ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ 2
Курс лекций

МОДУЛЬ 5

ЛЕКЦИЯ 9

Модуль 5 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. Динамика точки.
2. Основные понятия и определения.
3. Законы динамики.
4. Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки.
5. Дифференциальные уравнения движения точи.
6. План решения второй задачи движения.
7. Движение точки, брошенной под углом к горизонту в однородном поле тяжести.
8. Общие теоремы динамики точки.
9. Количество движения и кинетическая энергия точки.
10. Импульс силы.
11. Теорема об изменении количества движения точки.
12. Работа силы.
13. Мощность.
14. Примеры вычисления работы.
15. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
16. Теорема моментов.
17. Относительное движение точки.
18. Уравнения относительного движения и покоя точки.
19. Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел.

Изучение данных вопросов необходимо для динамики движения центра масс механической системы, динамики вращательного движения твердого тела, кинетического момента механической системы, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Основные понятия и определения.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Движение тел с чисто геометрической точки зрения было изучено в кинематике. В динамике, в отличие от кинематики, при изучении движения тел принимают во внимание, как действующие силы, так и инертность самих материальных тел.

Понятие о силе, как о величине, характеризующей меру механического взаимодействия материальных тел, было введено в статике. Но при этом в статике мы, по существу, считали все силы постоянными. Между тем, на движущееся тело наряду с постоянными силами (постоянной, например, можно считать силу тяжести) действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть *от времени, от положения тела и от его скорости.* В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата; от положения тела зависит сила упругости пружины; от скорости движения зависят силы сопротивления среды (воды, воздуха).

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным, свободным от других воздействий покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность и представляет собой *свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.* Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным, и наоборот.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела. В механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил; характер движения может еще зависеть от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц (т. е. от распределения масс).

Чтобы при первоначальном изучении динамики иметь возможность отвлечься от учета влияния формы тел (распределения масс), вводится понятие о материальной точке.

Материальной точкой называют материальное тело (тело, имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

Практически данное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами самого тела. Кроме того, как будет показано в динамике системы *поступательно* движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Наконец, материальными точками можно считать частицы, на которые мы будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путем обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние*. Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением *по инерции*.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи – пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. Из него следует, что если $F=0$, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью ($\bar{v}$=const); ускорение точки при этом равно нулю: a = 0); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется *инерциальной системой отсчета* (иногда ее условно называют неподвижной). По данным опыта для нашей Солнечной системы инерциальной является система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые неподвижные звезды. При решении большинства технических задач инерциальной, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) гласит: *произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

При этом между модулями ускорения и силы имеет место зависимость

$$ma = F.$$

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса, так как две разные точки при действии одной и той же силы получают одинаковые ускорения только тогда, когда будут равны их массы; если же массы будут разные, то точка, масса которой больше (т. е. более инертная), получит меньшее ускорение, и наоборот.

Если на точку действует одновременно несколько сил, то они, как известно, будут эквивалентны одной силе, т. е. равнодействующей R, равной геометрической сумме этих сил. Уравнение, выражающее основной закон динамики, принимает в этом случае вид

$$m\bar{a} = \bar{R} \quad \text{или} \quad m\bar{a} = \Sigma\bar{F}_K.$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материальными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы. Например, если на гладкой горизонтальной плоскости поместить на некотором расстоянии друг от друга кусок железа и магнит, то при взаимодействии эти тела будут сближаться (а не находиться в покое). При этом, так как действующие на каждое из тел силы будут по модулю одинаковы, то ускорения тел, согласно второму закону динамики, будут обратно пропорциональны их массам.

Третий закон динамики, как устанавливающий характер взаимодействия материальных частиц, играет большую роль в динамике системы.

Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу *(первая задача динамики);* 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки *(вторая* или *основная задача динамики).*

Решаются обе эти задачи с помощью уравнений, выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают ускорение $\bar{a}$ т. е. величину, характеризующую движение точки, и действующие на нее силы.

В технике часто приходится сталкиваться с изучением *несвободного* движения точки, т. е. со случаями, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

В этих случаях, как и в статике, будем при решении задач исходить из аксиомы связей, согласно которой *всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи* $\boldsymbol{N}$. Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки примет вид:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N},$$

где $\bar{F}_k^a$ –действующие на точку активные силы.

Первая задача динамики для несвободного движения будет обычно сводиться к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи.

Пример решения первой задачи динамики: Лифт весом P (рис. 1) начинает подниматься с ускорением $\boldsymbol{a}$. Определить натяжение троса.

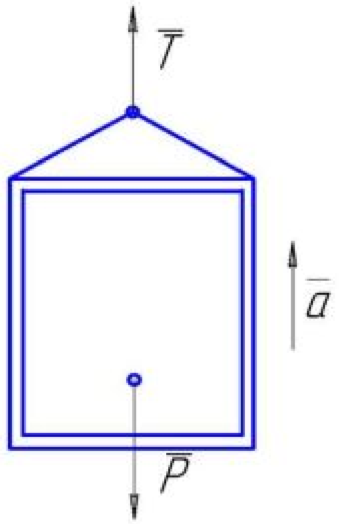


Рисунок 1

Рассматривая лифт как свободный, заменяем действие связи (троса) реакцией T и, составляя уравнение $m\bar{a} = \sum F_k^a + N$ в проекции на вертикаль, получаем:

$$\frac{P}{g} a = T - P.$$

Отсюда находим: $$T = P\left(1 + \frac{a}{g}\right).$$

Если лифт начнёт опускаться с таким же ускорением, то натяжение троса будет равно:

$$T = P\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

Дифференциальные уравнения движения точки

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси $Oxyz$ (рис. 2). Проектируя обе части равенства $m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и т. д., получим *дифференциальные уравнения криволинейного движения точки* в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

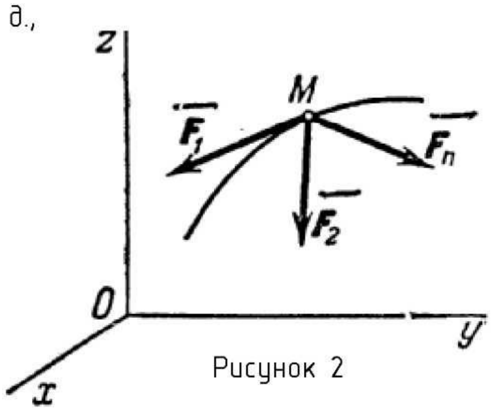


Рисунок 2

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_{kx}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_{ky},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma F_{kz}.$$

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время t, координаты точки x, y, z и проекции ее скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.

Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т. е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях $Oxyz$ начальные условия задаются в виде: при $t=0$

$$\left.\begin{array}{lll} X = X_0, & y = y_0, & z = z_0; \\ v_x = v_{x0}, & v_y = v_{y0}, & v_z = v_{z0}. \end{array}\right\}$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты x, y, z движущейся точки, как функции времени t, т. е. найдем закон движения точки.

Пример решения второй задачи движения

Движение точки, брошенной под углом к горизонту в однородном поле тяжести

Изучим движение тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, рассматривая его как материальную точку массы m. При этом сопротивлением воздуха пренебрежём, а поле тяжести будем считать однородным (P=const), полагая, что дальность полёта и высота траектории малы по сравнению с радиусом Земли.

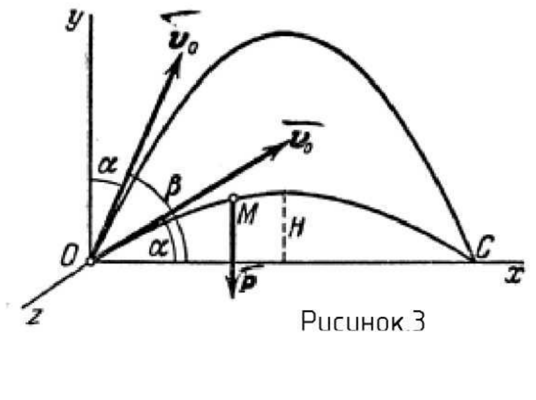


Рисунок 3

Поместим начало координат O в начальном положении точки. Направим ось Oy вертикально вверх; горизонтальную ось Ox расположим в плоскости, проходящей через Oy и вектор $\bar{V}_0$, а ось Oz проведём перпендикулярно первым двум осям (рис.3). Тогда угол между вектором $\overline{V}_0$ и осью *Ox* будет равен α.

Изобразим движущуюся точку *M* где-нибудь на траектории. На точку действует одна только сила тяжести $\overline{P}$, проекции которой на оси координат равны:

$$Px=0, \quad Py=-P=-mg, \quad Pz=0.$$

Подставляя эти величины в дифференциальные уравнения и замечая, что $\frac{d^2x}{dt}=\frac{dVx}{dt}$ и т.д. мы после сокращения на ***m*** получим:

$$\frac{dVx}{dt}=0, \frac{dVy}{dt}=\cdot g, \frac{dVz}{dt}=0.$$

Умножая обе части этих уравнений на *dt* и интегрируя, находим:

$$Vx=C_1, \quad Vy=-gt+C_2, \quad Vz=c_3.$$

Начальные условия в нашей задаче имеют вид:

при t=0, x=0, y=0, z=0,

$Vx=V_0Cos\alpha,$ $Vy=V_0Sin\alpha,$ $Vz=0.$

Удовлетворяя начальным условиям, будем иметь:

$$C_1=V_0Cos\alpha, \quad C_2=V_0Sin\alpha, \quad C_3=0.$$

Подставляя эти значения C_1, C_2 и C_3 в найденное выше решение и заменяя *Vx, Vy, Vz* на $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, придём к уравнениям:

$$\frac{dx}{dt}=V_0Cos\alpha, \frac{dy}{dt}=V_0Sin\alpha\cdot gt, \frac{dz}{dt}=0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$x=V_0tCos\alpha+C_4, y=V_0tSin\alpha\cdot\frac{gt^2}{2}+C_5, z=0.$$

Подстановка начальных данных даёт $C_4=C_5=C_6=0$, и мы окончательно находим уравнения движения точки M в виде:

$$x=V_0tCos\alpha, y=V_0tSin\alpha\cdot\frac{gt^2}{2}, z=0 \qquad (1)$$

Из последнего уравнения следует, что движение происходит в плоскости *Oxy*

Имея уравнение движения точки, можно методами кинематики определить все характеристики данного движения.

1. Траектория точки. Исключая из первых двух уравнений (1) время t, получим уравнение траектории точки:

$$y=xtg\alpha\cdot\frac{gx^2}{2V_0^2Cos^2\alpha}. \qquad (2)$$

Это – уравнение параболы с осью, параллельной оси *Oy*. Таким образом, *брошенная под углом к горизонту тяжёлая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (Галилей).*

2. Горизонтальная дальность. Определим горизонтальную дальность, т.е. измеренное вдоль оси *Ox* расстояние OC=X. Полагая в равенстве (2) y=0, найдём точки пересечения траектории с осью *Ox*. Из уравнения:

$$x\left(tg\alpha\cdot\frac{gx}{2V_0^2Cos^2\alpha}\right)=0$$

получаем $$x_1=0, x_2=\frac{2V_0^2 Cos^2\alpha tg\alpha}{g}.$$

Первое решение дает точку О, второе точку С. Следовательно, $X=X_2$ и окончательно

$$X=\frac{V_0^2}{g}Sin2\alpha. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что такая же горизонтальная дальность X будет получена при угле β, для которого 2β=180°-2α, т. е. если угол β=90-α. Следовательно, при данной начальной скорости V_0 в одну и ту же точку С можно попасть двумя траекториями: настильной (α<45°) и навесной (β= 90-α > 45°).

При заданной начальной скорости V_0 наибольшая горизонтальная дальность в безвоздушном пространстве получается, когда sin2α=1, т. е. при угле α=45°.

3. Высота траектории. Если положить в уравнении (2)

$x=\frac{1}{2}X=\frac{V_0^2}{g}Sin\alpha Cos\alpha$, то найдется высота траектории H:

$$H=\frac{V_0^2}{2g}Sin^2\alpha. \qquad (4)$$

4. Время полета. Из первого уравнения системы (1) следует, что полное время полета T определяется равенством $X=V_0TCos\alpha$. Заменяя здесь X его значением, получим

$$T=\frac{2V_0}{g}Sin\alpha.$$

При угле наибольшей дальности α=45° все найденные величины равны:

$$x^*=\frac{V_0^2}{g}, H^*=\frac{V_0^2}{4g}=\frac{1}{4}x^*, T^*=\frac{V_0}{g}\sqrt{2}.$$

Полученные результаты практически вполне приложимы для ориентировочного определения характеристик полета снарядов (ракет), имеющих дальности порядка 200...600 *км*, так как при этих дальностях (и при α~45°) снаряд основную часть своего пути проходит в стратосфере, где сопротивлением воздуха можно пренебречь. При меньших дальностях на результат будет сильно влиять сопротивление воздуха, а при дальностях свыше 600 *км* силу тяжести уже нельзя считать постоянной.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми *общими теоремами*, являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление вцелом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рассмотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения и кинетическая энергия точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются *количество движения* и *кинетическая энергия*.

Количеством движения точки называется векторная величина $m\overline{v}$ *равная произведению массы точки на вектор ее скорости*. Направлен вектор $m\overline{v}$ так же, как и скорость точки,
т. е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина $\frac{mv^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

Например, зная количество движения автомобиля (т. е. величину Q=mv) а не величины m и v в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени *dt*. *Элементарным импульсом силы называйся векторная величина* $d\overline{S}$, *равная произведению вектора силы* $\overline{F}$ *на элементарный промежуток времени dt*

$$d\overline{S}=\overline{F}dt.$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.
Импульс $\overline{S}$ любой силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\overline{S}=\int_0^{t_1}\overline{F}dt.$$

Следовательно, *импульс силы за любой промежуток времени, t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от нуля до t_1*

В частном случае, если сила $\overline{F}$ и по модулю, и по направлению постоянна ($\overline{F}$=const), будем иметь $\overline{S}=\overline{F}t_1$. Причем, в этом случае и модуль $S=Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\overline{a}=\frac{d\overline{v}}{dt}$, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt}=\sum\overline{F}_k.$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.*

Проинтегрируем это уравнение.

Пусть точка массы m, движущаяся под действием силы $\bar{R} = \Sigma\bar{F}_k$ (рис.4), имеет в момент t=0 скорость $\bar{v}_0$, а в момент t_1-скорость $\bar{v}_1$. Умножим тогда обе части равенства на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости V_0 и V_1. Так как интеграл от $d(mv)$ равен mv, то в результате получим:

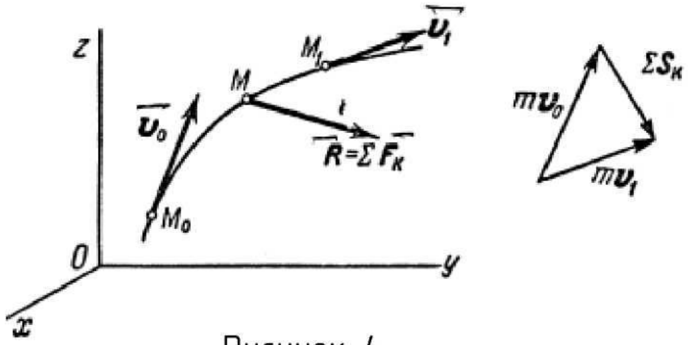


Рисунок 4

$$m\bar{v}_1 \cdot m\bar{v}_0 = \Sigma \, {}_0\!\int \bar{F}_K dt .$$

Стоящие справа интегралы представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_K .$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени* (рис. 4).

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях.

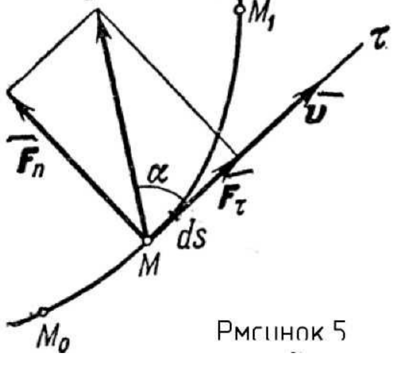
$$\left.\begin{aligned} mv_{1X} - mv_{0X} &= \sum S_{KX}; \\ mv_{1Y} - mv_{0Y} &= \sum S_{KY}; \\ mv_{1Z} - mv_{0Z} &= \sum S_{KZ}. \end{aligned}\right\}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси Ox теорема выражается первым из этих уравнений.

ЛЕКЦИЯ 10

Работа силы. Мощность

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы.



Рмгунок 5

При этом работа характеризует то действие силы, которым определяется изменение *модуля* скорости движущейся точки.

Введём сначала понятие об элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении ds. Элементарной работой силы $\bar{F}$ (рис.5) называется скалярная величина:

$$dA = F_\tau ds,$$

где F_τ -прекция силы $\bar{F}$ на касательную к тректории, направленную в сторону перемещения точки, а ds-бесконечно малое перемещение точки, направленное вдоль этой касательной.

Данное определение соответствует понятию о работе, как о характеристике того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. В самом деле, если разложить силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}_\tau$ и $\bar{F}_n$, то изменять модуль скорости точки будет только составляющая $\bar{F}_\tau$, сообщающая точке касательное ускорение Составляющая же $\bar{F}_n$ или изменяет направление вектора скорости V (сообщает точке нормальное ускорение), или, при несвободном движение изменяет давление на связь. На модуль скорости составляющая $\bar{F}_n$ влиять не будет, т.е., как говорят, сила F_n «не будет производить работу».

Замечая, что $F_\tau = F\cos\alpha$, получаем: $dA = FdsCos\alpha$.

Таким образом, элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения точки, умноженной на элементарное перемещение ds или элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при α=0 элементарная работа *dA=Fds*.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при α=180° элементарная работа *dA=-F ds*.

Если угол α=90°, т. е. *если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.*

Найдем аналитическое выражение элементарной работы. Для этого разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}_X$, $\bar{F}_Y$, $\bar{F}_Z$ по направлениям координатных осей (рис.6; сама сила $\bar{F}$ на чертеже не показана). Элементарное перемещение MM'=ds слагается из перемещений dz, dy, dz вдоль координатных осей, где x, y, z-координаты точки M. Тогда работу силы $\bar{F}$ на перемещении ds можно вычислить как сумму работ её составляющих $\bar{F}_X$, $\bar{F}_Y$, $\bar{F}_Z$ на перемещениях dz, dy, dz. Но на перемещении dx совершает работу только составляющая $\bar{F}_X$, причём её работа равна $F_X dx$. Работа на перемещениях dy и dz вычисляется аналогично.

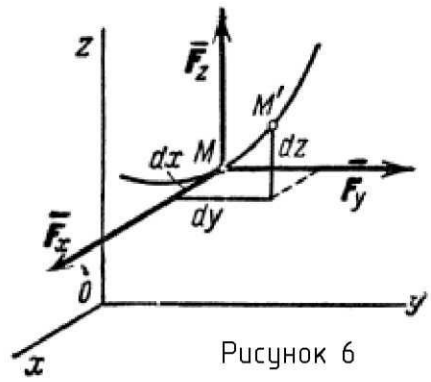


Рисунок 6

Окончательно находим: $dA=F_X\,dx+F_Ydy+F_Zdz$.

Формула дает *аналитическое выражение элементарной работы силы.*

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ и будет равна:

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds$$

или

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)}(F_x dx+F_y dy+F_z dz).$$

Следовательно, *работа силы на любом перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.* Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1.

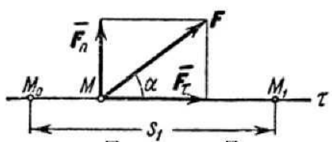


Рисунок 7

Если величина F_τ постоянна (F_τ = const), то и обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 получим: $A_{(M_0M_1)}= F_\tau s_1$.

Такой случай может иметь место когда действующая сила постоянна по модулю и направлению ($\bar{F}$= const), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис.7). В этом случае $F_\tau = F\cos\alpha =$ const и работа силы $A_{(M_0M_1)} = Fs_1\cos\alpha$.

Единицей измерения работы в системе *СИ* является *джоуль* (1 дж= 1 нм).

Мощность. *Мощностью* называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W = \frac{A}{t},$$

где t - время, в течение которого произведена работа А. В общем случае

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau V .$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Единицей измерения мощности в системе *СИ* является *ватт* (1 *вт=1 дж/сек)*. В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 *кГм/сек* или 736 *вт.*

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час (1 *квт-ч* = 3,6 X 10^6 *дж~ 367100 кГм).*

Из равенства $W = F_\tau V$ видно, что у двигателя, имеющего данную мощность W, сила тяги F_τ будет тем больше, чем меньше скорость движения V. Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

Примеры вычисления работы

Рассмотренные ниже примеры дают результаты, которыми можно непосредственно пользоваться при решении задач.

1) Работа силы тяжести. Пусть точка M, на которую действует сила тяжести $\bar{P}$, перемещается из положения M_0 (x_0, y_0, z_0) в положение M_1 (x_1, y_1, z_1). Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх (рис.8). Тогда

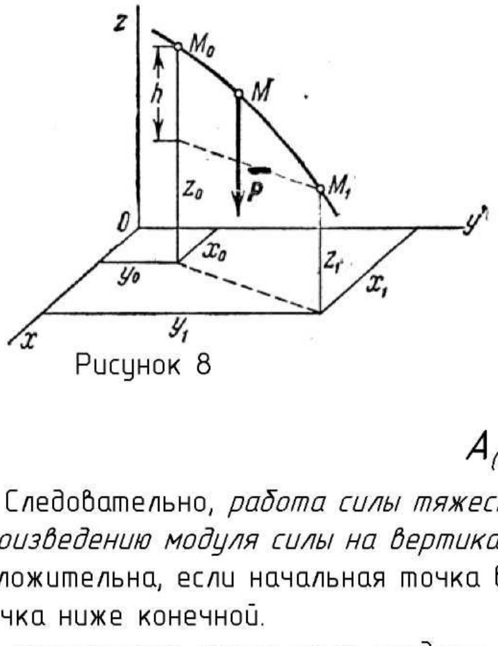


Рисунок 8

Px=0, Py=0, Pz=-P. Подставляя эти значения и учитывая переменную интегрирования z:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-P)dz = -P\int_{Z_0}^{Z_1} dz = P(z_0 - z_1).$$

Если точка M_0 выше M_1, то $z_0 - z_1 = h$, где h-величина вертикального перемещения точки; если же точка M_0 ниже точки M_1 то

$$z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h.$$

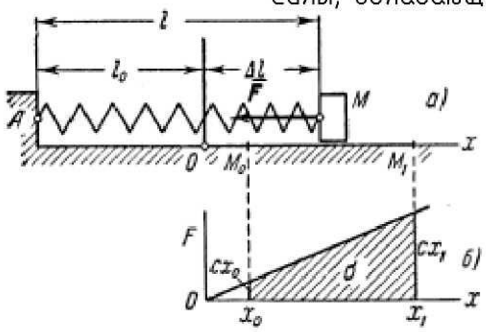
Окончательно получаем:

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph.$$

Следовательно, *работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.* Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Из полученного результата следует, что работа силы тяжести не зависит от вида той траектории, по которой перемещается точка ее приложения.

Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными*.



2) Работа силы упругости. Рассмотрим груз *M*, лежащий на горизонтальной плоскости и прикрепленный к свободному концу некоторой пружины (рис. 9,а). Отметим на плоскости точкой О положение, занимаемое концом пружины, когда она не напряжена (АО=l_0-длина ненапряженной пружины), и примем эту точку за начало координат. Если теперь оттянуть груз от равновесного положения О, удлинив пружину до величины l, то на груз будет действовать сила упругости пружины $\overline{\mathbf{F}}$, направленная к точке О. По закону Гука величина этой силы пропорциональна удлинению пружины $\Delta l=l-l_1$.

Так как в нашем случае $\Delta l = x$, то по модулю $F = c|\Delta l| = c|x|$.

Коэффициент ***c*** называется *коэффициентом жесткости* пружины. В технике обычно измеряют величину ***c*** в *Н/см,* полагая коэффициент *c* численно равным силе, которую надо приложить к пружине, чтобы растянуть ее на 1 *см.*

Найдем работу, совершаемую силой упругости при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. Так как в данном случае $F_x= -F =-cx$, $F_y = F_z = 0$, то получим:

$$A_{(M_0M_1)}=\int_{(M_0)}^{(M_1)}(-cx)dx=-c\int_{X_0}^{X_1}xdx=\frac{c}{2}(x_0^2 \cdot x_1^2).$$

(Этот же результат можно получить по графику зависимости *F* от *x* (рис.9, *б),* вычисляя площадь σ заштрихованной на чертеже трапеции и учитывая знак работы.) В полученной формуле X_0 представляет собою начальное удлинение пружины $\Delta l_{нач}$, а X_1-конечное удлинение пружины $\Delta l_{кон}$. Следовательно,

$$A_{(M_0M_1)}=\frac{c}{2}\left[(\Delta l_{нач})^2 \cdot (\Delta l_{кон})^2\right],$$

т. е. *работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинений (или сжатий) пружины.*

Работа будет положительной, когда $|\Delta l_{нач}| > |\Delta l_{кон}|$, т. е. когда конец пружины перемещается к равновесному положению, и отрицательной, когда $|\Delta l_{нач}| < |\Delta l_{кон}|$, т.е. конец пружины удаляется от равновесия положения. Можно доказать, что формула остается справедливой и в случае, когда перемещение точки *M* не является прямолинейным. Таким образом, оказывается, что работа силы F зависит только от значений $\Delta l_{нач}$ и $\Delta l_{кон}$ и не зависит от вида траектории точки *M*. Следовательно, сила упругости также является *потенциальной.*

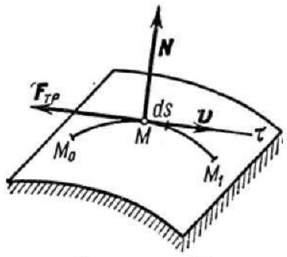


Рисунок.10

3) Р а б о т а силы трения. Рассмотрим точку, движущуюся по какой-нибудь шероховатой поверхности (рис. 10) или кривой. Действующая на точку сила трения равна по модулю *fN*, где *f*-коэффициент трения, а N-нормальная реакция поверхности. Направлена сила трения противоположно перемещению точки. Следовательно, $F_{тр\tau}=-fN$ и по формуле

$$A_{(M_0M_1)}=-\int_{(M_0)}^{(M_1)}F_{тр}ds=-\int_{(M_0)}^{(M_1)}fNdx.$$

Если величина силы трения постоянна, то $A_{M_0M_1)}=-F_{тр}s$, где s-длина дуги кривой M_0M_1 по которой перемещается точка.

Таким образом, *работа силы трения при скольжении всегда отрицательна*. Величина этой работы зависит от длины дуги M_0M_1.

Следовательно, сила трения является силой *непотенциальной*.

Теорема об изменении кинетической энергии точки

Рассмотрим точку с массой m, перемещающуюся под действием приложенных к ней сил из положения M_0 , где она имеет скорость $\bar{V}_0$, в положение M_1 , где ее скорость равна $\bar{V}_1$.
Для получения искомой зависимости обратимся к уравнению $ma=\Sigma\bar{F}_k$ выражающему основной закон динамики. Проектируя обе части этого равенства на касательную $M\tau$ к траектории точки M, направленную в сторону движения, получим:

$$ma=\Sigma F_{k\tau}.$$

Стоящую слева величину касательного ускорения можно представить в виде

$$a_\tau=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dV}{ds}V.$$

В результате будем иметь:

$$mV\frac{dV}{ds}=\Sigma F_{k\tau}.$$

Умножив обе части этого равенства на ds, внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $\Sigma F_{k\tau}ds = dA_к$ где dA_k-элементарная работа силы $\bar{F}_k$ получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\Sigma dA_k.$$

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1, найдем окончательно:

$$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\Sigma A_{(M_0M_1)}.$$

Уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов)

Из двух основных динамических характеристик, величина $m\bar{V}$ является векторной. Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора $m\bar{V}$ оказывается необходимым рассматривать изменение его момента. Момент вектора mV относительно данного центра O или оси z обозначается $\bar{m}_0(m\bar{V})$ или $\bar{m}_z(m\bar{V})$ и называется соответственно *моментом количества движения* или *кинетическим моментом* точки относительно этого центра (оси). Вычисляется момент вектора $m\bar{V}$ так же, как и момент силы. При этом вектор $m\bar{V}$ считается приложенным к движущейся точке. По модулю
$|\bar{m}_0(mV)| = mVh$, где h-длина перпендикуляра, опущенного из центра O на направление вектора $m\bar{V}$ (рис.10,а).

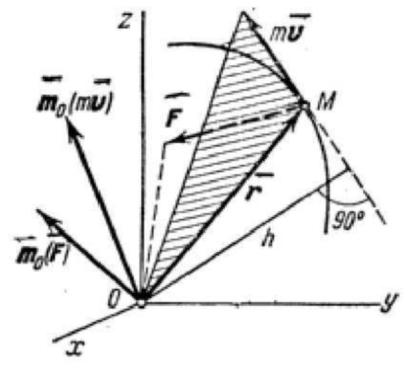


Рисунок 10,а

Теорема моментов относительно центра. Найдем для материальной точки, движущейся под действием силы $\overline{F}$ (рис.10,а), зависимость между моментами векторов $m\overline{V}$ и $\overline{F}$ относительно какой-нибудь неподвижного центра О. В конце было показано, что

$$\overline{m}_0(\overline{F})=\overline{r}\times\overline{F}.$$

Аналогично $\overline{m}_0(m\overline{V})=\overline{r}\times m\overline{V}$.

При этом вектор $m_0(F)$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр О и вектор F, а вектор $m_0(mV)$-перпендикулярно плоскости, проходящей через центр О и вектор mV.

Дифференцируя выражение $\overline{m}_0(m\overline{V})$ по времени, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\overline{r}\times m\overline{V})=(\frac{d\overline{r}}{dt}\times m\overline{V})+(\overline{r}\times m\frac{d\overline{V}}{dt})=(\overline{V}\times m\overline{V})+(\overline{r}\times m\overline{a}).$$

Но $\overline{V}\times m\overline{V}=0$, как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\overline{a}=\overline{F}$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\overline{r}\times m\overline{V})=\overline{r}\times\overline{F}$$

или

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m\overline{V})]=\overline{m}_0(\overline{F}).$$

В результате мы доказали следующую теорему моментов относительно центра: *производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.* Аналогичная теорема имеет место для моментов вектора $m\overline{V}$ силы $\overline{F}$ относительно какой-нибудь оси *z*, в чем можно убедиться, проектируя обе части равенства $\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m\overline{V})]=\overline{m}_0(\overline{F})$ на эту ось. Математическое выражение теоремы моментов относительно оси дается формулой $\frac{d}{dt}[m_Z(m\overline{V})]=m_Z(\overline{F})$.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Уравнения относительного движения и покоя точки

Законы динамики и полученные из них в предыдущих главах уравнения и теоремы верны только для так называемого абсолютного движения точки, т. е. движения по отношению к инерциальной (неподвижной) системе отсчета.

Эта глава посвящена изучению относительного движения точки, т. е. движения по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся системам отсчета. Рассмотрим материальную точку М, движущуюся под действием приложенных к ней сил $F_1, F_2, \dots F_n$, являющихся результатом взаимодействия точки с другими материальными телами.

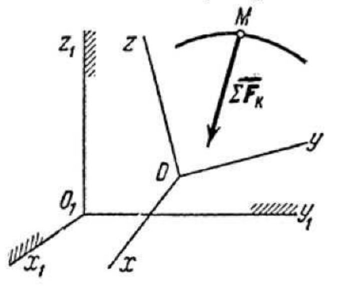


Рисунок 11

Будем изучать движение этой точки по отношению к осям (рис.11), которые в свою очередь каким-то известным нам образом движутся относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$. Найдем зависимость между относительным ускорением $\overline{a}_{отн}$ и действующими на нее силами. Для абсолютного движения основной закон динамики имеет вид $m\overline{a}_a=\Sigma\overline{F}_K$.

Но из кинематики известно, что $\overline{a}_a = \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор}$, где $\overline{a}_{отн}, \overline{a}_{пер}, \overline{a}_{кор}$ – относительное, переносное и кориолисово ускорения точки. Подставляя это значение $\overline{a}_a$ и считая в дальнейшем $\overline{a}_{отн} = \overline{a}$, так как эта величина представляет собою ускорение изучаемого нами относительного движения, получим:

$$m\overline{a} = \Sigma \overline{F}_к + (-m\overline{a}_{пер}) + (-m\overline{a}_{кор}).$$

Введем обозначения:

$$\overline{F}^и_{пер} = -m\overline{a}_{пер}, \overline{F}^и_{кор} = -m\overline{a}_{кор}.$$

Величины $\overline{F}^и_{пер}$ и $\overline{F}^и_{кор}$ по размерности являются силами. Назовем их соответственно *переносной* и *кориолисовой силами инерции*. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$m\overline{a} = \Sigma \overline{F}_k + \overline{F}^и_{пер} + \overline{F}^и_{кор}.$$

Уравнение выражает *основной закон динамики для относительного движения точки: все уравнения и теоремы механики для относительного движения точки составляются так же, как уравнения абсолютного движения, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции.* Прибавление сил $\overline{F}^и_{пер}, \overline{F}^и_{кор}$ учитывает влияние на относительное движение точки перемещения подвижных осей.

Рассмотрим некоторые частные результаты.

1. Если подвижные оси движутся поступательно, то $\overline{F}^И_{кор} = 0$, так как в этом случае $\omega = 0$

(ω-угловая скорость вращения подвижных осей *Oxyz)* и закон относительного движения принимает вид

$$m\overline{a} = \Sigma \overline{F}_k + \overline{F}^и_{пер}.$$

2. Если подвижные оси перемещаются поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\overline{F}^и_{пер} = \overline{F}^и_{кор} = 0$ и закон относительного движения будет иметь такой же вид, как и закон движения по отношению к неподвижным осям. Следовательно, такая система отсчета также будет *инерциальной.*

Из полученного результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение. В этом состоит открытый еще Галилеем *принцип относительности классической механики.*

3. Если точка по отношению к подвижным осям находится в покое, то $\overline{a} = 0$ и $\overline{V}_{отн} = \overline{V} = 0$, а следовательно, $\overline{F}^и_{кор} = 0$, так как кориолисово ускорение $a_{кор} = 2\omega V_{отн} Sin\alpha$. Тогда:

$$\Sigma \overline{F}_k + \overline{F}^и_{пер} = 0.$$

Уравнение представляет собою *уравнение относительного равновесия (покоя) точки.* Из него следует, что *уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижных осях, если при этом к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами добавить переносную силу инерции.*

Влияние вращения Земли на равновесие и движение тел

При решении большинства технических задач мы считаем систему отсчета, связанную с Землей, неподвижной (инерциальной). Тем самым мы не учитываем суточное вращение Земли и ее движение по орбите вокруг Солнца. Таким образом, считая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной, мы по существу пренебрегаем ее суточным вращением вместе с Землей по отношению к звездам. Это вращение происходит со скоростью: 1 оборот за 23 часа 56 минут 4 секунды, т. е. с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \sim 0{,}0000729 \cdot 1/сек.$$

Исследуем, как сказывается такое довольно медленное вращение на равновесии и движении тел.

1. Относительный покой на поверхности Земли. Сила тяжести. Рассмотрим материальную точку, лежащую на неподвижной относительно Земли гладкой «горизонтальной» плоскости (рис.12). Условие ее равновесия по отношению к Земле состоит в том, что $\overline{F}_{пр} + \overline{N} + \overline{F}^{и}_{пер} = 0$, где $\overline{F}_{пр}$ –сила притяжения Земли, N–реакция плоскости, $\overline{F}^{и}_{пер}$ –переносная сила инерции. Так как ω=const, то сила $\overline{F}^{и}_{пер}$ имеет только нормальную составляющую, направленную перпендикулярно к оси вращения Земли. Сложим силы $\overline{F}_{пр}, \overline{F}^{и}_{пер}$ и введем обозначение

$$\overline{F}_{пр} + \overline{F}^{и}_{пер} = \overline{P}.$$

Тогда на точку M будут действовать две силы $\overline{P}$ и $\overline{N}$, уравновешивающие друг друга. Сила $\overline{P}$ и представляет собою ту силу, которую мы называем *силой тяжести*.

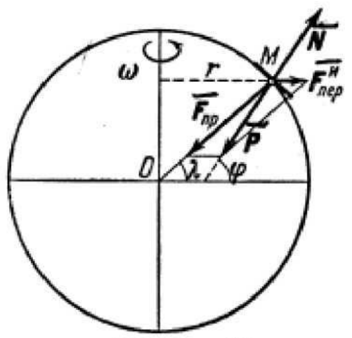


Рисунок 12

Направление силы $\overline{P}$ будет направлением вертикали в данном пункте поверхности, а плоскость, перпендикулярная к $\overline{P}$ и будет горизонтальной плоскостью. По модулю $F^{и}_{пер} = mr\omega^2$ (r–расстояние точки M от земной оси) и величина малая по сравнению с $F_{пр}$, так как величина ω^2 очень мала. Направление силы $\overline{P}$ мало отличается от направления $\overline{F}_{пр}$

При взвешивании тел мы определяем силу $\overline{P}$, т.к. именно с такой силой тело давит на тело весов. То есть, вводя в уравнения равновесия силу тяжести $\overline{P}$, мы вводим в них и силу $\overline{F}^{и}_{пер}$, т. е. фактически учитываем влияние вращения Земли. Поэтому при составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле никаких поправок на вращение Земли вводить не надо. В этом смысле равновесие по отношению к Земле можно считать абсолютным.

а) Движение по земной поверхности. При движении точки по меридиану в северном полушарии с севера на юг кориолисово ускорение $\overline{a}_{кор}$ направлено на восток, а сила $\overline{F}^{и}_{кор}$ – на запад. При движении с юга на север сила $\overline{F}^{и}_{кор}$ будет, очевидно, направлена на восток. В обоих случаях, как мы видим, эта сила будет отклонять точку *вправо* от направления ее движения.

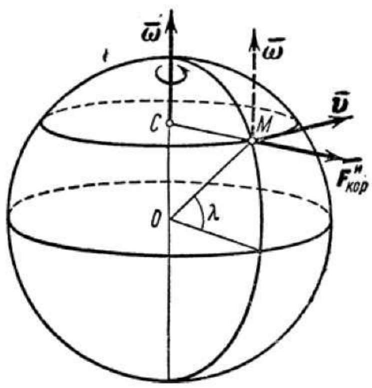


Рисунок 13

Если точка движется по параллели на восток, то ускорение $\overline{a}_{кор}$ будет направлено вдоль радиуса MC параллели (рис.13), а сила $\overline{F}^{и}_{кор}$ в противоположную сторону. Вертикальная составляющая этой силы (вдоль *ОМ)* будет несколько изменять вес тела, а горизонтальная составляющая будет направлена к югу и будет отклонять точку тоже вправо от направления движения. Аналогичный результат получим при движении по параллели на запад.

Отсюда заключаем, что *в северном полушарии тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению будет вследствие вращения Земли отклоняться вправо от направления движения.* В южном полушарии отклонение будет происходить влево.

Этим обстоятельством объясняется то, что реки, текущие в северном полушарии, подмывают правый берег (закон Бэра). В этом же причина отклонений ветров постоянного направления (пассаты) и морских течений.

МОДУЛЬ 6

ЛЕКЦИЯ 11

Модуль 6 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. Прямолинейные колебания точки.
2. Свободные колебания без учета сил сопротивления.
3. Вынужденные колебания.
4. Резонанс.
5. Динамика системы и твердого тела.
6. Механическая система.
7. Силы внешние и внутренние.
8. Масса системы.
9. Центр масс.
10. Момент инерции системы относительно оси.
11. Радиус инерции.
12. Момент инерции тела относительно параллельных осей.
13. Теорема Гюйгенса.
14. Дифференциальные уравнения движения системы.
15. Теорема о движении центра масс.
16. Закон сохранения движения центра масс.

Изучение данных вопросов необходимо для динамики колебательного движения механических систем, теории удара, для решения задач в дисциплинах «Сопротивление материалов» и «Детали машин».

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ

Свободные колебания без учета сил сопротивления

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку *M*, движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* $\bar{F}$, направленной к неподвижному центру. *O* и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\bar{F}$ на ось *Ox* (рис.14) будет равна

$$F_x = -cx.$$

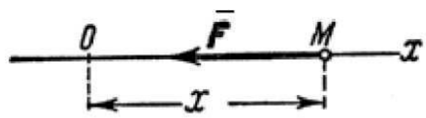


Рисунок 14

Сила $\bar{F}$, как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение O, где F=0; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости.

Найдем закон движения точки *M*. Составляя дифференциальное уравнение движения получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Деля обе части равенства на *m* и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = k^2,$$

приведем уравнение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Уравнение представляет собою *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления*. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x=e^{nt}$. Полагая $x=e^{nt}$, получим для определения $\boldsymbol{n}$ так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $n^2 + k^2 = 0$. Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми $(n_{1,2} = \pm ik)$, то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение имеет вид

$x = C_1 Sinkt + C_2 Coskt,$

где C_1 и C_2–постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные a и α, такие, что $C_1 = a\ Cos\alpha$, $C_2 = a\ Sin\alpha$, то мы получим $x=a(sinkt\ cos\alpha\ 4+\ coskt\ sin\alpha)$ или

$$x = aSin(kt+\alpha).$$

Это другой вид решения в котором постоянными интегрирования являются a и α. Им удобнее пользоваться для общих исследований.
Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$V_X = \dot{x} = akCos(kt+\alpha).$$

Колебания, совершаемые точкой по закону $x = aSin(kt+\alpha)$ называются *гармоническими колебаниями.*
Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку В, движущуюся равномерно по окружности радиуса ***a*** из положения B_0 определяемого углом DOB_0 = α (рис.15) Пусть постоянная угловая скорость

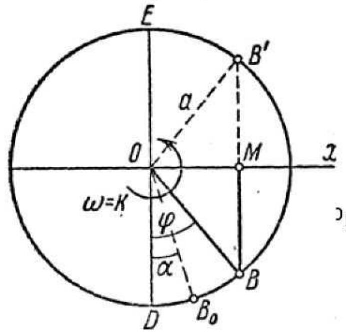


Рисунок.15

вращения радиуса *OB* равна *k*. Тогда в произвольный момент времени *t* угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ и проекция *M* точки *B* на диаметр, перпендикулярный к *DE*, движется по закону $x = a\,\mathrm{Sin}\,(kt+\alpha)$, где $x=OM$, т. е. совершает гармонические колебания.
Величина ***a***, равная наибольшему отклонению точки *M* от центра колебаний, называется *амплитудой колебаний.* Величина $\varphi = \alpha + kt$ называется *фазой колебаний.*
Величина *k,* совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса *OB,* показанного на рис.15 называется *круговой частотой колебаний.*

Промежуток времени *T* (или τ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний.*

По истечении периода фаза изменяется на 2π. Следовательно, должно $kT=2\pi$ откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Величина υ, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется *частотой колебаний*

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

Отсюда видно, что величина *k* отличается от *T* только постоянным множителем 2π. В дальнейшем мы обычно для краткости частотой колебаний будем называть величину *k.*
Значения **a** и ***α*** определяются по начальным условиям. Считая при t=0 $x=x_0$, $V_X=V_0$ получим $x_0 = aSin\alpha$ и $\frac{V_0}{k} = aCos\alpha$. Отсюда, складывая сначала квадраты этих равенств, а затем деля их почленно, найдем:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \qquad tg\alpha = \frac{kx_0}{V_0}.$$

Отметим, что свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных условий;
2) частота *k,,* а следовательно, и период *T* колебаний от начальных условий *не зависят.*

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку *M,* кроме восстанавливающей силы ***F̄,*** направленной к центру О, действует еще постоянная по модулю и направлению сила $\bar{P}$

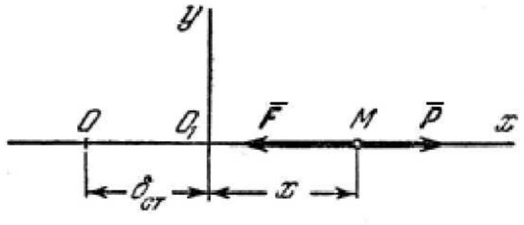


Рисунок 16

(рис.16). Величина силы $\boldsymbol{F}$ попрежнему пропорциональна расстоянию от центра О,т.е. $F = c \cdot OM$.

Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки M будет центр O_1 отстоящий от О на расстоянии $OO_1=\delta_{ст}$, которое определяется равенством $c\delta_{ст}=P$ или

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c}.$$

Величину $\boldsymbol{\delta_{ст}}$ назовем *статическим отклонением* точки. Примем центр O_1 за начало отсчета и направим координатную ось O_1x в сторону действия силы $\bar{\boldsymbol{P}}$. Тогда $F_X=-c(x+\delta_{ст})$, $P_X=P$. В результате, составляя дифференциальное уравнение движения и учитывая, что согласно равенству $c\delta_{ст}=P$, будем иметь:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Отсюда заключаем, что *постоянная сила* $\boldsymbol{P}$ *не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы* $\boldsymbol{F}$, *а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы* $\boldsymbol{P}$ *на величину статического отклонения* $\boldsymbol{\delta_{ст}}$

Вынужденные колебания. Резонанс

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$, действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\bar{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q_X = Q_0 Sinpt.$$

Эта сила называется *возмущающей силой*, а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными*. Величина $\boldsymbol{P}$ является *частотой возмущающей силы*. Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_X определяется указанным равенством. Такая возмущающая сила называется *гармонической*.

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$, действует только возмущающая сила $\bar{Q}$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 Sinpt.$$

Разделим обе части этого уравнения на m и положим

$$\frac{Q_0}{m} = P_0.$$

Тогда, учитывая обозначение, приведем уравнение движения к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 Sinpt.$$

Уравнение является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления*. Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x=x_1+x_2$, где x_1-общее решение уравнения без правой части, а x_2-какое-нибудь частное решение полного уравнения.

Полагая, что $p \neq k$, будем искать решение x_2 в виде

$$x_2=A sinpt,$$

где А– постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение будем иметь:

$$-pASinpt+k^2ASinpt=P_0Sinpt.$$

Это равенство будет выполняться при любом t, если $A(k^2-p^2)=P_0$ или

$$A=\frac{P_0}{k^2-p^2}.$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2=\frac{P_0}{k^2-p^2}Sinpt.$$

Так как $x = x_1+x_2$, а общее решение имеет окончательно вид

$$x=aSin(kt+\alpha)+\frac{P_0}{k^2-p^2}Sinpt,$$

где а и α – постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой a (зависящей от начальных условий) и частотой k, называемых *собственными колебаниями,* и 2) колебаний с амплитудой А (не зависящей от начальных условий) и частотой $\boldsymbol{p}$, которые называются *вынужденными колебаниями*

Частота $\boldsymbol{p}$ вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде:

$$A=\frac{P_0}{\left|k^2-p^2\right|}=\frac{\delta_0}{\left|1-(\frac{p}{k})^2\right|},$$

где $\delta_0=\frac{P_0}{k^2}=\frac{Q_0}{c}$, т. е. δ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0. Как видим, A зависит от отношения частоты $\boldsymbol{p}$ возмущающей силы к частоте $\boldsymbol{k}$ собственных колебаний.

Подбирая различные соотношения между $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{k}$, можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p=0$ амплитуда равна δ_0 (или близка к этой величине). Если величина $\boldsymbol{p}$ близка к $\boldsymbol{k}$, амплитуда A становится очень большой. Когда $p \gg k$, амплитуда A становится очень малой (практически близка к нулю).

Резонанс. В случае, когда $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$, т. е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление *резонанса*. Размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как показано на рис. 17.

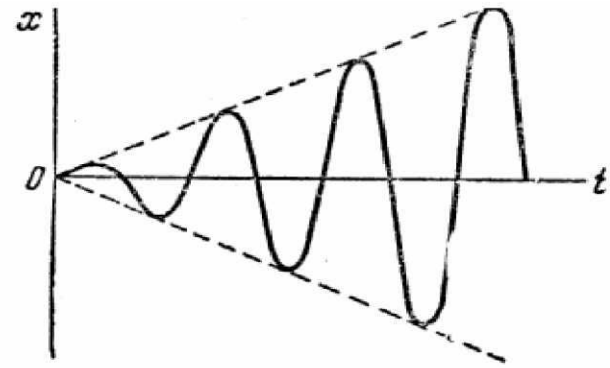


Рисунок 17

ЛЕКЦИЯ 12

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Механическая система. Силы внешние и внутренние.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных. Материальное тело мы также будем рассматривать как систему материальных частиц (точек), образующих это тело.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т.п. (т.е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы. *Внутренними* называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом $-\overline{F^e}$, а внутренние – $\overline{F^i}$.

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или активными, или реакциями связей. Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы вцелом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по её орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю. В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис.18) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

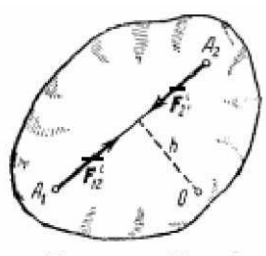


Рисунок 18

$$\sum \overline{F_k^i} = 0.$$

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю. Действительно, если взять произвольный центр О, то из рис.18 видно, что $\overline{m_0}(\overline{F_{12}^i}) + \overline{m_0}(\overline{F_{21}^i}) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \overline{m_0}(\overline{F_k^i}) = 0 \quad \text{или} \quad \sum m_x(\overline{F_k^i}) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызывать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело.

Масса системы. Центр масс.

Движение системы, кроме действующих сил, зависит также от её суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M = \sum m_k .$$

В однородном поле тяжести, для которого g=const, вес любой частицы тела будет пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P},\ y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P},\ Z_C = \frac{\sum P_k Z_k}{P}.$$

В полученные равенства входят только массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек. Следовательно, положение точки *С* (x_C, y_C, z_C) действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек этой системы.

Геометрическая точка С, координаты которой определяются указанными формулами, *называется центром масс* или *центром инерции системы.*

Положение центра масс определяется его радиус-вектором $\overline{r_c}$

$$\overline{r_c} = \frac{\sum m_k \overline{r_k}}{M},$$

где $\overline{r_k}$ – радиус-векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем, это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис.19*)*, если расстояния *h* от оси *Oz* каждого из одинаковых шаров *A* и *B* увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси *Oz* при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс – момент инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$I_Z = \sum m_k h_k^2$$

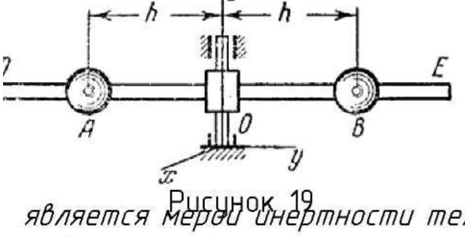


Рисунок 19

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т. е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии *h* от оси, $I_Z = mh^2$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси Oz называется линейная величина $\rho_И$, определяемая равенством

$$I_Z = M_{\rho_И^2} \cdot \rho_и^2,$$

где М – масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве $I_Z = \sum m_k h_k^2$, обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ -плотность, а V-объем, получим

$$I_Z = \int\limits_{(V)} h^2 dm \text{ или } I_Z = \int\limits_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел:

1.Тонкий однородный стержень длины l и массы M. Вычислим его момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец A (рис. 20). Направим вдоль AB координатную ось Ax. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса $dm = =p_1dx$, где $p_1=M/l$ – масса единицы длины стержня. В результате

$$I_A = \int\limits_0^l x^2 dm = \rho_1 \int\limits_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь p_1 его значением, найдем окончательно:

$$I_A = \frac{1}{3} M l^3$$

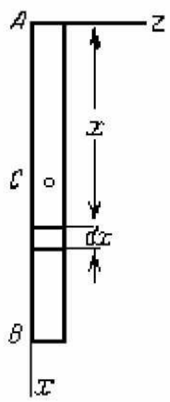


Рисунок 20

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса R и массы M. Найдем его момент инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис. 21,*а*). Так как все точки кольца находятся от оси Cz на расстоянии $h_k=R$, то

$$I_C = \sum m_k R^2 = (\sum m_k) R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца $I_C = MR^2$.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы M и радиуса R относительно ее оси.

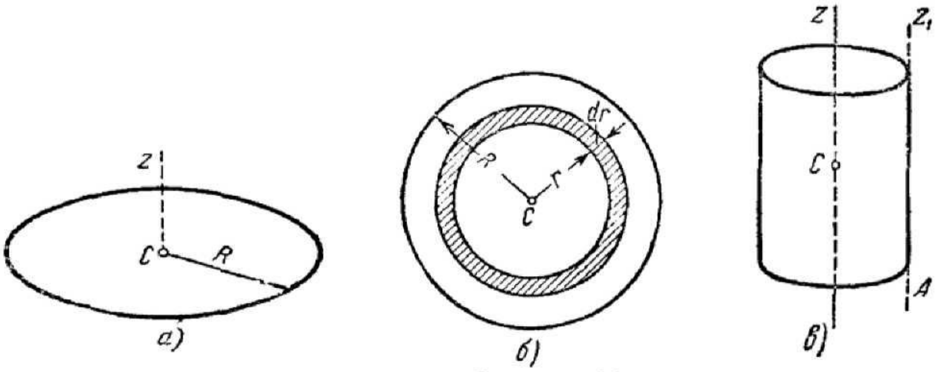


Рисунок 21

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса R и массы M. Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси Cz, перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис.21,а). Для этого выделим элементарное кольцо радиуса r и ширины dr (рис.21,б). Площадь этого кольца равна $2\pi r dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r dr$, где $\rho_2 = \dfrac{M}{\pi R^2}$ -масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет

$$dI_C = r^2 dm = 2\pi\rho_2 r^3 dr,$$

а для всей пластины $I_C = 2\pi\rho_2 \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4$.

Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно $I_C = \frac{1}{2}MR^2$.

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции Iz однородного круглого цилиндра массы M и радиуса R относительно его оси Oz (рис.21,в).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел:

а) сплошная прямоугольная пластина массы M со сторонами $AB=a$ и $BD = b$ (ось x направлена вдоль стороны АВ, ось y –вдоль BD):

$$I_X = \frac{1}{3}Mb^2, I_Y = \frac{1}{3}Ma^2,$$

б) прямой сплошной круглый конус массы M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$I_Z = 0{,}3MR^2;$$

г) сплошной шар массы M и радиуса R (ось z направлена вдоль диаметра): $I_Z = 0{,}4MR^2$.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса.

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

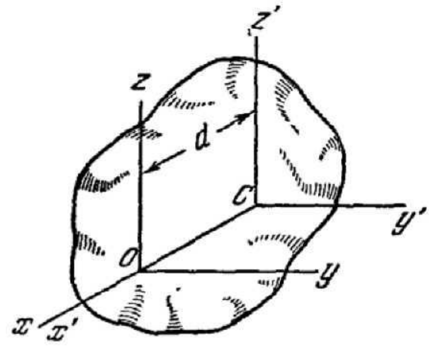


Рисунок 22

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' – оси $Oxyz$, такие, что $Oy//Cy'$, $Oz//Cz'$ (рис. 22). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. Тогда

$$I_{O_Z} = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2),$$
$$I_{C_{Z'}} = \sum m_k(x'^2_k + y'^2_k),$$

но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x'_k - d$ или $x_k^2 = x'^2_k + d^2 - 2x'_k d$, а $y_k = y'_k$. Подставляя эти значения x_k, y_k, в выражение для I_{OZ} и выносся общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$I_{OZ} = \sum m_k(x'^2_k + y'^2_k) + (\sum m_k)d^2 - 2d(\sum m_k x'_k).$$

В правой части равенства первая сумма равна Icz', а вторая – массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул для координат центра масс $\sum m_k x'_k = Mx'_C$. Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x'_k = 0$. Окончательно получаем:

$$I_{OZ} = I_{CZ} + Md^2.$$

Формула выражает следующую теорему Гюйгенса:
момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

Дифференциальные уравнения движения системы.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через $\overline{F_k^e}$, а равнодействующую всех внутренних сил – через $\overline{F_k^i}$. Если точка имеет при этом ускорение $\overline{a}_k$, то по основному закону динамики

$$m_k\overline{a_k} = \overline{F_k^e} + \overline{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\left.\begin{aligned} m_1\overline{a_1} &= \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i, \\ m_2\overline{a_2} &= \overline{F}_2^e + \overline{F}_2^i, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m_n\overline{a_n} &= \overline{F}_n^e + \overline{F}_n^i, \end{aligned}\right\}$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются *дифференциальными уравнениями движения системы* в векторной форме. Уравнения являются дифференциальными, так как $\overline{a_k} = \frac{d\overline{V_k}}{dt} = \frac{d^2\overline{r_k}}{dt^2}$; входящие в правые части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы вцелом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью *общих теорем* динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

Теорема о движении центра масс.

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$\sum m_k\overline{a_k} = \sum \overline{F_k^e} + \sum \overline{F_k^i}.$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k\overline{r_k} = M\overline{r_C}.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2\overline{r_k}}{dt^2} = M\frac{d^2\overline{r_C}}{dt^2}$$

или

$$\sum m_k \overline{a_k} = M\overline{a_C},$$

где $\overline{a_c}$ –ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \overline{F_k^i} = 0$, то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M\overline{a_C} = \sum \overline{F_k^e}.$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad M\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e.$$

Эти уравнения представляют собою *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела,* т. е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Закон сохранения движения центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю $\sum \overline{F_k^e} = 0$.

Тогда из уравнения $M\overline{a_C} = \sum \overline{F_k^e}$ следует, что $\overline{a_C} = 0$ или $\overline{V_C} = const$. Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно.* В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось *Ox)* равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда уравнение $M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e$, дает:

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = 0 \text{ или } \frac{dx_C}{dt} = V_{CX} = const.$$

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная.* В частности, если в начальный момент $V_{CX} = 0$, то и в любой последующий момент $V_{CX} = 0$, т. е. центр масс системы в этом случае вдоль оси *Ох* перемещаться не будет (x_C = const).

Все эти результаты выражают собою *закон сохранения движения центра масс системы.* Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

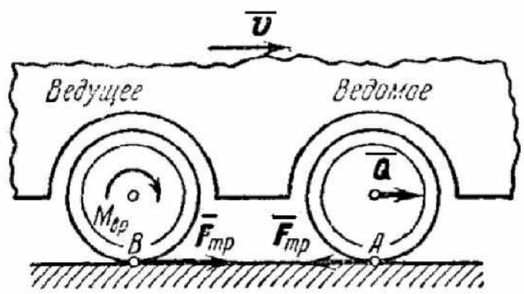
б) Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил $(\overline{F}, \overline{F'})$, то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю $(\overline{F} + \overline{F'} = 0)$. Следовательно, центр масс *С* тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось *Ох* всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет (x_C= const).

Если, например, человек вынесет правую ногу вперед, то левая его нога скользнет назад, а общий центр масс останется на месте.

При наличии же трения скольжению левой ноги назад будет препятствовать сила трения, которая в этом случае будет направлена *вперед*. Эта сила и будет той внешней силой, которая позволяет человеку перемещаться в сторону ее действия (в данном случае вперед).

Аналогично происходит движение паровоза или автомобиля. Сила давления пара или газа в двигателе является силой внутренней и сама но себе не может переместить центр масс системы. Движение происходит потому, что двигатель передает соответствующим колесам, называемыми ведущими, *вращающий момент*. При этом точка касания *В* ведущего колеса (рис.23) стремится скользить влево. Тогда на колесо будет действовать сила трения, направленная вправо. Эта внешняя



сила и позволит центру тяжести паровоза или автомобиля двигаться вправо. Когда этой силы нет или когда она недостаточна для преодоления сопротивления, испытываемого ведомыми колесами, движения вправо не будет; ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

МОДУЛЬ 7

ЛЕКЦИЯ 13

Модуль 7 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. *Количество движения системы.*
2. *Теорема об изменении количества движения.*
3. *Закон сохранения количества движения.*
4. *Главный момент количеств движения системы.*
5. *Теорема моментов.*
6. *Закон сохранения главного момента количеств движения.*
7. *Кинетическая энергия системы.*
8. *Некоторые случаи вычисления работы.*
9. *Теорема об изменении кинетической энергии системы.*

Изучение данных вопросов необходимо для динамики колебательного движения механической системы, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Количество движения системы.

Количеством движения системы будем называть векторную величину $\overline{Q}$, *равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы* (рнс.24):

$$\overline{Q} = \sum m_k \overline{V_k}.$$

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор $\overline{Q}$ может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов $m_k \overline{V_k}$, замкнется. Следовательно, по величине $\overline{Q}$ нельзя полностью судить о характере движения системы.

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину $\overline{Q}$, а также уяснить ее смысл. Из равенства $\overline{r_C} = \dfrac{\sum m_k \overline{r_k}}{M}$ следует, что

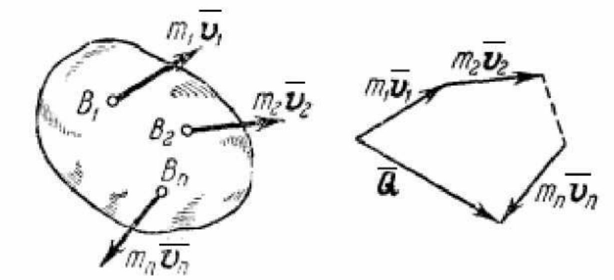


Рисунок 24

$$\sum m_k \overline{r_k} = M \overline{r_C}.$$

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$$\sum m_k \frac{d\overline{r_k}}{dt} = M\frac{d\overline{r_C}}{dt} \text{ или } \sum m_k \overline{V_k} = M\overline{V_C}.$$

Отсюда находим, что

$$\overline{Q} = M\overline{V_C},$$

т. е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.* Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина $\overline{Q}$ не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс. Например, для катящегося колеса $\overline{Q} = M\overline{V_C}$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс *C*.

Таким образом, *количество движения характеризует только поступательное движение системы.* При сложном же движении величина $\overline{Q}$ характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

Теорема об изменении количества движения.

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k \overline{a_k} = \sum \overline{F_k^e} + \sum \overline{F_k^i}.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k \overline{a_k} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \overline{V_k}\right) = \frac{d\overline{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F_k^e}.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_X}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_Y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_Z}{dt} = \sum F_{kz}^e.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент $t = 0$ количество движения системы равно $\overline{Q_0}$, а в момент t_1 становится равным $\overline{Q_1}$. Тогда, умножая обе части равенства $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F_k^e}$ на dt и интегрируя, получим:

$$\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum \int_0^{t_1} \overline{F_k^e} dt$$

или

$$\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum \overline{S_k^e},$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum S_{kx}^e, \; Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum S_{ky}^e, \; Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum S_{kz}^e.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\overline{Q} = M\overline{V_C}$, то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что $\frac{d\overline{V_C}}{dt} = \overline{a_C}$, мы получим $M\overline{a_C} = \sum \overline{F_k^e}$.

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

Закон сохранения количества движения.

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum F_k^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum F_k^e$. следует, что при этом Q = const. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например *Ox*) равна нулю:

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dQ_X}{dt} = \sum F_{kx}^e$. следует, что при этом Q_X = const. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты и выражают *закон сохранения количества движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры:

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т. е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета – продукты горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед.

Главный момент количеств движения системы.

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра О называется величина $\overline{K_0}$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.

$$\overline{K_0} = \sum m_O(m_k \overline{V_k}).$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$K_X = \sum m_X(m_k \overline{V_k}),\ K_Y = \sum m_Y(m_k \overline{V_k}),\ K_Z = \sum m_Z(m_k \overline{V_k}).$$

При этом K_X, K_Y, K_Z представляют собою одновременно проекции вектора $\overline{K_0}$ на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, *главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.*

Чтобы уяснить механический смысл величины *Ko* и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис.25). При этом. как обычно, определение вектора $\overline{K_0}$ сводится к определению его проекций *Kx, Ky, Kz.*

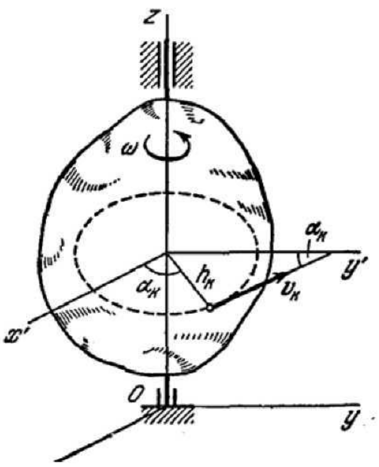


Рисунок 25

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину *Kz,* т. е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k, скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_k(m_k \overline{V_k}) = m_k V_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$K_Z = \sum m_Z(m_k \overline{V_k}) = (\sum m_k h_h^2)\omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси *z*. Окончательно находим

$$K_Z = I_Z\omega.$$

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.*

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет

$$K_Z = I_{1Z}\omega_1 + I_{2Z}\omega_2 + \cdots + I_{nz}\omega_n$$

Легко видеть аналогию между формулами $\overline{Q} = M\overline{V_C}$ и $K_Z = I_Z\omega$.: количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов).

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}\left[\overline{m_0}(m_k\overline{V_k})\right] = \overline{m_0}(\overline{F_k^e}) + \overline{m_0}(\overline{F_k^i}).$$

где $\overline{F_k^e}$ и F_k^i – равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum\overline{m_0}(m_k\overline{V_k})\right] = \sum\overline{m_0}(\overline{F_k^e}) + \sum\overline{m_0}(\overline{F_k^i}).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\overline{K_0}}{dt} = \sum\overline{m_0}(\overline{F_k^e}).$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси *Oxyz* , получим:

$$\frac{dK_X}{dt} = \sum m_X(\overline{F_k^e}), \quad \frac{dK_Y}{dt} = \sum m_Y(\overline{F_k^e}), \quad \frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\overline{F_k^e}),$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная – с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Закон сохранения главного момента количеств движения.

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра *O* всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum\overline{m_0}(\overline{F_k^e}) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\overline{K_0}}{dt} = \sum \overline{m_0}(\overline{F_k^e})$ следует, что при этом $\overline{K_0}$ = const. Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный, момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.*

2) ***Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси* Oz *равна нулю:***

$$\sum m_Z(\overline{F_k^e}) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\overline{F_k^e})$ следует, что при этом *Kz* = const. Таким образом, *если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Эти результаты выражают собою *закон сохранения главного момента количеств движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

Случай вращающейся системы. Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси *Oz.* Тогда $K_Z = I_Z\omega$. Если в этом случае $\sum m_Z(\overline{F_k^e}) = 0$, то

$$I_Z\omega = const.$$

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система *неизменяема* (абсолютно твердое тело), то *Iz=const и*, следовательно, *ω=const*, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система *изменяема,* то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение I_Z, или приближаться к оси, что приведет к уменьшению I_Z. Но поскольку $I_Z\omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции – увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство *Kz* не означает вообще постоянства ω.

Рассмотрим некоторые примеры:

а) *Опыты с платформой Жуковского.* Для демонстрации закона сохранения момента количеств движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси *z.* Для человека, стоящего на такой платформе,

$$\sum m_Z(\overline{F_k^e}) = 0.$$

и, следовательно, $I_Z\omega = const$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина I_Z уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно *(Kz=0),* может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина *Kz* системы осталась равной нулю.

б) *Раскачивание качелей.* Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0 , человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения *z*, величина I_z уменьшается, и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0. В правом верхнем положении, когда ω= 0, человек опять приседает (на величине ω это, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т. д. В результате размахи качелей будут возрастать.

в) *Реактивный момент винта*. Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз, но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количеств движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом остаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным моментом*.

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

ЛЕКЦИЯ 14

Кинетическая энергия системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k .$$

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. *Поступательное движение*. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. То есть, для любой точки $V_k = V_C$

$$T_{ПОСТ} = \sum \frac{m_k V_C^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k) V_C^2$$

или

$$T_{ПОСТ} = \frac{1}{2} M V_C^2 .$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс*. От направления движения значение *T* не зависит.

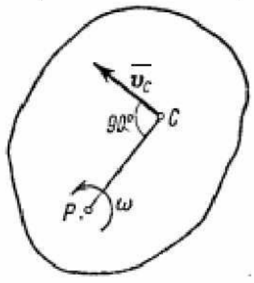
2. *Вращательное движение*. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси *Oz* (см. рнс.25), то скорость любой его точки $V_k = \omega h_k$, где h_k - расстояние точки от оси вращения, а ω- угловая скорость тела. Подставляя это значение и вынося общие множители за скобку, получим:

$$T_{ВР} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k h_k^2)\omega^2 .$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси *z*. Таким образом, окончательно найдем:

$$T_{ВР} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 ,$$

т. е. *кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости*. От направления вращения значение T не зависит.



3. *Плоскопараллельное движение*. При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис.26). Следовательно

Рисунок

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} I_P \omega^2,$$

где I_P – момент инерции тела относительно названной выше оси, ω– угловая скорость тела. Величина I_P в формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо I_P постоянный момент инерции I_C, относительно оси, проходящей через центр масс C тела По теореме Гюйгенса $I_P = I_C + Md^2$, где $d=PC$. Подставим это выражение для I_P. Учитывая, что точка P– мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = V_C$, где V_C – скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$T_{плоск} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

Некоторые случаи вычисления работы.

1) *Работа сил тяжести, действующих на систему.* Работа силы тяжести, действующей на частицу весом p_k, будет равна $p_k(z_{kO} - z_{k1})$, где z_{kO} и z_{k1} - координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum p_k z_{k0} - \sum p_k z_{k1} = P(z_{C0} - z_{C1}) = \pm P h_C,$$

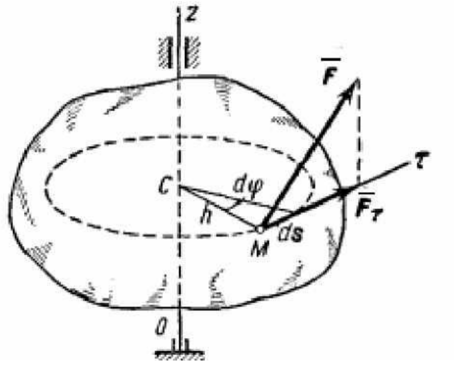
где P – вес системы, h_C – вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей P на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.*

2) *Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.* Элементарная работа приложенной к телу силы F (рис.27) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

так как $ds = h d\varphi$, где $d\varphi$ – угол поворота тела.

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_Z(\overline{F})$. Будем называть величину $M_Z = m_Z(\overline{F})$ *вращающим моментом*. Тогда получим: $dA = M_Z d\varphi$.



Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота.* Формула справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_Z = m_Z(\overline{F_k})$.

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z d\varphi,$$

а в случае постоянного момента ($M_Z = const$)

$$A = M_Z \varphi_1.$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси *Oz,* то *Mz* будет, очевидно, означать момент этой пары.

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность

$$W = \frac{dA}{dt} = M_Z \frac{d\varphi}{dt} = M_Z \omega.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело *мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.* При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

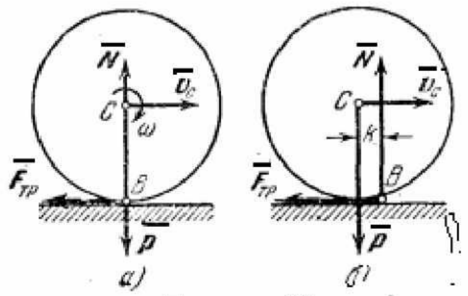


Рисунок 28

3) *Работа сил трения, действующих на катящееся тело.* На колесо радиуса *R* (рис.28), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения *F* , препятствующая скольжению точки касания *B* вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = -F_{TP} ds_B$. Но точка *B* в данном случае является мгновенным центром скоростей и $V_B = 0$. Так как $ds_B = V_B dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA = 0$.

Следовательно, *при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.* По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции *N,* если считать тела недеформируемыми и силу *N* приложенной в точке *B* (как на рис.28,*а).*

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис.28,б), создает пару $(\overline{N}, \overline{P})$, момент которой $M = kN$, где *k*– коэффициент трения качения. Тогда учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi = \frac{ds_R}{R}$, получим:

$$dA^{КАЧ} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R} N ds_C,$$

где ds_C – элементарное перемещение центра *C* колеса.

Если *N*= const, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A^{КАЧ} = -kNd\varphi_1 = -\frac{k}{R} N s_C$$

Так как величина k / R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i – элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i ,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i .$$

Равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1, будем иметь

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях не исключаются. В самом деле, если $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$ - силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (см. рис.29), то $\overline{F_{12}^i} + \overline{F_{21}^i} = 0$. Но при этом точка B_1, может перемещаться по направлению к B_2, а точка B_2- по направлению к B_1. Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. Примером может служить явление отката. Внутренние силы (силы давления), действующие и на снаряд и на откатывающиеся части, совершают здесь положительную работу. Сумма этих работ, не равная нулю, и изменяет кинетическую энергию системы от величины $T_0 = 0$ в начале выстрела до величины $T_1 = T_{CHAP} + T_{OTK}$ конце.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) *Неизменяемая система. Неизменяемой* будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

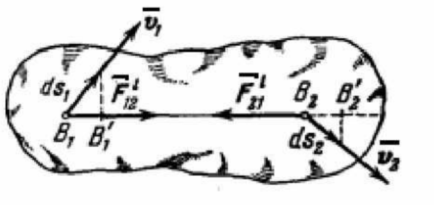


Рисунок 29

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис.29), действующие друг на друга с силами $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$ ($\overline{F_{12}^i}$=-$\overline{F_{21}^i}$) имеют в данный момент скорости $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$. Тогда за промежуток времени *dt* эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, направленные вдоль векторов $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$. Но так как отрезок $B_1 B_2$ является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов $\overline{V_1}$ и $\overline{V_2}$,а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка $B_1 B_2$ будут равны друг другу, т. е. $B_1 B'_1 = B_2 B'_2$. Тогда элементарные работы сил $\overline{F_{12}^i}$ и $\overline{F_{21}^i}$ будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что *для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю* и уравнения принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e \text{ или } T_1 - T_0 = \sum A_k^e .$$

2) *Система с идеальными связями.* Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не

изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на *активные* и *реакции связей*. Тогда

$$dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r,$$

где dA_k^a – элементарная работа действующих на k-ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA_k^r – элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных

сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA_k^r = 0.$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными*. Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^a \text{ или } T_1 - T_0 = \sum A_k^a$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних *активных сил*.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволит исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

МОДУЛЬ 8

ЛЕКЦИЯ 15

Модуль 8 состоит из двух лекций, в которых содержатся следующие вопросы:

1. Приложения общих теорем к динамике твердого тела.
2. Вращательное движение твердого тела.
3. Физический маятник.
4. Плоскопараллельное движение твердого тела.
5. Принцип Даламбера.
6. Главный вектор и главный момент сил инерции твердого тела.
7. Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики.
8. Принцип возможных перемещений.
9. Общее уравнение динамики.
10.

Изучение данных вопросов необходимо для изучения демпферов в дисциплине «Детали машин», для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Сопротивление материалов».

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Вращательное движение твёрдого тела.

Рассмотрим приложения общих теорем динамики к некоторым задачам о движении абсолютно твёрдого тела. Так как изучение поступательного движения твёрдого тела сводится к задачам динамики точки, то мы начнём непосредственно с рассмотрения вращательного движения.

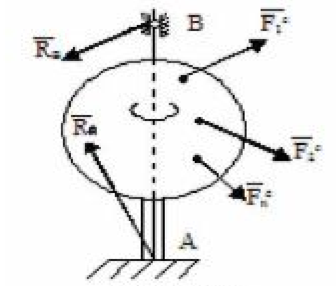


Рисунок 29

Пусть на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения Z(рис.29), действует система заданных сил $\overline{F_1^e}, \overline{F_2^e}, ..., \overline{F_n^e}$. Одновременно на тело действуют реакции подшипников $\overline{R_A}$ и $\overline{R_B}$. Чтобы исключить из уравнения движения эти наперед неизвестные силы, воспользуемся теоремой моментов относительно оси Z. Так как моменты сил $\overline{R_A}$ и $\overline{R_B}$ относительно оси Z равны нулю, то получим:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e;$$

$$M_z^e = \sum m_z(\overline{F_k^e}).$$

Будем в дальнейшем величину M_z^e называть вращающим моментом.

Подставляя в предыдущее равенство значение $K_z = J_z \omega$, найдём:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \text{ или } J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e.$$

Уравнение представляет собой дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела. Из него следует, что произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение равно вращающему моменту:

$$J_z \varepsilon = M_z^e.$$

Равенство показывает, что при данном M_z^e чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение и наоборот. Следовательно, момент инерции тела действительно играет при вращательном движении такую же роль, как масса при поступательном, т.е. является мерой инертности тела при вращательном движении.

Отметим следующие частные случаи:

1) Если M_z^e = 0, то ω = const, т.е. тело вращается равномерно.

2) Если M_z^e = const, то и ε = const, т.е. тело вращается равнопеременно.

Физический маятник.

Физическим маятником называется твёрдое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

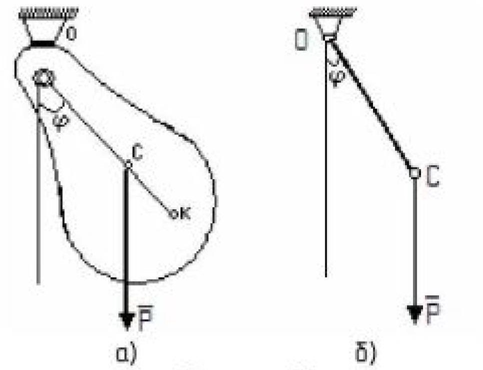


Рисунок.30

Изобразим сечение маятника плоскостью, перпендикулярной оси подвеса и проходящей через центр масс маятника C (рис.30а)

Введём обозначения: P □ вес маятника, a □ расстояние OC от центра масс до оси подвеса, J_0 □ момент инерции маятника относительно оси подвеса. Положения маятника будет определять угол φ отклонение линии OC от вертикали.

Для определения закона колебаний маятника воспользуемся дифференциальным уравнением вращательного движения. В данном случае $M_z = M_0 = -Pa\sin\varphi$ (знак минус взят потому, что при $\varphi > 0$ момент отрицателен, а при $\varphi < 0$ □ положителен) и уравнение принимает вид:

$$J_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa\sin\varphi.$$

Деля обе части равенства на J_0 и вводя обозначение

$$\frac{Pa}{Jo} = k^2,$$

найдём дифференциальное уравнение колебаний маятника в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\sin\varphi = 0..$$

Полученное дифференциальное уравнение в обычных функциях не интегрируется. Ограничимся рассмотрением малых колебаний маятника, считая приближенно $\sin\varphi \approx \varphi$ (это можно сделать, когда угол φ меньше одного радиана). Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0.$$

Это дифференциальное уравнение совпадает по виду с дифференциальным уравнением свободных прямолинейных колебаний точки, и его общее решение по аналогии имеет вид:

$$\varphi = C_1\sin kt + C_2\cos kt.$$

Полагая, что начальный момент $t = 0$ маятник отклонён на малый угол $\varphi = \varphi_0$ и отпущен без начальной скорости ($\omega_0 = 0$), найдём для постоянных интегрирования значения: $C_1 = 0$, $C_2 = \varphi_0$. Тогда закон малых колебаний маятника при данных начальных условиях будет:

$$\varphi = \varphi_0\cos kt.$$

Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими. Период малых колебаний физического маятника, если заменить k его значением, определяется формулой:

$$T_\phi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{P_a}}.$$

Полученные результаты охватывают и случай так называемого математического маятника, т.е. груза малых размеров (которые будем рассматривать как материальную точку), подвешенного на нерастяжимой нити длиной l, массой которой, по сравнению с массой груза, можно пренебречь(рис.30б). Для математического маятника, т.к. он представляет собой систему, состоящую из одной материальной точки, очевидно, будет

$$J_0 = ml^2 = \frac{P}{g}l^2 . a = OC = l.$$

Подставляя эти величины в равенство T_ϕ, найдем, что период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из сравнения формул T_ϕ и $T_м$ видно, что при длине

$$l_1 = \frac{J_0 g}{Pa} = \frac{J_0}{Ma}$$

период колебаний математического маятника совпадает с периодом колебаний соответствующего физического маятника.

Длина l_1 такого математического маятника, период колебания которого равен периоду колебаний данного физического маятника, называется приведенной длиной физического маятника. Точка К, отстоящая от оси подвеса на расстоянии ОК=l_1, называется центром качания физического маятника (рис.30).

Замечая, что по теореме Гюйгенса $J_0 = J_C + Ma^2$, мы можем привести формулу к виду

$$l_1 = a + \frac{J_C}{Ma}.$$

Отсюда следует, что расстояние ОК всегда больше чем ОС=а, т.е. что центр качаний физического маятника всегда расположен ниже его центра масс.

Плоскопараллельное движение твердого тела.

Положение тела, совершающего, плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота тела вокруг полюса. Задачи динамики будут решаться проще всего, если за полюс взять центр масс С тела (рис.31) и определять положение тела координатами X_C, Y_C и углом φ.

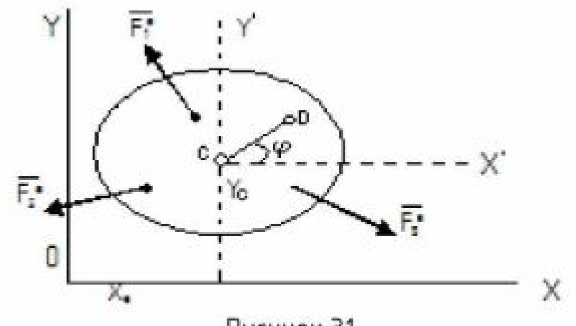


Рисунок.31

На рис.31 изображено сечение тела плоскостью, параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс С. Пусть на тело действуют внешние силы $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \ldots\ldots\ldots \overline{F}_n^e$, лежащие в плоскости этого сечения. Тогда уравнения движения точки С найдём по теореме о движении центра масс

$$M\overline{a_c} = \sum \overline{F_k^e},$$

а вращательное движение вокруг центра С будет определятся уравнением

$$I_c \cdot \varepsilon = M_c^e,$$

т.к. теорема, из которой получено это уравнение, справедливо и для движения системы вокруг центра масс. В результате, проектируя обе части равенства $M\overline{a}_c = \sum \overline{F}k^e$ на координатные оси, получим:

$$Ma_{cx} = \sum F_{kx}^e, \qquad Ma_{cy} = \sum F_{ky}^e, \qquad Jc \cdot \varepsilon = \sum m_c(F_k^e),$$

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \qquad M\frac{d^2y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \qquad Jc\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_c\overline{(F_k^e)}.$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела. С их помощью можно по заданным силам определить закон движения тела или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих сил.

При несвободном движении, когда траектория центра масс известна, уравнения движения точки С удобно составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль n к этой траектории. Тогда получим:

$$M\frac{d\ v_c}{dt} = \sum F_{k\tau}^e, \qquad M\frac{v^2{}_c}{\rho c} = \sum F_{kn}^e, \qquad Jc\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_c\overline{(F_k^e)},$$

где ρ_c- радиус кривизны траектории центра масс.

Принцип Даламбера.

Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако, этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящих из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\overline{F_k^e}$ и $\overline{F_k^i}$ (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерционной системе отсчета некоторое ускорение $\overline{a_k}$.

Введем в рассмотрение величину

$$\overline{F}_k^u = -m_k \overline{a_k},$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки(иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\overline{F_k^e}$ и $\overline{F_k^i}$ прибавить силу инерции $\overline{F}_k^u$, то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\overline{F_k^e} + \overline{F_k^i} + \overline{F}_k^u = 0.$$

Это выражение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Не трудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k \overline{a_k} = \overline{F_k^e} + \overline{F_k^i}$. Перенося здесь член $m_k \overline{a_k}$ в правую часть равенства и придем к последнему соотношению.

Повторяя проделанные высшее рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; что делает единообразный подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчёты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что на точку механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние и внутренние силы $\overline{F_k^e}$ и $\overline{F_k^i}$, возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями $\overline{a_k}$. Силы же инерции, о которых говорится в принципе

Даламбера, на движущиеся точки не действуют (иначе, эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции -это лишь приём, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра О равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систебму. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\left.\begin{aligned} &\sum(\overline{F_k^e} + \overline{F_k^i} + \overline{F_k^и}) = 0; \\ &\sum[\overline{m_0}(\overline{F_k^c}) + \overline{m_o}(\overline{F_k^и})] = 0 \end{aligned}\right\}$$

Введём обозначения:

$$\overline{R^и} = \sum \overline{F_k^и}, \qquad \overline{M_o^и} = \sum \overline{m_0}(\overline{F_k^и}).$$

Величины $\overline{R^u}$и$\overline{M_o^u}$ представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра О системы сил инерции. В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств:

$$\sum \overline{F_k^e} + \overline{R^u} = 0, \sum \overline{m_o}(\overline{F_k^e}) + \overline{M_o^u} = 0. \qquad (1)$$

Применение уравнений (1), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, т.к. эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на оси координат эти равенства дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерций.

Главный вектор и главный момент сил инерции твёрдого тела

Система сил инерции твёрдого тела можно заменить одной силой, равной $\overline{R^и}$ и приложенной в центре О, и парой с моментом, равным $\overline{M_0^u}$. Главный вектор системы сил, как известно, не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее. Т.к. $\overline{F_k^и} = -m_k \cdot \overline{a_k}$, то

$$\overline{R^и} = -\sum m_k \cdot \overline{a_k} = -M \cdot \overline{a}_c \qquad (2)$$

Следовательно, главный вектор сил инерции тела, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Если ускорение $\overline{a_c}$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\overline{R^и}$ разложиться на составляющие

$$\overline{R^и} = -M \cdot \overline{a_{c\tau}}, \qquad \overline{R^и} = -M \cdot \overline{a_{cn}}.$$

Главный момент сил инерции найдём для некоторых частных случаев:

1. Поступательное движение. В этом случае тело никакого вращения вокруг центра масс С не имеет. Отсюда заключаем, что $\sum \overline{m_c}(\overline{F_k^e}) = 0$, и равенство (1) даёт $\overline{M_c^и} = 0$.

Следовательно, при поступательном движении силы инерции твёрдого тела приводят к одной равнодействующей, равной $\overline{R^{и}}$ и проходящей через центр масс тела.

2. Плоскопараллельное движение. Пусть тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Вследствие симметрии главный вектор и результирующая пара сил инерции, так же как и центр масс С тела, лежат в плоскости симметрии.

Тогда, помещая центр приведения в точке С, получим из равенства (1) $M_c^{и} = -\sum m_c(\overline{F_k^e})$. С другой стороны $\sum m_c(\overline{F_k^e}) = J_c \cdot \varepsilon$. Отсюда заключаем, что

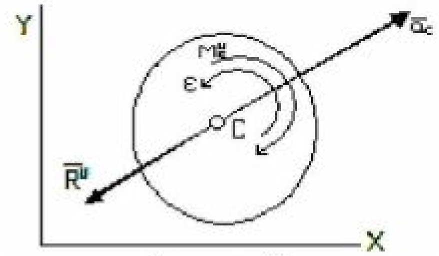


Рисунок.32

$$M_c^{и} = -J_c \cdot \varepsilon \qquad (3)$$

Таким образом, в рассмотренном случае движение системы сил инерции приводится к результирующей силе, равной $\overline{R^{u}}$ [формула (2)] и приложенной в центре масс С тела (рис.32), и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой определяется формулой(3). Знак минус в формуле показывает, что направление момента M_c^{u} противоположно направлению углового ускорения тела.

3. **Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела.** Пусть опять тело имеет плоскость симметрии, а ось вращения CZ перпендикулярна к этой плоскости и проходит через центр масс тела. Тогда данный случай будет частным случаем предыдущего. Но при этом $\overline{a_c} = 0$, а следовательно, и $\overline{R^{u}} = 0$.

Таким образом, в рассмотренном случае система сил инерции приводится к данной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент

$$M_z^{u} = -J_z \cdot \varepsilon .$$

При решение задач по формулам (1) и (3) вычисляются модули соответствующих величин, а направление их указывают на чертеже.

ЛЕКЦИЯ 16

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

При изучении равновесия системы тел методами так называемой геометрической статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими наперед неизвестными реакциями. Когда число тел в системе велико, этот путь становится весьма громоздким и связан с необходимостью решать большое число уравнений со многими неизвестными.

Отличительная особенность метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, состоит в том, что при его применении эффект действия связей учитывается не путем введения неизвестных наперед реакций, а путем рассмотрения перемещений, которые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называют в механике возможными (или виртуальными) перемещениями.

Возможные перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям: 1) они должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими; 2) они должны быть такими, чтобы при этом все наложенные на систему связи сохранялись, так как иначе мы изменим, вид рассматриваемой механической системы (система станет другой).

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис33 перемещение точек кривошипа OA в положение OA_1 нельзя рассматривать как возможное, так как в этом положении условия равновесия механизма под действием сил P и Q будут уже другими. Точно так же нельзя считать возможным даже бесконечно малое перемещение ~~точки B~~ шатуна вдоль линии BD; оно было бы возможным, если в точке B вместо ползуна была бы качающаяся муфта , т.е когда механизм был бы другим.

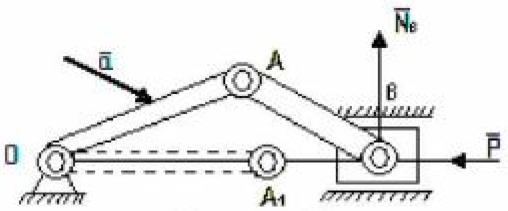


Рисунок 33

Таким образом, возможным перемещением системы мы будем называть любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями. Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\delta\bar{S}$, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество возможных различных перемещений (перемещения $\delta\bar{s}$.и □ $\delta\bar{s}$ мы не считаем разными). Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как геометрическая сумма. Например, шарик, лежащий на какой-нибудь плоскости (или поверхности), можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение $\delta\bar{s}$ можно получить как сумму двух перемещений $\delta\bar{s}_1$ и $\delta\bar{s}_2$ вдоль лежащих в этой плоскости взаимно перпендикулярных осей ($\delta\bar{s} = \delta\bar{s}_1 + \delta\bar{s}_2$).

Число независимых между собою возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Так, рассмотренный выше шарик на плоскости (или на поверхности), если его считать материальной точкой, имеет 2 степени свободы. У кривошипно-шатунного механизма будет, очевидно, одна степень свободы.

У свободной материальной точки □ 3 степени свободы (независимыми будут 3 перемещения вдоль взаимно перпендикулярных осей). Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы (независимыми перемещениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

Принцип возможных перемещений.

Введем понятие о так называемой возможной (или виртуальной) работе, т. е. об элементарной работе, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. При этом, возможную работу активной силы $\bar{F}^a$ будем обозначать символом δA^a

($\delta A^a = F^a\, \delta s \cos\alpha$, где α □ угол между направлениями силы и перемещения), а возможную, работу реакции связи $\bar{N}$ - символом δA^r.

Ранее было введено важное понятие о системах с идеальными связями: наложенные на систему связи являются идеальными, если сумма элементарных. работ реакций этих связей при любом возможном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum \delta A_k^r = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим систему материальных точек, которая под действием всех приложенных к ней сил и наложенных на нее связей находится в равновесии. Будем при этом все связи системы считать идеальными.

Выделим произвольную точку B_k системы и обозначим равнодействующую всех приложенных к ней активных сил (внешних и внутренних) через $\overline{F_k^a}$, а равнодействующую всех реакций связей (тоже внешних и внутренних) □ через $\overline{N_k}$. Так как точка B_k вместе со всей системой находится в равновесии, $\overline{F_k^a} + \overline{N_k} = 0$ или $\overline{N_k} = -\overline{F_k^a}$. Следовательно, при любом возможном перемещении точки B_k возможные работы δA_k^a и δA^r_k приложенных к ней сил $\overline{F_k^a}$ и $\overline{N_k}$ будут равны по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль, т. е.

$$\delta A_k^a + \delta A^r_k = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим такие равенства для всех точек системы. Складывая эти равенства почленно, будем иметь:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Но если наложенные на систему связи являются идеальными, то вторая сумма согласно равенству (1) будет равна нулю. Следовательно, и

$$\sum \delta A_k^r = 0 \qquad (2)$$

или

$$\sum (F_k^a \delta s_k \cos \alpha_k) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что если механическая система с идеальными связями находится в равновесии, то действующие на нее активные силы удовлетворяют условию (2) Справедлив также и обратный вывод, т. е. если приложенные к механической системе активные силы удовлетворяют условию (2), то система находится в равновесии. Отсюда вытекает следующий принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю. Математически необходимое и достаточное условие равновесия любой механической системы выражается равенством (2), которое называют ещё уравнением возможных работ.

Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений даёт общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы, кроме действующих на них активных сил $\overline{F_k^a}$ и реакций связей $\overline{N_k}$, прибавить соответствующие силы инерции $\overline{F_k^u} = -m_k \overline{a_k}$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находится в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u + \sum \delta A_k^r = 0.$$

Но последняя сумма по условию равна нулю и окончательно будет

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0.$$

Равенство представляет собой общее уравнение динамики. Из него вытекает следующий принцип Даламбера-Лагранжа: при движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

При этом система представляет собою совокупность каких-нибудь твёрдых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С.М. Курс теоретической механики. М., 2001.
2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. М., 2000.
3. Старминский В.М. Теоретическая механика. М., 1980.