frac{(v_0 + \omega_0 r)^2}{8fg} = \frac{\omega_0 r - v_0}{2}T,$$

$$T(\omega_0 r - v_0)4fg - (\omega_0 r + v_0)^2 = 0.$$

Ответ: При $\omega_0 \ge 3v_0/r$ $v_0 = {}^{Tfg}/_{2}$ (вне зависимости от начальной угловой скорости).

При $v_0 < \omega_0^2 r < 3v_0$ начальные скорости связаны соотношением $T(\omega_0 r - v_0)4fg - (\omega_0 r + v_0)^2 = 0.$

Г. Анализ решения.
Проведем проверку хода и результата решения первой части задачи.

Изменение кинетической энергии поступательного движения обруча при его движении от гимнастки равно работе силы трения на отрезке $[0, x_1]$:

$$0 - {mv_0^2}/{2} = -fmgx_1 \text{ или } -{mv_0^2}/{2} = -fmgx_1.$$

Изменение кинетической энергии вращательного движения обруча равно работе момента силы трения $M_{\text{тр}} = fmgr$. Работа силы трения во вращательном движении $M_{\text{тр}}\Delta\varphi$. Ранее получили, что $\omega_z = \omega_0 - \frac{gf}{r}t$.
Отсюда находим $\Delta\varphi = \omega_0 t_* - {gft_*^2}/{2r} = {\omega_0 v_0}/{fg} - {v_0^2}/{2fgr}$.

Изменение кинетической энергии вращательного движения

$${mr_0^2}/{2}\left(\omega_0 - \frac{v_0}{r}\right)^2 - {mr_0^2\omega_0^2}/{2} = -fmgr\Delta\varphi.$$

Нетрудно убедиться в справедливости этого равенства.

Такую же проверку можно провести и для решения второй части задачи.

Что следует запомнить?
При решении подобных задач в первую очередь следует выяснить, проскальзывает или не проскальзывает тело в месте контакта с поверхностью, по которой движется.

I.7. Общие рекомендации к решению задач

Анализ условия задачи

1. Ознакомившись с формулировкой задачи, представьте задачу в целом как можно яснее и нагляднее, не вдаваясь пока в детали.
2. Вдумайтесь в смысл каждого слова, каждого термина в тексте задачи. Выявите главные элементы задачи: неизвестное, данные, обстоятельства. Рассмотрите каждый из них в отдельности, затем последовательно один за другим, затем в различных сочетаниях. Сделайте краткую запись условия задачи.
3. Тщательно выполните рисунки, чертежи, таблицы, схемы, помогающие понять задачу. Графическое представление условия должно быть отчетливым. Иногда полезно видоизменить расположение элементов задачи на рисунке (схеме), показать различные ситуации – начальную, конечную, промежуточные; покажите (если необходимо) отдельные элементы задачной ситуации. Возможно, это позволит выявить существенное в задаче. Выделите на рисунке данные и искомые наглядными обозначениями.
4. Постарайтесь охватить условие задачи в целом, отметить ее особенности. Не встречалась ли раньше задача, в чем-то аналогичная данной?

5. Выясните, какие теоретические положения связаны с задачей в целом и с отдельными ее элементами.

Поиск плодотворной идеи, составление плана решения

1. Попробуйте отнести данную задачу к какому-либо типу (виду) задач, способ решения которых вам известен.
2. Сконцентрируйтесь на цели задачи. Это – главный ориентир поиска решения. Проанализируйте цель задачи и попытайтесь применить к решению задачи тот или иной знакомый вам метод или прием.
3. Каждую догадку сопровождайте рассуждением о степени ее полезности для решения. Постоянно контролируйте разумность ваших попыток решить задачу, соотнося полученные частные результаты с условием и целью задачи. Старайтесь ограничивать число мыслительных или практических пробных действий.
4. Попробуйте видоизменить задачу, переформулировать ее условие. Составьте и попытайтесь решить задачу, аналогичную данной задаче, но более простую. Обобщите условие задачи (составьте задачу более общую, чем данная задача). Замените понятия, связанные с задачей, их определениями.
5. Разделите условие задачи на отдельные элементы, попробуйте составить новую комбинацию этих элементов (быть может, в сочетании с другими, не представленными в задаче элементами).
6. Попробуйте разбить данную задачу на серию вспомогательных задач, последовательное решение которых может составить решение данной задачи. Попробуйте составить частные задачи к отдельным элементам данной задачной ситуации, руководствуясь при этом целью основной задачи.
7. Рассмотрите предельные случаи отдельных элементов задачи. Посмотрите, как это отразится на основной цели задачи.

Реализации плана решения задачи

1. Осуществляйте решение в строгой логической последовательности.
2. Разграничивайте отдельные части решения, обосновывая, почему именно это и никакое другое правило (закон, принцип, теория) должно быть использовано в данном конкретном случае.
3. Контролируйте каждый шаг логическим рассуждением, интуитивным рассмотрением, или обоими способами. Постоянно соотносите решение с условиями и целями задачи.
4. Оформление решения должно иметь ясную и краткую форму, достаточную для того, чтобы всегда было возможно полностью воспроизвести решение задачи.

На заключительном этапе решения полезно действовать так:

1. Изучите найденное решение. Сделайте грубую прикидку правильности результата, соотнеся его с условием (и здравым смыслом). Проверьте размерность результата.

2. Подумайте, нельзя ли решить задачу другим способом. Решение задачи другим способом – лучшая проверка. Попытайтесь найти более экономичный способ решения, более изящный и т.п. Новый способ решения задачи часто открывает новый путь решения аналогичных задач.
3. Исследуйте особые случаи решения данной задачи. Обобщите результаты решения задачи. Подумайте, в решении каких задач их можно применить.
4. Изучите еще раз саму задачу, способ ее решения и результат. Выявите то полезное, ради чего стоило решать данную задачу.
5. Особое внимание обратите на теоретические положения, особенности задачи и т.п., которые явились ключевыми для отыскания решения.

В заключение приведем еще одну цитату из книги Д. Пойя: «Для человека, решающего в данную минуту задачу, она должна стать самым главным делом, все остальное должно отодвинуться на второй план. Все умения: писать, чертить, догадываться, вспоминать, считать, сравнивать, противопоставлять, проверять, искать ошибки, удивляться, надеяться, все силы следует направить на решение этой задачи. Будто всю свою жизнь вы учились для того, чтобы сейчас решить эту задачу. Будто вы делаете главное дело жизни. Если вы сумеет воспитать в себе такое отношение к решению задач, то от решения каждой новой задачи, освоения новых методов решения, освоения новых разделов курса вы будет получать удовольствие».

Часть II

В этой части пособия речь пойдет о двух эффективных методах описания динамики механических систем: о дифференциальных вариационных принципах механики и об уравнениях Лагранжа второго рода. Приведены общие теоретические соображения и примеры задач, позволяющие уяснить наиболее существенные моменты применения указанных методов.

II.1. Дифференциальные вариационные принципы механики

Принципами механики называются исходные положения, отражающие столь общие закономерности механических явлений, что из них можно получить все уравнения, определяющие движение механической системы (или условия её равновесия). В ходе развития механики был установлен ряд таких принципов, каждый из которых можно положить в основу механики. Эти принципы подразделяют на ***невариационные*** и ***вариационные***.

К невариационным принципам относятся, например, аксиомы динамики, общие теоремы динамики. Невариационные принципы справедливы для любой механической системы и имеют сравнительно простое математическое выражение. Однако в большинстве задач механики рассматривается движение несвободных систем, перемещения которых ограничены связями. Чтобы изучить движение несвободной системы, исходя из невариационных принципов, надо результат действия связей представить некоторыми силами, называемыми реакциями связей. Они заранее неизвестны и зависят от того, чему равны и где приложены действующие на систему заданные (говорят, активные) силы, а также от того, как при этом движется сама система. В уравнения движения реакции связей входят как дополнительные неизвестные величины, и это обычно существенно усложняет весь процесс решения.

Преимущество вариационных принципов состоит в том, что из них сразу получаются уравнения движения соответствующей механической системы, не содержащие неизвестных реакций связей. Достигается это не заменой связей неизвестными силами (реакциями), а рассмотрением тех перемещений или движений точек системы, которые допускают данные связи.

Вариационные принципы механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение системы от других допускаемых связями движений (говорят, от других кинематически возможных движений).

По форме вариационные принципы разделяют на ***дифференциальные*** и ***интегральные***. Дифференциальные принципы дают критерий истинного движения для данного фиксированного момента времени. Интегральные принципы устанавливают свойства (признаки), позволяющие отличить истинное движение механической системы от кинематически возможных её движений на конечном интервале времени.

Для начала напомним смысл некоторых терминов. Определим действительные, возможные и виртуальные перемещения на примере одной материальной точки, подчиненной одной голономной удерживающей связи, задаваемой уравнением $f(\mathbf{r},t) = 0$.

Действительным (истинным) перемещением точки $d\mathbf{r}$ называют бесконечно малое перемещение этой точки под действием, как заданных сил, так и реакций связей. Действительное перемещение происходит за время dt в соответствии с уравнением движения и уравнением связи.

Возможным перемещением называют «перемещение» точки $d\mathbf{r}$, допускаемое связью. В отличие от действительных возможные перемещения удовлетворяют только уравнениям связей. Действительное перемещение всегда является одним из возможных. Дифференциальное уравнение, которому подчинены возможные перемещения точки, получим, взяв дифференциал от уравнения связи:

$$df = \nabla f d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0.$$

Виртуальным перемещением $\delta\mathbf{r}$ называется воображаемое бесконечно малое «перемещение» точки, допускаемое связью в данный фиксированный момент времени. В этот момент времени связь «застывает», т.е. изменение со временем мысленно прекращается. Виртуальные перемещения не происходят под действием сил и не обладают длительностью. Представление о виртуальных перемещениях можно получить, если сделать мгновенную фотографию движущейся поверхности и рассмотреть возможные перемещения точки по изображению этой поверхности на фотографии. Дифференциальное уравнение, которому подчиняются виртуальные перемещения точки, получим, вычисляя дифференциал $f(\mathbf{r},t)$ при фиксированном времени, т.е. вычисляя вариацию и приравнивая ее к нулю:

$$\delta f = \nabla f \delta\mathbf{r} = 0.$$

Видно, что совокупность виртуальных перемещений совпадает с возможными перемещениями только в случае стационарных связей ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$).

Понятие о виртуальных перемещениях позволяет определить очень важный класс связей. Пусть сумма работ всех реакций связей $\mathbf{R}_i$ на виртуальных перемещениях точек системы равна нулю:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \, \delta\mathbf{r}_\mathrm{i} = 0,$$

где N – число материальных точек системы. Связи, удовлетворяющие этому условию, называют ***идеальными***.

Этот класс связей обладает достаточной общностью, причем физические причины идеальности связей могут быть различными. Сложный механизм можно рассматривать как систему твердых тел, которые попарно либо соединены между собой жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры – идеальными, все соприкасающиеся поверхности – идеально гладкими или идеально шероховатыми, то любой сложный механизм можно трактовать как механическую систему, подчиненную идеальным связям.

Во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Например, пренебрежение силами трения может иногда существенно исказить физическую картину явления. И в этом случае связи можно считать идеальными, учитывая при этом только нормальные составляющие реакций негладких поверхностей. При этом силы трения следует рассматривать как неизвестные активные силы. Появление новых неизвестных компенсируется дополнительными соотношениями, получаемыми из экспериментальных законов трения.

Дифференциальные вариационные принципы справедливы практически для любых механических систем. К основным дифференциальным вариационным принципам относятся:

- принцип Даламбера — Лагранжа (общее уравнение динамики);
- принцип возможных перемещений.

Для материальных точек, образующих несвободную систему, имеют место уравнения (2-й закон Ньютона)

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Связи предполагаются идеальными. Поэтому в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях $\sum_{i=1}^{N}\mathbf{R}_i\,\delta\mathbf{r}_i = 0$. Подставляя сюда вместо реакций $\mathbf{R}_i$ их выражения из 2-го закона Ньютона и умножая обе части равенства на -1, получим:

$$\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0.$$

Это равенство называют общим уравнением динамики:

при движении системы в любой момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Общее уравнение динамики выполняется для любого совместного с идеальными связями движения, соответствующего заданным активным силам $\mathbf{F}_i$.

Положение равновесия – это такое положение системы, в котором система будет находиться все время, если она находилась в этом положении в начальный момент времени и скорости всех ее точек были равны нулю.

Положение системы $\mathbf{r}_i^0$ будет положением равновесия в том и только в том случае, когда $\mathbf{r}_i^0$ удовлетворяет общему уравнению динамики, т.е. имеет место следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \, \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Это равенство выражает принцип виртуальных перемещений:

для того чтобы некоторое (совместное со связями) положение системы было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равнялась нулю.

Обычно принцип виртуальных перемещений применяют к стационарным связям. Если связи стационарны, то «совместное со связями» означает, что положение системы удовлетворяет геометрическим связям. Иногда в применении к системам со стационарными связями его называют принципом возможных перемещений.

Если связи нестационарны, то термин «совместное со связями» означает, что они удовлетворяются при любом t, если в уравнения связей положить $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^0$, $\mathbf{v}_i = 0$. В этом случае различным моментам времени t могут отвечать различные виртуальные перемещения $\delta \mathbf{r}_i$.

Принцип виртуальных перемещений представляет собой самый общий принцип аналитической статики. Из него можно получить условия равновесия любой конкретной механической системы. Уравнение для принципа виртуальных перемещений представляет собой частный случай общего уравнения динамики.

С другой стороны, общее уравнение динамики можно рассматривать как уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений и определяющее положение равновесия системы, которое получается, если к активным силам $\mathbf{F}_i$ дополнительно причислить фиктивные силы инерции $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$. Так приходим к следующей формулировке принципа Даламбера:

при движении системы любое ее положение можно рассматривать как положение равновесия, если к активным силам, действующим на систему в этом положении, прибавить фиктивные силы инерции.

Принцип Даламбера позволяет перенести приемы и методы решения статических задач на задачи динамики. В частности, он позволяет статическими методами определить динамические реакции. Действительно, в положении равновесия реакции $\mathbf{R}_i$ отличаются от выражения $\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ только направлением:

$$-\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i.$$

Рассматривая силы инерции в качестве дополнительных активных сил, приложенных к точкам системы, мы заменяем данную динамическую задачу новой статической задачей. Статические реакции в новой задаче совпадают с искомыми реакциями в исходной динамической задаче.

При решении задач с помощью общего уравнения динамики рекомендуем следующую последовательность операций:

1. Выбрать декартову систему координат для описания положения точек системы.
2. Изобразить систему графически в некотором положении и показать все активные силы и силы инерции.
3. Вычислить силы инерции.
4. Определить число степеней свободы и выбрать независимые координаты.
5. Записать выражения декартовых координат через независимые и найти их вариации через вариации независимых координат.
6. Записать общее уравнение динамики и приравнять выражения при вариациях независимых координат нулю.
7. Из полученных уравнений определяются соотношения между силами и кинематическими характеристиками.

Такой же порядок действий рекомендуется и при решении статических задач с помощью принципа виртуальных перемещений.

Задача 1. *Плоская невесомая стержневая ферма ABCD расположена в вертикальной плоскости и нагружена вертикальной силой F, приложенной в узле D. Узел A закреплен в опоре неподвижно. Узел C может перемещаться по горизонтальной поверхности. Линия AC горизонтальна. Длины стержней удовлетворяют следующим условиям:* $AB = BC = AC = b$, $AD = DC = b/\sqrt{2}$. *Определить напряжение стержня BD.*

Удалим стержень BD, заменив его действие на ферму двумя равными силами **Q**, приложенными в точках B и D (рис. 1).

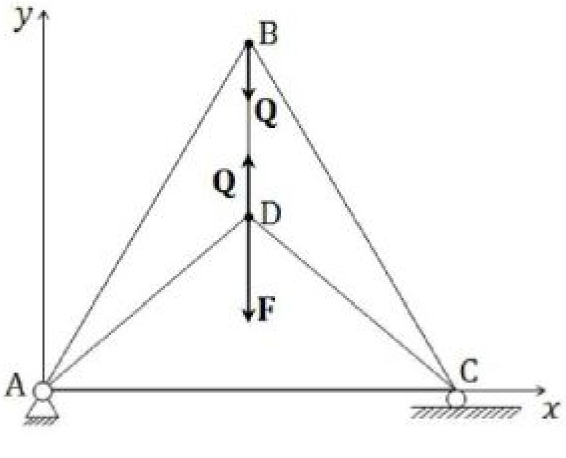


Рис. 1. к условию задачи 1

С помощью принципа виртуальных перемещений определим величину силы Q, предполагая, что ферма деформировалась и находится в равновесии. При этом угол BAC равен α, а угол DAC равен β.

Выберем прямоугольную систему координат Axy с осью Ax, направленной по стержню AC.

Активные силы, приложенные к ферме: силы упругости **Q** в точках B и D и сила **F** в точке D.

Координаты точек приложения сил

точка B: $x_1 = b\cos\alpha, \quad y_1 = b\sin\alpha$;

точка D: $x_2 = {}^{b}/_{\sqrt{2}}\cos\beta, \quad y_2 = {}^{b}/_{\sqrt{2}}\sin\beta.$

Система имеет одну степень свободы, углы α *и* β связаны:

$$x_1 = x_2\,, \quad b\cos\alpha \;= b/\sqrt{2}\cos\beta.$$

Вариации углов связаны соотношением:

$$b\sin\alpha\,\delta\alpha = b/\sqrt{2}\sin\beta\,\delta\beta.$$

Дадим точке C виртуальное перемещение. Координаты точек B и D получат приращение. В соответствии с принципом виртуальных перемещений работа активных сил на виртуальных приращениях

$$\delta A = \mathbf{Q}_B\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{Q}_D\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}\delta\mathbf{r}_2 = -Q\delta y_1 + (Q-F)\delta y_2 = 0.$$

После подстановки вариаций ординат точек B и D

$$\delta y_1 = b\cos\alpha\,\delta\alpha, \quad \delta y_2 = {}^{b}/_{\sqrt{2}}\cos\beta\,\delta\beta,$$

находим $\quad Q\cos\alpha\,\delta\alpha = {}^{(Q-F)}/_{\sqrt{2}}\cos\beta\,\delta\beta.$

Разделив почленно это соотношение на выражение, связывающее вариации углов, получим уравнение для определения силы Q при заданных значениях углов α *и* β

$$Q\operatorname{ctg}\alpha = (Q-F)\operatorname{ctg}\beta.$$

В частности, при $\alpha = {}^{\pi}/_{3}\,,\ \beta = {}^{\pi}/_{4},\ Q = F\sqrt{3}/\left(\sqrt{3}-1\right).$

Задача 2. *Однородный стержень ОА массой m_1 может вращаться на неподвижном шарнире О в вертикальной плоскости. Конец А этого стержня соединен шарнирно с другим однородным стержнем АВ массой m_2. К концу второго стержня приложена горизонтальная сила F. Найти углы стержней с горизонталью при равновесии. Отношение* ${}^{AB}/_{OA} = q.$

Система обладает двумя степенями свободы. В качестве независимых переменных примем искомые углы α *и* β.

Выберем систему координат *Oxy* как показано на рис. 2. Обозначим длину стержня ОА $2b_1$, длину стержня АВ $2b_2$.

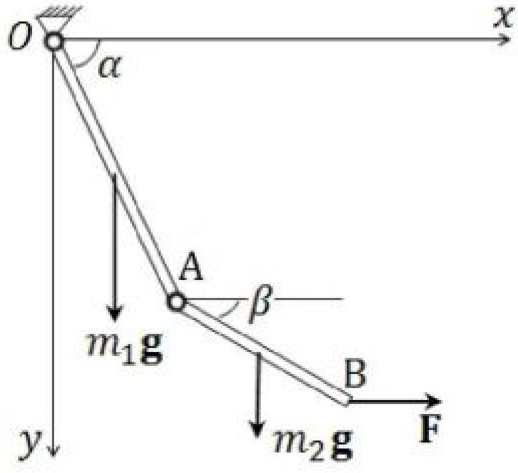


Рис. 2. к условию задачи 2

Активные силы: силы тяжести стержней и сила **F**. Координаты точек приложения сил

$$x_1 = b_1 \cos\alpha\,, \quad y_1 = b_1 \sin\alpha\,;$$

$$x_2 = 2b_1 \cos\alpha + b_2 \cos\beta,$$
$$y_2 = 2b_1 \sin\alpha + b_2 \sin\beta\,;$$

$$x_3 = 2b_1 \cos\alpha + 2b_2 \cos\beta,$$
$$y_3 = 2b_1 \sin\alpha + 2b_2 \sin\beta\,.$$

Вариации координат

$$\delta x_1 = -b_1 \sin\alpha\,\delta\alpha, \quad \delta y_1 = b_1 \cos\alpha\,\delta\alpha;$$
$$\delta x_2 = -2b_1 \sin\alpha\,\delta\alpha - b_2 \sin\beta\,\delta\beta\,, \quad \delta y_2 = 2b_1 \cos\alpha\,\delta\alpha + b_2 \cos\beta\,\delta\beta;$$
$$\delta x_3 = -2b_1 \sin\alpha\,\delta\alpha - 2b_2 \sin\beta\,\delta\beta, \quad \delta y_3 = 2b_1 \cos\alpha\,\delta\alpha + 2b_2 \cos\beta\,\delta\beta.$$

Работа активных сил на виртуальных перемещениях

$$\delta A = m_1\mathbf{g}\delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g}\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}\delta\mathbf{r}_3 = g(m_1\delta y_1 + m_2\delta y_2) + F\delta x_3 = [(m_1 b_1 + m_2 b_2)\cos\alpha - 2b_1 F \sin\alpha]\delta\alpha + [\,m_2 b_2 \cos\beta - 2b_2 F \sin\beta]\delta\beta.$$

В соответствии с принципом виртуальных перемещений $\delta A = 0$.

При произвольных $\delta\alpha$ *и* $\delta\beta$

$$(m_1 b_1 + m_2 b_2)\cos\alpha - 2b_1 F \sin\alpha = 0\,;$$
$$m_2 b_2 \cos\beta - 2b_2 F \sin\beta = 0.$$

Отсюда находим, что в положении равновесия системы

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2F/(m_1 + m_2 q);$$
$$\mathrm{tg}\,\beta = 2F/\,m_2.$$

Задача 3. *На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежат связанные нитью три равных груза массой m каждый. Четвертый такой же груз прикреплен к ним нитью, перекинутой через блок, и подвешен вертикально. Система предоставлена самой себе. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab во время движения.*

Ось x направим по столу, ось y – вертикально вниз.

Система грузов будет двигаться с ускорением w.

Сила инерции каждого груза на столе равна $-mw\mathbf{e}_x$, а сила инерции груза, подвешенного вертикально $-mw\mathbf{e}_y$.

Активные силы – силы тяжести (показаны на рис. 3).

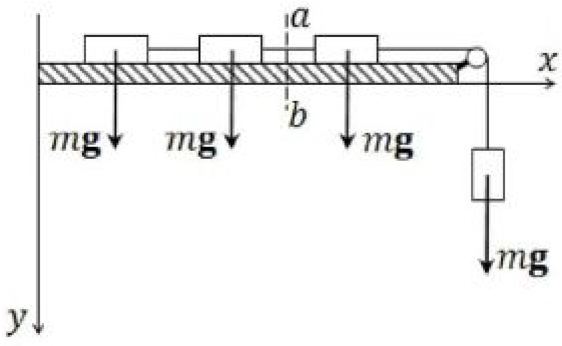


Рис. 3. к условию задачи 3

Система имеет одну степень свободы.

Дадим вертикальному грузу возможное перемещение δy. Перемещения грузов на столе $\delta x = \delta y$.

Сумма работ активных сил и сил инерции напишется следующим образом: $(mg - 4mw)\delta y = 0$.

Ввиду произвольности δy

$$mg - 4mw = 0, \quad w = {}^{g}\!/_{4}.$$

Разрежем нить в сечении ab и заменим действие грузов, расположенных справа силой F. Она должна уравновесить сумму сил инерции грузов, лежащих левее сечения ab: $F = {}^{mg}\!/_{2}$.

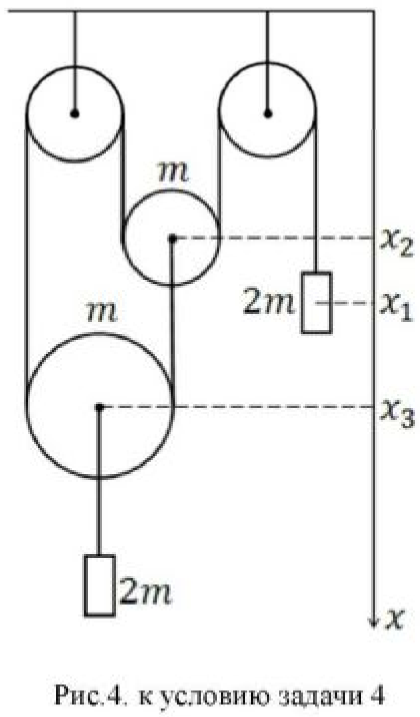


Рис.4. к условию задачи 4

Задача 4. *Пренебрегая трением, определить ускорение грузов в системе, представленной на рисунке. Массы блоков и грузов соответственно 2m и m.*

Рассматриваемая система блоков и грузов имеет одну степень свободы.

Положение правого груза и подвижных блоков будем определять координатами x_1, x_2, x_3.

Они связаны соотношением $x_1 + x_2 + 2x_3 = L$, где L – полная длина нити.

Вариации координат связаны соотношением

$$\delta x_1 + \delta x_2 + 2\,\delta x_3 = 0.$$

Для ускорений левого груза и блоков можно записать аналогичное равенство

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3 = 0.$$

Активные силы - силы тяжести $2mg$, mg, $3mg$, которые можно считать приложенными соответственно в точках x_1, x_2, x_3.

Сумма работ активных сил на виртуальных перемещениях

$$\delta A_{\text{акт}} = 2mg\delta x_1 + mg\delta x_2 + 3mg\delta x_3.$$

Силы инерции $-2m\ddot{x}_1, -m\ddot{x}_2, -3m\ddot{x}_3$ приложены к тем же точкам, что и соответствующие активные силы.

Работа сил инерции на виртуальных перемещениях

$$\delta A_{\text{ин}} = -2m\ddot{x}_1\,\delta x_1 - m\ddot{x}_2\delta x_2 - 3m\ddot{x}_3\delta x_3.$$

Запишем общее уравнение динамики

$$\delta A_{\text{акт}} + \delta A_{\text{ин}} = 0.$$

$$2m(g - \ddot{x}_1)\,\delta x_1 + m(g - \ddot{x}_2)\delta x_2 + 3m(g - \ddot{x}_3)\delta x_3 = 0.$$

Вариации координат не являются независимыми. Система имеет одну степень свободы, поэтому две из них нужно выразить через третью.

Мы располагаем лишь одним соотношением $\delta x_1 + \delta x_2 + 2\,\delta x_3 = 0$, по которому запишем $\delta x_1 = -\delta x_2 - 2\,\delta x_3$.

Далее обратимся к методу неопределенных множителей Лагранжа:

запишем $\delta x_2 = \lambda\,\delta x_3$, λ – неопределенный множитель.

Тогда $\delta x_1 = -(\lambda + 2)\,\delta x_3$.

В общем уравнении динамики заменим $\delta x_1, \delta x_2$ их выражениями через δx_3 и приведем его к следующему виду:

$$[-g + 4\ddot{x}_1 - 3\ddot{x}_3 + \lambda(-g + 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)]\,\delta x_3 = 0.$$

Соотношение должно выполняться при любых параметра λ. Это возможно лишь при $-g + 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0$.

Отсюда и из полученного ранее равенства $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3 = 0$ находим

$$\ddot{x}_1 = {}^{g}/_{3} - {}^{2}/_{3}\,\ddot{x}_3, \quad \ddot{x}_2 = -{}^{g}/_{3} - {}^{4}/_{3}\,\ddot{x}_3.$$

После подстановки $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ в общее уравнение динамики имеем

$$\left({}^{g}/_{3} - {}^{17}/_{3}\,\ddot{x}_3\right)\delta x_3 = 0.$$

Перемещение δx_3 произвольно, поэтому заключаем, что $\ddot{x}_3 = {}^{g}/_{17}$.

Затем находим $\ddot{x}_1 = {}^{5g}/_{17}$, $\ddot{x}_2 = -{}^{7g}/_{17}$.

Задача 5. *Груз массой m, скользя в вертикальных направляющих, приводит в движение маховик массой M с помощью кривошипного механизма, в котором $OB = BA = r$. Найти начальное угловое ускорение маховика, если начальная угловая скорость равна нулю. Массой шатуна пренебречь. Момент инерции маховика I.*

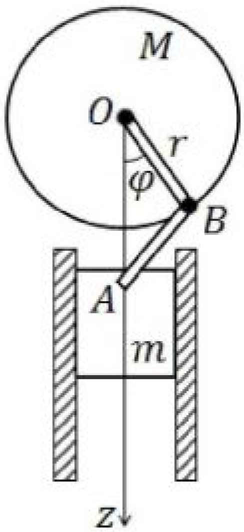


Рис.5. к условию задачи 5

Положение всей системы характеризуется углом φ, значение которого примем в качестве обобщенной координаты.

Координата груза

$$z = OA = r\cos\varphi,$$

$$\delta z = -2r\sin\varphi\,\delta\varphi.$$

Активной силой является сила тяжести груза $m\mathbf{g}$, её работа на виртуальном перемещении

$$\delta A_{\text{тяж}} = mg\delta z = -2mg.$$

Найдем силы инерции груза и маховика.

а. Ускорение груза $w = \ddot{z} = -2r[\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\,\ddot{\varphi}] = -2r[\cos\varphi\,\omega^2 + \sin\varphi\,\dot{\omega}]$, где $\omega = \dot{\varphi}$ – проекция угловой скорости на ось *Ox*, перпендикулярную плоскости рисунка.

В начальный момент времени по условию задачи $\omega = 0$, поэтому

$$w(0) = -2r\sin\varphi\,\dot{\omega}.$$

Сила инерции равна $-mw$, а её виртуальная работа

$$\delta A_{\text{гр}} = -mw\delta z = -4mr^2\sin^2\varphi\dot{\omega}\,\delta\varphi.$$

б. Момент сил инерции маховика относительно оси *Ox* равен $-I\omega$. Виртуальная работа $\delta A_{\text{мах}} = -I\dot{\omega}\delta\varphi$.

Запишем общее уравнение динамики $\delta A_{\text{тяж}} + \delta A_{\text{гр}} + \delta A_{\text{мах}} = 0$

или $(2mgr\sin\varphi + 4mr^2\sin^2\varphi\ \dot{\omega} + I\dot{\omega})\delta\varphi = 0$.

Отсюда находим, что в начальный момент времени проекция углового ускорения на Ox равна

$$\dot{\omega} = {-2mgr\sin\varphi}\Big/{(4mr^2\sin^2\varphi + I)}.$$

Задача 6. *Центробежный регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти зависимость между угловой скоростью регулятора и углом α отклонения его стержней от вертикали, если муфта массой M отжимается вниз пружиной, находящейся при $\alpha = 0$ в недеформированном состоянии и закрепленной верхним концом на оси регулятора.*

Массы шаров равны m, длина стержней – l. Оси подвеса стержней отстоят от оси регулятора на расстоянии b. Коэффициент жесткости пружины – c. Массами стержней и пружины пренебречь.

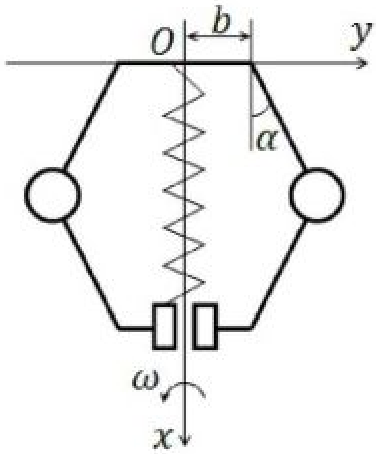


Рис.6. к условию задачи 6

Для описания положения тел, образующих систему, введем систему координат Oxy с началом на закрепленном конце регулятора. В качестве обобщенной координаты примем α – угол отклонения его стержней регулятора от вертикали.

Активные силы: силы тяжести шаров и муфты; сила упругости, действующая на муфту.

Сила упругости

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -c(x_3 - 2l)\mathbf{e}_x = 2cl(1 - \cos\alpha)\mathbf{e}_x.$$

Координаты шаров равны $x_{\text{ш}} = l\cos\alpha$, $y_{\text{ш}} = \pm(b + l\sin\alpha)$, координаты муфты $x_{\text{м}} = 2\,l\cos\alpha$, $y_{\text{м}} = 0$.

Вариации координат

$$\delta x_{\text{ш}} = -l\sin\alpha\ \delta\alpha\,,\ \delta y_{\text{ш}} = \pm l\cos\alpha\ \delta\alpha; \quad \delta x_{\text{м}} = -2\ l\sin\alpha\ \delta\alpha,\ \ \delta y_{\text{м}} = 0.$$

Работа активных сил на виртуальных перемещениях:

$$\delta A_{\text{тяж}} = m\mathbf{g}\delta\mathbf{r}_1 + m\mathbf{g}\delta\mathbf{r}_2 + 2M\mathbf{g}\delta\mathbf{r}_3 =$$
$$= -mgl\sin\alpha\ \delta\alpha - mgl\sin\alpha\ \delta\alpha - 2mgl\sin\alpha\ \delta\alpha = -4mgl\sin\alpha\ \delta\alpha.$$

$$\delta A_{\text{упр}} = \mathbf{F}_{\text{упр}}\delta\mathbf{r}_3 = -4cl^2(1 - \cos\alpha)\sin\alpha\ \delta\alpha.$$

Определим силы инерции. Ускорения шаров $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]] = -\omega^2 y_{\text{ш}}\mathbf{e}_y$, следовательно, $\mathbf{F}_{\text{ин}} = 2m\omega^2 y_{\text{ш}}\mathbf{e}_y$.

Работа сил инерции

$$\delta A_{\text{ин}} = 2m\omega^2 y_{\text{ш}}\delta y_{\text{ш}} = 2m\omega^2 l(b + l\sin\alpha)\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Запишем общее уравнение динамики

$$\delta A_{\text{тяж}} + \delta A_{\text{упр}} + \delta A_{\text{ин}} = 0;$$

$$[-2g(m+M)l\sin\alpha\ - 4cl^2(1-\cos\alpha)\sin\alpha + 2m\omega^2 l(b + l\sin\alpha)\cos\alpha]\delta\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha\,[g(m+M) + 2cl(1-\cos\alpha)]/m(b + l\sin\alpha).$$

Применение статических методов к задачам динамики проиллюстрируем на примере.

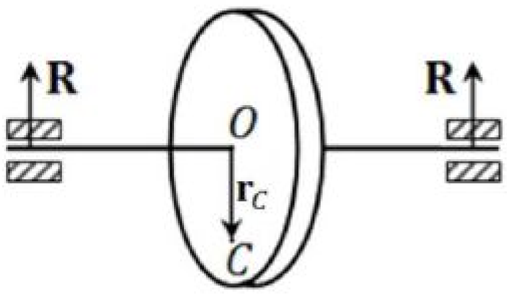


Рис. 7. к условию задачи 7

Задача 7. *Горизонтальный однородный вал равномерно вращается с угловой скоростью ω. Перпендикулярно к оси вала на равных расстояниях от подшипников на вал эксцентрично насажен диск.*

Требуется определить давление на подшипники при вращении вала. Масса диска m, масса вала $m_{\text{в}}$.

Найдем силу инерции, отвечающую отдельному элементу диска dm, положение которого определяется радиус–вектором $\mathbf{r}$, проведенным из геометрического центра диска (точка O).

Ускорение этого элемента $\mathbf{w} = \left[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]\right] = -\omega^2\mathbf{r}$, следовательно, сила инерции $-dm\mathbf{w} = dm\omega^2\mathbf{r}$. Подчеркнем, что эта сила направлена от оси вала. Равнодействующая этих сил инерции $\mathbf{I} = \omega^2\int_V\ dm\mathbf{r} = m\omega^2\mathbf{r}_C$, где т. C – центр инерции диска.

Активные силы, приложенные к валу с диском, – силы тяжести: $m\mathbf{g}$, $m_{\text{в}}\mathbf{g}$. В соответствии с принципом Даламбера можем записать для сил реакции подшипников $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{g}\,(m +\ m_{\text{в}}) + m\omega^2\mathbf{r}_C)$.

Следовательно, давление на каждый подшипник $\mathbf{N} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}\,(m +\ m_{в}) + m\omega^2\mathbf{r}_C)$. Давление максимально, когда направления $\mathbf{g}$ и $\mathbf{r}_C$ совпадают, т.е. когда центр инерции диска расположен под точкой O.

II.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода (далее уравнения Лагранжа) это обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие движение механической системы с s степенями свободы. Уравнения Лагранжа позволяют изучать динамику механических систем с голономными (геометрическими) связями независимо от числа тел, образующих систему, для любых видов движения (поступательного, вращательного, плоского и т.д.). Связи могут быть как стационарными, так и нестационарными. Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, \dots, s.$$

где T – кинетическая энергия системы, q_i – обобщенные координаты, Q_i – обобщенные силы. Связи предполагаются идеальными и голономными. Неидеальность связей в реальных системах не ограничивает применение метода. «Неидеальные» составляющие реакций (силы сопротивления) переводятся в число активных сил, т.е. вводятся в Q_i, с тем, чтобы связи формально можно было считать идеальными.

Обобщенной силой Q_i, соответствующей координате q_i, называется величина, являющаяся множителем при вариации обобщенной координаты δq_i в выражении для элементарной работы активных сил на виртуальных перемещениях точек системы:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j\,\delta \mathbf{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}\Big)\delta q_k.$$

$$\delta A = \sum_{k=1}^{s} Q_k\,\delta q_k, \qquad \text{где } Q_k = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k},$$

где N – число материальных точек системы, $\mathbf{r}_j$ – радиус–вектор j-й точки.

На практике при отыскании величины Q_k этой формулой обычно не пользуются. Для определения величины Q_k дают системе такое элементарное виртуальное перемещение, при котором только k-я координата получает некоторое приращение, а остальные координаты не изменяются.

После этого вычисляют работу активных сил $\delta A_k = Q_k \delta q_k$. Откуда дят $Q_k = {}^{\delta A_k}/_{\delta q_k}$.

Если в числе активных сил, действующих на систему присутствуют потенциальные силы, то обобщенные силы Q_k удобно представлять в виде суммы $Q_k^{\text{пот}} + Q_k^{\text{непот}}$, где $Q_k^{\text{пот}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_s)$ – потенциальная функция.

Уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\text{непот}}, \qquad i = 1, \dots, s,$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Заметим, что уравнения Лагранжа без изменения формы могут быть использованы для изучения относительного движения. При этом не требуется дополнительно учитывать силы инерции и Кориолиса. Достаточно при построении функции Лагранжа вычислить абсолютную кинетическую энергию через относительные координаты и записать уравнения Лагранжа.

При решении задач рекомендуется следующая последовательность операций.

1. Определить число степеней свободы.
2. Выбрать независимые обобщенные координаты по числу степеней свободы. Выбор произволен. Важны независимость координат между собой и однозначность определения ими положения системы.
3. Изобразить систему графически в некотором положении и показать все активные силы (и причисленные к ним «неидеальные» силы реакции).
4. Выделить в числе активных сил потенциальные и записать отвечающую им потенциальную функцию (сумму потенциальных функций, отвечающих каждой из сил) в обобщенных координатах.
5. Записать кинетическую энергию системы через обобщенные координаты и скорости.
6. Определить обобщенные непотенциальные силы $Q_i^{\text{непот}}$. Для этого точкам системы нужно сообщить виртуальные перемещения, направление которых совпадает с выбранным положительным направлением обобщенных координат и вычислить элементарную работу, а затем в соответствии с тем, что $\delta A_k = Q_k \delta q_k$, вычислить $Q_i^{\text{непот}}$.
7. Выполнить все операции дифференцирования, предусмотренные структурой левых частей уравнений Лагранжа.
8. Записать систему уравнений Лагранжа.

Задача 8. *На горизонтальном шероховатом полу лежит катушка ниток массой m. Момент инерции катушки относительно оси равен I. Нитку тянут с силой F под углом α к горизонту. Катушка катится без проскальзывания. Найти её закон движения. Радиус внешней части катушки R, радиус барабана, на который намотана нить r.*

Катушка совершает плоскопараллельное движение без отрыва от поверхности и проскальзывания. Она имеет одну степень свободы.

Координату центра катушки x примем в качестве обобщенной координаты.

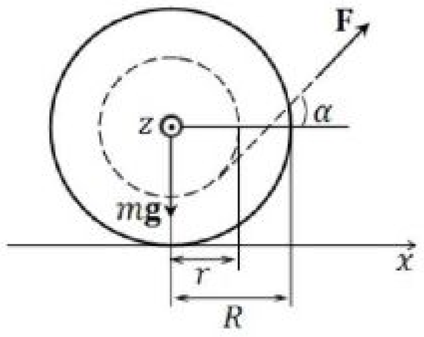


Рис.8. к условию задачи 8

Активные силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила, приложенная к нити $\mathbf{F}$. Реакция связи (пола): нормальная составляющая $\mathbf{N}$ и сила трения покоя (нет проскальзывания) работу не совершают – идеальная связь.

Сила тяжести – потенциальная сила. Точка приложения остается на одном уровне относительно горизонтальной поверхности. Будем считать, что $\Pi = 0$.

Кинетическая энергия катушки $T = T_1 + T_2$, где кинетическая энергия поступательного движения $T_1 = \frac{1}{2} m({}^{dx}/_{dt})^2$, энергия вращательного движения $T_2 = \frac{1}{2} I\omega^2 = {}^{I}/_{2R^2}\,({}^{dx}/_{dt})^2$, т.к. в отсутствие проскальзывания угловая скорость катушки и скорость поступательного движения связаны соотношением $\omega R = {}^{dx}/_{dt}$.

Вычислим обобщенную силу, отвечающую приложенной к катушке силе $\mathbf{F}$. Элементарная работа этой силы $\delta A = \delta A_{\text{пост}} + \delta A_{\text{вращ}}$. Работа в поступательном движении $\delta A_{\text{пост}} = (\mathbf{F}, \delta x \mathbf{e}_x) = F cos\alpha \cdot \delta x$.
Направим ось z так, как показано на рис. 8. Работа $\delta A_{\text{вращ}} = (\mathbf{M}, \delta\boldsymbol{\varphi}) = -M_z \delta\varphi$, т.к. по отношению к оси z катушка поворачивается по часовой стрелке. Проекция момента силы $M_z = Fr$. В отсутствие проскальзывания катушки $\delta x = R\delta\varphi$. Отсюда следует, что $\delta A_{\text{вращ}} = -F\frac{r}{R}\delta x$. Таким образом, $\delta A = F\left(\cos\alpha - {}^{r}/_{R}\right)\delta x$, следовательно,

$$Q = F(\cos\alpha - {}^{r}/_{R}).$$

Функция Лагранжа $L = T - \Pi = \frac{1}{2}(m + {}^{I}/_{R^2})\,({}^{dx}/_{dt})^2$.

Дифференциальное уравнение относительно обобщенной координаты x имеет вид:

$$(m + {}^{I}/_{R^2})\ {}^{d^2x}/_{dt^2} = F(\cos\alpha - {}^{r}/_{R})\,.$$

Отсюда следует, что

$$x = x_0 + v_0 t + {}^{wt^2}/_2\,,\ \text{где}\ w = F\left(\cos\alpha - {}^{r}/_{R}\right) : \left(m + {}^{I}/_{R^2}\right).$$

Видно, что катушка в зависимости от наклона нити к горизонту может двигаться вправо ($\cos\alpha > {}^{r}/_{R}$) или влево ($\cos\alpha < {}^{r}/_{R}$).

Выясним, каким должен быть коэффициент трения μ для того, чтобы катушка не скользила по плоскости при движении вправо.

Запишем уравнение поступательного движения катушки в проекциях на оси Oxy.

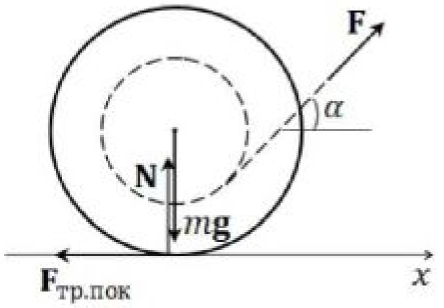


Рис.9. Активные силы, действующие на катушку

$$mw = F\cos\alpha - F_{\text{тр.пок}},$$
$$0 = F\sin\alpha + N - mg,$$

где N – сила реакции плоскости.

Для силы трения покоя справедливо неравенство

$$F_{\text{тр.пок}} \le \mu F_{\text{норм.давл.}} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

Дальнейший расчет элементарен

$$F\cos\alpha - mw = F_{\text{тр.пок}} \le \mu(mg - F\sin\alpha);$$
$$\mu \ge F(I\cos\alpha + mrR)/(I + mR^2)(\ mg - F\sin\alpha).$$

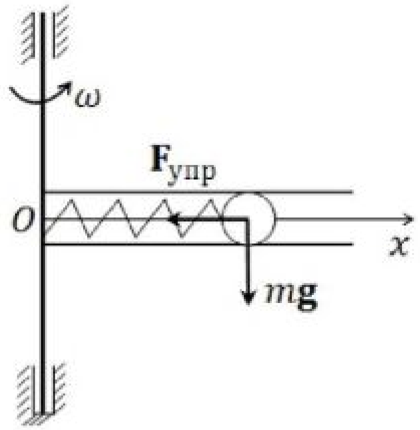


Рис.10. к условию задачи 9

Задача 9. *В гладкой горизонтальной трубке, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, находится шарик массы m и невесомая пружина жесткости c, связывающая шарик с осью. В начальный момент шарик находился в покое относительно трубки на расстоянии b от оси Oz и пружина была недеформирована. Пренебрегая размерами шарика, найти значения ω, при которых он совершает финитное движение, и найти при этих значениях ω малые колебания шарика во вращающейся системе отсчета.*

Система имеет одну степень свободы. Координату шарика в трубке x примем в качестве обобщенной координаты. Начало отсчета на оси вращения.

Активные силы: сила тяжести, сила упругости пружины – потенциальные силы.

Положение шарика по вертикали неизменно. Будем считать $\Pi_{\text{тяж}} = 0$.

Потенциальная функция, отвечающая силе упругости, $\Pi_{\text{упр}} = \frac{1}{2}c(x-b)^2$.

Шарик движется в трубке со скоростью $\dot{x}$ и вращается вместе с трубкой вокруг оси Oz.

Скорость шарика $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + [\boldsymbol{\omega}, (x - b)\mathbf{e}_x] = \dot{x}\mathbf{e}_x + \omega x\mathbf{e}_y$.

Его кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \omega^2 x^2]$.

Обобщенные непотенциальные силы отсутствуют.

Функция Лагранжа $L = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - \frac{1}{2}c(x - b)^2$.

Выполним операции дифференцирования, необходимые для составления уравнения Лагранжа

$$\partial L/_{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ , \quad \frac{d}{dt}\left(\partial L/_{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}, \quad \partial L/_{\partial x} = m\omega^2 x - c(x - b).$$

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x + c(x - b) = 0.$$

Может ли шарик находиться в равновесии относительно трубки?

Положим в уравнении $\dot{x} = 0$:

$$-m\omega^2 x_0 + c(x_0 - b) = 0, \quad x_0 = {cb}/_{(c - m\omega^2)}.$$

Положение равновесия x_0 существует (шарик совершает финитное движение) при условии, что $\omega^2 < {c}/_{m}$.

Рассмотрим колебания шарика во вращающейся трубке. Положив в уравнении движения $x = x_0 + u$, имеем

$$m\ddot{u} + (c - m\omega^2)u = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0\ , \ \omega_0 = \sqrt{{(c - m\omega^2)}/_{m}}.$$

Это – уравнение гармонического осциллятора.

Таким образом, окончательное решение принимает вид

$$x = x_0 + A\cos(\omega_0 t + \alpha),\ \text{где}\ A, \alpha - \text{постоянные},\ \ \omega^2 < {c}/_{m}.$$

Задача 10. *Маятник Максвелла массивное колесо, насаженное на ось, подвешенную на двух нитях длиной l. Ось вращения колеса горизонтальна. Масса колеса с осью m. Момент инерции колеса относительно оси I, радиус оси $r \ll l$. На ось намотали половину длины нити, затем маятник отпустили. Определите: а) период колебаний оси маятника, б) каково натяжение нитей, с) максимальную скорость оси диска.*

После того, как маятник отпускают, нить раскручивается, колесо опускается. Опустившись до конца и продолжая вращаться, оно по инерции начинает накручивать нить на ось и подниматься. В крайнем нижнем положении скорость поступательного движения колеса быстро (в модели – мгновенно) изменяет свое направление на противоположное.

Опускание колеса и его подъем можно описать в рамках лагранжевой механики.

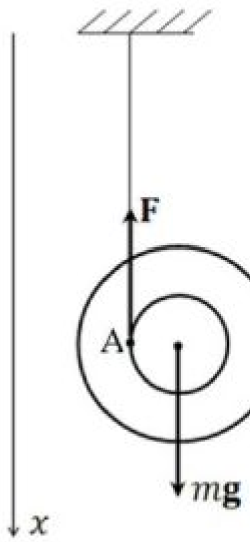


Рис.11. к условию задачи 10

Маятник Максвелла имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты примем вертикальную координату оси колеса x.
Активная сила – сила тяжести. Ей отвечает потенциальная функция $\Pi = -mgx$.
Непотенциальные силы отсутствуют.
Кинетическая энергия $T = T_1 + T_2$.
Кинетическая энергия поступательного движения колеса $T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
Кинетическая энергия его вращательного движения колеса $T_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Скорость точки А, в которой колесо отрывается от нити, равна нулю, поэтому $\omega r = \dot{x}$.
Отсюда находим, что $T = {}^1\!/_2\,(m + {}^I\!/_{r^2})\,\dot{x}^2$.

Функция Лагранжа $L = {}^1\!/_2\,(m + {}^I\!/_{r^2})\,\dot{x}^2 + mgx$.

Уравнение Лагранжа $\left(m + {}^I\!/_{r^2}\right)\ddot{x} - mg = 0$.

Таким образом, маятник Максвелла все время движения имеет постоянное направленное вертикально ускорение вниз ускорение

$$w = \ddot{x} = mgr^2/(I + mr^2).$$

Исключение составляют моменты времени, когда колесо достигает крайнего нижнего положения. Здесь ускорение принимает большое отрицательное (по отношению к оси x) значение, а скорость поступательного движения изменяет направление. На рис. 12 показано изменение ускорения и скорости оси диска со временем.

На диск действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и две силы упругости **F**, направленные вертикально вверх. Натяжение нитей $N = F$ определим из уравнения поступательного движения диска

$$m\ddot{x} = mg - 2F.$$

После подстановки в это уравнение $\ddot{x}$ находим

$$F = gmI/2(mr^2 + I).$$

Найдем наибольшую скорость оси диска. Она достигается в нижней точке траектории. По условию задачи ось перемещается на половину длины нити.

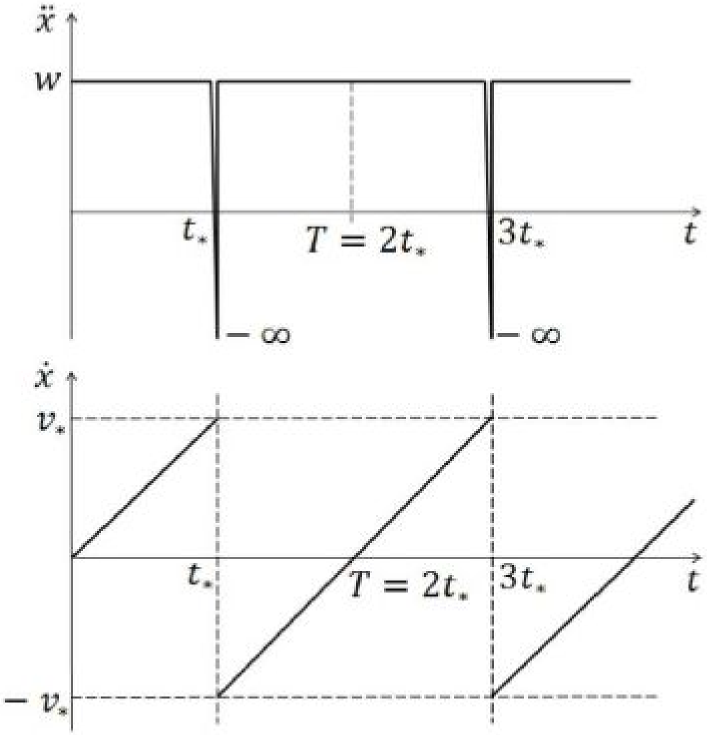


Рис. 12. Зависимость скорости и ускорения оси диска от времени

Движение происходит с постоянным ускорением из состояния покоя, поэтому время «падения» диска t_* определяется из уравнения $l/_2 = wt_*^2/_2$ и равно $\sqrt{l/w}$.

Скорость оси диска в нижней точке $v_* = wt_* = \sqrt{lw} = r\sqrt{mgl/(I + mr^2)}$.

Период колебаний маятника

$$T = 2t_* = 2\sqrt{l(I + mr^2)/mgr^2}\,.$$

Задача 11. *Однородный сплошной цилиндр массы m радиуса r может катиться без проскальзывания по внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R и массы M, который может вращаться вокруг своей горизонтально расположенной неподвижной оси. Составить уравнения движения системы. Найти малые колебания системы.*

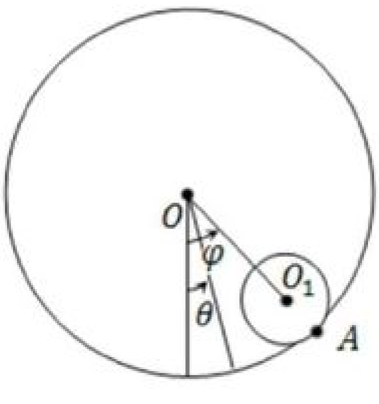


Рис.13. к условию задачи 11

Введем систему координат Oxy. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат удобно выбрать показанные на рисунке углы: φ – угол поворота отрезка OO_1, и θ – угол поворота полого цилиндра.

Активной силе – силе тяжести сплошного цилиндра, отвечает потенциальная функция

$$П = -mgy_A = -mg(R-r)\cos\varphi.$$

Вычислим кинетическую энергию системы $T = T_1 + T_2$.
Сплошной цилиндр движется поступательно со скоростью $(R-r)\dot{\varphi}$ (скорость центра цилиндра O_1) и вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1.
Угловую скорость ω_1 вычислим, исходя из того, что сплошной цилиндр движется без проскальзывания, т.е. в точке А его скорость и скорость полого цилиндра совпадают

$$(\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi} + \omega_1 r = \dot{\theta}R, \quad \omega_1 = [\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}]/r.$$

Кинетическая энергия сплошного цилиндра

$$T_1 = \frac{1}{2}m(\mathrm{R}-\mathrm{r})^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_1\,[\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}]^2/r^2.$$

где $I_1 = \frac{1}{2}mr^2$ - момент инерции цилиндра относительно оси O_1.
Кинетическая энергия полого цилиндра

$$T_2 = \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2, \quad I_2 = MR^2$$ - момент инерции полого цилиндра.

Функция Лагранжа системы

$$L = T_1 + T_2 - П =$$
$$= \frac{1}{2}m(\mathrm{R}-\mathrm{r})^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_1\,[\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}]^2/r^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\varphi.$$

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m(\mathrm{R}-\mathrm{r})^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m\,[\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\varphi.$$

Выполним операции дифференцирования

$$\partial L/\partial\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}R - 3(\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}\right](R-r),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{\varphi}\right) = -\frac{1}{2}m\left[\ddot{\theta}R - 3(\mathrm{R}-\mathrm{r})\ddot{\varphi}\right](R-r),$$

$$\partial L/\partial\varphi = -mg\,(R-r)\sin\varphi,$$

$$\partial L/\partial\dot{\theta} = \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}\right]R + MR^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left[\ddot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\ddot{\varphi}\right]R + MR^2\ddot{\theta}.$$

Функция Лагранжа не зависит от координаты θ, т.е. θ - циклическая координата. Ей отвечает циклический интеграл

$$\partial L/\partial\dot{\theta} = \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}R - (\mathrm{R}-\mathrm{r})\dot{\varphi}\right]R + MR^2\dot{\theta} = const.$$

Будем считать, что в начальный момент времени $\dot{\varphi} = 0,\ \dot{\theta} = 0$, тогда

$$const = 0,\ \ \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}R - (\mathrm{R} - \mathrm{r})\dot{\varphi}\right] + MR\dot{\theta} = 0.$$

Отсюда следует связь между обобщенными скоростями

$$\dot{\theta} = m(R - r)\dot{\varphi}/(m + 2M)R.$$

Теперь запишем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left({\partial L}/{\partial \dot{\varphi}}\right) - {\partial L}/{\partial \varphi} = 0$$

или

$$-\frac{1}{2}\left[\ddot{\theta}R - 3(\mathrm{R} - \mathrm{r})\ddot{\varphi}\right](R - r) + g\,(R - r)\sin\varphi = 0.$$

Воспользовавшись интегралом, исключим из этого уравнения $\ddot{\theta}$. В результате получим

$$(3M + m)(R - r)\Big/(2M + m)\ \ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Будем считать, что $m = M$, и запишем уравнение малых колебаний

$$\ddot{\varphi} + {3g}/{4(R - r)}\ \varphi = 0.$$

Это – уравнение гармонического осциллятора. Сплошной цилиндр (отрезок OO_1) совершает колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{{3g}/{4(R - r)}}$ по закону

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha),\ \text{где}\ A, \alpha -\ \text{постоянные величины.}$$

Закон изменения угла θ получим по циклическому интегралу, который при $m = M$ принимает вид

$$\dot{\theta} - {(R - r)}/{3R}\ \dot{\varphi} = C_1.$$

Отсюда находим $\theta = {(R - r)}/{3R}\ \varphi + C_1 t + C_2,\ C_1, C_2$ – постоянные величины.

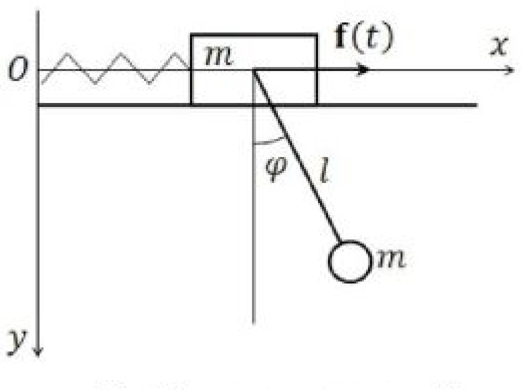


Рис.14. к условию задачи 12

Задача 12. *Эллиптический маятник состоит из ползуна массой m, который соединен пружиной жесткости k с неподвижной стенкой и может скользить по гладкому горизонтальному столу. Малое тело той же массы m подвешено к ползуну на невесомом стержне длины l. К ползуну приложено воздействие* $f(t) = A\sin\Omega t$. *Параметры системы удовлетворяют условию 2mg=kl. Найти движение системы.*

Эллиптический маятник имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат x – координату ползуна и угол φ, характеризующий отклонение стержня, скрепленного с материальной точкой m, от вертикали.

Связь (гладкий стол) идеальная голономная. Активные силы: силы тяжести, действующие на материальную точку и ползун, сила упругости пружины - потенциальные силы, и сила $\mathbf{f}(t)$.

Точка приложения силы тяжести ползуна, во все время движения остается на одной горизонтали (y=0), которую примем за нулевой уровень потенциальной функции, т.е. $\Pi_{\text{полз}} = 0$.

Координаты материальной точки

$$x_1 = x + l\sin\varphi, \quad y_1 = l\cos\varphi.$$

Силе тяжести материальной точки отвечает потенциальная функция

$$\Pi_{\text{мт}} = -mgy_1 = -mgl\cos\varphi.$$

Потенциальная функция силы упругости пружины $\Pi_{\text{упр}} = \frac{1}{2}kx^2$.

Таким образом, $\Pi = \Pi_{\text{полз}} + \Pi_{\text{мт}} + \Pi_{\text{упр}} = -mgl\cos\varphi + \frac{1}{2}kx^2$.

Кинетическая энергия ползуна $T_{\text{полз}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, кинетическая энергия материальной точки $T_{\text{мт}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)$.

Вычислим проекции скорости точки

$$\dot{x}_1 = \dot{x} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \dot{y}_1 = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi},$$

а затем запишем $T_{\text{мт}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi)$.

Кинетическая энергия системы $T = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi)$.

Функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l\cos\varphi) + mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}kx^2.$$

По определению работа обобщенных сил на виртуальных перемещениях $\delta A = Q_x\delta x + Q_\varphi\delta\varphi$. В нашем случае $\delta A = f(t)\delta x$. Таким образом,

$$Q_x^{\text{непот}} = f_0\sin\Omega t, \quad Q_\varphi^{\text{непот}} = 0.$$

Выполним операции дифференцирования, необходимые для составления уравнений Лагранжа

$$\partial L/\partial\dot{x} = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{x}\right) = m(2\ddot{x} + \ddot{\varphi}l\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 l\sin\varphi);$$

$$\partial L/\partial\dot{\varphi} = ml^2\dot{\varphi} + m\dot{x}l\cos\varphi. \quad \frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{\varphi}\right) = ml(l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi);$$

$$\partial L/\partial x = -kx, \quad \partial L/\partial\varphi = -m(\dot{x}\dot{\varphi} + g)l\sin\varphi.$$

Уравнения Лагранжа эллиптического маятника имеют вид

$$m(2\ddot{x} + \ddot{\varphi}l\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 l\sin\varphi) + kx = f_0\sin\Omega t;$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + (\dot{x}\dot{\varphi} + g)\sin\varphi = 0.$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний системы, поэтому в полученных уравнениях сохраним лишь линейные по отклонениям слагаемые

$$m(2\ddot{x} + \ddot{\varphi} l) + kx = f_0 \sin\Omega t;$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0.$$

После перехода к новой переменной $u = l\varphi$ и параметрам $b = {f_0}/{m}$, $\omega_0^2 = {g}/{l}$

учтем, что по условию задачи $2mg = kl$, и запишем уравнения движения в виде:

$$2\ddot{x} + \ddot{u} + 2\omega_0^2 x = b\sin\Omega t;$$

$$\ddot{x} + \ddot{u} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Решение складывается из полного решения однородной системы уравнений (собственные колебания эллиптического маятника) и частного решения неоднородной задачи (вынужденные колебания).

Для начала рассмотрим однородную систему уравнений

$$2\ddot{x} + \ddot{u} + 2\omega_0^2 x = 0;$$

$$\ddot{x} + \ddot{u} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

После подстановки $x = c_1 e^{i\omega}$, $u = c_2 e^{i\omega}$ приходим к уравнению частот

$$\begin{vmatrix} 2(\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим частоты собственных колебаний эллиптического маятника

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\left(2 - \sqrt{2}\right), \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Решение неоднородной системы уравнений отыскиваем в виде

$$x = A_1 \sin\Omega t, \qquad u = A_2 \sin\Omega t.$$

Подставляя эти выражения в уравнения движения, получим систему уравнений относительно A_1, A_2

$$2(\omega_0^2 - \Omega^2)A_1 \qquad - \ \Omega^2 A_2 = b;$$

$$-\Omega^2 A_1 \qquad + \ \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)A_2 = 0.$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - \Omega^4 = (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2).$$

Амплитудные множители определяются формулами

$$A_1 = {b(\omega_0^2 - \Omega^2)}/{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}, \quad A_2 = {b\Omega^2}/{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}.$$

Вынуждающая сила «навязывает» системе колебания с частотой Ω. Амплитуды колебаний A_1, A_2 изменяются с изменением частоты вынуждающей силы. На рис. 15 представлены зависимости $A_1\left(\Omega^2\right)$, $A_2(\Omega^2)$.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, наступающее при приближении частоты периодического внешнего воздействия к частотам собственных колебаний называют ***резонансом***.

Режим вынужденных колебаний системы при $\Omega = \omega_0$ соответствует ***антирезонансу***. При спокойном состоянии ползуна, на который действует периодически изменяющаяся сила $f_0 \sin\omega_0 t$, малое тело (поглотитель колебаний) колеблется с частотой ω_0 в противофазе с вынуждающей силой:

$$x = 0, \ т.к. \ A_1 = 0, \ u = |A_2| \sin(\omega_0 t + \pi).$$

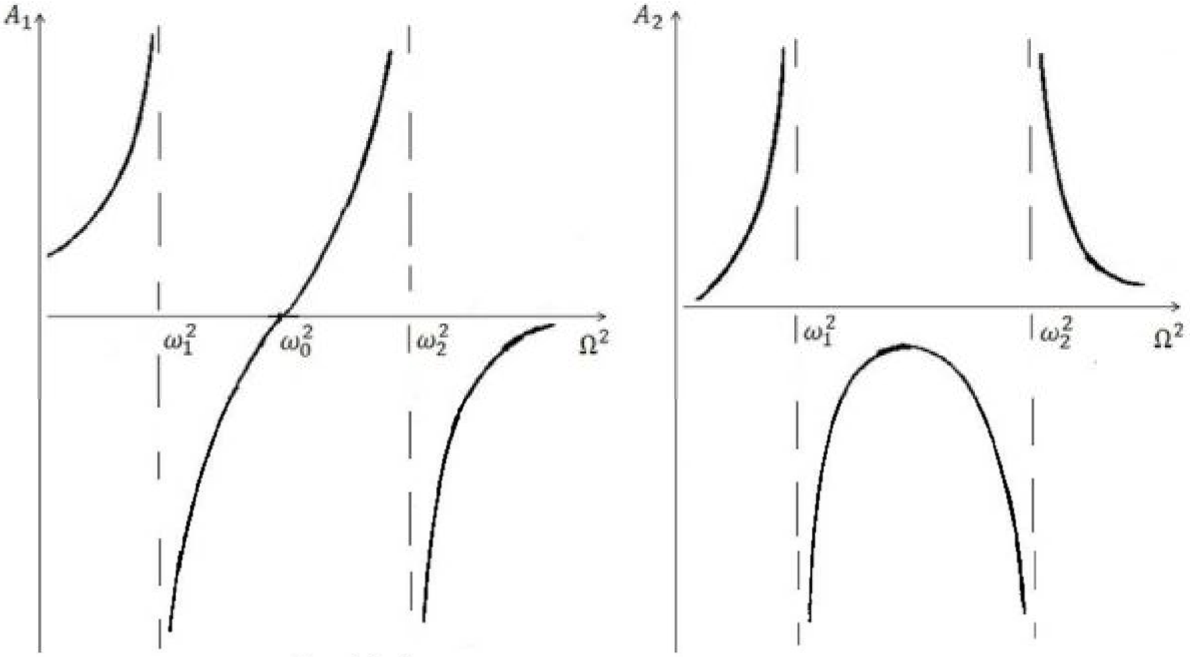


Рис.15. Амплитудно-частотные характеристики

Задача 13. *Найти функцию Лагранжа и составить уравнения движения симметричного волчка ($A = B \neq C$) массы m в однородном поле тяжести, если центр масс волчка находится на его оси динамической симметрии на расстоянии l от неподвижной точки. Получить достаточное условие устойчивости волчка.*

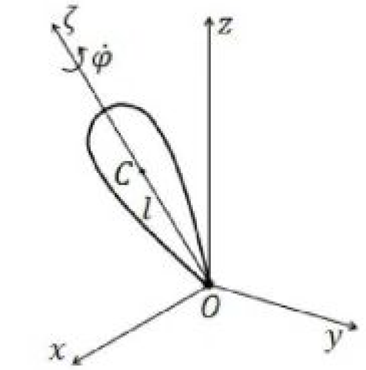


Рис. 16. К условию задачи 13

Введем систему неподвижных осей $Oxyz$, где O – точка опоры волчка.

Систему осей $O\xi\eta\zeta$ жестко свяжем с телом так, что $O\zeta$ – ось симметрии.

Волчок имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат примем углы α, β и угол собственного вращения φ (вращение вокруг оси $O\zeta$).

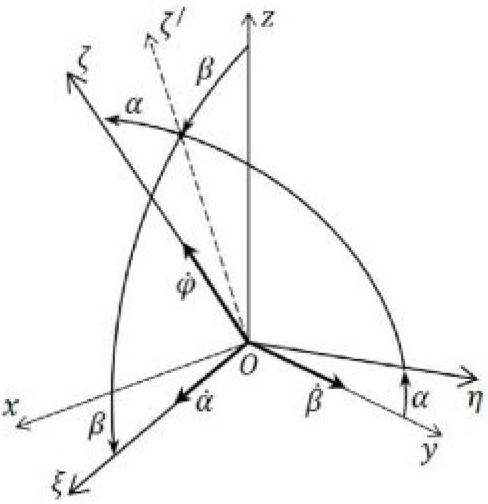


Рис. 17. Характеристики ориентации системы осей, связанных с волчком, по отношению к неподвижным осям

Переход от системы координат $Oxyz$ к связанной системе $O\xi\eta\zeta$ показан на рис. 17. Он осуществляется в два этапа:

- поворот вокруг оси Oy на угол β (вектор $\dot{\beta}$ направлен по Oy); переход от системы $Oxyz$ к системе $O\xi y\zeta'$,
- поворот вокруг оси $O\xi$ на угол α (вектор $\dot{\alpha}$ направлен по $O\xi$); переход от системы $O\xi y\zeta'$ к системе координат $O\xi\eta\zeta$.

Найдем проекции угловой скорости волчка на оси связанной системы координат. В соответствии с рисунком угловая скорость волчка $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\mathbf{e}_\xi + \dot{\beta}\mathbf{e}_y + \dot{\varphi}\mathbf{e}_\zeta$. Заметив, что $\dot{\beta}\mathbf{e}_y = \dot{\beta}\cos\alpha\,\mathbf{e}_\eta - \dot{\beta}\sin\alpha\,\mathbf{e}_\zeta$, это выражение приводим к виду $\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi\mathbf{e}_\xi + \omega_\eta\mathbf{e}_\eta + \omega_\zeta\mathbf{e}_\zeta$, где

$$\omega_\xi = \dot{\alpha},\ \ \omega_\eta = \dot{\beta}\cos\alpha\,, \quad \omega_\zeta = \dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha.$$

Теперь запишем выражение для кинетической энергии волчка

$$T = \frac{1}{2}\left(I_\xi{\omega_\xi}^2 + I_\eta\,{\omega_\eta}^2 + I_\zeta\,{\omega_\zeta}^2\right)$$

или $T = \frac{1}{2}\left(I_\xi\dot{\alpha}^2 + I_\eta\dot{\beta}^2cos^2\alpha + I_\zeta\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(A\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2cos^2\alpha\right) + C\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2\right).$$

где $I_\xi = I_\eta$ =A - экваториальные, I_ζ =C - аксиальный моменты инерции волчка.

Потенциальная энергия волчка $\Pi = mgl\cos\alpha\cos\beta$.

Функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\left(A\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2cos^2\alpha\right) + C\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)^2\right) - \ mgl\cos\alpha\cos\beta.$$

Выполним операции дифференцирования

$$\partial L\big/_{\partial\dot{\alpha}} = A\dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\partial L\big/_{\partial\dot{\alpha}}\right) = A\ddot{\alpha};$$

$$\partial L\big/_{\partial\dot{\beta}} = A\dot{\beta}cos^2\alpha - C\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right)\sin\alpha\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\partial L\big/_{\partial\dot{\beta}}\right) = A\left(\ddot{\beta}cos^2\alpha - 2\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$- C\left(\ddot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\varphi}\dot{\alpha}\cos\alpha - \ddot{\beta}sin^2\alpha - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\alpha\cos\alpha\right);$$

$$\partial L\big/_{\partial\dot{\varphi}} = C\left(\dot{\varphi} - \dot{\beta}\sin\alpha\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\partial L\big/_{\partial\dot{\varphi}}\right) = C\left(\ddot{\varphi} - \ddot{\beta}\sin\alpha - \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\alpha\right);$$

$$\partial L/_{\partial\alpha} = -A\dot\beta^2\sin\alpha\cos\alpha - C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha)\dot\beta\cos\alpha + mgl\sin\alpha\cos\beta;$$

$$\partial L/_{\partial\beta} = mgl\cos\alpha\sin\beta,\quad \partial L/_{\partial\varphi} = 0.$$

Составим уравнения Лагранжа

$$A\ddot\alpha + A\dot\beta^2\sin\alpha + C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha)\dot\beta\cos\alpha - mgl\sin\alpha\cos\beta = 0;$$
$$A(\ddot\beta cos^2\alpha - 2\dot\beta\sin\alpha\cos\alpha) - C(\ddot\varphi\sin\alpha + \dot\varphi\dot\alpha\cos\alpha -$$
$$-\ddot\beta sin^2\alpha - 2\dot\alpha\dot\beta\sin\alpha\cos\alpha) - mgl\cos\alpha\sin\beta = 0;$$
$$C(\ddot\varphi - \ddot\alpha\sin\alpha + \dot\alpha\dot\beta\cos\alpha) = 0.$$

Координата φ является циклической. Поэтому последнее уравнение сводится к интегралу $C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha) = const.$

Это - интеграл момента количества движения относительно оси $O\zeta$.

Второй интеграл – интеграл энергии

$$E = T + \Pi =$$
$$= \frac{1}{2}\left(A(\dot\alpha^2 + \dot\beta^2 cos^2\alpha) + C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha)^2\right) + mgl\cos\alpha\cos\beta = h = const.$$

Третий интеграл – интеграл проекции моментов количества движения на неподвижную ось Oz $\quad K_z = k = const.$

Вычислим K_z: $K_z = K_\xi\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_z + K_\eta\mathbf{e}_\eta\mathbf{e}_z + K_\zeta\mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_z$,

где $K_\xi = A\omega_\xi = A\dot\alpha$, $K_\eta = A\omega_\eta = A\dot\beta\cos\alpha$, $K_\zeta = C\omega_\zeta = C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha)$.

Используя рисунок, запишем

$$\mathbf{e}_\xi\mathbf{e}_z = -\sin\beta,\qquad \mathbf{e}_\eta\mathbf{e}_z = \sin\alpha\cos\beta,\qquad \mathbf{e}_\zeta\mathbf{e}_z = \cos\alpha\cos\beta.$$

Отсюда

$$K_z = A(-\dot\alpha\sin\beta + \dot\beta\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta) + C(\dot\varphi - \dot\beta\sin\alpha)\cos\alpha\cos\beta = k.$$

Из первых двух уравнений Лагранжа и циклического интеграла, положив в них производные от α и β по времени равными нулю, найдем равновесное состояние волчка: $\quad \alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 0,\ \dot\varphi = const = \omega_0$.

Запишем уравнения движения волчка в отклонениях от равновесного состояния, т.е. ограничившись в уравнениях Лагранжа линейными по отклонениям членами

$$A\ddot\alpha + C\dot\beta\omega_0 - mgl\alpha = 0;$$
$$A\ddot\beta - C\dot\alpha\omega_0 - mgl\beta = 0.$$

Примем обозначения: $\Omega = {}^{C}/_{A}\,\omega_0$, $f = {}^{mgl}/_{A}$ и перепишем систему уравнений

$$\ddot\alpha + \Omega\dot\beta - f\alpha = 0;$$
$$\ddot\beta - \Omega\dot\alpha - f\beta = 0.$$

Запишем эти уравнения в спрессованном виде, т.е. умножим второе уравнение на $i = \sqrt{-1}$ и введем комплексную переменную $u = \alpha + i\beta$:

$$\ddot{u} - i\Omega\dot{u} - fu = 0.$$

После подстановки $u = u_0 e^{i\omega t}$ приходим к уравнению частот

$$\omega^2 - \Omega\omega + f = 0.$$

Его корни $\omega_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} - f}$.

При $\Omega^2/_4 - f > 0$, или в исходных переменных при $C^2\omega_0^2 > 4mglA$ углы α и β, характеризующие положение оси волчка, гармонически изменяются со временем.

Выполним обратный переход от комплексной переменной u углам α и β

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \theta), \qquad \beta = \beta_0 \sin(\omega t + \theta).$$

После подстановки этих выражений в одно из уравнений получим, что амплитудные множители равны: $\alpha_0 = \beta_0$.

Таким образом, волчок консервативно устойчив при выполнении условия $C^2\omega_0^2 > 4mglA$ (достаточное условие устойчивости):

$$\alpha = \alpha_{10} \cos(\omega_1 t + \theta_1) + \alpha_{20} \cos(\omega_2 t + \theta_2),$$
$$\beta = \alpha_{10} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \alpha_{20} \sin(\omega_2 t + \theta_2),$$

где α_{10}, α_{20}, θ_1, θ_2 – постоянные величины, определяемые из начальных условий.

Литература

1. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961. – 208 с.
2. Самостоятельная работа студентов при решении задач по физике: Методические указания / Сост. Ф.П. Кесаманлы, В.М. Коликова – Л., 1987. – 32 с.
3. Зернов Б.С. Сборник задач по теоретической механике. Ч.2. Динамика. – М.-Л.: Гос. научно-техническое изд-во, 1931. – 168 с.
4. Балаш В.А. Сборник задач по курсу общей физики. – М.: Просвещение, 1978. – 208 с.
5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
6. Сборник задач по аналитической механике: Учебное пособие / Сост. Е.С. Пятницкий, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаев, Г.Н. Яковенко – М.: Наука, 1980. – 320 с.
7. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. – СПб.: Изд-во «Лань», 1998. – 448 с.