ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Содержание

Введение

Теоретическая механика это наука, изучающая механическое движение и взаимодействие тел аналитическими методами.

Механическим движением называют происходящее с течением времени изменение взаимного положения тел в пространстве.

Огромная роль и значение теоретической механики в инженерном образовании, прежде всего, определяется тем, что она является научной базой очень многих областей современной техники. Общие понятия, законы и методы теоретической механики лежат в основе ряда самостоятельных областей и разделов таких, как теория упругости, теория пластичности, гидродинамика, аэромеханика, газовая динамика, сопротивление материалов, теория механизмов и машин, гидравлика, а также многих специальных инженерных дисциплин.

Теоретическая механика базируется на законах Ньютона, которые установлены путем обобщения многочисленных опытов и наблюдений и нашли свое подтверждение в процессе всей общественно-производственной практики человечества. Это позволяет рассматривать знания, основанные на законах механики, как достоверные знания, на которые инженер может смело опираться в своей профессиональной деятельности.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято делить на *статику, кинематику и динамику*. В статике изучается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучается движение материальных тел под действием сил.

Общий метод научных исследований состоит в том, что при рассмотрении того или иного явления в нем выделяют главное, определяющее, а от всего остального, сопутствующего данному явлению, абстрагируются. В результате вместо реального явления или объекта рассматривают некоторую его модель и вводят ряд абстрактных понятий, отражающих соответствующие существенные свойства этого явления (объекта). Так, например, вместо реальных материальных тел в теоретической механике рассматривают такие их абстрактные модели, как материальная точка, абсолютно твердое тело или сплошная изменяемая среда. При этом абстрагируются от учета в первом случае формы и размеров тела, во втором – его деформацией, а в третьем – молекулярной структурой вещества. Однако только после построения механики такого рода моделей, можно переходить к разработке методов, позволяющих изучать с пригодной для практики точностью равновесие и движение конкретных реальных тел.

Глава 1.
СТАТИКА

1.1. Основные понятия и задачи статики

Статикой называется раздел механики, изучающий силы и условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием понимают состояние покоя тела по отношению к другим телам.

Абсолютно твердым называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого с течением времени не меняется.

В действительности все тела под влиянием внешних воздействий в той или иной мере изменяют свои размеры и форму (деформируются). Однако на практике материалы и элементы конструкций подбирают с таким расчетом, чтобы их деформации были минимальны. Тогда деформациями можно пренебречь, и считать все тела абсолютно твердыми. *Абсолютно твердым* называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого с течением времени не меняется.

Состояние равновесия или движения твердого тела зависит от характера его взаимодействий с другими телами. Величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется *силой.* Геометрически силу можно представить в виде вектора. Длина вектора выражает в выбранном масштабе *величину* (модуль) силы, направление вектора соответствует *направлению действия* силы, точка A на рис. 1 является *точкой приложения* силы. Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Основной единицей измерения силы в Международной системе единиц (СИ), которой мы будем пользоваться, является 1 Ньютон (1 Н).

Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы.*

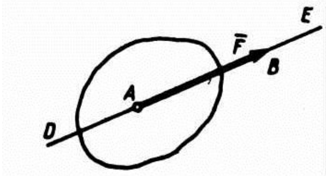


Рис. 1

Системой сил будем называть совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело (или тела). Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, система сил называется *плоской,* а если эти линии действия не лежат в одной плоскости,— *пространственной.* Кроме того, силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися,* а силы, линии действия которых параллельны друг другу,— *параллельными.*

Если одну систему сил, действующих, на тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом его состояния покоя или движения, то такие две системы сил называются *эквивалентными.*

Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется *уравновешенной* или *эквивалентной нулю.*

Если некоторая система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется *равнодействующей*.

Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется *уравновешивающей* силой.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной.* Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называют *распределенными.*

Основными задачами статики являются: 1) приведение данной системы сил к простейшему виду; 2) определение условий равновесия тел под действием различных систем сил.

Решать задачи статики можно или путем соответствующих геометрических построений (геометрический и графический методы), или с помощью численных расчетов (аналитический метод).

1.2. Аксиомы статики

В основе статики лежат следующие аксиомы, которые являются обобщением многочисленных опытных данных и следствием общих законов механики.

Аксиома 1. *Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1=F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны* (рис. 2).

Аксиома 2. *Действие данной системы сил на тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять любую уравновешенную систему сил.*

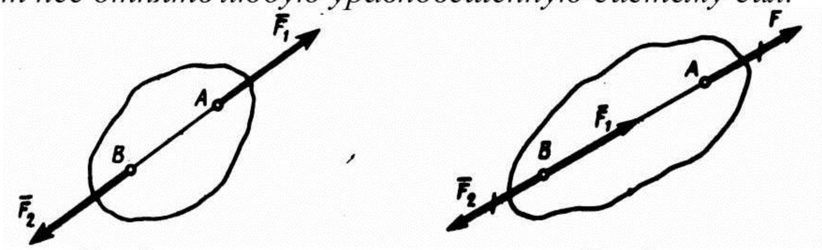


Рис.2 **Рис.3**

Следствие: *действие силы на тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.*

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке *A* сила $\overline{F}$ (рис. 3). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку *B* и приложим в ней две уравновешенные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, такие, что $\overline{F}_1=\overline{F}$ и $\overline{F}_2=-\overline{F}$. От этого действие силы $\overline{F}$ на тело не изменится. Но силы $\overline{F}$ и $\overline{F}_2$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело будет действовать только одна сила $\overline{F}_1$, равная $\overline{F}$, но приложенная в точке *B*.

Аксиома 3. (правило параллелограмма) *Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.*

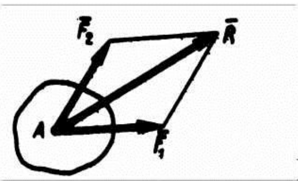


Рис. 4

Вектор $\overline{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис. 4), называется *геометрической суммой векторов* $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

В дальнейшем следует различать понятия суммы сил и их равнодействующей.

Аксиома 4. (третий закон Ньютона) *При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположное по направлению противодействие.*

Если тело *A* действует на тело *B* с некоторой силой $\overline{F}$, то одновременно тело *B* действует на тело *A* с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но в противоположную сторону силой $\overline{F}'=-\overline{F}$ (рис. 5). Заметим, что силы $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, как приложенные к разным телам, не образуют уравновешенную систему сил.

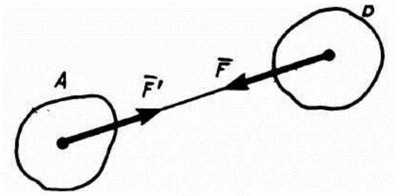


Рис.5

Аксиома 5. (принцип отвердевания) *Равновесие деформируемого тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если его считать отвердевшим*.

Принцип отвердевания широко используется в инженерных расчетах. Он позволяет при составлении условий равновесия рассматривать любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь и т. п.) или любую изменяемую конструкцию как абсолютно жесткие и применять к ним методы статики твердого тела.

1.3. Связи и их реакции

Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным.*

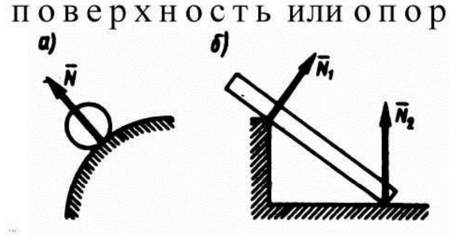
Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют *связью.*

Тело, стремясь под действием приложенных сил осуществить перемещение, которому препятствует связь, будет действовать на нее с некоторой силой, называемой *силой давления на связь.* Одновременно по закону о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. *Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции связи* или просто *реакцией связи.*

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции такой связи тоже наперед неизвестно и должно определяться в результате решения задачи.

Правильное определение направлений реакций связей играет при решении задач механики очень важную роль. Рассмотрим, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

1. Гладкая поверхность или опора.



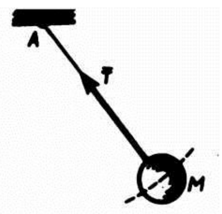


Рис.6 **Рис.7**

Реакция $\overline{N}$ *направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке* (рис. 6*а*). Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 6, *б),* то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

2. Нить. *Реакция* $\overline{T}$ *натянутой нерастяжимой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса* (рис.7).

3. Цилиндрический неподвижный шарнир.

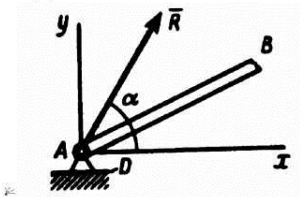


Рис.8

Цилиндрический шарнир осуществляет такое соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси, называемой *осью шарнира*. Если тело *AB* прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре *D* (рис. 8), то точка *A* тела не может при этом переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, *реакция* $\overline{R}$ *цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира,* т. е. в плоскости *Axy.* Для силы $\overline{R}$ в этом случае неизвестны ни ее модуль, ни направление.

4. Цилиндрический подвижный шарнир. Если основание цилиндрического шарнира может без трения скользить по опорной плоскости, то шарнир называют подвижным. В этом случае реакция определяется так же, как и в случае 1.

5. Сферический шарнир и подпятник.

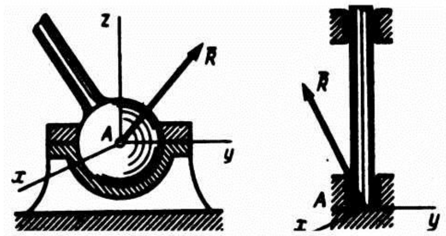


Рис.9

В этих случаях направление реакции неопределенно в пространстве.

Для решения задач статики огромную роль играет следующее очевидное утверждение.

Аксиома 6. (аксиома связи) Всякое тело можно считать свободным, если отбросить связи и заменить их соответствующими реакциями.

1.4. Геометрический способ сложения сил

Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, называют *главным вектором*. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей. Для многих систем сил равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить всегда.

1. *Сложение двух сил*. Геометрическая сумма $\overline{R}$ двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ находится по правилу параллелограмма (рис. 10, а) или построением силового треугольника (рис. 10, б). Если угол между силами равен α, то модуль R и углы β, γ, которые сила $\overline{R}$ образует со слагаемыми силами, определяются по формулам:

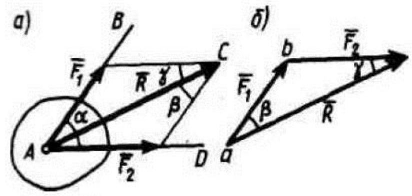


Рис. 10

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}\,, \qquad (1)$$

$$F_1/\sin\gamma = F_2/\sin\beta = R/\sin\alpha\,. \qquad (2)$$

2. *Сложение системы сил.* Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n$ (рис. 11, *а),* откладываем от произвольной точки O (рис. 11, *б)* вектор $\overline{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\overline{F}_1$, от точки a — вектор $\overline{ab}$, изображающий силу $\overline{F}_2$, от точки b — вектор $\overline{bc}$, изображающий силу $\overline{F}_3$, и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор $\overline{mn}$, изображающий силу $\overline{F}_n$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор $\overline{On}=\overline{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\ldots+\overline{F_n} \text{ или } \overline{R}=\sum\overline{F_к}\,. \qquad (3)$$

3. *Равнодействующая сходящихся сил.* Рассмотрим систему сходящихся сил, т. е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке

(рис. 11, *а*). Так как сила, действующая на абсолютно твердое тело, является вектором скользящим, то система сходящихся сил эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 11, *а* в точке *A*).

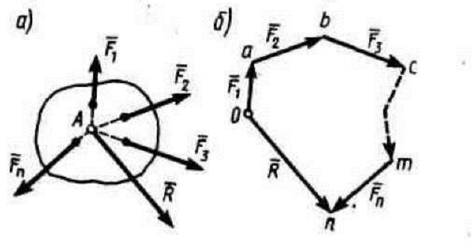


Рис. 11

Последовательно применяя аксиому параллелограмма, придем к выводу, что *система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке пересечения их линий действия.*

4. *Разложение сил.* Разложить данную силу на несколько составляющих — значит найти такую систему нескольких сил, для которой данная сила является равнодействующей. Рассмотрим частный случай *разложения силы по двум заданным направлениям.* Задача сводится к построению такого параллелограмма, у которого разлагаемая сила является диагональю, а стороны параллельны заданным направлениям. Например, на рис. 10 показано, как сила $\overline{R}$ разлагается по направлениям *AB* и *AD* на силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$— составляющие силы $\overline{R}$.

1.5. Аналитический способ задания и сложения

Аналитический метод решения задач статики основывается на понятии о проекции силы на ось. *Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси.* Если этот угол острый, то проекция положительна, если тупой, то отрицательна. *Если сила перпендикулярна оси,* то *ее проекция на ось равна нулю.* Для сил, изображенных на рис.12

$$F_x=F\cos\alpha=ab,\ \ Q_x=Q\cos\alpha_1=-Q\cos\varphi=-de,\ \ P_x=0. \qquad (4)$$

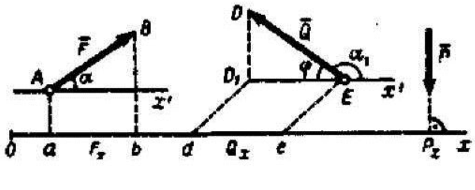


Рис.12

Для аналитического задания силы необходимо выбрать систему координатных осей O_{xyz}, по отношению к которой будет определяться направление силы в пространстве. Вектор, изображающий силу $\overline{F}$, можно построить, если известны модуль *F* этой силы и углы *α, β, γ,* которые сила образует с координатными осями.

Таким образом, величины F, α, β, γ и задают силу $\overline{F}$. Точка A приложения силы должна быть задана отдельно ее координатами x, y, z.

Для решения задач механики удобнее задавать силу ее проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси. Зная эти проекции, можно определить модуль силы и углы, которые она образует с координатными осями

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\,,\;\; \cos\alpha=F_x/F,\; \cos\beta=F_y/F,\;\; \cos\gamma=F_z/F. \tag{5}$$

Если все рассматриваемые силы расположены в одной плоскости, то каждую из сил можно задать ее проекциями на две оси Ox и Oy. Тогда

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\,;\;\; \cos\alpha=F_x/F,\;\; \cos\beta=F_y/F. \tag{6}$$

Аналитический способ сложения сил. Переход от зависимостей между векторами к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы геометрии: *проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.* Согласно этой теореме, если $\overline{R}$ есть сумма сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, . . ., $\overline{F}_n$, т. е. $\overline{R}=\sum\overline{F}_k$, то

$$R_x=\sum F_{kx}\,,\;\; R_y=\sum F_{ky}\,,\; R_z=\sum F_{kz}\,. \tag{7}$$

Зная R_x, R_y и R_z, по формулам (5) находим

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\,, \tag{8}$$

$$\cos\alpha=R_x/R,\; \cos\beta=R_y/R,\; \cos\gamma=R_z/R.$$

Формулы (7), (8) и позволяют решить задачу о сложении сил аналитически.

Для сил, расположенных в одной плоскости, соответствующие формулы принимают вид

$$R_x=\sum F_{kx}\,,\; R_y=\sum F_{ky}\,, \tag{9}$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}\,,\; \cos\alpha=R_x/R,\; \cos\beta=R_y/R.$$

В случае, когда силы заданы их модулями и углами с осями, то для применения аналитического метода сложения необходимо предварительно вычислить проекции этих сил на координатные оси.

1.6. Условия равновесия системы сходящихся сил

Очевидно, что для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а следовательно, и главный вектор этих сил были равны нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или в аналитической форме.

1. *Геометрическое условие равновесия.*

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.

2. *Аналитические условия равновесия.* Аналитически модуль главного вектора системы сил определяется формулой

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\,.$$

R обратится в нуль только тогда, когда одновременно $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$, т. е., как это следует из формул (7), когда проекции действующих на тело сил будут удовлетворять равенствам

$$\boxed{\sum F_{kx}=0, \sum F_{ky}=0, \ \sum F_{kz}=0.} \qquad (10)$$

Равенства (10) выражают в аналитической форме условия *равновесия пространственной системы сходящихся сил.*

В случае *плоской системы сходящихся сил* получим два условия равновесия

$$\boxed{\sum F_{kx}=0, \ \ \sum F_{ky}=0\,.} \qquad (11)$$

3. *Теорема о трех силах*. При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой, которая является следствием аксиом 2 и 3. *Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

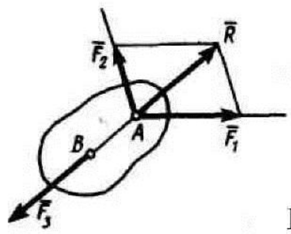


Рис.13

Обратная теорема места не имеет, т. е. данная теорема выражает лишь *необходимое* условие равновесия тела под действием трех сил.

1.7. Момент силы относительно точки

Данное понятие вводится для характеристики вращающего действия силы. Рассмотрим силу $\overline{F}$, приложенную к телу в точке А (рис.14). *Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки (центра) О называется векторное произведение радиус-вектора $\bar{r}$, проведенного из центра О в точку А, где приложена сила, на саму силу.*

$$\overline{m_0}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}\,. \qquad (12)$$

Точку, относительно которой берется момент, называют *центром момента,* а момент силы относительно этой точки — *моментом относительно центра.* Используя геометрические соображения (см.[1]), можно дать и другое определение

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра О называется приложенный в центре О вектор $\overline{m_0}(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля F силы на ее плечо h и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр О и силу, в ту *стороны, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки.*

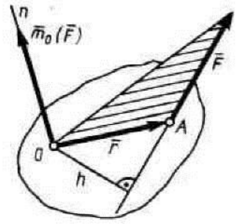


Рис.14

Плечом силы h называется расстояние от центра до линии действия силы.

Когда все силы системы лежат в одной плоскости, их моменты относительно любого центра О, находящегося в той же плоскости, перпендикулярны этой плоскости, т. е. направлены вдоль одной и той же прямой. Тогда, не прибегая к векторной символике, можно направления этих моментов отличить одно от другого знаком и рассматривать момент силы $\overline{F}$ относительно центра O как алгебраическую величину. Такой момент называют *алгебраическим* и обозначают символом $m_0(\overline{F})$. *Алгебраический момент силы* $\overline{F}$ *относительно центра О равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо,* т. е.

$$m_0(\overline{F})=\pm Fh. \qquad (13)$$

При этом момент считается положительным, когда сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и отрицательным— когда по ходу часовой стрелки. Так, для сил, изображенных на рис.15 $m_0(P)=Ph_1$, $m_0(Q)= -Qh_2$.

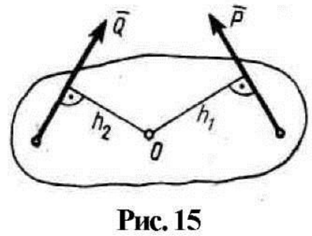


Рис. 15

Отметим следующие свойства момента силы: 1) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия; 2) момент силы относительно центра О равен нулю или когда сила равна нулю, или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).

При вычислении моментов сил часто удобно пользоваться следующей теоремой Вариньона. *Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра.*

$$\overline{m}_0(\overline{R})=\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k). \qquad (14)$$

1.8. Пара сил. Момент пары.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил (рис. 16, а). Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии. В то же время пара сил не имеет равнодействующей.

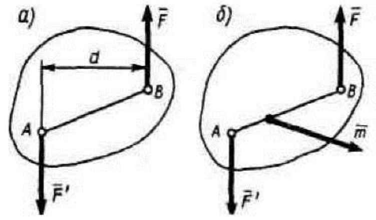


Рис. 16

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары.* Расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом пары.* Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой *моментом пары.*

Моментом пары сил называется вектор $\overline{m}$, *модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки* (рис. 16, б).

Заметим, что момент пары может быть определен и через векторное произведение

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F}. \qquad (15)$$

Однако в отличие от момента силы вектор $\overline{m}$, может быть приложен в любой точке (такой вектор называется *свободным).* Размерность момента пары, как и момента силы, (Н·м).

Моменту пары можно дать и другое выражение: *момент пары равен сумме моментов относительно любого центра O сил, образующих пару,* т. е.

$$\overline{m} = \overline{m}_0(\overline{F}) + \overline{m}_0(\overline{F'}). \qquad (16)$$

Так как точка *O* может быть выбрана произвольно, то *момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой силы.*

В случае плоской системы сил удобно пользоваться *алгебраическим* моментом пары сил

$$m = \pm Fd. \qquad (17)$$

Если принять, что действие пары сил на твердое тело (ее вращательный эффект) полностью определяется значением суммы моментов сил пары относительно любого центра О, то из формулы (16) следует, что *две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны,* т. е. оказывают на тело одинаковое механическое действие. Так как выбор центра *O* произволен, то вектор $\overline{m}$ можно считать приложенным в любой точке, т. е. это вектор свободный. Обычно на чертеже вместо пары изображают полностью ее характеризующий вектор $\overline{m}$. При этом модуль $\overline{m}$ определяет модуль момента пары $m = Fd$, а направление $\overline{m}$ определяет плоскость действия пары и направление поворота в этой плоскости. В случае плоской системы сил достаточно указать направление вращательного действия пары.

Из формулы (16) следует еще, что если на тело действует несколько пар с моментами $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n$, то сумма моментов всех сил, образующих эти пары, относительно любого центра будет равна $\overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \ldots + \overline{m}_n$. Следовательно, вся совокупность этих пар эквивалентна одной паре с моментом $\overline{M} = \sum \overline{m_k}$. Этот результат выражает теорему о сложении пар.

1.9. Условия равновесия произвольной системы сил

Величина $\overline{M}_0$, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра *O,* называется *главным моментом системы сил* относительно этого центра.

Используя введенные понятия можно показать [1], что *любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, заменяется одной силой* $\overline{R}$*, равной главному вектору системы сил и приложенной в некотором центре приведения O, и одной парой с моментом* $\overline{M}_0$*, равным главному моменту системы сил относительно данного центра* (рис.16).

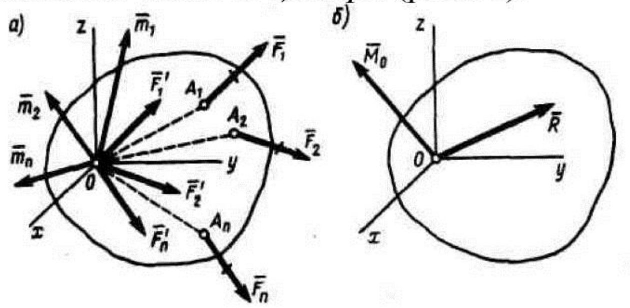


Рис.17

Тогда очевидно, что *для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю,* т. е. чтобы выполнялись условия

$$\overline{R} = \sum \overline{F_к} = 0, \qquad (18)$$

$$\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) = 0.$$

1.10. Момент силы относительно оси

Проекция вектора $\overline{m_0}\,(\overline{F})$*, т. е. момента силы F относительно центра O, на какую-нибудь ось z, проходящую через этот центр, называется моментом силы F относительно оси z,* т. е.

$$m_z(F) = [\overline{m_0}\,(\overline{F})]_z \text{ или } m_z(F) = |\overline{m_0}\,(\overline{F})|\cos\gamma, \qquad (19)$$

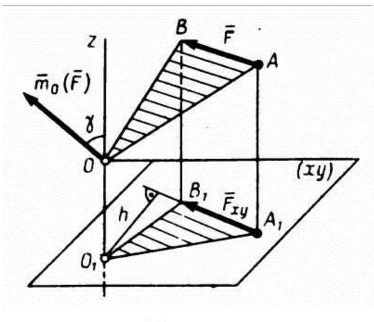


Рис.18

где $m_z(F)$ — момент силы $\overline{F}$ относительно оси z*;* γ — угол между вектором $m_0(F)$ и осью *z.* Из определения следует, что $m_z(F)$*,* как проекция вектора на ось, является *величиной алгебраической.*

Из рисунка видно, что *момент силы* $\overline{F}$ *относительно оси z равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси z, взятому относительно точки* O_1 *пересечения оси с этой плоскостью.*

$$m_z(F) = \pm F_{xy}h. \qquad (20)$$

Этот результат может служить другим определением понятия момента силы относительно оси.

Механический смысл величины $m_z(F)$ состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы $\overline{F}$, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси z.

Для вычисления $m_z(F)$ необходимо (рис. 19):

1) провести произвольную плоскость ху, перпендикулярную оси z;
2) спроектировать силу $\overline{F}$ на эту плоскость и найти величину F_{xy};

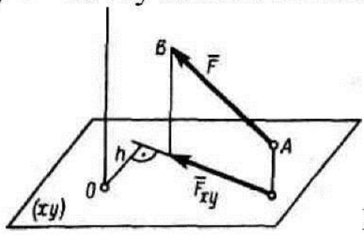


Рис.19

3) опустить из точки пересечения оси с плоскостью (на рис.18 это точка O) перпендикуляр на линию действия F_{xy} и найти его длину h;
4) вычислить произведение $F_{xy}h$;
5) определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду, что *момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.*

Разложим силу $\overline{F}$, приложенную в точке A с координатами x, y, z, на составляющие F_x, F_y, F_z, . Тогда, используя правила вычисления векторного произведения, получим следующие *аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей*

$$\begin{aligned} m_x(F) &= yF_z — zF_y, \\ m_y(F) &= zF_x — xF_z, \\ m_z(F) &= xF_y — yF_x. \end{aligned} \qquad (21)$$

С помощью (21) моменты можно вычислять, зная проекции силы и координаты точки ее приложения.

Отметим еще один результат: поскольку левые части равенств (26) являются одновременно проекциями вектора $\overline{m_0}(\overline{F})$ на координатные оси, то с помощью этих равенств можно найти модуль момента $\overline{m_0}(\overline{F})$ по формуле

$$m_0(F) = \sqrt{[m_x(F)]^2 + [m_y(F)]^2 + [m_z(F)]^2}\,.$$

1.11. Решение задач статики

В статике, как правило, решаются задачи одного из следующих двух типов: 1) задачи, в которых известны (полностью или частично) действующие на тело силы и требуется найти, в каком положении или при каких соотношениях между действующими силами тело будет находиться в равновесии; 2) задачи, в которых известно, что тело заведомо находится в равновесии и требуется найти, чему равны при этом все или некоторые из действующих на тело сил. Реакции связей являются величинами, наперед неизвестными во всех задачах статики.

Процесс решения задач статики *аналитическим методом* можно свести к следующему алгоритму.

1. *Выбрать тело (или точку), которое должно находиться в равновесии.*
2. *Изобразить действующие на это тело активные силы.*
3. *Отбросить связи, заменив их соответствующими реакциями, а распределенные силы их равнодействующими.*
4. *Выяснить тип системы сил, действующих на тело, и записать соответствующие условия равновесия.*
5. *Выбрать систему координат. Спроектировать условия равновесия на координатные оси* (составить уравнения равновесия).
6. *Проанализировать полученную систему уравнений.* При необходимости добавить дополнительные условия, вытекающие из геометрических соображений.
7. *Определить искомые величины, произвести проверку правильности решения и проанализировать полученные результаты.* Все расчеты при решении задач рекомендуется, как правило, производить в общем виде (алгебраически). Тогда для искомых величин будут получаться формулы, дающие возможность проанализировать найденные результаты. Кроме того, решение в общем виде позволяет иногда обнаружить сделанные ошибки путем проверки размерностей.

Геометрический метод. Им удобно пользоваться, когда общее число действующих на тело сил (и заданных, и искомых) равно трем. При равновесии треугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым (построение следует начинать с заданной силы). Решая этот треугольник, найдем искомые величины.

1.12. Трение. Законы трения скольжения

При стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения.*

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые *законами трения* скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом.

1.При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения, которая может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного значения $F_{пр}$ (сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие на тело силы стремятся его сдвинуть).

2. Предельная сила трения численно равна произведению *коэффициента трения покоя* на нормальное давление или нормальную реакцию

$$F_{пр}=f_0N. \qquad (22)$$

Коэффициент трения покоя f_0 — величина безразмерная; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность и т. п.). Приведем значения коэффициента трения f_0 для некоторых материалов: дерево по дереву 0,4—0,7; металл по металлу 0,15—0,25; сталь по льду 0,027.

3. Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Из первых двух законов следует, что при равновесии $F \leq F_{пр}$ или

$$F \leq f_0 N. \qquad (23)$$

Чему конкретно равна сила трения, можно установить, только решив соответствующую задачу. Величине $F_{пр}$ сила трения будет равна лишь тогда, когда действующая на тело сдвигающая сила достигает такого значения, что при малейшем ее увеличении тело начинает двигаться. Равновесие, имеющее место, когда сила трения равна $F_{пр}$, называют *предельным равновесием.*

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную движению, и равна произведению *динамического коэффициента трения* на нормальное давление

$$F = fN. \qquad (24)$$

Динамический коэффициент трения скольжения f также является величиной безразмерной и определяется опытным путем. Значение коэффициента f зависит не только от материала и состояния поверхностей, но и в некоторой степени от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости коэффициент f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение. Причем, как правило, $f < f_0$.

1.13. Равновесие при наличии трения

Реакция реальной (шероховатой) связи слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\overline{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\overline{F}$. Следовательно, полная реакция $\overline{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол.

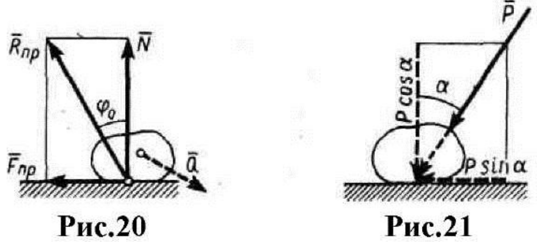


Рис.20 **Рис.21**

При изменении силы трения от нуля до $F_{пр}$ сила R изменяется от N до $R_{пр}$ а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ_0 (рис.20). Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется *углом трения.* Из рисунка видно, что

$$tg\, \varphi_0 = F_{пр}/N.$$

Так как $F_{пр} = f_0 N$, то

$$tg\, \varphi_0 = f_0. \qquad (25)$$

При равновесии полная реакция $\overline{R}$ в зависимости от сдвигающих сил может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ_0.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу *P,* образующую угол α с нормалью (рис.21), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \sin \alpha$ будет больше $F_{пр}= f_0 P \cos \alpha$. Однако неравенство $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$, в котором $f_0 = tg\, \varphi_0$, выполняется только при $tg\, \alpha > tg\, \varphi_0$, т. е. при $\alpha > \varphi_0$. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол а, меньший угла трения φ_0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.

Изучение равновесия тел с учетом трения скольжения можно свести к рассмотрению предельного равновесия, которое имеет место, когда сила трения равна своему предельному значению $F_{пр}$.

При аналитическом решении реакцию шероховатой связи изображают двумя ее составляющими $\overline{N}$ и $\overline{F}_{пр}$. Затем составляют обычные уравнения равновесия и присоединяют к ним равенство $F_{пр}=f_0 N$. Из полученной таким путем системы уравнений и определяют искомые величины.

Если в задаче надо определить значение силы трения *F,* когда равновесие не является предельным и $F \neq F_{пр}$, то, эту силу *F* следует считать неизвестной величиной и находить из соответствующих уравнений.

1.14. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса *R* и веса *P,* лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу *Q* (рис.22, *а),* меньшую $F_{пр}$. Тогда в точке *A* возникает сила трения *F,* численно равная *Q,* которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию *N* тоже приложенной в точке *A,* то она уравновесит силу *P,* а силы *Q* и *F* образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы *Q*.

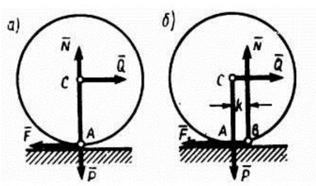


Рис.22

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически вследствие деформаций тел касание их происходит вдоль некоторой площадки *AB* (рис.22, б). При действии силы *Q* интенсивность давления у края *A* убывает, а у края *B* возрастает. В результате реакция *N* оказывается смещенной в сторону действия силы *Q*. С увеличением *Q* это смещение растет до некоторой предельной величины *k.* Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара $Q_{пр}$, *F* с моментом $Q_{пр} R$ и уравновешивающая ее пара *N, P* с моментом *Nk.* Из равенства моментов находим $Q_{пр}R=Nk$ или

$$Q_{пр}=(k/R)N. \qquad (26)$$

Пока $Q<Q_{пр}$, каток находится в покое; при $Q>Q_{пр}$ начинается качение.

Входящая в формулу (26) линейная величина k называется *коэффициентом трения качения.* Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Приведем приближенные значения этого коэффициента для некоторых материалов: Дерево по дереву - 0,05÷0,08; Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)-0,005; Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник) - 0,001. Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, подшипники и т.д.).

1.15. Центр тяжести твердого тела

Если каждой точке некоторой области соответствует определенное значение некоторой физической величины (скалярной, векторной или тензорной), то говорят, что в данной области задано *поле* (скалярное, векторное или тензорное).

На каждую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, которую называют *силой тяжести.* Эти силы образуют векторное поле - *поле сил тяжести.*

Равнодействующую сил тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, действующих на частицы данного тела, обозначим $\overline{P}$ (рис.23). Модуль этой силы в статике называют *весом тела*

$$\overline{P} = \sum \overline{P}_k.$$

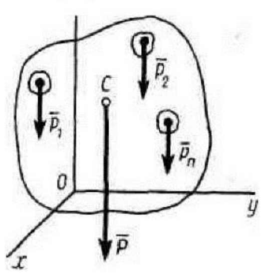


Рис.23

При любом повороте тела силы $\overline{P}_k$ остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельными друг другу, изменяется только их направление по отношению к телу. Следовательно, равнодействующая $\overline{P}$ сил $\overline{P}_k$ будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C, являющуюся центром параллельных сил тяжести $\overline{P}_k$. Эта точка называется *центром тяжести тела.* Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, действующих на частицы данного тела, при любом положении тела в пространстве.*

Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил, определяются формулами

$$x_C=\frac{1}{P}\sum p_k x_k\,,\ y_C=\frac{1}{P}\sum p_k y_k\,,\ z_C=\frac{1}{P}\sum p_k z_k\,, \qquad (27)$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точек приложения сил тяжести p_k, действующих на частицы тела.

Отметим, что согласно определению центр тяжести — это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

1.16. Координаты центра тяжести однородного тела

Для однородного тела вес p_k любой его части пропорционален объему υ_k этой части: $p_k = \gamma\, \upsilon_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела, т. е. $P = \gamma V$, где γ — вес единицы объема.

Подставив эти значения P и p_k в формулы (27), получим

$$x_c = \frac{1}{V}\sum \upsilon_k x_k,\quad y_c = \frac{1}{V}\sum \upsilon_k y_k,\quad z_k = \frac{1}{V}\sum \upsilon_k z_k. \tag{28}$$

Как видно, положение центра тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит.

Если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_c = \frac{1}{S}\sum S_k x_k,\quad y_c = \frac{1}{S}\sum S_k y_k. \tag{29}$$

где S — площадь всей пластины; s_k — площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами (29), называют *центром тяжести площади S.*

Точно так же получаются формулы для координат *центра тяжести линии:*

$$x_c = \frac{1}{L}\sum l_k x_k,\quad y_c = \frac{1}{L}\sum l_k y_k,\quad z_k = \frac{1}{L}\sum l_k z_k, \tag{30}$$

где L — длина всей линии; l_k — длины ее частей.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1.*Симметрия*. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.

Из свойств симметрии следует, что центр тяжести однородного круглого кольца, круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара и других однородных тел, имеющих центр симметрии, лежит в геометрическом центре (центре симметрии) этих тел.

2. *Разбиение*. Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам (29) — (32). При этом число слагаемых в каждой из сумм будет равно числу частей, на которые разбито тело. Если тело содержит полость или отверстие, то соответствующее слагаемое будет отрицательным.

Глава 2.
КИНЕМАТИКА
2.1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета причин, вызывающих эти движения.

Кинематика представляет собой, с одной стороны, введение в динамику, так как установление основных кинематических понятий и зависимостей необходимо для изучения движения тел с учетом действия сил. С другой стороны, методы кинематики имеют и самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах.

Механическое движение происходит в пространстве и во времени. Пространство рассматривается как обычное трехмерное евклидово пространство. Время полагают ни с чем не связанным и протекающим равномерно. За единицу длины при измерении расстояний принимается 1м, за единицу времени - 1с.

В общем случае различные точки твердого тела совершают разные движения. Поэтому возникает необходимость сначала изучить движение отдельных точек тела. Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь какое-нибудь неподвижное тело и связанную с ним систему координатных осей, которую называют *системой отсчета*. Изображать систему отсчета принято в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны). В кинематике система отсчета выбирается произвольно, и в отличие от динамики все кинематические зависимости, полученные при изучении движения в какой-нибудь одной системе отсчета, будут справедливы и в любой другой системе отсчета.

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было каким-то образом задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) — значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Установление математических способов задания движения точек или тел является одной из важных задач кинематики. Поэтому изучение движения любого объекта начинают с установления способов задания этого движения.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения, установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение (траекторию, скорость, ускорение).

Изучение кинематики начинают с изучения движения простейшего объекта — точки, а затем переходят к изучению кинематики твердого тела.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называют *траекторией* точки. По виду траектории движения принято делить на прямолинейные и криволинейные.

2.2. Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов: 1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. В е к т о р н ы й с п о с о б з а д а н и я д в и ж е н и я т о ч к и. Пусть точка M движется в некоторой неподвижной системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\bar{r}$. Радиус-вектором точки называется вектор, проведенный из начала координат в заданную точку (рис.1).

При движении точки M вектор $\bar{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\bar{r}$ является переменным вектором, зависящим от аргумента t:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1}$$

Равенство (1) и определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор $\bar{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, т. е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Аналитически вектор задается его проекциями на координатные оси. В прямоугольных декартовых координатах для вектора $\bar{r}$: $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ (рис. 1), где x, y, z — декартовы координаты точки. Тогда, если ввести единичные векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ координатных осей, получим для $\bar{r}$ выражение

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \tag{2}$$

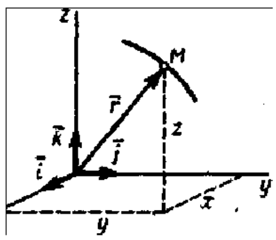


Рис.1

2. К о о р д и н а т н ы й с п о с о б з а д а н и я д в и ж е н и я т о ч к и. Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x, y, z, которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t). \tag{3}$$

Уравнения (3) представляют собой *уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах*. Они и определяют закон движения точки при координатном способе задания.

Если движение точки происходит все время в одной и той же плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость O_{xy}, получим в этом случае два уравнения движения

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t). \tag{4}$$

Наконец, при прямолинейном движении точки, если вдоль ее траектории направить координатную ось *Ox,* движение будет определяться одним уравнением

$$x=f(t). \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) представляют собой одновременно уравнения траектории точки **в** параметрической форме, где роль параметра играет время *t.* Исключив из уравнений движения время *t,* можно найти уравнение траектории в обычной форме, т. е. в виде зависимости между координатами точки.

3. Естественный способ задания движения точки. Данным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая *AB* является траекторией точки *M* при ее движении относительно системы отсчета *Oxyz* (рис. 2). Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку *O'*,

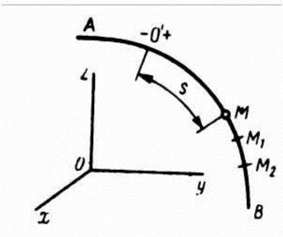


Рис.2

которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета. Тогда положение точки *M* на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой *s,* которая равна расстоянию от точки *O'* до точки *M,* измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком. При движении точка *M* перемещается в положения M_1, M_2,. . ., следовательно, расстояние *s* будет с течением времени изменяться. Чтобы знать положение точки *M* на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s=f(t). \tag{6}$$

Уравнение (6) и выражает *закон движения точки M* вдоль траектории.

Таким образом, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо задать: 1) траекторию точки; 2) начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета; 3) закон движения точки вдоль траектории в виде $s=f(t)$.

2.3. Определение скорости и ускорения точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая *скоростью точки.* Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится в момент времени *t* в положении *M,* определяемом радиус-вектором $\bar{r}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1, определяемое радиус-вектором $\bar{r}_1$ (рис. 3). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overline{MM_1}$, который называют *вектором перемещения.* Этот вектор направлен по хорде, если точка движется, криволинейно, и вдоль самой траектории *AB*, когда движение является прямолинейным (рис. 3).

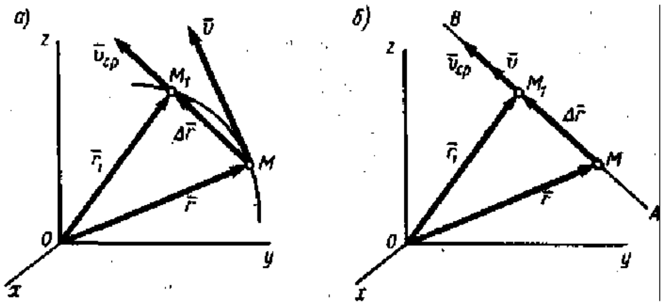


Рис.3

Из треугольника OMM_1 видно, что $\bar{r} + \overline{MM_1} = \bar{r}_1$; следовательно,

$$\overline{MM_1} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}.$$

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую *средней скоростью точки* за промежуток времени Δt:

$$\bar{v}_{cp} = \overline{MM_1} / \Delta t = \Delta\bar{r} / \Delta t. \qquad (7)$$

Очевидно, что чем меньше будет промежуток времени Δt, для которого вычислена средняя скорость, тем величина v_{cp} будет точнее характеризовать движение точки. Чтобы получить точную характеристику движения, вводят понятие о *мгновенной скорости точки* в данный момент времени.

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина, к которой стремится средняя скорость $\bar{v}_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}_{cp}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}. \qquad (8)$$

Предел отношения $\Delta\bar{r}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$ представляет собой первую производную от вектора $\bar{r}$ по аргументу t и обозначается, как и производная от скалярной функции

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (9)$$

Итак, *вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиус-вектора точки по времени.*

Так как предельным направлением секущей MM_1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения. При прямолинейном движении вектор скорости $\bar{v}$ все время направлен вдоль прямой, по которой движется точка, и может изменяться лишь численно. При криволинейном движении кроме числового значения все время изменяется и направление вектора скорости точки.

Размерность скорости м/с или км/ч.

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость $\overline{\upsilon}$, а в момент t_1 приходит в положение M_1 и имеет скорость $\overline{\upsilon}_1$ (рис. 4). Тогда за промежуток времени $\Delta t=t_1—t$ скорость точки получает приращение $\Delta\overline{\upsilon}=\overline{\upsilon}_1-\overline{\upsilon}$. Для построения вектора $\Delta\overline{\upsilon}$ отложим от точки M вектор, равный $\overline{\upsilon}_1$ и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\overline{\upsilon}_1$, а одной из сторон $\overline{\upsilon}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta\overline{\upsilon}$. Заметим, что вектор $\Delta\overline{\upsilon}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\overline{\upsilon}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет *вектор среднего ускорения* точки за этот промежуток времени

$$\overline{a_{ср}} = \Delta\overline{\upsilon}/\Delta t$$

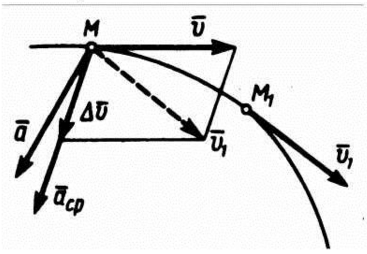


Рис.4

Ускорением точки в данный момент времени называется векторная величина, к которой стремится среднее ускорение при стремлении промежутка времени Δt к нулю

$$\overline{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{d\overline{\upsilon}}{dt}$$

или, с учетом равенства (8),

$$\overline{a}=\frac{d\overline{\upsilon}}{dt}=\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (10)$$

Следовательно, *вектор ускорения точки в данный момент времени равен, первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.* Размерность ускорения м/с^2.

Вектор ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta\overline{\upsilon}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

2.4. Скорость и ускорение точки при координатном способе задания ее движения

Найдем, как вычисляются скорость и ускорение точки, если ее движение задано уравнениями (3).

Формулы (8) и (10), определяющие значения $\overline{\upsilon}$ и $\overline{a}$, содержат производные по времени от векторов $\overline{r}$ и $\overline{\upsilon}$. В равенствах, содержащих производные от векторов. Переход к зависимостям между их проекциями осуществляется с помощью следующей теоремы: *проекция производной от вектора на ось равна производной от проекции данного вектора на ту же ось,* т. е.

$$\text{если} \quad \bar{q} = \frac{d\bar{p}}{dt}, \quad \text{то} \quad q_x = \frac{dp_x}{dt}, q_y = \frac{dp_y}{dt}, q_z = \frac{dp_z}{dt}. \tag{11}$$

Вектор скорости точки $\bar{\upsilon} = d\bar{r}/dt$. Отсюда на основании формул (11), учитывая, что $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, находим

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

или

$$\upsilon_x = \dot{x}, \ \upsilon_y = \dot{y}, \ \upsilon_z = \dot{z}, \tag{12}$$

где точка над буквой означает дифференцирование по времени. Таким образом, *проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.*

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т. е. углы α, β, γ, которые вектор $\bar{\upsilon}$ образует с координатными осями)

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \\ \cos\alpha = \upsilon_x/\upsilon, \cos\beta = \upsilon_y/\upsilon, \cos\gamma = \upsilon_z/\upsilon. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Вектор ускорения точки $\bar{a} = d\bar{\upsilon}/dt$. Отсюда на основании формул (11) получаем

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

или

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}. \tag{14}$$

Т. е. *проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени.* Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \cos\alpha_1 = a_x/a, \cos\beta_1 = a_y/a, \cos\gamma_1 = a_z/a, \end{array}\right\} \tag{15}$$

где α_1, β_1, γ_1 — углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

В случае движения, происходящего в одной плоскости, во всех формулах должна быть отброшена проекция на ось z.

В случае же прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x = f(t)$, будет

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{16}$$

2.5. Скорость и ускорение при естественном способе задания движения точки

Пусть задана траектория точки и закон ее движения вдоль этой траектории в виде $s=f(t)$.

В этом случае значения векторов $\bar{\upsilon}$ и $\bar{a}$ определяют по их проекциям не на оси системы отсчета *Oxyz*, а на подвижные оси $M\tau nb$, имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею (рис. 5). Эти оси, называемые *осями естественного трехгранника,* направлены следующим образом: ось $M\tau$ — по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния *s*; ось M_n — по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось M_b — перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей. Нормаль M_n, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью,* а перпендикулярная ей нормаль M_b — *бинормалью.*

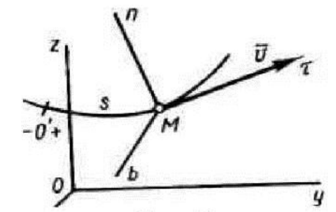


Рис.5

Очевидно, что скорость точки будет определяться в осях $M\tau nb$ только одной проекцией υ_τ. Условимся в дальнейшем обозначать υ_τ символом υ, опуская индекс τ, и называть *υ алгебраическим значением скорости.* Модуль скорости во всех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, будем тоже обозначать символом υ.

Если за промежуток времени Δt точка совершит вдоль дуги траектории перемещение $M\breve{}M=\Delta s$ (см. рис. 2), то численно средней скоростью точки за этот промежуток времени будет $\upsilon_{cp} = \Delta s/\Delta t$ и в пределе найдем, что

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \tag{17}$$

Таким образом, *числовое значение скорости точки в данный момент времени равно первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s этой точки по времени.*

Ускорение точки $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M\tau n$. Следовательно, проекция вектора $\bar{a}$ на бинормаль M_b равна нулю (a_b=0). Можно показать (см.[1]), что тогда

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{\rho}\right)^2},$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad a_\text{n} = \frac{\upsilon^2}{\rho}, \tag{18}$$

где ρ – *радиус кривизны траектории* в данной точке. В случае движения по окружности радиус кривизны равен ее радиусу, а при прямолинейном движении $\rho \to \infty$.

Величины a_τ и a_n называют *касательным* и *нормальным* ускорениями точки.

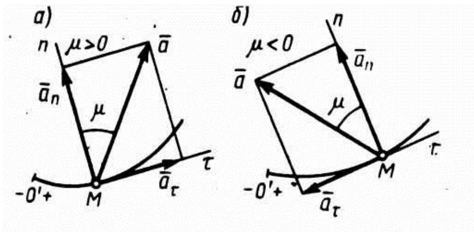


Рис. 6

Составляющая $\bar{a}_n$ всегда направлена в сторону вогнутости кривой, так как всегда $a_n>0$, а составляющая $\bar{a}_\tau$ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси $M\tau$ в зависимости от знака проекции a_τ.

2.6. Частные случаи движения точки

Используя полученные результаты, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho \to \infty$. Тогда $a_n = v^2/\rho \to 0$ и полное ускорение точки равно касательному ускорению

$$a = a_\tau = dv/dt. \qquad (19)$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что *касательное ускорение характеризует изменение числового значения скорости.*

2. Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое движение точки, при котором числовое значение скорости все время остается постоянным: $v=const$. Тогда $a_\tau = dv/dt=0$ и полное ускорение точки равно нормальному ускорению

$$a = a_n = v^2/\rho. \qquad (20)$$

Вектор ускорения $\bar{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что *нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.*

Найдем закон равномерного криволинейного движения. Из формулы (17) имеем $ds=vdt$. Пусть в некоторый начальный момент времени ($t=0$) точка находится от начала отсчета на расстоянии s_0. Тогда, беря от левой и правой частей равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получаем

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t \upsilon\, dt, \quad S - S_0 = \upsilon t,$$

так как $\upsilon=const$. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения точки в виде

$$s=s_0+\upsilon t. \qquad (21)$$

Если в равенстве (21) положить $s_0=0$, то s даст путь, пройденный точкой за время t.

3. Равномерное прямолинейное движение. В этом случае $a_n=a_\tau=0$, а значит, и $a=0$. Данный случай является единственным, когда полное ускорение точки равно нулю.

4. Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время постоянным: $a_\tau=const$. Найдем закон этого движения, считая, что при $t=0$ $s=s_0$, а $\upsilon=\upsilon_0$, где υ_0 — начальная скорость точки. Согласно (18) $d\upsilon=a_\tau dt$. Так как $a_\tau=const$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\upsilon = \upsilon_0+a_\tau t. \qquad (22)$$

Формулу (22) представим в виде

$$ds/dt=\upsilon_0+a_\tau t \quad \text{или} \quad ds=\upsilon_0 dt+a_\tau t dt.$$

Вторично интегрируя, находим закон равнопеременного криволинейного движения точки

$$s = s_0+ \upsilon_0 t + a_\tau t^2/2. \qquad (23)$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает, то *замедленным*. Так как изменение модуля скорости характеризуется касательным ускорением, то движение будет ускоренным, если величины υ и a_τ имеют одинаковые знаки (угол между векторами $\bar{\upsilon}$ и $\bar{a}$ острый, рис.7, *а*), и замедленным, если разные (угол между $\bar{\upsilon}$ и $\bar{a}$ тупой, рис.7, *б*).

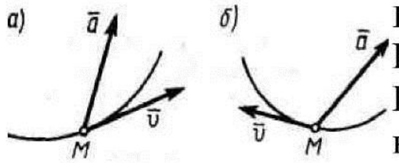


Рис.7

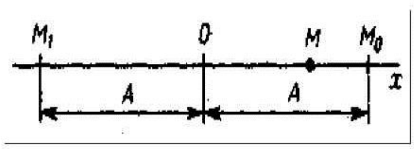


Рис.8

5. Гармонические колебания. Рассмотрим прямолинейное движение точки, при котором ее расстояние x от начала координат O изменяется со временем по закону

$$x=A \cos kt, \qquad (24)$$

где A и k — постоянные величины.

Точка M (рис.8) совершает при этом движении колебания между положениями $M_0(+A)$ и $M_1(—A)$. Колебания, происходящие по закону (24), играют большую роль в технике. Они называются простыми *гармоническими колебаниями.*

Величина *A,* равная наибольшему отклонению точки от центра колебаний О, называется *амплитудой* колебаний.

Легко видеть, что, начиная движение в момент $t=0$ из положения M_0, точка вновь придет в это положение в момент времени t_1, для которого $\cos kt_1=1$, т.е. $kt_1=2\pi$.

Промежуток времени $T=t_1=2\pi/k$, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний.

Беря производные по *t,* находим значения скорости и ускорения точки

$$v=v_x=-Ak\sin kt,\ a=a_x=-Ak^2\cos kt. \qquad (25)$$

Следовательно, в этом движении и скорость, и ускорение точки изменяются с течением времени по гармоническому закону. По знакам v и a легко проверить, что когда точка движется к центру колебаний, ее движение является ускоренным, а когда от центра колебаний,— замедленным.

Аналогичные колебания происходят и при законе $x=A\sin kt$, только движение в этом случае начинается из центра *O.*

Гармонические колебания по закону $s=A\cos kt$ (или $s=A\sin kt$) точка может совершать, двигаясь вдоль любой кривой. Все сказанное о характере движения при этом сохранится с той лишь разницей, что (25) будет определять касательное ускорение точки. Кроме него точка будет иметь еще и нормальное ускорение $a_n=v^2/\rho$.

2.7. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному положению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Например, спарник *AB* (рис. 9) при вращении кривошипов O_1A и O_2B $(O_1A=O_2B)$ движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

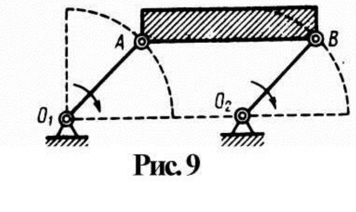


Рис. 9

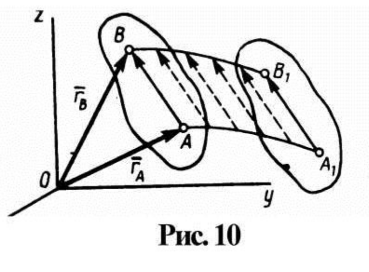


Рис. 10

Теорема 1.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Доказательство.

Рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета $Oxyz$. Выберем в теле две произвольные точки A и B, положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами $\overline{r_A}$ и $\overline{r_B}$ (рис. 10). Проведем вектор $\overline{AB}$, соединяющий эти точки. Тогда

$$\overline{r_A} = \overline{r_B} + \overline{AB}. \qquad \textbf{(26)}$$

При этом длина AB постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление $\overline{AB}$ остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор $\overline{AB}$ во все время движения тела остается постоянным ($\overline{AB}$ $const$). Вследствие этого, траектория точки B получается из траектории точки A ее параллельным смещением на постоянный вектор $\overline{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек A и B продифференцируем обе части равенства (26) по времени. Получим

$$d\overline{r_B}/dt = d\overline{r_A}/dt + d(\overline{AB})/dt.$$

Производная от постоянного вектора $\overline{AB}$ равна нулю. Производные же от векторов $\overline{r_B}$ и $\overline{r_A}$ по времени дают скорости точек A и B. В результате получаем $\overline{\upsilon_A} = \overline{\upsilon_B}$.

Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени, найдем:

$$d\overline{\upsilon_A}/dt = d\overline{\upsilon_B}/dt \quad \text{или} \quad \overline{a_A} - \overline{a_B}.$$

Так как точки A и B были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, *изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематики точки*, которая уже рассмотрена.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\bar{\upsilon}$ называют *скоростью поступательного движения* тела, а ускореннее $\bar{a}$ — *ускорением поступательного движения* тела. Векторы $\bar{\upsilon}$ и $\bar{a}$ можно изображать приложенными к любой точке тела.

Заметим, что понятия о скорости и ускорении тела имеют смысл *только при поступательном движении*. Во всех остальных случаях точки тела движутся с разными скоростями и ускорениями.

2.8. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются неподвижными. Проходящая через неподвижные точки A и B прямая AB называется *осью вращения* (рис. 11). Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны. Остальные точки тела будут описывать окружности.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения полуплоскость I — неподвижную и полуплоскость II, врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (см. рис. 11).

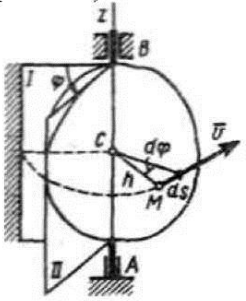


Рис.11

Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями. Измеряют угол φ всегда *в радианах.* Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t, т. е.

$$\varphi = f(t) \qquad (27)$$

Уравнение (27) выражает *закон вращательного движения твердого тела* вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \quad \omega = \dot{\varphi}. \qquad (28)$$

Таким образом, *числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени.* Знак φ определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, $\omega > 0$, а когда по ходу часовой стрелки, то $\omega < 0$. Единицы измерения угловой скорости рад/с.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 12). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

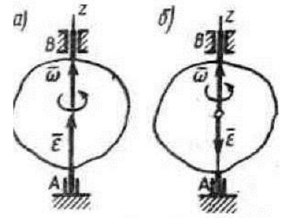


Рис.12

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{ср} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{29}$$

Таким образом, *числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.* Размерность углового ускорения рад/с^2.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется *ускоренным,* а если убывает,— *замедленным.* Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным,— когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора $\bar{\varepsilon}$, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt.$$

Направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\bar{\omega}$, когда тело вращается ускоренно, и противоположно $\bar{\omega}$, при замедленном вращении (рис. 12).

2.9. Равномерное и равнопеременное вращение

Вращение тела называется *равномерным,* если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной (ω=*const*). Из формулы (28) имеем $d\varphi = \omega\, dt$. Отсюда, считая, что в начальный момент времени $t = 0$ угол $\varphi = \varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ, а справа от 0 до t, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{30}$$

Из равенства (30) следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0 = 0$

$$\varphi = \omega t \text{ и } \omega = \varphi / t. \tag{31}$$

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин. При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время $t = 1$ мин = 60 с. Тогда

$$\omega = \pi n / 30 \approx 0{,}1n. \tag{32}$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным (ε=const), то вращение называется *равнопеременным.* Пусть в начальный момент времени $t=0$ угол $\varphi = \varphi_0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$.

Из формулы (29) имеем $d\omega = \varepsilon\, dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую — в пределах от 0 до t, найдем

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{33}$$

Выражение (33) можно представить в виде

$$d\varphi/dt = \omega_0 + \varepsilon t \text{ или } d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon\, t dt.$$

Вторично интегрируя, находим закон равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2 . \qquad (34)$$

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные — равнозамедленным.

2.10. Линейные скорости и ускорения точек вращающегося тела

Рассмотрим некоторую точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см. рис. 14). При вращении данная точка будет описывать окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр C лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M совершает элементарное перемещение $ds=hd\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки

$$v=\frac{ds}{dt}=h\frac{d\varphi}{dt},$$

или

$$v=h\omega . \qquad (35)$$

Скорость v в отличие от угловой скорости тела называют *линейной* скоростью точки M.

Таким образом, *значение линейной скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.*

Направлена скорость по касательной к описываемой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку M.

Для нахождения ускорения точки M воспользуемся формулами

$$a_\tau=dv/dt, \quad a_n=v^2/\rho .$$

В данном случае $\rho=h$. Подставляя значение v из равенства (35) в выражения для a_τ и a_n, получаем

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad a_n = \frac{h^2\omega^2}{h},$$

или окончательно

$$a_\tau = h\varepsilon , \quad a_n = h\omega^2 . \qquad (36)$$

Касательная составляющая ускорения $\overline{a_\tau}$ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при замедленном). Нормальная составляющая $\overline{a_n}$ всегда направлена по радиусу MC к оси вращения (рис. 13).

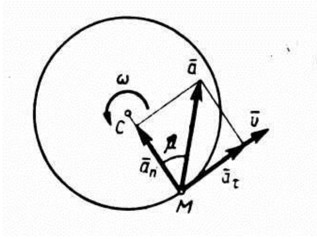


Рис. 13

Полное ускорение точки *M* будет $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, или

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ . \qquad (37)$$

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле $tg\,\mu = a_\tau / a_n$. Подставляя сюда значения a_τ и a_n из равенств (36), получаем

$$tg\ \mu = \varepsilon / \omega^2 . \qquad (38)$$

Так как ω и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то из формул (37) и (38) следует, что ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей.

2.11. Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным (или *плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости П* (рис. 14). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др.

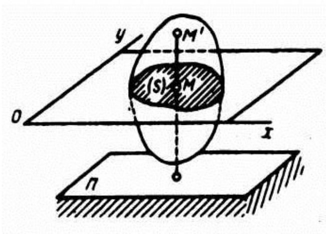


Рис. 14

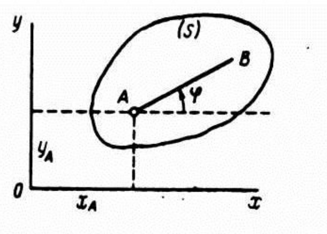


Рис. 15

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскостью *Oxy,* параллельной плоскости П (рис.14). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой *MM'*, перпендикулярной сечению S, движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости *Oxy* сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S. При этом все результаты, которые будут получены в для точек плоской фигуры, справедливы и для точек сечения S твердого тела, движущегося плоскопараллельно.

Положение фигуры S в плоскости Oxy определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка AB (рис.15). В свою очередь положение отрезка AB можно определить, зная координаты x_A, y_A точки A и угол φ, который отрезок AB образует с осью x. Точку A выбранную для определения положения фигуры S, называют *полюсом*.

При движении фигуры величины x_A, y_A и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Oxy в любой момент времени, необходимо знать зависимости

$$x_A=f_1(t),\ y_A=f_2(t),\ \varphi=f_3(t). \tag{39}$$

Уравнения (39) и являются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.*

Первые два из уравнений (39) определяют поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A. Третье уравнение определяет вращение фигуры вокруг полюса A. Отсюда можно заключить, что в общем случае *движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения и из вращательного движения вокруг полюса*.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса $(\bar{\upsilon}_{пост}=\bar{\upsilon}_A, \bar{a}_{пост}=\bar{a}_A)$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

При изучении движения можно в качестве полюса выбирать любую точку фигуры. Рассмотрим, что получится, если вместо A выбрать в качестве полюса какую-нибудь другую точку C и определять положение фигуры отрезком CD, образующим с осью Ox угол φ_1 (рис.16).

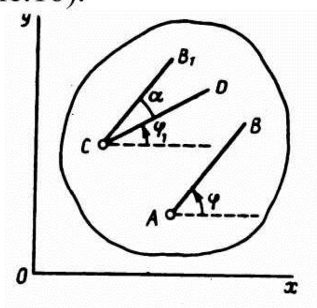


Рис. 16

Характеристики поступательной части движения при этом изменятся, так как в общем случае $\bar{\upsilon}_c \neq \bar{\upsilon}_A$ и $\bar{a}_c \neq \overline{a_A}$. Характеристики же вращательной части движения, т. е. ω и ε, остаются неизменными. В самом деле, проведя из C прямую CB_1 параллельную AB, мы видим, что в любой момент времени угол $\varphi_1=\varphi-\alpha$, где $\alpha=const$. Отсюда $\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}_1=\ddot{\varphi}$ или $\omega_1=\omega$, $\varepsilon_1=\varepsilon$.

Следовательно, вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

2.12. Определение траекторий, скоростей и ускорений точек плоской фигуры

Перейдем теперь к изучению движения отдельных точек плоской фигуры, т. е.

к отысканию траекторий, скоростей и ускорений этих точек. Начнем с определения траекторий.

Рассмотрим точку M плоской фигуры, положение которой определяется расстоянием $b=AM$ от полюса A и углом $BAM=\alpha$. Если движение задано уравнениями (39), то координаты x и y точки M в осях Oxy определяться так

$$x=x_A+b\cos(\varphi+\alpha),\ y=y_A+b\sin(\varphi+\alpha). \qquad (40)$$

Равенства (40) и дают уравнение траектории точки M в параметрическом виде. Обычное уравнение траектории получим, исключив из системы (40) время t.

Если рассматривается движение звена какого-нибудь механизма, то для определения траектории любой точки этого звена достаточно выразить ее координаты через какой-нибудь параметр, определяющий положение механизма, а затем исключить этот параметр. Уравнения движения (40) при этом знать не обязательно.

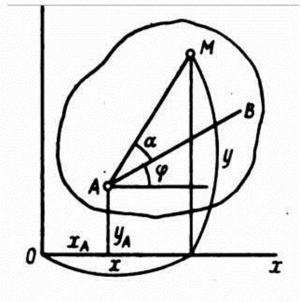


Рис. 17

Движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью $\bar{\upsilon}_A$ полюса A, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Покажем, что скорость любой точки M фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений. В самом деле, положение любой точки M фигуры определяется по отношению к осям Oxy радиус-вектором $\bar{r}=\bar{r}_A+\bar{r}'$ (рис.18), где $\bar{r}_A$ — радиус-вектор полюса A, $\bar{r}'=\overline{AM}$ — вектор, определяющий положение точки M относительно осей $Ax'y'$, перемещающихся вместе с полюсом A поступательно. Тогда

$$\bar{\upsilon}_M=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}_A}{dt}+\frac{d\bar{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\bar{r}_A/dt=\bar{\upsilon}_A$ есть скорость полюса A, а величина dr'/dt равна скорости $\bar{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\bar{\upsilon}_M=\bar{\upsilon}_A+\bar{\upsilon}_{MA}. \qquad (41)$$

При этом скорость $\bar{\upsilon}_{MA}$, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A

$$\upsilon_{MA}=\omega\cdot MA \quad (\bar{\upsilon}_{MA}\perp\overline{MA}), \qquad (42)$$

где ω — угловая скорость фигуры.

Таким образом, *скорость любой точки М плоской фигуры геометрически* *складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.* Модуль и направление скорости $\bar{\upsilon}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис. 19).

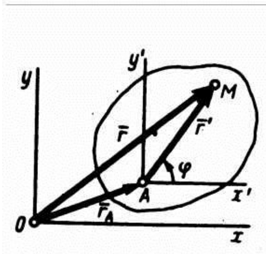


Рис. 18

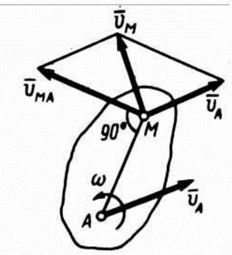


Рис. 19

2.13. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) с помощью формулы (41) связано обычно с довольно сложными расчетами. Однако, исходя из этого основного результата, можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры. Часто удобно использовать следующую теорему.

Теорема 1.

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу.

Доказательство.

Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис. 20), получаем по формуле (41), что $\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}$.

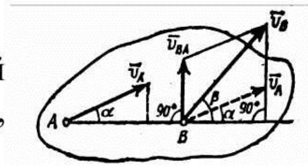


Рис. 20

Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор $\bar{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярен AB, находим

$$\upsilon_B \cos\beta = \upsilon_A \cos\alpha, \tag{43}$$

Т. е. теорема доказана. Заметим, что этот результат ясен и из чисто физических соображений: если равенство (43) не будет выполняться, то при движении расстояние между точками A и B должно изменяться, что невозможно, так как тело считается абсолютно твердым. Поэтому равенство (43) выполняется не только при плоскопараллельном, но и при любом движении твердого тела.

Доказанная теорема позволяет легко находить скорость данной точки тела, если известны направление скорости этой точки и скорость какой-нибудь другой точки того же тела.

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры основан на понятии о мгновенном центре скоростей (МЦС).

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательно, то такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$, не параллельные друг другу (рис. 21). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa к вектору $\bar{\upsilon}_A$ и Bb к вектору $\bar{\upsilon}_B$, и будет МЦС, так как $\upsilon_p=0$.

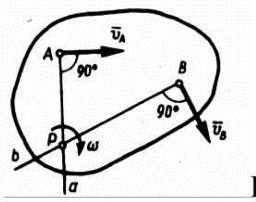


Рис. 21

В самом деле, если допустить, что $\upsilon_p \neq 0$, то по теореме 1. вектор $\bar{\upsilon}_p$ должен быть одновременно перпендикулярен и AP, (так как $\bar{\upsilon}_A \perp AP$) и BP (так как $\bar{\upsilon}_B \perp BP$), что невозможно.

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то по формуле (41) скорость точки A

$$\bar{\upsilon}_A = \bar{\upsilon}_P + \bar{\upsilon}_{PA} = \bar{\upsilon}_{PA},$$

так как $\upsilon_p=0$. Следовательно, *скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.* При этом

$$\upsilon_A = \omega \cdot PA \quad (\bar{\upsilon}_A \perp PA);$$
$$\upsilon_B = \omega \cdot PB \quad (\bar{\upsilon}_B \perp PB) \text{ и т.д.} \qquad (44)$$

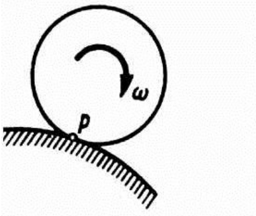
Из (44) следует, что

$$\frac{\upsilon_A}{PA} = \frac{\upsilon_B}{PB}, \qquad (45)$$

т. е. что *скорости точек плоской фигуры, пропорциональны их расстояниям до МЦС.*

Рассмотрим некоторые частные случаи определения МЦС.

а) Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.22), имеет в данный момент времени скорость, равную нулю *($\upsilon_p=0$)* и, следовательно, является МЦС. Примером служит качение колеса по рельсу.



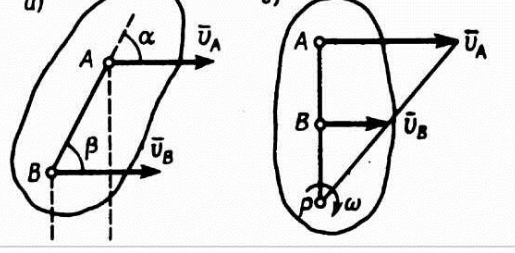


Рис. 22 **Рис. 23**

б) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна $\bar{\upsilon}_A$ (рис.23, *а)*, то МЦС лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\bar{\upsilon}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $\upsilon_A cos\alpha = \upsilon_B cos\beta$, т. е. $\upsilon_B = \upsilon_A$. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению. Такое состояние движения тела называют *мгновенно поступательным.*

в) Если скорости точек *A* и *B* плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия *AB* перпендикулярна $\bar{\upsilon}_A$, то мгновенный центр скоростей *P* определяется построением, показанным на рис.23,*б.* Справедливость построений следует из пропорции (45). В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра *P* надо кроме направлений знать еще и модули скоростей υ_A и υ_B.

г) Если известны вектор скорости $\bar{\upsilon}_B$ какой-нибудь точки *B* фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей *P,* лежащего на перпендикуляре к $\bar{\upsilon}_B$ (см. рис. 21), можно найти из равенства (44), которое дает $BP = \upsilon_B / \omega$.

2.14. Сложное движение материальной точки

В ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом, называют *составным* или *сложным.* Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе, и движение вместе с палубой парохода по отношению к берегу. Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых. Возможность разложить путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета более сложное движение точки или тела на более простые широко используется при кинематических расчетах и определяет практическую ценность теории сложного движения. Кроме того, результаты этой теории используются в динамике для изучения относительного равновесия и относительного движения тел под действием сил.

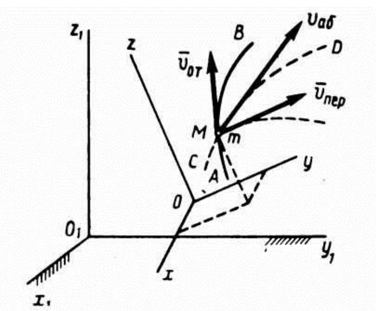


Рис.24

Рассмотрим точку *M,* движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz,* которая в свою очередь движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис.24). Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к подвижной системе отсчета (к осям *Oxyz),* называется *относительным движением.* Такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними. Траектория *AB,* описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией.* Скорость точки *M* по отношению к осям *Oxyz* называется *относительной скоростью* (обозначается $\bar{\upsilon}_{от}$), а ускорение —

относительным ускорением (обозначается $\overline{a}_{от}$). Из определения следует, что при вычислении $\overline{\upsilon}_{от}$ и $\overline{a}_{от}$ можно движение осей *Oxyz* во внимание не принимать.

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета *Oxyz* по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки *М* *переносным движением.*

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями *Oxyz* точки *m,* с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *М,* называется *переносной скоростью* точки *М* (обозначается $\overline{\upsilon}_{пер}$), а ускорение этой точки *m* — *переносным ускорением* точки *М* (обозначается $\overline{a}_{пер}$). Таким образом,

$$\overline{\upsilon}_{пер} = \overline{\upsilon}_{m}, \quad \overline{a}_{пер} = \overline{a}_{m}. \tag{46}$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси *Oxyz,* то переносной скоростью (или ускорением) точки *М* в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки *m* тела, с которой в этот момент совпадает точка *М.*

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе, отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется *абсолютным* или *сложным.* Траектория *CD* этого движения называется *абсолютной траекторией,* скорость — *абсолютной скоростью* (обозначается $\overline{\upsilon}_{абс}$) и ускорение — *абсолютным ускорением* (обозначается $\overline{a}_{абс}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость — относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар, будет в этот момент его переносной скоростью. Движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость — абсолютной скоростью шара.

Для решения соответствующих задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями точки.

Рассмотрим сложное движение точки *М.* Пусть эта точка совершает за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ вдоль траектории *АВ* относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$ (рис.25, *а).* Сама кривая *АВ,* двигаясь вместе с подвижными осями *Oxyz*, перейдет за тот же промежуток времени в какое-то новое положение A_1B_1. Одновременно та точка *m* кривой *АВ,* с которой в момент времени *t* совпадает точка *М,* совершит переносное перемещение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результате точка *М* придет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение $\overline{MM_1}$. Из треугольника Mm_1M_1 имеем

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0}(\overline{MM_1}/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{Mm_1}/\Delta t) + \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{m_1M_1}/\Delta t).$$

По определению

$$\lim_{\Delta t \to 0}(\overline{MM_1} / \Delta t) = \overline{\upsilon_{абс}}, \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{Mm_1} / \Delta t) = \overline{\upsilon_{пер}}.$$

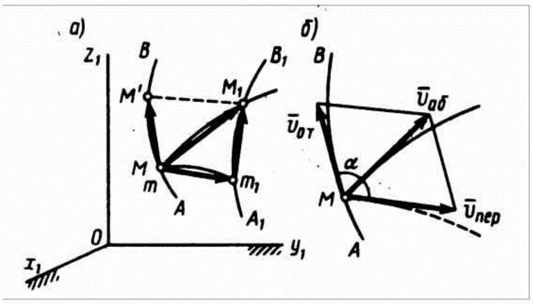


Рис. 25

Что касается последнего слагаемого, то, так как при $\Delta t \to 0$ кривая A_1B_2 стремится к совпадению с кривой AB, в пределе

$$\lim_{\Delta t \to 0}(\overline{m_1M_1} / \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0}(\overline{MM'} / \Delta t) = \overline{\upsilon_{от}}.$$

В результате находим, что

$$\overline{\upsilon_{абс}} = \overline{\upsilon_{от}} + \overline{\upsilon_{пер}}. \qquad (47)$$

Направлены векторы $\overline{\upsilon_{абс}}, \overline{\upsilon_{от}}, \overline{\upsilon_{пер}}$ по касательным к соответствующим траекториям (рис. 25, *б*).

Таким образом, мы доказали следующую теорему о сложении скоростей.

Теорема 1.

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Для ускорений точки справедлива следующая теорема Кориолиса [1].

Теорема 2.

При сложном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного (кориолисова).

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}. \qquad (48)$$

Кориолисово ускорение характеризует изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при ее относительном движении. Оно вычисляется по формуле

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \upsilon_{от}), \qquad (49)$$

где ω – переносная угловая скорость (угловая скорость подвижной системы отсчета).

Глава 3.
ДИНАМИКА
3.1. Предмет, основные понятия, законы и задачи динамики

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел *под действием сил* с учетом *инертности* самих тел.

Понятие силы было введено в статике. Однако в статике рассматривались лишь силы постоянные. Между тем на движущееся тело наряду с постоянными силами действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются. При этом переменными могут быть как внешние силы, так и реакции связей. Переменные силы могут определенным образом зависеть от времени, положения тела и его скорости. Например, от времени зависит сила тяги двигателя автомобиля; от положения тела зависит сила тяготения, сила упругости пружины, сила трения; от скорости зависят силы сопротивления среды.

Инертностью называют способность тела быстрее или медленнее изменять скорость движения под действием сил. Количественной мерой инертности материального тела является *масса* тела. В классической механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

Изучение динамики начинают с изучения динамики материальной точки. *Материальной точкой* называют твердое тело, имеющее массу размерами которого можно пренебречь по сравнению с пройденным им расстоянием.

Основными законами динамики являются законы Ньютона, установленные путем обобщения многочисленных экспериментов и наблюдений. Они формулируются следующим образом.

П е р в ы й з а к о н (закон инерции).

Существуют системы отсчета, в которых материальная точка находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения, если на нее не действуют силы или их равнодействующая равна нулю.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*. Системы отсчета, в которых справедлив этот закон, называют *инерциальными*. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать любую систему отсчета, жестко связанную с Землей.

В т о р о й з а к о н (основной закон динамики).

Ускорение, сообщаемое материальной точке приложенной к ней силой, имеет направление силы и по модулю пропорционально ей.

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\overline{a} = \overline{F}. \qquad (1)$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$ma-F.$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальным системам отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, поскольку при действии данной силы точка, масса которой больше, т. е. более инертная, получит меньшее ускорение и наоборот.

Если на точку действует не одна, а несколько сил, то они будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей $\overline{R}$, равной геометрической сумме данных сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_K . \qquad (2)$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположных направлениях.

Этот закон использовался в статике в качестве четвертой аксиомы. Он играет также большую роль и в динамике системы материальных точек, так как устанавливает зависимость между действующими на эти точки внутренними силами.

В динамике формулируются и решаются две важнейшие задачи.

Первая (прямая) задача состоит в том, чтобы по заданному движению материальной точки найти действующие на нее силы.

Вторая (обратная) задача (основная задача динамики) заключается в том, чтобы по заданным силам определить движение точки. Данная задача гораздо сложнее, так как приводит к системе дифференциальных уравнений.

В международной системе единиц измерения физических величин (СИ) основными единицами являются метр (м), килограмм массы (кг) и секунда (с). Единицей же измерения силы является производная единица — 1 Ньютон (Н); 1 Н — это сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение 1 м/с^2 (1Н=1 кг м/с^2).

3.2. Основные виды механических сил

1. *Сила всемирного тяготения*. Это сила, с которой два материальных тела притягиваются друг к другу. Сила тяготения зависит от расстояния и для двух материальных точек с массами m_1 и m_2 находящихся на расстоянии r друг от друга, выражается равенством

$$F = G\, m_1\, m_2/r^2, \qquad (3)$$

где G — гравитационная постоянная (в СИ G = 6,673 10^{-11}м^3/кг с^2).

2. *Сила тяжести*. Это постоянная сила, действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Ясно, что данная сила является частным случаем силы всемирного тяготения, поэтому

$$F_T = G\, mM/R^2, \qquad (4)$$

где m – масса тела, M и R – масса и радиус Земли. Величина

$$g = G\, M/R^2$$

называется *ускорением свободного падения*. Тогда

$$F_T = mg. \qquad (5)$$

Сила тяжести, как и величина g, изменяются с изменением широты и высоты над уровнем моря, масса же является для данного тела величиной неизменной.

При решении большинства задач полагают $g - 9{,}8$ м/с^2.

Для экспериментального определения массы данного тела можно исходить из равенства (1), куда масса входит как мера инертности и называется, поэтому инертной массой. Однако можно исходить и из равенства (4), куда масса входит как мера гравитационных свойств тела и называется соответственно гравитационной массой. В принципе ни откуда не следует, что инертная и гравитационная массы представляют собой одну и ту же величину. Однако целым рядом экспериментов установлено, что значения обеих масс совпадают с очень высокой степенью точности. Поэтому в механике пользуются единым термином «масса», определяя массу как количественную меру инертности тела и его гравитационных свойств.

3. *Вес тела.* Это сила P , с которой тело действует на опору или подвес. Не следует путать вес тела и силу тяжести, так как они приложены к разным телам. Кроме того, $P - F_T - mg$ только в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения. При решении задач P, как правило, находится по третьему закону Ньютона.

4. *Сила трения.* Так кратко называют силу трения скольжения, действующую (при отсутствии жидкой смазки) на движущееся тело. Ее модуль определяется равенством

$$F \quad fN, \tag{6}$$

где f — коэффициент трения, который чаще считают постоянным. N - нормальная реакция.

5. *Сила упругости.* Эта сила зависит от расстояния. Ее значение можно определить исходя из закона Гука, согласно которому напряжение (сила, отнесенная к единице площади) пропорционально деформации. В частности, для силы упругости пружины получается значение

$$F \; c\lambda, \tag{7}$$

где λ — удлинение (или сжатие) пружины, c — так называемый коэффициент жесткости пружины (в СИ измеряется в Н/м).

6. *Сила вязкого трения.* Такая сила, зависящая от скорости, действует на тело при его медленном движении в очень вязкой среде (или при наличии жидкой смазки) и может быть выражена равенством

$$R - \mu\upsilon, \tag{8}$$

где υ — скорость тела, μ — коэффициент сопротивления.

7. *Сила аэродинамического* (гидродинамического) сопротивления. Эта сила также зависит от скорости и действует на тело, движущееся в такой, например, среде, как воздух или вода. Обычно ее величину выражают равенством

$$R \; 0{,}5c_x \rho S\upsilon^2, \tag{9}$$

где ρ — плотность среды; S — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению движения (площадь миделя), c_x — безразмерный коэффициент сопротивления, определяемый обычно экспериментально и зависящий от формы тела и от того, как оно ориентировано при движении.

3.3. Решение прямой задачи динамики

Если ускорение движущейся точки задано, то действующая сила или реакция связи сразу находится по уравнениям (1) или (2). При этом для вычисления реакции надо дополнительно знать активные силы. Когда ускорение непосредственно не задано, но известен закон движения точки, то для определения силы можно воспользоваться уравнениями (11) или (12).

Задача 1. Воздушный шар весом P опускается с ускорением a. Какой груз Q (балласт) надо сбросить, чтобы шар стал подниматься с таким же ускорением.

Решение. На падающий шар действуют сила тяжести $\bar{P}$ и подъемная сила $\bar{F}$ (рис.1, *а*). Составляя уравнение (2) в проекции на вертикаль, найдем, что

$$(P/g)\,a = P - F.$$

Когда будет сброшен балласт (рис.1,*б*), вес шара станет равен $P - Q$, а подъемная сила останется той же. Тогда, учитывая, что шар при этом движется вверх, получим

$$(P - Q)a/g = F - (P - Q).$$

Исключая из этих уравнений неизвестную силу F, найдем

$$Q = 2P/(1+g/a).$$

Задача 2. Лифт весом P (рис.2) начинает подниматься с ускорением a Определить натяжение троса.

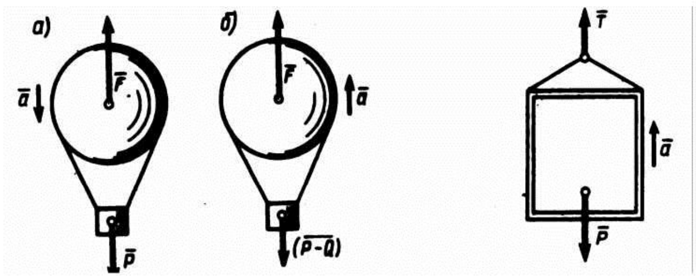


Рис.1 **Рис.2**

Решение. На лифт действуют, сила тяжести $\bar{P}$ и реакция троса $\bar{T}$. Составляя уравнение (2) в проекции на вертикаль, получим $(P/g)a = T - P$, откуда

$$T = P(1+a/g).$$

Если лифт опускается с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно $T_1 = P(1 - a/g)$.

Задача 3. Радиус закругления в точке A моста равен R (рис.3). Найти, какое давление на мост в точке A окажет автомобиль массы m, движущийся со скоростью v.

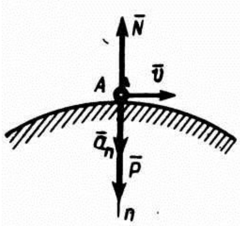


Рис.3

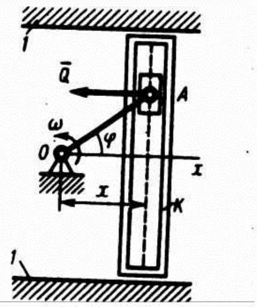


Рис.4

Решение. В точке A автомобиль имеет нормальное ускорение $a_n=v^2/R$. При этом на него действуют сила тяжести $\overline{P}=m\overline{g}$ и нормальная реакция $\overline{N}$. Тогда по уравнению (2), составленному в проекции на нормаль, или непосредственно по второму из уравнений (12) будет

$$mv^2/R=mg—N, \text{ откуда } N=m(g-v^2/R).$$

Сила давления на мост равна по модулю N, но направлена вниз.

Задача 4. Кривошип OA длины l, вращаясь равномерно с угловой скоростью w, перемещает кулису K, движущуюся поступательно вдоль направляющих 1, 1 (рис.4). Найти, пренебрегая трением, чему при этом равна сила давления Q ползуна A на кулису, если вес кулисы P.

Решение. Проведем координатную ось Ox. Тогда положение кулисы определится координатной $x=l\cos\varphi$ и, поскольку $\varphi=\omega t$, закон движения кулисы будет $x=l\cos\omega t$. Зная этот закон, воспользуемся первым из уравнений (11). Вычисляя производную от x, получим

$$\ddot{x}=-\omega^2 l\cos\omega t=-\omega^2 x.$$

Кроме того, $Q_x=-Q$. В результате находим

$$-(P/g)\,\omega^2 x=-Q \text{ и } Q=(P/g)\,\omega^2 x.$$

Следовательно, сила давления ползуна на кулису изменяется пропорционально расстоянию x кулисы от оси O.

Замечание. В рассмотренных задачах под весом P понимается сила тяжести.

3.4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Из кинематики известно, что движение точки в прямоугольных декартовых координатах задается уравнениями

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t). \qquad (10)$$

Задачи динамики точки состоят в том, чтобы, зная движение точки, т. е. уравнения (10), определить действующую на точку силу или, наоборот, зная действующие на точку силы, определить закон ее движения, т. е. уравнения (10). Следовательно, для решения задач динамики точки надо иметь уравнения, связывающие координаты x, y, z этой точки и действующую на нее силу (или силы). Эти уравнения и дает второй закон динамики.

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил $\overline{F}_1,\overline{F}_2,....,\overline{F}_n$ по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$. Проектируя обе части равенства (2), т. е. равенства $m\bar{a}=\sum\bar{F}_K$, на оси x, y, z и учитывая, что $a_x=d^2x/dt^2$ и т. д., получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{KX},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum F_{KY},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum F_{KZ}. \tag{11}$$

Это и будут искомые уравнения, т. е. *дифференциальные уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.*

Так как действующие силы могут зависеть от времени t, от положения точки, т. е. от ее координат x, y, z, и от скорости, т. е. от $\upsilon_x=\dot{x}$, $\upsilon_y=\dot{y}$, $\upsilon_z=\dot{z}$, то в общем случае правая часть каждого из уравнений (11) может быть функцией всех этих переменных, т. е. t, x, y, z, υ_x, υ_y, υ_z одновременно.

Можно пойти и другим путем. Спроектируем обе части равенства $m\bar{a}=\sum\bar{F}_K$ на оси $M\tau nb$, т. е. на касательную $M\tau$ к траектории точки, главную нормаль Mn, направленную в сторону вогнутости траектории, и бинормаль Mb. Тогда, учитывая, что $a_\tau=d\upsilon/dt$, $a_n=\upsilon^2/\rho$, $a_b=0$, получим

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=\sum F_{K\tau},\quad m\frac{\upsilon^2}{\rho}=\sum F_{Kn},\quad 0=\sum F_{Kb}. \tag{12}$$

Уравнения (12), где $\upsilon=ds/dt$, представляют собой *дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника.*

3.5. Прямолинейное движение точки. Решение основной задачи динамики.

Направим координатную ось Ox вдоль траектории движущейся точки. Тогда ее движение будет определяться первым из уравнений (11), т. е. уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum F_{KX}\quad или\quad m\ddot{x}=\sum F_{KX}. \tag{13}$$

Уравнение (13) называют дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки. Иногда его удобнее заменить двумя уравнениями, содержащими первые производные

$$m\frac{d\upsilon_X}{dt}=\sum F_{KX},\quad \frac{dx}{dt}=\upsilon_X. \tag{14}$$

В случаях, когда при решении задачи необходимо найти зависимость скорости от координаты x, а не от времени t (или когда сами силы зависят от x), уравнение (14) преобразуют к переменному x. Так как $d\upsilon_x/dt=d\upsilon_x/dx(dx/dt)=\upsilon_x\,d\upsilon_x/dx$, то вместо (14) получим

$$m\upsilon_X\frac{d\upsilon_X}{dx}=\sum F_{KX},\quad \frac{dx}{dt}=\upsilon_X. \tag{15}$$

Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т. е. $x=f(t)$. Для этого надо проинтегрировать соответствующее дифференциальное уравнение. Уравнение (13) с математической точки зрения представляет собой дифференциальное уравнение 2-го порядка, а (14) и (15) – системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Следовательно, полученное общее решение будет содержать две постоянные интегрирования C_1 и C_2. Они, как правило, находятся из начальных условий

$$\text{при} \quad t=0 \;\; x=x_0, \;\; \upsilon_x=\upsilon_0. \qquad (16)$$

В результате необходимое частное решение задачи, дающее закон движения точки, находится в виде

$$x = f(t, x_0, \upsilon_0). \qquad (17)$$

Поясним все сказанное на примере следующей простейшей задачи.

Задача 5. Материальная точка с массой m движется под действием постоянной по модулю и направлению силы $\bar{Q}$. Найти закон движения точки при начальных условиях (16).

Решение. Составляя дифференциальное уравнение движения в виде (13) и учитывая, что $Q_x = Q$, получим

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = Q.$$

Так как $Q = const$, то умножив обе части уравнения на dt и беря от них интегралы, найдем, что

$$\upsilon_x=(Q/m)t+C_1. \qquad (а)$$

Замена в этом равенстве υ_x на dx/dt дает

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m)t + C_1.$$

Умножая обе части полученного уравнения на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = (Q/2m))t^2+C_1t+C_2. \qquad (б)$$

Этот результат и представляет собой для данной задачи общее решение уравнения (13) в виде, соответствующем равенству (15).

Теперь определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 по заданным начальным условиям (16). Решения (а) и (б) должны быть справедливы в любой момент времени, в том числе и в момент $t=0$. Поэтому, подставляя в (а) и (б) вместо t нуль, мы вместо υ_x и x должны получить υ_0 и x_0, т, е, должно быть

$$\upsilon_0=C_1, \;\; x_0=C_2.$$

Полученными равенствами определяются значения постоянных C_1 и C_2, удовлетворяющие начальным условиям задачи. Подставляя эти значения в уравнение (б), найдем окончательно закон прямолинейного движения в виде

$$x=x_0+\upsilon_0t+(Q/2m)t^2. \qquad (в)$$

Как видно из уравнения (в), точка под действием постоянной силы совершает равнопеременное движение, что можно было предсказать заранее, так как если $Q = const$, то и $a = Q/m = const$. В частности, таким является движение точки под действием силы тяжести. При этом в уравнении (в) будет $Q/m=g$, а ось Ox должна быть направлена вертикально вниз.

Рассмотренная задача позволяет сформулировать следующий алгоритм решения основной задачи динамики.

1) Выбрать начало отсчета, совмещая его с начальным положением точки и провести координатную ось, направляя ее вдоль траектории в сторону движения. Если под действием приложенных сил точка может находиться в каком-нибудь, положении в равновесии, то начало отсчета удобно помещать в положении статического равновесия.

2) Изобразить движущуюся точку в произвольном положении и показать все действующие на точку силы.

3) Подсчитать сумму проекций всех сил на координатную ось и подставить эту сумму в правую часть дифференциального уравнения движения. при этом *все переменные силы необходимо выразить через те величины* (*t, x* или *υ*), *от которых эти силы зависят.*

4) Проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение.

5) Найти постоянные интегрирования, используя начальные условия.

6) Проанализировать полученное решение и при необходимости найти другие величины, требуемые в условиях задачи.

3.6. Криволинейное движение точки. Решение основной задачи динамики.

Построенный в предыдущем параграфе алгоритм может быть с успехом применен и к решению основной задачи динамики при криволинейном движении точки. Отличие состоит только в количестве координатных осей, дифференциальных уравнений и начальных условий. Если задача решается в прямоугольных декартовых координатах, т. е. с помощью уравнений (11), то начальные условия задаются в виде

$$\text{при } t=0\ x=x_0,\ y=y_0\ ,z=z_0;$$
$$\upsilon_x=\upsilon_{x0},\ \upsilon_s=\upsilon_{y0},\ \upsilon_z=\upsilon_{z0.}$$

Полученные решения будут содержать шесть постоянных интегрирования $C_1, C_2, ..., C_6$, значения которых определяются по данным начальным условиям.

Рассмотрим движение материальной точки массой *m* в однородном поле тяжести брошенной с начальной скоростью $\bar{\upsilon}_0$, направленной под углом α к горизонтальной плоскости (сопротивлением воздуха пренебрегаем).

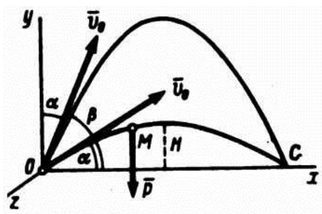


Рис. 5

Поместим начало координат *O* в начальном положении точки. Направим ось *Oy* вертикально вверх; горизонтальную ось *Ox* расположим в плоскости, проходящей через *Oy* и вектор $\bar{\upsilon}_0$, а ось *Oz* проведем перпендиулярно первым двум осям (рис.5). Тогда угол между вектором $\bar{\upsilon}_0$ и осью *Ox* будет α.

Изобразим движущуюся точку *M* в произвольном положении. На нее действует только одна сила тяжести $\bar{P}$, проекции которой на координатные оси равны

$$P_x=0,\ P_y=-P=-mg,\ P_z=0.$$

Подставляя эти величины в уравнения (11) и замечая, что $d^2x/dt^2=d\upsilon_x/dt$ и т. д., после сокращения на m получим

$$\frac{d\upsilon_x}{dt}=0,\quad \frac{d\upsilon_y}{dt}=-g,\quad \frac{d\upsilon_z}{dt}=0.$$

Умножая обе части этих уравнений на dt и интегрируя, находим

$$\upsilon_x=C_1,\ \ \upsilon_y=-gt=C_2,\ \upsilon_z=C_3.$$

Начальные условия в данной задаче имеют вид

$$\text{при } t=0\ x=0,\ y=0,\ z=0;$$

$$\upsilon_x=\upsilon_0 cos\alpha,\ \upsilon_y=\upsilon_0 sin\alpha,\ \upsilon_z=0.$$

Удовлетворяя начальным условиям, получим

$$C_1=\upsilon_0\, cos\alpha,\ C_2=\upsilon_0 sin\ \alpha,\ C_3=0.$$

Подставляя эти значения C_1, C_2 и C_3 в найденные выше решения и заменяя υ_x на dx/dt и т. д., придем к уравнениям

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=\upsilon_0\sin\alpha-gt,\quad \frac{dz}{dt}=0\,.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x=\upsilon_0 t\ cos\alpha+C_4,\ y=\upsilon_0 t\ sin\alpha-gt^2/2+C_5,\ z=C_6.$$

Подстановка начальных данных дает $C_4=C_5=C_6=0$, и окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x=\upsilon_0\, tcos\alpha,\ y=\upsilon_0\, t\ sin\alpha - gt^2/2,\ z=0. \qquad (18)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости Oxy.

Зная уравнения движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (18) время t, получаем уравнение траектории точки

$$y=x\,tg\alpha-\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2\ . \qquad (19)$$

Это уравнение *параболы* с осью, параллельной оси Oy и осями направленными вниз.

2. Горизонтальная дальность. Полагая в равенстве (18) $y=0$, найдем точки пересечения траектории с осью Ox. Из уравнения $x\ [tg\alpha - gx/(2\upsilon^2{}_0cos^2\alpha)]=0$ получаем

$$x_1=0,\ x_2=(2\upsilon^2{}_0cos^2\alpha\ \ tg\alpha)/g.$$

Первое решение дает точку O, второе — точку C. Следовательно, $L=x_2$ и окончательно

$$L=(\upsilon^2{}_0/g)sin2\alpha\,. \qquad (20)$$

Из формулы (19) видно, что такая же горизонтальная дальность L будет получена при угле $\beta = 90°—\alpha$. Следовательно, при заданной начальной скорости υ_0 в одну и ту же точку C можно попасть двумя траекториями:

настильной (α<45°) и навесной (α>45°).

При заданной начальной скорости υ_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда $sin2\alpha - 1$, т. е. при угле α=45°.

3. В ы с о т а т р а е к т о р и и. Если положить в уравнении (19) $x\ \ L/2\ \ (\upsilon_0^2/g)\,sin\ \alpha\ cos\ \alpha$, то определим наибольшую высоту подъема

$$H-(\upsilon_0^2/2g)sin^2\alpha .$$

4. В р е м я п о л е т а. Из первого уравнения системы (18) следует, что полное время полета T определяется равенством $L\ \ \upsilon_0\ \ Tcos\alpha$. Учитывая соотношение (20), получим

$$T\ \ (2\upsilon_0/g)\ sin\alpha .$$

При угле наибольшей дальности α =45° все найденные величины имеют значения

$$L\ \ \upsilon_0^2/g,\quad H\ \ \upsilon_0^2/4g\ \ L/4,\quad T\ \ (\upsilon_0/g)\sqrt{2} .$$

3.7. Количество движения точки. Импульс силы

При решении многих задач динамики вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, которые являются следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости, между соответствующими динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движения механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые производятся при выводе этих теорем.

Одной из основных динамических характеристик движения точки является количество движения (импульс).

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\bar{\upsilon}$, равная произведению массы точки на ее скорость.

Направлен вектор $m\bar{\upsilon}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории. Единицей измерения количества движения является в СИ 1кгм/с=1Нс.

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Сначала введем понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за элементарный промежуток времени dt.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению силы $\bar{F}$ на элементарный промежуток времени dt

$$d\bar{S} - \bar{F}dt. \qquad (21)$$

Направлен элементарный импульс вдоль линии действия силы.

Импульс $\bar{S}$ любой силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется интегрированием

$$\overline{S}=\int_0^{t_1}\overline{F}dt. \qquad (22)$$

Если сила $\overline{F}$ постоянна и по модулю, и по направлению ($\overline{F}=const$), то $\overline{S}=\overline{F}t_1$. Причем в этом случае и модуль $S=Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен по его проекциям на координатные оси

$$S_X=\int_0^{t_1}F_X dt,\quad S_Y=\int_0^{t_1}F_Y dt,\quad S_Z=\int_0^{t_1}F_Z dt. \qquad (23)$$

Единицей измерения импульса силы, как и количества движения, является в СИ 1 кг м/с.

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\overline{a}=d\overline{\upsilon}/dt$, то основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\overline{\upsilon})}{dt}=\sum\overline{F_K}\ . \qquad (24)$$

Уравнение (24) выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной, форме: производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил .

Пусть движущаяся точка имеет в момент времени $t\ 0$ скорость $\overline{\upsilon_0}$, а в момент t_1 — скорость $\overline{\upsilon_1}$. Умножим тогда обе части равенства (24) на dt и проинтегрируем в соответствующих пределах. В результате получим

$$m\overline{\upsilon_1}-m\overline{\upsilon}_0=\sum\int_0^{t_1}\overline{F}_K dt.$$

Стоящие справа интегралы, как следует из формулы (22), представляют собой импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будет

$$m\overline{\upsilon_1}-m\overline{\upsilon}_0=\sum\overline{S}_K \qquad (25)$$

Уравнение (25) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде.

Теорема 1.

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

При решении задач вместо векторного уравнения (25) часто пользуются уравнениями в проекциях.

3.8. Теорема об изменении момента количества движения точки

При решении ряда задач в качестве динамической характеристики движения вместо самого вектора количества движения точки $m\overline{\upsilon}$ рассматривают его момент относительно некоторого центра или оси.

Эти моменты определяются так же, как и моменты силы.

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\overline{m_0}(m\overline{\upsilon})$, определяемая равенством

$$\overline{m_0}\,(m\bar{\upsilon}) = \bar{r} \times m\bar{\upsilon}. \qquad (26)$$

При этом вектор $\overline{m_0}\,(m\bar{\upsilon})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\bar{\upsilon}$ и центр *О,* а $\left|\overline{m_0}\left(\overline{m\upsilon}\right)\right| = m\upsilon\, h$ (рис.6).

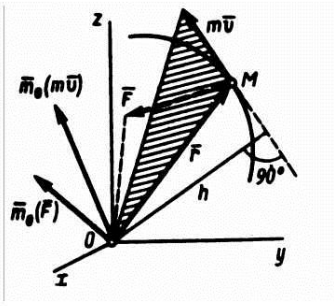


Рис.6

Момент количества движения точки относительно какой-нибудь оси 0_z, проходящей через центр *О,* будет равен проекции вектора $\overline{m_0}\,(m\bar{\upsilon})$ на эту ось

$$m_Z(m\bar{\upsilon}) = \left[\overline{m_0}(m\bar{\upsilon})\right]_Z = \left|\overline{m_0}(m\upsilon)\right|\cos\gamma, \qquad (27)$$

где γ — угол между вектором $\overline{m_0}\,(m\bar{\upsilon})$ и осью *Oz*.

Теорема моментов устанавливает, как изменяется со временем вектор $\overline{m_0}\,(m\bar{\upsilon})$.

Теорема 1.

Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

Чтобы доказать ее, продифференцируем по времени выражение (26). Получим

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{\upsilon}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{\upsilon}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}\right) = \left(\bar{\upsilon} \times m\bar{\upsilon}\right) + \left(\bar{r} \times m\bar{a}\right).$$

$\bar{\upsilon} \times m\bar{\upsilon} = 0$ как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\bar{a} = \bar{F}$, где при действии нескольких сил $\bar{F} = \sum \bar{F}_K$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{\upsilon}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[\overline{m_0}\left(m\bar{\upsilon}\right)\right] = \overline{m_0}\left(\bar{F}\right). \qquad (28)$$

Теорема доказана.

Сравнивая уравнения (28) и (24), видим, что моменты векторов $m\bar{\upsilon}$ и $\bar{F}$ связаны такой же зависимостью, какой связаны сами векторы $m\bar{\upsilon}$ и $\bar{F}$.

Если спроектировать обе части равенства (28) на какую-нибудь ось *Oz,* проходящую через центр *О,* то, учтя соотношение (27), получим

$$\frac{d}{dt}\left[m_Z(\overline{m\upsilon})\right] = m_Z(\overline{F}). \qquad (29)$$

Это равенство выражает *теорему моментов относительно оси.* Из уравнения (29) следует, что если $\overline{m_0}\left(\bar{F}\right) = 0$, то $\overline{m_0}\left(m\bar{\upsilon}\right) = const$. Т.е. *если момент действующей силы относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина* *постоянная.* Данный результат имеет место в практически важном случае движения в поле центральных сил (см.§86*в [1]).

3.9. Работа. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии

Элементарной работой силы $\overline{F}$, приложенной в точке M (рис.7), называется скалярная величина

$$dA=F_{\tau}\ ds, \qquad (30)$$

где F_{τ} — проекция силы $\overline{F}$ на касательную M_{τ} к траектории точки M, направленную в сторону перемещения этой точки , ds — модуль элементарного перемещения точки M.

Если разложить силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}_{\tau}$ и $\overline{F}_{n}$, то изменять модуль скорости будет $F_{\tau}=ma_{\tau}=m\ dv/dt$.

Замечая, что $F_{\tau}=F\cos\alpha$, где α — угол между $\overline{F}$ и $M\tau$, получим из (30) другое выражение

$$dA=Fds\cos\alpha . \qquad (31)$$

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha=0$ элементарная работа $dA=Fds$.

Если угол α тупой; то работа отрицательна. В частности, при $\alpha=180°$ элементарная работа $dA=-Fds$.

Если угол $\alpha=90°$, т. е. *если сила направлена перпендикулярно перемещению, то ее работа равна нулю.*

Знак работы имеет следующий смысл: работа положительна, когда составляющая $\overline{F}_{\tau}$ направлена в сторону движения (сила ускоряет движение); работа отрицательна, когда составляющая $\overline{F}\tau$ направлена противоположно направлению движения (сила замедляет движение).

Если учесть, что $ds=|d\overline{r}|$, где $d\overline{r}$ — вектор элементарного перемещения точки, и воспользоваться известным из векторной алгебры понятием о скалярном произведении двух векторов, то равенство (31) можно представить в виде

$$dA=\overline{F}\,d\overline{r} . \qquad (32)$$

Следовательно, *элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки ее приложения.*

Если в формуле (32) выразить скалярное произведение через проекции векторов $\overline{F}$ и $\overline{r}$ на координатные оси и учесть, что $r_x=x$, $r_y=y$, $r_z=z$, то получим *аналитическое выражение элементарной работы*

$$dA=F_x\,dx+F_yd_y+F_zdz, \qquad (33)$$

в котором x, y, z – координаты точки приложения силы $\overline{F}$.

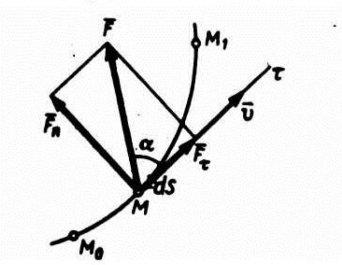


Рис.7

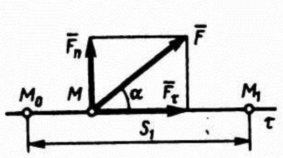


Рис.8

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 (рис.7) вычисляется как криволинейный интеграл

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds, \qquad (34)$$

или

$$A_{(M_0M_1)} = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} \left(F_X dx + F_Y dy + F_Z dz\right).$$

Следовательно, *работа силы на любом перемещении M_0 M_1 равна взятому вдоль этого перемещения криволинейному интегралу от элементарной работы.*

Если величина F_τ постоянна, то из (34), обозначая перемещение M_0 M_1 через s_1, получим

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1 \ . \qquad (35)$$

В частности, такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($\overline{F}=const$), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис.7). В этом случае $F_\tau = F\cos\,\alpha$ =const и

$$A_{(M_0M_1)} = Fs_1 \cos\alpha \ . \qquad (36)$$

Единицей измерения работы в СИ является 1 джоуль (1 Дж=1Н м=1кг м^2/с^2).

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N \ \ A/t_1$ где t_1— время, в течение которого произведена работа A. В общем случае

$$N \ \ dA/dt \quad F_\tau ds/dt \quad F_\tau \upsilon. \qquad (37)$$

Следовательно, *мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость.* Единицей измерения мощности в СИ служит 1 ватт (1 Вт=1Дж/с=1Нм/с).

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина $m\upsilon^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости. Единица измерения кинетической энергии та же, что и работы (в СИ — 1 Дж).

Связь между работой и кинетической энергией выражает теорема об изменении кинетической энергии точки.

Теорема 1.

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Доказательство.

Рассмотрим материальную точку с массой m, перемещающуюся из положения M_0, где она имеет скорость υ_0, в положение M_1 где её скорость υ_1.

Проектируя основной закон динамики $m\overline{a} = \sum \overline{F}_K$ на касательную к траектории точки М, направленную в сторону ее движения, получим

$$m\overline{a}_\tau = \sum \overline{F}_{k\tau} .$$

Входящее сюда касательное ускорение точки представим в виде

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{ds}.$$

В результате найдем, что $m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} = \sum F_{k\tau}$.Умножим обе части этого равенства на ds и внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $F_{k\tau}\, ds=dA_k$, где dA_k — элементарная работа силы $\overline{F}_k$, получим

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum dA_k.$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 н M, найдем окончательно

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

Полученное уравнение и выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде.

3.10. Свободные линейные колебания точки

Теория колебательного движения составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же

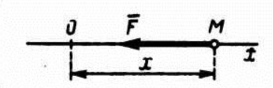


Рис.9

Рассмотрим точку M, движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* $\overline{F}$, направленной к неподвижному центру О и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\overline{F}$ на ось Ox (рис.9) будет

$$Fx= - cx. \qquad (38)$$

Примером, такой силы является сила упругости или сила притяжения.

Найдем закон движения точки M. Составляя дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x, получим

$$m\ddot{x} = F_x \text{ или } m\ddot{x} = - cx.$$

Деля обе части равенства на m и вводя обозначение

$$c/m=k^2$$

приведем уравнение к виду

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0. \qquad (39)$$

Уравнение (39) представляет собой *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.* Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$x-C_1 sinkt-C_2 cosk \qquad (40)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные A и α, такие, что C_1=Acos α, C_2–$Asin$ α, то получим x=A (sin kt cos α +cos kt sin α) или

$$x-Asin(kt \mid \alpha). \qquad (41)$$

Это другой вид решения уравнения (39), в котором постоянными интегрирования являются A и α. Им удобнее пользоваться для общих исследований. Колебания, совершаемые точкой по закону (69), называются *гармоническими колебаниями.* Величина A, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний О, называется *амплитудой* колебаний. Величина $\varphi=kt-\alpha$ называется *фазой* колебаний, а α – *начальной фазой*. Величину k называют *угловой (круговой) частотой колебаний.*

Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом* колебаний. По истечении периода фаза изменяется на 2π. Следовательно,

$$T-2\pi/k.$$

Величина v, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за 1 с, называется *частотой* колебаний

$$v=l/T=k/2\pi.$$

Скорость точки в рассматриваемом движении

$$\upsilon_x \quad \dot{x} \quad Ak\ cos\ (kt \mid \alpha), \qquad (42)$$

а ускорение

$$a_x-\ddot{x}--Ak^2 sin(kt+\alpha). \qquad (43)$$

Т. е. скорость и ускорение также меняются по гармоническому закону.

Найдем теперь значения постоянных интегрирования А и α, используя начальные условия: при $t-0$ $x-x_0$ и $\upsilon_x-\upsilon_0$. Из (41) и (42), получаем

$$x_0=A\ sin\ \alpha,\ \upsilon_0/k=A\ cos\ \alpha.$$

Отсюда, складывая квадраты этих равенств, а затем деля их почленно одно на другое, находим

$$A-\sqrt{x_0^2+\upsilon_0^2/k^2}, \quad tg\alpha=kx_0/\upsilon_0. \qquad (44)$$

В заключение отметим следующие важные свойства свободных колебаний: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных условий; 2) частота k, а следовательно, и период Т колебаний от начальных условий *не зависят* и являются неизменными характеристиками данной колебательной системы; 3) можно показать [1], что постоянная сила $\overline{P}$, не изменяя характера колебаний, смещает центр колебаний в сторону действия силы на величину статического отклонения $\lambda_{cm}=P/c$. Период колебаний пропорционален корню квадратному из статического отклонения

$$T=2\pi\sqrt{m\lambda_{cm}/g}.$$

3.11. Вынужденные колебания. Явление резонанса

Пусть на точку кроме восстанавливающей силы $\overline{F}$ действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\overline{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_x = Q_0 \sin pt. \qquad (45)$$

Эта сила называется гармонической *возмущающей силой*, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными*. Величай p в равенстве (45) является *частотой возмущающей силы*.

Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

Разделим обе части этого уравнения на m и обозначим

$$c/m = k^2, \; Q_0/m = P_0. \qquad (46)$$

Тогда дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt. \qquad (47)$$

Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения (40), а x_2— какое-нибудь частное решение полного уравнения (47).

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = B \sin pt,$$

Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение (47), получим

$$p^2 B \sin pt - k^2 B \sin pt = P_0 \sin pt.$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если

$$B = P_0 / (k^2 - p^2).$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt \, . \qquad (48)$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а значение x_1 дается равенством (40), то общее решение уравнения (47) имеет окончательно вид

$$x = A \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt \, , \qquad (49)$$

где A и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение (49) показывает, что колебания точки складываются из: 1) колебаний с амплитудой A (зависящей от начальных условий) и частотой k, называемых собственными колебаниями; 2) колебаний с амплитудой B (не зависящей от начальных условий) и частотой p, которые называются вынужденными колебаниями,

Практически, благодаря неизбежному наличию тех или иных сопротивлений, собственные колебания будут довольно быстро затухать. Поэтому основное значение в рассматриваемом движении имеют вынужденные колебания, закон которых дается уравнением (48).

Частота p вынужденных колебаний, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде

$$B=\frac{P_0}{\left|k^2-p^2\right|}=\frac{\lambda_0}{\left|1-p^2/k^2\right|}, \qquad (50)$$

где $\lambda_0 = P_0/k^2 = Q_0/c$. Видно, что B зависит от отношения частоты p возмущающей силы к частоте k собственных колебаний. Подбирая разные соотношения между p и k, можно получить вынужденные колебания с различными амплитудами.

В случае, когда *частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний* $p=k$, наступает так называемое явление *резонанса.* Оно заключается в неограниченном возрастании амплитуды колебаний с течением времени. Действительно, при $p=k$ уравнение частного решения $x_2= B\sin pt$ не имеет, и его решение ищется в виде

$$x_2=Ct\cos pt.$$

Тогда $\ddot{x}_2= -2Cp\sin pt - p^2Ct\cos pt$, и подстановка в уравнение (47), дает $-2Cp\sin pt = P_0\sin pt$, откуда $C = -P_0/2p$. В результате закон вынужденных колебаний при резонансе в случае отсутствия сопротивления принимает вид

$$x_2=-(P_0/2p)t\cos pt \text{ или } x_2=(P_0/2p)t\sin(pt-\pi/2). \qquad (51)$$

Как видим, амплитуда вынужденных колебаний при резонансе действительно возрастают пропорционально времени. Сдвиг фаз при резонансе равен $\pi/2$.

3.12. Механическая система. Внутренние и внешние силы. Центр масс

Механической системой называют совокупность взаимодействующих материальных точек или тел, таких, что положение и движение каждой точки или тела зависит от положения и движения всех остальных.

Действующие на механическую систему активные силы $\overline{F_K^A}$ и реакции связей $\overline{N_K}$ разделяют на внешние $\overline{F_K^e}$ и внутренние $\overline{F_k^i}$. *Внешними* называют силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называют силы, с которыми точки или тела данной системы взаимодействуют друг на друга. Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* Дело в том, что по третьему закону динамики любые две точки системы действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \overline{F_k^i}=0.$$

2. Совершенно аналогично, *сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.*

$$\sum \overline{m_0}\ (\overline{F_k^i}) = 0 \text{ и } \sum \overline{m_x}\ (\overline{F_k^i}) = 0.$$

Из данных свойств не следует, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к разным материальным точкам или телам и могут вызвать взаимные перемещения этих точек или тел.

Движение системы зависит также от ее суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M-\sum\ m_k.$$

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_k ее точек и их взаимными положениями, т. е. их координатами x_k, y_k, z_k. Однако оказалось, что при решении многих задач динамики для учета распределения масс достаточно знать не все величины m_k, x_k, y_k z_k, а лишь некоторое, выражаемые через них суммарные характеристики.

Одной из таких величин является *центр масс* системы. О распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести тела, к виду, явно содержащему массу. Для этого положим в названных формулах $p_k{-}m_k\,g$ и $P{-}Mg$, после чего, сократив на g, найдем

$$x_c = \frac{1}{M}\sum m_k x_k,\quad y_c = \frac{1}{M}\sum m_k y_k,\quad z_c = \frac{1}{M}\sum m_k z_k.$$

Геометрическая точка С, координаты которой определяются данными формулами, называется *центром масс* или *центром инерции* механической системы.

Если положение центра масс определять его радиусом- вектором $\overline{r_c}$, то

$$\overline{r_c} = \frac{1}{M}\sum m_k \overline{r_k}, \qquad (52)$$

где $\overline{r_k}$ — радиус- векторы точек, образующих систему.

Из полученных результатов следует, что для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают. Но в отличие от центра тяжести понятие о центре масс сохраняет свой смысл для тела, находящегося в любом силовом поле (например, в центральном поле тяготения), и, кроме того, как характеристика распределения масс, имеет смысл не только для твердого тела, но и для любой механической системы.

3.13. Момент инерции тела относительно оси

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \qquad (53)$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

В дальнейшем будет показано, что осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т. е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Согласно формуле (53) момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $J_k = mh^2$. Единицей измерения момента инерции в СИ является 1 кг м^2.

Для вычисления осевых моментов инерции можно расстояния точек от осей выражать через координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Тогда

$$J_X = \sum m_K \left(Y_K^2 + Z_K^2\right), \quad J_Y = \sum m_K \left(Z_K^2 + X_K^2\right), \quad J_Z = \sum m_K \left(X_K^2 + Y_K^2\right). \qquad (54)$$

Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется скалярная величина ρ_Z, определяемая равенством

$$J_Z = M\rho_Z^2,$$

где M — масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Формулы (53) и (54) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве (2), обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho\, dV$, где ρ — плотность, а V — объем, получим

$$J_Z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad J_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV.$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела. Аналогично формулы (54) для сплошных тел примут вид

$$J_X = \int_{(V)} \rho\left(Y^2 + Z^2\right) dV \text{ и т. д.} \qquad (55)$$

Формулами (55) удобно пользоваться при вычислении моментов инерции однородных тел правильной формы. При этом плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

1. Тонкий однородный стержень длиной l и массой M. Вычислим его момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец A (рис.10). Направим вдоль AB координатную ось Ax. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h = x$, а масса $dm = \rho_1\, dx$, где $\rho_1 = M/l$ — масса единицы длины стержня. В результате формула (55) дает

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно

$$J_A = \int_0^l X^2 dm = \rho_1 \int_0^l X^2 dx = \rho_1 l^3 / 3.$$

$$J_A \; Ml^2 / 3.$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой M. Найдем его момент инерции относительно

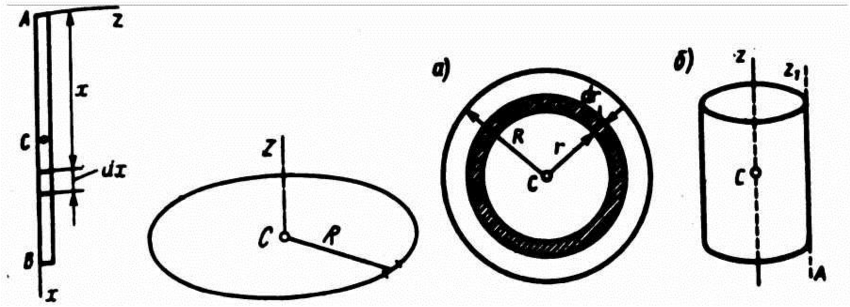


Рис. 10 **Рис. 11** **Рис. 12**

оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца, и проходящей через его центр С (рис.11). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k=R$, то

$$J_C = \sum m_K R^2 = \left(\sum m_K\right) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца

$$J_C=MR^2.$$

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом R относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой M. Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр (рис.12). Для этого выделим элементарное кольцо радиусом r и шириной dr. Площадь этого кольца $2\pi \cdot dr$, а масса $dm=\rho^2 2\pi r \cdot dr$, где $\rho_2=M/\pi r^2$ — масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет $dJ_c=r^2 dm=2\pi\rho_2 r^3 dr$, а для всей пластины

$$J_c = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 dr = \pi\rho_2 R^4 / 2.$$

Заменяя ρ_2 его значением, найдем окончательно

$$J_C=MR^2/2.$$

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции J_z однородного круглого цилиндра массой M и радиусом R относительно его оси (рис.12 *б)*.

4. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел.

а) сплошная прямоугольная пластина массой M со сторонами $AB=a$ *и* $BO=b$ (ось x направлена вдоль стороны AB, ось y — вдоль BD):

$$J_x=Mb^2/3,\ J_y=Ma^2/3;$$

б) прямой сплошной круглый конус массой M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$J_z=0,3MR^2;$$

в) сплошной шар массой M и радиусом R (ось z направлена вдоль диаметра):

$$J_z=0,4MR^2.$$

Моменты инерции неоднородных тел и тел сложной конфигурации определяют экспериментально.

Зная момент инерции тела относительно некоторой оси, можно найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной с помощью следующей теоремы Гюйгенса.

Теорема 1.

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

3.14. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил через $\overline{F}^e_K$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $\overline{F}^i_K$. Если точка имеет при этом ускорение $\overline{a}_K$, то по основному закону динамики $m_k\overline{a}_K=\overline{F}^e_K+\overline{F}^i_K$.

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет

$$\left.\begin{aligned} m_1\overline{a}_1&=\overline{F}^e_1+\overline{F}^i_1,\\ m_2\overline{a}_2&=\overline{F}^e_2+\overline{F}^i_2,\\ &\cdots\cdots\\ m_n\overline{a}_n&=\overline{F}^e_n+\overline{F}^i_n.\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Уравнения (56) представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в векторной форме.*

Проектируя (56) на какие-нибудь координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

При решении многих конкретных задач необходимость находить закон движения каждой из точек системы не возникает, а бывает достаточно найти какие-то характеристики, определяющие движение всей системы в целом. Поэтому уравнения (56) непосредственно не применяют, а применяют другие, разработанные в динамике методы. К их числу относятся методы, которые дают широко используемые в инженерной практике *общие теоремы динамики системы,* получаемые как следствия уравнений (56).

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела) требуется знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, сложим почленно уравнения (56). Тогда получим

$$\sum m_K\overline{a}_K=\sum\overline{F}^e_K+\sum\overline{F}^i_K. \tag{57}$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы (52) для радиус-вектора центра масс имеем

$$\sum m_K \bar{r}_K = M\bar{r}_C .$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени, найдем

$$\sum m_k \frac{d^2\bar{r}_K}{dt^2} = M\frac{d^2\bar{r}_C}{dt^2}, \quad \sum m_K \bar{a}_K = M\bar{a}_C, \tag{58}$$

где $\bar{a}_c$ — ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \bar{F}^i_K$ =0, равенство (57) принимает

$$M\bar{a}_c - \sum \bar{F}^e_K . \tag{59}$$

Уравнение (59) выражает теорему о движении центра масс системы.

Теорема 1.

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. Сравнивая уравнение (59) с уравнением движения материальной точки, приходим к другому выражению теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проектируя обе части равенства (59) на координатные оси, получим *дифференциальные уравнения движения центра масс*

$$M\ddot{x}_c = \sum F^e_{Kx}, \quad M\ddot{y}_C = \sum F^e_{KY}, \quad M\ddot{z}_C = \sum F^e_{KZ} . \tag{60}$$

Значение доказанной теоремы состоит в том, что она дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений (60) видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела,* т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким, образом, *поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела.*

Кроме того, теорема 1. позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

3.15. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы называют векторную величину Q, равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы

$$\bar{Q} = \sum m_K \bar{\upsilon}_K \tag{61}$$

Так как $\sum m_K \bar{r}_K = M\bar{r}_C$, то, беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_K \frac{d\overline{r}_K}{dt} = M\frac{d\overline{r}_C}{dt} \quad или \quad \sum m_K \overline{\upsilon}_K = M\overline{\upsilon_C}.$$

Отсюда находим, что

$$\overline{Q} = M\overline{\upsilon_C}, \tag{62}$$

т. е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.* Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел. Количество движения можно рассматривать как характеристику поступательного движения системы, а при сложном движении — как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс.

Рассмотрим сумму дифференциальных уравнений движения системы

$$\sum m_K \overline{a}_K = \sum \overline{F}_K^e + \sum \overline{F}_K^i .$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_K \overline{a}_K = \frac{d}{dt}\sum m_K \overline{\upsilon}_K = \frac{d\overline{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F_K^e} . \tag{63}$$

Уравнение (63) выражает т е о р е м у об и з м е н е н и и к о л и ч е с т в а движения си с т е м ы в д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й форме.

Т е о р е м а 1.

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

В проекциях на координатные оси будет

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{Kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{KY}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{KZ}^e . \tag{64}$$

Пусть в момент времени $t=0$ количество движения системы равно $\overline{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\overline{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства (64) на dt и интегрируя, получим

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \overline{F}_K^e dt .$$

Так как интегралы, стоящие справа, дают, импульсы внешних сил, то

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_K^e . \tag{65}$$

Данное уравнение выражает т е о р е м у об и з м е н е нии к о л и ч е с т в а д в и ж е н и я с и с т е м ы в и н т е г р а л ь ной ф орме.

Т е о р е м а 2.

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов, действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси будет:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S^e_{KX}, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S^e_{Ky}, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S^e_{KZ}. \qquad (66)$$

Практическая ценность теоремы состоит в том, что при решении задач она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы.

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \overline{F^e_K} = 0.$$

Тогда из уравнения (63) следует, что при этом $\overline{Q}$=const. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, *Ox)* равна нулю;

$$\sum F^e_{KX} = 0.$$

Тогда из уравнений (64) следует, что при этом Q_x=const. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты выражают *закон сохранения количества движения системы.*

3.16. Теорема об изменении момента количества движения системы

Моментом количества движения (кинетическим моментом) системы относительно данного центра О, называется векторная величина $\vec{K}_o$, *равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно данного центра*

$$\vec{K}_o = \sum \overline{m}_o(m_K \overline{\upsilon}_K). \qquad (67)$$

Аналогично определяются моменты количеств движения относительно координатных осей

$$K_x = \sum m_x(m_K \overline{\upsilon}_K), \; K_y = \sum m_y(m_K \overline{\upsilon}_K), \; K_z = \sum m_z(m_K \overline{\upsilon}_K). \qquad (68)$$

В качестве важного конкретного примера найдем K_z тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *z*.

Для любой точки, отстоящей от оси вращения на расстояние h_k, линейная скорость υ_k=ω h_k. Тогда

$$K_z = \sum m_z(m_K \overline{\upsilon}_K) = \varpi \sum m_k h_k^2.$$

Последняя сумма представляет собой момент инерции тела относительно оси *z*. Окончательно

$$K_z = J_z\omega. \qquad (69)$$

Т. е. *момент инерции тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела на угловую скорость.*

Из теоремы 1. пункта 3.7 и равенства нулю суммы моментов всех внутренних сил следует *теорема моментов для системы.*

Теорема 1.

Производная по времени от момента количества движения системы относительно центра О равна сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{K}_o}{dt} = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k^e). \tag{70}$$

Проектируя (70) на неподвижные оси координат, получим теорему моментов относительно любой неподвижной оси

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_k^e), \ \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\overline{F}_k^e), \ \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e). \tag{71}$$

Данная теорема широко используется при изучении вращательного движения тела, в теории гироскопа, в теории удара и т.д.

Из теоремы 1. напрямую следует *закон сохранения момента количества движения системы.*

Если сумма моментов всех внешних сил равна нулю, то момент количества движения системы будет постоянен.

3.17. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы называют скалярную величину, равную сумме кинетической энергии всех ее точек

$$T = \sum m_k \upsilon_k^2 / 2. \tag{72}$$

При поступательном движении все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс υ_c. Тогда

$$T_{пост} = \sum M\upsilon_c^2 / 2. \tag{73}$$

При вращательном движении вокруг неподвижной оси z

$$T_{вр} = J_z\omega^2/2. \tag{74}$$

При плоскопараллельном движении

$$T_{плоск} = \sum M\upsilon_c^2 / 2 + J_c\,\omega^2/2. \tag{75}$$

Наконец, в общем случае

$$T = \sum M\upsilon_c^2 / 2 + J_{cp}\,\omega^2/2, \tag{76}$$

где CP- ось, проходящая через полюс (см. рис.13).

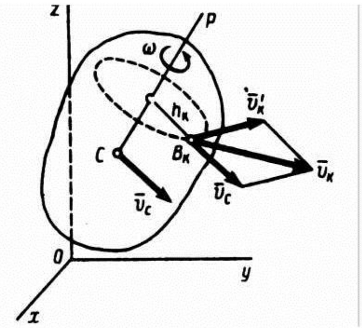


Рис. 13

Используя теорему 1. пункта 3.9, легко получить теорему об изменении кинетической энергии системы, как в дифференциальной, так и в интегральной форме

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i\,,\;\; T_1 - T_o = \sum A_k^e + \sum A_k^i\,. \qquad (77)$$

Теорема 1.

Изменение кинетической энергии системы равно сумме работ на данном перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Кроме кинетической, система может обладать и потенциальной энергией. Например, в поле силы тяжести $П-mgz;$ в поле силы упругости $П-кx^2/2$. Их сумму называют полной механической энергией. Тогда справедлив закон сохранения энергии.

При движении системы под действием потенциальных сил ее полная энергия остается величиной постоянной.

Кратко рассмотренные в пунктах 3.12-3.15 общие теоремы динамики механической системы широко применяются для решения задач динамики твердого тела (см., например, главу XXVI в [1]).

Литература

[1] Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики /С.М.Тарг.-М.: Высш. шк., 2003.-416 с.

[2] Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах.Т.1 /И.М.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон.-М.: Наука, 1990.-670 с.

[3] Олофинская В.П. Техническая механика / В.П.Олофинская.-М.: ФРУМ.-ИНФРА-М, 2008.-349 с.

[4] Мовнин М.С. Основы технической механики / М.С. Мовнин, А.Б.Израелит, А.Г.Рубашкин.-СПб.: Политехника, 2000.-286 с.

[5] Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике /И.В.Мещерский.-М.: Наука, 1986.-448 с.