

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКИХ
ОЛИМПИАД**

Содержание

Введение	4	
СТАТИКА		
		<i>Задачи Решения</i>
Статика твердого тела	6	35
Статика системы	9	40
КИНЕМАТИКА		
Кинематика составного движения точки	15	49
Кинематика плоского движения твердого тела и системы	17	52
ДИНАМИКА		
Динамика точки	21	55
Динамика твердого тела	23	59
Динамика системы	27	64
Список литературы	74	

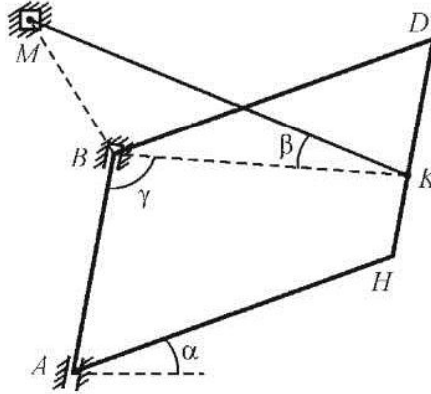
ЗАДАЧИ

СТАТИКА

Статика твердого тела

С1 (1980). Однородная прямоугольная плита $ABDH$ массы m удерживается в равновесии тросом KM , подшипником A и подпятником B . Плита образует угол α с горизонтом и прямой угол с отрезком BM ; положение троса задано углами β и γ ; $DK = k \cdot DH$, где k – заданный коэффициент.

Найти компоненты реакций подшипника A и подпятника B (по осям какой-либо прямоугольной системы координат) и модуль T силы натяжения троса.



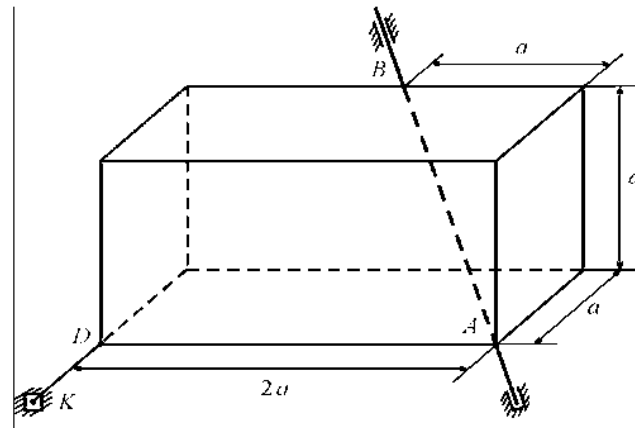
К задаче С1

С2 (1981). Однородный брус массы m , имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, может вращаться без трения вокруг неподвижной оси AB . Брус удерживается в равновесии тросом DK .

Найти модуль T силы натяжения троса.

С3 (1983). Однородный тяжелый стержень OA укреплен на сферическом шарнире в точке O и опирается на неподвижную вертикальную шероховатую плоскость. Коэффициент трения между стержнем и плоскостью равен f . Расстояния $OB = a$ и $BA = r$ известны.

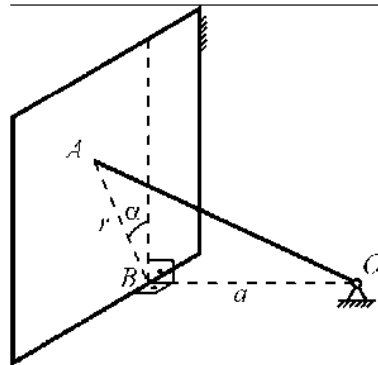
Найти, при каких значениях угла $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ стержень может находиться в равновесии.



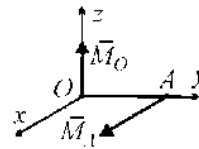
К задаче С2

С4 (1992). На твердое тело действует система сил, главные моменты которой относительно точек O и A отличны от нуля и направлены так, как показано на рисунке.

Доказать, что такая система сил не имеет равнодействующей.



К задаче С3



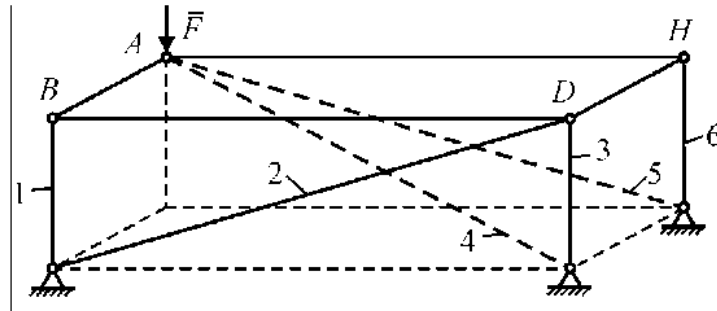
К задаче С4

С5 (1993). Прямоугольная однородная плита $ABDH$ массы m удерживается в равновесии шестью стержнями, массами которых пренебречь. На плиту действует вертикальная сила \bar{F} .

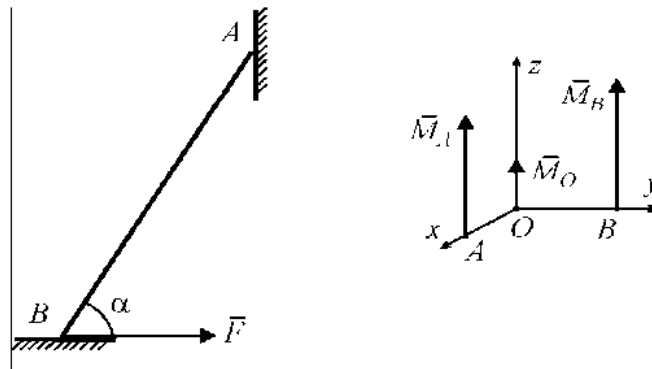
Доказать, что усилия в стержнях не зависят от размеров конструкции.

C6 (1996). Однородный стержень AB массы m опирается концом A на шероховатую вертикальную плоскость (коэффициент трения равен f), а концом B – на гладкую горизонтальную плоскость. К точке B приложена заданная постоянная горизонтальная сила \vec{F} .

Найти область значений угла $0 < \alpha < \pi/2$, при которых возможно равновесие стержня.



К задаче C5



К задаче C6

К задаче C7

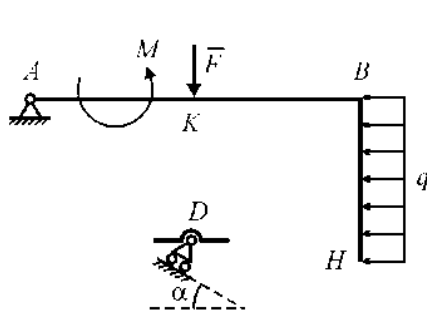
C7 (1997). На твердое тело действует система сил, главные моменты которой относительно точек O, A, B направлены так, как показано на рисунке, и модули их: $M_O = M$, $M_A = 4M$, $M_B = 5M$; расстояния $OA = OB = \ell$.

Доказать, что такая система сил приводится к равнодействующей, и найти модуль R^* равнодействующей.

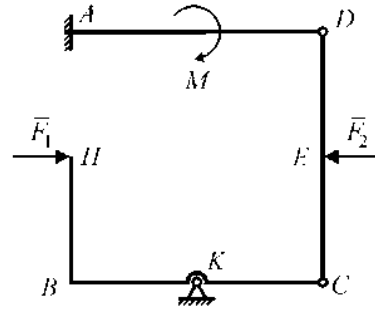
C8 (2008). К балке ABH приложены сила \vec{F} , равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = F/\ell$ и пара сил, момент

которой $M = F\ell$. Силой тяжести пренебречь. Расстояния $AK = KB = BH = \ell$.

В какой точке D отрезка AB и под каким углом α следует расположить подвижную опору, чтобы балка находилась в равновесии (в показанном на рисунке положении) и при этом модуль реакции в шарнире A равнялся нулю?



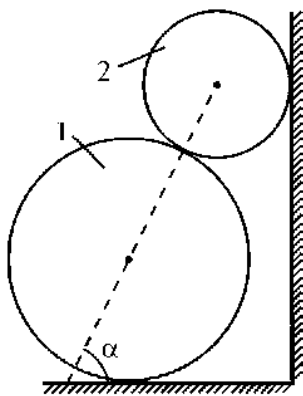
К задаче С8



К задаче С9

Статика системы

С9 (1975). Модули сил $F_1 = F_2 = F$, момент M и расстояния $AD = \ell$, $DE = EC = CK = KB = BH = \ell/2$ заданы. Система находится в равновесии.



К задаче С 10

Найти модуль R_D реакции в шарнире D и момент M_A в заделке A , составив минимальное число уравнений равновесия.

С10 (1976). Однородные шероховатые цилиндры 1 и 2 массами m_1 и m_2 опираются на горизонтальную и вертикальную шероховатые плоскости. Прямая, соединяющая центры цилиндров, образует угол $0 < \alpha < \pi/2$ с горизонтом. Система находится в равновесии.

Найти, в каких пределах могут лежать значения коэффициентов трения: f_1 – между цилиндром 1 и горизонтальной плоскостью,

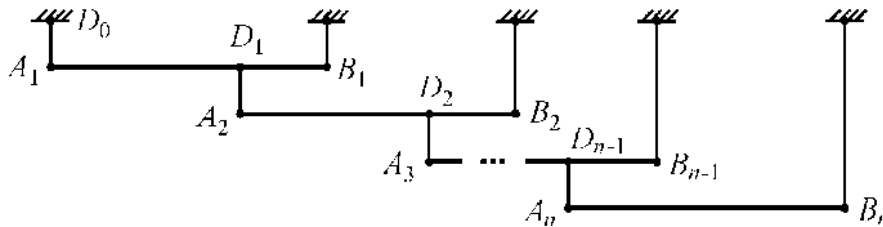
f_2 – между цилиндром 2 и вертикальной плоскостью, f – между цилиндрами.

C11 (1979). Система, состоящая из n одинаковых однородных горизонтальных стержней массы m каждый, находится в равновесии. Стержни укреплены посредством тросов.

$$D_1B_1/A_1B_1 = D_2B_2/A_2B_2 = \dots = D_{n-1}B_{n-1}/A_{n-1}B_{n-1} = k,$$

где k – заданный коэффициент. Известно, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_\infty$, где T_n – натяжение троса A_1D_0 .

Найти T_∞ .



К задаче C11

C12 (1984). Система расположена в вертикальной плоскости. Однородные стержни OA и AB имеют массы m_1 и m_2 соответственно. Угол α задан. Точки D и K соединены нитью; $OD = DA$, $AK = KB$. Система находится в равновесии в показанном на рисунке положении.

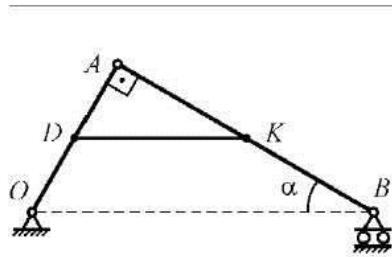
Найти натяжение T нити DK .

C13 (1985). Шероховатая тяжелая однородная балка OA , закрепленная одним концом в шарнире O , опирается в точке B на тяжелый шероховатый однородный цилиндр, лежащий на неподвижной шероховатой горизонтальной плоскости. Коэффициенты трения между балкой и цилиндром и между плоскостью и цилиндром одинаковы и равны f .

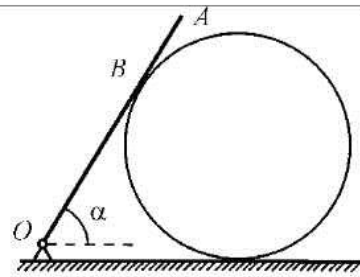
Найти, при каких значениях угла $0 < \alpha < \pi/2$ система может находиться в равновесии.

C14 (1986). Система расположена в горизонтальной плоскости. Стержень может скользить в муфте, к которой приложена пара сил с заданным постоянным моментом M . Расстояние $OB = a$, угол α и жесткость c пружины известны. Система находится в равновесии в показанном на рисунке положении.

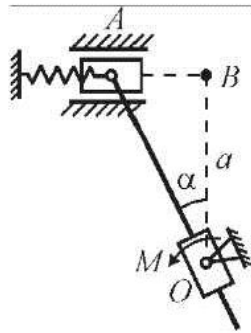
Найти деформацию λ пружины.



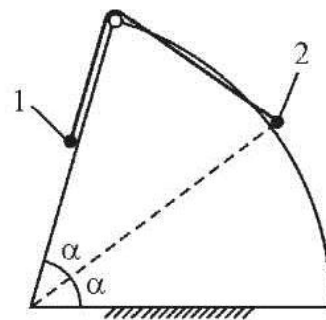
К задаче C12



К задаче C13



К задаче C14



К задаче C15

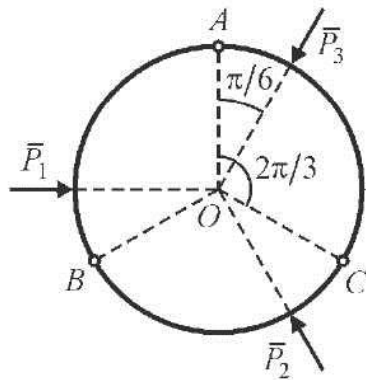
C15 (1988). Точки 1 и 2, связанные нерастяжимой нитью, находятся на сторонах неподвижного гладкого кругового сектора с углом 2α . Сектор расположен в вертикальной плоскости, его нижняя сторона горизонтальна. Масса точки 1 равна m_1 . Система находится в равновесии.

Найти массу m_2 точки 2.

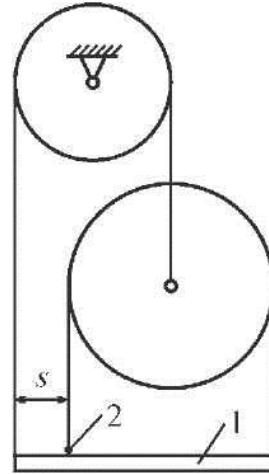
C16 (1990). Кольцо состоит из трех одинаковых дуг \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , соединенных шарнирами. К дугам приложены силы \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 ,

имеющие одинаковые модули P . Силами тяжести пренебречь. Система находится в равновесии.

Найти модуль N_A реакции в шарнире A , составив минимальное число уравнений равновесия.



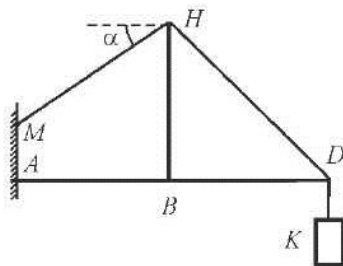
К задаче C16



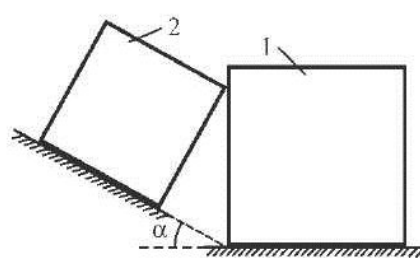
К задаче C17

C17 (1995). Система расположена в вертикальной плоскости и находится в равновесии. Масса однородной горизонтальной платформы 1 длины ℓ равна m_1 . Масса лежащей на платформе точки 2 равна m_2 . Массами блоков и тросов пренебречь.

Найти расстояние s от точки до края платформы.



К задаче C18



К задаче C19

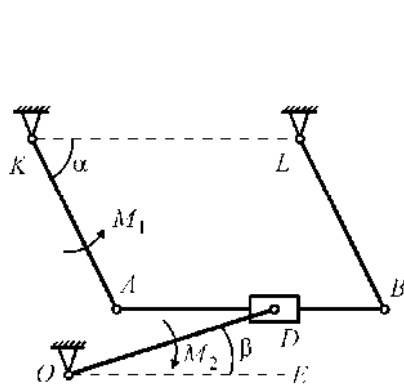
C18 (1998). Однородный T-образный стержень массы m_1 заделан в стену в точке A . Через стержень перекинута нить $MHDK$, к

которой подвешен груз K массы m_2 . Расстояния $AB=BD=BH=\ell$; угол α известен. Система находится в равновесии.

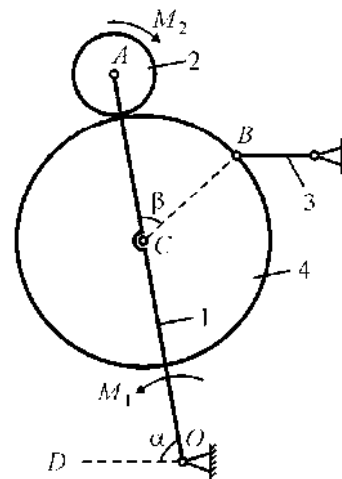
Найти момент M_A в заделке.

C19 (1999). Однородный куб 1 с длиной ребра ℓ_1 установлен на неподвижной горизонтальной шероховатой плоскости; коэффициент трения равен f . Однородный куб 2 с длиной ребра ℓ_2 установлен на неподвижной гладкой плоскости, образующей угол $0 < \alpha < \pi/2$ с горизонтом. Трение между кубами отсутствует.

Найти, при каких значениях отношения масс кубов m_2/m_1 система может находиться в равновесии.



К задаче C20



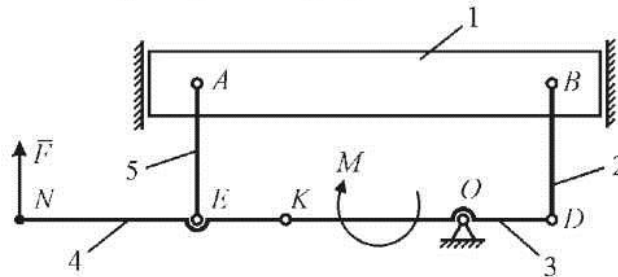
К задаче C21

C20 (2000). Механизм расположен в вертикальной плоскости. По горизонтальному стержню AB может перемещаться ползун D , соединенный шарниром со стержнем OD . Масса ползуна D равна m . К стержню OD приложена пара сил, момент которой равен M_2 ; $KA=LB=\ell_1$; $KL=AB$; $OD=\ell_2$; $\angle AKL=\alpha$; $\angle DOE=\beta$. Массой стержней и трением пренебречь. Механизм находится в равновесии в показанном на рисунке положении.

Найти момент M_1 пары сил, приложенной к стержню KA .

C21 (2001). Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Длина стержня 1 $OA = \ell$. Радиусы зубчатых колес 2 и 4 равны r и R соответственно. Углы: $\angle AOD = \alpha$; $\angle ACB = \beta$; стержень 3 параллелен прямой OD . К стержню 1 приложена пара сил с моментом M_1 . Механизм находится в равновесии в показанном на рисунке положении.

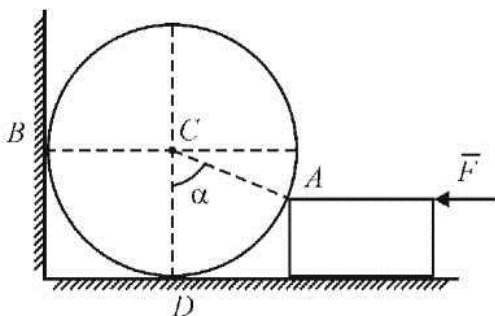
Найти момент M_2 пары сил, приложенной к колесу 2.



К задаче C22

C22 (2004). Механическая система состоит из пяти шарнирно соединенных твердых тел – планки 1 (может скользить в неподвижных направляющих) и стержней 2, 3, 4, 5. Расстояния: $DO = \ell$, $OK = 2\ell$, $KE = \ell$, $EN = 2\ell$. К стержню 3 приложена пара сил, заданный момент которой равен M . К точке N приложена вертикальная сила \bar{F} . Силами тяжести пренебречь. Система находится в равновесии в показанном на рисунке положении.

Найти модуль силы \bar{F} .



К задаче C23

C23 (2008). Однородный цилиндр массы m касается вертикальной стены, горизонтального пола и бруска. Угол $0 < \alpha < \pi/2$ известен. Влиянием трения пренебречь.

С какой максимальной горизонтальной силой F_{\max} можно

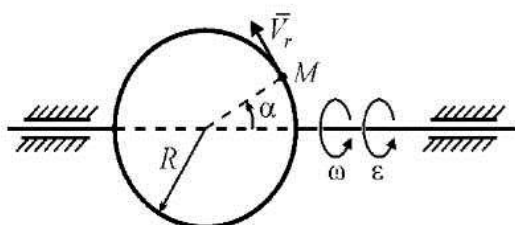
прижимать брусок, чтобы в показанном на рисунке положении система оставалась в равновесии (цилиндр не приподнимался над полом)?

КИНЕМАТИКА

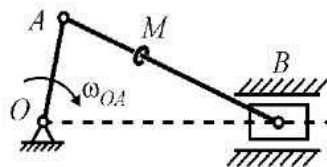
Кинематика составного движения точки

К1 (1976). Диск радиуса R вращается вокруг своего диаметра так, что в каждый момент времени $\omega^2 = \varepsilon \neq 0$ (ω – модуль угловой скорости, ε – модуль углового ускорения). По окружности диска движется точка M ; модуль (переменной) относительной скорости точки $V_r = \omega R$.

Найти угол α для тех положений точки M , в которых абсолютное ускорение этой точки лежит в плоскости диска.



К задаче К1



К задаче К2

К2 (1985). Кривошип OA длины R вращается с постоянной угловой скоростью ω_{OA} . По шатуну AB длины ℓ скользит колечко M по закону $AM = kt^2/2$, где $k > 0$ – заданная величина. В момент времени t_0 кривошип занимает правое горизонтальное положение.

Найти модуль V абсолютной скорости и модуль a абсолютного ускорения колечка в этот момент времени.

К3 (1986). Колечко A скользит по неподвижному стержню 1, изогнутому по дугам двух полуокружностей радиусами r и R , и приводит стержень 2 во вращение вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. Известно, что

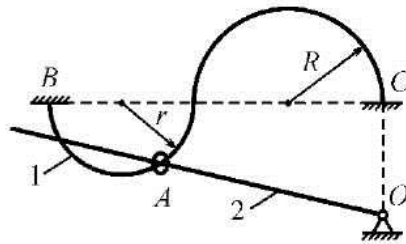
$$\vec{BA} = s(t) = \pi r (t/t_0)^2, \quad OC = kR,$$

где t_0, k – заданные величины.

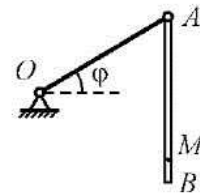
Найти угловую скорость ω стержня 2 в момент времени $t = t_0$.

К4 (1990). Кривошип OA длины R вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi(t) = kt^2/2$, где $k > 0$ – заданная величина. По стержню AB , сохраняющему вертикальное положение, движется точка M по закону $AM = kRt^2/2$.

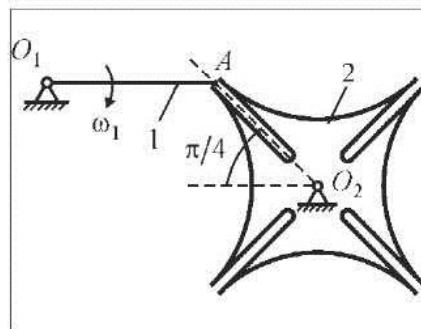
Найти модуль V абсолютной скорости и модуль a абсолютного ускорения точки M в произвольный момент времени t .



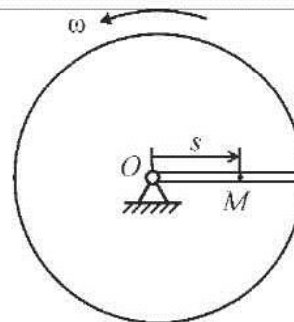
К задаче К3



К задаче К4



К задаче К5



К задаче К6

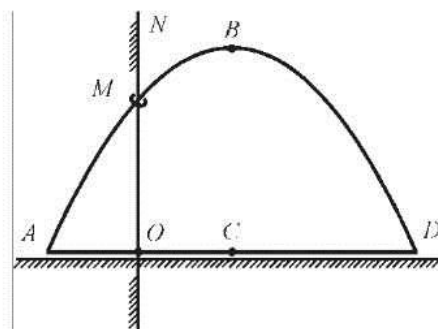
К5 (2002). В механизме мальтийского креста стержень 1 и крест 2 вращаются вокруг осей O_1 и O_2 , перпендикулярных плоскости рисунка. Длина стержня $O_1A = \ell$; угловая скорость ω_1 стержня постоянна. Точка A стержня движется в прямолинейной прорези креста. В показанном на рисунке положении механизма расстояние $O_2A = R$.

Найти в этом положении механизма модуль V_r скорости и модуль a_r ускорения точки A относительно креста.

К6 (2007). Диск вращается вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω . По радиусу диска движется точка M так, что ее абсолютная скорость составляет постоянный угол α с отрезком OM . В начальный момент времени $s = s_0$.

Найти закон $s(t)$ движения точки относительно диска.

К7 (2008). Колечко M соединяет прямолинейный вертикальный стержень NO и стержень ABD , имеющий форму дуги параболы. Стержень NO неподвижен; стержень ABD скользит по неподвижной горизонтальной плоскости по закону $s(t) = OC = ut$, где $u = \text{const} > 0$.



К задаче К7

Расстояния $BC = \ell_1$, $AC = CD = \ell_2$.

Найти модуль V абсолютной скорости колечка M в момент времени $t_1 = \ell_2 / (3u)$.

Кинематика плоского движения твердого тела и системы

К8 (1993). Диск радиуса R катится с проскальзыванием по неподвижной плоскости. В некоторый момент времени известны \vec{V}_C , \vec{a}_C ; известно также, что $a_B = 0$, и задано направление поворота диска (величина ω не задана).

Найти в этот момент времени модули V_A и V_D скоростей точек A и D .

К9 (1995). Длины стержней $OA = AB = \ell$. В показанном на рисунке положении механизма $\angle DOA = \angle OAB = \pi/2$, $\angle BDO = \alpha$; скорость \vec{V}_D и угловая скорость ω_{OA} известны.

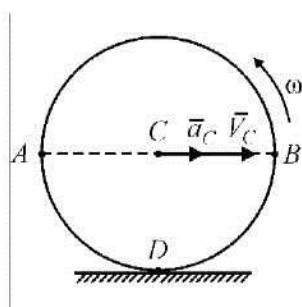
Найти в этом положении модуль V_B скорости точки B .

K10 (1996). Стержень 1 длины $2R$ вращается вокруг перпендикулярной рисунку неподвижной оси O по закону

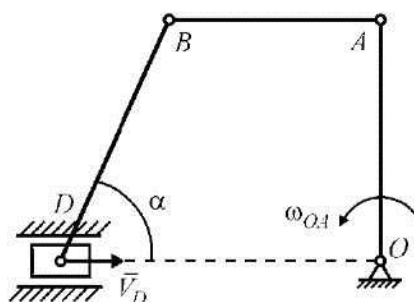
$$\varphi_1(t) = (\pi/3)\sin(\pi t/3t_0),$$

где $t_0 > 0$ – заданная величина. Конiec A стержня шарнирно соединен с диском 2 радиуса R , который может скользить по неподвижным прямолинейным направляющим.

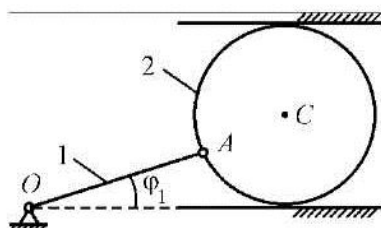
Найти модуль V_C скорости и модуль a_C ускорения центра C диска в момент времени $t = t_0/2$.



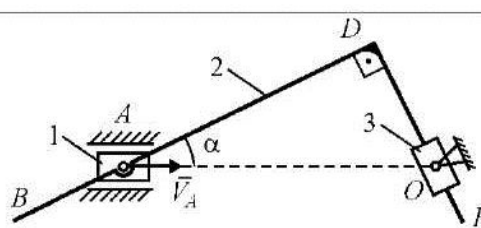
К задаче K8



К задаче K9



К задаче K10



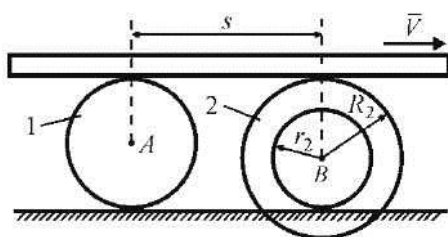
К задаче K11

K11 (1997). В механизме движение от ползуна 1 передается шарнирно связанному с ним звену 2, элемент DE которого проходит через втулку 3. Втулка вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. В данный момент времени $AO = a$, $\angle DAO = \alpha$, \vec{V}_A – известна.

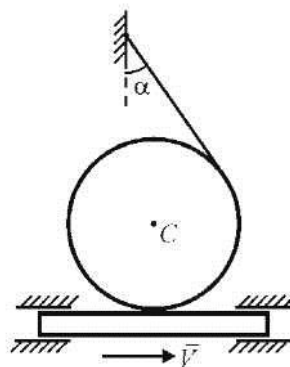
Найти угловую скорость ω_2 звена 2 и расстояние AK до точки K , расположенной на участке BD звена 2, скорость которой направлена вдоль прямой BD .

K12 (1998). Из положения, показанного на рисунке, катки 1 и 2 начинают катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Проскальзывание доски также отсутствует. Начальное расстояние s , постоянная скорость доски \bar{V} и радиусы R_2 , r_2 известны.

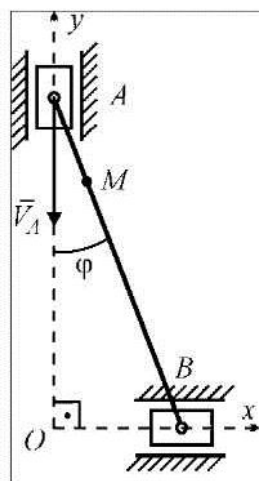
Найти промежуток времени T , через который каток 1 столкнется с катком 2.



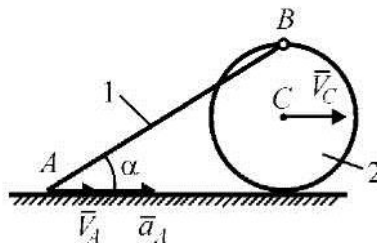
К задаче K12



К задаче K13



К задаче K14



К задаче K15

K13 (1999). Колесо соприкасается без проскальзывания с рейкой, которая движется с горизонтальной скоростью \bar{V} . На колесо намотана нить, образующая в данный момент времени угол α с вертикалью.

Найти в этот момент времени модуль V_C скорости центра C колеса.

K14 (2000). Точка A стержня AB движется с известной постоянной скоростью \vec{V}_A . Длина стержня $AB = \ell$. Точка M стержня находится на расстоянии $AM = \ell/4$ от точки A .

Найти модуль a_M ускорения точки M как функцию угла φ , который стержень образует с осью Oy ($0 < \varphi < \pi/2$).

K15 (2001). Диск 2 радиуса R катится со скольжением по горизонтальной плоскости. Стержень 1 соединен с диском 2 шарниром B . Конец A стержня скользит по плоскости. Центр C диска движется с заданной постоянной скоростью \vec{V}_C . В тот момент времени, когда точка B занимает показанное на рисунке верхнее положение, стержень образует угол α с плоскостью и точка A имеет скорость \vec{V}_A и ускорение \vec{a}_A .

Найти в этот момент времени угловое ускорение ε_2 диска.

ДИНАМИКА

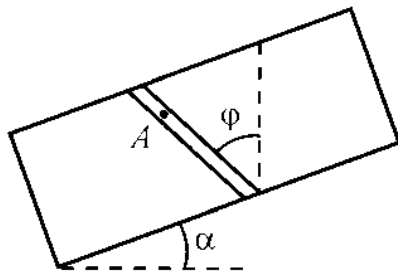
Динамика точки

Д1 (1976). Точка массы m брошена с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью \bar{V}_0 . На точку действует постоянная сила тяжести и сила сопротивления, модуль которой пропорционален квадрату скорости: $F_{\text{сопр}} = k m V^2$ ($k > 0$ – заданный коэффициент).

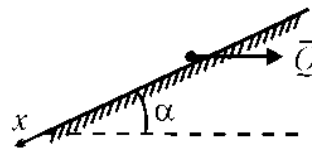
Найти модуль V_1 скорости точки в момент падения точки на Землю.

Д2 (1977). В доске, образующей угол α с горизонтом, просверлен прямолинейный канал. Тяжелая материальная точка A начинает движение в верхнем отверстии канала без начальной скорости.

Найти угол φ , образуемый каналом с вертикалью, при котором время движения точки в канале будет наименьшим.



К задаче Д2



К задаче Д3

Д3 (1980). Точка массы m находится на шероховатой плоскости, образующей угол α с горизонтом. Коэффициент трения между точкой и плоскостью равен f . На точку действует сила \bar{Q} , направленная по горизонтали вправо; ее модуль $Q = k m g$, где $k > 0$ – заданная постоянная. Начальная скорость точки равна нулю.

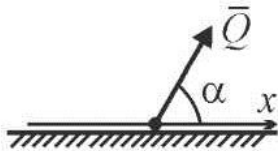
Найти проекцию a_x ускорения точки на ось x .

Д4 (1988). Точка массы m находится на горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения между точкой и плоскостью равен f . На точку действует сила \bar{Q} , направленная под углом $0 < \alpha < \pi/2$ к горизонту; ее модуль $Q = kt$, где $k > 0$ – заданная постоянная. Начальная ($t = 0$) скорость и начальная координата x точки равны нулю.

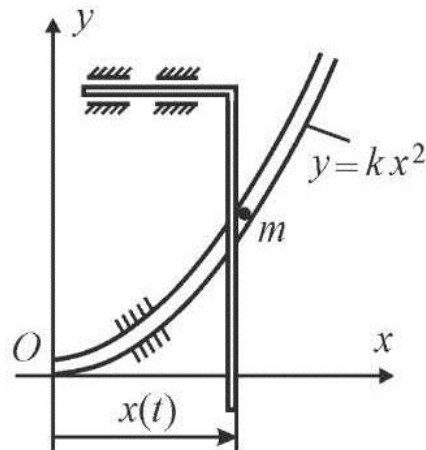
Найти зависимость $x(t)$ координаты точки от времени до момента отрыва точки от плоскости.

Д5 (1997). Точка массы m движется в вязкой среде вдоль оси x под действием силы сопротивления, модуль которой $F_{\text{сопр}} = kxV$, где $k > 0$ – заданный постоянный коэффициент, x – координата точки, V – модуль скорости точки. Силой тяжести пренебречь. Начальные условия (при $t = 0$): $x = 0$, $\dot{x} = V_0 > 0$.

Найти закон $x(t)$ движения точки.



К задаче Д4



К задаче Д6

Д6 (2005). Вертикальный гладкий стержень толкает по гладкому неподвижному желобу точку массы m . Желоб имеет форму параболы; уравнение параболы: $y = kx^2$ ($k = \text{const} > 0$). Закон поступательного движения стержня: $x(t) = ut$ ($u = \text{const} > 0$). Силой тяжести пренебречь.

Найти модуль $N(t)$ силы, с которой стержень действует на точку.

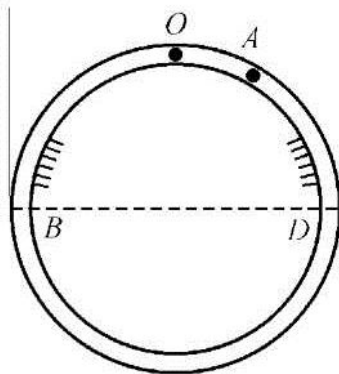
Д7 (2009). Тяжелая материальная точка A находится в неподвижной гладкой трубке. Трубка расположена в вертикальной плоскости и имеет форму окружности радиуса R . Точка начинает движение из положения O с пренебрежимо малой начальной скоростью.

Найти зависимость модуля a ускорения точки от высоты h точки над горизонтальным диаметром BD трубки.

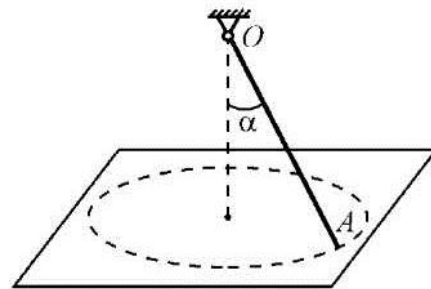
Динамика твердого тела

Д8 (1974). Тонкий прямолинейный однородный стержень длины ℓ и массы m движется вокруг неподвижной точки O , опираясь свободным концом A на гладкую горизонтальную плоскость. Угол $0 < \alpha < \pi/2$ задан.

Найти постоянную угловую скорость ω стержня, при которой давление стержня на плоскость равно нулю.



К задаче Д7



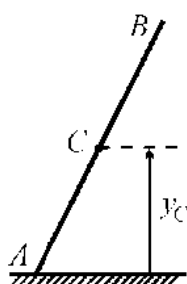
К задаче Д8

Д9 (1978). Тонкий однородный стержень AB массы m и длины 2ℓ падает, скользя концом A по гладкой горизонтальной плоскости. В начальный момент времени стержень занимал вертикальное положение; начальными скоростями точек стержня пренебречь.

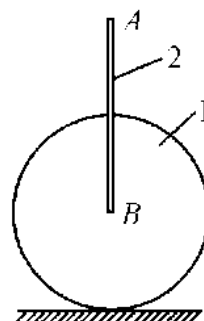
Найти модуль реакции $N(y_C)$ плоскости как функцию высоты y_C центра масс C стержня над плоскостью.

Д10 (1981). Однородный диск 1 массы m и радиуса R жестко скреплен с тонким однородным стержнем 2 массы m и длины $2R$ (точка B стержня совпадает с центром диска). Это составное тело начинает движение из показанного на рисунке положения. Начальными скоростями точек тела пренебречь. Диск катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания.

Найти модуль V_A скорости точки A в момент ее удара о плоскость.



К задаче Д9



К задаче Д10

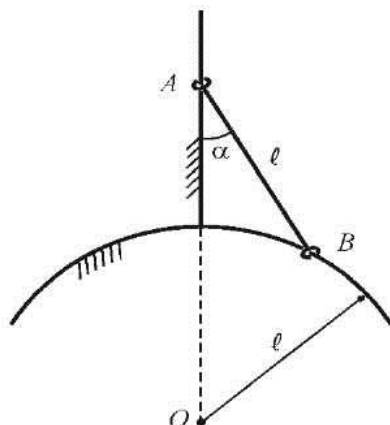
Д11 (1985). Расположенный в вертикальной плоскости однородный стержень AB длины ℓ скользит концом A по гладкой вертикальной прямой, а концом B – по гладкой вертикальной окружности радиуса ℓ . Масса стержня равна m_1 , масса каждого из колечек A и B равна m_2 . В начальный момент времени угол $\alpha = 0$; начальными скоростями точек стержня пренебречь.

Найти модуль V_A скорости точки A в момент времени, когда угол $\alpha = \pi/6$.

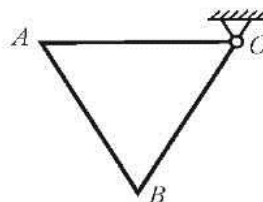
Д12 (1990). Треугольная рамка, составленная из одинаковых тонких однородных стержней массы m каждый, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Рамка начинает движе-

ние с угловой скоростью, равной нулю, из положения, в котором сторона OA горизонтальна.

Найти модуль N реакции в шарнире O в момент времени, когда сторона AB станет горизонтальной.



К задаче Д11



К задаче Д12

Д13 (1998). Однородный диск радиуса R раскручен до угловой скорости ω_0 и поставлен на неподвижную шероховатую плоскость, образующую угол $0 \leq \alpha < \pi/2$ с горизонтом. Начальная скорость центра масс C диска равна нулю. Коэффициент трения скольжения между диском и плоскостью равен f . Трением качения пренебречь.

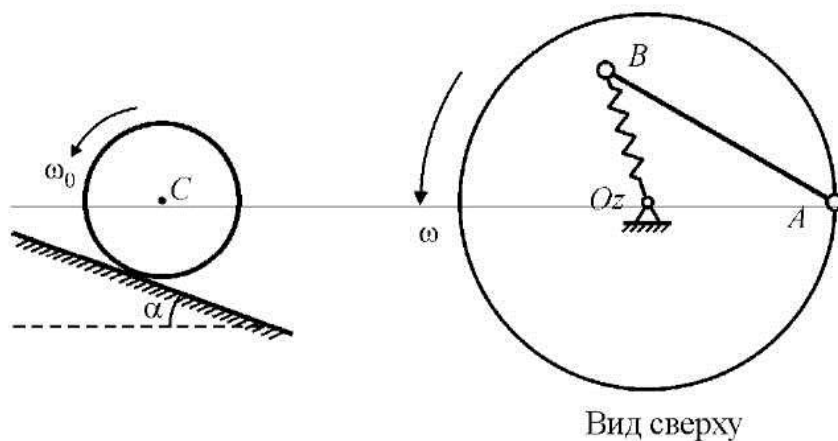
Найти промежуток времени T , через который прекратится проскальзывание диска по плоскости.

Д14 (2003). Горизонтальный диск радиуса r вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz . На диске с помощью шарнира A и пружины OB укреплен однородный стержень AB . Длина стержня $L = r\sqrt{2}$, масса стержня равна m , жесткость пружины равна c , длина недеформированной пружины $\ell_0 = r/2$. Шарнир B может скользить по диску. При некоторой постоянной угловой скорости диска стержень относительно диска не движется и длина пружины $\ell = r$.

Найти угловую скорость ω диска.

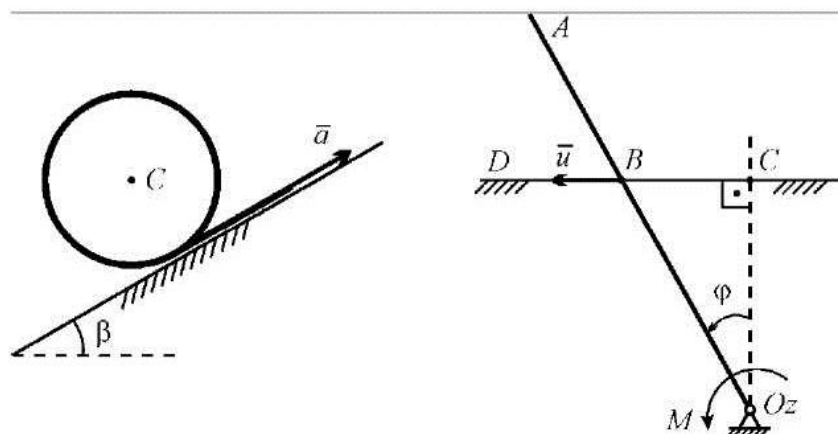
Д15 (2004). На однородный диск намотана невесомая нить. Свободный конец нити тянут вдоль гладкой неподвижной наклонной плоскости с постоянным абсолютным ускорением \bar{a} . Угол наклона плоскости к горизонту равен β . Проскальзывание между диском и нитью отсутствует.

Найти модуль a_C ускорения центра диска.



К задаче Д13

К задаче Д14



К задаче Д15

К задаче Д16

Д16 (2007). Однородный стержень OA длины 2ℓ и массы m расположен в горизонтальной плоскости и вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz . На стержень действует пара сил, момент которой M зависит от угла φ поворота стержня ($0 \leq \varphi \leq \pi/3$). Известно, что точка B пересечения стержня с неподвижной прямой

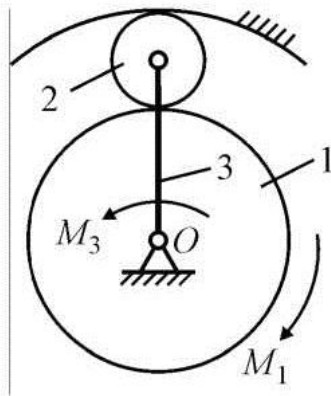
DC движется с постоянной абсолютной скоростью \bar{v} . Расстояние $OC = \ell$.

Найти зависимость $M(\varphi)$.

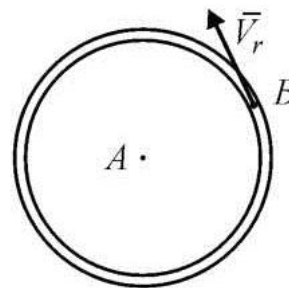
Динамика системы

Д17 (1979). Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Колёса 1 и 2 – однородные диски одинаковой толщины, изготовленные из одинакового материала. Массой стержня 3 пренебречь. Колесо 1 и стержень 2 могут вращаться вокруг неподвижной оси O . Колесо 2 соприкасается без проскальзывания с колесом 1 и неподвижным колесом. К колесу 1 и стержню 3 приложены пары сил с заданными постоянными моментами M_1 и M_3 соответственно. Момент инерции колеса 1 равен J_1 . Известно, что в любой момент времени отношение угловых скоростей $\omega_1/\omega_3 = k$, где k – заданный коэффициент.

Найти угловое ускорение ε_3 стержня 3.



К задаче Д17

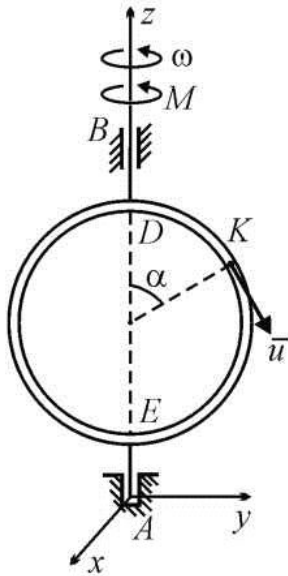


К задаче Д18

Д18 (1983). Однородный диск массы m и радиуса R лежит всей своей плоскостью на гладкой горизонтальной плоскости. По ободу диска движется (за счет сил взаимодействия с диском) точка B массы m с заданной относительной скоростью $\bar{V}_r(t)$. При $t = 0$ система была неподвижна.

Найти зависимость $V_A(t)$ модуля скорости центра A диска от времени.

Д19 (1984). Кольцо радиуса R вращается вокруг неподвижной вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (постоянство ω поддерживается приложенным к кольцу внешним переменным моментом M).



К задаче Д19

Расстояния $AE = DB = R/2$. В кольце движется точка K (за счет сил взаимодействия с кольцом) с постоянной по модулю относительной скоростью \bar{u} . Масса точки равна m , массой кольца пренебречь.

Найти компоненты x_B, y_B реакции в подшипнике B для показанного на рисунке положения системы.

Д20 (1986). Тонкий прямолинейный гладкий стержень, массой которого пренебрегаем, может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной оси Oz . На конце A стержня на расстоянии $OA = a$ от точки O закреплена точка массы m_1 . С другой стороны от точки O на стержень надето колечко B массы m_2 . В начальный момент времени колечко было неподвижно относительно стержня и находилось на расстоянии $OB = b$ от точки O , а стержень имел угловую скорость ω_0 .

Найти зависимость $V_r(x)$ модуля V_r скорости колечка относительно стержня от расстояния x между колечком и точкой O .

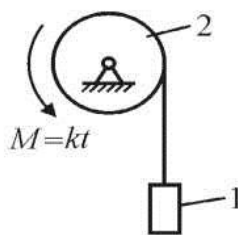
Д21 (1993). Система расположена в вертикальной плоскости. Масса груза 1 равна m_1 , масса однородного диска 2 радиуса R равна m_2 . К диску приложена пара сил, момент которой $M = kt$, где

$k > 0$ – заданная постоянная. Система начинает движение из состояния покоя.

Найти путь s , который груз пройдет до остановки (при $t > 0$).



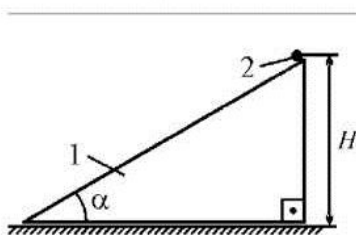
К задаче Д20



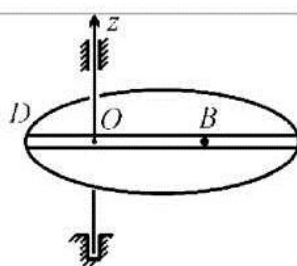
К задаче Д21

Д22 (1994). На гладкой призме 1, которая может скользить по гладкой неподвижной горизонтальной плоскости, находится точка 2. Масса призмы равна m_1 , масса точки равна m_2 . Величины H и α заданы. Система начинает движение из состояния покоя в показанном на рисунке положении.

Найти модуль V_1 скорости призмы в момент времени, когда точка достигнет неподвижной плоскости.



К задаче Д22



К задаче Д23

Д23 (1995). Однородный горизонтальный диск массы m_1 и радиуса R может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси Oz . Расстояние $OD = R/2$. По диаметру диска движется (за счет сил взаимодействия с диском) точка B массы m_2 по закону

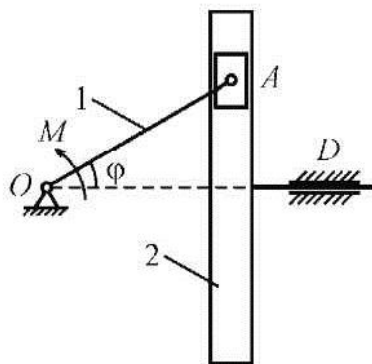
$$s = OB = at^2/2,$$

где $a > 0$ – заданная постоянная. При $t = 0$ угловая скорость диска равнялась ω_0 .

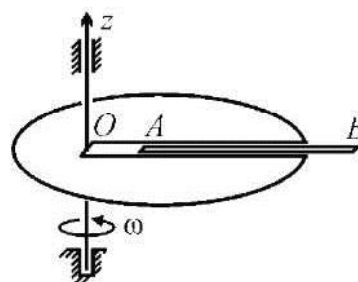
Найти работу A сил взаимодействия точки и диска за промежуток времени $0 \leq t \leq \sqrt{2R/a}$.

Д24 (1996). Механизм расположен в горизонтальной плоскости. К однородному стержню 1 длины ℓ и массы m_1 приложена пара сил с заданным постоянным моментом M . Масса кулисы 2 равна m_2 ; массой ползуна A пренебречь. В направляющих D на кулису действует заданная постоянная, параллельная направляющим, сила сопротивления \bar{F} . Система начинает движение из состояния покоя из положения, в котором $\varphi = 0$.

Найти модуль V_2 скорости кулисы в тот момент времени, когда $\varphi = \pi/3$.



К задаче Д24



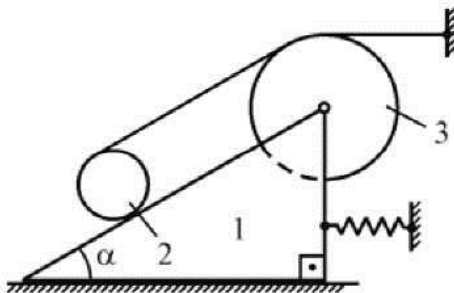
К задаче Д25

Д25 (1999). В узкий паз однородного диска массы m_1 вставлен однородный стержень AB массы m_2 , длина которого равна радиусу диска. Конец A стержня закреплен в центре O диска, и диск вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси z , перпендикулярной плоскости диска. Затем конец A освобождается от закрепления, и стержень начинает двигаться вдоль паза. Трением пренебречь.

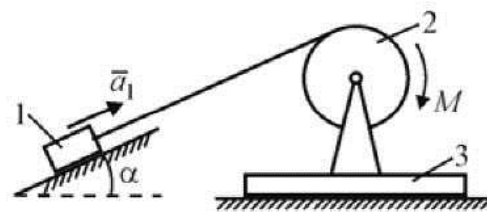
Найти угловую скорость ω_1 диска в тот момент времени, когда расстояние OA будет равно половине радиуса диска.

Д26 (2000). Призма 1 массы m_1 может скользить по гладкой горизонтальной плоскости; угол α известен. Горизонтальная пружина жесткости c соединяет призму с неподвижной опорой. По призме может катиться без проскальзывания однородный цилиндр 2 массы m_2 . Нить, намотанная на цилиндр, перекинута через невесомый блок 3 и прикреплена к неподвижной опоре. Один участок нити параллелен соответствующей грани призмы, другой – горизонтален.

Найти период τ колебаний системы.



К задаче Д26



К задаче Д27

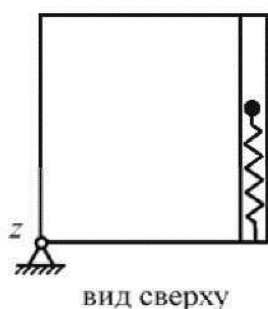
Д27 (2002). Груз 1 скользит по гладкой плоскости, образующей заданный угол α с горизонтом. Блок 2 (однородный диск) шарнирно соединен с подставкой 3, стоящей на шероховатой горизонтальной плоскости. Масса груза 1 равна m_1 ; масса блока 2 равна m_2 ; массой подставки пренебречь. К блоку 2 приложена пара сил, постоянный момент M которой подобран так, что груз 1 имеет заданное постоянное ускорение \bar{a}_1 .

Найти минимальный коэффициент трения f_{\min} между подставкой и плоскостью, при котором подставка может оставаться неподвижной (ширина подставки достаточно, чтобы исключить ее опрокидывание).

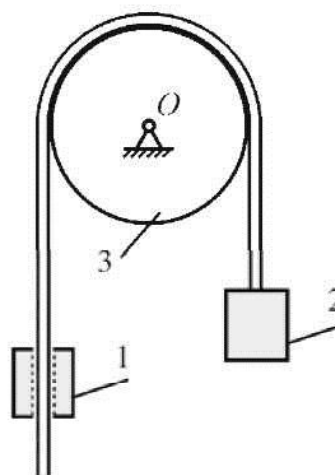
Д28 (2003). Горизонтальная квадратная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси z , проходящей через одну из вершин квадрата. Длина стороны квадрата

равна a ; момент инерции платформы относительно оси z равен J_z . Вдоль стороны платформы расположен гладкий желоб, по которому может скользить точка массы m . Точка прикрепена к пружине, другой конец которой прикреплен к вершине платформы. Жесткость пружины равна c , естественная длина равна a . В начальный момент времени система неподвижна и длина пружины равна $a/2$.

Найти угловую скорость ω платформы в тот момент времени, когда длина пружины будет равна a .



К задаче Д28



К задаче Д29

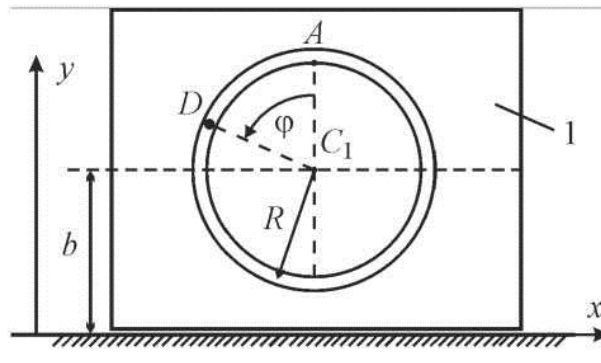
Д29 (2005). Через блок 3 (однородный диск) массы m_3 перекинут канат. Блок может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Канат относительно блока не скользит. К одному концу каната прикреплен груз 2 массы m_2 . Другой конец каната пропущен через отверстие в грузе 1. Груз 1 имеет массу m_1 и может скользить с трением относительно каната. Массой каната пренебречь. Известно, что абсолютное ускорение груза 1 равно нулю.

Найти модуль a_2 абсолютного ускорения груза 2.

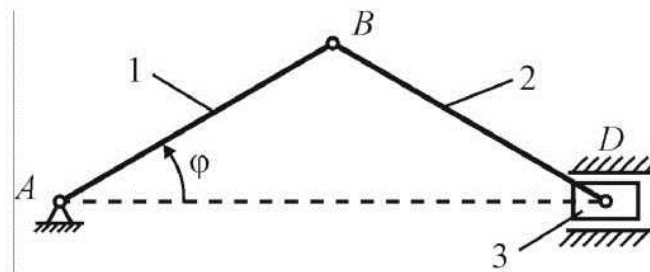
Д30 (2005). Механическая система состоит из однородной прямоугольной вертикальной пластины 1 массы m_1 и точки D массы

m_2 . Пластина перемещается по шероховатой горизонтальной плоскости; коэффициент трения равен f . C_1 – центр масс пластины. Точка D движется (под действием внутренних сил) по круговому желобу радиуса R и с центром C_1 . Угол AC_1D меняется по закону $\varphi = kt$, где k – заданная постоянная. Обозначим через x_1 координату точки C_1 . В начальный момент времени ($t=0$) $x_1=0$ и $\dot{x}_1 = V_0 > 0$.

Найти закон движения $x_1(t)$ пластины до ее остановки, считая, что пластина не отрывается от плоскости ($b = \text{const}$).



К задаче Д30



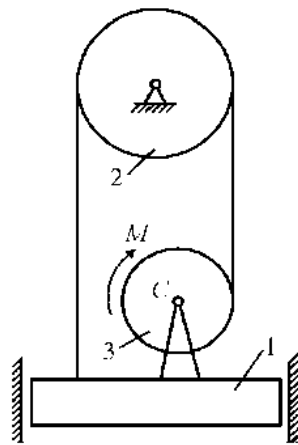
К задаче Д31

Д31 (2006). Механизм расположен в вертикальной плоскости. Кривошип 1 и шатун 2 – однородные стержни массы m и длины l каждый. Масса ползуна 3 равна m . Механизм начинает движение из состояния покоя, когда $\varphi = \varphi_0$ – заданная величина ($\varphi_0 < \pi/2$). Трением пренебречь.

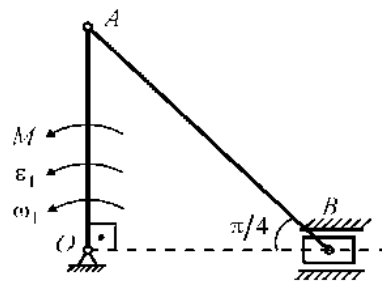
Найти горизонтальную составляющую X_A реакции цилиндрического шарнира A в момент времени, когда угол φ станет равным нулю.

Д32 (2006). Трос прикреплен к плите 1, перекинут через блок 2 и намотан на блок 3, установленный на плите. К блоку 3 приложена пара сил с заданным постоянным моментом M . Масса плиты равна m_1 ; блоки 2 и 3 – однородные цилиндры массами m_2 и m_3 соответственно; радиус блока 3 равен R . Массой троса пренебречь. Плита движется в вертикальных гладких направляющих.

Найти модуль a_1 ускорения плиты.



К задаче Д32



К задаче Д33

Д33 (2009). Механизм расположен в горизонтальной плоскости. В показанном на рисунке положении стержень OA имеет угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ϵ_1 ; к этому стержню приложена (переменная) пара сил. Масса однородного стержня OA равна m_1 , масса ползуна B равна m_2 , массой стержня AB пренебречь. Длина стержня OA равна R .

Найти момент M пары сил в показанном на рисунке положении механизма.

РЕШЕНИЯ

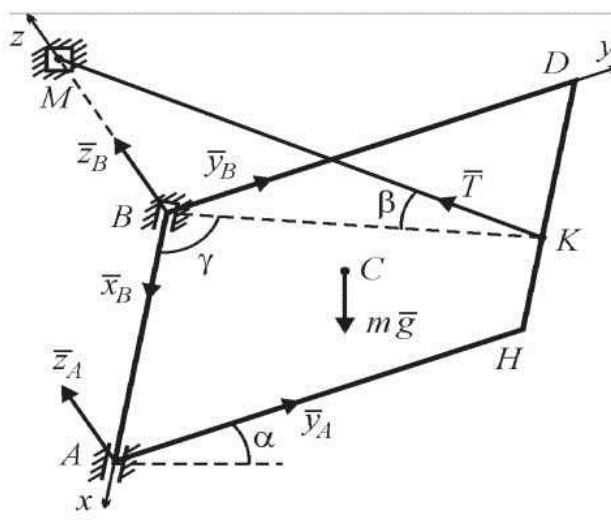
СТАТИКА

С1. Начало системы координат выберем в точке B , направив оси вдоль отрезков BA , BD , BM . Тогда уравнения равновесия плиты:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= x_B - T \cos \beta \cos \gamma = 0, \\ \sum F_y &= -mg \sin \alpha + y_A + y_B - T \cos \beta \sin \gamma = 0, \\ \sum F_z &= -mg \cos \alpha + z_A + z_B + T \sin \beta = 0, \\ \sum m_x &= -mg \cos \alpha (BD/2) + T \sin \beta BD = 0, \\ \sum m_y &= mg \cos \alpha (DH/2) - z_A DH - T \sin \beta DK = 0, \\ \sum m_z &= -mg \sin \alpha (DH/2) + y_A DH = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений, учитывая, что $DK = k \cdot DH$, получаем

Ответ: $y_A = (mg/2) \sin \alpha$, $z_A = (mg/2)(1 - k) \cos \alpha$,
 $x_B = (mg/2) \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \gamma$, $y_B = (mg/2)(\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma)$,
 $z_B = (kmg/2) \cos \alpha$, $T = (mg/2)(\cos \alpha / \sin \beta)$.



К задаче С1

С2. При равновесии бруса

$$m_{AB}(m\bar{g}) + m_{AB}(\bar{T}) = 0.$$

Для вычисления моментов введем систему координат $Axyz$ и учтем, что

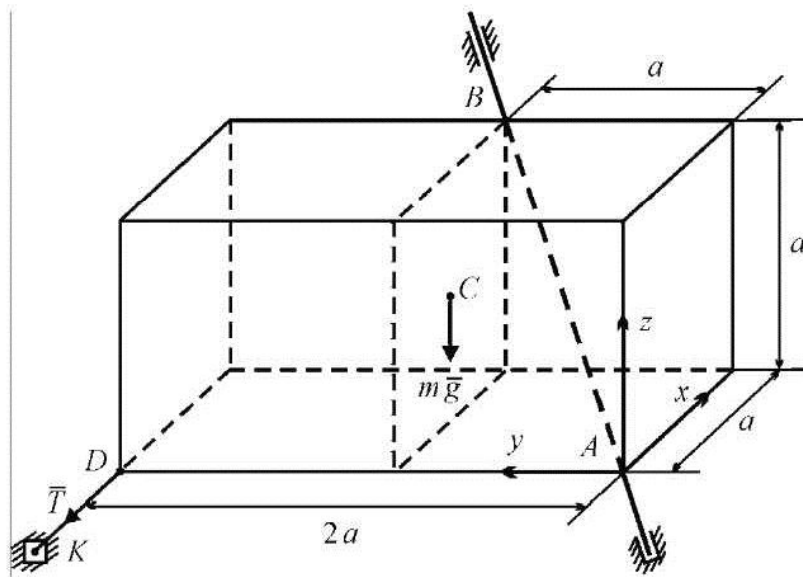
$$m_{AB} = m_x \cos \alpha + m_y \cos \beta + m_z \cos \gamma,$$

где α, β, γ – углы, образуемые прямой AB с осями x, y, z . Так как $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1/\sqrt{3}$, то

$$m_{AB}(m\bar{g}) = mg(-a + a/2 + 0)/\sqrt{3} = -mga/2\sqrt{3},$$

$$m_{AB}(\bar{T}) = T(0 + 0 + 2a)/\sqrt{3} = 2aT/\sqrt{3}.$$

Ответ: $T = mg/4$.



К задаче С2

С3. Искомое множество значений α определяется из требования совместности уравнений равновесия стержня и неравенств, выражающих закон Кулона и условие прилегания точки A к плоскости. Уравнения равновесия стержня:

$$\sum m_x = mga/2 - Nr \cos \alpha - F_{\text{тр}z}a = 0,$$

$$\sum m_z = Nr \sin \alpha + F_{\text{тр}x}a = 0.$$

Уравнение $\sum m_y = 0$, как легко убедиться, является следствием двух записанных уравнений. Уравнения $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$ содержат по одной новой неизвестной (x_O, y_O, z_O) каждое и поэтому не приводят к дополнительным требованиям совместности. Закон Кулона:

$$F_{\text{тр}x}^2 + F_{\text{тр}z}^2 \leq f^2 N^2.$$

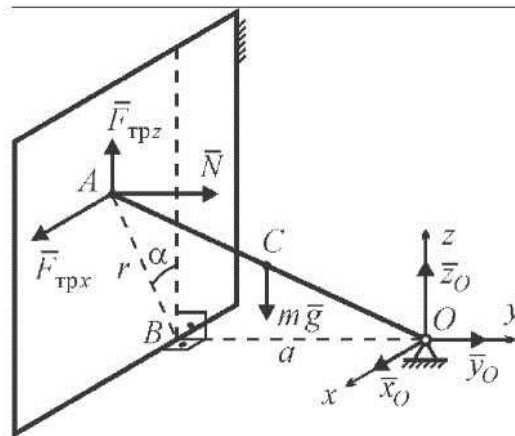
Условие прилегания точки A к плоскости:

$$N \geq 0.$$

Выражая $F_{\text{тр}x}$, $F_{\text{тр}z}$ из уравнений равновесия и подставляя в закон Кулона, приходим к системе неравенств

$$\left((r/a)^2 - f^2 \right) N^2 - mg(r/a)N \cos \alpha + m^2 g^2 / 4 \leq 0, \quad N \geq 0,$$

совместность которой (относительно N) требуется исследовать. Несложный алгебраический расчет показывает, что при $fa/r \geq 1$ эта система совместна для любых $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, а при $fa/r < 1$ совместна при условии $\sin \alpha \leq fa/r$.



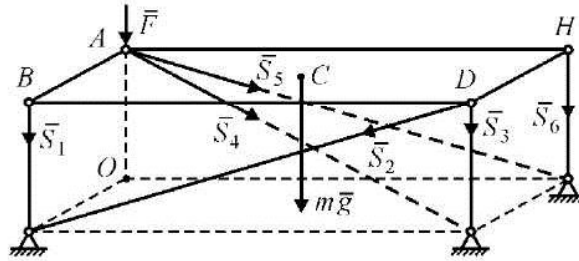
К задаче С3

Ответ: стержень может находиться в равновесии при

$$0 \leq \alpha \leq \begin{cases} \pi/2, & \text{если } fa/r \geq 1, \\ \arcsin(fa/r), & \text{если } fa/r < 1. \end{cases}$$

С4. Если равнодействующая \bar{R}^* существует, то $\bar{R}^* \cdot \bar{M}_O = \bar{R}^* \cdot \bar{M}_A = 0$. Отсюда и из расположения векторов \bar{M}_O , \bar{M}_A следует, что $\bar{R}^* \perp \overline{OA}$. Тогда $\bar{M}_O = \bar{M}_A + \overline{OA} \times \bar{R}^* = \bar{M}_A$, что противоречит направлениям векторов \bar{M}_O , \bar{M}_A . Следовательно, равнодействующей не существует.

С5. $\sum m_{OA} = 0 \Rightarrow S_2 = 0$; $\sum F_{AB} = 0 \Rightarrow S_4 = 0$; с учетом предыдущих равенств $\sum F_{AH} = 0 \Rightarrow S_5 = 0$. Для оставшихся реакций S_1 , S_3 , S_6 можно составить три уравнения равновесия: $\sum F_{OA} = 0$, $\sum m_{AD} = 0$, $\sum m_{BH} = 0$. Нетрудно видеть (не составляя эти уравнения детально), что размеры конструкции в них не содержатся или сокращаются.



К задаче С5

С6. Уравнения равновесия стержня:

$$\sum F_x = F - N_A = 0,$$

$$\sum F_y = -mg + N_B - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$\sum m_A = mg(\ell/2)\cos\alpha + F\ell\sin\alpha - N_B\ell\cos\alpha = 0 \quad (\ell - \text{длина стержня}).$$

Из этих уравнений находим

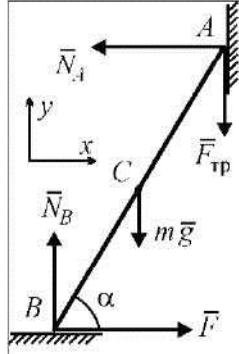
$$N_A = F, \quad N_B = F \operatorname{tg} \alpha + mg/2, \quad F_{\text{тр}} = F \operatorname{tg} \alpha - mg/2.$$

Равновесие стержня возможно, если $N_A \geq 0$, $N_B \geq 0$ (выполнено) и $|F_{\text{тр}}| \leq f N_A$. Последнее неравенство эквивалентно неравенствам $mg/2F - f \leq \operatorname{tg} \alpha \leq mg/2F + f$.

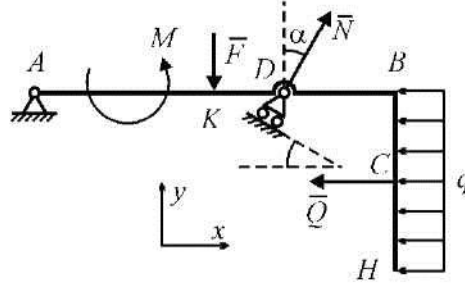
Ответ:

если $mg/2F > f$, то $\arctg(mg/2F - f) \leq \alpha \leq \arctg(mg/2F + f)$;

если $mg/2F \leq f$, то $0 < \alpha \leq \arctg(mg/2F + f)$.



К задаче С6



К задаче С8

С7. Записав в компонентах векторные равенства $\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{AO} \times \bar{R}$, $\bar{M}_B = \bar{M}_O + \bar{BO} \times \bar{R}$, найдем $R_x = 4M/l$, $R_y = -3M/l$, $R_z = 0$. Так как $R \neq 0$ и $\bar{R} \cdot \bar{M}_O = 0$, то равнодействующая $\bar{R}^* = \bar{R}$ существует. Модуль

$$R^* = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Ответ: $R^* = 5M/l$.

С8. Уравнения равновесия балки (реакция в шарнире A равна нулю):

$$\sum F_x = -Q + N \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -F + N \cos \alpha = 0,$$

$$\sum m_D = F \cdot KD - Q \cdot BC + M = 0.$$

Так как $Q = F$, то из первых двух уравнений находим $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Так как $M = F\ell$, $KD = AD - \ell$, $BC = \ell/2$, то из третьего уравнения находим $AD = \ell/2$.

Ответ: $AD = \ell/2$, $\alpha = \pi/4$.

С9. Достаточно составить три уравнения равновесия. Для стержня AD :

$$\sum m_A = -M + M_A + y_D \ell = 0,$$

для стержня DC :

$$\sum m_C = F \ell / 2 + x_D \ell = 0,$$

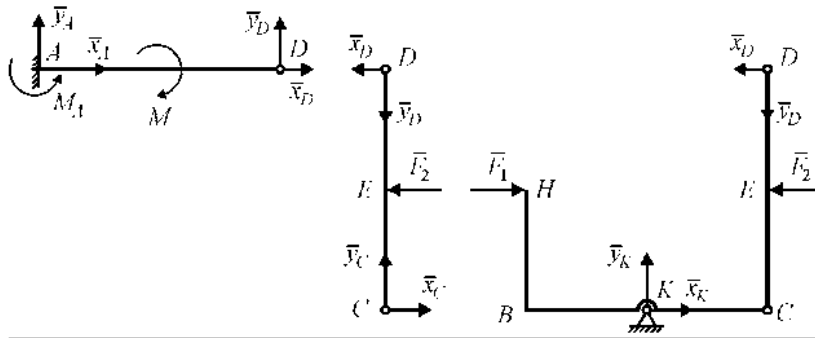
для стержней DC и CBH :

$$\sum m_K = x_D \ell - y_D \ell / 2 = 0.$$

Из этих уравнений находим $x_D = -F/2$, $y_D = -F$, $M_A = M + F\ell$;

далее $R_D = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}$.

Отвст: $R_D = F\sqrt{5}/2$, $M_A = M + F\ell$.



К задаче С9

С10. Составим уравнения равновесия цилиндров. Для цилиндра 1:

$$\sum F_x = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}} \sin \alpha - N \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -m_1 g - F_{\text{тр}} \cos \alpha - N \sin \alpha + N_1 = 0,$$

$$\sum m_{C1} = F_{\text{тр}1} R_1 - F_{\text{тр}} R_1 = 0.$$

Для цилиндра 2:

$$\sum F_x = -F_{\text{тр}} \sin \alpha - N_2 + N \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -m_2 g + F_{\text{тр}2} + F_{\text{тр}} \cos \alpha + N \sin \alpha = 0,$$

$$\sum m_{C1} = F_{\text{тр}2} R_2 - F_{\text{тр}} R_2 = 0.$$

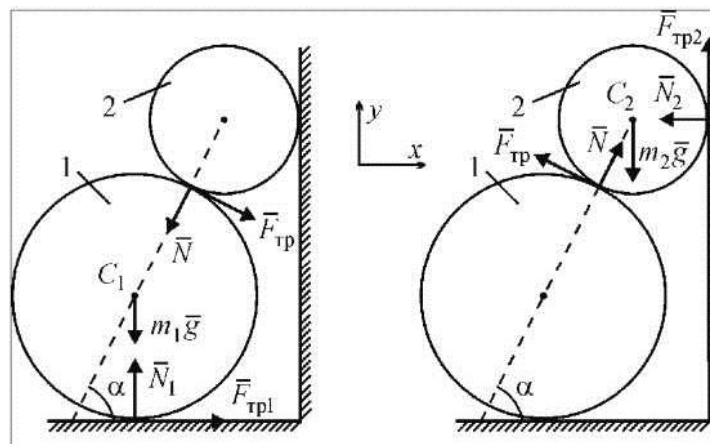
Из этих уравнений находим

$$F_{\text{тр}1} = F, \quad F_{\text{тр}2} = F, \quad F_{\text{тр}} = F,$$

$$N_1 = m_1 g + F(1 + \sin \alpha) / \cos \alpha, \quad N_2 = F, \quad N = F(1 + \sin \alpha) / \cos \alpha,$$

где $F = m_2 g \cos \alpha / (1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$. В равновесии $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, $N \geq 0$ (выполнено) и $|F_{\text{тр}1}| \leq f_1 N_1$, $|F_{\text{тр}2}| \leq f_2 N_2$, $|F_{\text{тр}}| \leq f N$. Из последних трех неравенств получаем

Ответ: $f_1 \geq \cos \alpha / \left(1 + \sin \alpha + (m_1 / m_2)(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) \right)$, $f_2 \geq 1$,
 $f \geq \cos \alpha / (1 + \sin \alpha)$.



К задаче С10

С11. Если при $n = \infty$ отбросить стержень $A_1 B_1$ (сохранив закрепление в точке D_1), то оставшаяся цепочка стержней будет эквивалентна исходной. Поэтому если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_\infty$, то при $n \rightarrow \infty$ натяжение троса $A_2 D_1$ также равно T_∞ . Тогда, составляя уравнение равновесия стержня $A_1 B_1$ (ℓ – длина стержня)

$$\sum m_{B_1} = mg\ell/2 - T_\infty \ell + T_\infty k\ell = 0,$$

получим

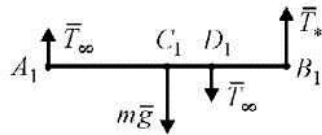
Ответ: $T_\infty = mg / (2(1 - k))$.

C12. Отбросим нить, а силы натяжения нити будем считать активными. Далее заменим каждую силу тяжести и каждую силу натяжения нити двумя равными силами, расположенными на концах соответствующего стержня. Затем отбросим силы, мощности которых равны нулю для любых возможных скоростей. Оставшиеся активные силы показаны на рисунке. Придадим точкам A и B возможные скорости \vec{V}_A и \vec{V}_B . Тогда сумма мощностей активных сил

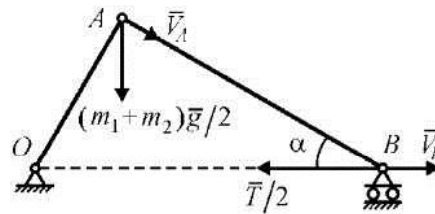
$$\sum N^a = ((m_1 + m_2)g/2)V_A \sin \alpha - (T/2)V_B.$$

Учитывая, что $V_A = V_B \cos \alpha$ и в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой V_B , получаем

Ответ: $T = (m_1 + m_2)g \sin \alpha \cos \alpha$.



К задаче C11



К задаче C12

C13. Искомое множество значений α определяется из требования совместности уравнений равновесия и неравенств, выражающих закон Кулона и условия прилегания цилиндра к балке и плоскости. Уравнение равновесия балки:

$$\sum m_O = -m_1 g \cdot OC_1 \cdot \cos \alpha + N_1 \cdot OB = 0.$$

Из этого уравнения можно найти $N_1 > 0$. Уравнения $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ содержат по одной новой неизвестной (x_O, y_O) каждое и поэтому не приводят к дополнительным требованиям совместности. Уравнения равновесия цилиндра (R – радиус цилиндра):

$$\sum F_x = -F_{\text{тр}1} \cos \alpha - F_{\text{тр}2} + N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum m_{C_2} = (F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2})R = 0,$$

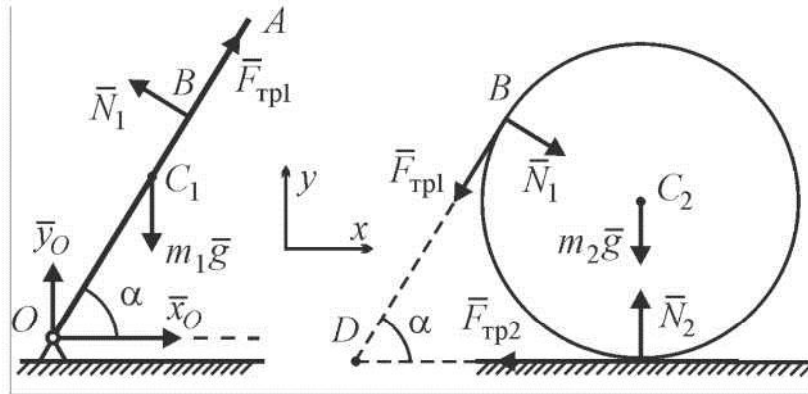
$$\sum m_D = (-m_2 g - N_1 + N_2) R \operatorname{ctg}(\alpha/2) = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = N_1 \sin \alpha / (1 + \cos \alpha) = N_1 \operatorname{tg}(\alpha/2), \quad N_2 = N_1 + m_2 g.$$

Условия прилегания: $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$ (выполнены). Закон Кулона: $|F_{\text{тр}1}| \leq f N_1$, $|F_{\text{тр}2}| \leq f N_2$. Нетрудно установить, что выписанная система уравнений и неравенств совместна при $\operatorname{tg}(\alpha/2) \leq f$.

Ответ: система может находиться в равновесии при $0 < \alpha \leq 2 \operatorname{arctg} f$.



К задаче C13

C14. Придадим муфте возможную угловую скорость ω . Тогда сумма мощностей активных сил

$$\sum N^a = M\omega + F_{\text{упр}} V_A.$$

Учитывая, что $V_A = \omega \cdot AC_V$ (угловые скорости стержня и муфты равны), $AC_V = a / \cos^2 \alpha$ (на рисунке $\vec{V}_{O'}$ – скорость точки O' стержня, совпадающей в данный момент времени с точкой O), $F_{\text{упр}} = c\lambda$, и в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой ω , получаем

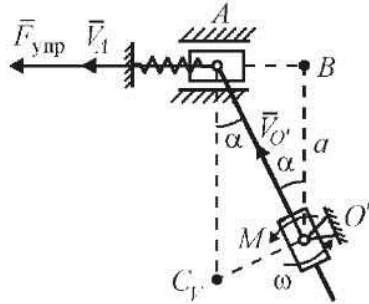
Ответ: $\lambda = -M \cos^2 \alpha / ca$.

C15. Придадим точке 1 возможную скорость \vec{V}_1 . Тогда сумма мощностей активных сил

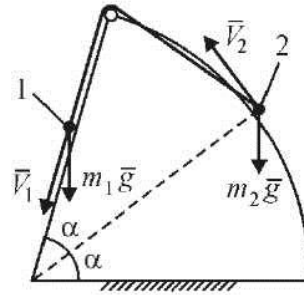
$$\sum N^a = m_1 g V_1 \cos(\pi/2 - 2\alpha) + m_2 g V_2 \cos(\pi - \alpha).$$

Учитывая, что $V_1 = V_2$ и в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой V_1 , получаем

Ответ: $m_2 = 2m_1 \sin \alpha.$



К задаче C14



К задаче C15

C16. Рассмотрим дугу $\overset{\frown}{AB}$. Если в точке A на дугу действует сила \bar{N}_A , образующая угол α с радиусом, то из соображений симметрии в точке B на дугу действует сила \bar{N}_B , имеющая тот же модуль и также образующая угол α с радиусом. Поскольку сумма проекций сил \bar{N}_A и \bar{N}_B на прямую OA равна нулю, то $\alpha = \pi/3$. Тогда, приравнявая нулю сумму проекций всех действующих на дугу сил на линию действия силы \bar{P}_1 , получаем

Ответ: $N_A = P/\sqrt{3}.$

C17. Обозначим через T натяжение троса, перекинутого через верхний блок. Рассматривая равновесие нижнего блока, легко установить, что натяжение перекинутого через него троса равно $T/2$. Тогда на платформу и точку действуют силы, показанные на рисунке. Уравнение равновесия точки:

$$\sum F_y = T/2 + N - m_2 g = 0.$$

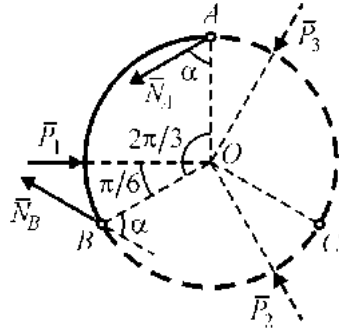
Уравнения равновесия платформы:

$$\sum F_y = 3T/2 - N - m_1 g = 0,$$

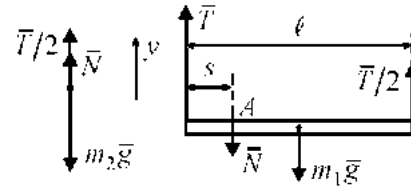
$$\sum m_A = -Ts - m_1g(\ell/2 - s) + (T/2) \cdot (\ell - s) = 0.$$

Из этих уравнений получаем

Ответ: $s = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - 3m_2} \ell.$



К задаче С16



К задаче С17

С18. Уравнение равновесия стержня:

$$\sum m_A = -m_1g\ell + T_1(\cos\alpha - \sin\alpha)\ell - T_2\ell\sqrt{2} + T_3\ell\sqrt{2} - 2T_4\ell + M_A = 0,$$

где $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = m_2g.$

Ответ: $M_A = m_1g\ell + m_2g\ell(2 + \sin\alpha - \cos\alpha).$

С19. Уравнения равновесия куба 1:

$$\sum F_x = N - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$\sum F_y = -m_1g + N_1 = 0,$$

$$\sum m_B = m_1g(\ell_1/2 - Bl) - N\ell_2/\cos\alpha = 0.$$

Уравнения равновесия куба 2:

$$\sum F_x = m_2g \sin\alpha - N \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -m_2g \cos\alpha - N \sin\alpha + N_2 = 0,$$

$$\sum m_A = m_2g(\ell_2/2)(\sin\alpha + \cos\alpha) - N_2 \cdot HK = 0.$$

Из этих уравнений находим

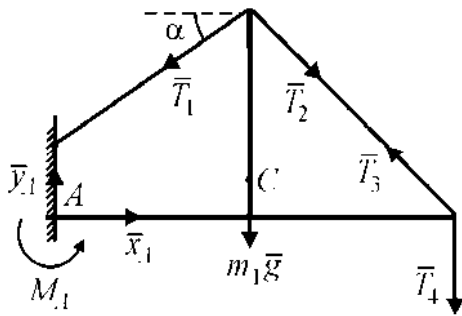
$$N_1 = m_1g, \quad N_2 = m_2g/\cos\alpha, \quad N = m_2g \operatorname{tg}\alpha, \quad F_{\text{тр}} = m_2g \operatorname{tg}\alpha,$$

$$BD = \ell_1/2 - m_2 \ell_2 \sin \alpha / (m_1 \cos^2 \alpha),$$

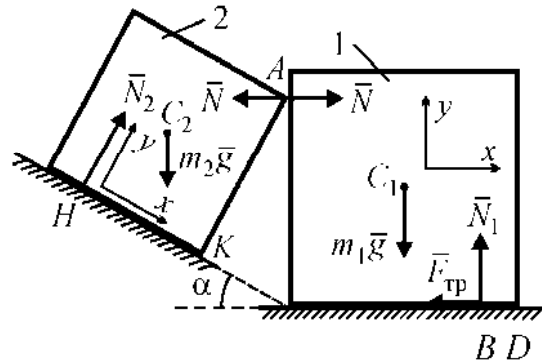
$$HK = (\ell_2/2)(\sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Равновесие системы возможно, если $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$, $N \geq 0$, $F_{\text{тр}} \leq f N_1$, $0 \leq BD \leq \ell_1$, $0 \leq HK \leq \ell_2$. Первое, второе, третье и шестое из этих неравенств выполнены для любых m_2/m_1 ; четвертое и пятое дают

Ответ: система может находиться в равновесии при одновременном выполнении неравенств $m_2/m_1 \leq f \operatorname{ctg} \alpha$ и $m_2/m_1 \leq (\ell_1/2\ell_2)(\cos^2 \alpha/\sin \alpha)$.



К задаче С18



К задаче С19

С20. Придадим стержню KA возможную угловую скорость ω_{KA} . Тогда сумма мощностей активных сил

$$\sum N^a = M_1 \omega_{KA} - M_2 \omega_{OD} - mg V_D \cos \beta.$$

Учитывая, что $V_D = \omega_{OD} \ell_2$, $\vec{V}_D = \vec{V}_{Dr} + \vec{V}_{De}$, $V_{De} = V_A = \omega_{KA} \ell_1$, $V_D / \sin(\pi/2 - \alpha) = V_{De} / \sin(\pi/2 - \beta)$ и в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой ω_{KA} , получаем

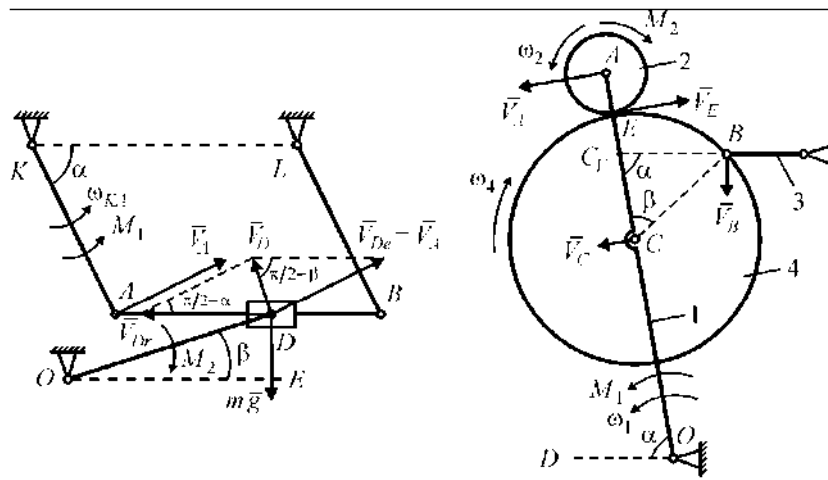
Ответ: $M_1 = (M_2 / (\ell_2 \cos \beta) + mg) \ell_1 \cos \alpha.$

C21. Придадим стержню 1 возможную угловую скорость ω_1 . Тогда сумма мощностей активных сил

$$\sum N^a = M_1 \omega_1 - M_2 \omega_2.$$

Выразим ω_2 через ω_1 . Построив МЦС колеса 4, находим по теореме синусов из $\triangle BCC_F$: $CC_F = R \sin(\alpha + \beta) / \sin \alpha$. Далее, $V_C = \omega_1(\ell - R - r) = \omega_4 \cdot CC_F$, откуда находим ω_4 и $V_E = \omega_4 \cdot EC_F = \omega_1(\ell - R - r)(\sin \alpha / \sin(\alpha + \beta) - 1)$ (E – точка соприкосновения колес 4 и 2). Наконец, $V_A = \omega_1 \ell$ и $\omega_2 = (V_A + V_E) / r$. Учитывая, что в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой ω_1 , получаем

ОТВЕТ:
$$M_2 = \frac{M_1 r}{\ell + (\ell - R - r)(\sin \alpha / \sin(\alpha + \beta) - 1)}.$$



К задаче C20

К задаче C21

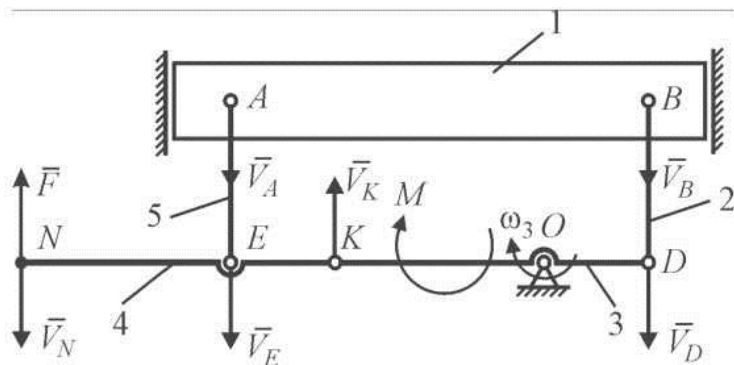
C22. Придадим стержню 3 возможную угловую скорость ω_3 . Тогда сумма мощностей активных сил

$$\sum N^a = M \omega_3 - F V_N.$$

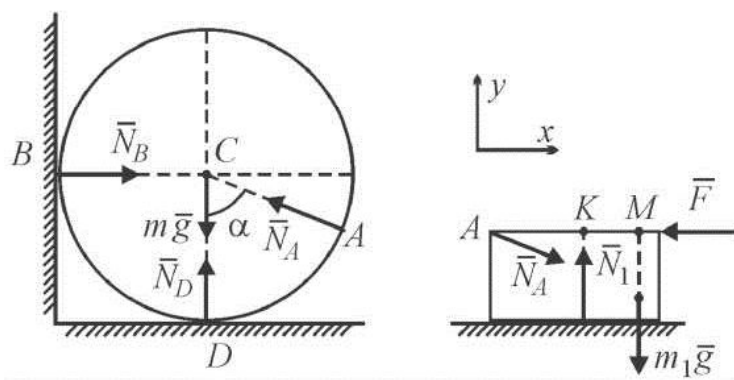
Выразим V_N через ω_3 . Так как $V_D = V_B = V_1 = V_A = V_E$, то $V_E = \omega_3 \ell$. Далее, $V_K = 2\omega_3 \ell$ и $(V_N - V_E) / 2\ell = (V_E + V_K) / \ell$, откуда

$V_N = 7\omega_3 \ell$ (\vec{V}_K и \vec{V}_N на рисунке показаны не в масштабе). Учтывая, что в равновесии $\sum N^a = 0$ для любой ω_3 , получаем

Ответ: $F = M/7\ell$.



К задаче C22



К задаче C23

C23. Уравнения равновесия цилиндра:

$$\sum F_x = -N_A \sin \alpha + N_B = 0,$$

$$\sum F_y = -mg + N_A \cos \alpha + N_D = 0.$$

Уравнения равновесия бруска:

$$\sum F_x = -F + N_A \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = -m_1g + N_1 - N_A \cos \alpha = 0,$$

$$\sum m_A = -m_1g \cdot AM + N_1 \cdot AK = 0$$

(брусек не предполагается однородным). Из выписанных уравнений находим $N_A = F/\sin \alpha$, $N_B = F$, $N_D = mg - F \operatorname{ctg} \alpha$, $N_1 = m_1 g + F \operatorname{ctg} \alpha$, $AK = AM/(1 + F \operatorname{ctg} \alpha/m_1 g)$. Система остается в равновесии, если $N_A \geq 0$, $N_B \geq 0$, $N_D \geq 0$, $N_1 \geq 0$, $0 \leq AK \leq$ ширины бруска. Все неравенства, кроме третьего, выполнены для любого F . Из третьего неравенства следует, что $F \leq mg \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ: $F_{\max} = mg \operatorname{tg} \alpha$.

КИНЕМАТИКА

К1. Абсолютное ускорение точки $\bar{a} = \bar{a}_r^n + \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_{Cor}$. Если ось z направлена из-за чертежа перпендикулярно плоскости рисунка, то

$$a_z = a_e^\tau + a_{Cor} = \varepsilon R \sin \alpha + 2\omega V_r \cos \alpha = \omega^2 R (\sin \alpha + 2 \cos \alpha).$$

Так как $a_z = 0$, то $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Отсюда получаем

Ответ: $\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 2$ или $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg} 2$.

К2. Абсолютная скорость точки $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e$. Здесь $V_r = \dot{AM} = k t_0$, $V_e = \omega_{AB} MB = \omega_{OA} R(1 - k t_0^2/2\ell)$ (для шатуна $C_1=B$); далее, $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$. Абсолютное ускорение точки $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{Cor}$. Здесь

$$a_r = \ddot{AM} = k, \quad \bar{a}_e = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^\tau \quad (A - \text{полюс}), \quad a_A = \omega_{OA}^2 R,$$

$$a_{MA}^n = \omega_{AB}^2 AM = (k/2)(\omega_{OA} R t_0/\ell)^2, \quad a_{MA}^\tau = \varepsilon_{AB} AM,$$

$$a_{Cor} = 2\omega_{AB} V_r = 2\omega_{OA} R k t_0/\ell.$$

Для отыскания ε_{AB} находим \bar{a}_B и, требуя, чтобы этот вектор был направлен вдоль AB , получаем $\varepsilon_{AB} = 0$. Далее,

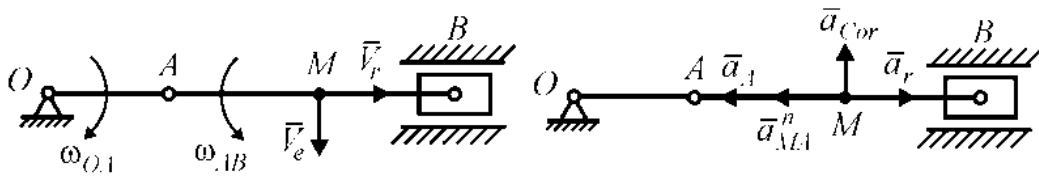
$$a = \sqrt{(a_A + a_{MA}^n - a_r)^2 + a_{Cor}^2}.$$

Ответ: $V = \sqrt{(kt_0)^2 + (\omega_{OA}R(1 - kt_0^2/2\ell))^2},$

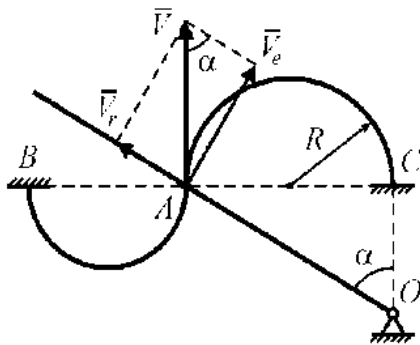
$$a = \sqrt{(\omega_{OA}^2R + (k/2)(\omega_{OA}Rt_0/\ell)^2 - k)^2 + (2\omega_{OA}Rkt_0/\ell)^2}.$$

К3. На рисунке показано положение колечка при $t = t_0$. Абсолютная скорость колечка $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $V = \dot{s} = 2\pi r/t_0$, $V_e = \omega \cdot OA$. Учитывая, что $V_e = V \sin \alpha$, $OA = 2R/\sin \alpha$, $\text{ctg} \alpha = OC/2R = k/2$, получаем

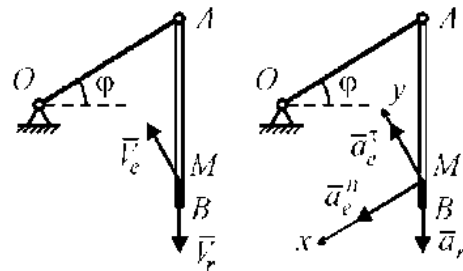
Ответ: $\omega = \frac{\pi r}{t_0 R(1 + k^2/4)}.$



К задаче К2



К задаче К3



К задаче К4

К4. Абсолютная скорость точки M $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, где $V_r = AM = kRt$, $V_e = \dot{\varphi}R = kRt$. Модуль $V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 - 2V_rV_e \cos \varphi}$.

Абсолютное ускорение точки M $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_{Cor}$, где

$$a_r = \ddot{AM} = kR, \quad a_e^n = \dot{\Phi}^2 R = k^2 R t^2, \quad a_e^\tau = \ddot{\Phi} R = kR, \quad a_{Cor} = 0. \quad \text{Далее}$$

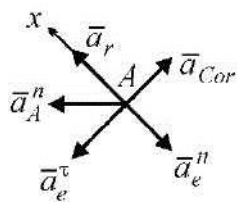
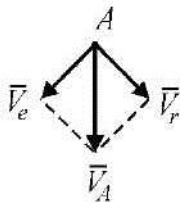
$$a_x = a_e^n + a_r \sin \varphi, \quad a_y = a_e^\tau - a_r \cos \varphi, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Ответ: $V = 2kRt \left| \sin \left(kt^2/4 \right) \right|,$

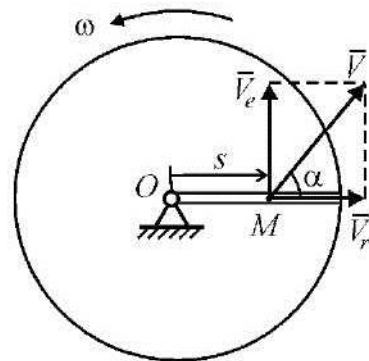
$$a = kR \sqrt{\left(kt^2 + \sin \left(kt^2/2 \right) \right)^2 + 4 \sin^4 \left(kt^2/4 \right)}.$$

К5. Скорость точки A $\bar{V}_A = \bar{V}_r + \bar{V}_e$, где $V_A = \omega_1 \ell$, $V_e = \omega_2 R$. Отсюда $V_r = \omega_1 \ell / \sqrt{2}$, $\omega_2 = \omega_1 \ell / \sqrt{2} R$. Ускорение точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$, где $a_A^n = \omega_1^2 \ell$. С другой стороны, $\bar{a}_A = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_{Cor}$, где $a_e^n = \omega_2^2 R = \omega_1^2 \ell^2 / 2R$. Проецируя последнее векторное уравнение на ось x , получим $a_A^n / \sqrt{2} = a_r - a_e^n$, откуда находим a_r .

Ответ: $V_r = \omega_1 \ell / \sqrt{2}$, $a_r = \omega_1^2 \ell \left(1/\sqrt{2} + \ell/2R \right)$.



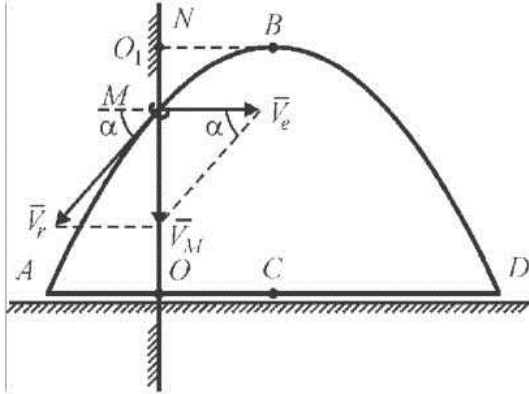
К задаче К5



К задаче К6

К6. Скорость точки M $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e$, где $V_r = \dot{s}$, $V_e = \omega s$. Так как $V_e/V_r = \operatorname{tg} \alpha$, то $\dot{s} = (\omega \operatorname{ctg} \alpha) s$. Интегрируя это дифференциальное уравнение с условием $s(0) = s_0$, получаем

Ответ: $s(t) = s_0 \exp((\omega \operatorname{ctg} \alpha)t)$.



К задаче К7

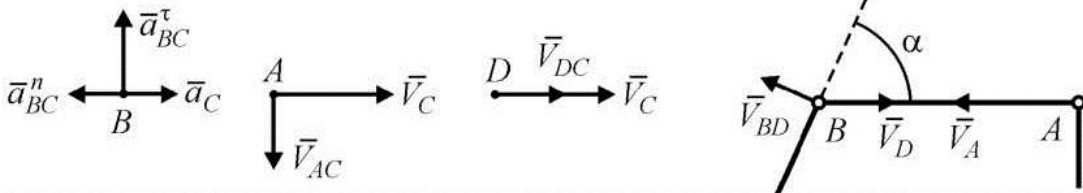
К7. Скорость точки M $\vec{V}_M = \vec{V}_r + \vec{V}_e$. Из параллелограмма скоростей находим $V_M = V_e \operatorname{tg} \alpha$, где $V_e = OC = u$. Так как уравнение параболы $O_1M = k(O_1B)^2$, то $\operatorname{tg} \alpha = 2k \cdot O_1B = 2k \cdot OC = 2kut$. Коэффициент k находим из условия $BC = k \cdot (AC)^2$: $k = \ell_1 / \ell_2^2$.

Таким образом, $V_M = 2\ell_1 u^2 t / \ell_2^2$. Полагая $t = t_1 = \ell_2 / (3u)$, получаем

Ответ: $V_M = 2\ell_1 u / (3\ell_2)$.

К8. Ускорение точки B $\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau$, где $a_{BC}^n = \omega^2 R$, $a_{BC}^\tau = \varepsilon R$. Так как $a_B = 0$, то $\omega = \sqrt{a_C / R}$. Далее, $V_{AC} = V_{DC} = \omega R$, $V_A = \sqrt{V_C^2 + V_{AC}^2}$, $V_D = V_C + V_{DC}$.

Ответ: $V_A = \sqrt{V_C^2 + a_C R}$, $V_D = V_C + \sqrt{a_C R}$.



К задаче К8

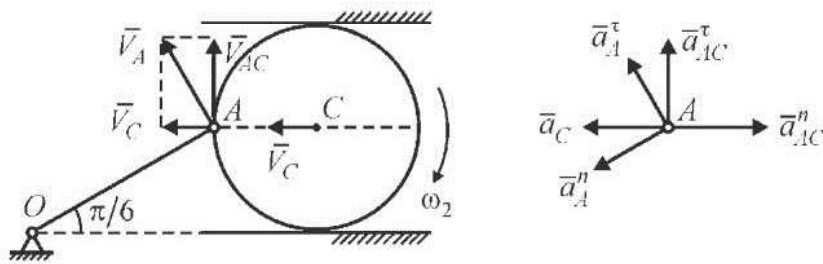
К задаче К9

К9. Скорость точки A $V_A = \omega_{OA} \ell$. Скорость точки B $\vec{V}_B = \vec{V}_D + \vec{V}_{BD}$. По теореме о проекциях $V_A = V_{BD} \sin \alpha - V_D$; отсюда находим V_{BD} . Далее, $V_B^2 = V_D^2 + V_{BD}^2 - 2V_D V_{BD} \sin \alpha$, откуда получаем

Ответ: $V_B = \sqrt{(\omega_{OA}\ell)^2 + ((\omega_{OA}\ell + V_D)\text{ctg}\alpha)^2}$.

К10. На рисунке показано положение механизма при $t = t_0/2$. Скорость точки A $V_A = 2\dot{\varphi}_1 R$; с другой стороны, $\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC}$, где $V_{AC} = \omega_2 R$. Тогда (см. рисунок) $V_{AC} = V_A \sqrt{3}/2$, $V_C = V_A/2$, откуда находим $\omega_2 = \pi^2/6t_0$, $V_C = \pi^2 R/6\sqrt{3}t_0$. Ускорение точки A $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где $a_A^n = 2\dot{\varphi}_1^2 R$, $a_A^\tau = 2\ddot{\varphi}_1 R$. С другой стороны, $\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC}^n + \vec{a}_{AC}^\tau$, где $a_{AC}^n = \omega_2^2 R$, $a_{AC}^\tau = \varepsilon_2 R$. Тогда (см. рисунок) $a_C - a_{AC}^n = a_A^n \sqrt{3}/2 + a_A^\tau/2$, откуда находим $a_C = (\pi^3 R/108t_0^2)(3\pi + \pi\sqrt{3} - 2)$.

Ответ: $V_C = \pi^2 R/6\sqrt{3}t_0$, $a_C = (\pi^3 R/108t_0^2)(3\pi + \pi\sqrt{3} - 2)$.



К задаче К10

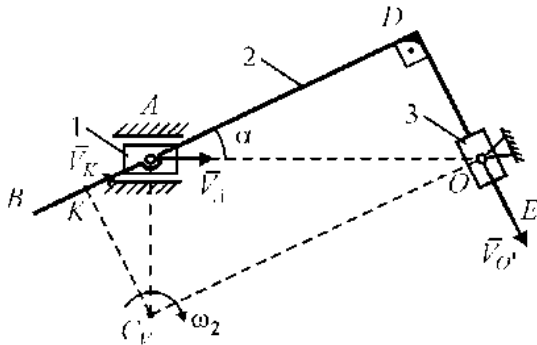
К11. Построив $\vec{V}_{O'}$ (скорость точки звена 2, совпадающей в данный момент времени с точкой O), найдем C_V звена 2. Тогда $\omega_2 = V_A/AC_V$. Точка K есть основание перпендикуляра, опущенного из C_V на прямую BD .

Ответ: $\omega_2 = V_A \text{ctg}\alpha/a$, $AK = a \sin^2 \alpha/\cos \alpha$.

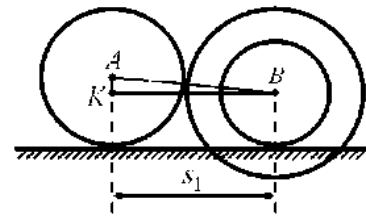
К12. Скорость уменьшения расстояния по горизонтали между точками A и B равна $\Delta V = V_A - V_B = (V/2)(R_2 - r_2)/(R_2 + r_2)$. Это

расстояние s_1 в момент столкновения найдем из треугольника ABK : $s_1 = \sqrt{2R_2(R_2 + r_2)}$. Столкновение произойдет через промежуток времени $T = (s - s_1) / \Delta V$.

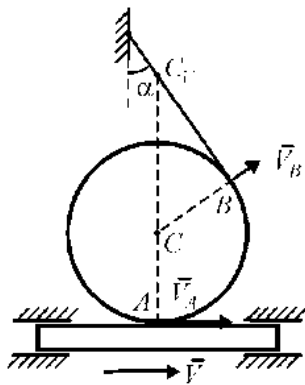
Ответ: $T = \frac{2(R_2 + r_2)}{V(R_2 - r_2)} \left(s - \sqrt{2R_2(R_2 + r_2)} \right)$.



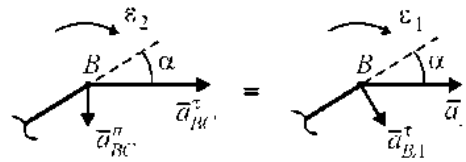
К задаче K11



К задаче K12



К задаче K13



К задаче K15

K13. Построив мгновенный центр скоростей колеса, находим

$$V_C / V_A = V_C / V = CC_V / AC_V = CC_V / (R + CC_V),$$

где R – радиус колеса. Учитывая, что $CC_V = R / \sin \alpha$, получаем

Ответ: $V_C = V / (1 + \sin \alpha)$.

K14. Так как $\dot{y}_A = -V_A$ и $y_M = 3y_A/4$, то $\dot{y}_M = -3V_A/4$ и $\ddot{y}_M = 0$. Кроме того, так как $y_A = \ell \cos \varphi$, то $\dot{y}_A = -\ell \dot{\varphi} \sin \varphi$, откуда $\dot{\varphi} = V_A/\ell \sin \varphi$. Далее, так как $x_M = (\ell/4) \sin \varphi$, то

$$x_M = (\ell/4) \dot{\varphi} \cos \varphi = (V_A/4) \operatorname{ctg} \varphi$$

и

$$x_M = -V_A \dot{\varphi} / 4 \sin^2 \varphi = -V_A^2 / 4\ell \sin^3 \varphi.$$

Отвст: $a_M(\varphi) = V_A^2 / 4\ell \sin^3 \varphi$.

K15. Так как скорость точки B горизонтальна, то стержень 1 совершает мгновенно-поступательное движение и $\omega_1 = 0$; следовательно, $\vec{V}_B = \vec{V}_A$. Тогда $\omega_2 = (V_A - V_C)/R$. Далее, выбрав точку C за полюс, находим $\vec{a}_B = \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau$, где $a_{BC}^n = \omega_2^2 R$, $a_{BC}^\tau = \varepsilon_2 R$. С другой стороны, выбрав точку A за полюс, найдем $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau$, где $a_{BA}^\tau = \varepsilon_1 R$. Проецируя равенство $\vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau$ на прямую AB , получим $-\omega_2^2 R \sin \alpha + \varepsilon_2 R \cos \alpha = a_A \cos \alpha$.

Отвст: $\varepsilon_2 = a_A/R + ((V_A - V_C)/R)^2 \operatorname{tg} \alpha$.

ДИНАМИКА

D1. При движении точки вверх

$$m dV/dt = -mg - k mV^2.$$

Учитывая, что $dV/dt = VdV/dx$, разделяя переменные и интегрируя, найдем максимальную высоту подъема точки

$$H = \int_0^{V_0} \frac{VdV}{g + kV^2} = \frac{1}{2k} \ln \left(1 + \frac{kV_0^2}{g} \right).$$

При движении точки вниз

$$m dV/dt = mg - k mV^2.$$

Аналогично находим

$$H = -\frac{1}{2k} \ln \left(1 - \frac{kV_1^2}{g} \right).$$

Сравнив два выражения для H , получаем

Ответ: $V_1 = V_0 / \sqrt{1 + kV_0^2/g}$.

Д2. Длина канала $\ell = w/\cos(\varphi - \alpha)$, где w – ширина доски. Проекция силы тяжести на направление канала постоянна и равна $mg \cos \varphi$, поэтому точка движется с постоянным ускорением $a = g \cos \varphi$. Следовательно, время движения

$$\begin{aligned} T^2 &= 2\ell/a = (2w/g)/(\cos(\varphi - \alpha) \cos \varphi) = \\ &= (4w/g)/(\cos \alpha + \cos(2\varphi - \alpha)). \end{aligned}$$

Время будет минимальным, если $\cos(2\varphi - \alpha) = 1$.

Ответ: $\varphi = \alpha/2$.

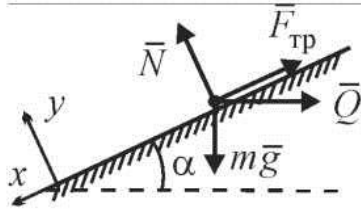
Д3. Уравнение движения точки:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{Q} + \bar{F}_{\text{тр}}.$$

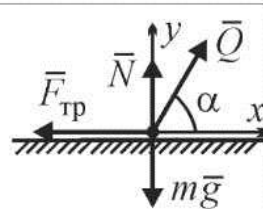
Проецируя это уравнение на ось y , найдем $N = mg(\cos \alpha + k \sin \alpha)$. Если сумма проекций сил $m\bar{g}$ и \bar{Q} на ось x больше fN ($mg_x + Q_x > fN$), то при нулевой начальной скорости точка будет двигаться в положительном направлении оси x ; сила трения имеет противоположное направление и ее модуль равен fN . Тогда, проецируя уравнение движения точки на ось x , находим $ma_x = mg \sin \alpha - Q \cos \alpha - fN$. Если $mg_x + Q_x < -fN$, то точка будет двигаться в отрицательном направлении оси x и $ma_x = mg \sin \alpha - Q \cos \alpha + fN$. Если же $|mg_x + Q_x| \leq fN$, то точка останется неподвижной и $a_x = 0$.

$$\text{Ответ: } a_x = g \begin{cases} (1 - fk) \sin \alpha - (k + f) \cos \alpha, & \text{если } \xi > f, \\ (1 + fk) \sin \alpha - (k - f) \cos \alpha, & \text{если } \xi < -f, \\ 0 & \text{если } |\xi| \leq f, \end{cases}$$

где $\xi = (\sin \alpha - k \cos \alpha) / (\cos \alpha + k \sin \alpha)$.



К задаче Д3



К задаче Д4

Д4. Уравнение движения точки:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{Q} + \bar{F}_{\text{тр}}.$$

Проецируя это уравнение на ось y , найдем $N = mg - kt \sin \alpha$; следовательно, момент отрыва точки от плоскости $t_{\text{отр}} = mg / (k \sin \alpha)$.

Проецируя уравнение движения точки на ось x , найдем: $ma_x = kt \cos \alpha - F_{\text{тр}}$. До тех пор пока $kt \cos \alpha \leq fN$ (при $0 \leq t \leq t_1$, где $t_1 = (fmg/k) / (\cos \alpha + f \sin \alpha) < t_{\text{отр}}$), $a_x = 0$. При $t_1 < t < t_{\text{отр}}$ $ma_x = kt \cos \alpha - fN$, откуда $a_x = (fg/t_1)(t - t_1)$. Таким образом,

$$x^{\square} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_1, \\ (fg/t_1)(t - t_1), & \text{если } t_1 < t < t_{\text{отр}}. \end{cases}$$

Интегрируя последнее соотношение с учетом начальных условий, получим

$$\text{Ответ: } x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_1, \\ (fg/6t_1)(t - t_1)^3, & \text{если } t_1 < t < t_{\text{отр}}, \end{cases}$$

где $t_1 = (fmg/k) / (\cos \alpha + f \sin \alpha)$.

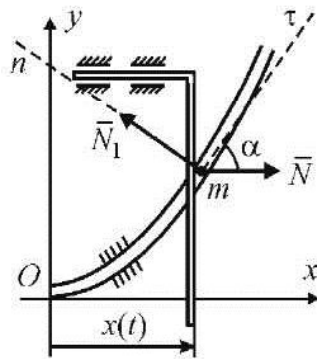
Д5. Уравнение движения точки в проекции на ось x : $m dV/dt = -kxV$. Учитывая, что $dV/dt = VdV/dx$, разделяя пере-

менные и интегрируя, найдем скорость точки как функцию x : $V = V_0 - kx^2/2m$. Далее, $dx/dt = V_0 - kx^2/2m$. Разделяя переменные и интегрируя, найдем: $\text{arth}(x/x_1) = t/t_1$, где $x_1 = \sqrt{2mV_0/k}$ (расстояние, которое точка пройдет до остановки), $t_1 = \sqrt{2m/kV_0}$.

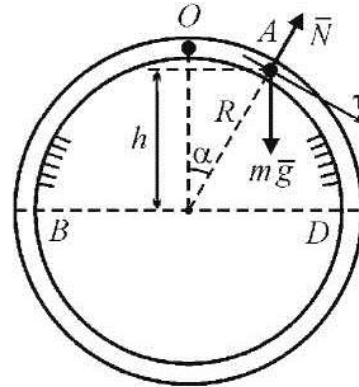
Ответ: $x(t) = x_1 \text{th}(t/t_1)$, где $x_1 = \sqrt{2mV_0/k}$, $t_1 = \sqrt{2m/kV_0}$.

Д6. Уравнение движения точки: $m\bar{a} = \bar{N} + \bar{N}_1$. Проецируя это уравнение на оси x и y , найдем $m\ddot{x} = N - N_1 \sin \alpha$, $m\ddot{y} = N_1 \cos \alpha$. Учитывая, что $x = ut$, $y = kx^2 = ku^2t^2$, $\text{tg} \alpha = y' = 2kx = 2kut$ и исключая N_1 , получим

Ответ: $N(t) = 4mk^2u^3t$.



К задаче Д6



К задаче Д7

Д7. Модуль ускорения точки $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Уравнение движения точки

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}.$$

Проецируя это уравнение на ось τ , найдем $a_\tau = g \sin \alpha = g\sqrt{1 - (h/R)^2}$. Далее, $a_n = V^2/R$. Найдем V^2 из закона сохранения полной энергии:

$$mV^2/2 + mgh = mgR.$$

Отсюда $V^2 = 2g(R-h)$, следовательно, $a_n = 2g(1-h/R)$. После небольших преобразований получаем

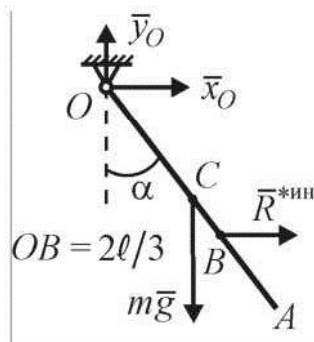
Ответ: $a(h) = g\sqrt{(1-h/R)(5-3h/R)}$.

Д8. Перейдем в систему отсчета, связанную со стержнем. В этой системе отсчета стержень неподвижен, а к действующим на него силам следует добавить переносные силы инерции. Система сил инерции приводится к равнодействующей $\bar{R}^{*ин}$, показанной на рисунке. Составим уравнение равновесия стержня:

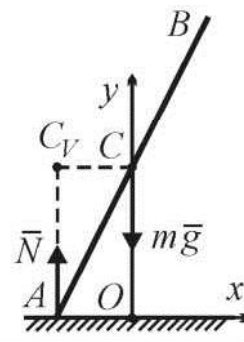
$$\sum m_O = -(mgl/2)\sin\alpha + R^{*ин}(2\ell/3)\cos\alpha = 0.$$

Учитывая, что $R^{*ин} = ma_C = m\omega^2(1/2)\sin\alpha$, получаем

Ответ: $\omega = \sqrt{3g/2\ell\cos\alpha}$.



К задаче Д8



К задаче Д9

Д9. Согласно закону сохранения полной энергии,

$$mV_C^2/2 + J_{Cz}\omega^2/2 + mgy_C = mgl,$$

где $J_{Cz} = m\ell^2/3$. Так как внешние силы, действующие на стержень, не имеют составляющих по оси x и в начальный момент времени скорости точек стержня равнялись нулю, то при движении стержня $x_C \equiv \text{const}$. Тогда

$$V_C = \dot{y}_C, \quad \omega = V_C/CC_V = \dot{y}_C/\sqrt{\ell^2 - y_C^2}.$$

С учетом этих соотношений находим

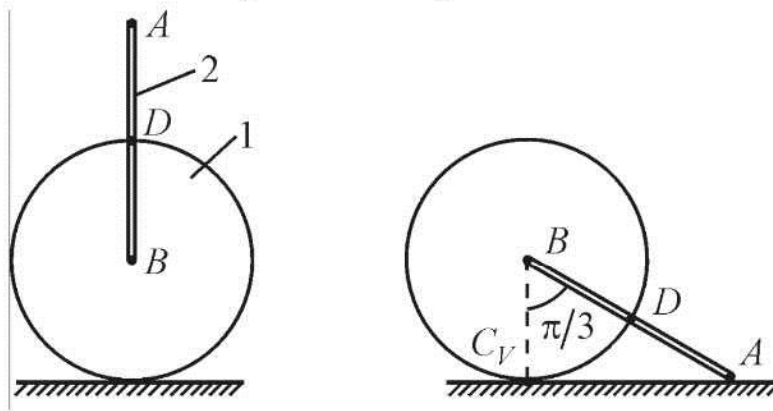
$$\ddot{y}_C^2 = 6g\ell \frac{(1 - y_C/\ell)(1 - y_C^2/\ell^2)}{4 - 3y_C^2/\ell^2}.$$

Проецируя теорему о движении центра масс стержня на ось y , получим

$$N = mg + m\ddot{y}_C.$$

Дифференцируя по времени выражение для \dot{y}_C^2 , найдем \ddot{y}_C как функцию y_C ; подставляя результат в выражение для N , получим

Ответ:
$$N(y_C) = mg \frac{1 + 3(1 - y_C/\ell)^2}{(4 - 3y_C^2/\ell^2)^2}.$$



К задаче Д10

Д10. Согласно закону сохранения полной энергии,

$$T^{\text{нач}} + \Pi_2^{\text{нач}} = T_1^{\text{кон}} + T_2^{\text{кон}} + \Pi_2^{\text{кон}}$$

(потенциальная энергия диска 1 не меняется и ее можно считать равной нулю). Здесь $T^{\text{нач}} = 0$, $\Pi_2^{\text{нач}} = mgh_D^{\text{нач}} = 2mgR$ (высота отсчитывается от уровня плоскости), $T_1^{\text{кон}} = mV_B^2/2 + J_1\omega^2/2$, $T_2^{\text{кон}} = mV_D^2/2 + J_2\omega^2/2$, $\Pi_2^{\text{кон}} = mgh_D^{\text{кон}} = mgR/2$. Учитывая, что $J_1 = mR^2/2$, $J_2 = m(2R)^2/12$, $V_B = \omega \cdot BC_V = \omega R$, $V_D = \omega \cdot DC_V = \omega R$, находим $\omega = \sqrt{(18/17)(g/R)}$. Далее, $V_A = \omega \cdot AC_V = \omega R\sqrt{3}$.

Ответ:
$$V_A = \sqrt{(54/17)gR}.$$

Д11. Стержень с колечками можно рассматривать как твердое тело массы $m = m_1 + 2m_2$; центр масс C этого тела – в середине стержня, момент инерции $J_{Cz} = m_1 \ell^2 / 12 + 2m_2 (\ell/2)^2$. Согласно закону сохранения полной энергии,

$$mV_C^2/2 + J_{Cz}\omega^2/2 + mgh_C = mgh_{C0} = mg(3\ell/2)$$

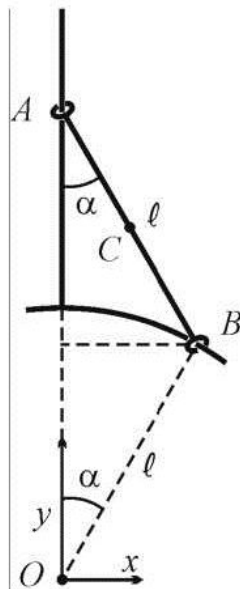
(высота отсчитывается от уровня точки O). Для произвольного значения угла α $\omega = \dot{\alpha}$, $x_C = (x_A + x_B)/2 = (\ell/2)\sin\alpha$, $y_C = (y_A + y_B)/2 = (3\ell/2)\cos\alpha$.

Поэтому $V_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = (\ell^2/4)\dot{\alpha}^2(1 + 8\sin^2\alpha)$, $h_C = y_C = (3\ell/2)\cos\alpha$.

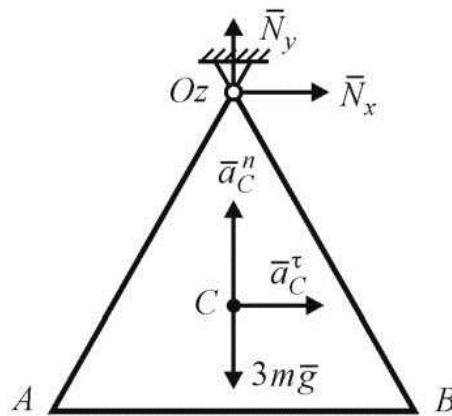
Находя $\dot{\alpha}$ из закона сохранения энергии и учитывая, что

$V_A = |\dot{y}_A| = 2\ell\dot{\alpha}\sin\alpha$, $\alpha = \pi/6$, получим

Ответ:
$$V_A = \sqrt{\frac{9(2 - \sqrt{3})gl(m_1 + 2m_2)}{5m_1 + 12m_2}}$$
.



К задаче Д11



К задаче Д12

Д12. Согласно теореме о движении центра масс, в положении, когда сторона AB горизонтальна, $3ma_C^n = N_y - 3mg$, $3ma_C^r = N_x$. Здесь $a_C^n = \omega^2 \ell / \sqrt{3}$ (ℓ – длина стержня), $a_C^r = \varepsilon \ell / \sqrt{3} = 0$ (так как в данном положении ω достигает максимума). Согласно закону сохранения полной энергии,

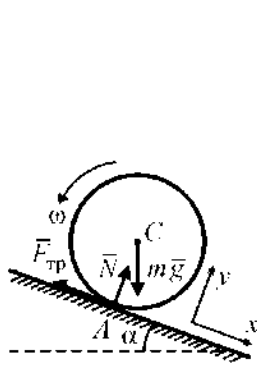
$$T_{\text{нач}} + \Pi_{\text{нач}} = T_{\text{кон}} + \Pi_{\text{кон}},$$

где $T_{\text{нач}} = 0$, $\Pi_{\text{нач}} = -3mg\ell / 2\sqrt{3}$ (высота отсчитывается от уровня оси O), $T_{\text{кон}} = J_Z \omega^2 / 2$, $\Pi_{\text{кон}} = -3mg\ell / \sqrt{3}$. Учитывая, что

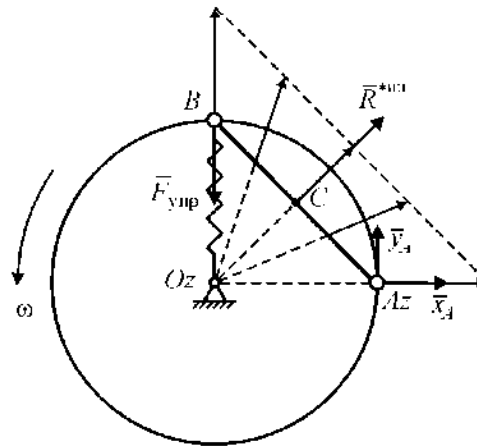
$$J_Z = 2m\ell^2/3 + m\ell^2/12 + m(\ell\sqrt{3}/2)^2$$

(для стороны AB использована теорема Гюйгенса–Штейнера), получим

Ответ: $N = 5mg$.



К задаче Д13



К задаче Д14

Д13. Дифференциальные уравнения движения диска:

$$m dV_{Cx} / dt = mg \sin \alpha - F'_{\text{тр}},$$

$$0 = N - mg \cos \alpha,$$

$$(mR^2/2)(d\omega/dt) = -F'_{\text{тр}} R.$$

Кроме того (до момента прекращения проскальзывания), $F_{\text{тр}} = fN$. Интегрируя уравнения с учетом начальных условий, найдем

$$V_{Cx} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t, \quad \omega = \omega_0 - 2fgt \cos \alpha / R.$$

Далее, $V_{Ax} = V_{Cx} + \omega R = \omega_0 R + g(\sin \alpha - 3f \cos \alpha)t$. Проскальзывание прекратится при $V_{Ax} = 0$.

Ответ: если $\text{tg} \alpha < 3f$, то $T = (\omega_0 R / g) / (3f \cos \alpha - \sin \alpha)$;

если $\text{tg} \alpha \geq 3f$, то проскальзывание никогда не прекратится.

Д14. На рисунке показано взаимное расположение стержня и диска, соответствующее $L = r\sqrt{2}$ и $\ell = r$. На стержень действуют реакция шарнира A и сила упругости пружины $\bar{F}_{\text{упр}}$ (сила тяжести и нормальная реакция диска уравновешиваются). Присоединяя к этим силам д'Аламберовы силы инерции, рассмотрим равновесие сил. Система сил инерции – сходящаяся и приводится к равнодействующей $\bar{R}^{*ин}$. Уравнение равновесия сил

$$\sum m_{Az} = -R^{*ин} r / \sqrt{2} + F_{\text{упр}} r = 0.$$

Учитывая, что $F_{\text{упр}} = c(\ell - \ell_0) = cr/2$ и $R^{*ин} = m\omega^2 \cdot CO = m\omega^2 r / \sqrt{2}$, получаем

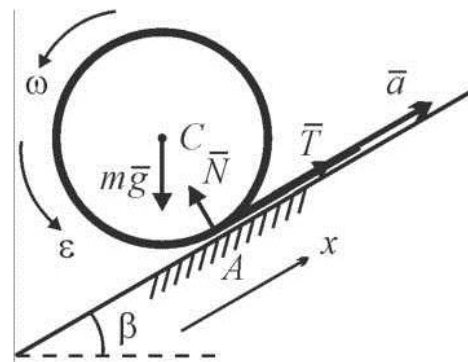
Ответ: $\omega = \sqrt{c/m}$.

Д15. Дифференциальные уравнения движения диска:

$$ma_{Cx} = -mg \sin \beta + T,$$

$$mR^2 \varepsilon / 2 = TR$$

(T – сила натяжения нити). Кроме того, дифференцируя по времени кинематическое соотношение



К задаче Д15

$\omega = (V_{Ax} - V_{Cx})/R$ (A – точка соприкосновения диска с плоскостью),
 получаем $\varepsilon = (a - a_{Cx})/R$. Из полученных уравнений находим a_{Cx} и
 $a_C = |a_{Cx}|$.

Ответ: $a_C = |a - 2g \sin \beta|/3$.

Д16. Дифференциальное уравнение вращательного движения стержня:

$$J_z \ddot{\varphi} = M(\varphi),$$

где $J_z = m(2\ell)^2/3$. Дифференцируя по времени равенство $CB = \ell \operatorname{tg} \varphi$,
 получим $u = \ell \dot{\varphi} / \cos^2 \varphi$, откуда $\dot{\varphi} = (u/\ell) \cos^2 \varphi$. Дифференцируя по
 времени последнее равенство и подставляя $\dot{\varphi}$ из него же, найдем
 $\ddot{\varphi} = -2(u/\ell)^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi$.

Ответ: $M(\varphi) = -(8mu^2/3) \sin \varphi \cos^3 \varphi$.

Д17. Кинетическая энергия системы

$$T = J_1 \omega_1^2 / 2 + m_2 V_{C2}^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 = B \omega_3^2 / 2,$$

где $J_1 = m_1 R_1^2 / 2$, $J_2 = m_2 R_2^2 / 2$, $\omega_1 = 2\omega_3 \ell / R_1$, $V_{C2} = \omega_3 \ell$, $\omega_2 = \omega_3 \ell / R_2$,
 $\ell = R_1 + R_2$, $B = \ell^2 (2m_1 + 3m_2 / 2) = 2J_1 (\ell^2 / R_1^2) (2 + 3m_2 / 2m_1)$.

Сумма мощностей внешних сил

$$\sum N^e = M_3 \omega_3 - M_1 \omega_1 = Q \omega_3,$$

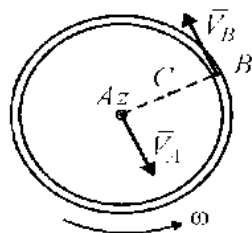
где $Q = M_3 - (2\ell/R_1)M_1$. Из теоремы об изменении кинетической
 энергии следует, что $\varepsilon_3 = Q/B$. Так как $\omega_1/\omega_3 = k$, то $\ell/R_1 = k/2$.

Далее, $m_2/m_1 = R_2^2/R_1^2 = (\ell/R_1 - 1)^2$. Окончательно получаем

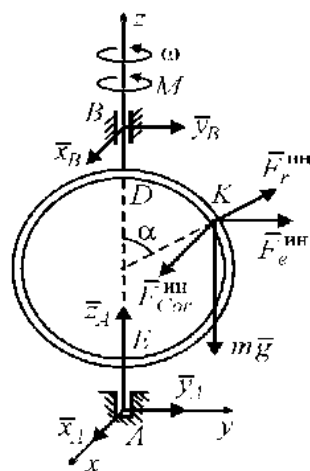
Ответ: $\varepsilon_3 = \frac{M_3 - kM_1}{J_1 k^2 (1 + 3(k-2)^2/16)}$.

Д18. Так как проекции внешних сил на горизонтальную плоскость равны нулю и при $t=0$ система была неподвижна, то при $t \geq 0$ центр масс C системы останется неподвижным. Так как $AB = R = \text{const}$, то точки A и B описывают окружности радиусами $R/2$ с центром в C и в каждый момент времени имеют равные по модулю и противоположно направленные скорости. Тогда $V_B = V_B^r + V_B^e = V_r - V_A + \omega R = V_A$ (ω – угловая скорость диска), откуда $\omega = (2V_A - V_r)/R$. Далее, моменты внешних сил относительно любой вертикальной оси равны нулю, поэтому (с учетом неподвижности системы при $t=0$ и неподвижности C при $t \geq 0$) при $t \geq 0$ кинстический момент системы относительно такой оси равен нулю. Выберем ось Az , тогда $L_{Az} = (mR^2/2)\omega + mV_B R = 0$; подставляя сюда найденное выше выражение для ω и учитывая, что $V_B = V_A$, получим

Отвст: $V_A(t) = V_r(t)/4$.



К задаче Д18



К задаче Д19

Д19. Добавив к силам, действующим на систему, д'Аламберовы силы инерции $\bar{F}_r^{\text{ин}}$, $\bar{F}_e^{\text{ин}}$, $\bar{F}_{Cor}^{\text{ин}}$, получим уравновешенную систему сил. Уравнения равновесия:

$$\sum m_x = -mgR \sin \alpha - F_r^{\text{ин}} (3R/2) \sin \alpha - F_e^{\text{ин}} (3R/2 + R \cos \alpha) - y_B \cdot 3R = 0,$$

$$\sum m_y = F_{Cor}^{ин} (3R/2 + R \cos \alpha) + x_B \cdot 3R = 0.$$

Учитывая, что $F_r^{ин} = mu^2/R$, $F_e^{ин} = m\omega^2 R \sin \alpha$, $F_{Cor}^{ин} = 2m\omega u \cos \alpha$, из этих уравнений получаем

Ответ: $x_B = -m\omega u \cos \alpha (1 + (2/3) \cos \alpha),$

$$y_B = -m \sin \alpha \left(g/3 + u^2/2R + \omega^2 R ((1/2) + (1/3) \cos \alpha) \right).$$

Д20. Согласно закону сохранения кинетического момента,

$$(m_1 a^2 + m_2 x^2) \omega = (m_1 a^2 + m_2 b^2) \omega_0.$$

Согласно закону сохранения полной энергии (в данном случае $\Pi = 0$),

$$m_1 a^2 \omega^2 / 2 + m_2 (x^2 \omega^2 + V_r^2) / 2 = (m_1 a^2 + m_2 b^2) \omega_0^2 / 2.$$

Выражая ω из первого равенства и подставляя во второе, получим

Ответ: $V_r(x) = \sqrt{\frac{(m_1 a^2 + m_2 b^2)(x^2 - b^2)}{m_1 a^2 + m_2 x^2}} \omega_0,$

Д21. Уравнение поступательного движения груза $m_1 \ddot{x} = T - m_1 g$, где T – сила натяжения нити. Уравнение вращательного движения диска $(m_2 R^2 / 2) \ddot{\phi} = kt - TR$. Учитывая, что $x = R\phi$, и исключая T , найдем $(m_1 + m_2 / 2) \ddot{x} = kt / R - m_1 g$. Интегрируя один раз это уравнение с использованием начальных условий, найдем скорость груза; приравняв ее нулю, найдем время до остановки; интегрируя уравнение второй раз и подставляя найденное время до остановки, получим

Ответ: $s = \frac{2m_1^3 g^3 R^2}{3k^2 (m_1 + m_2 / 2)}.$

Д22. Согласно закону сохранения количества движения,

$$m_1 V_1 + m_2 (V_{2e} - V_{2r} \cos \alpha) = 0,$$

где $V_{2e} = V_1$. Согласно закону сохранения полной энергии,

$$T_{\text{нач}} + \Pi_{\text{нач}} = T_{\text{кон}} + \Pi_{\text{кон}},$$

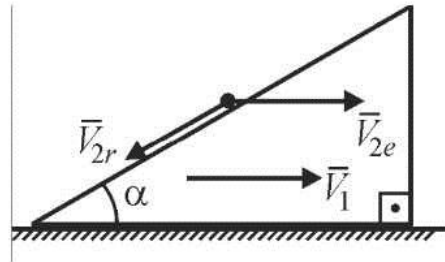
где $T_{\text{нач}} = 0$, $\Pi_{\text{нач}} = m_2 g H$ (высота отсчитывается от уровня неподвижной плоскости; потенциальная энергия призмы не меняется и ее можно считать равной нулю),

$T_{\text{кон}} = m_1 V_1^2 / 2 + m_2 V_2^2 / 2$, $\Pi_{\text{кон}} = 0$. Учитывая, что

$$V_2^2 = V_{2r}^2 + V_{2e}^2 - 2V_{2r}V_{2e} \cos \alpha$$

и исключая V_{2r} , получим

Ответ:
$$V_1 = \sqrt{\frac{2gH \cos^2 \alpha}{(m_1/m_2 + 1)(m_1/m_2 + \sin^2 \alpha)}}.$$



К задаче Д22

Д23. Согласно теореме об изменении кинетической энергии,

$$A = T_{\text{кон}} - T_{\text{нач}},$$

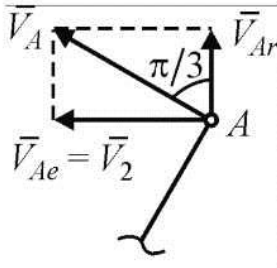
где $T_{\text{нач}} = J_z \omega_0^2 / 2$, $T_{\text{кон}} = J_z \omega^2 / 2 + m_2 V^2 / 2$, $J_z = m_1 R^2 / 2 + m_1 (R/2)^2$,

$V^2 = V_r^2 + V_e^2$, $V_r = \dot{s} = \sqrt{2Ra}$, $V_e = \omega s = \omega R$ (в двух последних равенствах $t = \sqrt{2R/a}$). Величину ω (при $t = \sqrt{2R/a}$) найдем из закона сохранения кинетического момента:

$$J_z \omega_0 = J_z \omega + m_2 V_e s.$$

После вычислений получаем

Ответ:
$$A = m_2 Ra - \frac{3m_1 m_2 R^2 \omega_0^2}{6m_1 + 8m_2}.$$



К задаче Д24

Д24. Согласно теореме об изменении кинетической энергии,

$$T_{\text{кон}} - T_{\text{нач}} = \sum A^e,$$

где $T_{\text{нач}} = 0$, $T_{\text{кон}} = J_z \omega_1^2 / 2 + m_2 V_2^2 / 2$, $J_z = m_1 \ell^2 / 3$,

$$\sum A^e = M \pi / 3 - F s_2, \quad s_2 = \ell - \ell \cos(\pi/3) = \ell / 2.$$

Величину ω_1 выразим через V_2 , записав скорость точки A в виде $\vec{V}_A = \vec{V}_{Ar} + \vec{V}_{Ae}$, где $V_A = \omega_1 \ell$, $V_{Ae} = V_2$. Тогда

(см. рисунок) $V_2 = \omega_1 \ell \sqrt{3} / 2$. Окончательно, получаем

$$\text{Ответ: } V_2 = \sqrt{\frac{2\pi M / 3 - F \ell}{4m_1 / 9 + m_2}}.$$

Д25. Согласно закону сохранения кинетического момента,

$$(m_1 R^2 / 2 + m_2 \ell^2 / 3) \omega_0 = (m_1 R^2 / 2 + m_2 \ell^2 / 12 + m_2 (OC)^2) \omega_1,$$

где R – радиус диска, $\ell = R$ – длина стержня, C – центр масс стержня. Здесь использована теорема Гюйгенса – Штейнера для стержня и учтено, что относительное движение стержня не вносит вклад в кинетический момент относительно оси z . В указанный в условии задачи момент времени $OC = R$.

$$\text{Ответ: } \omega_1 = \frac{m_1 + 2m_2 / 3}{m_1 + 13m_2 / 6} \omega_0.$$

Д26. Выберем в качестве обобщенной координаты системы перемещение x призмы; в положении равновесия $x = 0$. Кинетическая энергия системы

$$T = m_1 V_1^2 / 2 + m_2 V_C^2 / 2 + J_{Cz} \omega_2^2 / 2.$$

Учитывая, что $\vec{V}_C = \vec{V}_{Cr} + \vec{V}_{Ce}$, $V_C^2 = V_{Cr}^2 + V_{Ce}^2 - 2V_{Cr}V_{Ce} \cos \alpha$,

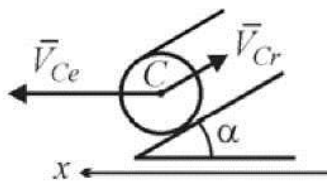
$$V_{Cr} = V_1 / 2, \quad V_{Ce} = V_1, \quad \omega_2 = V_{Cr} / R = V_1 / 2R, \quad V_1 = \dot{x}, \quad J_{Cz} = m_2 R^2 / 2$$

(R – радиус цилиндра 2), находим $T = B\dot{x}^2/2$, где $B = m_1 + m_2(11/8 - \cos\alpha)$. Потенциальная энергия системы

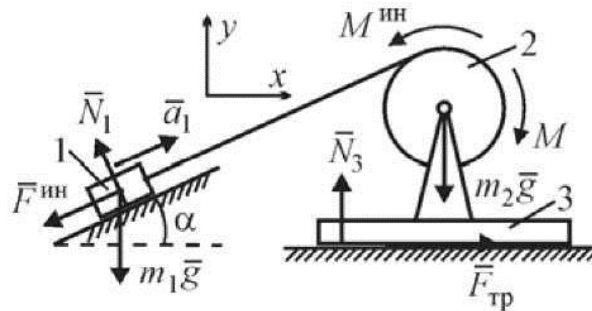
$$\Pi = m_1gh_{C1} + m_2gh_C + c\lambda^2/2,$$

где $h_{C1} = 0$, $h_C = x \sin\alpha/2$ (отсчитываются от уровней, занимаемых при равновесии системы), $\lambda = \lambda_{\text{ст}} + \lambda_{\text{дин}} = \lambda_{\text{ст}} + x$. Тогда $\Pi = \text{const} + cx^2/2$ ($\lambda_{\text{ст}}$ таково, что слагаемое, пропорциональное x , обращается в нуль). Период колебаний $\tau = 2\pi\sqrt{B/c}$.

Ответ: $\tau = 2\pi\sqrt{(m_1 + m_2(11/8 - \cos\alpha))/c}$.



К задаче Д26



К задаче Д27

Д27. Пусть подставка неподвижна. Применим принцип д'Аламбера к системе груз + нить + блок + подставка. Добавим к внешним силам, действующим на систему, силу инерции $\vec{F}^{\text{ин}} = -m_1\vec{a}_1$ и пару сил инерции, момент которой $M^{\text{ин}} = -m_2R^2\varepsilon_2/2$. Проекция главного вектора полученной системы сил на оси x и y равны нулю:

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} - m_1a_1 \cos\alpha - N_1 \sin\alpha = 0, \\ N_3 - m_2g - m_1g + N_1 \cos\alpha - m_1a_1 \sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом того что $N_1 = m_1g \cos\alpha$, находим $F_{\text{тр}}$ и N_3 . Далее, должно выполняться неравенство $F_{\text{тр}} \leq fN_3$. Приведя его к виду $f \geq f_{\text{min}}$, получаем

Ответ: $f_{\text{min}} = \frac{m_1(a_1 + g \sin\alpha) \cos\alpha}{m_2g + m_1(a_1 + g \sin\alpha) \sin\alpha}$.

Д28. Согласно закону сохранения кинетического момента,

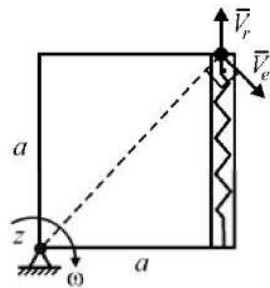
$$0 = -J_z \omega + mV_r a - mV_e a\sqrt{2},$$

где $V_e = \omega a\sqrt{2}$ (ось z направлена из-за рисунка). Отсюда $V_r = (J_z + 2ma^2)\omega / ma$. Согласно закону сохранения полной энергии,

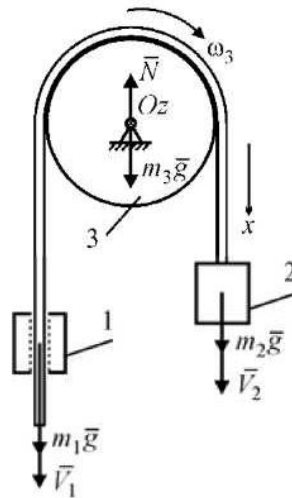
$$c(a/2)^2 / 2 = J_z \omega^2 / 2 + mV^2 / 2,$$

где $V^2 = V_r^2 + V_e^2 - V_r V_e \sqrt{2}$. Подставляя в последнее равенство полученные выше выражения для V_r , V_e и затем подставляя V^2 в закон сохранения полной энергии, находим

Ответ:
$$\omega = \sqrt{\frac{cma^4}{4(J_z + ma^2)(J_z + 2ma^2)}}.$$



К задаче Д28



К задаче Д29

Д29. Согласно теореме об изменении кинетического момента для системы грузы + блок + канат,

$$dL_z / dt = \sum m_z (\bar{F}^e)$$

(ось z направлена за рисунок), где $L_z = -m_1 V_{1x} R + m_2 V_{2x} R + m_3 R^2 \omega_3 / 2$,

$\sum m_z (\bar{F}^e) = (m_2 - m_1)gR$. Дифференцируя L_z и учитывая, что $a_1 = 0$ и $\varepsilon_3 = a_{2x} / R$, найдем a_{2x} и $a_2 = |a_{2x}|$.

Ответ: $a_2 = \frac{|m_2 - m_1|g}{m_2 + m_3/2}$.

Д30. Согласно теореме о движении центра масс системы пластина + точка,

$$(m_1 + m_2)\bar{a}_C = \bar{N} + (m_1 + m_2)\bar{g} + \bar{F}_{\text{тр}}.$$

Проецируя это уравнение на оси x , y и учитывая, что (при движении пластины) $F_{\text{тр}} = fN$, получим $\overset{\text{III}}{x}_C = -f\overset{\text{III}}{y}_C - fg$, откуда $x_C = -fy_C - fgt^2/2 + C_1t + C_2$. Далее,

$$(m_1 + m_2)x_C = m_1x_1 + m_2(x_1 - R \sin kt),$$

$$(m_1 + m_2)y_C = m_1b + m_2(b + R \cos kt).$$

Подставляя два последних равенства в выражение, содержащее произвольные постоянные C_1 , C_2 и находя эти постоянные из условий $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = V_0$, получаем

Ответ: $x_1(t) = V_0t - fgt^2/2 + \frac{m_2R}{m_1 + m_2} [f(1 - \cos kt) + \sin kt - kt]$.

Д31. Согласно теореме о движении центра масс системы

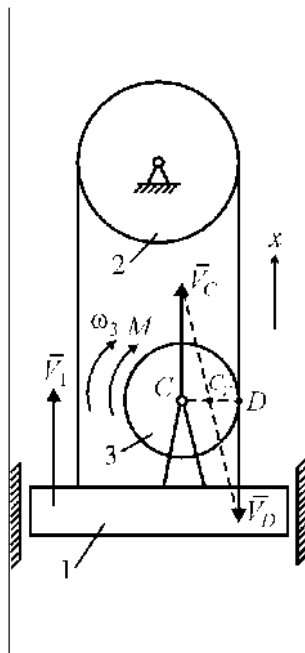
$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{a}_C = \bar{N}_D + \bar{X}_A + \bar{Y}_A + (m_1 + m_2 + m_3)\bar{g}.$$

Проецируя это уравнение на (горизонтальную) ось x , найдем $3m\overset{\text{III}}{x}_C = X_A$. Далее $x_C = (x_{C_1} + x_{C_2} + x_{C_3})/3$, где $x_{C_1} = (\ell/2)\cos\varphi$, $x_{C_2} = (3\ell/2)\cos\varphi$, $x_{C_3} = 2\ell\cos\varphi$, откуда $x_C = (4\ell/3)\cos\varphi$. Дифференцируя последнее равенство дважды по времени и полагая $\varphi = 0$, $\ddot{\varphi} = -\omega_1$, получим $\overset{\text{III}}{x}_C = -(4\ell/3)\omega_1^2$; таким образом, $X_A = -4m\ell\omega_1^2$. Величину ω_1 найдем из закона сохранения полной энергии:

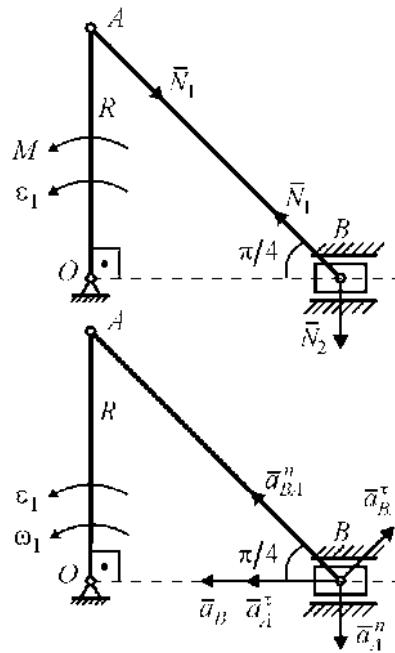
$$T_{\text{нач}} + \Pi_{\text{нач}} = T_{\text{кон}} + \Pi_{\text{кон}},$$

где $T_{\text{нач}} = 0$, $P_{\text{нач}} = m_1 g (\ell/2) \sin \varphi_0 + m_2 g (\ell/2) \sin \varphi_0 = mg \ell \sin \varphi_0$ (высота отсчитывается от уровня точки A), $T_{\text{кон}} = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2$, $J_1 = J_2 = m \ell^2 / 3$, $\omega_1 = \omega_2$ (МЦС стержня 2 – в точке D), $P_{\text{кон}} = 0$.
Получаем $\omega_1^2 = 3(g/\ell) \sin \varphi_0$.

Ответ: $X_A = -12m g \sin \varphi_0$.



К задаче Д32



К задаче Д33

Д32. Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = m_1 V_1^2 / 2 + J_2 \omega_2^2 / 2 + m_3 V_C^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2,$$

где $J_2 = m_2 R^2 / 2$, $J_3 = m_3 R^2 / 2$. Так как (см. рисунок) $\omega_2 = V_1 / R_2$, $V_C = V_1$, $V_D = V_1$, $CC_V = C_V D$, $\omega_3 = V_1 / (R/2)$, то $T = B V_1^2 / 2$, где $B = m_1 + m_2 / 2 + 3m_3$. Сумма мощностей активных сил

$$\sum N^a = -m_1 g V_1 - m_3 g V_1 + M \omega_3 = Q V_1,$$

где $Q = 2M/R - (m_1 + m_3)g$. Из теоремы об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме (или из уравнения Лагранжа) следует, что $a_{1x} = Q/B$; $a_1 = |a_{1x}|$.

Ответ: $a_1 = \frac{|2M/R - (m_1 + m_3)g|}{m_1 + m_2/2 + 3m_3}$.

Д33. Уравнение вращательного движения стержня OA :

$$(m_1 R^2 / 3) \varepsilon_1 = M - N_1 R / \sqrt{2}.$$

Уравнение поступательного движения ползуна B :

$$m_2 a_B = N_1 / \sqrt{2}.$$

Из этих уравнений следует, что $M = (m_1 R^2 / 3) \varepsilon_1 + R m_2 a_B$.

Найдем a_B (кинематическая часть задачи). Так как стержень AB совершает мгновенно поступательное движение, то $\omega_{AB} = 0$. Далее,

$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$. Проецируя это равенство на прямую AB , находим $a_B = -a_A^n + a_A^\tau + a_{BA}^n \sqrt{2}$. Так как $a_A^n = \omega_1^2 R$, $a_A^\tau = \varepsilon_1 R$, $a_{BA}^n = \omega_{AB} \cdot AB = 0$, то $a_B = (\varepsilon_1 - \omega_1^2) R$.

Ответ: $M = \left[m_1 \varepsilon_1 / 3 + m_2 (\varepsilon_1 - \omega_1^2) \right] R^2$.

Список литературы

1. *Березина С.Г., Пушкарев А.Э.* Задачи олимпиад Удмуртии по теоретической механике 2000–2004 гг. с ответами и решениями. – Ижевск.: Изд-во ИжГТУ, 2005. – 80 с.
2. *Березкин Е.Н.* Решение задач по теоретической механике. Часть 1. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 92 с.
3. *Березкин Е.Н.* Решение задач по теоретической механике. Часть 2. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 136 с.
4. *Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В.* Теоретическая механика: сборник задач. – Киев.: Вища школа, 1980. – 400 с.
5. *Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1987. – 176 с.
6. *Кирсанов М.Н.* Учебник. Теоретическая механика. – М.: Физматлит, 2002. – 384 с.
7. Методические указания по решению нестандартных задач механики / сост. *А.Н. Борисова, А.А. Рыков.* – Новосибирск: Изд-во Новосибир. электротехн. ин-та, 1989. – 48 с.
8. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. / под ред. *А.О. Шимановского.* – Гомель: БелГУТ, 2007. – Вып. 1. – 107 с.
9. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. / под ред. *А.О. Шимановского.* – Гомель: БелГУТ, 2008. – Вып. 2. – 148 с.
10. Механика. Теория, задачи, учебно-методические разработки: сб. науч. тр. / под ред. *А.О. Шимановского.* – Гомель: БелГУТ, 2006. – 144 с.
11. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.

12. *Попов А.И.* Механика. Решение творческих задач динамики. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. – 88 с.
13. *Попов А.И.* Механика. Решение творческих профессиональных задач. Часть 2. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007. – 80 с.
14. *Попов В.И., Тышкевич В.А., Шумский М.П.* Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Часть 1: Статика и кинематика. – Тамбов: Изд-во ТИХМа, 1992. – 104 с.
15. *Попов В.И., Тышкевич В.А., Шумский М.П.* Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Часть 2: Динамика. – Тамбов: Изд-во ТИХМа, 1992. – 124 с.
16. Сборник задач по теоретической механике / *Н.А. Бражниченко* [и др.]. – М.: Высшая школа, 1974. – 520 с.
17. Сборник задач по теоретической механике / под ред. *К.С. Колесникова*. – М.: Наука, 1989. – 448 с.
18. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике / под ред. *А.В. Чигарева*. – Минск: Тэхналогія, 2000. – 281 с.
19. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Часть 1: Статика / *А.И. Попов* [и др.]. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2006. – 96 с.