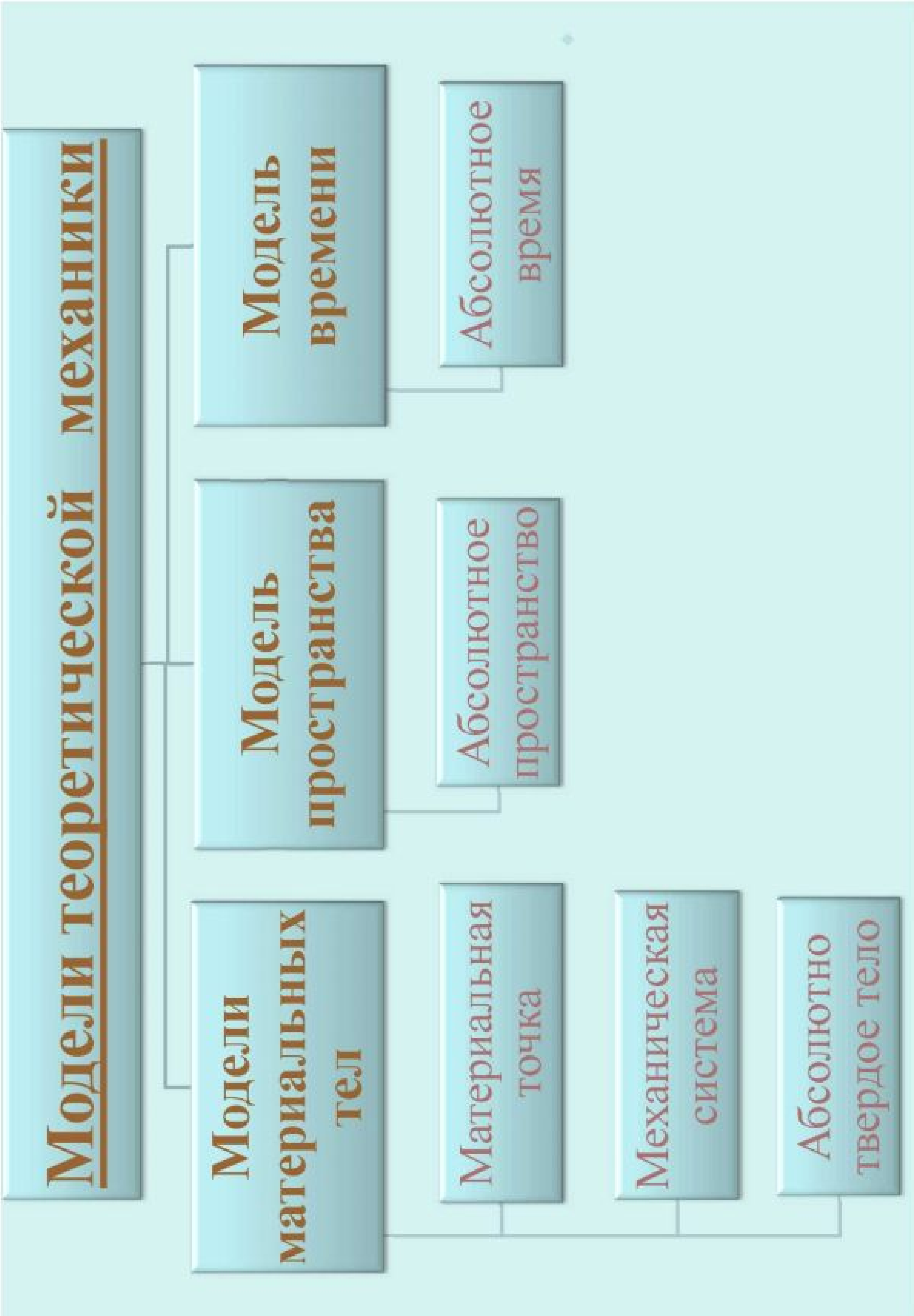
ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ПРЕЗЕНТАЦИЯ ЛЕКЦИЙ
Учебное пособие

Освещен весь материал лекций по всем модулям дисциплины: кинематике, статике, динамике и основам аналитической механики.

Предназначены для студентов направлений подготовки бакалавров 150400.62 «Технологические машины и оборудование», 150600.62 «Материаловедение и технология новых материалов», 150900.62 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», 190100.62 «Наземные транспортные системы», 190500.62 «Эксплуатация транспортных средств».

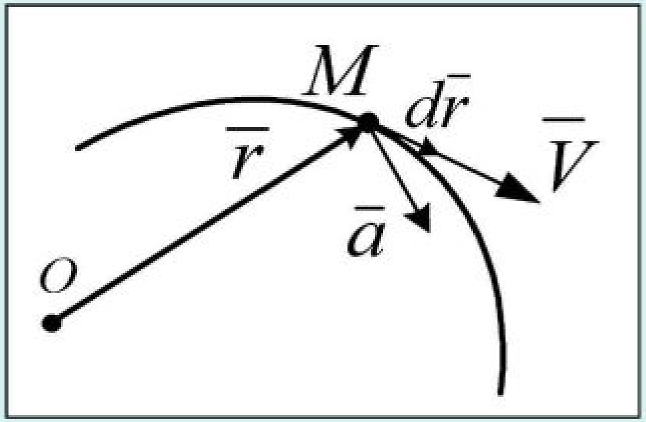
СОДЕРЖАНИЕ

Теоретическая механика
Кинематика (модуль 1)
Статика (модуль 2)
Динамика (модуль 3)
Кинематика точки
Кинематика твердого тела
Сложное движение точки
Сложное движение твердого тела
Сходящаяся система сил
Плоская система сил
Пространственная система сил
Центр тяжести
Динамика точки
Динамика твердого тела
Динамика механических систем
Аналитическая механика
I семестр обучения
II семестр обучения


Модели теоретической механики
Модели материальных тел
Модель пространства
Модель времени
Материальная точка
Механическая система
Абсолютно твердое тело
Абсолютное пространство
Абсолютное время

Кинематика точки

Векторный способ задания движения



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Уравнение движения точки

Скорость точки

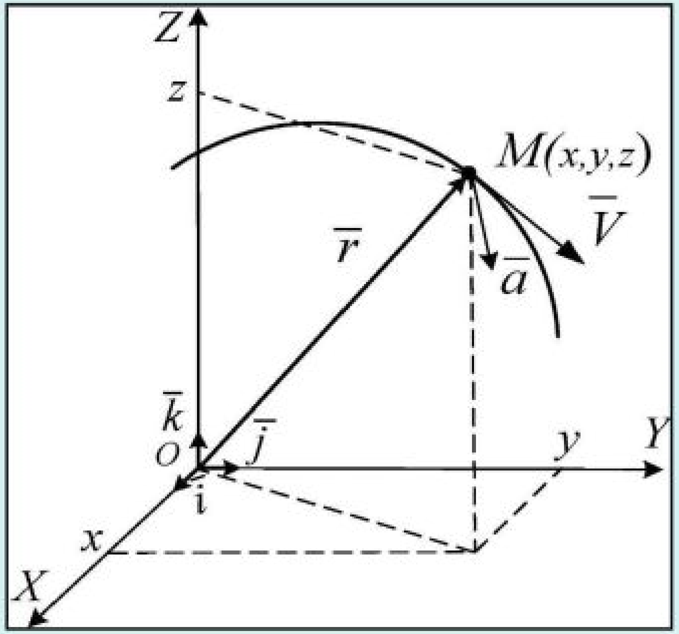
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ускорение точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Кинематика точки

Координатный способ задания движения



Уравнения движения точки

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Скорость точки

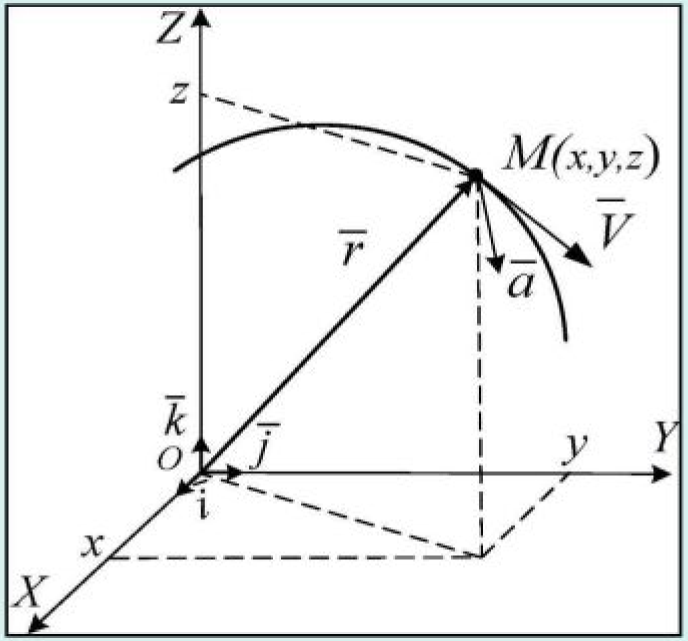
$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

Ускорение точки

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Кинематика точки

Координатный способ задания движения



Проекции вектора скорости

$$V_x = \dot{x} \qquad V_y = \dot{y} \qquad V_z = \dot{z}$$

Модуль скорости точки

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$$

Проекции вектора ускорения

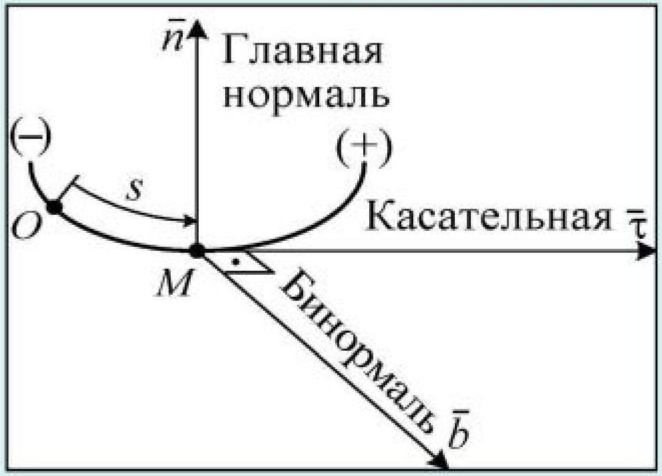
$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

Кинематика точки

Естественный способ задания движения



Уравнение движения точки $\quad s = s(t)$

Скорость точки $\quad \vec{V} = V\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$

Ускорение точки $\quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

Касательное ускорение

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} = \ddot{s}\vec{\tau}$$

Нормальное ускорение

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}$$

Модуль ускорения $\quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$

Кинематика точки

Естественный способ задания движения

Прямолинейное движение точки

$$\rho = \infty \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\tau = dV/dt\,\vec{\tau}$$

Равномерное криволинейное движение точки

$$V = \text{const} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n = V^2/\rho\,\vec{n}$$

закон движения $s = s_0 + Vt$

Равнопеременное криволинейное движение точки

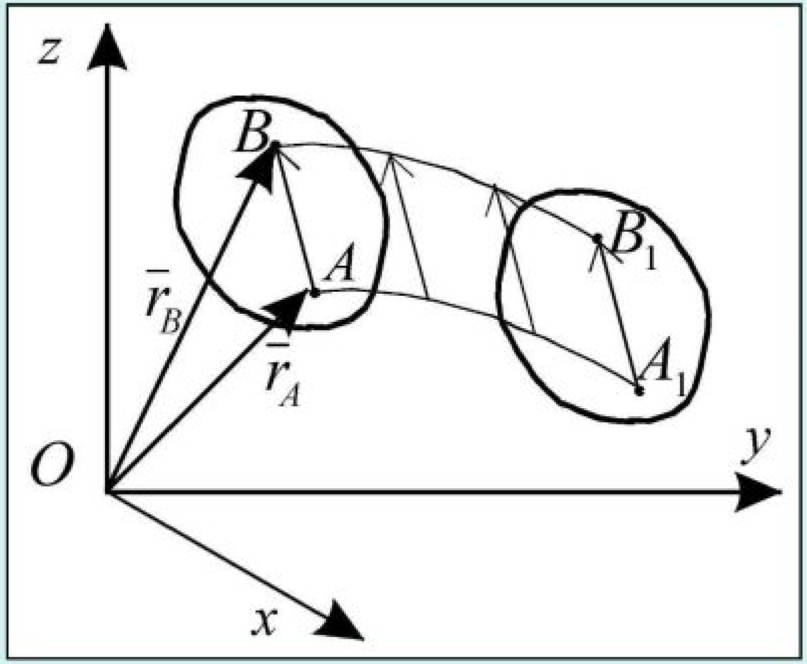
$$a_\tau = \text{const} \Rightarrow$$

зависимость скорости от времени $V = V_0 \pm |a_\tau| t$

закон движения $s = s_0 + V_0\,t \pm \dfrac{|a_\tau|\,t^2}{2}$

Поступательное движение тела

Теорема. *При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.*



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{const}$$

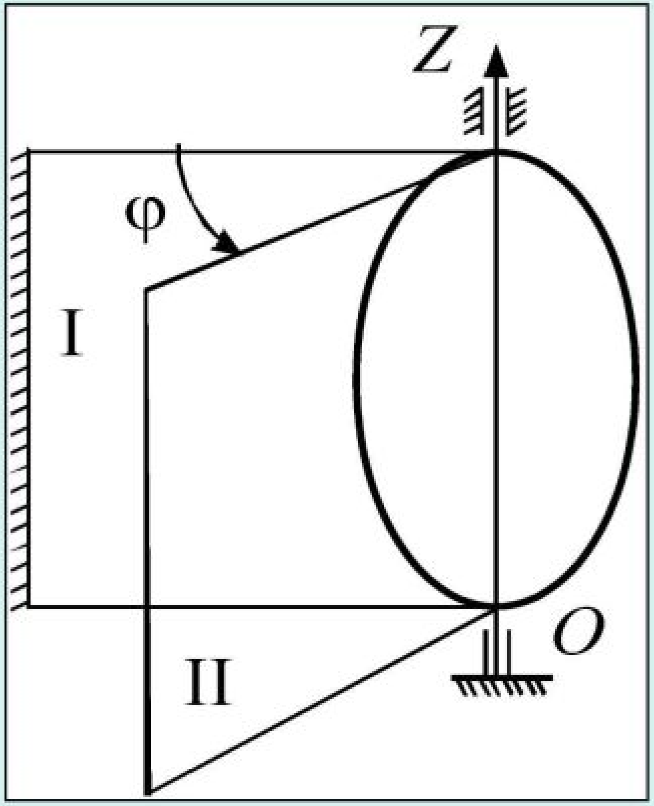
Скорости и ускорения точек тела

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Вращательное движение тела

Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси



$$\varphi = f(t)$$

Угловая скорость

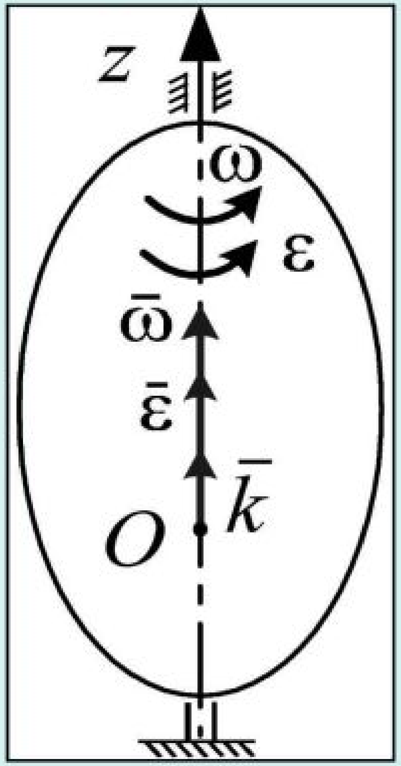
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

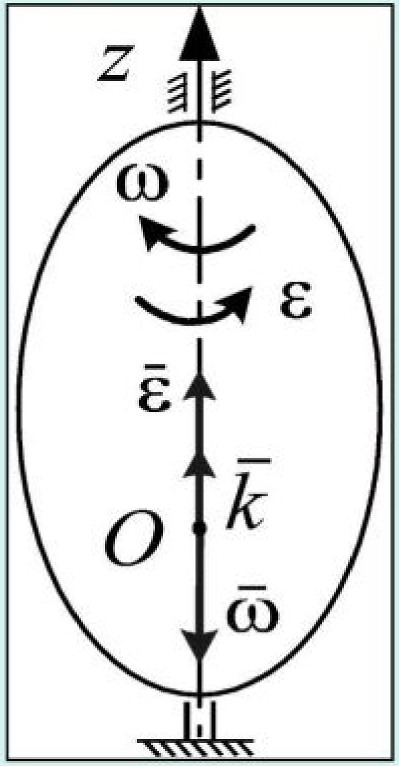
Вращательное движение тела

Ускоренное вращение



$\omega > 0,\ \varepsilon > 0$

Замедленное вращение



$\omega < 0,\ \varepsilon > 0$

Вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$$

Вектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{k} = \ddot{\varphi}\,\vec{k}$$

Вращательное движение тела

Частные случаи

Равномерное вращение $\boxed{\omega(t) = \omega_0 = \text{const}}$

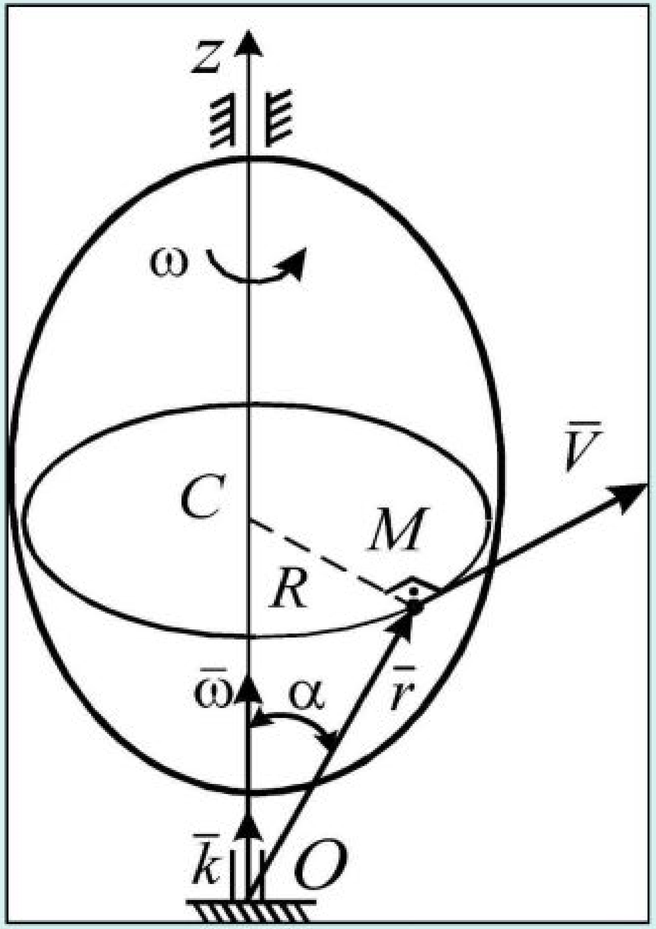
Закон равномерного вращения $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t}$

Равнопеременное вращение $\boxed{\varepsilon = \text{const}}$

Зависимость угловой скорости от времени $\boxed{\omega = \omega_0 \pm |\varepsilon| t}$

Закон равнопеременного вращения $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \dfrac{|\varepsilon| t^2}{2}}$

Вращательное движение тела



Вектор скорости точки тела

Формула Эйлера $\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

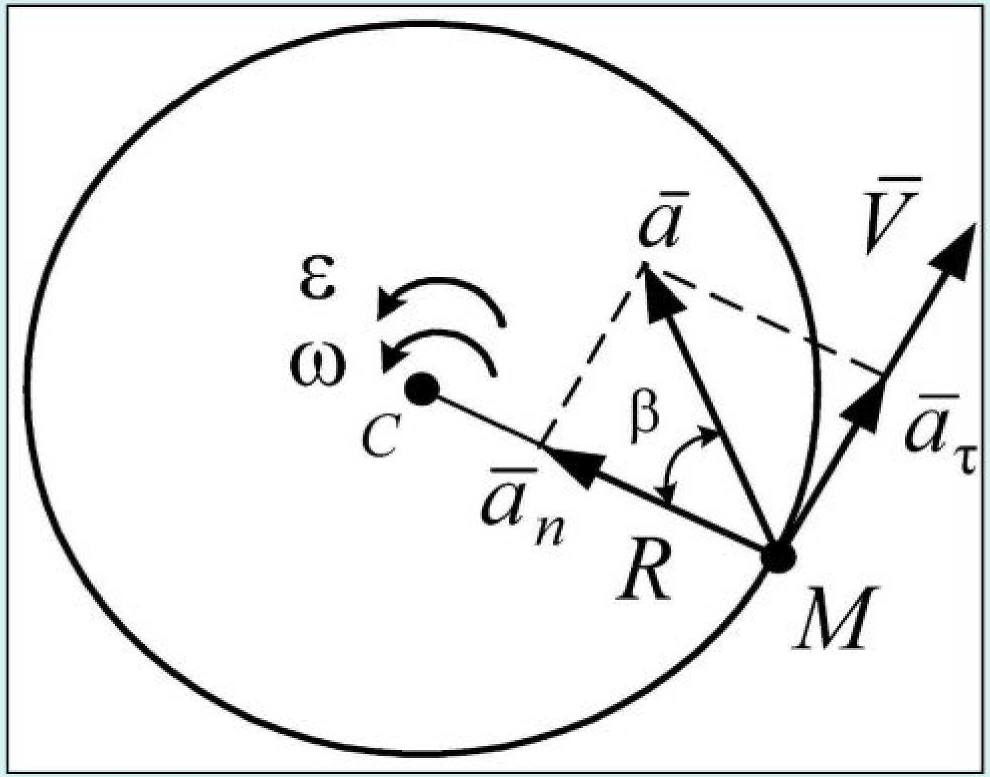
Числовое значение скорости точки

$$\boxed{V = \omega R}$$

$$\boxed{\vec{V} \perp R}$$

Лекция 2

Вращательное движение тела



Вектор ускорения точки тела

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Касательное ускорение

$$a_\tau = \varepsilon R$$

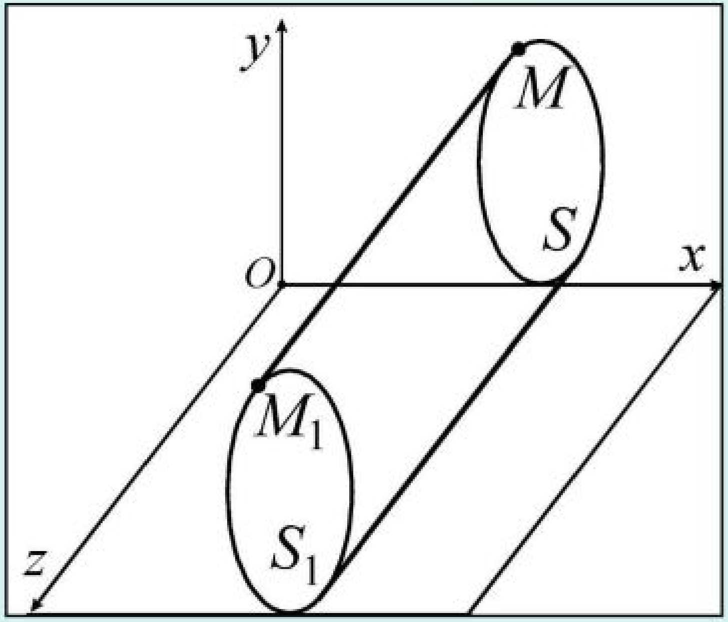
Нормальное ускорение

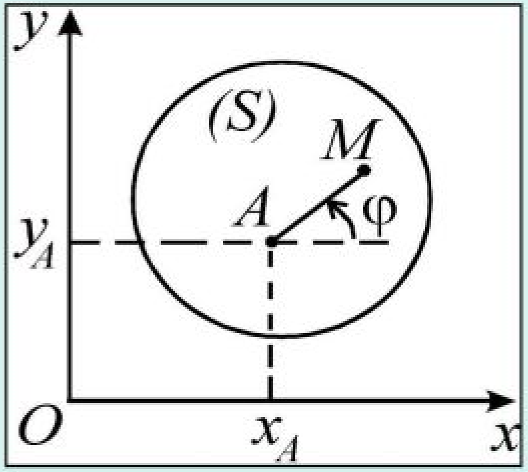
$$\vec{a}_n = \omega^2 R$$

Модуль полного ускорения

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Плоскопараллельное (плоское) движение тела





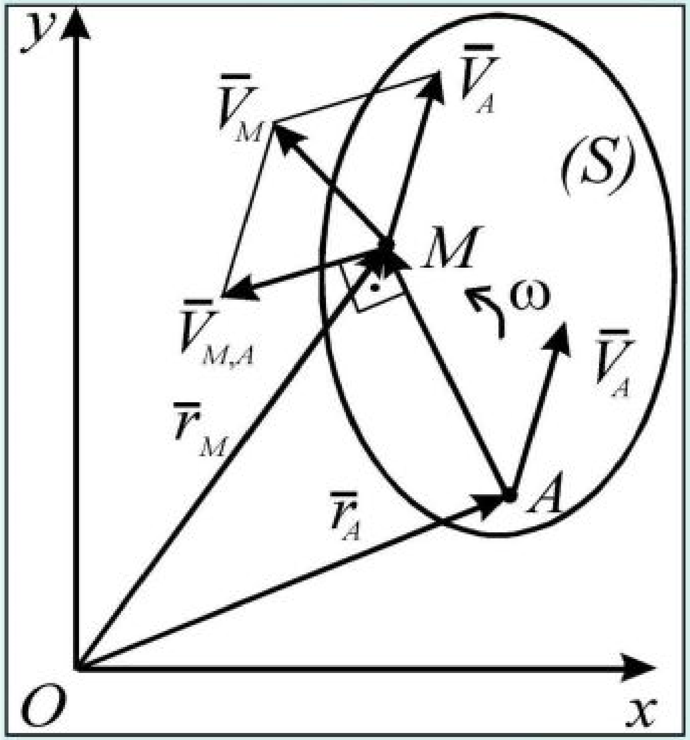
Уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t),$$

$$\varphi = f_3(t).$$

Плоскопараллельное движение

Теорема о скоростях точек плоской фигуры



Вектор скорости точки M тела

$$\boxed{\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}}$$

$\boxed{\vec{V}_A}$ - вектор скорости полюса A

$$\boxed{\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}}$$

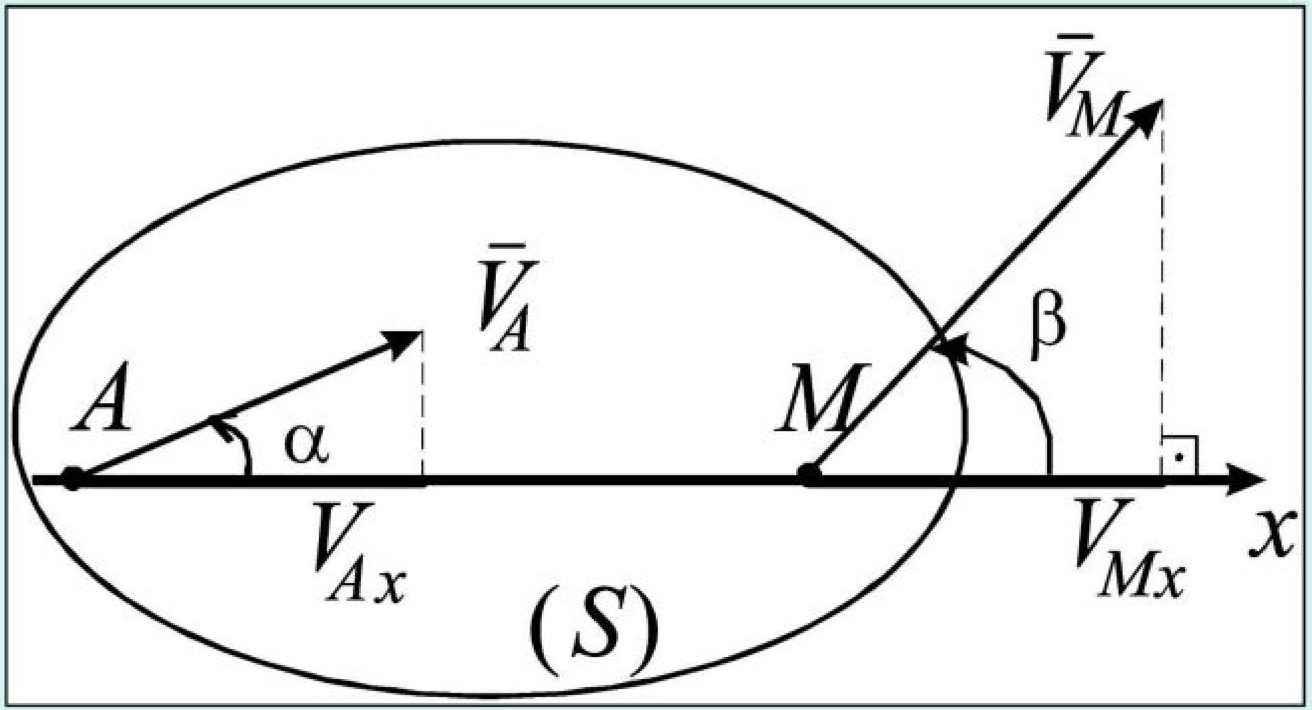
- вектор скорости точки M вокруг полюса A

Модуль скорости точки тела

$$\boxed{V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2\,V_A V_{MA} \cos(\vec{V}_A \wedge \vec{V}_{MA})}}$$

Плоскопараллельное движение

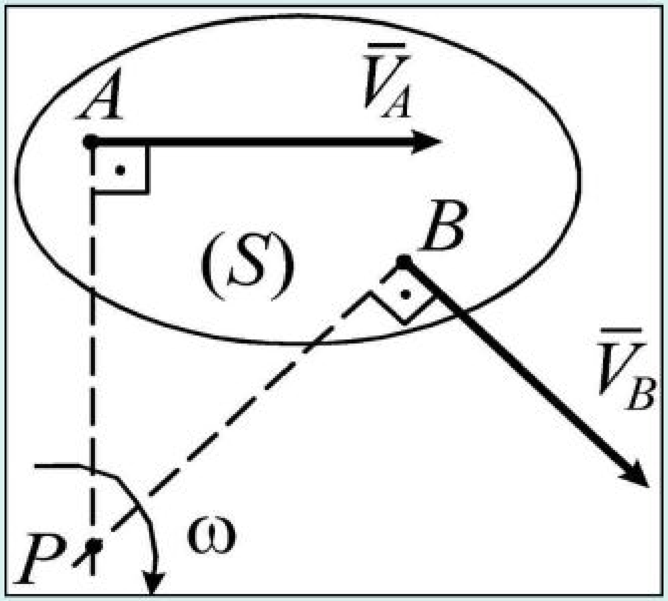
Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры



$$V_{Mx} = V_{Ax}$$ *или* $$V_M \cos\beta = V_A \cos\alpha$$

Плоскопараллельное движение

*Мгновенный центр скоростей (**МЦС**) - точка **P** плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*



Модуль скорости любой точки тела

$$V_A = \omega\ AP;\quad V_B = \omega\ BP.$$

Мгновенная угловая скорость тела

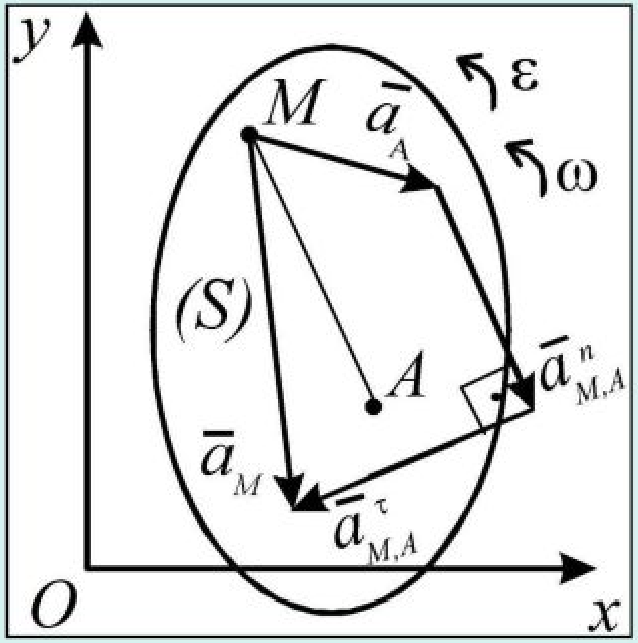
$$\omega = \frac{V_A}{AP}.$$

Вектор скорости любой точки тела

$$\vec{V}_A \perp AP;\qquad \vec{V}_B \perp BP.$$

Плоскопараллельное движение

Ускорения точки плоской фигуры



Вектор ускорения точки M тела

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{MA} + \vec{a}^\tau_{MA}}$$

$\boxed{\vec{a}_A}$ - вектор ускорения полюса A

Нормальное ускорение точки M во вращение вокруг полюса A

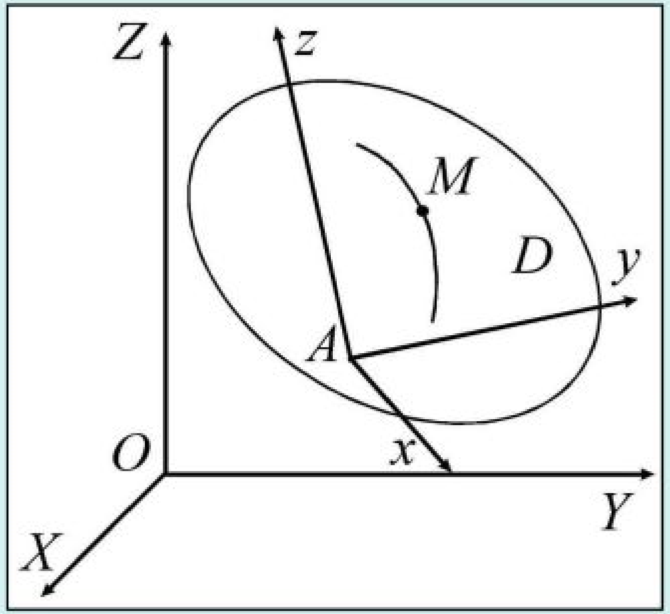
$$\boxed{a^n_{MA} = \omega^2 AM}$$

Касательное ускорение точки M во вращении вокруг полюса A

$$\boxed{a^\tau_{MA} = \varepsilon\ AM}$$

Составное (сложное) движение точки

Абсолютное движение - *движение точки M относительно неподвижной системы координат OXYZ*

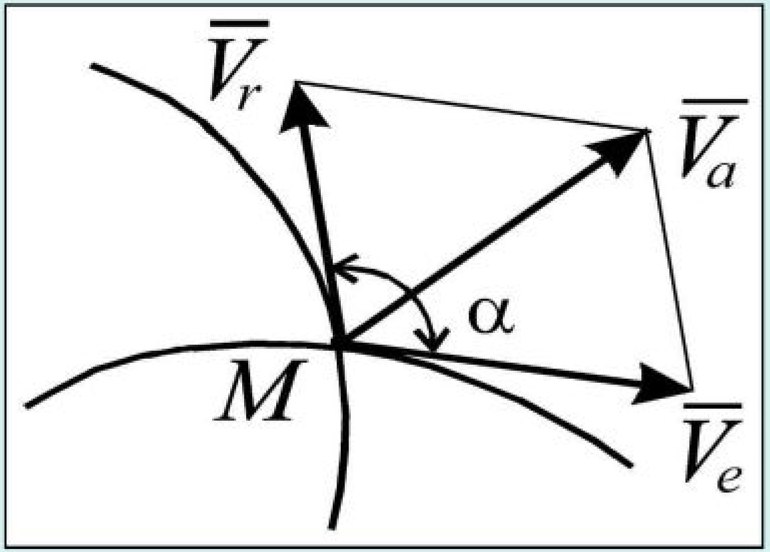


Переносное движение - *движение тела D и связанного с ним подвижного трёхгранника Axyz относительно неподвижного трёхгранника OXYZ*

Относительное движение - *движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета Axyz*

Составное (сложное) движение точки

Теорема о сложении скоростей



Вектор абсолютной скорости

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \ ,$$

$\vec{V}_r$ - вектор относительной скорости

$\vec{V}_e$ - вектор переносной скорости

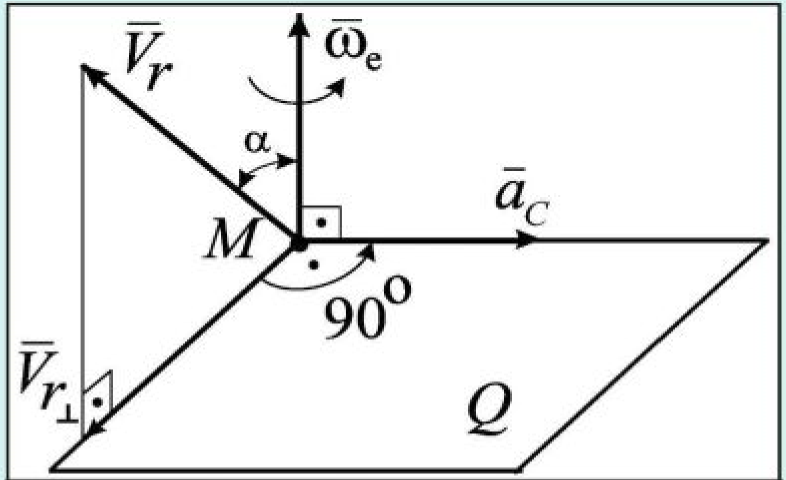
Модуль абсолютной скорости

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2\,V_e\,V_r\cos\alpha}$$

Составное (сложное) движение точки

Вектор абсолютного ускорения $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$

$\vec{a}_r$ $\vec{a}_e$ - относительное и переносное ускорения



Правило Н. Е. Жуковского

Вектор ускорения Кориолиса

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

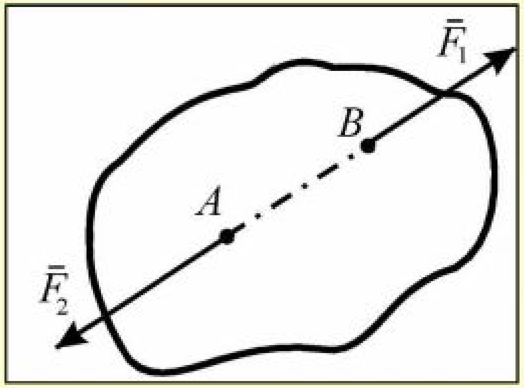
Модуль ускорения Кориолиса

$$a_C = 2\,|\vec{\omega}_e|\,|\vec{V}_r|\sin\alpha$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a_{aX}^2 + a_{aY}^2 + a_{aZ}^2}$$

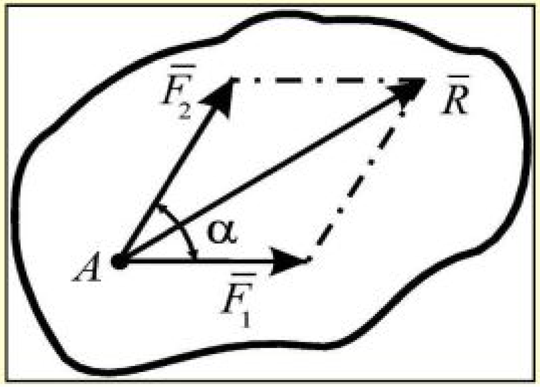
Аксиомы статики



Аксиома 1.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему сил.*



Аксиома 3.

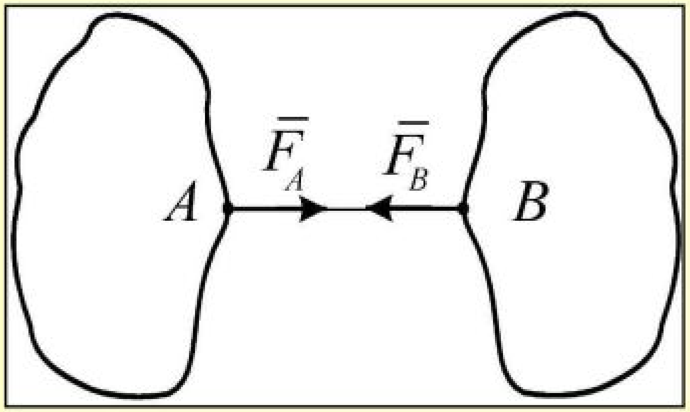
Вектор равнодействующей силы

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Аксиомы статики

Аксиома 4.

$$\bar{F}_A = -\bar{F}_B$$



Аксиома 5.

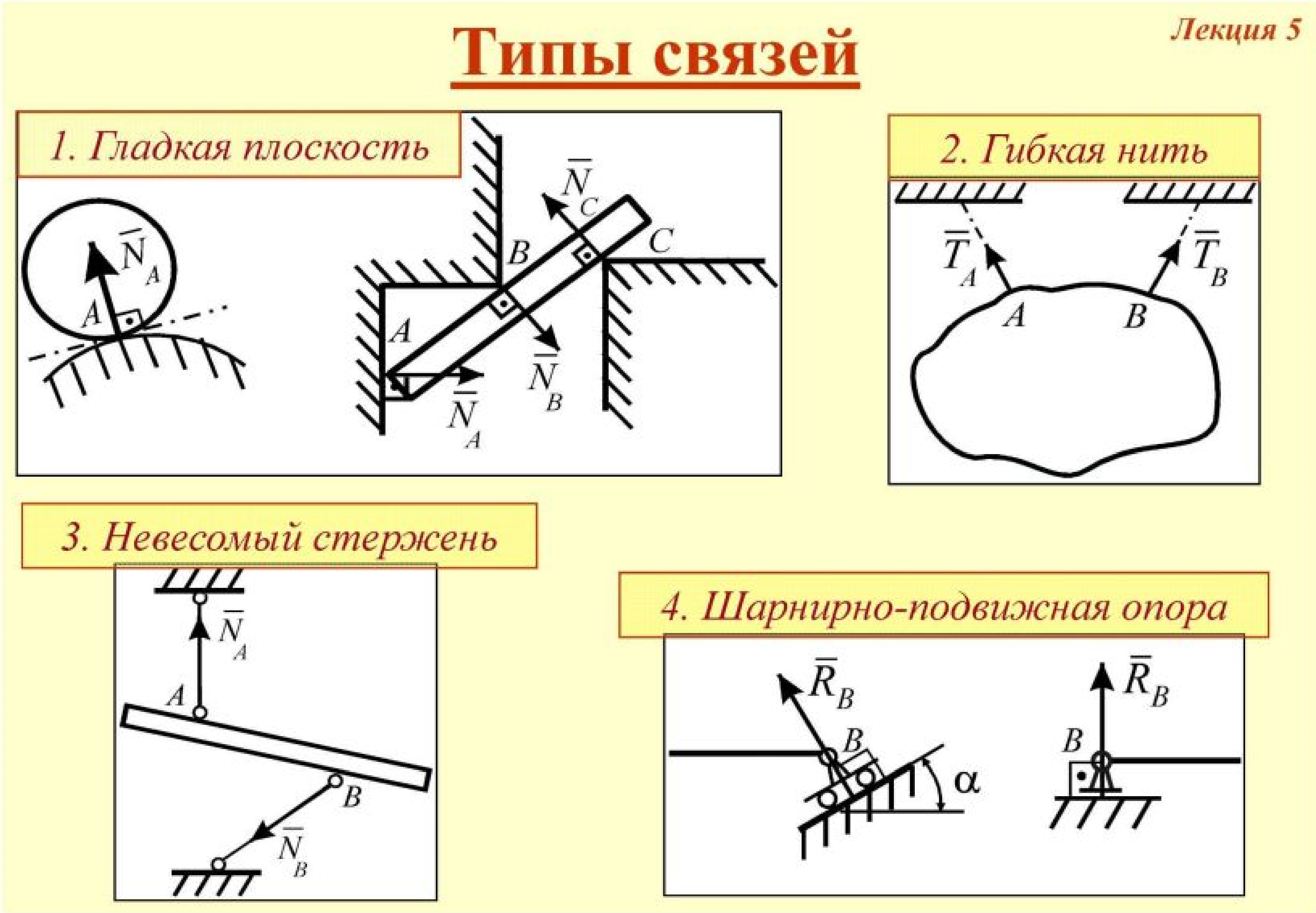
Равновесие деформируемого тела не нарушится, если его считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Связи и их реакции

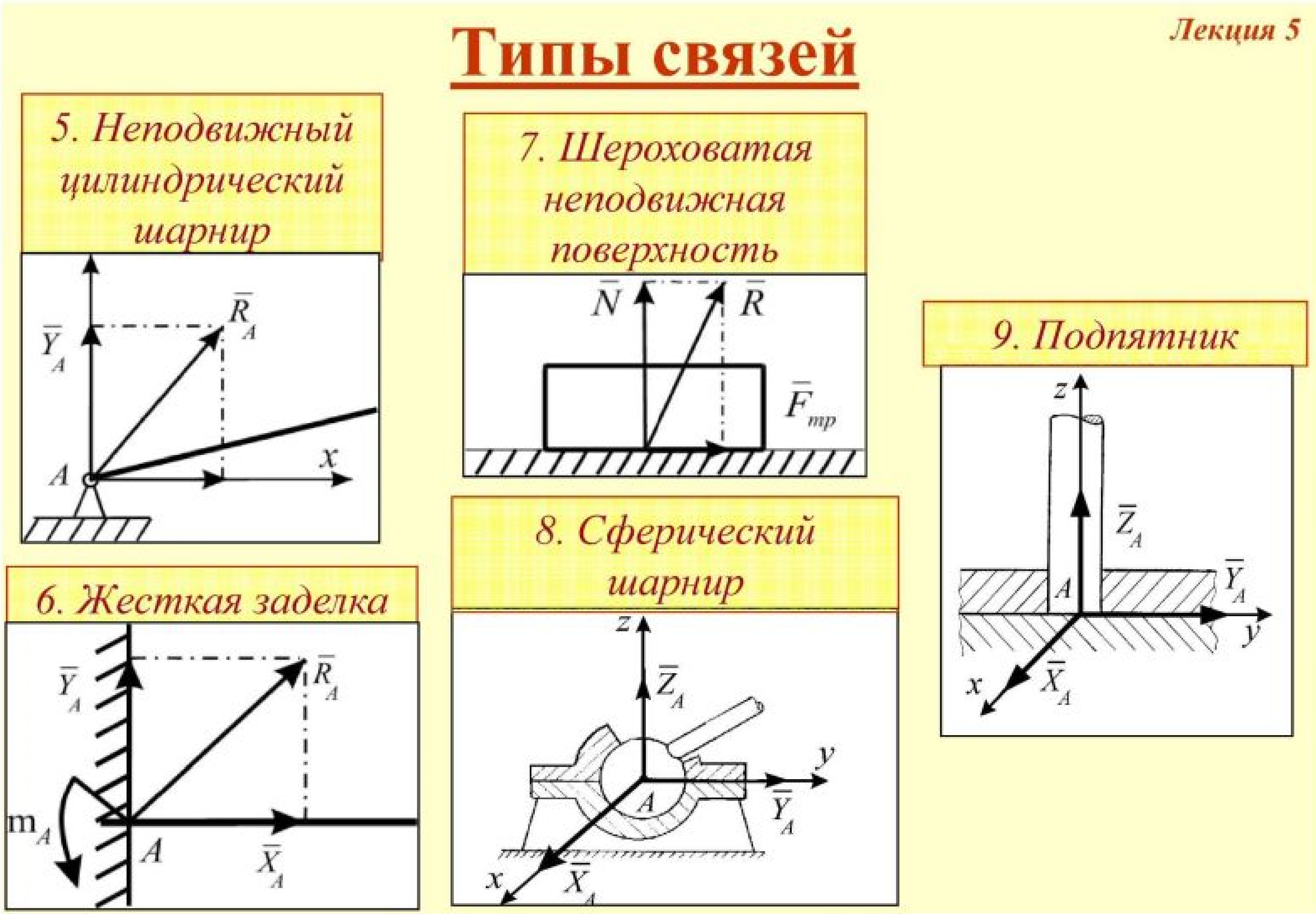
Связь - *все, что ограничивает перемещение тела в пространстве*

Реакция связи - *сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям*

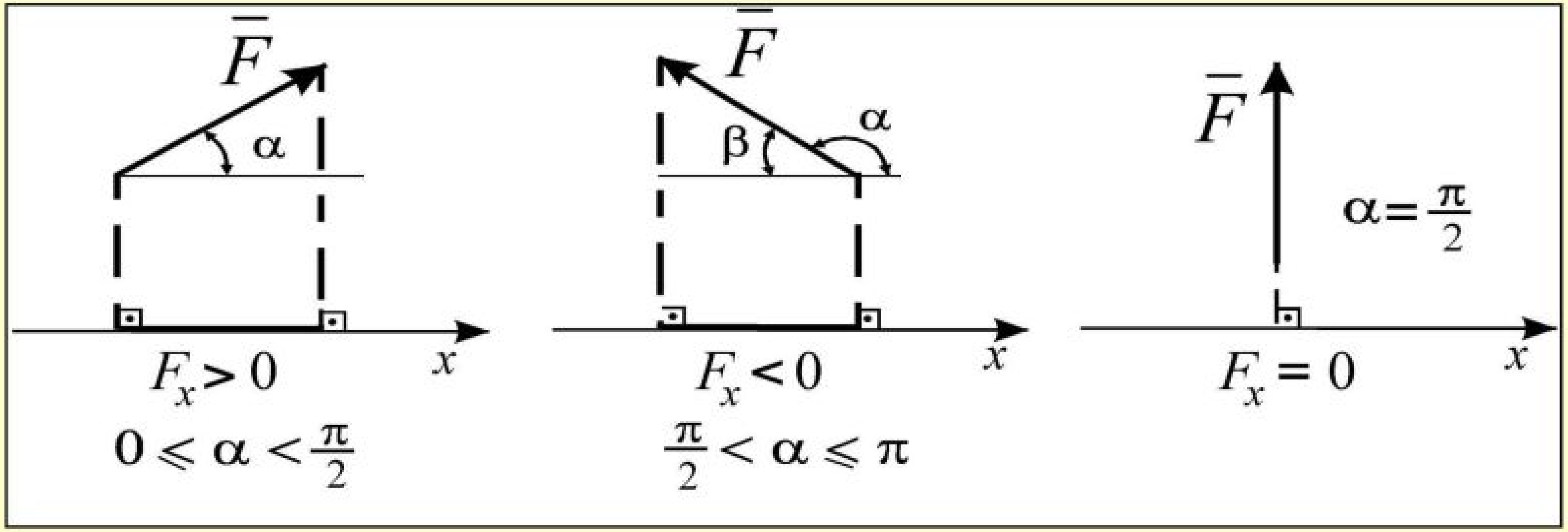
Принцип освобождаемости от связей: несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие реакциями связей



Лекция 5
Типы связей
1. Гладкая плоскость
N
A
A
B
C
N
C
N
B
N
A
2. Гибкая нить
T
A
T
B
A
B
3. Невесомый стержень
N
A
A
B
N
B
4. Шарнирно-подвижная опора
R
B
B
α
R
B
B

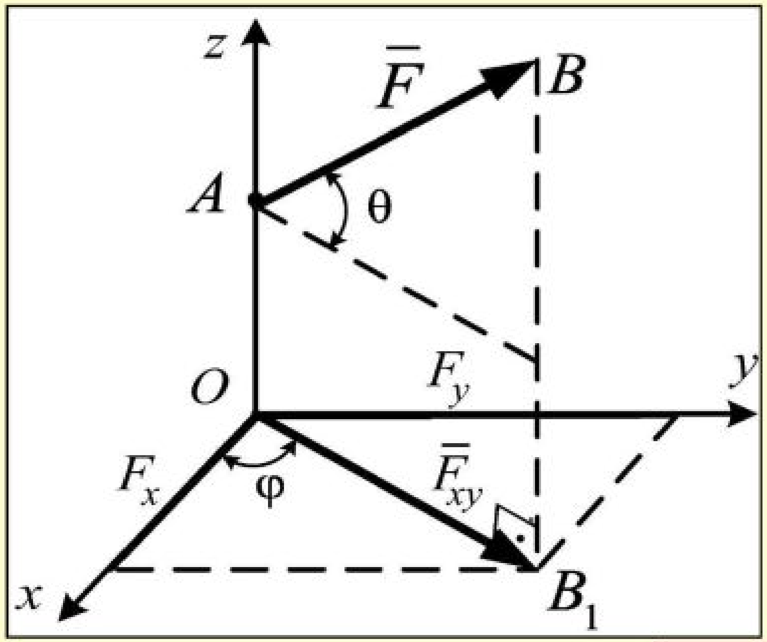

Лекция 5
Типы связей
5. Неподвижный цилиндрический шарнир
$\bar{Y}_A$
$\bar{R}_A$
A
x
6. Жесткая заделка
$\bar{Y}_A$
$\bar{R}_A$
m_A
A
$\bar{X}_A$
7. Шероховатая неподвижная поверхность
$\bar{N}$
$\bar{R}$
$\bar{F}_{тр}$
8. Сферический шарнир
z
$\bar{Z}_A$
y
A
$\bar{Y}_A$
x
$\bar{X}_A$
9. Подпятник
z
$\bar{Z}_A$
A
$\bar{Y}_A$
y
x
$\bar{X}_A$

Проекция силы на ось



$$F_x = F\cos\alpha$$

Проекция силы на плоскость



Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy есть вектор

$$\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$$

$$F_{xy} = F\cos\theta$$

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\,\cos\varphi\ ,$$

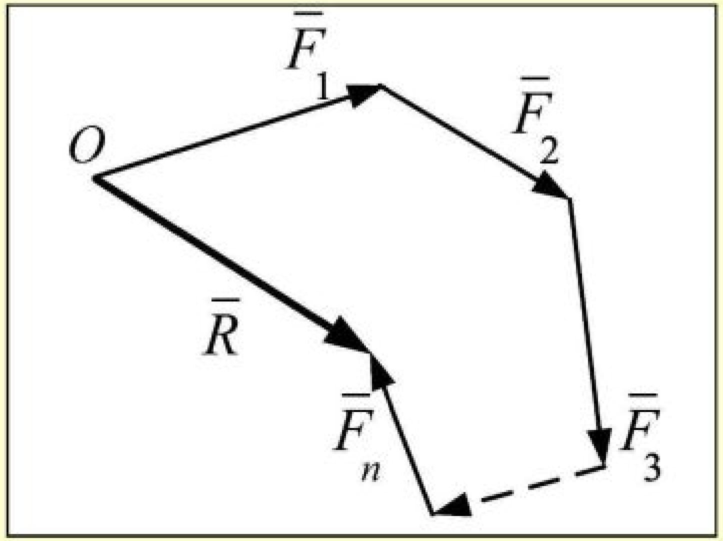
$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\,\sin\varphi\ ,$$

$$F_z = F\sin\theta\ .$$

Способы сложения сил

Геометрический

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2,} + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa \;;$$



Способы сложения сил

Аналитический

Вектор равнодействующей силы

$$\vec{R} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{\kappa}$$

$$R_x = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x}, \quad R_y = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y}, \quad R_z = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z},$$

Модуль равнодействующей силы

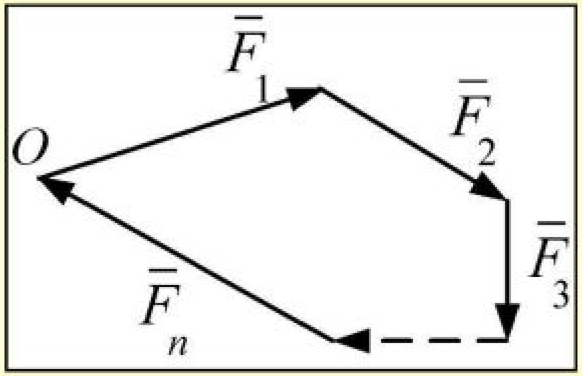
$$R = \sqrt{R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2}} \;;$$

Равновесие системы сходящихся сил

Вектор равнодействующей системы сходящихся сил

$$\vec{R} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{\kappa} = 0$$

*Геометрическим условием равновесия сходящейся системы сил является замкнутость силового **n**-угольника*

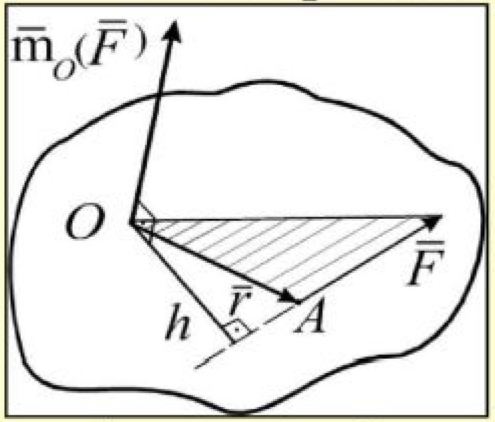


Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0 , \quad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0 , \quad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z} = 0 .$$

Момент силы относительно центра

Вектор момента силы $\vec{F}$ *относительно центра* O



$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad .$$

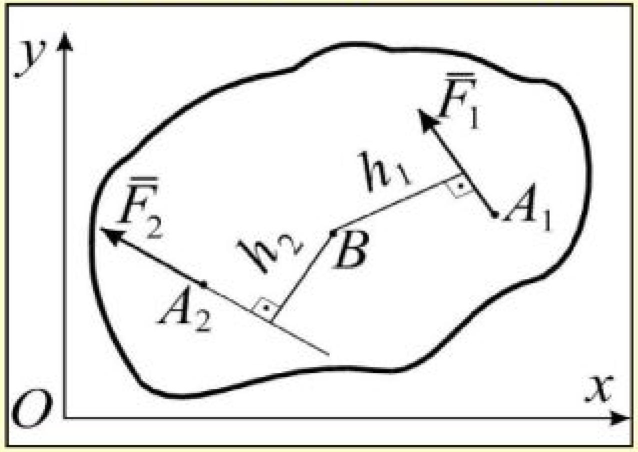
Модуль момента силы

$$m_O(\vec{F}) = F\,h$$

Алгебраический момент силы $\vec{F}$ *относительно точки* O

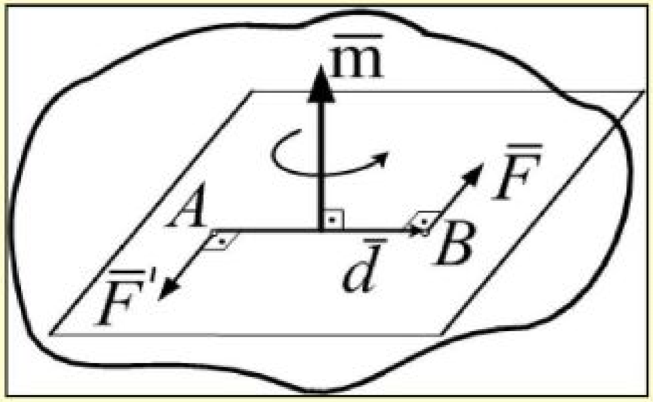
$$m_O(\vec{F}) = \pm F\,h \quad .$$

$$m_B(\vec{F}_1) = F_1\,h_1,$$
$$m_B(\vec{F}_2) = -F_2\,h_2.$$



Пара сил. Момент пары

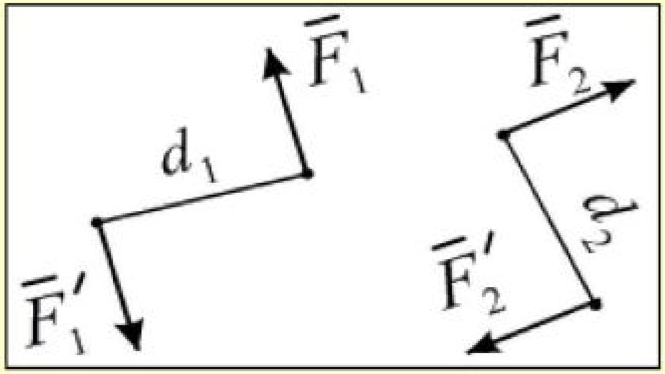
Пара сил - *система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил* $\vec{F} = -\vec{F}'$



$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{F}' = 0$$

Вектор момента пары сил

$$\vec{m} = \vec{d} \times \vec{F}$$



Алгебраический момент пары сил

$$m = \pm F\ d$$

$$m_1 = F_1 d_1 \ , \qquad m_2 = -F_2 d_2 \ .$$

Лекция 6

Приведение системы сил к центру

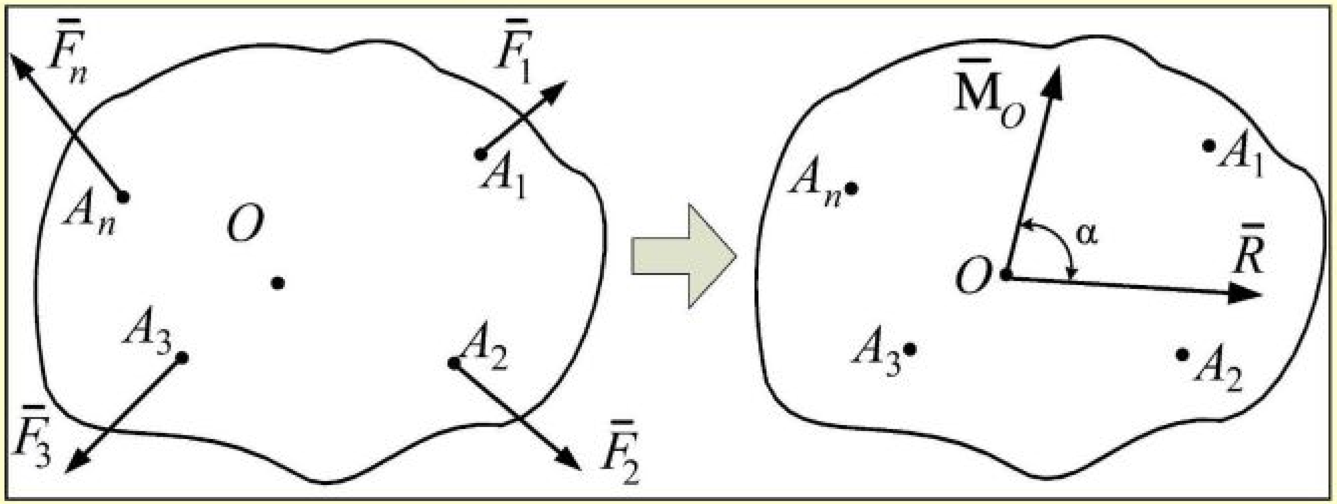
Теорема Пуансо:

Вектор равнодействующей

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{2,} + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa,$$

Главный момент системы

$$\vec{\mathrm{M}}_O = \vec{\mathrm{m}}_1 + \vec{\mathrm{m}}_2 + \dots + \vec{\mathrm{m}}_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{\mathrm{m}}_O(\vec{F}_\kappa).$$



Условие равновесия произвольной системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия абсолютного твердого тела, находящегося под действием произвольной системы сил:

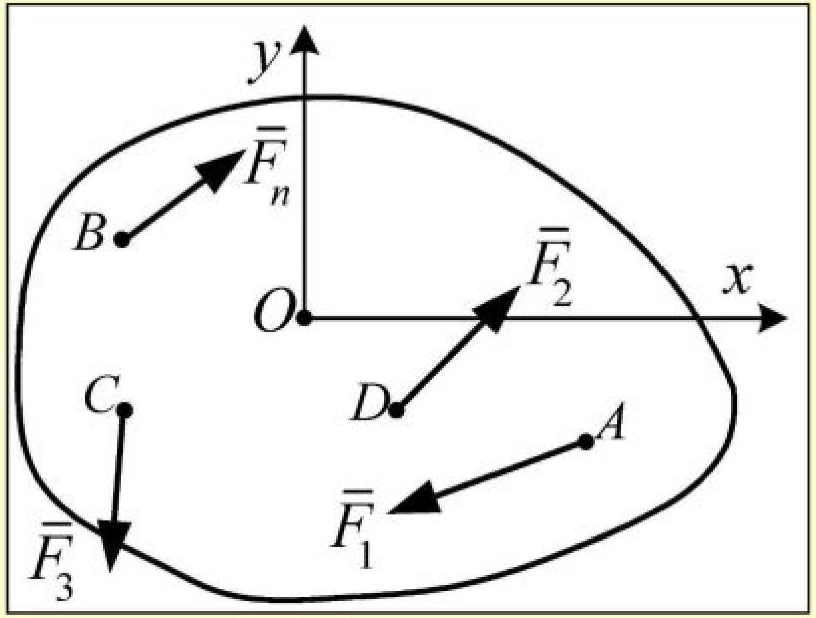
$$\begin{cases} \vec{R} = 0, \\ \vec{M}_O = 0. \end{cases}$$

Теорема Вариньона:

$$\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_\kappa)$$

Произвольная плоская система сил

Необходимые и достаточные условия равновесия абсолютного твердого тела под действием плоской произвольной системы сил:



$$\begin{cases} \bar{R} = 0, \\ M_O = 0. \end{cases}$$

Произвольная плоская система сил

Аналитические условия равновесия

Первая (основная) форма

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_O(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Вторая форма

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0\ , \quad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa)\ , \quad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_B(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Третья форма

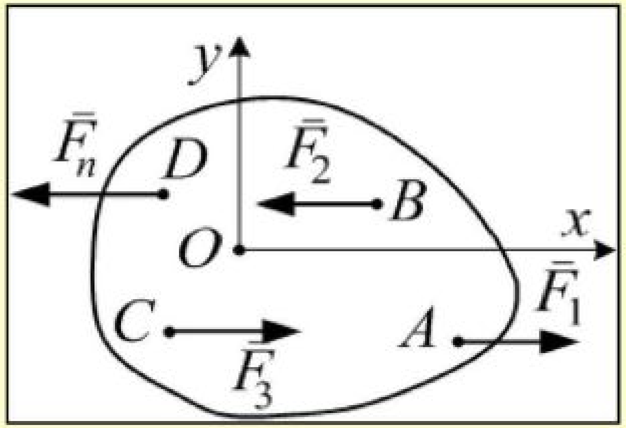
$$\sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa)\ , \quad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_B(\vec{F}_\kappa) = 0, \quad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_C(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Плоская система параллельных сил

Аналитические условия равновесия

Первая форма

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0\,, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_O(\vec{F}_\kappa) = 0\ .$$



Вторая форма

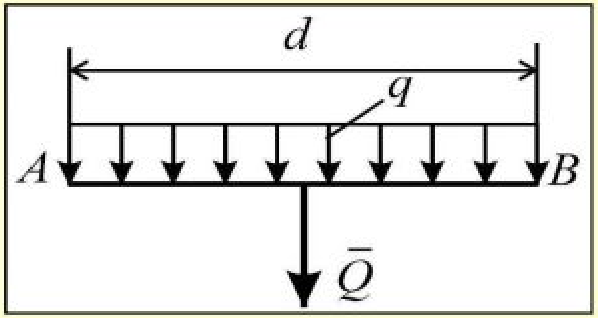
$$\sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa)\,, \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_B(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Распределенные силы

q – интенсивность нагрузки; $\vec{Q}$ – равнодействующая распределенных сил, линия действия которой проходит через центр тяжести фигуры распределения.

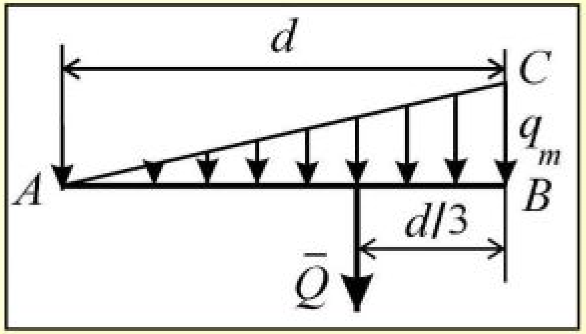
Равномерно-распределенная нагрузка

$$\boxed{Q = q \cdot d}$$



Нагрузка распределенная по линейному закону

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} q_m \cdot d}$$

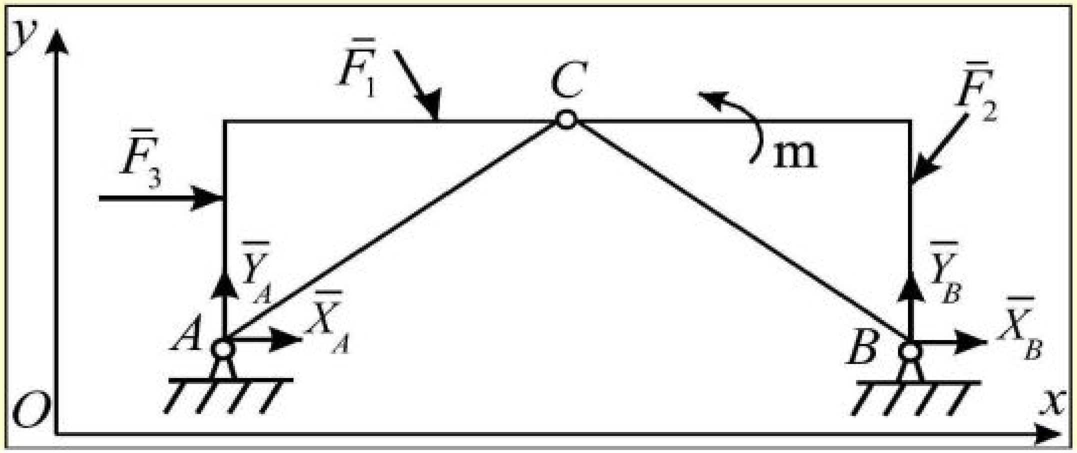


Равновесие системы тел

Статически определимые системы – *число неизвестных реакций связей равно числу уравнений равновесия.*

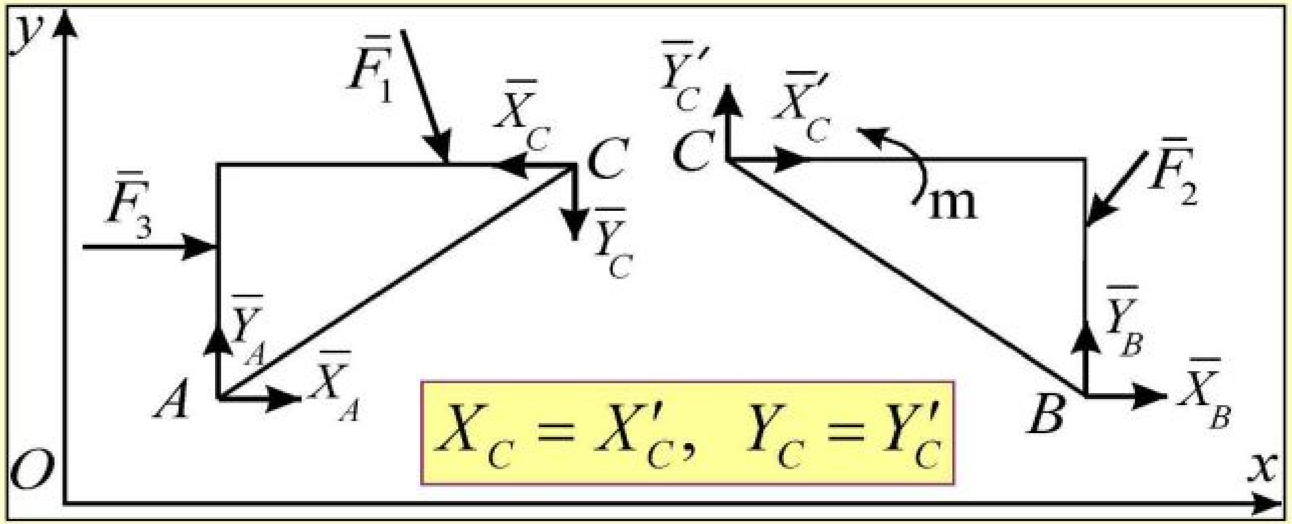
Статически не определимые системы – *число неизвестных реакций связей больше количества уравнений равновесия.*

*Для конструкции, состоящей из **n** тел, находящихся под действием плоской системы сил, можно составить 3n уравнений равновесия, позволяющих найти 3n неизвестных.*



Равновесие системы тел

Метод расчленения



Для AC

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0; \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0; \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_A(\vec{F}_\kappa) = 0;$$

Для CB

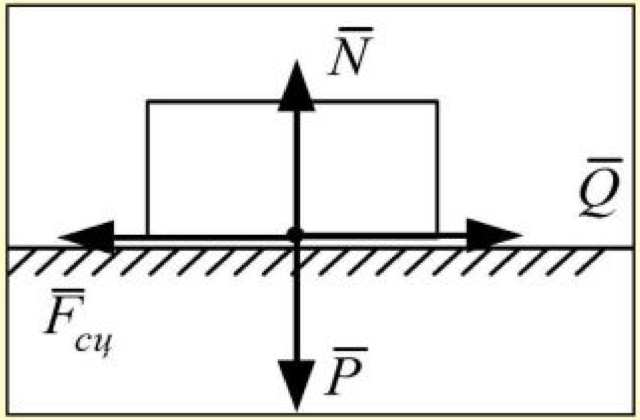
$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0; \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0; \qquad \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{m}_B(\vec{F}_\kappa) = 0.$$

Равновесие при наличии трения

Сила сцепления $\vec{F}_{сц}$ *(сила трения покоя)*

$$\vec{Q} = -\vec{F}_{сц}$$

$$0 \le \vec{F}_{сц} \le \vec{F}_{пр}$$



Предельная сила сцепления

$$F_{пр} = f_{сц}\ N$$

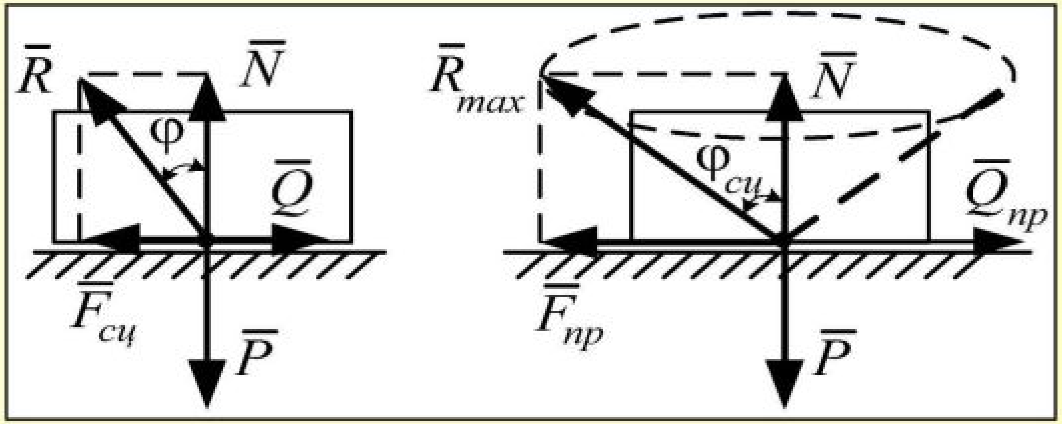
Равновесие, при котором сила сцепления $\vec{F}_{пр}$ *достигает максимального значения, называется состоянием предельного равновесия, при котором величина сдвигающей силы*

$$Q = F_{пр} = f_{сц}\ N$$

Равновесие при наличии трения

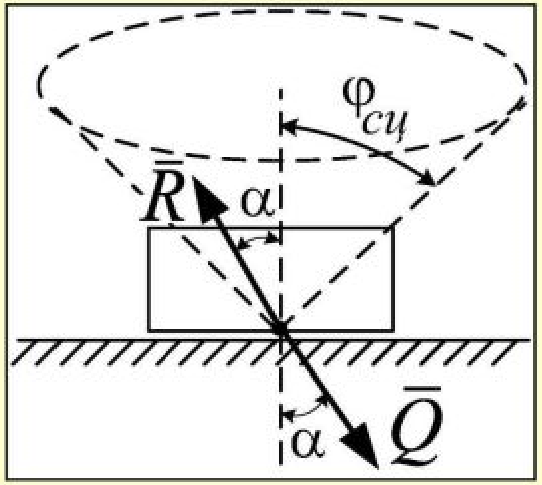
Угол сцепления $\varphi_{сц}$
(угол трения покоя)

$$0 \le \varphi \le \varphi_{сц}$$



$$\mathrm{tg}\varphi_{сц} = \frac{F_{пр}}{N} = f_{сц}$$

Тело будет находиться в равновесии, если реакция опорной плоскости $\vec{R}$ *проходит внутри или лежит на поверхности конуса сцепления*



Равновесие при наличии трения

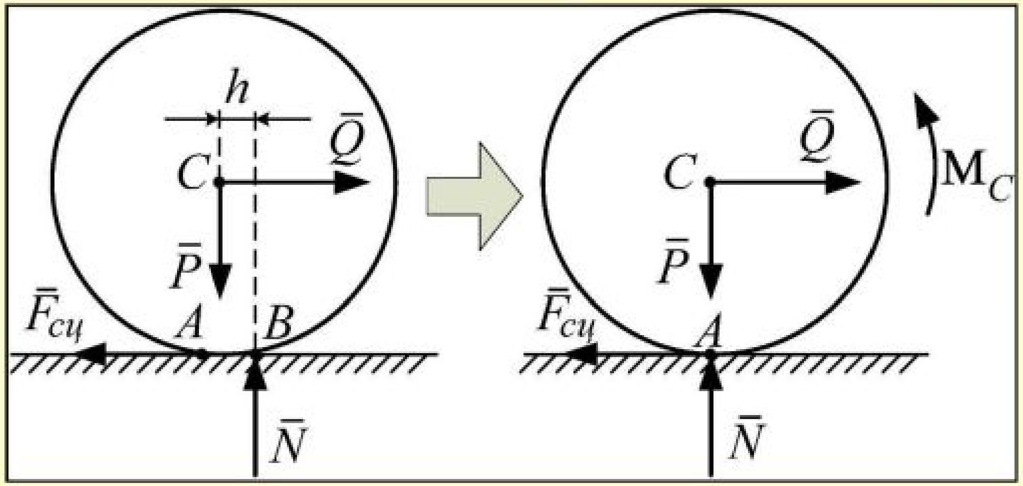
Трение качения

Момент трения качения $\boxed{\mathrm{M}_C = Q\,R = N\,h}$

Каток находиться в равновесии, если $\boxed{h \le \delta}$

δ - коэффициент трения качения $\boxed{\mathrm{M}_C \le N\,\delta}$

$$\begin{cases} Q - F_{сц} = 0, \\ N - P = 0, \\ -Q\,R + \mathrm{M}_C = 0. \end{cases}$$



Лекция 8

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси

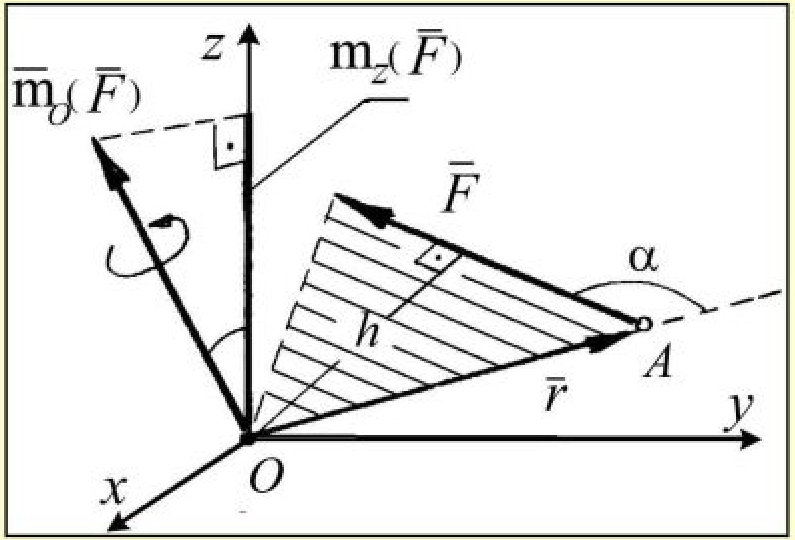
Момент силы $\vec{F}$ *относительно оси* z

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cos\gamma$$

$\vec{m}_z(\vec{F}) > 0,\quad 0 \le \gamma < 90^\circ;$

$\vec{m}_z(\vec{F}) < 0,\quad 90^\circ < \gamma \le 180^\circ;$

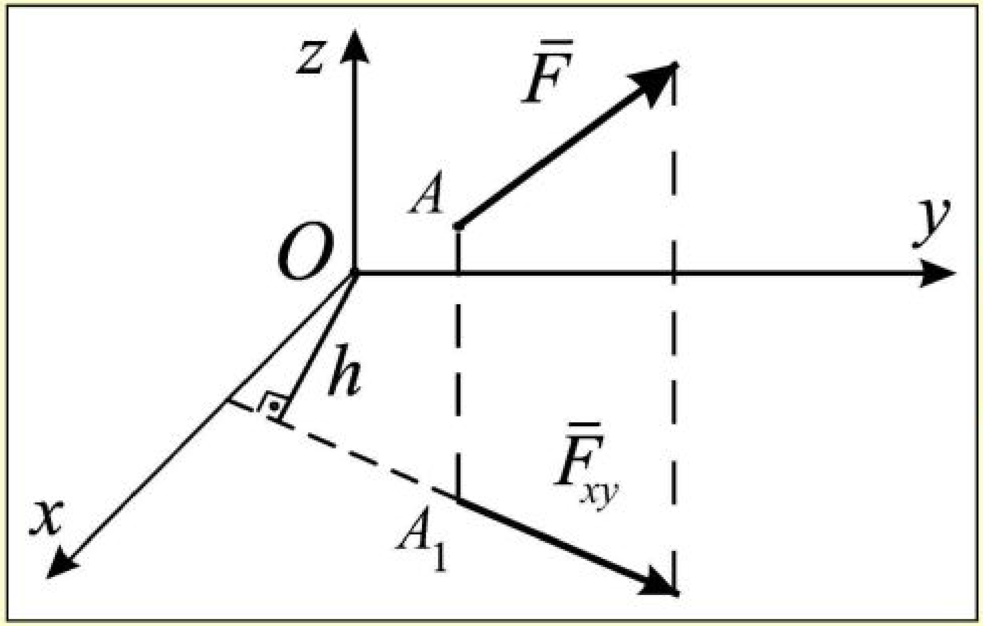
$m_z(\vec{F}) = 0,\quad \gamma = 90^\circ.$



Пространственная система сил

Вычисление момента силы относительно оси

$$\mathrm{m}_z(\vec{F}) = \mathrm{m}_O\left(\vec{F}_{xy}\right) = \pm\left|\vec{F}_{xy}\right| \cdot h$$



$$\mathrm{m}_Z(\vec{F}) = 0:$$

$$\left|\vec{F}_{xy}\right| = 0, \Rightarrow \vec{F} \uparrow\uparrow Oz;$$

$$h = 0, \Rightarrow \vec{F} \not\uparrow Oz;$$

Пространственная система сил

Вычисление главного момента системы сил относительно центра O

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$$M_x = \sum_{\kappa=1}^{n} m_x(\vec{F}_\kappa), \quad M_y = \sum_{\kappa=1}^{n} m_y(\vec{F}_\kappa), \quad M_z = \sum_{\kappa=1}^{n} m_z(\vec{F}_\kappa).$$

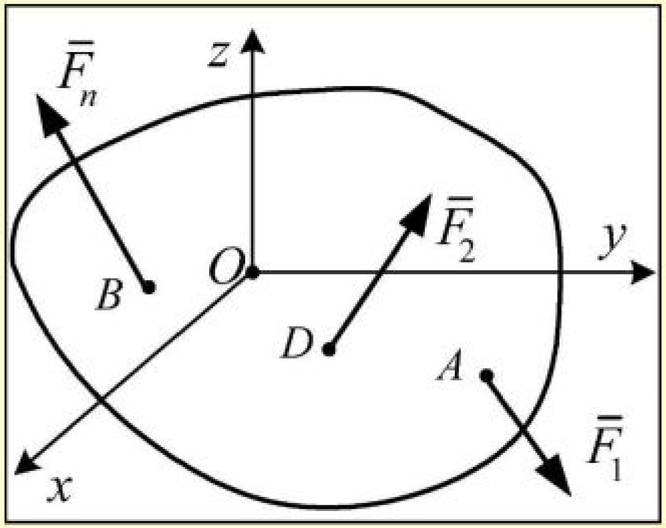
Модуль главного момента

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

Пространственная система сил

$$\begin{cases} \vec{R} = 0, \\ \vec{M}_O = 0. \end{cases}$$

Аналитические условия равновесия

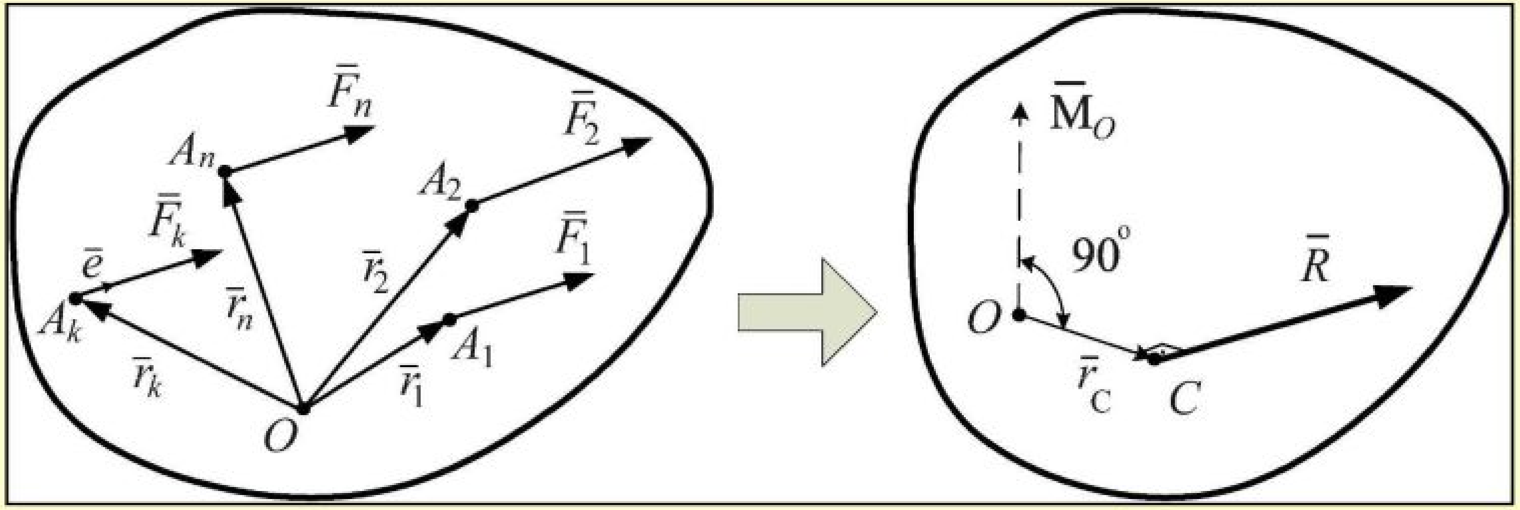


$$\begin{cases} \sum\limits_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} = 0; & \sum\limits_{\kappa=1}^{n} m_x(\vec{F}_\kappa) = 0; \\ \sum\limits_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} = 0; & \sum\limits_{\kappa=1}^{n} m_y(\vec{F}_\kappa) = 0; \\ \sum\limits_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z} = 0; & \sum\limits_{\kappa=1}^{n} m_z(\vec{F}_\kappa) = 0. \end{cases}$$

Центр параллельных сил и центр тяжести

Вектор и модуль равнодействующей

$$\vec{R} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa \qquad R = \sum_{\kappa=1}^{n} F_\kappa$$



Радиус-вектор $\vec{r}_C$ центра С параллельных сил:

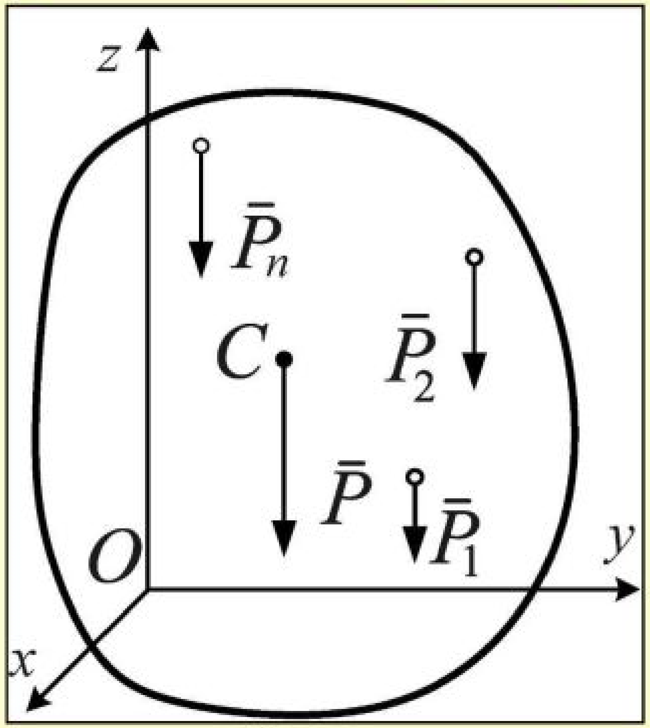
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} F_\kappa \vec{r}_\kappa}{R}.$$

Центр тяжести твердого тела

Центром тяжести твердого тела называется геометрическая точка С, являющаяся центром параллельных сил тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \ldots, \vec{P}_n$, действующих на частицы тела при любых поворотах тела в пространстве.

Вес тела

$$P = \sum_{\kappa=1}^{n} P_\kappa$$



Радиус-вектор $\vec{r}_C$ центра тяжести С тела

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} P_\kappa \vec{r}_\kappa}{P}.$$

Центр тяжести однороднрго тела

Центр тяжести объема **V**.

$$\mathrm{V}=\sum_{\kappa=1}^{n}\mathrm{V}_{\kappa}$$

$$x_C=\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n}\mathrm{V}_{\kappa}\,x_{\kappa}}{\mathrm{V}};\quad y_C=\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n}\mathrm{V}_{\kappa}\,y_{\kappa}}{\mathrm{V}};\quad z_C=\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n}\mathrm{V}_{\kappa}\,z_{\kappa}}{\mathrm{V}}.$$

Центр тяжести площади **S**.

$$S=\sum_{\kappa=1}^{n}S_{\kappa}$$

$$x_C=\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n}S_{\kappa}\,x_{\kappa}}{S};\qquad y_C=\frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{n}S_{\kappa}\,y_{\kappa}}{S}$$

Центр тяжести однороднрго тела

Центр тяжести линии длиной L.

$$L = \sum_{\kappa=1}^{n} l_\kappa$$

$$x_C = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} l_\kappa\, x_\kappa}{L}; \qquad y_C = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} l_\kappa\, y_\kappa}{L}; \qquad z_C = \frac{\sum_{\kappa=1}^{n} l_\kappa\, z_\kappa}{L}.$$

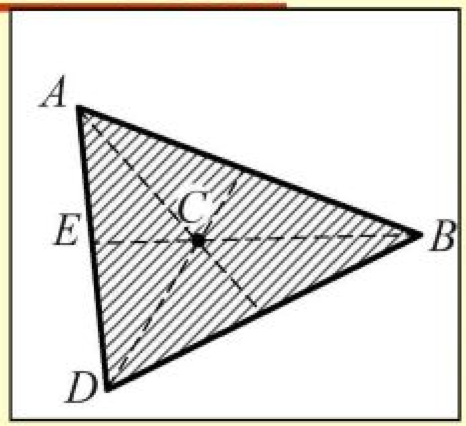
Способы определения координат центров тяжести однородных тел:

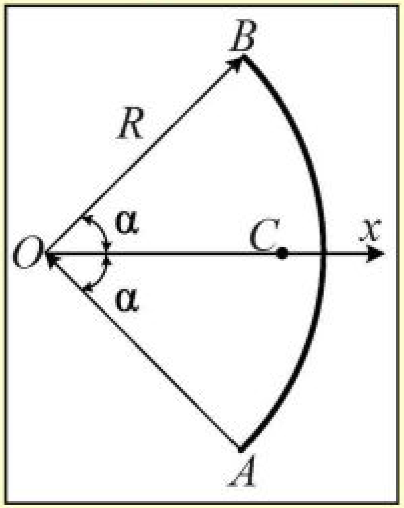
1. Способ симметрии; 2. Способ разбиения;
3. Способ дополнения; 4. Способ интегрирования.

Центр тяжести однороднрго тела

Центр тяжести C площади треугольника

$$CE = \frac{1}{3} BE .$$



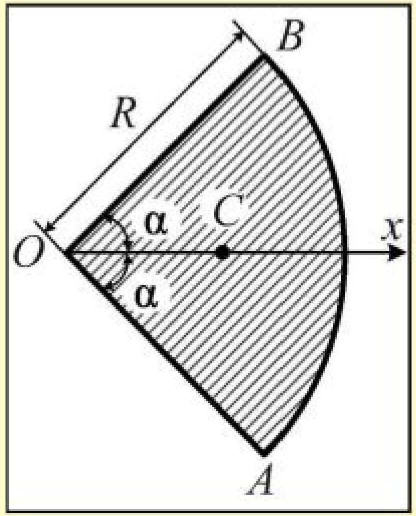


Центр тяжести C дуги окружности

$$x_C = OC = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

Центр тяжести C площади кругового сектора

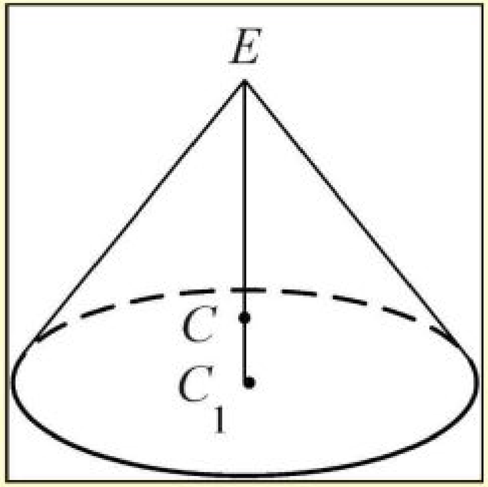
$$x_C = OC = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$



Центр тяжести однороднрго тела

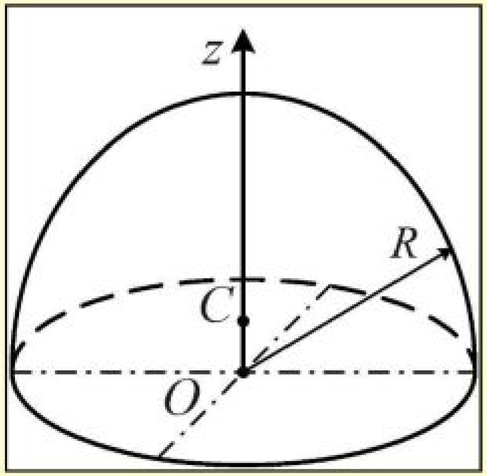
Центр тяжести С объема конуса

$$CC_1 = \frac{1}{4} EC_1.$$



Центр тяжести С объема полусферы

$$z_C = OC = \frac{3R}{8}.$$



Динамика материальной точки

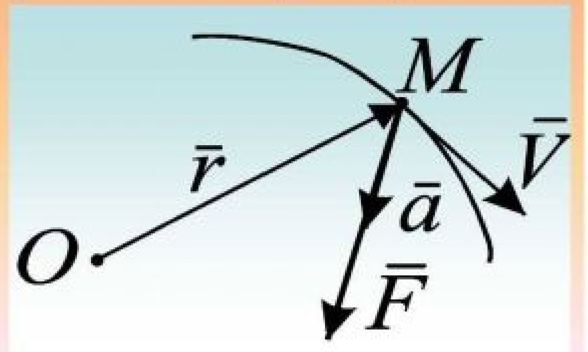
Аксиомы динамики

I закон (*принцип инерции*): *изолированная от внешнего воздействия материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.*

Система отсчета**, в которой выполняется принцип инерции, называется **инерциальной

II закон (*основной закон динамики*): *сила, действующая на свободную материальную точку, сообщает ей ускорение, которое в инерциальной системе отсчета пропорционально величине силы и имеет направление силы*

$$m\vec{a} = \vec{F}$$



Динамика материальной точки

Лекция 10

Аксиомы динамики

III закон (*закон равенства действия и противодействия*): *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

IV закон (*закон независимости действия сил*): *если на материальную точку действует несколько сил, то ускорение точки складывается из тех ускорений, которые имела бы точка под действием каждой из этих сил в отдельности:*

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{\kappa} = \vec{R}$$

Динамика материальной точки

Лекция 10

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Векторная форма

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{R}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$$

В декартовых координатах

$$m\ddot{x} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x} \;; \qquad m\ddot{y} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y} \;; \qquad m\ddot{z} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z} \;.$$

Естественные уравнения движения

$$m\frac{dV}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa\tau} \;; \qquad m\frac{V^2}{\rho} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa n} \;; \qquad 0 = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa b} \;.$$

Динамика материальной точки

Лекция 10

Две задачи динамики точки

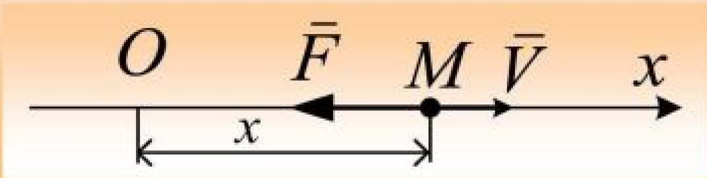
***Первая (прямая) задача динамики** заключается в определении силы по известному закону движения точки.*

***Вторая (обратная) задача динамики** заключается в определении уравнений движения точки, если известны действующие на нее силы.*

Лекция 11

Прямолинейные колебания точки

Свободные колебания точки



Сила упругости

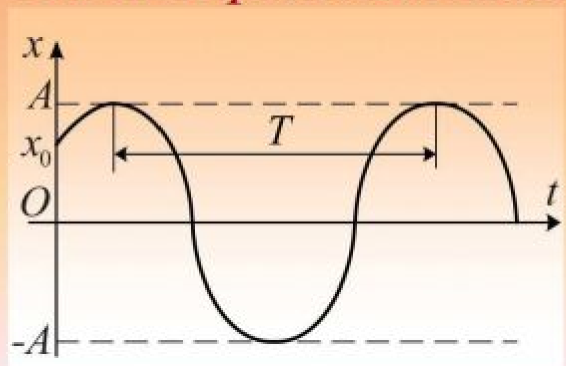
$$F_x = -cx$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

Закон гармонических колебаний

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$



Круговая частота

$$k = \sqrt{c/m}$$

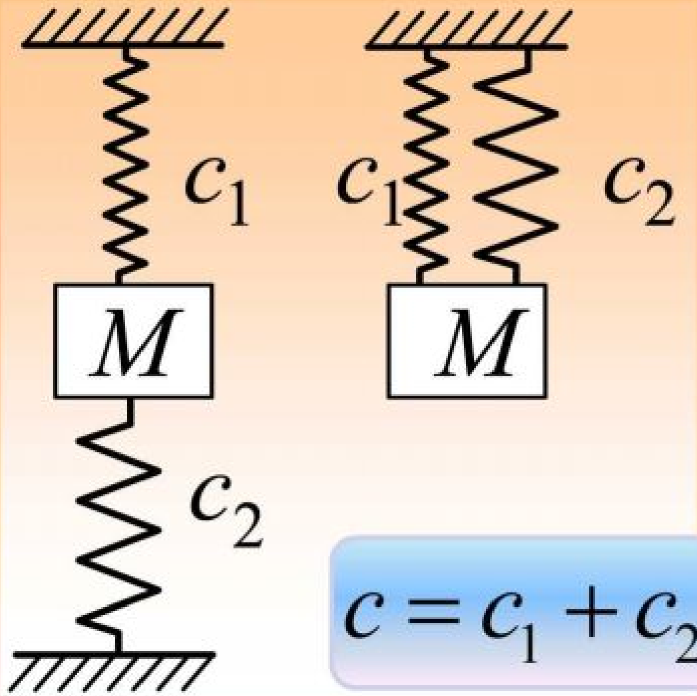
Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Прямолинейные колебания точки

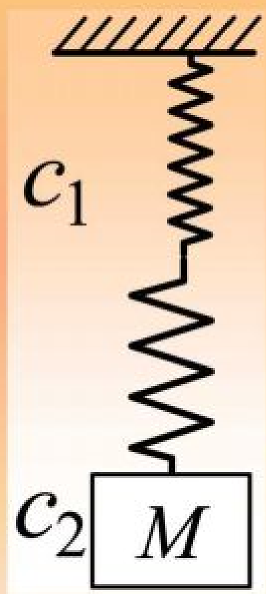
*Жесткость **с** эквивалентной пружины*

Параллельно включенные пружины



$$c = c_1 + c_2$$

Последовательно включенные пружины

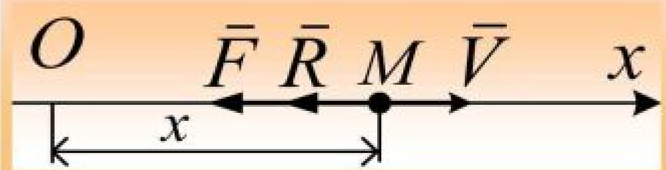


$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

Лекция 11

Прямолинейные колебания точки

Затухающие колебания точки

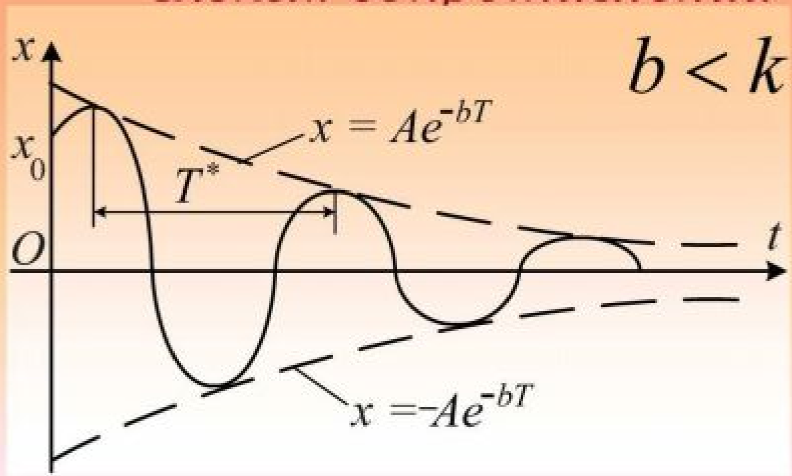


Сила вязкого сопротивления среды

$$R_x = -\mu \dot{x}$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний при линейно-вязком сопротивлении

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0$$



Круговая частота

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Параметр, характеризующий сопротивление

$$b = \frac{\mu}{2m}$$

Лекция 11

Прямолинейные колебания точки

Затухающие колебания точки

$b < k$ *сопротивление мало*

$$x = Ae^{-bt}\sin(k^{*}t + \alpha)$$

Циклическая частота затухающих ко

$$k^{*} = \sqrt{k^{2} - b^{2}}$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k^{*}}$$

Апериодическое движение точки

$b > k$ *сопротивление велико*

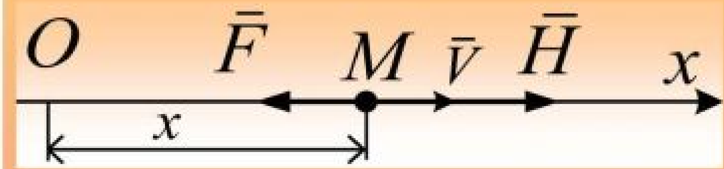
$$x = e^{-bt}\left(C_1^{*}e^{\sqrt{b^2-k^2}\,t} + C_2^{*}e^{-\sqrt{b^2-k^2}\,t}\right)$$

$b = k$

$$x = e^{-bt}\left(C_1^{*} + C_2^{*}t\right)$$

Прямолинейные колебания точки

Вынужденные колебания точки при отсутствии сопротивления



Возмущающая сила

$$H_x = H_0 \sin \omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 \sin \omega t$$

$$h_0 = \frac{H_0}{m}$$

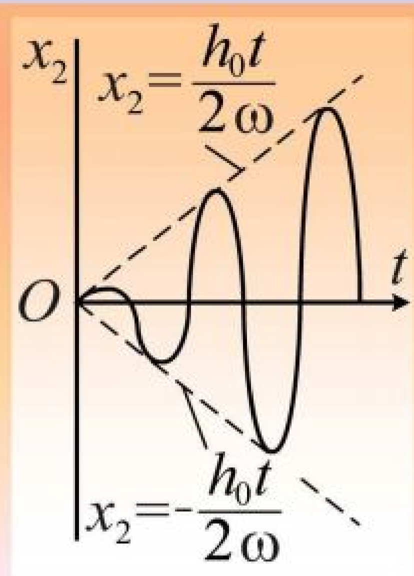
Прямолинейные колебания точки

Вынужденные колебания точки при отсутствии сопротивления

$\omega \neq k$ $\Rightarrow$ $$x = A\sin(kt+\alpha) + \frac{h_0}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$$

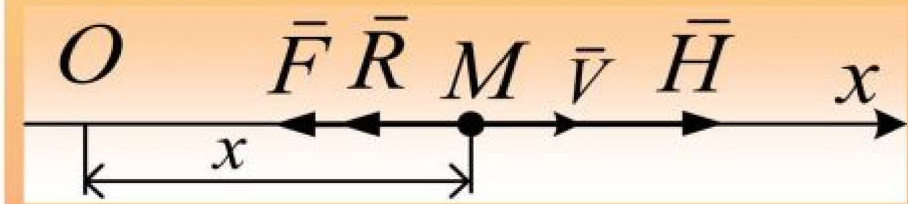
$\omega = k$ *Резонанс*

$$x_2 = \frac{h_0 t}{2\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Прямолинейные колебания точки

Вынужденные колебания точки при вязком сопротивлении



Возмущающая сила

$$H_x = H_0 \sin(\omega t + \delta)$$

Сила вязкого сопротивления среды

$$R_x = -\mu \dot{x}$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при линейно-вязком сопротивлении

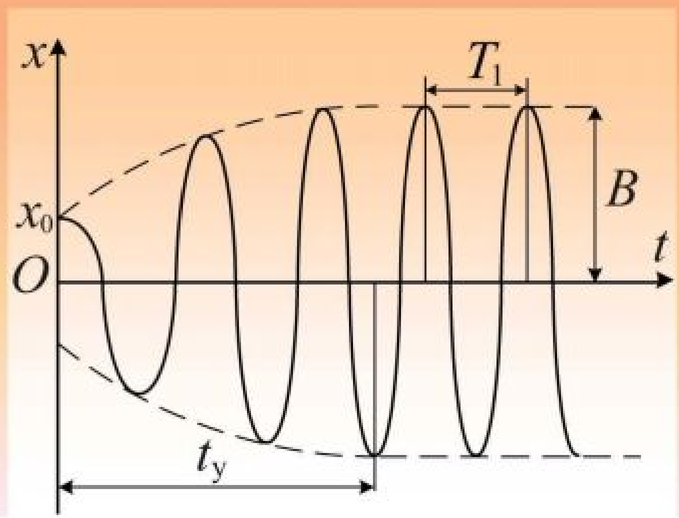
$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = h_0 \sin(\omega t + \delta)$$

Прямолинейные колебания точки

Вынужденные колебания точки при вязком сопротивлении

Общее решение уравнения

$$x = Ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\alpha\right)+\frac{h_0}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}\sin(\omega t+\delta-\beta)$$



Время установления

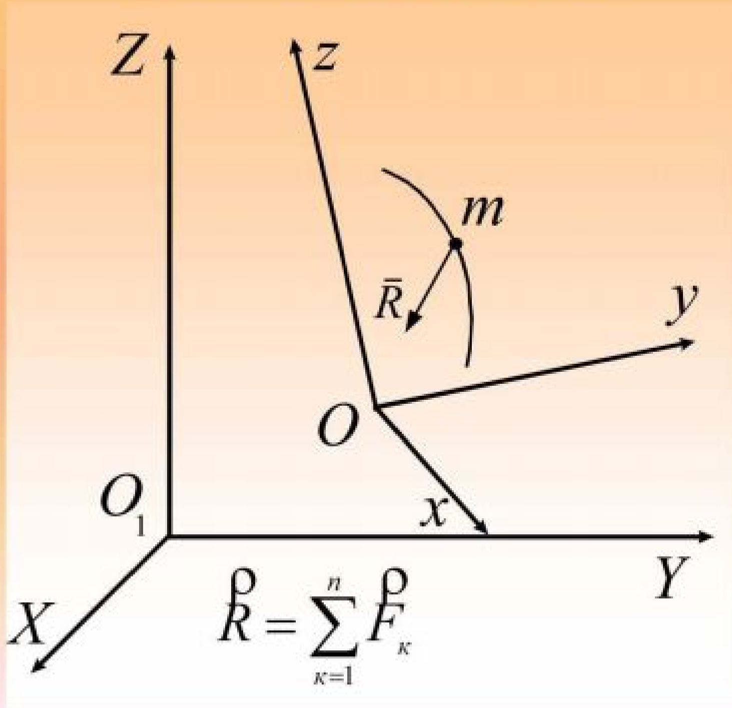
$$t_у = \frac{1}{b}\ln\frac{100A}{B}$$

Период установившихся колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Динамика относительного движения точки

Основной закон динамики относительного движения точки



$$m\vec{a} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_C$$

Вектор переносной силы инерции

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$$

Вектор кориолисовой силы инерции

$$\vec{\Phi}_C = -m\vec{a}_C$$

Динамика относительного движения точки

Поступательное переносное движение

$$\omega_e = 0 \Rightarrow \vec{\Phi}_C = 0 \Rightarrow m\vec{a} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa + \vec{\Phi}_e$$

Принцип относительности классической механики

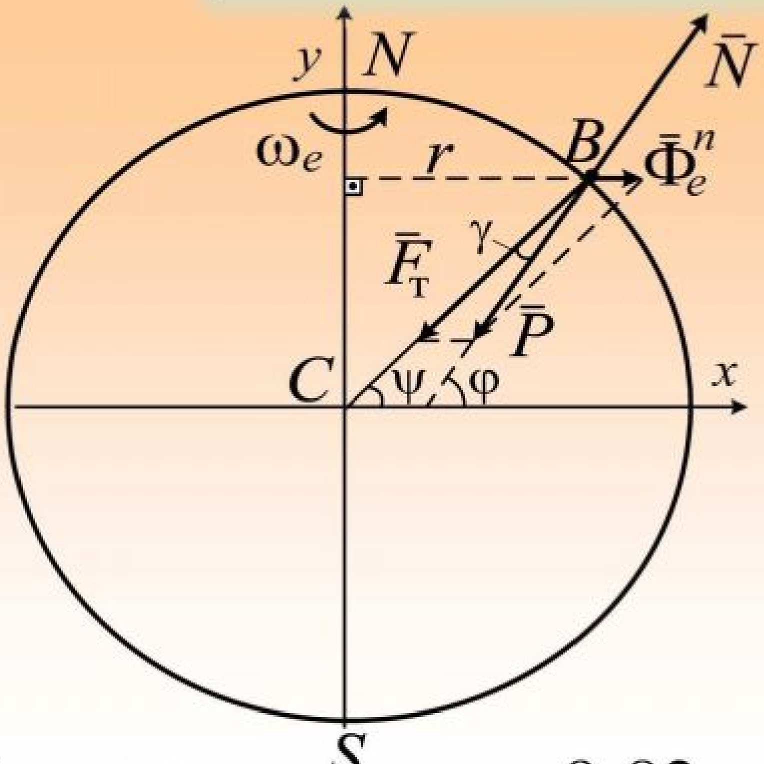
$$\vec{\Phi}_e = 0, \; \vec{\Phi}_C = 0 \Rightarrow m\vec{a} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa$$

Случай относительного равновесия (покоя) точки

$$\vec{a} = 0 \; \textit{и} \; \vec{V}_r = 0 \Rightarrow \vec{\Phi}_C = 0 \Rightarrow \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa + \vec{\Phi}_e = 0$$

Динамика относительного движения точки

Относительное равновесие тел вблизи поверхности Земли



$$F_т = mg_0 \qquad g_0 = 9,82 \text{ м/с}^2$$

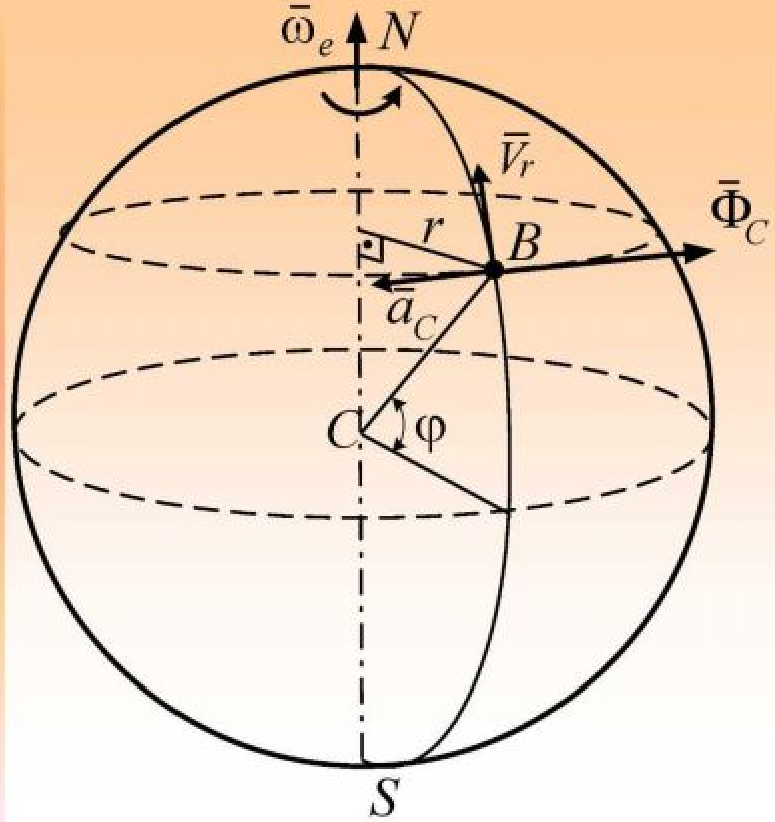
Сила тяжести

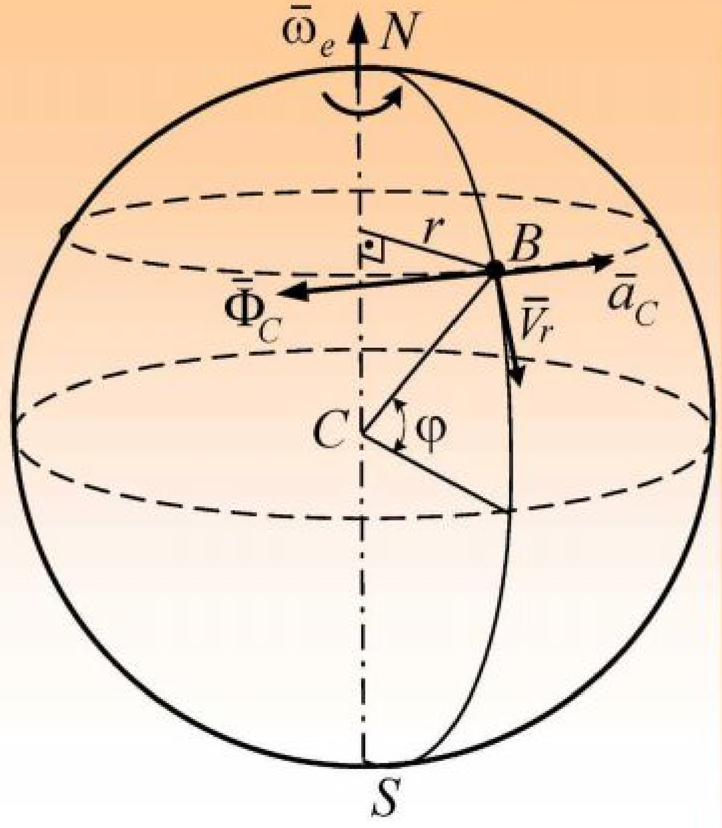
$$\vec{P} = \vec{F}_т + \vec{\Phi}_e^n$$

При составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле дополнительных поправок на вращение Земли вводить не надо

Динамика относительного движения точки

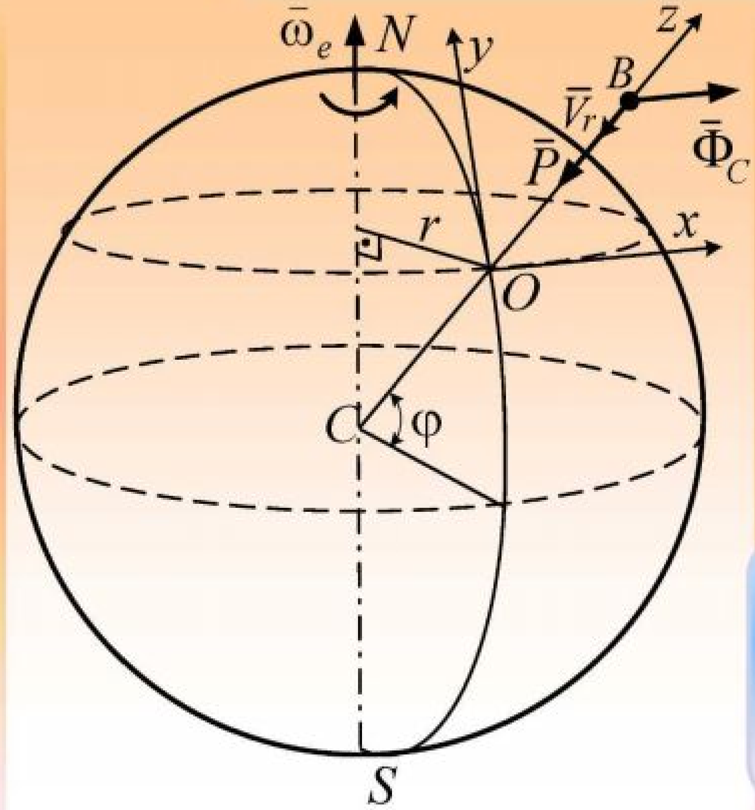
Относительное движение тел вблизи поверхности Земли





Динамика относительного движения точки

Относительное движение тел вблизи поверхности Земли

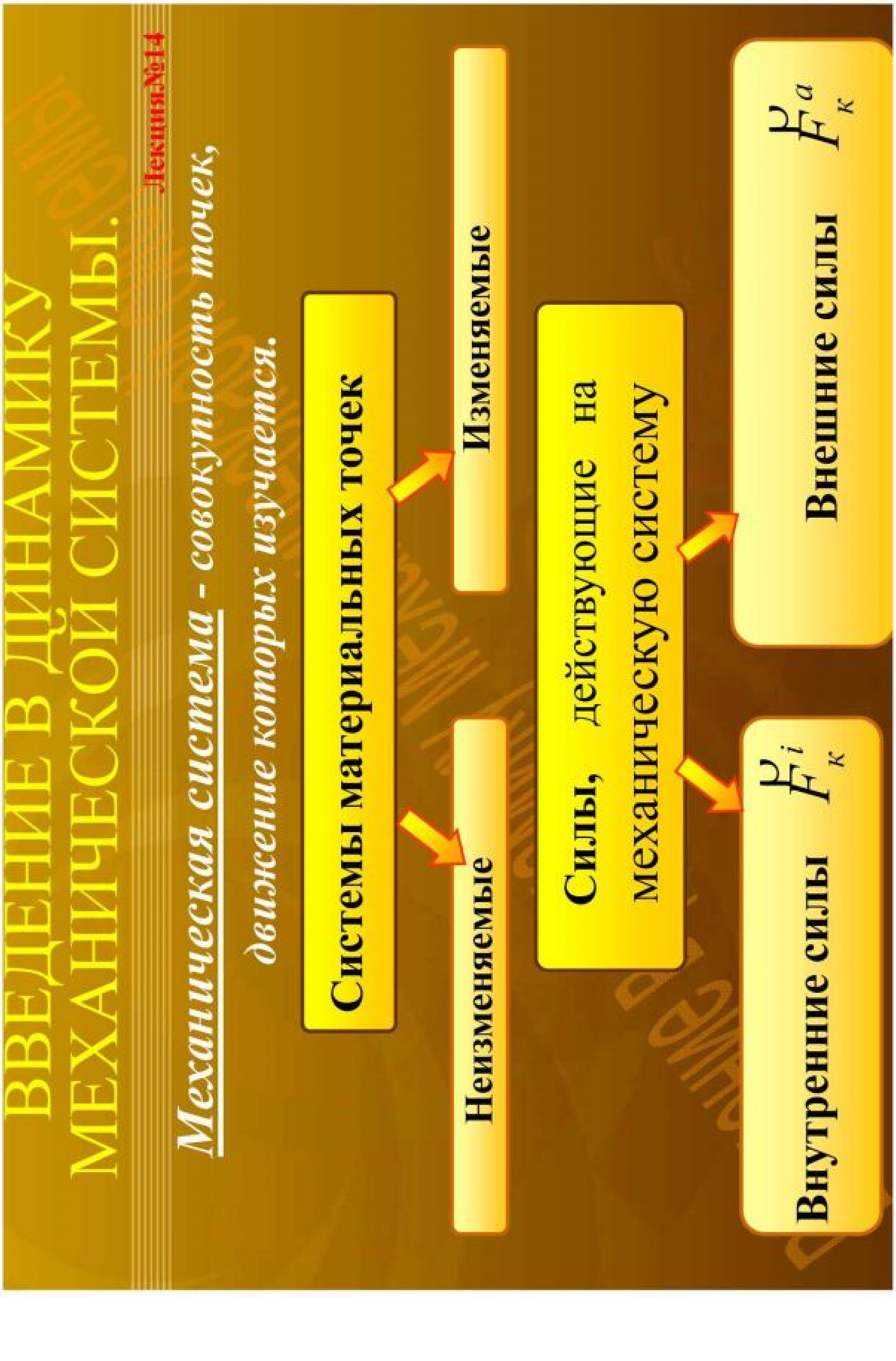


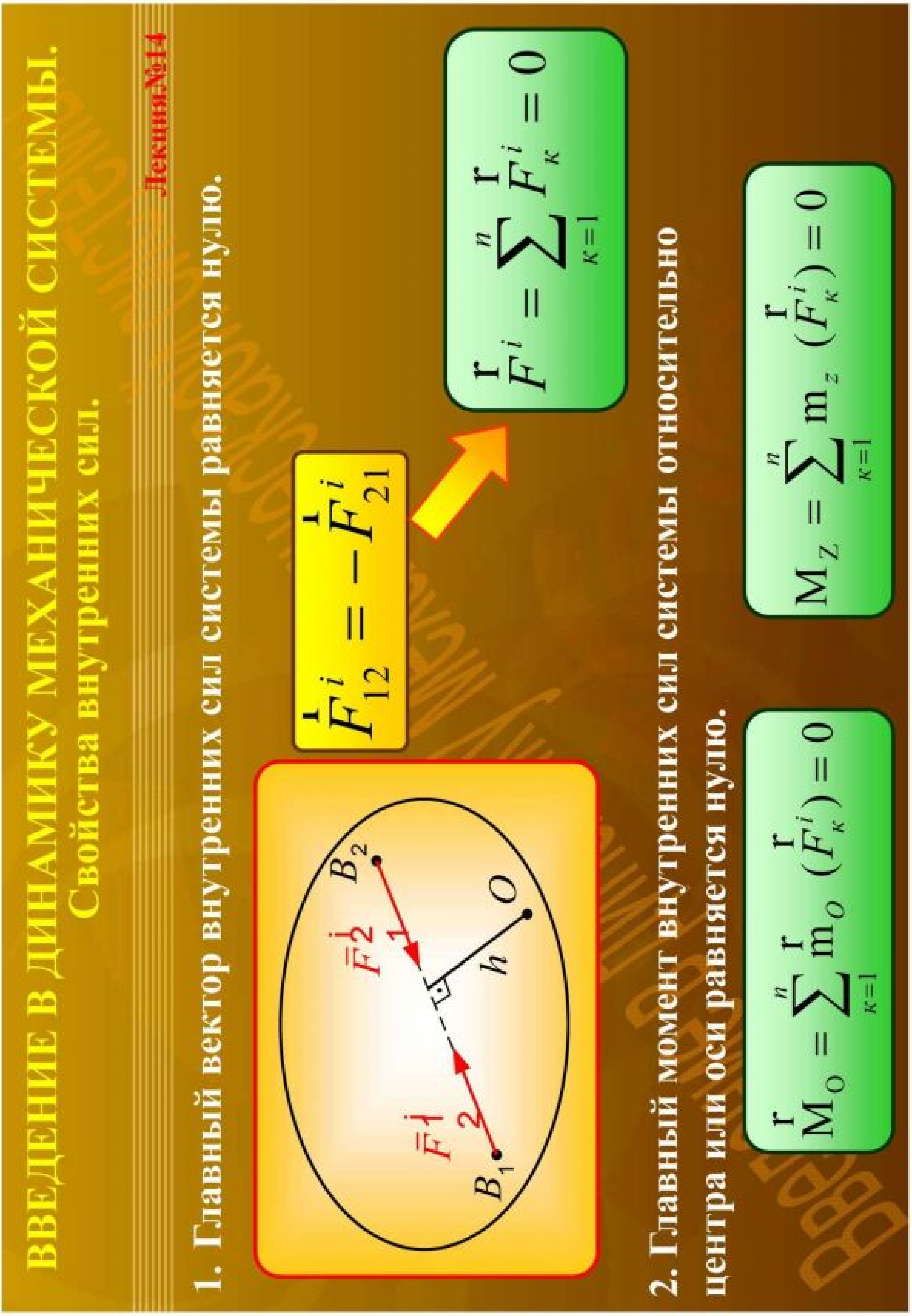
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Phi}_C$$

$$\vec{V}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Дифференциальные уравнения относительного движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\,\omega_e(\dot{z}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi); \\ m\ddot{y} = -2m\,\omega_e\,\dot{x}\sin\varphi; \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\,\omega_e\,\dot{x}\cos\varphi. \end{cases}$$


ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Лекция№14
Механическая система - совокупность точек, движение которых изучается.
Системы материальных точек
Неизменяемые
Изменяемые
Силы, действующие на механическую систему
Внутренние силы $\vec{F}_к^i$
Внешние силы $\vec{F}_к^a$


ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Свойства внутренних сил.
Лекция№14
1. Главный вектор внутренних сил системы равняется нулю.
B_1
B_2
O
h
$\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$
$\vec{F}^i = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}^i_{\kappa} = 0$
2. Главный момент внутренних сил системы относительно центра или оси равняется нулю.
$\vec{M}_O = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}^i_{\kappa}) = 0$
$M_Z = \sum_{\kappa=1}^{n} m_z(\vec{F}^i_{\kappa}) = 0$

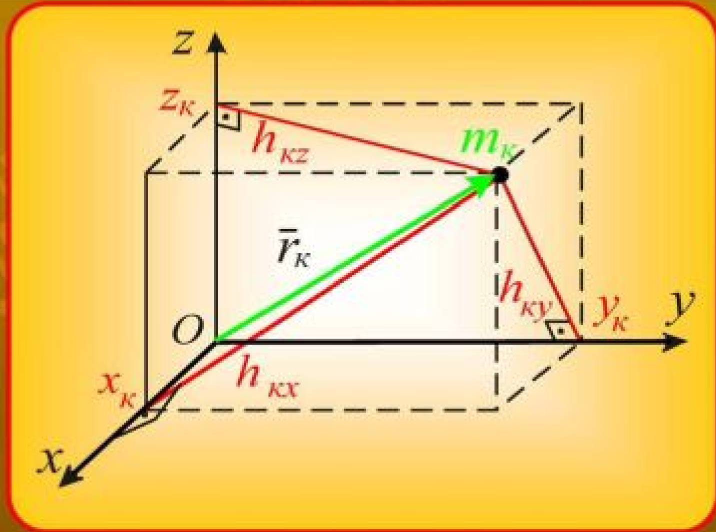

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Центр масс механической системы.
Лекция№14
Масса системы
$M = \sum_{\kappa=1}^{n} m_{\kappa}$
Центр масс механической системы - точка С
$\vec{r}_C = \dfrac{\sum_{\kappa=1}^{n} m_{\kappa} \vec{r}_{\kappa}}{M}$
Введение в динамику механической системы

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Моменты инерции.

Лекция№14

Полярным момент инерции системы относительно полюса *O*.

$$I_O = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa r_\kappa^2$$



Осевые моменты инерции системы

$$I_x = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa h_{\kappa x}^2 \qquad I_y = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa h_{\kappa y}^2 \qquad I_z = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa h_{\kappa z}^2$$

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Моменты инерции.

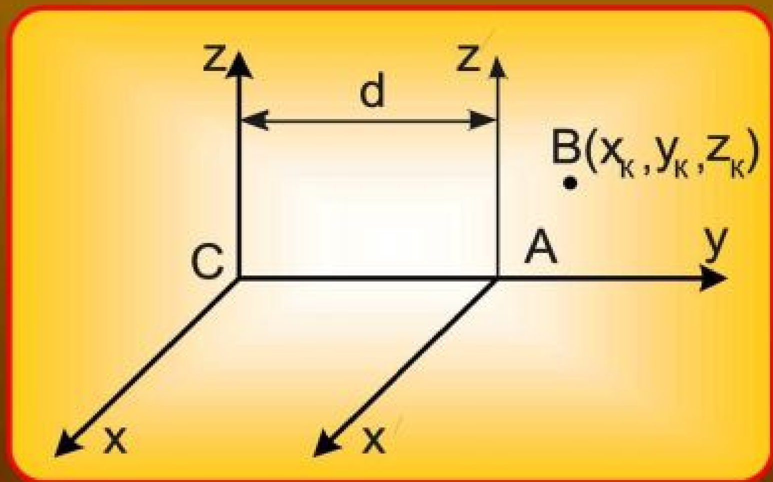
Лекция№14

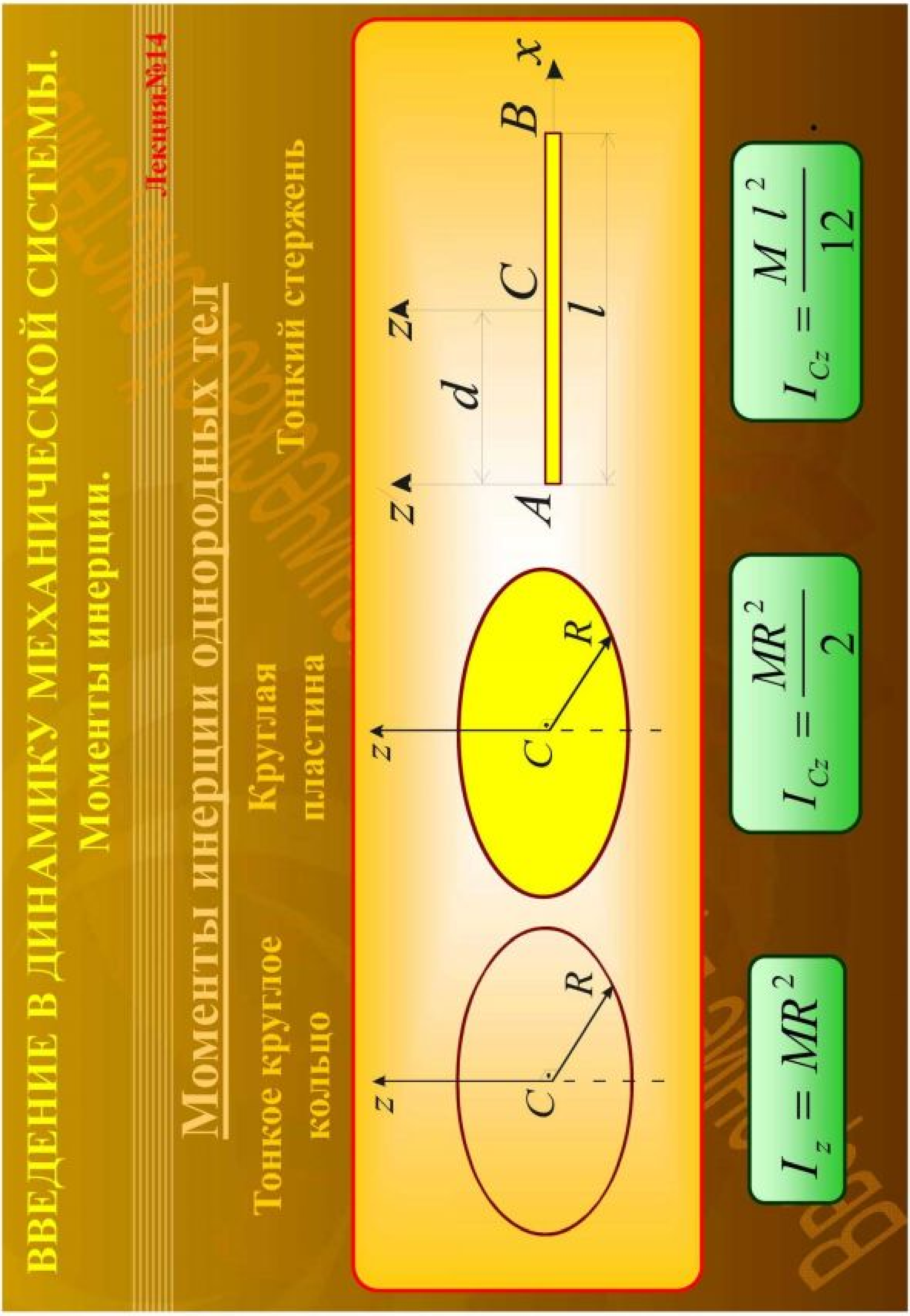
Центробежные моменты инерции

$$I_{xy} = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa x_\kappa y_\kappa, \qquad I_{yz} = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa y_\kappa z_\kappa, \qquad I_{zx} = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa z_\kappa x_\kappa$$

Теорема Гюйгенса

$$I_{z'} = I_{Cz} + M\,d^2$$




ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.
Моменты инерции.
Лекция№14
Моменты инерции однородных тел
Тонкое круглое кольцо
Круглая пластина
Тонкий стержень
z
C
R
z
C
R
z
z
A
C
B
x
d
l
$I_z = MR^2$
$I_{Cz} = \frac{MR^2}{2}$
$I_{Cz} = \frac{M\,l^2}{12}$


ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.
Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс.
Лекция№15
Дифференциальные уравнения движения механической системы в векторной форме
$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i;$
$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i;$
$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i.$
Теорема о движении центра масс системы
$M \vec{a}_C = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa^e$
Законы сохранения движения центра масс
$\sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa^e = 0, \quad \vec{V}_C = \vec{V}_{C_0} = \overline{\text{const}}$
$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x}^e = 0, \quad \dot{x}_C = V_{Cx} = \text{const}.$


ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.
Количество движения материальной точки. Теоремы об изменении количества движения материальной точки.
Лекция№15
Количество движения материальной точки
$m\vec{V}$
Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме
$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_{\kappa}$
Теорема об изменении количества движения материальной точки в конечной форме
$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{S}_{\kappa}$
Импульс силы
за конечный промежуток времени
$\vec{S}_{\kappa} = \int_0^{t_1} \vec{F}_{\kappa} dt.$

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.

Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы.

Лекция№15

Количество движения механической системы

$$\vec{Q} = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa \vec{V}_\kappa = M\vec{V}_C$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa^e = \vec{F}^e.$$

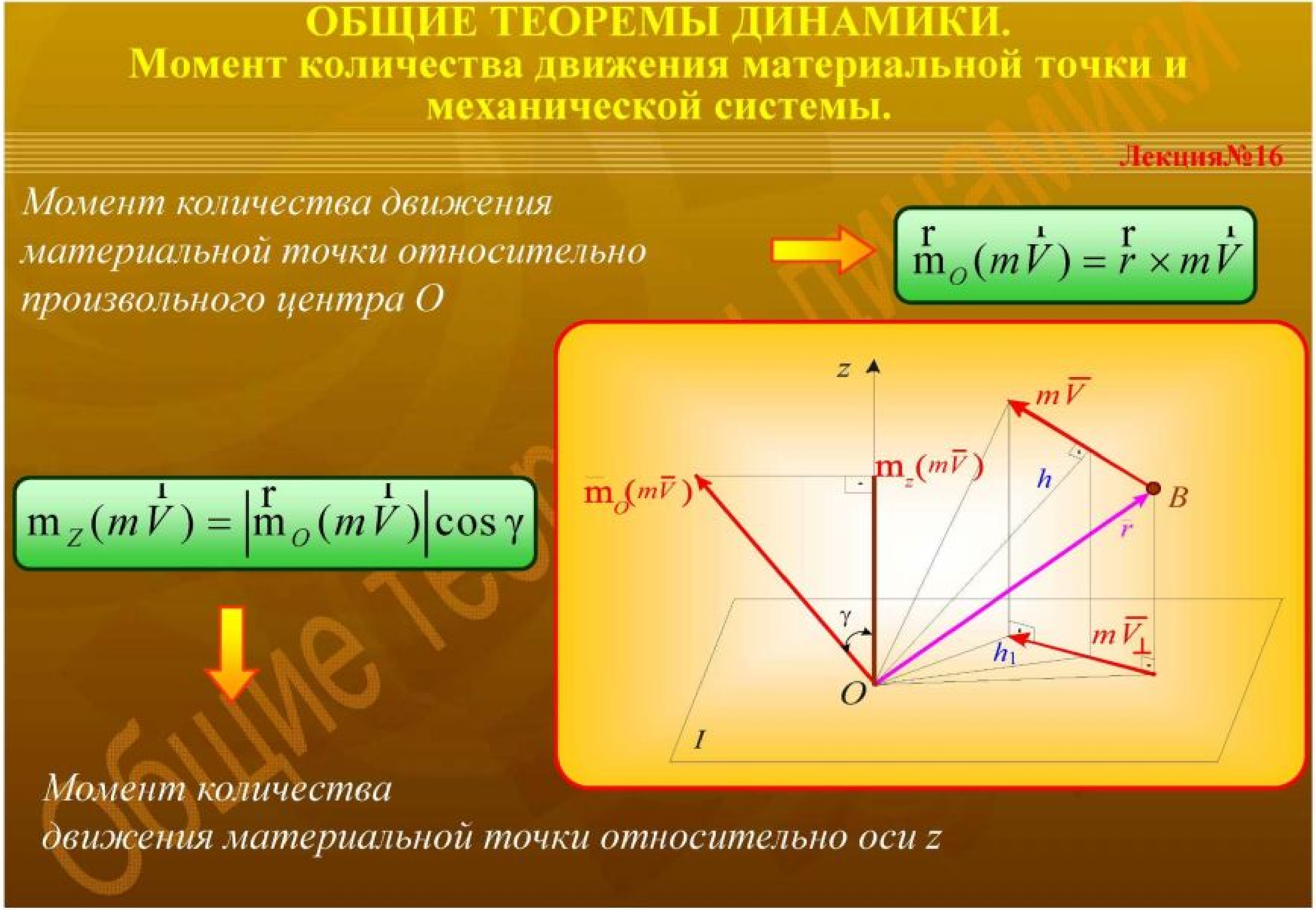
Теорема об изменении количества движения механической системы в конечной форме

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{S}_\kappa^e$$

Законы сохранения количества движения механической системы

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \vec{F}_\kappa^e = 0, \quad \vec{Q} = M\vec{V}_C = \overrightarrow{\mathrm{const}}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x}^e = 0, \quad Q_x = M V_{Cx} = \mathrm{const}$$


ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.
Момент количества движения материальной точки и механической системы.
Лекция№16
Момент количества движения материальной точки относительно произвольного центра O
$\vec{m}_O(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}$
z
$m\overline{V}$
$\mathrm{m}_z(m\overline{V})$
$\overline{\mathrm{m}}_O(m\overline{V})$
h
B
$\bar{r}$
γ
$m\overline{V}_\perp$
h_1
O
I
$\mathrm{m}_Z(m\vec{V}) = \left|\vec{\mathrm{m}}_O(m\vec{V})\right|\cos\gamma$
Момент количества движения материальной точки относительно оси z

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.

Момент количества движения материальной точки и механической системы.

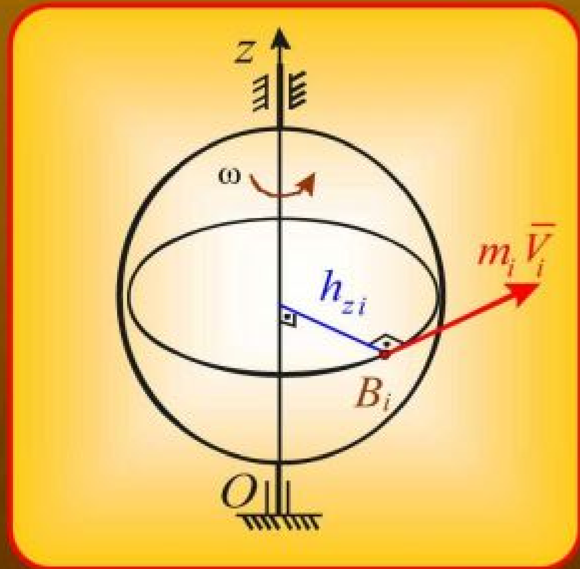
Лекция№16

Главный момент количеств движения системы относительно центра О

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(m_i\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_i$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения

$$\vec{K}_z = I_z\omega$$



ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ.
Теорема об изменении кинетического момента механической системы.

Лекция№16

Теорема об изменении кинетического момента механической системы относительно центра *O*

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_i^e) = \vec{M}_O^e \quad ,$$

Законы сохранения кинетического момента

$$M_O^e = 0 \Rightarrow K_O = \overline{\text{const}}$$

$$M_z^e = 0 \Rightarrow K_z = \text{const}$$

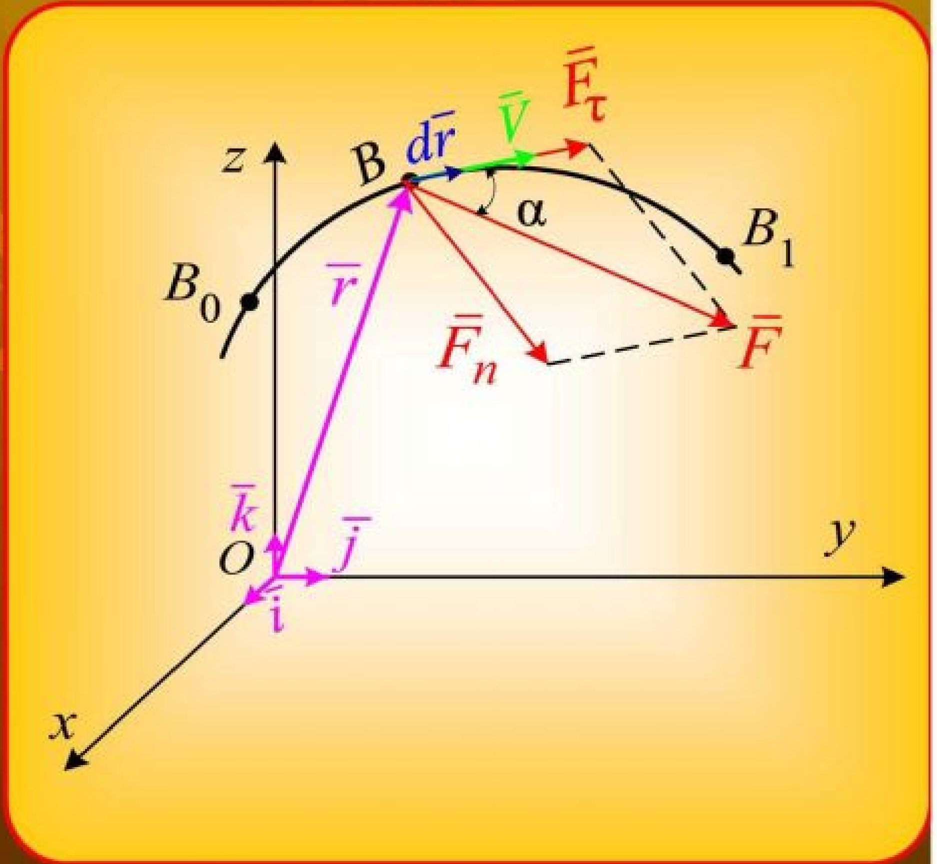
ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

Работа силы

Лекция№17

Элементарная работа силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Работа силы на конечном перемещении

$$A_{B_0B_1} = \int_{B_0}^{B_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

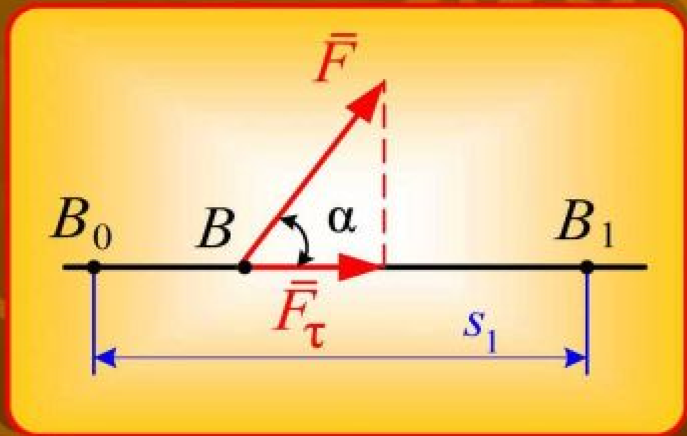
ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

Работа силы

Лекция№17

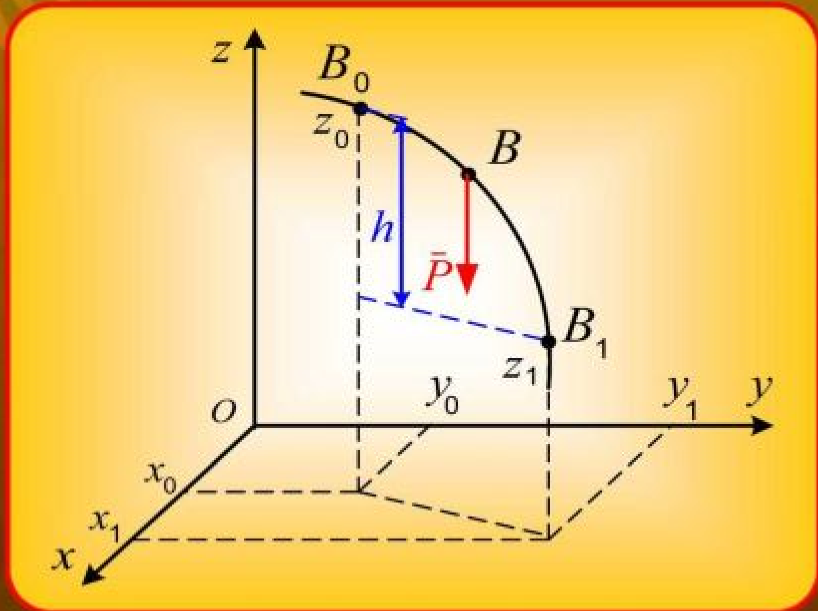
Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

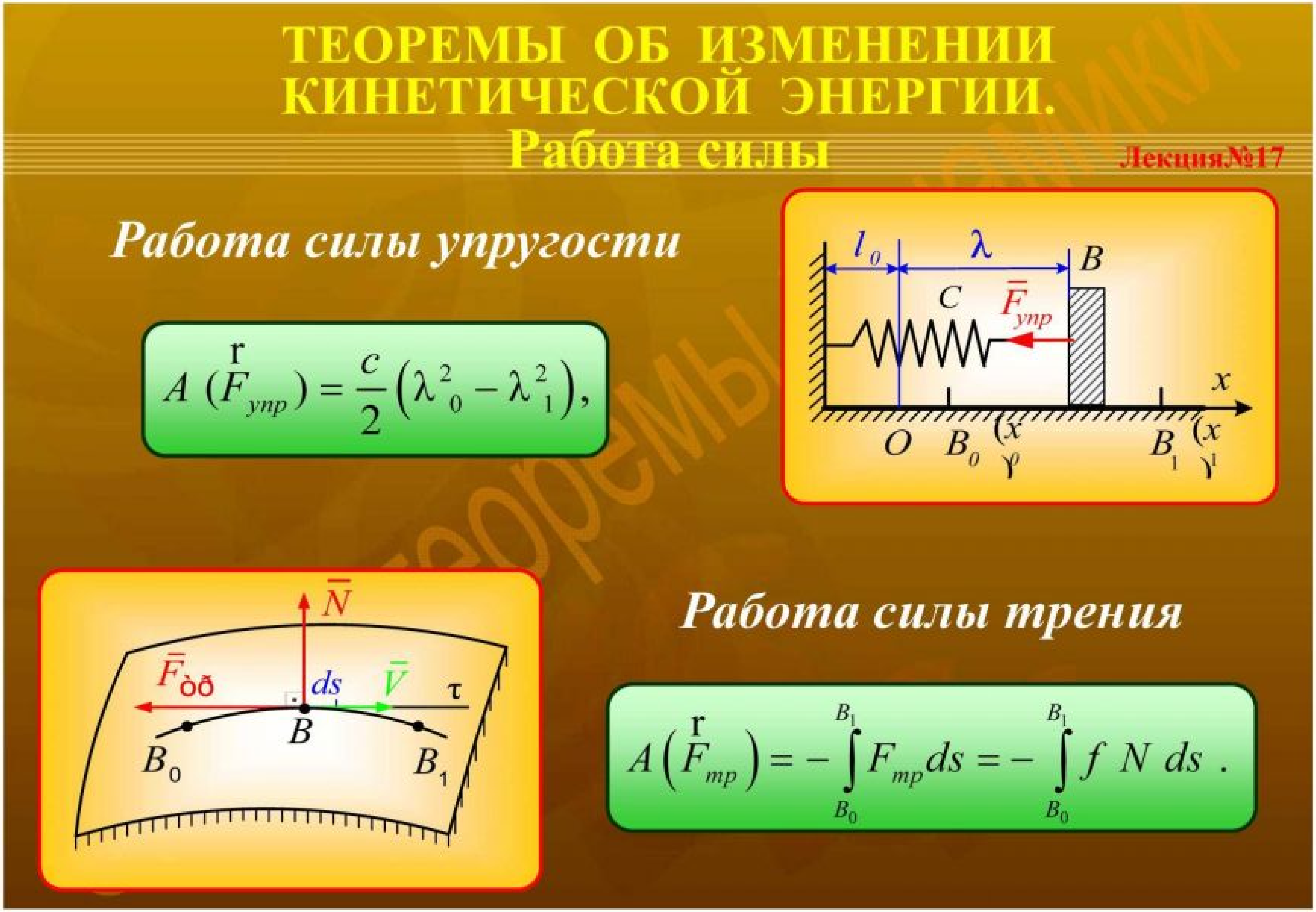
$$A_{B_0B_1} = F_\tau \int_{B_0}^{B_1} ds = F \cos\alpha \, s_1$$



Работа силы тяжести

$$A(\vec{P}) = \pm P\, h$$



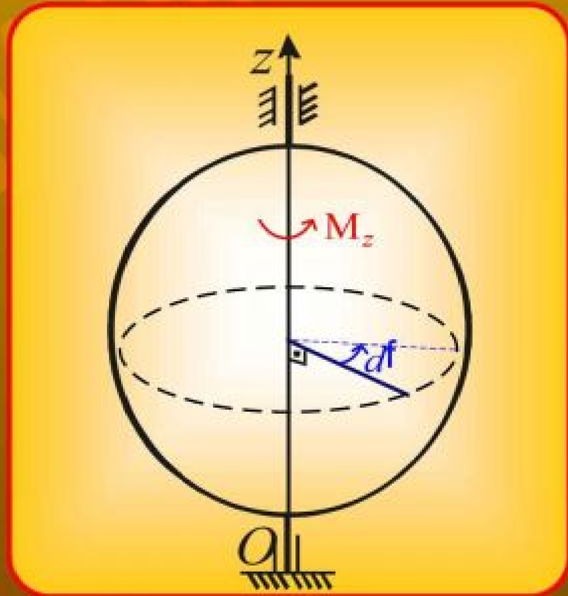

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.
Работа силы
Лекция№17
Работа силы упругости
$A(\vec{F}_{упр}) = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right),$
l_0
λ
B
C
$\bar{F}_{упр}$
x
O
B_0
B_1
Работа силы трения
$A(\vec{F}_{mp}) = -\int_{B_0}^{B_1} F_{mp}\,ds = -\int_{B_0}^{B_1} f\,N\,ds\ .$
$\bar{N}$
$\bar{F}_{тр}$
ds
$\bar{V}$
τ
B
B_0
B_1

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.
Работа силы

Лекция№17

Работа момента силы
при повороте тела вокруг оси z

$$A = \pm \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi .$$



Мощность силы при вращении тела

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \omega .$$


ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.
Мощность силы.
Лекция№17
Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени
$N = \frac{dA}{dt}$
Мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.
$N = F_\tau V$
Если работа совершается равномерно
$N = \frac{A}{t_1}$
Общие теоремы динамики

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

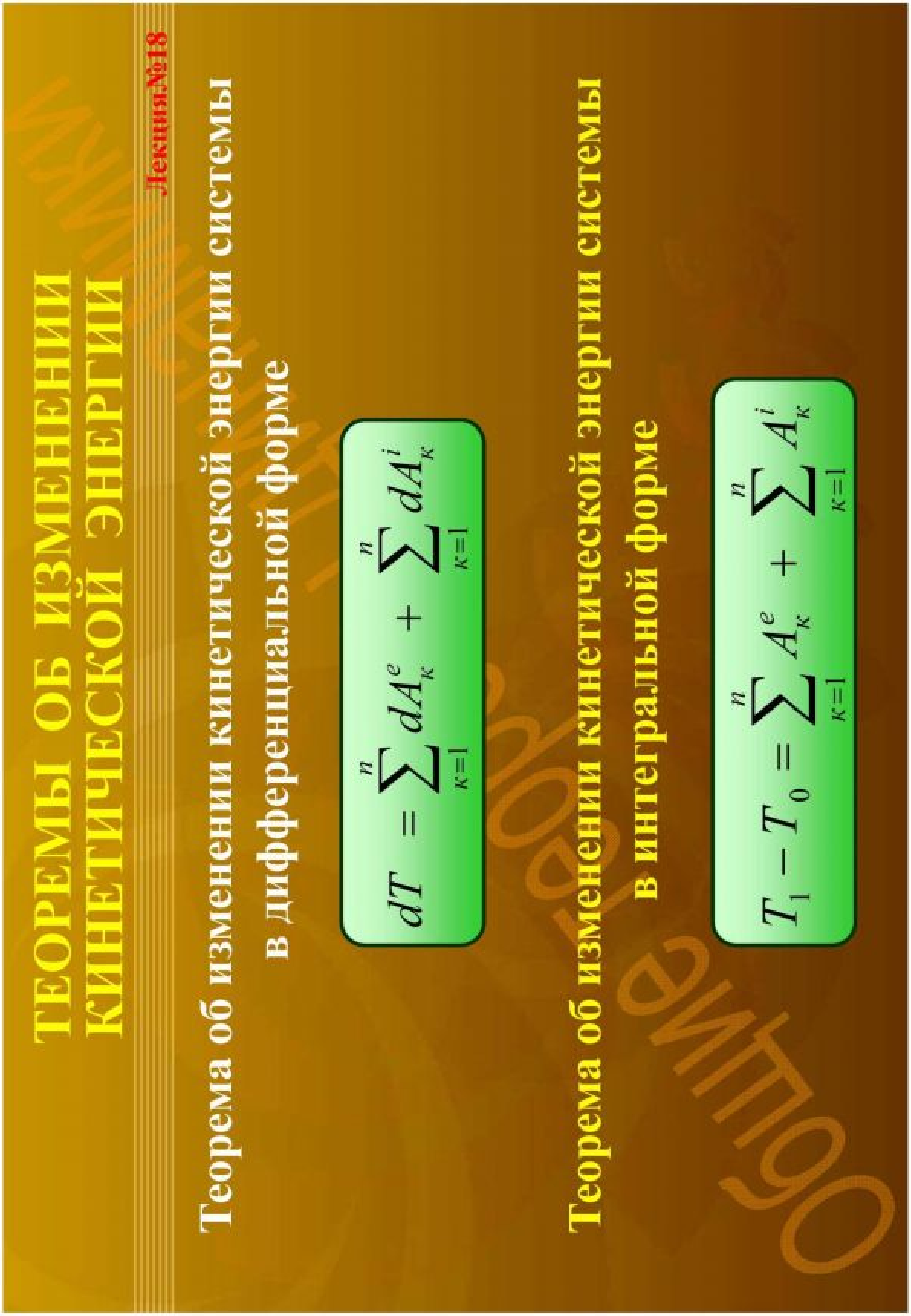
Лекция№18

Кинетическая энергия материальной точки → $$T = \frac{mV^2}{2}$$

Кинетическая энергия механической системы → $$T = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa V_\kappa^{\,2}$$

Теорема Кёнега → $$T = \frac{M\,V_C^{\,2}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa V_{\kappa r}^{2}$$


ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
Лекция№18
Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении
$T_{\text{пост}} = \frac{M V_C^2}{2}$
Кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси
$T_{\text{вр}} = \frac{I_z \omega^2}{2}$
Кинетическая энергия тела при плоскопараллельном движении
$T = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2}$
Общие теоремы динамики


ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
Лекция №18
Теорема об изменении кинетической энергии системы
в дифференциальной форме
$dT = \sum_{\kappa=1}^{n} dA_\kappa^e + \sum_{\kappa=1}^{n} dA_\kappa^i$
Теорема об изменении кинетической энергии системы
в интегральной форме
$T_1 - T_0 = \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa^e + \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa^i$

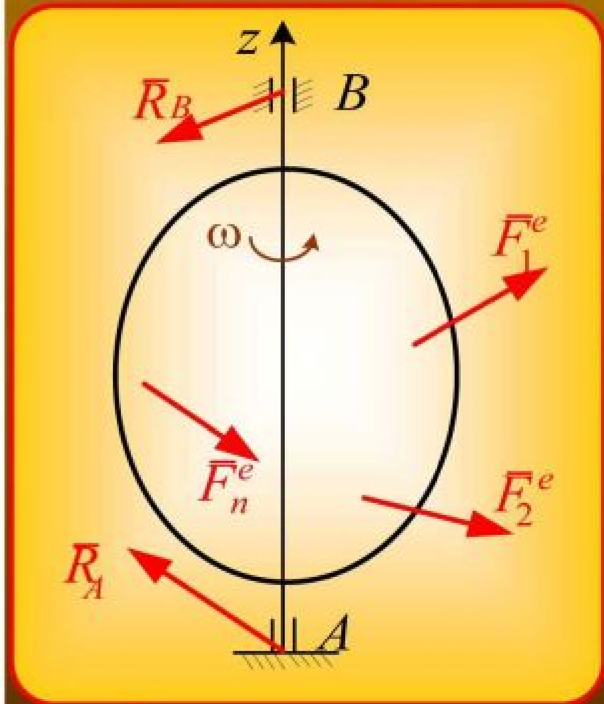
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела.

Лекция№19

Поступательное движение твердого тела

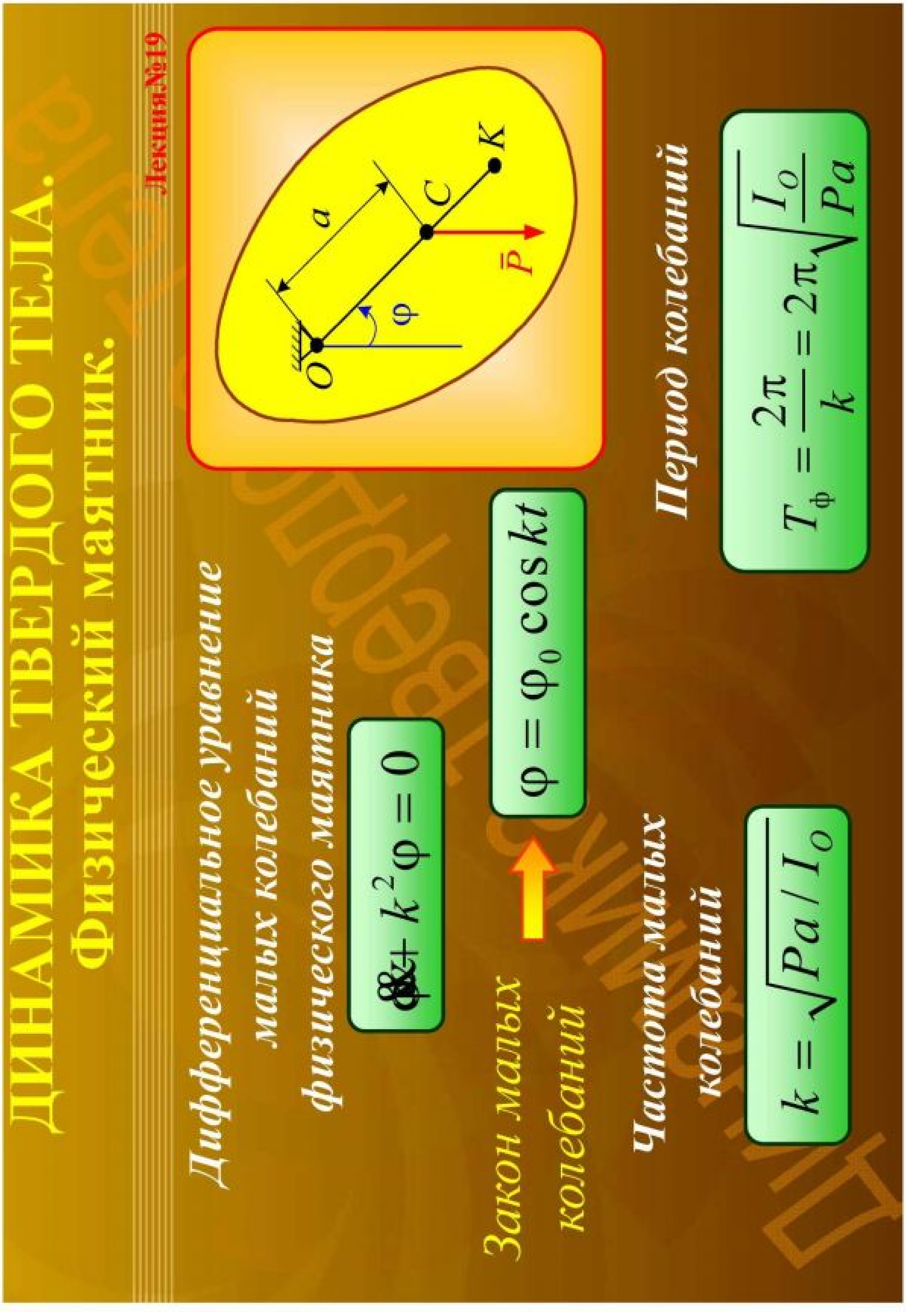
$$M\ddot{x} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa x}^{e}, \quad M\ddot{y} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa y}^{e}, \quad M\ddot{z} = \sum_{\kappa=1}^{n} F_{\kappa z}^{e}.$$



Вращательное движение твердого тела

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i^e).$$


ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
Дифференциальные уравнения движения твердого тела.
Лекция№19
Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела
y
y′
$\bar{F}_n$
ε
$\bar{F}_2^e$
φ
y_C
C
x′
$\bar{F}_1$
O
x_C
x
$M\ddot{x}_C = \sum_{\kappa=1}^{n} F^e_{\kappa x}\,,\quad M\ddot{y}_C = \sum_{\kappa=1}^{n} F^e_{\kappa y}\,,\quad I_C\ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_C\,(\vec{F}_i^e)\,.$


ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
Физический маятник.
Лекция №19
O
φ
a
C
$\bar{P}$
K
Дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника
$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$
Закон малых колебаний
$\varphi = \varphi_0 \cos kt$
Частота малых колебаний
$k = \sqrt{Pa / I_O}$
Период колебаний
$T_\varphi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Pa}}$


ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.
Математический маятник.
Лекция№19
Дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника
$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$
Закон малых колебаний
$\varphi = \varphi_0 \cos kt$
O
l
φ
C
$\bar{P}$
Частота малых колебаний
$k = \sqrt{g/l}$
Период колебания математического маятника
$T_м = 2\pi\sqrt{l/g}$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Лекция №20

Принцип Даламбера для материальной точки

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0$$

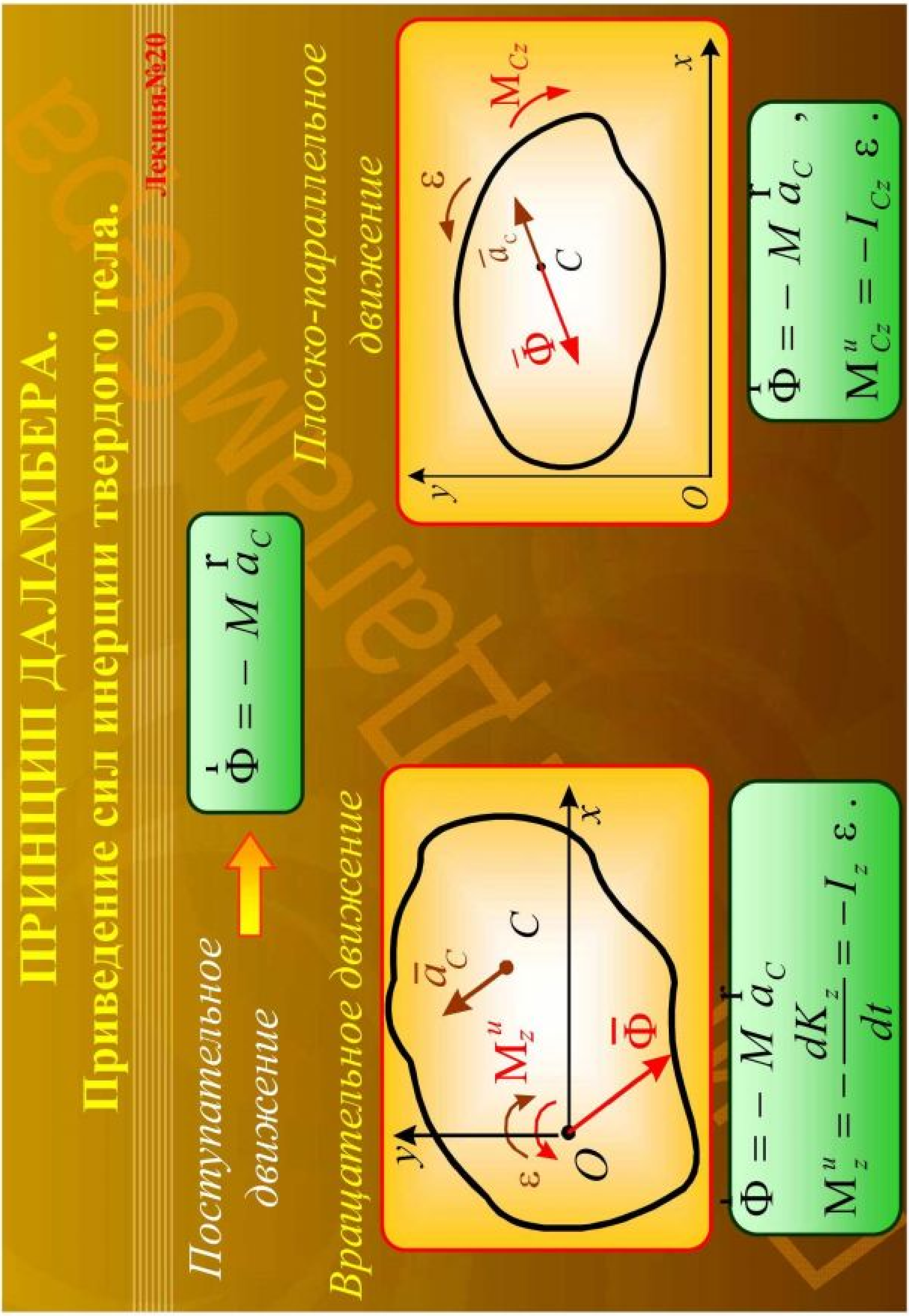
Сила инерции материальной точки → $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$

Принцип Даламбера для механической системы

$$\vec{F}^e + \vec{\Phi} = 0\ ,$$
$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^u = 0\ .$$

Главный вектор сил инерции → $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C.$

$$\vec{M}_O^u = \sum_{\kappa=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{\Phi}_\kappa)$$ ← *Главный момент сил инерции*


ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.
Приведение сил инерции твердого тела.
Лекция №20
Поступательное движение
$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C$
Вращательное движение
$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C$
$M_z^u = -\frac{dK_z}{dt} = -I_z\,\varepsilon$.
Плоско-параллельное движение
$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C$,
$M_{Cz}^u = -I_{Cz}\,\varepsilon$.


ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.
Динамические реакции подшипников при вращении тела вокруг оси.
Лекция №20
Проекции главного вектора сил инерции на декартовые оси
$\Phi_x = m\omega^2 x_C,$
$\Phi_y = m\omega^2 y_C,$
$\Phi_z = 0.$
Проекции главного момента сил инерции на декартовые оси
$M_x^u = -I_{yz}\omega^2;$
$M_y^u = -I_{xz}\omega^2;$
$M_z^u = 0.$
z
B
$\bar{Y}_B$
$\bar{X}_B$
ω
$\bar{F}_1^e$
$\bar{F}_n^e$
O
h_C
$\bar{a}_C^n$
α
C
$\bar{F}_2^e$
x'
$\bar{Z}_A$
$\bar{Y}_A$
A
$\bar{X}_A$
M_y^u
y
x_C
y_C
$\bar{\Phi}$
x
M_x^u

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА.

Динамические реакции подшипников при вращении тела вокруг оси.

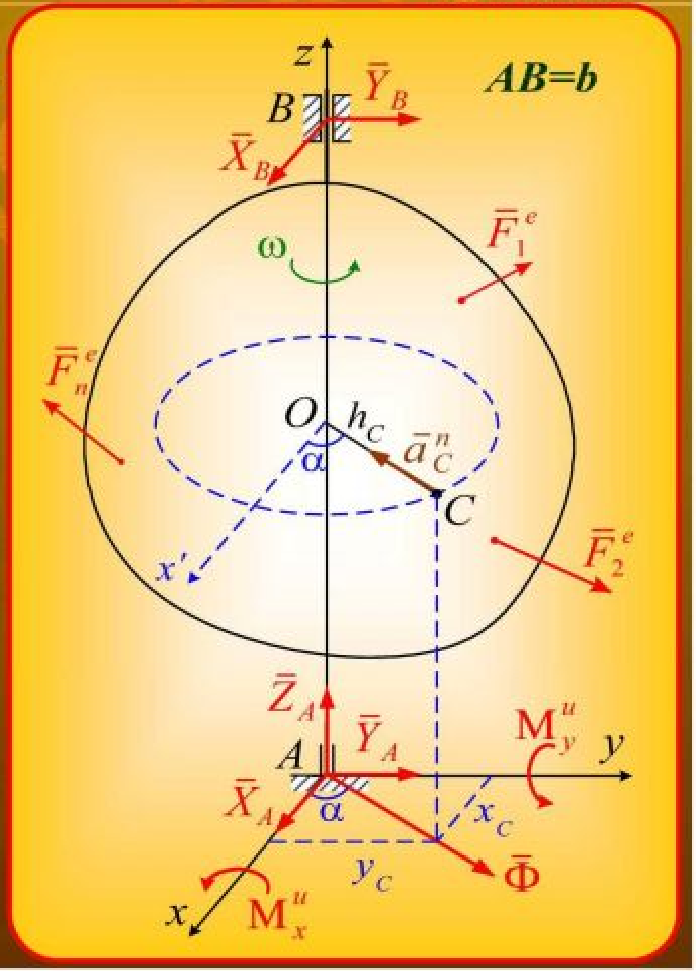
Лекция№20

Динамические реакции, действующие на ось z равномерно вращающегося тела

$$\begin{cases} X_A + X_B = -F_x^{\,e} - m x_C \omega^2; \\ Y_A + Y_B = -F_y^{\,e} - m y_C \omega^2; \\ Z_A = -F_z^{\,e}; \\ X_B b = -\mathrm{M}_y^e - I_{xz}\omega^2; \\ Y_B b = \mathrm{M}_x^e - I_{yz}\omega^2. \end{cases}$$

Условие динамической уравновешенности тела

$$x_C = 0, \quad y_C = 0;$$
$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0.$$



ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.

Основное уравнение удара. Общие теоремы теории удара.

Лекция №26

Ударный импульс

$$\overline{S}_{уд} = \int_0^{\tau} \overline{F}_{уд} dt = \overline{F}_{уд}^{ср} \tau$$

Теорема об изменении количества движения при ударе

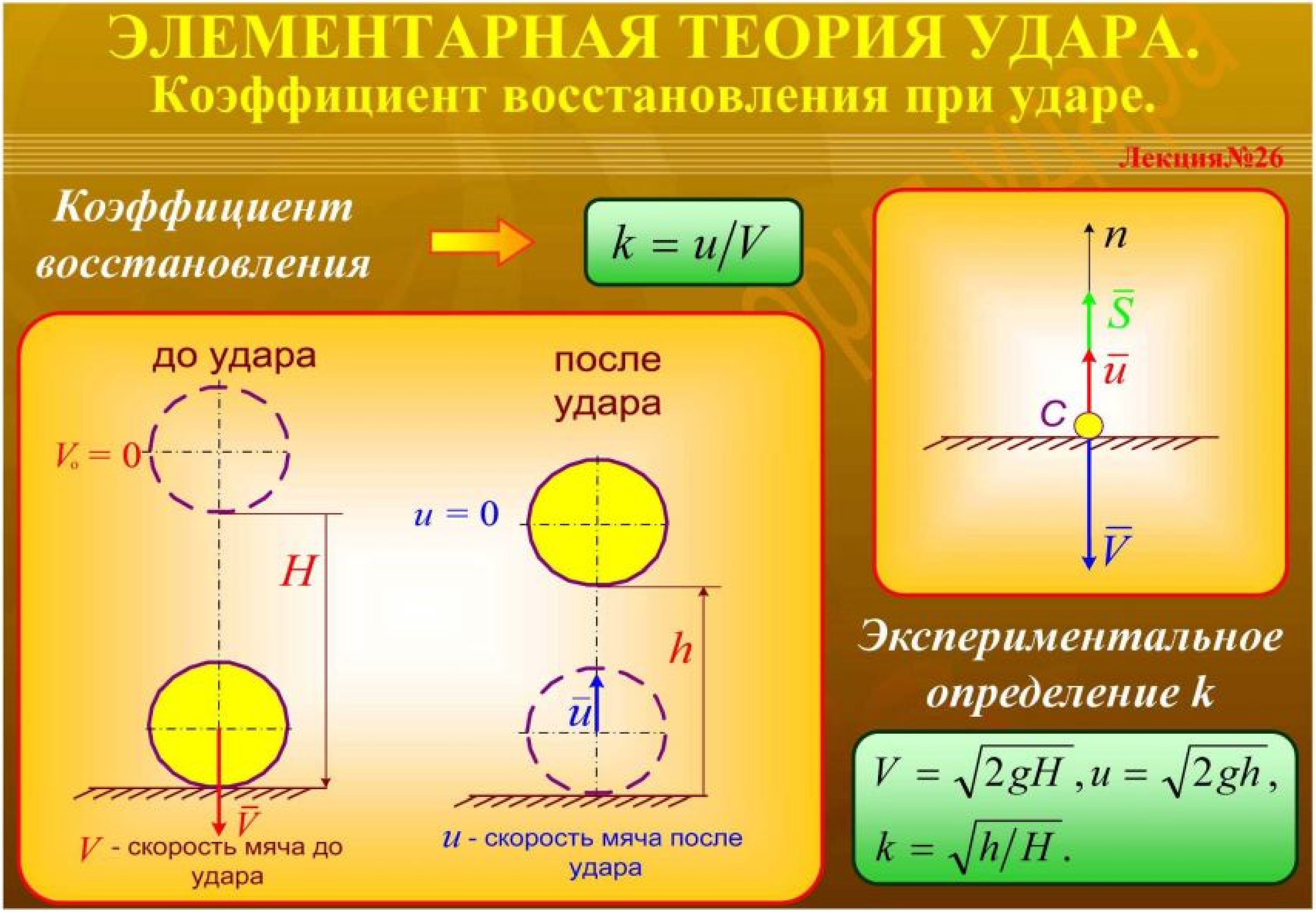
$$m(\overline{u} - \overline{V}) = \sum \overline{S}_k$$

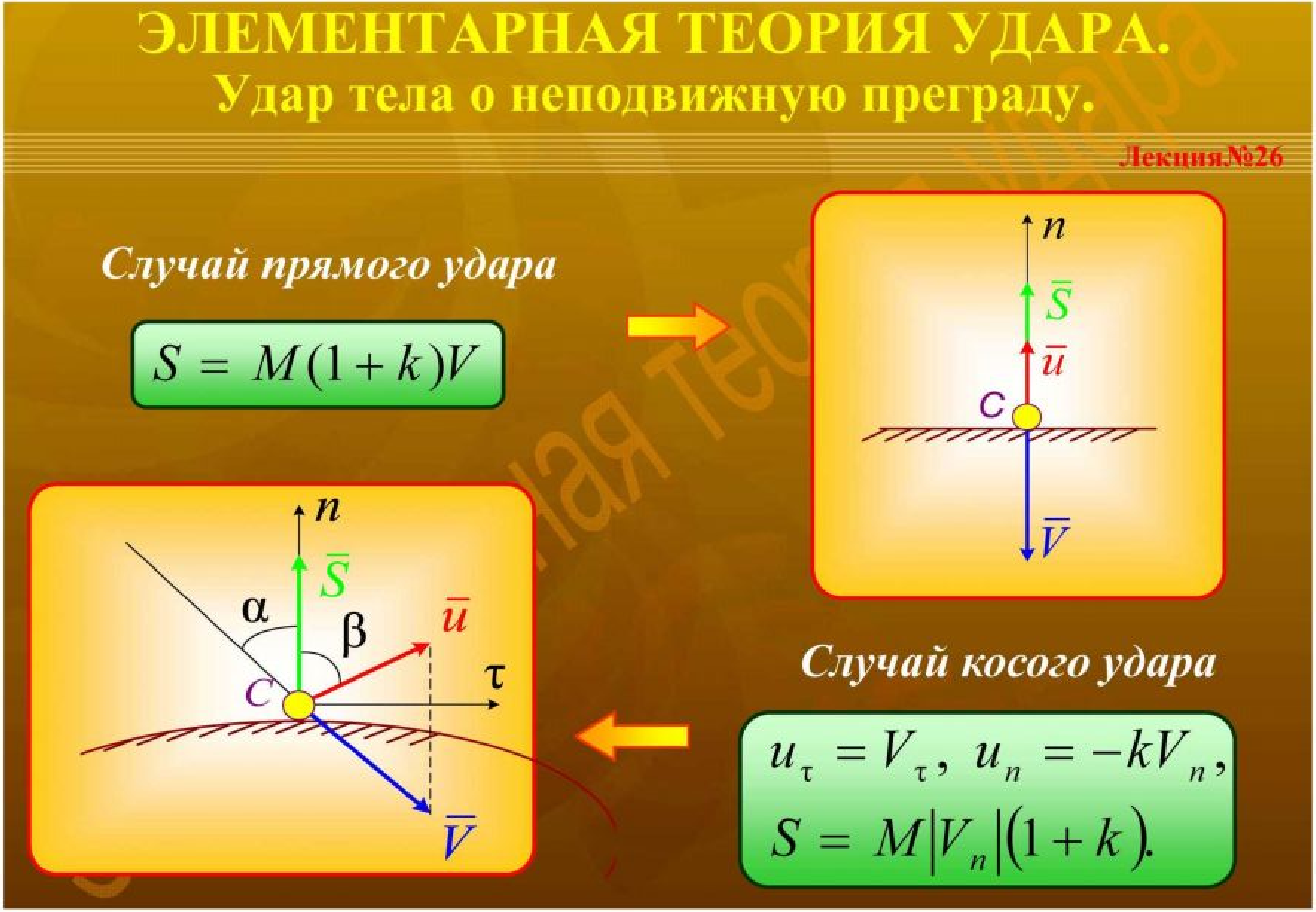
Теорема об изменении количества движения системы при ударе

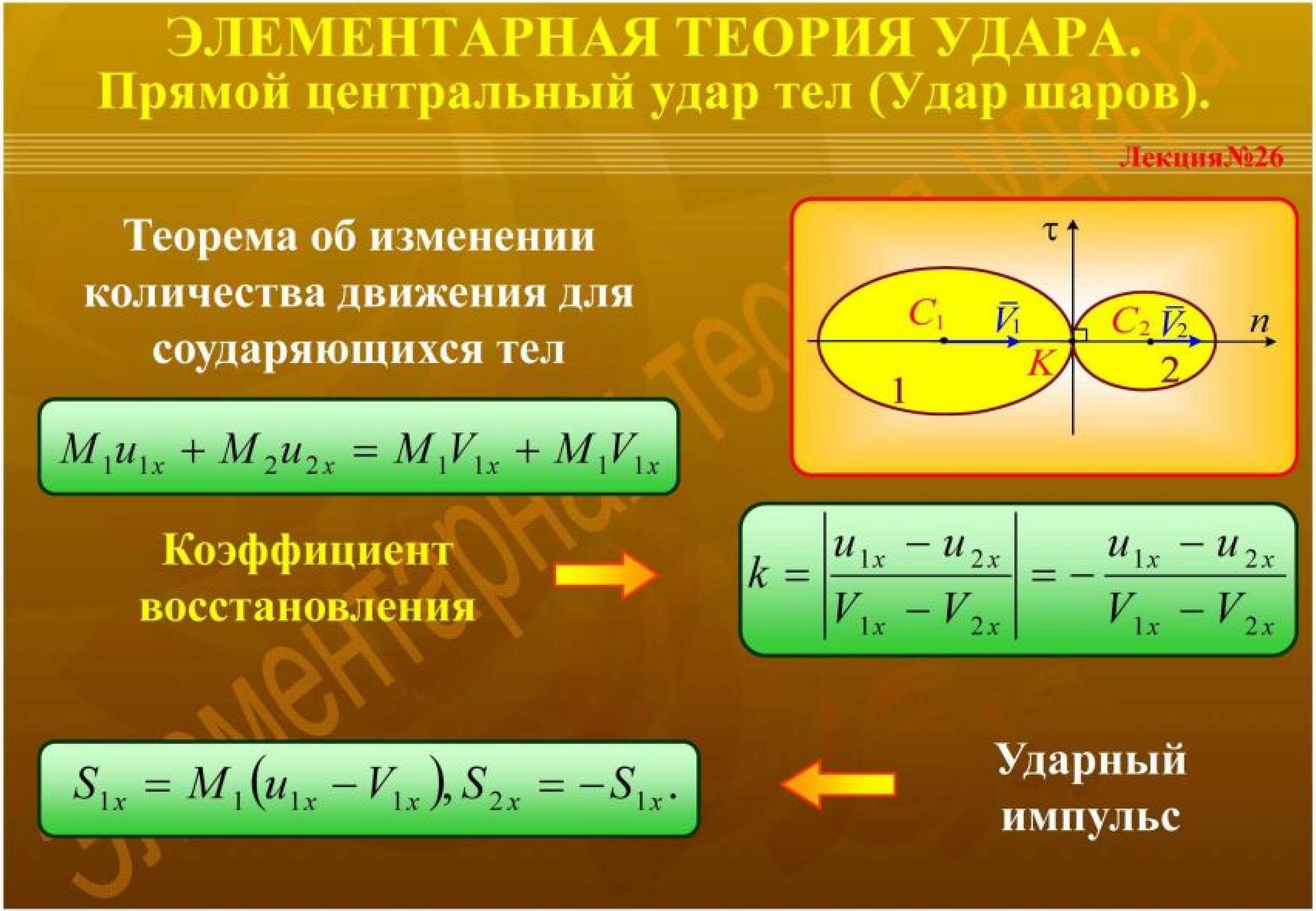
$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \Sigma \overline{S}_k^e$$

Теорема об изменении главного момента количества движения системы при ударе

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum \overline{m}_O(\overline{S}_k^e)$$


ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.
Коэффициент восстановления при ударе.
Лекция№26
Коэффициент восстановления
$k = u/V$
до удара
$V_o = 0$
H
$\overline{V}$
V - скорость мяча до удара
после удара
$u = 0$
h
$\overline{u}$
u - скорость мяча после удара
n
$\overline{S}$
$\overline{u}$
C
$\overline{V}$
Экспериментальное определение k
$V = \sqrt{2gH}, u = \sqrt{2gh},$
$k = \sqrt{h/H}.$


ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.
Удар тела о неподвижную преграду.
Лекция№26
Случай прямого удара
$S = M(1+k)V$
n
$\bar{S}$
$\bar{u}$
C
$\bar{V}$
Случай косого удара
$u_\tau = V_\tau,\ u_n = -kV_n,$
$S = M|V_n|(1+k).$
n
$\bar{S}$
α
β
$\bar{u}$
C
τ
$\bar{V}$


ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.
Прямой центральный удар тел (Удар шаров).
Лекция№26
Теорема об изменении количества движения для соударяющихся тел
$M_1u_{1x} + M_2u_{2x} = M_1V_{1x} + M_1V_{1x}$
τ
n
C_1
$\bar{V}_1$
C_2
$\bar{V}_2$
K
1
2
Коэффициент восстановления
$k = \left|\frac{u_{1x} - u_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}}\right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}}$
Ударный импульс
$S_{1x} = M_1(u_{1x} - V_{1x}), S_{2x} = -S_{1x}.$

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.
Прямой центральный удар тел (Удар шаров).

Лекция№26

Абсолютно неупругий удар

Конечные скорости тел

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}}{M_1 + M_2}.$$

Импульс тел тел

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}).$$

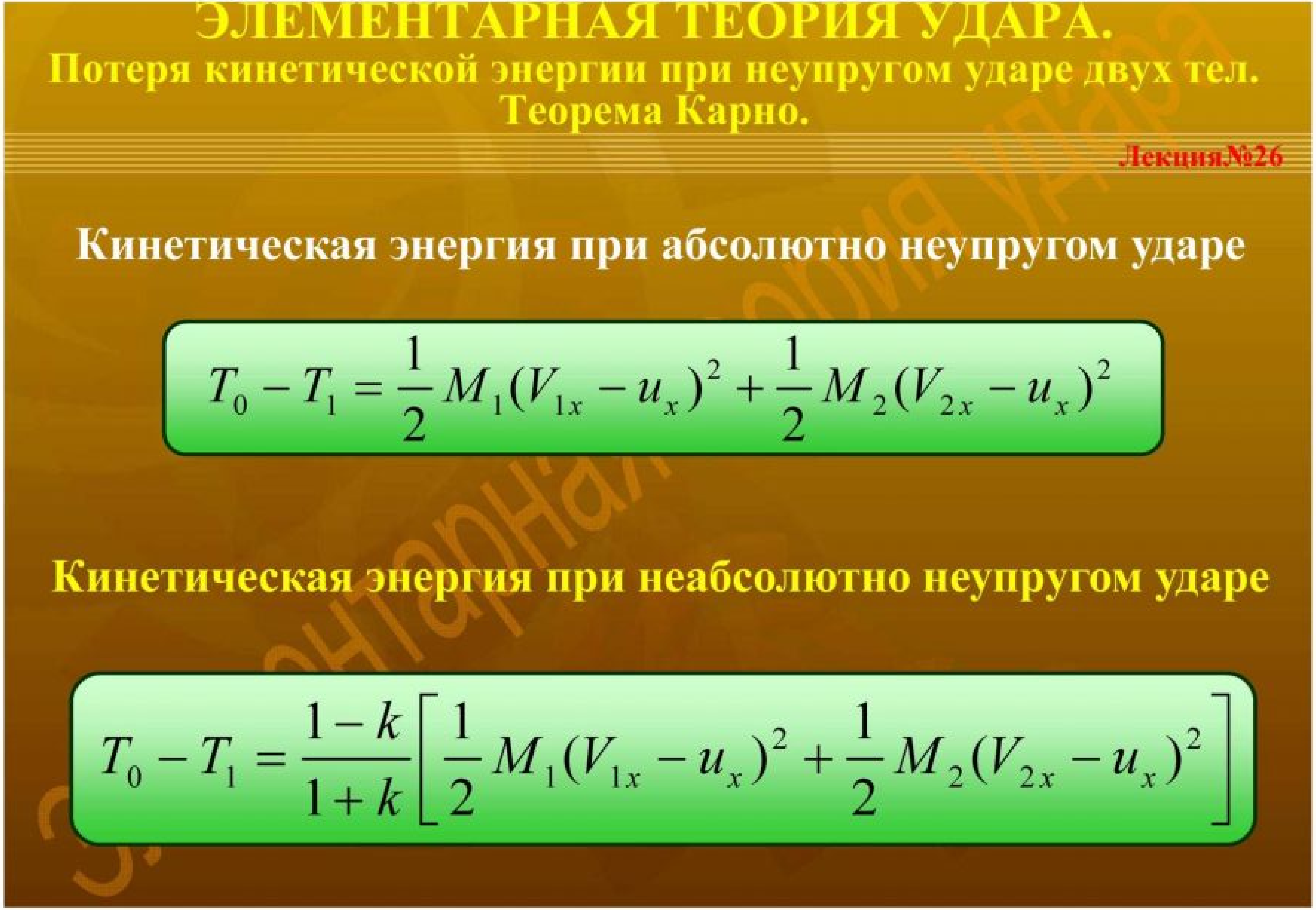
Абсолютно упругий удар

Конечные скорости тел

$$\begin{cases} u_{1x} = V_{1x} - \dfrac{2M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}), \\ u_{2x} = V_{2x} - \dfrac{2M_1}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}). \end{cases}$$

Импульс тел

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2}(V_{1x} - V_{2x}).$$


ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА.
Потеря кинетической энергии при неупругом ударе двух тел.
Теорема Карно.
Лекция№26
Кинетическая энергия при абсолютно неупругом ударе
$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}M_1(V_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2x} - u_x)^2$$
Кинетическая энергия при неабсолютно неупругом ударе
$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}M_1(V_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2}M_2(V_{2x} - u_x)^2\right]$$

Лекция 21

Принципы аналитической механики

Классификация связей

Связи :

- *Удерживающие*
- *Неудерживающие*
- *Стационарные*
- *Нестационарные*

Голономные

$$f_j(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ t)=0,\quad (\nu=1,\ 2,\ \dots,\ n),\quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

Неголономные

$$f_j(x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu, t) = 0,\quad (\nu=1,2,\dots,n),\ (j=1,2,\dots,k)$$

Принципы аналитической механики

Возможные перемещения. Возможная работа.

Точка движется по поверхности связи: $f(x, y, z, t) = 0.$

Действительное перемещение точки $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

подчинено уравнению:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 dt = 0$$

Возможное перемещение точки $\delta\vec{r} = \delta x\,\vec{i} + \delta y\,\vec{j} + \delta z\,\vec{k}$

подчинено уравнению:

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z = 0.$$

Лекция 21

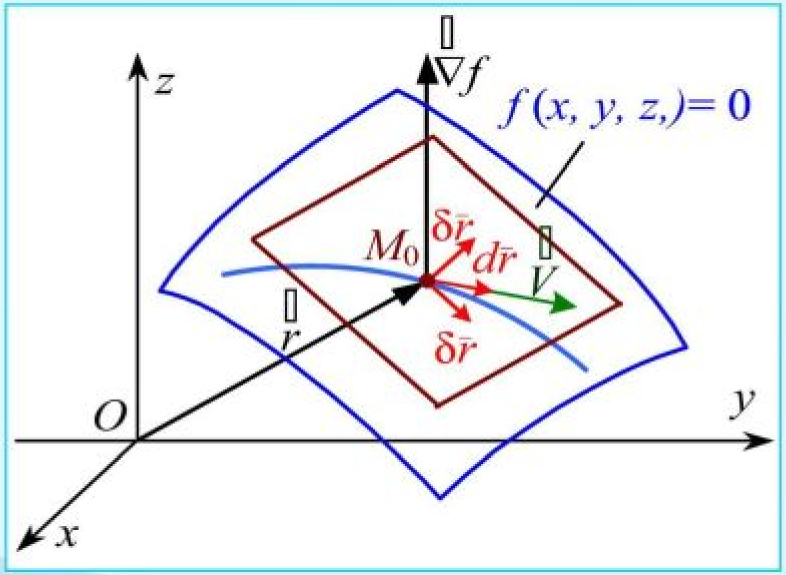
Принципы аналитической механики

Возможные перемещения. Возможная работа.

Геометрическая интерпретация

$$\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{r} = 0,$$

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \vec{k}.$$



При стационарных связях:

$$\delta\vec{r} = d\vec{r}$$

Принципы аналитической механики

Возможные перемещения. Возможная работа.

Голономная система ***n*** *точек со связями:*

$$f_j(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ t) = 0,$$
$$(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Возможные перемещения точек системы

подчинены уравнениям:

$$\delta\vec{r}_\nu = \delta x_\nu \vec{i} + \delta y_\nu \vec{j} + \delta z_\nu \vec{k}, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \vec{\nabla}_\nu f_j \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0.$$

Количество независимых возможных перемещений равно $\boldsymbol{S = 2n - k}$ *числу степеней свободы системы.*

Принципы аналитической механики

Возможные перемещения. Возможная работа.

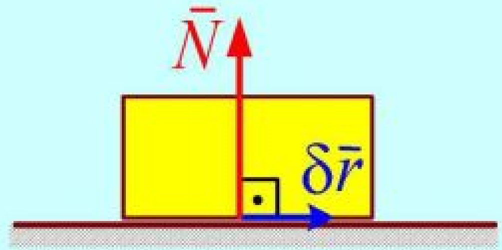
Возможная работа сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ **на возможных перемещениях точек** $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \ldots, \delta\vec{r}_n$ **системы:**

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu$$

Идеальные связи:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{N}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu = 0$$

$$\delta A = \bar{N}\cdot\delta\bar{r} = 0$$



Лекция 21

Принципы аналитической механики

Принцип возможных перемещений

Необходимое и достаточное условие равновесия голономной материальной системы, подчиненной идеальным стационарным связям:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0.$$

Общее уравнение динамики

В каждый момент движения голономной системы, подчиненной идеальным стационарным связям

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\vec{F}_\nu + \vec{\Phi}_\nu \right) \cdot \delta \vec{r}_\nu = 0.$$

$\vec{\Phi}_\nu = - m_\nu \vec{a}_\nu$ – *сила инерции* ν *- й материальной точки*

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Обобщенные координаты и обобщенные силы

S независимых параметров $q_1, q_2, \ldots, q_S$ *, однозначно определяющих положение системы, совместимое с наложенными на неё связями –* ***обобщенные координаты.***

Обобщенная сила*, для обобщенной координаты* q_m.

$$\boxed{Q_m = \frac{\delta A_m}{\delta q_m} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_m}, \quad (m = 1, 2, \ldots, S).}$$

Для потенциальных сил:

$$\boxed{Q_m = -\frac{\partial \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_S)}{\partial q_m}}$$

П *- потенциальная энергия системы.*

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Лекция 22

Принцип возможных перемещений

В положении равновесия системы при $q_1^0,\ q_2^0, \ldots, q_S^0$

$$\boxed{Q_1 = 0,\ \ Q_1 = 0,\ \ldots,\ Q_S = 0.}$$

Для консервативной системы:

$$\boxed{\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ ,\ldots,\ S),}$$

$$\boxed{d\Pi\,(q_1^0,\ q_2^0, \ldots, q_S^0) = 0.}$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Лекция 22

Устойчивость равновесия

Теорема Лагранжа – Дирихле

Для консервативной системы:

$$\Pi(q_1^0,\quad q_2^0,\quad \ldots,\ q_S^0\ ) = \Pi_{\min}$$

***S* = 1**

$$\left.\frac{d\Pi}{dq}\right|_{q=q^{\circ}} = 0, \qquad \left.\left(\frac{d^2\Pi}{dq^2}\right)\right|_{q=q^{\circ}} > 0.$$

Лекция 23

Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m \quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ S).\right.$$

Решение основной задачи динамики системы:

$$q_m=q_m\left(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2s}\right)$$

начальные условия $t=0 \quad q_m(0)=q_{m0}, \quad \dot q_m(0)=\dot q_{m0}.$

Для потенциальных сил: $\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}=0\right.$

$L=T-\Pi$ *– функция Лагранжа*

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Принцип Гамильтона-Остроградского

Прямой путь изображающей точки

$$q_m = q_m(t) \quad (m = 1, 2, ..., S).$$

Окольные пути изображающей точки

$$\tilde{q}_m(t) = q_m(t) + \delta q_m.$$

Условие закрепленности концов окольных путей

$$\delta q_m\big|_{t=t_0} = 0, \quad \delta q_m\big|_{t=t_1} = 0 \qquad (m = 1, 2, ..., S),$$

t_0, t_1 – *фиксированные начальный и конечный моменты времени.*

Уравнения Лагранжа 2-го рода

Лекция 23

Действие по Гамильтону:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

Вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \ldots, q_S, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S, t)\,dt = 0$$

Интегральный принцип Гамильтона–Остроградского

Для голономной системы:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{m=1}^{n} Q_m \delta q_m \right) dt = 0.$$

Лекция 23

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Кинетическая энергия - квадратичная форма обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} a_{ij}\ \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

a_{ij} *- обобщенные массы.*

Потенциальная энергия - квадратичная форма обобщенных координат:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} c_{ij}\ q_i q_j$$

c_{ij}*- обобщенные коэффициенты жесткости.*

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 23

Уравнения Лагранжа второго рода в случае малых колебаний

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m^{\Pi} + Q_m^{\Phi} + Q_m(t) \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ S).$$

Обобщенная восстанавливающая сила - $Q_m^{\Pi} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_m} = -\sum\limits_{j=1}^{S} c_{mj} q_j$

$Q_m^{\Phi} = -\sum\limits_{j=1}^{S} b_{mj} \dot q_j$ *- Обобщенная сила сопротивления*

Обобщенная возмущающая сила - $Q_m(t) = H_m \sin(pt + \delta_m)$

Линеаризованное уравнение Лагранжа второго рода

$$\sum_{j=1}^{S}\left(a_{mj}\ddot q_j + b_{mj}\dot q_j + c_{mj} q_j\right) = H_m \sin(pt + \delta_m).$$

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 24

Свободные колебания механической системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение (в отсутствии сопротивления):

$$\ddot{q} + k^2 q = 0;$$

Закон свободных колебаний системы

$$q = A \cdot \sin(kt + \alpha).$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Собственная частота системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}$$

Период колебаний

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 24

Свободные колебания механической системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение свободных колебаний при линейно-вязком сопротивлении:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0$$

$$h = b/2a, \quad k^2 = c/a.$$

(*h* < *k*) *Закон затухающих колебаний механической системы:*

$$q = Be^{-ht} \cdot \sin(k_1 t + \beta).$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - h^2}$$

Частота затухающих колебаний

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы

Уравнения Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2}. \end{cases}$$

$$T = a_{11}\cdot \dot{q}_1^2 + 2a_{12}\cdot \dot{q}_1\cdot \dot{q}_2 + a_{22}\cdot \dot{q}_2^2,$$

$$\Pi = c_{11}\cdot q_1^2 + 2c_{12}\cdot q_1\cdot q_2 + c_{22}\cdot q_2^2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы

$$\begin{cases} a_{11}\cdot\ddot{q}_1 + a_{12}\cdot\ddot{q}_2 + c_{11}\cdot q_1 + c_{12}q_2 = 0; \\ a_{21}\cdot\ddot{q}_1 + a_{22}\cdot\ddot{q}_2 + c_{21}\cdot q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Решение :

$$q_1 = A\sin(kt+\alpha),$$
$$q_2 = B\sin(kt+\alpha),$$

A, B – амплитуды колебаний,
k – частота колебаний,
α – начальная фаза колебаний.

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Алгебраические линейные однородные уравнения относительно амплитуд A и B

$$\begin{cases}(c_{11} - a_{11}k^2)A + (c_{12} - a_{12}k^2)B = 0;\\ (c_{21} - a_{21}k^2)A + (c_{22} - a_{22}k^2)B = 0.\end{cases}$$

Вековое уравнение

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0.$$

Решение: k_1 *и* k_2 *собственные частоты системы* ($k_1 < k_2$)

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Решение для частот k_1 ***и*** k_2

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \qquad q_2^{(1)} = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1),$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \qquad q_2^{(2)} = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Коэффициенты форм

$$\chi_1 = \frac{B_1}{A_1} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2}; \quad \chi_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2}$$

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Главные колебания

$$q_1^{(1)} = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \qquad q_2^{(1)} = \chi_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1),$$

$$q_1^{(2)} = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \qquad q_2^{(2)} = \chi_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Законы движения системы с двумя степенями свободы около положения устойчивого равновесия

$$q_1 = q_1^1 + q_1^2 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2),$$

$$q_2 = q_2^1 + q_2^2 = \chi_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + \chi_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Малые свободные колебания системы около положения устойчивого равновесия

Лекция 25

Амплитуды и начальные фазы

$$A_1 = \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\sqrt{(q_{20} - \chi_2 q_{10})^2 + \frac{(\dot{q}_{20} - \chi_2 \dot{q}_{10})^2}{k_1^2}},$$

$$A_2 = \frac{1}{\chi_2 - \chi_1}\sqrt{(q_{20} - \chi_1 q_{10})^2 + \frac{(\dot{q}_{20} - \chi_1 \dot{q}_{10})^2}{k_2^2}},$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(k_1 \frac{q_{20} - \chi_2 q_{10}}{\dot{q}_{20} - \chi_2 \dot{q}_{10}}\right), \qquad \alpha_2 = \operatorname{arctg}\left(k_2 \frac{q_{20} - \chi_1 q_{10}}{\dot{q}_{20} - \chi_1 \dot{q}_{10}}\right).$$