ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ 1
Курс лекций

Содержание

Раздел 1. Статика

Модуль 1

Лекция 1

Модуль 1 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. Введение.
2. Статика твердого тела.
3. Основные понятия статики.
4. Аксиомы статики.
5. Связи и их реакции.
6. Проекция силы на ось и на плоскость.
7. Геометрический способ сложения сил.
8. Равновесие системы сходящихся сил.
9. Момент силы относительно центра или точки.
10. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.
11. Пара сил.
12. Момент пары.
13. Теорема о параллельном переносе силы.
14. Приведение плоской системы сил к данному центру.
15. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.
16. Случай параллельных сил.
17. Решение задач.

Изучение этих вопросов необходимо в дальнейшем для изучения центра тяжести, произвольной пространственной системы сил, сил трения скольжения, моментов трения качения, решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Введение

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений (зданий, мостов, каналов, плотин и т. п.), с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин, механизмов, двигателей и, в частности, таких объектов, как автомобили, тепловозы, морские и речные суда, самолеты, ракеты, космические корабли и т. п. Несмотря на многообразие всех этих проблем, решения их в определенной части основываются на некоторых общих принципах и имеют общую научную базу. Объясняется это тем, что в названных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных тел.

Наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется теоретической механикой. Теоретическая механика представляет собой одну из научных основ современных технических дисциплин.

Механикой в широком смысле этого слова называется наука, посвященная решению любых задач, связанных с изучением движения или равновесия тех или иных материальных тел и происходящих при этом взаимодействий между телами. Теоретическая механика представляет собою часть механики, в которой изучаются общие законы движения и взаимодействия материальных тел, т. е. те законы, которые, например, справедливы и для движения Земли вокруг Солнца и для полета ракеты или артиллерийского снаряда и т. п.

Под движением в механике мы понимаем механическое движение, т. е. происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Механическим взаимодействием между телами называется тот вид взаимодействия, в результате которого происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия тел, называется в механике силой.

Основной задачей теоретической механики является изучение общих законов движения и равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

По характеру рассматриваемых задач механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В статике излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В кинематике рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. Наконец, в динамике изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся философов древности Аристотеля (384—322 до н. э.) и происходит от греческого слова μηχαυή, означающего по современным понятиям «сооружение», «машина», «изобретение»

В древние времена, когда запросы производства сводились главным образом к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о так называемых простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статика). Обоснование начал статики содержится уже в сочинения одного из великих ученых Архимеда (287 – 212 г. но н. э.).

В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды гениального ученого и мыслителя М. В. Ломоносова (1711—1765). Из многочисленных отечественных ученых, внесших значительный вклад в развитие различных областей теоретической механики, прежде всего, должны быть названы: М. В. Остроградский (1801—1861), которому принадлежит ряд важных исследований по аналитическим методам решения задач механики; П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший новое направление в исследовании движения механизмов; С. В. Ковалевская (1850—1891), решившая одну из труднейших задач динамики твердого тела; И. В. Мещерский (1859—1935), заложивший основы механики тел переменной массы; К. Э. Циолковский (1857—1935), сделавший ряд фундаментальных открытий в теории реактивного движения; А. Н. Крылов (1863—1945), разработавший теорию корабля и много внесший в развитие теории гироскопических приборов.

Выдающееся значение для развития механики имели труды «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского (1847—1921) и его ближайшего ученика С. А. Чаплыгина (1869—1942). Характерной чертой в творчестве Н. Е. Жуковского было приложение методов механики к решению актуальных технических задач. Большое влияние идеи Н. Е. Жуковского оказали и на преподавание теоретической механики в высших технических учебных заведениях нашей страны.

Стоящая в наши дни перед отечественной наукой и техникой задача непрерывного роста и внедрения в производство новой техники требует дальнейшего повышения качества подготовки инженерных кадров, расширения теоретической базы их знаний. Известную роль в решении этой задачи должно сыграть и изучение одной из научных основ современной техники – теоретической механики.

Раздел первый. Статика твердого тела

Основные понятия статики.

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучается условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием будем понимать состояния покоя тела по отношению к другим материальным телам.

Основные понятия:

1. Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике силой.

Сила является величиной векторной. Ее действие на тело определяется: 1) численной величиной или модулем силы, 2) направлением силы, 3) точкой приложения силы, (рис. 1).

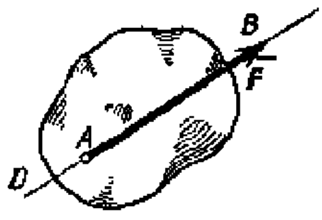

Рис.1

Прямая DE, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы.

2. Совокупность сил, действующих на какое-нибудь твердое тело, будем называть системой сил.
3. Тело, не скрепленное с другими телами, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется свободным.
4. Если одну систему сил, действующих на свободное твердое тело, можно заменить другой системой, не изменяя при этом состояния покоя или движения, в котором находится тело, то такие две системы сил называются эквивалентными.
5. Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.
6. Если данная система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей данной системы сил. Таким образом, равнодействующая - это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.
7. Сила, равная равнодействующей по модулю, прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется уравновешивающей силой.
8. Силы, действующие на твердое тело, можно разделить на внешние и внутренние. Внешними называются силы, действующие на частицы данного тела со стороны других материальных тел. Внутренними называются силы, с которыми частицы данного тела действуют друг на друга.
9. Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется сосредоточенной. Силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности тела, называются распределенными.

Понятие о сосредоточенной силе является условным, так как практически приложить силу к телу в одной точке нельзя. Силы, которые мы в механике рассматриваем как сосредоточенные, представляют собою по существу равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

В частности, обычно рассматриваемая в механике сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собою равнодействующую сил тяжести его частиц. Линия действия этой равнодействующей проходит через точку, называемую центром тяжести тела.

Аксиомы статики.

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений, принимаемых без математических доказательств и называемых аксиомами или принципами статики. Аксиомы статики представляют собою результат обобщений многочисленных опытов и наблюдений над равновесием и движением тел, неоднократно подтвержденных практикой. Часть из этих аксиом является следствиями основных законов механики, с которыми мы познакомимся в динамике.

Аксиома 1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю (F1 = F2) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 2).

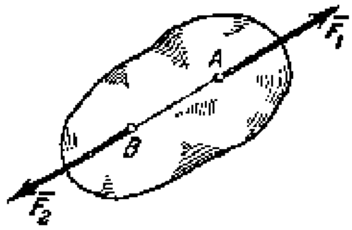

Рис 2

Аксиома 1 определяет простейшую уравновешенную систему сил, так как опыт показывает, что свободное тело, на которое действует только одна сила, находиться в равновесии не может.

Аксиома 2. Действие данной системы, сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Эта аксиома устанавливает, что две системы сил, отличающиеся на уравновешенную систему, эквивалентны друг другу.

Следствие из 1-й и 2-й аксиом. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

В самом деле, пусть на твердое тело действует приложенная в точке A сила F (рис. 3). Возьмем на линии действия этой силы произвольную точку B и приложим к ней две уравновешенные силы F_1 и F_2, такие, что $F_1 = F$, $F_2 = -F$. От этого действие силы F на тело не изменится. Но силы F и F_2 согласно аксиоме 1 также образуют уравновешенную систему, которая может быть отброшена. В результате на тело. Будет действовать только одна сила F_1, равная **F**, но приложенная в точке B.

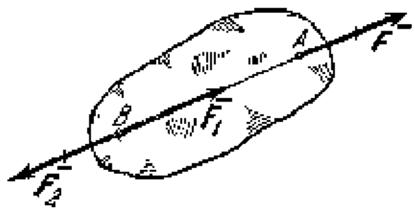

Рис 3

Таким образом, вектор, изображающий силу F, можно считать приложенным в любой точке на линии действия силы (такой вектор называется скользящим).

Аксиома 3 (аксиома параллелограмма сил). Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующею, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор R, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах F_1 и F_2 (рис. 4), называется геометрической суммой векторов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$:

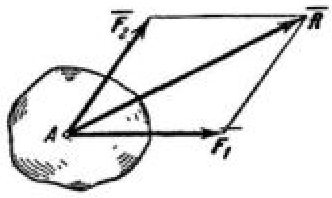

Рис 4.

$R = F_1 + \overline{F_2}$.

Следовательно, аксиому 3 можно еще формулировать так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

Аксиома 4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Закон о равенстве действия и противодействия является одним из основных законов механики. Из него следует, что если тело А действует на тело В с силой F, то одновременно тело В действует на тело А с такой же по модулю и направленной вдоль той же прямой, но противоположную сторону силой $F' = -F$ (рис. 5). Однако силы F и F' не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам.

Рис 5.

Аксиома 5 (принцип отвердевания). Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).

Высказанное в этой аксиоме утверждение очевидно. Например, ясно, что равновесие цепи не нарушится, если ее звенья считать сваренными друг с другом и т. д.

Связи и их реакции.

По определению, тело, которое не скреплено с другими телами и может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется свободным (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется несвободным. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, будем называть связью.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем ила иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто реакцией связи.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь одновременно препятствует перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции связи также наперед неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Рассмотрим, как направлены реакции некоторых основных видов связей.

1. Гладкая плоскость (поверхность) или опора. Гладкой будем называть поверхность, трением о которую данного тела можно в первом приближении пренебречь. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их

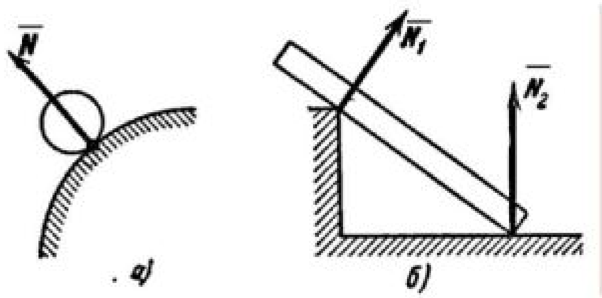

Рис. 6

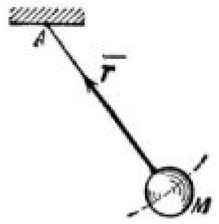

Рис. 7

касания (рис. 6, а). Поэтому реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (рис. 6, б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

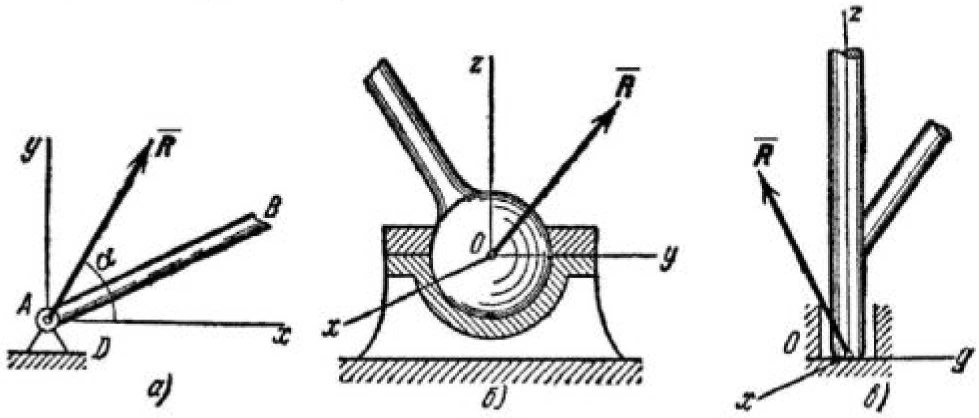

Рис. 8.

2. Нить. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 7), не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM. Поэтому реакция T натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.
3. Цилиндрический шарнир (подшипник). Если два тела соединены болтом, проходящим через отверстия в этих телах, то такое соединение называется шарнирным или просто шарниром; осевая линия болта называется осью шарнира. Тело AB, прикрепленное шарниром к опоре D (рис. 8, а), может поворачиваться как угодно вокруг оси шарнира (в плоскости чертежа); при этом конец A тела не может переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному к оси шарнира. Поэтому реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, т. е. в плоскости ~~A~~xy. Для силы R в этом случае наперед не известны ни ее модуль R, ни направление (угол α).
4. Шаровой шарнир и подпятник. Этот вид связи закрепляет какую-нибудь точку тела так, что она не может совершать никаких перемещений в пространстве. Примерами таких связей служат шаровая пята, с помощью которой прикрепляется фотоаппарат к штативу (рис. 8, б) и подшипник с упором (подпятник) (рис. 8, в). Реакция R шарового шарнира или подпятника может иметь любое направление в пространстве. Для нее наперед неизвестны ни модуль реакции R, ни углы, образуемые ею с осями x, y, z.

5. Стержень. Пусть в какой-нибудь конструкции связью является стержень АВ, закрепленный на концах шарнирами (рис. 9). Примем, что весом стержня по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой можно пренебречь. Тогда на стержень будут действовать только две силы приложенные в шарнирах А и В. Но если стержень АВ находится в равновесии, то по аксиоме 1 приложенные в точках А и В силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т. е. вдоль оси стержня. Следовательно, нагруженный на концах стержень, весом которого по сравнению с этими нагрузками можно пренебречь, работает только на растяжение или на сжатие. Если такой стержень является связью, то реакция N стержня будет направлена вдоль оси стержня.

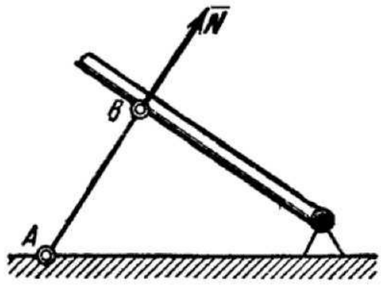

Рис. 9.

6. Подвижная шарнирная опора (рис. 10, опора А). Реакция NA такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.
7. Неподвижная шарнирная опора (рис. 10, опора В). Реакция RB такой опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач будем реакцию RB изображать ее составляющими XB и YB по направлениям осей координат. Если мы, решив задачу, найдем XB и YB, то тем самым будет определена и реакция RB; по модулю $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$

Способ закрепления, показанный на рис. 10, употребляется для того, чтобы в балке АВ не возникало дополнительных напряжений при изменении ее длины от изменения температуры или от изгиба.

Заметим, что если опору А балки (рис. 10) сделать тоже неподвижной, то балка при действии на нее любой плоской системы сил будет статически неопределимой, так как тогда в три уравнения равновесия войдут четыре неизвестные реакции XA, YA, XB, YB.

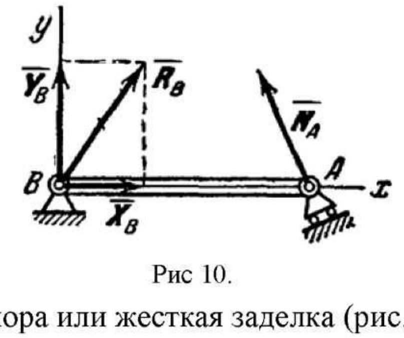

Рис 10.

Неподвижная защемляющая опора или жесткая заделка (рис. 11). В этом случае на заделанный конец балки со стороны опорных плоскостей действует система распределенных сил реакций. Считая эти силы приведенными к центру А, мы можем их заменить одной наперед неизвестной силой RA, приложенной в этом центре, и парой с наперед неизвестным моментом МА. Силу RA можно в свою очередь изобразить ее составляющими XA и YA. Таким образом, для нахождения реакции неподвижной защемляющей опоры надо определить три неизвестных величины XA, YA и МА. Если под такую балку где-нибудь в точке В подвести еще одну опору, то балка станет статически неопределимой.

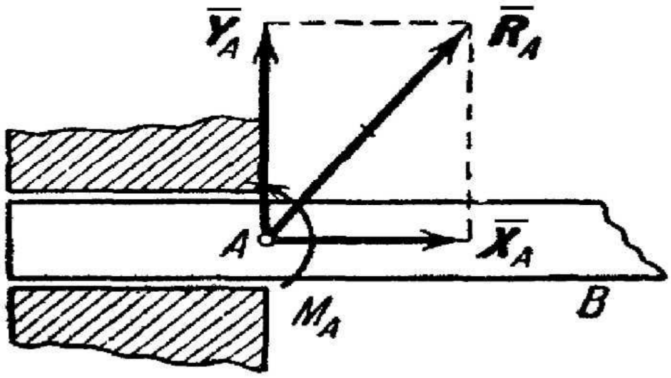

Рис 11

Лекция 2

Проекция силы на ось и на плоскость

Перейдем к рассмотрению аналитического (численного) метода решения задач статики. Этот метод основывается на понятии о проекции силы на ось. Как и для всякого другого вектора, проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы. Проекция имеет знак плюс, если перемещение от ее начала к концу происходит в положительном направлении оси, и знак минус - если в отрицательном. Из определения следует, что проекции данной силы на любые параллельные и одинаково направленные оси равны друг другу. Этим удобно пользоваться при вычислении проекции силы на ось, не лежащую в одной плоскости с силой.

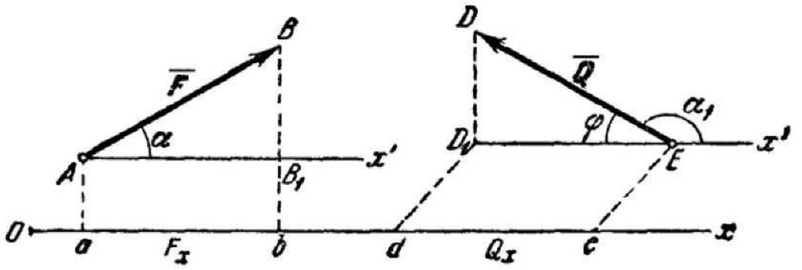

Рис 12

Обозначать проекцию силы F на ось Ox будем символом $\bar{F}_x$. Тогда для сил, изображенных на рис. 12, получим:

$$F_x = AB_1 = ab \quad Q_x = -ED_1 = -ed$$

Но из чертежа видно, что AB1=F cosα, ED1=Q cosβ=-Q cosα1.

Следовательно, П

$$F_x = F\cos\alpha, \quad Q_x = -\cos\varphi = Q\cos\alpha 1,$$

т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси. При этом проекция будет положительной, если угол между направлением силы и положительным направлением оси - острый, и отрицательной, если этот угол - тупой; если сила перпендикулярна к оси, то ее проекция на ось равна нулю.

Проекцией силы F на плоскость Oxy называется вектор $\bar{F}_{xy} = \bar{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы F на эту плоскость (рис. 13). Таким образом, в отличие от проекции силы на ось, проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим численным значением, но и направлением в плоскости Oxy. По модулю Fxy=F cosθ, где θ — угол между направлением силы F и ее проекции Fxy.

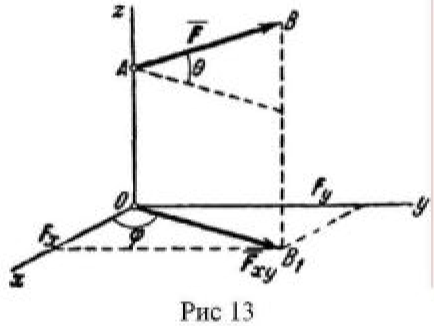

Рис 13

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось бывает удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось.

Например, в случае, изображенном на рис. 13, найдем таким способом, что

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$$
$$F_y = F_{xy} \cdot \sin\varphi = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi.$$

Геометрический способ сложения сил.

Решение многих задач механики связано с известной из векторной алгебры операцией сложения векторов и, в частности, сил. Величину, равную геометрической сумме сил какой-нибудь системы, будем называть главным вектором этой системы сил. Понятие о геометрической сумме сил не следует смешивать с понятием о равнодействующей, для многих систем сил, как мы увидим в дальнейшем, равнодействующей вообще не существует, геометрическую же сумму (главный вектор) можно вычислить для любой системы сил.

Геометрическая сумма (главный вектор) любой системы сил определяется или последовательным сложением сил системы по правилу параллелограмма, или построением силового многоугольника. Второй способ является более простым и удобным. Для нахождения этим способом суммы сил F1, F2, F3 …, Fn (рис. 14, а), откладываем от произвольной точки O (рис. 14, б) вектор Oa, изображающий в выбранном масштабе силу F1, от точки a откладываем вектор ab, изображающий силу F2, от точки b откладываем вектор bc, изображающий силу F3 и т. д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор mn, изображающий силу Fn. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор On = R, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + ... + \overline{F_n} \text{ или } \overline{R} = \sum \overline{F_k}.$$

От порядка, в котором будут откладываться векторы сил, модуль и направление R не зависят. Легко видеть, что проделанное построение представляет собою результат последовательного применения правила силового треугольника.

Фигура, построенная на рис. 14, б, называется силовым (в общем случае векторным) многоугольником. Таким образом, геометрическая сумма или главный вектор нескольких сил изображается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного из этих сил (правило силового многоугольника). При построении векторного многоугольника следует помнить, что у всех слагаемых векторов стрелки должны быть направлены в одну сторону (по обводу многоугольника), а у вектора R - в сторону противоположную.

Равнодействующая сходящихся сил. При изучении статики мы будем последовательно переходить от рассмотрения более простых систем сил к более сложным. Начнем с рассмотрения системы сходящихся сил. Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (см. рис. 14)

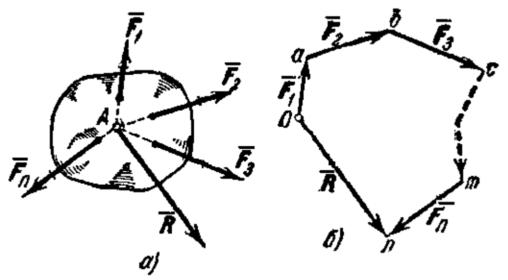

Рис. 14

По следствию из первых двух аксиом статики система сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна системе сил, приложенных в одной точке (на рис. 14, а в точке А).

Последовательно применяя аксиому параллелограмма сил, приходим к выводу, что система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме (главному вектору) этих сил и приложенную в точке их пересечения. Следовательно, если силы F1, F2, …, Fn сходятся в точке А (рис. 14, а), то сила, равная главному вектору R, найденному построением силового многоугольника, и приложенная в точке А, будет равнодействующей этой системы сил.

Равновесие системы сходящихся сил.

Из законов механики следует, что твердое тело, на которое действуют взаимно уравновешенные внешние силы, может не только находиться в покое, но и совершать движение, которое мы назовем движением «по инерции». Таким движением будет, например, поступательное равномерное и прямолинейное движение тела.

Отсюда получаем два важных вывода: 1) Условиям равновесия статики удовлетворяют силы, действующие как на покоящееся тело, так и на тело, движущееся «по инерции». 2) Уравновешенность сил, приложенных к свободному твердому телу, является необходимым, но не достаточным условием равновесия (покоя) самого тела; в покое тело будет при этом находиться лишь в том случае, если оно было в покое и до момента приложения к нему уравновешенных сил.

Для равновесия приложенной к твердому телу системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

1. Геометрическое условие равновесия. Так как равнодействующая R сходящихся сил определяется как замыкающая сторона силового многоугольника, построенного из этих сил, то R может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда конец последней силы в многоугольнике совпадает с началом первой, т. е. когда многоугольник замкнется.

Следовательно, для равновесия системы, сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнут.

2. Аналитические условия равновесия. Аналитически равнодействующая системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Так как под корнем стоит сумма положительных слагаемых, то R обратится в нуль только тогда, когда одновременно Rx=0,Ry=0,Rz=0, т. е. когда действующие на тело силы будут удовлетворять равенствам:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

Равенства выражают условия равновесия в аналитической форме: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил. В случае плоской системы сходящихся сил получим, очевидно, только два условия равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0,$$

Равенства выражают также необходимые условия (или уравнения) равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием сходящихся сил.

Момент силы относительно центра (или точки).

Опыт показывает, что под действием силы твердое тело может наряду с поступательным перемещением совершать вращение вокруг того или иного центра. Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом

Рассмотрим силу F, приложенную в точке A твердого тела (рис. 15). Допустим, что сила стремится повернуть тело вокруг центра O. Перпендикуляр h, опущенный из центра O на линию действия силы F, называется плечом силы F относительно центра O. Так как точку приложения силы можно произвольно перемещать вдоль линии действия, то, очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h; 2) от положения плоскости поворота OAB, проходящей через центр O и силу F; 3) от направления поворота к этой плоскости.

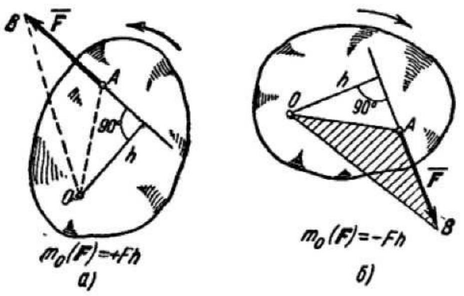

Рис 15

Ограничимся пока рассмотрением систем сил, лежащих в одной плоскости. В этом случае плоскость поворота для всех сил является общей и в дополнительном задании не нуждается.

Тогда для количественного измерения вращательного эффекта можно ввести следующее понятие о моменте силы: моментом силы F относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на длину плеча.

Момент силы F относительно центра O будем обозначать символом m0(F). Следовательно,

$$m_0(\bar{F}) = \pm Fh$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки, и знак минус, - если по ходу часовой стрелки. Так, для силы F, изображенной на рис. 15, а, момент относительно центра O имеет знак плюс, а для силы, показанной на рис. 15, б, - знак минус.

Отметим следующие свойства момента силы:

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия.
2. Момент силы относительно центра O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или когда линия действия силы проходит через центр O (плечо равно нулю).
3. Момент силы численно выражается удвоенной площадью треугольника OAB (рис. 15, б)

$$m_0(\bar{F}) = \pm 2пл\Delta OAB$$

Этот результат следует из того, что

$$пл\Delta OAB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} Fh$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Докажем следующую теорему Вариньона: момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.

Рассмотрим систему сил $\bar{F}1$, $\bar{F}2$, … $\bar{F}n$, сходящихся в точке А (рис. 16). Возьмем произвольный центр О и проведем через него ось Ox, перпендикулярную к прямой OA; положительное направление оси Ox выбираем так, чтобы знак проекции любой из сил на эту ось совпадал со знаком ее момента относительно центра О.

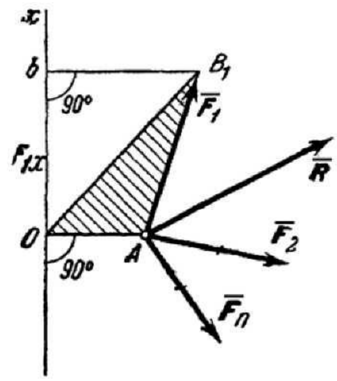

Рис. 16.

Для доказательства теоремы найдем соответствующие выражения моментов m0($\bar{F}$1), m0($\bar{F}$2), … . По формуле $m_0(\bar{F}_1) = +2пл\Delta OAB_1$. Но, как видно из рисунка, $2пл\Delta OAB_1 = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, где F1x - проекция силы F1 на ось Ox; следовательно $m_0(\bar{F}_1) = OA \cdot F_{1x}$

Аналогично вычисляются моменты всех других сил.

Обозначим равнодействующую сил $\bar{F}1$, $\bar{F}2$, … $\bar{F}n$, через $\bar{R}$, где $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$. Тогда, по теореме о проекции суммы сил на ось, получим $R_x = \sum F_{kx}$. Умножая обе части этого равенства на OA, найдем:

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx})$$

или,

$$m_0(\bar{R}) = \sum m_0(\bar{F}_k)$$

Пара сил. Момент пары.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 17). Система сил, образующих пару, очевидно, не находится в равновесии (см. аксиому 1).

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние d между линиями действия сил пары называется плечом пары. Действие пары сил на твердое тело сводится к некоторому вращательному эффекту, зависящему от: 1) модуля F сил пары и длины ее плеча d; 2) положения плоскости действия пары; 3) направления поворота в этой плоскости. Для характеристики этого эффекта вводится понятие момента пары.

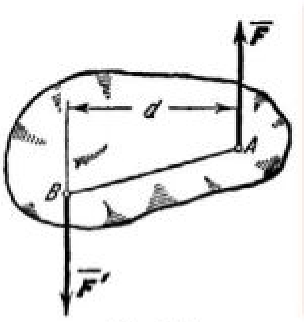

Рис 17

По аналогии с моментом силы введем следующее определение: моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком, произведению модуля одной из сил пары на ее плечо. Будем обозначать момент пары буквой т или М. Тогда $m = \pm Fd$

Момент пары (как и момент силы) будем считать положительным, когда пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательным - когда по ходу часовой стрелки. Из рис. 17 видно, что момент пары равен моменту одной из ее сил относительно точки приложения другой, т. е.

$$m = m_B(\overline{F}) = m_A(\overline{F}).$$

Докажем следующую теорему о моментах сил пары: алгебраическая сумма моментов сил пары, относительно любого центра, лежащего в плоскости ее действия, не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары. В самом деле, беря в плоскости действия пары любую точку O (рис. 18), находим: $m_O(\overline{F}) = -F \cdot Oa\, m_O(\overline{F}) = F \cdot Ob$. Складывая, эти равенства почленно и замечая, что F' = F и

Ob-Oa=d, где d-плечо пары, получаем:

$$m_O(\overline{F}) + \overline{m_O}(\overline{F}) = m$$

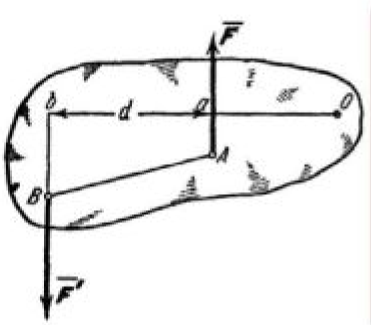

Рис. 18.

Доказанной теоремой удобно пользоваться при вычислении моментов сил пары относительно любого центра.

Теорема о параллельном переносе силы.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью аксиомы параллелограмма сил. Для двух параллельных сил эта задача была решена путем приведения их к сходящимся силам. Очевидно, что аналогичную задачу легко будет решить и для произвольной системы сил, если найти и для них метод приведения к силам, приложенным в одной точке.

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Пусть на твердое тело действует сила F,

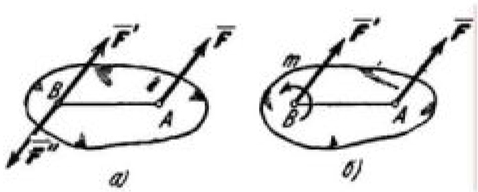

Рис 19

приложенная в точке A (рис. 19, а). Действие этой силы не изменится, если в любой точке B тела приложить две уравновешенные силы F' и F'', такие что F'=F,F''=-F. Полученная система трех сил и представляет собой силу F', равную F, но приложенную в точке B и пару (F, F'') с моментом

$$m = m_B(\overline{F})$$

Приведение плоской системы сил к данному центру.

Пусть на твердое тело действует какая-нибудь система сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$, лежащих в одной плоскости. Возьмем в этой плоскости произвольную точку O, которую назовем центром приведения, и, перенесем все силы в центр O (рис. 20, а). В результате на тело будет действовать система сил $\overline{F_1'} = \overline{F_1}, \overline{F_2'} = \overline{F_2} ... \overline{F_n'} = \overline{F_n}$, приложенных в центре O, и система пар, моменты которых будут равны: $m_1 = m_0(\overline{F_1}), m_2 = m_0(\overline{F_2}), ... m_n = m_0(\overline{F_n})$.

Силы, приложенные в центре O, можно заменить одной силой R, приложенной в том же центре; при этом $\overline{R} = \sum \overline{F_k'}$ или $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$.

Точно так же, по теореме о сложении пар, все пары можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости. Момент этой пары $M_0 = \sum m_k$ или $M_0 = \sum m_0(\overline{F_k})$.

Величина R, равная геометрической сумме всех сил системы, называется, как известно, главным вектором системы; величину Mo, равную сумме моментов всех сил системы относительно центра O, будем называть главным моментом системы относительно центра O. В результате мы доказали следующую теорему: всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом M0, равным главному моменту системы относительно центра O (рис. 20, в).

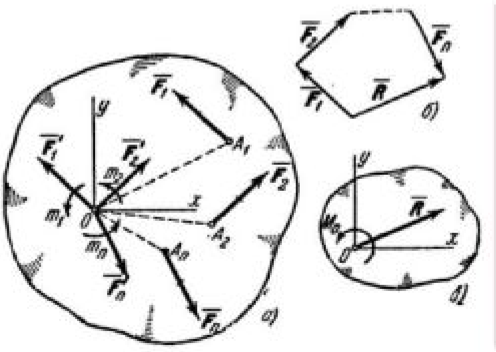

Рис 20

Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

Случай параллельных сил.

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

R=0, M0=0.

Здесь O - любая точка плоскости.

Найдем вытекающие из равенств аналитические условия равновесия.

Величины R и Mo определяются равенствами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},\ M_0 = \sum m_0(\overline{F_k}),$$

где $R_x = \sum F_{kx},\ R_y = \sum F_{ky}$. Но R может равняться нулю только тогда, когда одновременно Rx=0 и Ry=0. Следовательно, условия будут выполнены, если будет:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum m_0(\overline{F_k}) = 0.$$

Равенства выражают, следующие аналитические условия равновесия: для равновесия произвольной плоской системы сил, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

Равновесие плоской системы параллельных сил. В случае, когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, мы можем направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy параллельно им (рис. 21). Тогда проекция каждой из сил на Ox будет равна нулю и первое из 3-х равенств обратится в тождество вида 0=0. В результате для параллельных сил останется два

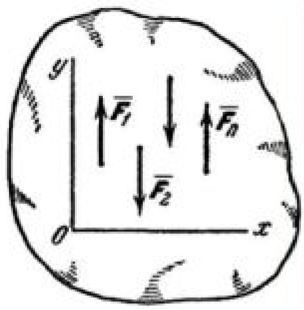

Рис. 21.

условия равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0,\ \sum m_0(\overline{F_k}) = 0.$$

Где ось Oy параллельна силам.

Решение задач

При решения задач этого раздела следует иметь в виду все те общие указания, которые были сделаны ранее.

Приступая к решению, надо, прежде всего, установить, равновесие какого именно тела следует в данной задаче рассмотреть. Затем, выделив это тело и рассматривая его как свободное, следует изобразить все действующие на тело заданные силы и реакции отброшенных связей.

Далее следует составить условия равновесия, применяя ту из форм этих условий, которая приводит к более простой системе уравнений (наиболее простой будет система уравнений, в каждое из которых входит по одному неизвестному).

Для получения более простых уравнений следует (если это только не усложняет ход расчета): а) составляя уравнения проекций, проводить координатную ось, перпендикулярно какой-нибудь неизвестной силе; б) составляя уравнения моментов, брать центр моментов в точке, где пересекается больше неизвестных сил.

При вычислении моментов иногда бывает удобно разлагать данную силу на две составляющие и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов этих составляющих.

Решение многих задач статики сводится к определению реакций опор, с помощью которых закрепляются балки, мостовые фермы и т. п.

Модуль 2

Лекция 3

Модуль 2 состоит из 2-ух лекций в которых изучаются следующие вопросы:

1. Равновесие системы тел.
2. Расчет ферм.
3. Понятие о ферме.
4. Аналитический расчет плоских ферм.
5. Графический расчет плоских ферм.
6. Трение.
7. Законы трения скольжения.
8. Реакции шероховатых связей.
9. Угол трения.
10. Равновесие при наличии трения.
11. Трение качения и верчения.
12. Момент силы относительно центра как вектор.
13. Момент пары сил как вектор.
14. Момент силы относительно оси.
15. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси.
16. Приведение пространственной системы сил к данному центру.
17. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
18. Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил.
19. Центр тяжести твердого тела.
20. Координаты центров тяжести однородных тел.
21. Центры тяжести некоторых однородных тел.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для изучения динамики движении тел с учетом трения скольжения и трения качения, динамики движения центра масс механической системы, кинетических моментов, для решения задач в дисциплине «Сопротивление материалов».

Равновесие систем тел.

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими - нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними, в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами, в нее не входящими (например, с опорами).

Если после отбрасывания внешних связей (опор) конструкция остается жесткой, то для нее задачи статики решаются как для абсолютно твердого тела.

Однако могут встречаться такие инженерные конструкции, которые после отбрасывания внешних связей не остаются жесткими. Примером такой конструкции является трехшарнирная арка (рис. 22). Если отбросить опоры A и B, то арка не будет жесткой: ее части могут поворачиваться вокруг шарнира C.

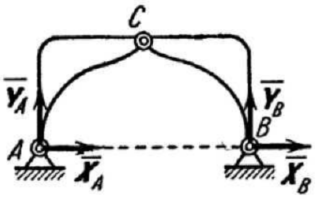

Рис. 22.

На основании принципа отвердевания система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, как указывалось, будучи необходимыми, не будут являться достаточными, поэтому из них нельзя будет определить всех неизвестных. Для решения задачи необходимо будет дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на трех шарнирную арку (см. рис. 22), мы получим три уравнения с четырьмя неизвестными XA, YA, XB, YB. Рассмотрев дополнительно условия равновесия левой (или правой) ее половины, мы получим еще три уравнения, содержащие два новых неизвестных XC, YC, на рис. 22 не показанных. Решая полученную систему шести уравнений, найдем все шесть неизвестных.

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия каждого из тел, рассматривая его как свободное. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится таким путем 3n уравнений, позволяющих найти 3n неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится). Если для данной конструкции число всех реакций связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой.

Расчет ферм.

Понятие о ферме. Аналитический расчет плоских ферм.

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется плоской. Места соединения стержней фермы называют узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм, без лишних стержней, образованных из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением

$$k = 2n - 3.$$

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Перейдем к определению усилий в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этим методом удобно пользоваться, когда надо найти усилия во всех стержнях фермы. Он сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Ход расчетов поясним на конкретном примере.

Рассмотрим изображенную на рис. 23,а ферму, образованную из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников; действующие на ферму силы параллельны оси x и равны: F1 = F2 = F3 = F = 2.

В этой ферме число узлов n = 6, а число стержней k = 9. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней.

Составляя уравнения равновесия для фермы в целом, найдем, что реакции опор направлены, как показано на рисунке, и численно равны;

$$X_A = 3F = 6H$$

$$Y_A = N = \frac{3}{2}F = 3H$$

Переходим к определению усилий в стержнях.

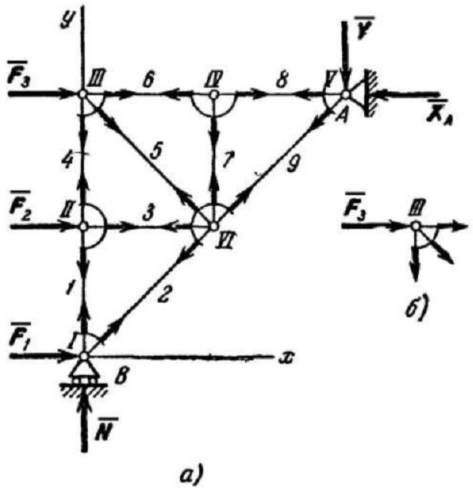

Рис. 23.

Пронумеруем узлы фермы римскими цифрами, а стержни - арабскими. Искомые усилия будем обозначать S1 (в стержне 1), S2 (в стержне 2) и т. д. Отрежем мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям S1, S2, ... Изображаем сразу все эти силы на рисунке, направляя их от узлов, т. е. считая, все стержни растянутыми (рис. 23, а; изображенную картину надо представлять себе для каждого узла так, как это показано на рис. 23, б для узла III). Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательной, это будет означать, что данный стержень не растянут, а сжат. Буквенных обозначений для сил, действующих вдоль стержней, ни рис. 23 не вводам, поскольку ясно, что силы, действующие вдоль стержня 1, равны численно S1, вдоль стержня 2 - равны S2 и т. д.

Теперь для сил, сходящихся в каждом узле, составляем последовательно уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \ \sum F_{ky} = 0.$$

Начинаем с узла 1, где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

Составляя уравнения равновесия для узла 1, получим

$$F_1 + S_2 \cos 45^0 = 0, \ N + S_1 + S_2 \sin 45^0 = 0.$$

Отсюда находим

$$S_2 = -F\sqrt{2} = -2{,}82H, \ S_1 = -N - S_2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -1H$$

Теперь, зная S1, переходим к узлу II. Для него уравнения равновесия дают

$$S_3 + F_2 = 0, \ S_4 - S_1 = 0,$$

Откуда

$$S_3 = -F = -2H, \ S_4 = S_1 = -1H.$$

Определив S4, составляем аналогичным путем уравнения равновесия сначала для узла III, а затем для узла IV. Из этих уравнений находим:

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 1{,}41H, \ S_6 = S_8 = -3H, \ S_7 = 0.$$

Наконец, для вычисления S9 составляем уравнение равновесия сил, сходящихся в узле V, проектируя их на ось By. Получим $Y_A + S_9 \cos 45^0 = 0,$ откуда $S_9 = -3\sqrt{2} = -4{,}23H.$

Второе уравнение равновесия для узла V и два уравнения для узла VI можно составить как поверочные. Для нахождения усилий в стержнях эти уравнения не понадобились, так как вместо них были использованы три уравнения равновесия всей фермы в целом при определении N, XA, и YA.

Окончательные результаты расчета можно свести в таблицу:

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в Н	-1	-2,82	-2	-1	+1,41	-3	0	-3	-4,23

Как показывают знаки усилий, стержень 5 растянут, остальные стержни сжаты; стержень 7 не нагружен (нулевой, стержень).

Наличие в ферме нулевых стержней, подобных стержню 7, обнаруживается сразу, так как если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Этот результат получается из уравнения равновесия в проекции на ось, перпендикулярную к упомянутым двум стержням.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности, для проверочных расчетов. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т. е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия, беря центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Графический расчет плоских ферм.

Расчет фермы методом вырезания узлов может производиться графически. Для этого сначала, определяют опорные реакции. Затем, последовательно отсекая от фермы каждый из ее узлов, находят усилия в стержнях, сходящихся в этих узлах, строя соответствующие замкнутые силовые многоугольники. Все построения проводятся в масштабе, который должен быть заранее выбран. Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня (иначе не удастся определить неизвестные усилия).

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 24, а. В этой ферме число узлов n=6, а число стержней k=9. Следовательно, соотношение выполняется и ферма является жесткой, без лишних стержней. Опорные реакции R4 и R5 для рассматриваемой фермы, изображаем наряду с силами F1, F2 и F3, как известные.

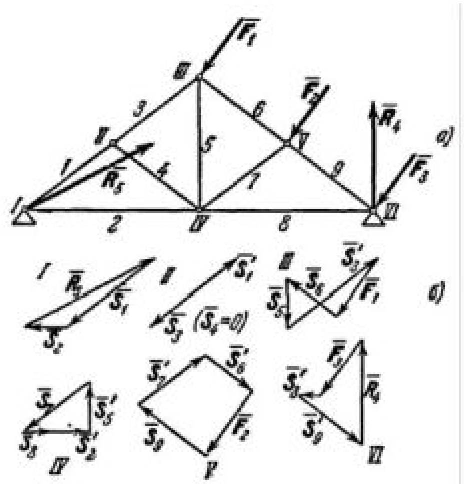

Рис 24

Определение усилий в стержнях начинаем с рассмотрения стержней, сходящихся в узле I (узлы нумеруем римскими цифрами, а стержни - арабскими). Мысленно отрезав от этих стержней остальную часть фермы, отбрасываем ее действие отброшенной части также мысленно заменяем силами S1 и S2, которые должны быть направлены вдоль стержней 1 и 2. Из сходящихся в узле I сил R5, S1 и S2 строим замкнутый треугольник (рис. 24, б). Для этого изображаем сначала в выбранном масштабе известную силу R5, а затем проводим через ее начало и конец прямые, параллельные стержням 1 и 2. Таким путем будут найдены силы S1 и S2, действующие на стержни 1 и 2. Затем рассматриваем равновесие стержней, сходящихся в узле II. Действие на эти стержни отброшенной части фермы мысленно заменяем силами S1', S2, и S4, направленными вдоль соответствующих стержней; при этом сила S1 нам известна, так как по равенству действия и противодействия S1' = -S1. Построив из сил, сходящихся в узле II, замкнутый треугольник (начиная с силы S1'), найдем величины S3 и S4 (в данном случае S4 = =0). Аналогично находятся усилия в остальных стержнях. Соответствующие силовые многоугольники для всех узлов показаны на рис. 24, б. Последний многоугольник (для узла VI) строится для проверки, так как все входящие в него силы уже найдены.

Из построенных многоугольников, зная масштаб, находим величины всех усилий. Знак усилия в каждом стержне определяется следующим образом. Мысленно вырезав узел по сходящимся в нем стержням (например, узел III), прикладываем к обрезам стержней найденные силы (рис. 25); сила, направленная от узла (S5 на рис. 25), растягивает стержень, а сила, направленная к узлу (S3' и S6 на рис. 25) сжимает его.

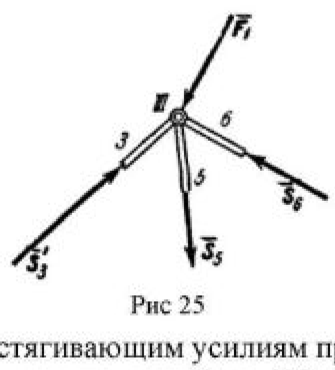

Рис 25

Согласно принятому условию растягивающим усилиям приписываем знак «+», а сжимающим - знак «-». В рассмотренном примере (рис. 25) стержни 1, 2, 3, 6, 7, 9 сжаты, а стержни 5, 8 растянуты.

Трение.

Законы трения скольжения.

Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения.

Возникновение трения обусловлено, прежде всего, шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения представляет собою довольно сложную физико-механическую проблему, рассмотрение которой выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения. Эти закономерности, называемые законами трения скольжения при покое, можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), величина которой может принимать любые значения от нуля до значения $F_{пр}$, называемого предельной силой трения.

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию: $F_{пр} = f_0 N$.

Статический коэффициент трения f_0 - число отвлеченное; он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность, смазка и т. п.).

3. Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

Объединяя вместе первый и второй законы, получаем, что при равновесии сила трения покоя (сила сцепления) $F \le F_{пр}$ или

$$F \le f_0 N.$$

Реакции шероховатых связей. Угол трения.

До сих пор при решении задач статики мы пренебрегали трением и считали поверхности связей гладкими, а их реакции направленными по нормалям к этим поверхностям. Реакция реальной (шероховатой) связи будет слагаться из двух составляющих: из нормальной реакции N и перпендикулярной к ней силы трения F. Следовательно, полная реакция R будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до Fпр сила R будет меняться от N до Rпр, а ее угол с нормалью будет расти от нуля до некоторого предельного значения φ0 (рис. 26). Наибольший угол φ0, который полная реакция шероховатой связи образует с нормалью к поверхности, называется углом трения. Из чертежа видно, что

$$tg\varphi_0 = \frac{F_{пр}}{N}.$$

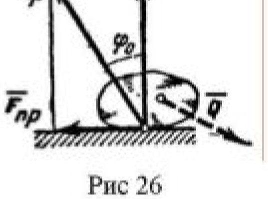

Рис 26

Так как $F_{пр} = f_0 N$, отсюда находим следующую связь между углом трения и коэффициентом трения:

$$tg\varphi_0 = f_0.$$

При равновесии полная реакция R, в зависимости от сдвигающих сил, может проходить где угодно внутри угла трения. Когда равновесие становится предельным, реакция будет отклонена от нормали на угол φ0.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P, образующую угол α с нормалью (рис. 27), то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие Psinα будет больше $F_{пр} = f_0 P cos\alpha$ (мы считаем $N = Pcos\alpha$, пренебрегая весом тела). Но неравенство $Psin\alpha > f_0 Pcos\alpha$, в котором $f_0 = tg\varphi_0$, выполняется только при $tg\alpha > tg\varphi_0$, т. е. при α>φ0. Следовательно, никакой силой, образующей с нормалью угол.

α, меньший угла трения 0, тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняются известные явления заклинивания или самоторможения тел.

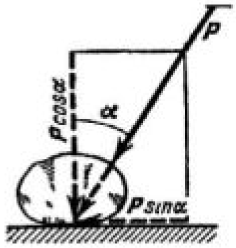

Рис 27

Равновесие при наличии трения.

Изучение равновесия тел с учетом трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения $F_{пр}$. При аналитическом решении задач реакцию шероховатой связи в этом случае изображают двумя составляющими N и $F_{пр}$, где $F_{пр} = f_0 N$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо $F_{пр}$ величину $f_0 N$ и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Трение качения и верчения.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиуса R и веса P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости. Приложим к оси катка силу Q (рис. 28, а), меньшую Fпр. Тогда в точке A возникает сила трения F, численно равная Q, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию N тоже приложенной в точке A, то она уравновесит силу P, а силы Q и F образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы Q

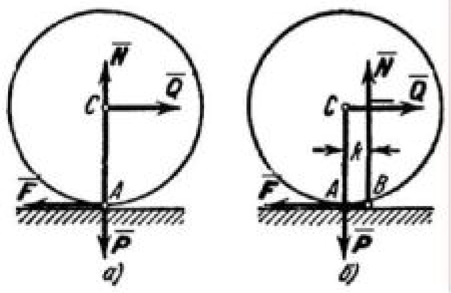

Рис 28

Истинная же картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически, вследствие деформаций тел, касание их происходит вдоль некоторой площадки АВ (рис. 28, б). При действии силы Q интенсивность давлений у края А убывает, а у края В возрастает. В результате реакция N оказывается смещенной в сторону действия силы Q. С увеличением Q это смещение растет до некоторой предельной величины k. Таким образом, в предельном положении на каток будут действовать пара (Qпр, F) с моментом QпрR и уравновешивающая ее пара (N, P) с моментом Nk. Из равенства моментов находим QпрR = Nk или

$$Q_{пр} = \frac{k}{R}N.$$

Пока $Q < Q_{пр}$, каток находится в покое; при $Q > Q_{пр}$ начинается качение.

Входящая в формулу линейная величина k называется коэффициентом трения качения. Измеряют величину k обычно в сантиметрах. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f0. Этим объясняется то, что в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

Момент силы относительно центра как вектор.

Чтобы перейти к решению задач статики для системы сил, как угодно расположенных в пространстве, оказывается необходимым несколько уточнить и расширить ряд введенных ранее понятий. Начнем с понятия о моменте силы.

1. Изображение момента вектором. Момент силы F относительно центра О (см. рис. 29) как характеристика ее вращательного эффекта определяется следующими тремя элементами:

1. модулем момента, равным произведению модуля силы на плечо, т. е. Fh; 2) плоскостью поворота ОАВ, проходящей через линию действия силы F и центр О; 3) направлением поворота в этой плоскости. Когда все силы и центр О лежат в одной плоскости, необходимость задавать каждый раз плоскость поворота ОАВ отпадает, и момент можно определять как скалярную алгебраическую величину, равную ±Fh, где знак указывает направление поворота.

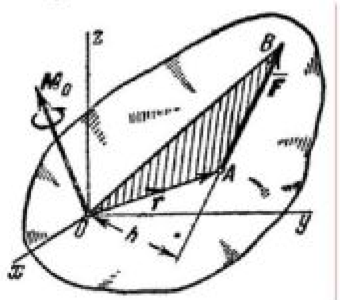

Рис 29

Но в случае сил, произвольно расположенных в пространстве, плоскости поворота у разных сил будут разными и должны задаваться дополнительно. Положение плоскости в пространстве можно задать, задав отрезок (вектор), перпендикулярный к этой плоскости. Если одновременно модуль этого вектора выбрать равным модулю момента силы и условиться направлять этот вектор так, чтобы его направление определяло направление поворота силы, то такой вектор полностью определит все три элемента, характеризующие момент данной силы относительно центра О.

Поэтому в общем случае момент mo(F) силы F относительно центра О (рис. 29) будем изображать приложенным в центре О вектором Mo, равным по модулю (в выбранном масштабе) произведению модуля силы F на плечо h и перпендикулярным к плоскости ОАВ, проходящей через центр О и силу F. Направлять вектор Mo будем в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден происходящим против хода часовой стрелки. Таким образом, вектор Mo будет одновременно характеризовать модуль момента, плоскость поворота OAB, разную для разных сил, и направление поворота в этой плоскости. Точка приложения вектора Mo определяет положение центра момента.

2. Выражение момента силы с помощью векторного произведения. Рассмотрим векторное произведение OA x F векторов OA и F (рис. 29). По определению,

$$\left|\overline{OA}\times\overline{F}\right| = 2пл\Delta OAB = M_O,$$

так как модуль вектора Mo тоже равен 2 пл. Δ OAB. Направлен вектор (OA x F) перпендикулярно к плоскости OAB, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение OA с F (если их отложить от одной точки) видно против хода часовой стрелки, т. е., так же, как вектор Mo. Следовательно, векторы (OA x F) и Mo совпадают и по модулю и по направлению и, как легко проверить, по размерности, т. е. оба эти вектора изображают одну и ту же величину. Отсюда

$$\overline{M_O} = \overline{OA}\times\overline{F} \text{ или } \overline{M_O} = \overline{r}\times\overline{F},$$

где вектор r=OA называется радиусом-вектором точки A относительно центра O.

Таким образом, момент силы F относительно центра O равен векторному произведению радиуса вектора r=OA, соединяющего центр O с точкой приложения силы A, на саму силу. Этим выражением момента силы бывает удобно пользоваться при доказательстве некоторых теорем.

Момент пары сил как вектор.

Действие пары сил на тело характеризуется: 1) величиной модуля момента пары, 2) плоскостью действия, 3) направлением поворота в этой плоскости. При рассмотрении пар, не лежащих в одной плоскости, для характеристики каждой из пар необходимо будет задать все эти три элемента. Это можно сделать, если условиться, по аналогии с моментом силы, изображать момент пары соответствующим образом, построенным вектором, а именно: будем изображать момент пары вектором т или M, модуль которого равен (в выбранном масштабе) модулю момента пары,т. е. произведению одной из ее сил на плечо, и который направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда поворот пары виден происходящим против хода часовой стрелки (рис. 30).

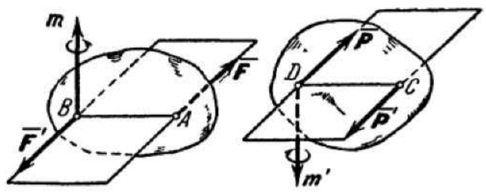

Рис 30

Как известно модуль момента пары равен моменту одной из ее сил относительно точки, где приложена другая сила, т. е. m = mB(F); по направлению же векторы этих моментов совпадают. Следовательно

$$\overline{m} = \overline{m_B}(\overline{F}) = \overline{m_A}(\overline{F}).$$

Момент силы относительно оси.

Чтобы перейти к решению задач статики для случая произвольной пространственной системы сил, необходимо ввести еще понятие о моменте силы относительно оси.

Момент силы относительно оси характеризует вращательный эффект, создаваемый силой, стремящейся повернуть тело вокруг данной оси. Рассмотрим твердое тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 31). Пусть на это тело действует сила F, приложенная в точке A. Проведем через точку A плоскость xy, перпендикулярную оси z, и разложим силу F на составляющие: Fz, параллельную оси z, и Fxy, лежащую в плоскости xy

(Fxy является одновременно проекцией силы F на плоскости xy). Сила Fz, направленная параллельно оси z, очевидно, не может повернуть тело вокруг этой оси (она только стремится сдвинуть тело вдоль оси z). Весь вращательный эффект, создаваемый силой F, будет совпадать с вращательным эффектом ее составляющей Fxy. Отсюда заключаем, что

$$m_z(\bar{F}) = m_z(\overline{F_{xy}}),$$

где символ mxy(F) обозначает момент силы F относительно оси z.

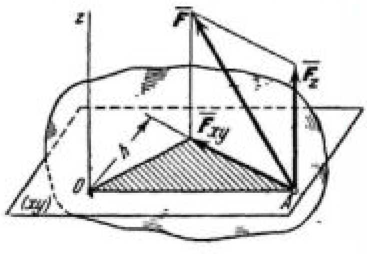

Рис 31

Для силы же Fxy, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси z, вращательный эффект измеряется произведением модуля этой силы на ее расстояние h от оси. Но этой же величиной измеряется момент силы Fxy относительно точки O, в которой ось z пересекается с плоскостью xy. Следовательно $m_z(\overline{F_{xy}}) = m_0(\overline{F_{xy}})$ или, согласно предыдущему равенству,

$$m_z(\bar{F}) = m_0(\overline{F_{xy}}) = \pm F_{xy}h.$$

В результате приходим к следующему определению: моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент будем считать положительным, если с положительного конца оси z поворот, который сила Fxy, стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу часовой стрелки.

Из чертежа (рис. 32) видно, что при вычислении момента плоскость xy можно проводить через любую точку оси z. Таким образом, чтобы найти момент силы относительно оси z (рис. 32) надо:

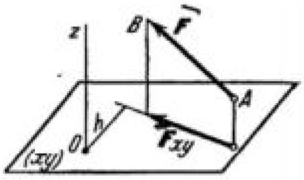

Рис 32

1. провести плоскость xy, перпендикулярную к оси z (в любом месте);
2. спроектировать силу F на эту плоскость и вычислить величину Fxy;
3. опустить из точки O пересечения оси с плоскостью перпендикуляр на направление Fxy и найти его длину h;
4. вычислить произведение Fxyh;
5. определить знак момента.

При вычислении моментов надо иметь в виду следующие частные случаи:

1. Если сила параллельна оси, то ее момент относительно оси равен нулю (так как Fxy = 0).
2. Если линия действия силы пересекает ось, то ее момент относительно оси также равен нулю (так как h = 0).

Объединяя оба случая вместе, заключаем, что момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

3. Если сила перпендикулярна к оси, то ее момент относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние между силой и осью.

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси.

Пусть на тело действует приложенная в точке А сила F (рис. 33). Проведем какую - нибудь ось z и возьмем на ней произвольную точку О. Момент силы F относительно центра О будет изображаться вектором М0 перпендикулярным плоскости ОАВ, причем по модулю

$$M_0 = Fh = 2пл\Delta OAB$$

Проведем теперь через любую точку О1 на оси z плоскость xy, перпендикулярную к оси; проектируя силу F на эту плоскость, найдем

$$m_z(\overline{F}) = m_{O_1}(\overline{F_{xy}}) = 2пл\Delta O_1A_1B_1$$

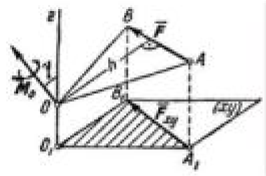

Рис 33

Но треугольник О1А1В1 представляет собою проекцию треугольника ОАВ на плоскость xy. Угол между плоскостями этих треугольников равен углу .между перпендикулярами к плоскостям, т. е. равен γ. Тогда, по известной геометрической формуле,
$\Delta O_1A_1B_1 = пл\Delta OAB\cos\gamma$

Умножая обе части этого равенства на 2 и замечая, что удвоенные пощади треугольников О1А1В1 и ОАВ равны соответственно mz(F) и Mo, найдем окончательно:

$$m_z(\overline{F}) = M_0\cos\gamma$$

Так как произведение $M_0\cos\gamma$ дает проекцию вектора $\overline{M_0} = \overline{m_0}(\overline{F})$ на ось z, то равенство можно еще представить в виде

$$m_z(\overline{F}) = M_z \text{ или } m_z(\overline{F}) = \left[\overline{m_0}(\overline{F})\right]_z$$

В результате мы доказали, что между моментом силы относительно оси и ее моментом относительно какого-нибудь центра, лежащего на этой оси, существует следующая зависимость: момент силы F относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Приведение пространственной системы сил к данному центру.

Полученные выше результаты позволяют решить задачу о приведении любой системы сил к данному центру. Эта задача, решается с помощью теоремы о параллельном переносе силы. Для переноса действующей на абсолютно твердое тело силы F из точки А (рис. 34, а) в точку О прикладываем в точке О силы F' = F и F" = -F. Тогда сила F' = F окажется приложенной в точке О и к ней будет присоединена пара (F, F") с моментом т, что можно показать еще так, как на рис. 34, б. При этом

$$\overline{m} = \overline{m_0}(\overline{F}).$$

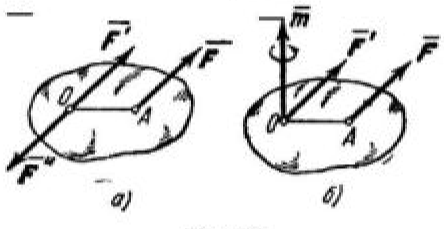

Рис 34

Рассмотрим теперь твердое тело, на которое действует какая угодно система сил F1, F2, …, Fn (рис. 35, а). Выберем произвольную точку O за центр приведения и перенесем все силы системы в этот центр, присоединяя при этом соответствующие пары. Тогда на тело будет действовать система сил

$$\overline{F'1} = \overline{F1},\ F'2 = F2,\ \dots,\ F'n = Fn.$$

приложенных в центре O, и система пар, моменты которых будут равны

$$\overline{m}1 = \overline{m}0(\overline{F1}),\ m2 = m0(\overline{F2}),\ \dots,\ mn = m0(Fn),$$

Силы, приложенные в точке O, заменяются одной силой R, приложенной в той же точке. При этом $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$ или, $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$.

Чтобы сложить все полученные пары, надо геометрически сложить векторы моментов этих пар. В результате система пар заменится одной парой, момент которой $\overline{M_0} = \sum \overline{m_k}$ или,

$$\overline{M_0} = \sum \overline{m_0}(\overline{F_k}).$$

Как и в случае плоской системы, величина R, равная геометрической сумме всех сил, называется главным вектором системы; величина Mo, равная геометрической сумме моментов всех сил относительно центра O, называется главным моментом системы относительно этого центра.

Таким образом мы доказали следующую теорему, любая система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R, равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O, и одной парой с моментом Mo, равным главному моменту системы относительно центра O (рис. 35, б).

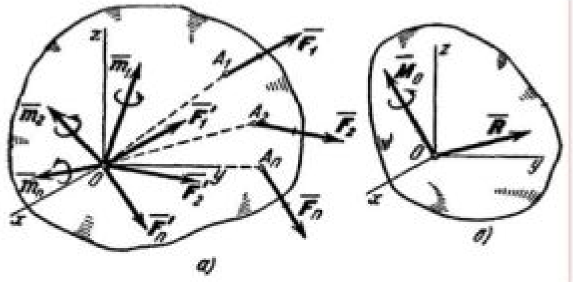

Рис 35

Векторы R и Mo обычно определяют аналитически, т. е. по их проекциям на оси координат.

Выражения для Rx, Ry, Rz нам известны.

Проекции вектора Mo на оси координат будем обозначать Mx, My, Mz. По теореме о проекциях суммы векторов на ось будет $M_x = \sum \left| m_0(\overline{F_k}) \right|_x$ или, $M_x = \sum m_x(\overline{F_k})$. Аналогично находятся величины My и Mz

Окончательно для определения проекций главного вектора R и главного момента Mo получаем формулы:

$$R_x = \sum F_{kx},\quad R_y = \sum F_{ky},\quad R_z = \sum F_{kz}.$$
$$M_x = \sum m_x(\overline{F_k}),\ M_y = \sum m_y(\overline{F_k}),\ M_z = \sum m_z(\overline{F_k}).$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

Произвольную пространственную систему сил, как и плоскую, можно привести к какому - нибудь центру O и заменить одной результирующей силой R и парой с моментом Mo. Рассуждая так, что для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно было R = 0 и

Mo=0. Но векторы R и Mo могут обратиться в нуль только тогда, когда равны нулю все их проекции на оси координат, т. е. когда Rx=Ry=Rz=0 и

Mx=My=Mz=0 или, когда действующие силы удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{lll}\sum F_{kx} = 0, & \sum F_{ky} = 0, & \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F}_k) = 0, & \sum m_y(\overline{F}_k) = 0, & \sum m_z(\overline{F}_k) = 0\end{array}\right\}$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

Задачи на равновесие тела под действием пространственной системы сил.

Принцип решения задач этого раздела остается тем же, что и для плоской системы сил. Установив, равновесие, какого тела будет рассматриваться, заменяют наложенные на тело связи их реакциями и составляют условия равновесия этого тела, рассматривая его как свободное. Из полученных уравнений определяются искомые величины.

Для получения более простых систем уравнений рекомендуется оси проводить так, чтобы они пересекали больше неизвестных сил или были к ним перпендикулярны (если это только излишне не усложняет вычисления проекций и моментов других сил).

Новым элементом в составлении уравнений является вычисление моментов сил относительно осей координат.

В случаях, когда из общего чертежа трудно усмотреть, чему равен момент данной силы относительно какой-нибудь оси, рекомендуется изобразить на вспомогательном чертеже проекцию рассматриваемого тела (вместе с силой) на плоскость, перпендикулярную к этой оси.

В тех случаях, когда при вычислении момента возникают затруднения в определении проекции силы на соответствующую плоскость или плеча этой проекции, рекомендуется разложить силу на две взаимно перпендикулярные составляющие (из которых одна параллельна какой-нибудь координатной оси), а затем воспользоваться теоремой Вариньона.

Лекция 4

Центр тяжести твердого тела.

На любую частицу тела, находящегося вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести. Сила тяжести является равнодействующей силы притяжения Земли и центробежной силы, возникающей вследствие вращения тела вместе в Землей.

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с земным радиусом, силы тяжести частиц тела можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой частицы постоянную величину при любых поворотах тела. Поле тяжести, в котором выполняются эти два условия, называют однородным полем тяжести.

Равнодействующую сил тяжести p1, p2, …, pn, действующих на частицы данного тела, обозначим P (рис. 36). Модуль этой силы равен весу тела и определяется равенством $P = \sum p_k$.

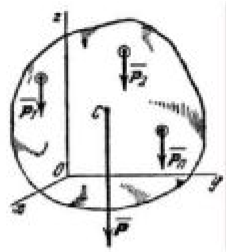

Рис 36

Равнодействующая P сил pk будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C, являющуюся центром параллельных сил тяжести pk. Эта точка и называется центром тяжести тела. Таким образом, центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей, сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела, в пространстве. Координаты центра тяжести, определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P},\ y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P},\ z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P},$$

где xk, yk, zk - координаты точек приложения сил тяжести pk частиц тела.

Отметим, что согласно определению центр тяжести - это точка геометрическая; она может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца).

Координаты центров тяжести однородных тел.

Для однородного тела вес pk любой его части пропорционален объему v_k этой части: $p_k = \gamma v_k$, а вес P всего тела пропорционален объему V этого тела $p_k = \gamma V$, где γ - вес единицы объема.

Подставив эти значения P и pk в предыдущие формулы, мы заметим, что в числителе γ как общий множитель выносится за скобку и сокращается с γ в знаменателе. В результате получим:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V},\ y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V},\ z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}.$$

Как видно, центр тяжести однородного тела зависит только от его геометрической формы, а от величины γ не зависит. По этой причине точку C, координаты которой определяются формулами, называют центром тяжести объема V.

Путем аналогичных рассуждений легко найти, что если тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину, то для нее

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S},\ y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S},$$

где S - площадь всей пластины, а sk - площади ее частей.

Точку, координаты которой определяются формулами называют центром тяжести площади S.

Точно так же получаются формулы для координат центра тяжести линии:

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L},\ y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L},\ z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L},$$

где L - длина всей линии, - длины ее частей.

Таким образом, центр тяжести однородного тела определяется, как центр тяжести соответствующего объема, площади или линии.

Центры тяжести некоторых однородных тел.

1. Центр тяжести дуги окружности. Рассмотрим дугу AB радиуса R с центральным углом AOB=2α. В силу симметрии центр тяжести этой дуги лежит на оси Ox (рис. 37). Найдем координату xC по формуле $x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} x\,dl$. Для этого выделим на дуге AB элемент MM' длиною dl = Rdφ, положение которого определяется углом φ. Координата x элемента MM' будет x = Rcosφ. Подставляя эти значения x и dl и имея в виду, что интеграл должен быть распространен на всю длину дуги, получим:

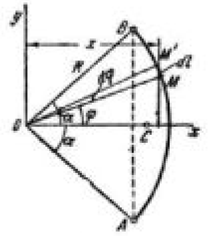

Рис 37

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

где L - длина дуги AB, равная R·2α. Отсюда окончательно находим, что центр тяжести дуги окружности лежит на ее оси симметрии на расстоянии от центра O, равном

$$x_C = R\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

где угол α измеряется в радианах.

2. Центр тяжести площади треугольника. Разобьем площадь треугольника ABD (рис. 38) прямыми, параллельными AD, на n узких полосок; центры тяжести этих полосок будут лежать на медиане BE треугольника. Следовательно, и центр тяжести всего треугольника лежит на этой медиане. Аналогичный результат получается для двух других медиан. Отсюда заключаем, что центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

При этом, как известно,

$$CE = \frac{1}{3}BE$$

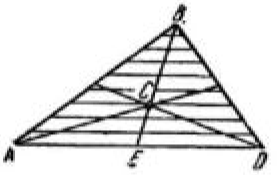

Рис 38

3. Центр тяжести площади кругового сектора. Рассмотрим круговой сектор OAB радиуса R с центральным углом 2α (рис. 39). Разобьем мысленно площадь сектора OAB радиусами, проведенными из центра O, на n секторов. В пределе, при неограниченном увеличении числа n, эти секторы можно рассматривать как плоские треугольники, центры тяжести которых лежат на дуге DE радиуса $\frac{2}{3}R$. Следовательно, центр тяжести сектора OAB будет совпадать с центром тяжести дуги DE. Окончательно получим, что центр тяжести площади кругового сектора лежит на его центральной оси

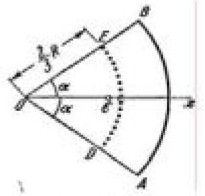

Рис 39

симметрии на расстоянии от начального центра O, равном $x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Т. 1,2. - М.: Высш. шк., 1977.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.,1980.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш. шк., 1986.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.1,2. - М., 1982.

Раздел 2. Кинематика

Модуль 3

Лекция 5

Модуль 3 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. Кинематика точки и твердого тела.
2. Кинематика точки,
3. Введение в кинематику.
4. Способы задания движения точки.
5. Вектор скорости точки.
6. Вектор ускорения точки.
7. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения точки.
8. Касательно и нормальное ускорение точки.
9. Некоторые частные случаи движения точки.
10. Поступательное и вращательное движения твердого тела.
11. Поступательное движение.
12. Вращательное движение твердого тела вокруг оси.
13. Угловая скорость и угловое ускорение.
14. Равномерное и равнопеременное вращения.
15. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики движения материальной точки, динамики относительного движения точки, динамики вращательного движения точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Кинематика точки и твердого тела

Кинематика точки

Введение в кинематику

- Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил.
- Под движением мы понимаем в механике изменение, с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.
- Для определения положения движущегося тела (или точки) в разные моменты времени с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, образующую вместе с этим телом систему отсчета.
- Изображать систему отсчета будем в виде трех координатных осей (не показывая тело, с которым они связаны).
- Движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство в механике мы рассматриваем, как трехмерное евклидово пространство.

Время является скалярной, непрерывно изменяющейся величиной. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные величины (расстояния, скорости и т. д.) рассматриваются как изменяющиеся с течением времени, т, е. как функции времени t.

Для решения задач кинематики надо, чтобы изучаемое движение было как-то задано (описано).

Кинематически задать движение или закон движения тела (точки) - значит задать положение этого тела (точки) относительно данной системы отсчета в любой момент времени.

Основная задача кинематики точки и твердого тела состоит в том, чтобы, зная закон движения точки (тела), установить методы определения всех кинематических величин, характеризующих данное движение.

Способы задания движения точки

Для задания движения точки можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный, 2) координатный, 3) естественный.

1. Векторный способ задания движения точки.

Пусть точка М движется по отношению к некоторой системе отсчета Oxyz. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор r, проведенный из начала координат O в точку М (рис. 1).

При движении точки М вектор $\bar{r}$ будет с течением времени изменяться и по модулю, и по направлению. Следовательно, $\bar{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента t.

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Равенство определяет закон движения точки в векторной форме, так как оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий вектор $\bar{r}$ и найти положение движущейся точки.

Геометрическое место концов вектора $\bar{r}$, т. е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

2. Координатный способ задания движения точки.

Положение точки можно непосредственно определять ее декартовыми координатами x, y, z, которые при движении точки будут с течением времени изменяться. Чтобы знать закон движения точки, т. е. ее положение в пространстве в любой момент времени, надо знать значения координат точки для каждого момента времени, т. е. знать зависимости

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$

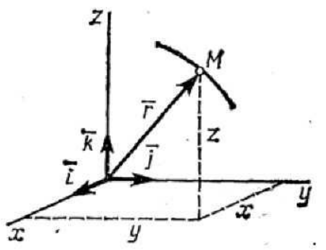

Рис.1

Уравнения представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Они определяют закон движения точки при координатном способе задания движения.

3. Естественный способ задания движения точки.

Естественным способом задания движения удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна заранее. Пусть кривая АВ является траекторией точки М при ее движении относительно системы отсчета Oxyz (рис, 2) Выберем на этой траектории какую-нибудь неподвижную точку O', которую примем за начало отсчета, и установим на траектории положительное и отрицательное направления отсчета (как на координатной оси). Тогда положение точки М на траектории будет однозначно определяться криволинейной координатой s, которая равна расстоянию от точки О' до точки М, измеренному вдоль дуги траектории и взятому с соответствующим знаком.

При движении точка М перемещается в положения M1, M2,. . . следовательно, расстояние s будет с течением времени изменяться.

Чтобы знать положение точки М на траектории в любой момент времени, надо знать зависимость

$$s = f(t)$$

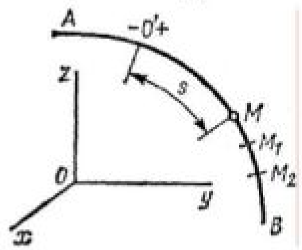

Рис 2

Уравнение выражает закон движения точки М вдоль траектории.

Вектор скорости точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является векторная величина, называемая скоростью точки. Введем сначала понятие о средней скорости точки за какой-нибудь промежуток времени. Пусть движущаяся точка находится

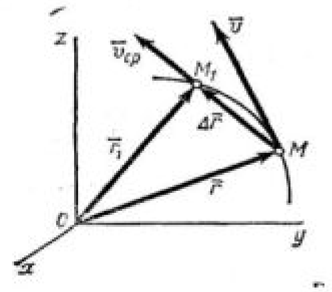

Рис.3

в момент времени t в положении М, определяемом радиусом-вектором r, а в момент t1 приходит в положение M1 определяемое вектором $\overline{r}_1$ (рис.3). Тогда перемещение точки за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ определяется вектором $\overline{M}\overline{M}_1$ который будем называть вектором перемещения точки. Из треугольника ОММ1 видно, что $\overline{r} + \overline{M}\overline{M}_1 = \overline{r}_1$;

следовательно, $\overline{M}\overline{M}_1 = \overline{r}_1 - \overline{r} = \Delta \overline{r}$.

Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени дает векторную величину, называемую средней по модулю и направлению скоростью точки за промежуток времени Δt: $\bar{V}_{ср} = M\bar{M}_1 / \Delta t = \Delta \bar{r} / \Delta t$.

Скоростью точки в данный момент времени t называется векторная величина v, к которой стремится средняя скорость vср при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\bar{v}_{cp}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Итак, вектор скорости точки в данный момент времени равен первой производной от радиуса-вектора точки по времени.

Так как предельным направлением секущей MM1 является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Вектор ускорения точки

Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка находится в положении M и имеет скорость v, а в момент t1 приходит в положение M1 и имеет скорость v1 (рис. 4). Тогда за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ скорость точки получает приращение $\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}$. Для построения вектора $\Delta \bar{v}$ отложим от точки M вектор, равный v1, и построим параллелограмм, в котором диагональю будет $\bar{v}_1$, а одной из сторон $\bar{v}$. Тогда, очевидно, вторая сторона и будет изображать вектор $\Delta \bar{v}$. Заметим, что вектор $\Delta \bar{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

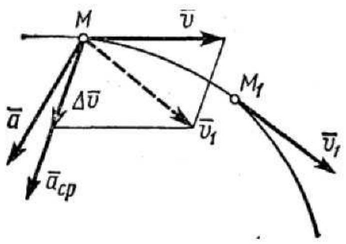

Рис 4

Отношение приращения вектора скорости $\Delta \bar{v}$ к соответствующему промежутку времени Δt определяет вектор среднего ускорения точки за этот промежуток времени:

$$\bar{a}_{cp} = \Delta \bar{v} / \Delta t.$$

Вектор среднего ускорения имеет то же направление, что и вектор $\Delta \bar{v}$, т. е. направлен в сторону вогнутости траектории.

Ускорением точки в данный момент времени t называется векторная величина $\bar{a}$, к которой стремится среднее ускорение $\bar{a}_{cp}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю: Вектор ускорения точки в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Найдем, как располагается вектор $\bar{a}$ по отношению к траектории точки. При прямолинейном движении вектор $\bar{a}$ направлен вдоль прямой, по которой движется точка. Если траекторией точки является плоская кривая, то вектор ускорения $\bar{a}$, так же как и вектор $\bar{a}_{cp}$, лежит в плоскости этой кривой и направлен в сторону ее вогнутости. Если траектория не является плоской кривой, то вектор $\bar{a}_{ср}$ направлен в сторону вогнутости траектории и лежит в плоскости, проходящей через касательную к траектории в точке М и прямую, параллельную касательной в соседней точке М1 (рис. 4). В пределе, когда точка М стремится к М, эта плоскость занимает положение так называемой соприкасающейся плоскости, т.е. плоскости, в которой происходит бесконечно малый поворот касательной к траектории при элементарном перемещении движущейся точки. Следовательно, в общем случае вектор ускорения $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости кривой.

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания движения

1. Определение скорости точки. Вектор скорости точки $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, учитывая, что $r_x = x, r_y = y, r_z = z,$ найдем:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Таким образом, проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α, β, γ, которые вектор v образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z};$$
$$\cos\alpha = v_x / v, \cos\beta = v_y / v, \cos\gamma = v_z / v,$$

2. Определение ускорения точки. Вектор ускорения точки $\bar{a} = d\bar{v}/dt$ в проекции на оси получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

или

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z},$$

т.е. проекция ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения найдутся из формул

$$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z};$$
$$\cos\alpha_1 = a_x / a, \cos\beta_1 = a_y / a, \cos\gamma_1 = a_z / a,$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

Итак, численная величина скорости точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния (криволинейной координаты) s точки по времени.

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, которая нам наперед известна.

Касательное и нормальное ускорение точки

При естественном способе задания движения вектор $\bar{a}$ определяют по его проекциям на оси Мτnb, имеющие начало в точке М и движущиеся вместе с нею (рис.5). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными осями), направлены следующим образом: ось M_τ - вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния s; ось Mn - по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mn - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn , лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

Было показано, что ускорение точки $\bar{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости $M_{\tau n}$; следовательно, проекция вектора $\bar{a}$ на бинормаль равна нулю ($a = 0$).

Вычислим проекции $\bar{a}$, на две другие оси. Пусть в момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость v, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ приходит в положение M1 и имеет скорость v1.

Тогда по определению

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t}.$$

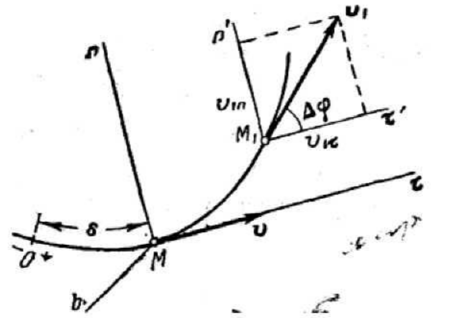

Рис.5

Перейдем в этом равенстве от векторов к их проекциям на оси $M_\tau u M_n$, проведенные в точке M (рис.5). Тогда на основании теоремы о проекции суммы (или разности) векторов на ось получим:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

- Учитывая, что проекция вектора на параллельные оси одинаковы, проведем через точку M1 оси M_τ', M_n', параллельные M_τ, M_n, и обозначим угол между направлением вектора $\bar{v}_1$ и касательной M_τ через $\Delta\varphi$. Этот угол между касательными к кривой в точках M и M1 называется углом смежности.
- Напомним, что предел отношения угла смежности $\Delta\varphi$ к длине дуги $MM_1 = \Delta s$ определяет кривизну k кривой в точке M. Кривизна же является величиной, обратной радиусу кривизны ρ в точке M. Таким образом,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

* Обращаясь теперь к чертежу (рис.6), находим, что проекции векторов $\bar{v}$ и $\bar{v}_1$ на оси

$$v_\tau = v, v_n = 0$$

M_τ, M_n, будут равны: $\{ \; v_{1\tau} = v_1 \cos \Delta\varphi, v_{1n} = v_1 \sin \Delta\varphi$,

где v и v1 - численные величины скорости точки в моменты t и t1.

Следовательно,

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

Заметим что при $\Delta t \to 0$ точка M1 неограниченно приближается к M и одновременно $\Delta\varphi \to 0, \Delta s \to 0, v_1 \to v$.

Тогда, учитывая, что в пределе $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} (\cos \Delta\varphi) = 1$, получим для a_τ выражение

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Правую часть выражения an преобразуем так, чтобы в нее вошли отношения, пределы которых нам известны. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на $\Delta\varphi\Delta s$. Тогда будем иметь

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{p},$$

так как пределы каждого из стоящих в скобке сомножителей при $\Delta t \to 0$ равны:

$$\lim v_1 = v, \lim \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{p}, \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

Окончательно получаем:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; a_n = \frac{v^2}{p}.$$

Итак, мы доказали, что проекция ускорения точки на касательную равна первой производной от численной величины скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) s по времени, а проекция ускорения на главную нормаль равна квадрату скорости деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой; проекция ускорения на бинормаль равна нулю (ab=0). Эти результаты выражают собою одну из важных теорем кинематики точки.

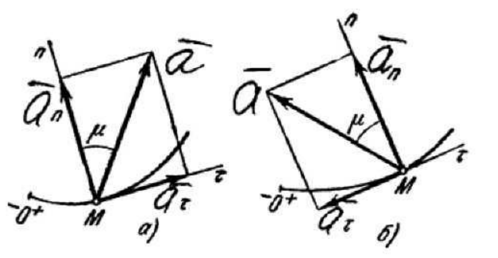

Рис.6

Отложим вдоль касательной M_τ и главной нормали Мп векторы $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$, численно равные a_τ и an (рис. 6). Эти векторы изображают касательную и нормальную составляющие ускорения точки. При этом составляющая $\overline{a}_n$ будет всегда направлена в сторону вогнутости кривой (величина а,, всегда положительна), а составляющая $\overline{a}_\tau$ может быть направлена или в положительном, или в отрицательном направлении оси M_τ в зависимости от знака проекции a_τ (см. рис. 6, а и б).

Вектор ускорения точки $\overline{a}$ изображается диагональю параллелограмма, построенного на составляющих $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$. Так как эти составляющие взаимно перпендикулярны, то по модулю:

$$a = \sqrt{a^2_\tau + a^2_n} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)}.$$

Некоторые частные случаи движения точки.

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые частные случаи движения точки.

1. Прямолинейное движение. Если траекторией точки является прямая линия, то $\rho = \infty$. Тогда $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ и все ускорение точки равно одному только касательному ускорению:

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Так как в данном случае скорость изменяется только численно, то отсюда заключаем, что касательное ускорение характеризует изменение скорости по численной величине.

2. Равномерное криволинейное движение. Равномерным называется такое криволинейное движение точки, в котором численная величина скорости все время остается постоянной:

v=const. Тогда $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ и все ускорение точки равно одному только нормальному:

$$a = a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Вектор ускорения $\overline{a}$ направлен при этом все время по нормали к траектории точки.

Так как в данном случае ускорение появляется только за счет изменения направления скорости, то отсюда заключаем, что нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Найдем закон равномерного криволинейного движения.

Из формулы $\frac{ds}{dt} = v$ имеем $ds = vdt$.

Пусть в начальный момент (t=0) точка находится от начала отсчета на расстоянии s0. Тогда, беря от левой и правой части равенства определенные интегралы в соответствующих пределах, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v dt \quad \text{или} \quad s - s_0 = vt,$$

так как v=const. Окончательно находим закон равномерного криволинейного движения в виде

$$s = s_0 + vt.$$

Если s0=0, то s даст путь, пройденный точкой за время t. Следовательно, при равномерном движении путь, пройденный точкой, расчет пропорционального времени, а скорость движения равна отношению пути ко времени

$$s = vt, v = \frac{s}{t}.$$

3. Равномерное прямолинейное движение. В этом случае $a_n = a_\tau = 0$, а значит и a=0. Заметим, что единственным движением, в котором ускорение точки все время равно нулю, является равномерное прямолинейное движение.
4. Равнопеременное криволинейное движение. Равнопеременным называется такое криволинейное движение точки, при котором касательное ускорение остается все время величиною постоянной: $a_\tau = const$. Найдем закон этого движения, считая, что при t=0

s=s0, a v=v0, где v0 - начальная скорость точки. Согласно формуле $\frac{dv}{dt} = w_\tau$ имеем $dv = a_\tau dt$.

Так как $a_\tau = const$, то, беря от обеих частей последнего равенства интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$v = v_0 + a_\tau t.$$

Формулу представим в виде

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_\tau t \quad \text{или} \quad ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Вторично интегрируя, найдем закон равнопеременного криволинейного движения точки в виде

$$s = s_0 + v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Если при криволинейном движении точки модуль скорости возрастает, то движение называется ускоренным, а если убывает - замедленным.

Лекция 6.

Поступательное и вращательное движения твердого тела

Поступательное движение

В кинематике, как и в статистике, будем рассматривать все твердые тела как абсолютно твердые. Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;
2. определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Начнем с рассмотрения поступательного движения твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Приведем примеры.

1. Кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямыми линиями.
2. Спарник АВ (рис. 7) при вращении кривошипов О1А и О2В (О1А и О2В) также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному направлению). Точки спарника движутся при этом по окружностям.

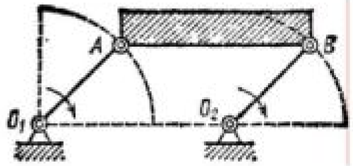

Рис 7

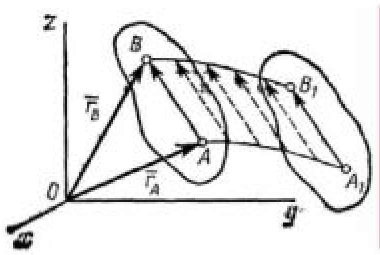

Рис.8

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: при поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Для доказательства рассмотрим твердое тело, совершающее поступательное движение относительно системы отсчета Oxyz. Возьмем в теле две произвольные точки А и В, положения которых в момент времени t определяются радиусами-векторами $\bar r_A$ и $\bar r_B$ (рис. 8).

Проведем вектор $\overline{AB}$, соединяющий эти точки. Тогда

$$\bar r_B = \bar r_A + \overline{AB}.$$

При этом длина АВ постоянна, как расстояние между точками твердого тела, а направление АВ остается неизменным, так как тело движется поступательно. Таким образом, вектор АВ во все время движения тела остается постоянным (AB=const). Вследствие этого, траектория точки В получается из траектории точки А параллельным смещением всех ее точек на постоянный вектор $\overline{AB}$. Следовательно, траектории точек А и В будут действительно одинаковыми (при наложении совпадающими) кривыми.

Для нахождения скоростей точек А и В продифференцируем обе части равенства по времени. Получим

$$d\bar r_B/dt = d\bar r_A/dt + d(\overline{AB})/dt.$$

Но производная от постоянного вектора АВ равна нулю. Производные же от векторов rA и rB по времени дают скорости точек А и В. В результате находим, что

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B,$$

т. е. что скорости точек А и В тела в любой момент времени одинаковы и по модулю, и по направлению. Беря от обеих частей полученного равенства производные по времени:

$$d\bar{v}_A/dt = d\bar{v}_B/dt \text{ или } \bar{a}_A = \bar{a}_B.$$

Следовательно, ускорения точек А и В тела в любой момент времени тоже одинаковы по модулю и направлению.

Так как точки А и В были выбраны произвольно, то из найденных результатов следует, что у всех точек тела их траектории, а также скорости и ускорения в любой момент времени будут одинаковы. Таким образом, теорема доказана.

Из теоремы следует, что поступательное движение твердого тела определяется движением какой-нибудь одной из его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к задаче кинематике точки, нами уже рассмотренной.

- При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\bar{v}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\bar{a}$ - ускорением поступательного движения тела. Векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ можно изображать приложенными в любой точке тела.

Заметим, что понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела, как мы увидим, движутся с разными скоростями и ускорениями, и термины «скорость тела» или «ускорение тела» для этих движений теряют смысл.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными (рис. 10).

Проходящая через неподвижные точки А и В прямая А В называется осью вращения.

Так как расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, то очевидно, что при вращательном движении все точки, принадлежащие оси вращения, будут неподвижны, а все остальные точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

Для определения положения вращающегося тела проведем через ось вращения, вдоль которой направим ось AZ, полуплоскость - неподвижную и полуплоскость , врезанную в само тело и вращающуюся вместе с ним (см. рис. 9). Тогда положение тела в любой момент времени однозначно определится взятым с соответствующим знаком углом φ между этими полуплоскостями, который назовем углом поворота тела. Будем считать угол φ положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против хода часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси AZ), и отрицательным,

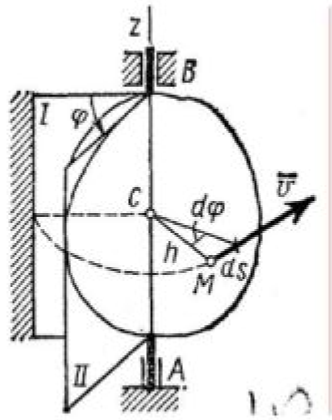

Рис 9

если по ходу часовой стрелки. Измерять угол φ будем всегда в радианах. Чтобы знать положение тела в любой момент времени, надо знать зависимость угла φ от времени t, т. е.

$$\varphi = f(t).$$

Уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость ω и угловое ускорение ε.

Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то численно средней угловой скоростью тела за этот промежуток времени будет $\omega_{ср} = \Delta\varphi / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ или } \omega = \dot{\varphi}.$$

Таким образом, числовое значение угловой скорости тела в данный момент времени равно первой производной от угла поворота по времени. Знак ω определяет направление вращения тела. Легко видеть, что когда вращение происходит против хода часовой стрелки, ω>0, а когда по ходу часовой стрелки, то ω<O.

Размерность угловой скорости 1/T (т. е. 1/время); в качестве единицы измерения обычно применяют рад/с или, что то же, 1/с (с-1), так как радиан - величина безразмерная.

Угловую скорость тела можно изобразить в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен $|\overline{\omega}|$ и который направлен вдоль оси вращения тела в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки (рис.11). Такой вектор определяет сразу и модуль угловой скорости, и ось вращения, и направление вращения вокруг этой оси.

Угловое ускорение характеризует изменение с течением времени угловой скорости тела. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость тела изменяется на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числовое значение среднего углового ускорения тела за этот промежуток времени будет $\varepsilon_{ср} = \Delta\omega / \Delta t$. В пределе при $\Delta t \to 0$ найдем,

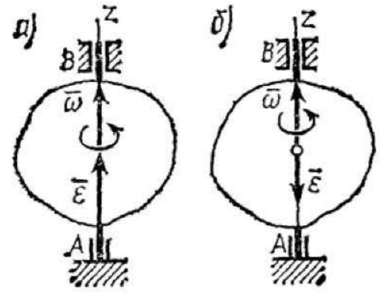

Рис 10

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \text{ или } \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\omega}.$$

Таким образом, числовое значение углового ускорения, тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота тела по времени.

Размерность углового ускорения 1/Т2 (1/время2); в качестве единицы измерения обычно применяется рад/с2 или, что то же, 1/с2 (с-2).

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает, - замедленным. Легко видеть, что вращение будет ускоренным, когда величины ω и ε имеют одинаковые знаки, и замедленным, - когда разные.

Угловое ускорение тела (по аналогии с угловой скоростью) можно также изобразить в виде вектора ε, направленного вдоль оси вращения. При этом

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt.$$

Направление ε совпадает с направлением ω, когда тело вращается ускоренно и (рис.10,а), противоположно ω при замедленном вращении (рис.10,б),

РАВНОМЕРНОЕ И РАВНОПЕРЕМЕННОЕ ВРАЩЕНИЯ

Если угловая скорость тела остается во все время движения постоянной (ω=const), то вращение тела называется равномерным. Найдем закон равномерного вращения. Из формулы $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ имеем $d\varphi = \omega dt$.

Отсюда, считая, что в начальный момент времени t=0 угол $\varphi = \varphi_0$, и беря интегралы слева от φ_0 до φ, а справа от 0 до t, получим окончательно

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Из равенства следует, что при равномерном вращении, когда $\varphi_0 = 0$

$$\varphi = \omega t \text{ и } \omega = \varphi / t.$$

- В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину через n об/мин. Найдем зависимость между n об/мин и ω 1/с. При одном обороте тело повернется на угол 2π, а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот делается за время t=1 мин= 60 с. Из равенства следует тогда, что

$$\omega = \pi \cdot n / 30 \approx 0.1n.$$

Если угловое ускорение тела во все время движения остается постоянным $(\varepsilon = \text{const})$, то вращение называется равнопеременным. Найдем закон равнопеременного вращения, считая, что в начальный момент времени t=0 угол $\varphi = \varphi_0$, а угловая скорость $\omega = \omega_0$ (ω_0 - начальная угловая скорость).

Из формулы $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ имеем $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Интегрируя левую часть в пределах от ω_0 до ω, а правую - в пределах от 0 до t, найдем $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$,

$d\varphi / dt = \omega_0 + \varepsilon t$ или $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$.

Вторично интегрируя, найдем отсюда закон равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \cdot t^2 / 2.$$

Если величины ω и ε имеют одинаковые знаки, то вращение будет равноускоренным, а если разные - равнозамедленным.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

- Установив характеристики движения всего тела в целом, перейдем к изучению движения отдельных его точек.

1. Скорости точек тела. Рассмотрим какую-нибудь точку М твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения (см.рис.9). При вращении тела точка М будет описывать окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр С лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка М при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = hd\varphi$. Тогда числовое значение скорости точки будет равно отношению ds к dt, т.е

$$v = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} \text{ или } v = h\omega.$$

Скорость $\bar{v}$ в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще линейной или окружной скоростью точки М.

Таким образом, числовое значение скорости тонки вращающегося. твердого тела равно произведению угловой скорости тела на. расстояние от этой точки до оси вращения.

Направлена скорость по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и точку М.

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент времени одно и то же значение, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения.

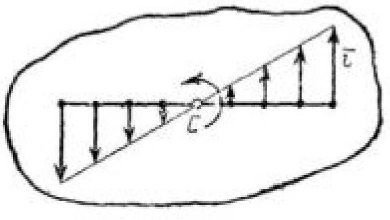

Рис.11

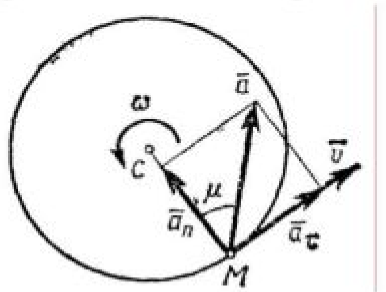

Рис. 12

Ускорения точек тела. Для нахождения ускорения точки М воспользуемся формулами $a_\tau = dv / dt$, $a_n = v^2 / \rho$.

В нашем случае ρ=h. Подставляя значение v в выражения a_τ и an , получим:

$$a_\tau = h\frac{d\omega}{dt},\ a_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

или окончательно:

$$a_\tau = h\varepsilon,\ a_n = h\omega^2.$$

Касательная составляющая ускорения a_τ направлена по касательной к траектории (в сторону движения при ускоренном вращении тела и в обратную сторону при, замедленном); нормальная составляющая a_n всегда направлена по радиусу МС к оси вращения (рис. 12). Полное ускорение точки М будет $a = \sqrt{a^2{}_\tau + a^2{}_n}$ или $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом μ, который вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\mu = a_\tau / a_n$. Подставляя сюда значения a_τ и a_n, получаем $\operatorname{tg}\mu = \varepsilon / \omega^2$

Так как w и ε имеют в данный момент времени для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения и образуют в данный момент времени один и тот же угол μ с радиусами описываемых ими окружностей. Поле ускорений точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис.14.

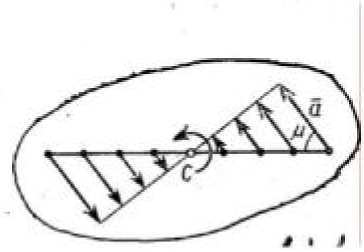

Рис 13

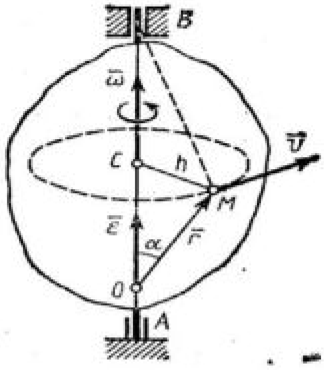

Рис 14

2. Векторы скорости и ускорения точек тела. Чтобы найти выражения непосредственно для векторов v и a, проведем из произвольной точки O оси AB радиус-вектор r точки M (рис. 14). Тогда h=r sin a и по формуле

$$|v| = |\omega|h = |\omega|r \cdot \sin\alpha \quad \text{или} \quad |v| = |\bar{\omega}\times\bar{r}|.$$

Таким образом, модуль векторного произведения $\bar{\omega}\times\bar{r}$ равен модулю скорости точки M.

Направления векторов $\bar{\omega}\times\bar{r}$ и v тоже совпадают (оба они перпендикулярны плоскости OMB) и размерности их одинаковы. Следовательно, $\bar{v} = \bar{\omega}\times\bar{r}$ - формула Эйлера, т.е. вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Модуль 4

Лекция 7

- Модуль 4 состоит из двух лекций, в которых рассматриваются следующие вопросы:

1. Плоскопараллельное движение твердого тела.
2. Уравнения плоскопараллельного движения.
3. Разложение движения на поступательное и вращательное.
4. Определение скоростей точек плоской фигуры.
5. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.
6. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей.
7. Решение задач на скорости.
8. Определение ускорений точек плоской фигуры.
9. Решение задач на ускорения.
10. Мгновенный центр ускорений.
11. Сложное движение точки.
12. Относительное, переносное и абсолютное движения.
13. Теорема сложения скоростей.
14. Теорема сложения ускорений.
15. Цилиндрические зубчатые передачи.
16. Сложение поступательного и вращательного движений.
17. Винтовое движение.

Изучение данных вопросов необходимо в дальнейшем для динамики плоского движения твердого тела, динамики относительного движения материальной точки, для решения задач в дисциплинах «Теория машин и механизмов» и «Детали машин».

Плоскопараллельное движение твердого тела

Уравнения плоскопараллельного движения

Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при, котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости П (рис. 15). Плоское движение совершают многие части механизмов и машин, например катящееся колесо на прямолинейном участке пути, шатун в кривошипно-ползунном механизме и др. Частным случаем плоскопараллельного движения является вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

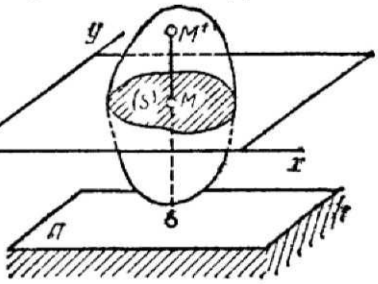

Рис 15

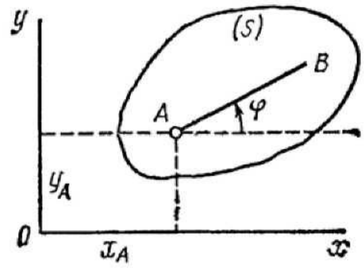

Рис 16

Рассмотрим сечение S тела какой-нибудь плоскости Оху, параллельной плоскости П (рис.15). При плоскопараллельном движении все точки тела, лежащие на прямой ММ , перпендикулярной течению S, т. е. плоскости П, движутся тождественно.

Отсюда заключаем, что для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости Оху сечение S этого тела или некоторая плоская фигура S. Поэтому в дальнейшем вместо плоского движения тела будем рассматривать движение плоской фигуры S в ее плоскости, т. е. в плоскости Оху.

Положение фигуры S в плоскости Оху определяется положением какого-нибудь проведенного на этой фигуре отрезка АВ (рис. 17). В свою очередь положение отрезка АВ можно определить, зная координаты ха, уа точки А и угол φ, который отрезок АВ образует с осью х. Точку А, выбранную для определения положения фигуры S, будем в дальнейшем называть полюсом.

- При движении фигуры величины ха, уА и φ будут изменяться. Чтобы знать закон движения, т. е. положение фигуры в плоскости Оху в любой момент времени, надо знать зависимости

$$X_A = f_1(t), Y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t)$$

Уравнения, определяющие закон происходящего движения, называются уравнениями движения плоской фигуры в ее плоскости. Они же являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела

Первые два из уравнений движения определяют то движение, которое фигура совершала бы при φ=const; это, очевидно, будет поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А. Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $X_A = \text{const}$ и $Y_A = \text{const}$, т. е. когда полюс А неподвижен; это будет вращение фигуры вокруг полюса Л. Отсюда можно заключить, что в общем случае движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса.

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения, равные скорости и ускорению полюса

$\left(\overline{v}_{пост} = \overline{v}_A, \overline{a}_{пост} = \overline{a}_A\right)$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг полюса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Было отмечено, что движение плоской фигуры можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся со скоростью vA полюса А, и из вращательного движения вокруг этого полюса. Покажем, что скорость любой точки М фигуры складывается геометрически из скоростей, которые точка получает в каждом из этих движений.

В самом деле, положение любой точки М фигуры определяется по отношению к осям Оху радиусом-вектором $\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{r}$ (рис. 18), где $\overline{r}_A$ - радиус-вектор полюса А, $\overline{r} = \overline{AM}$ - вектор, определяющий положение точки М относительно осей Axy', перемещающихся вместе с полюсом А поступательно (движение фигуры по отношению к этим осям представляет собой вращение вокруг полюса А). Тогда

$$\overline{v}_M = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{r}'}{dt}.$$

В полученном равенстве величина $d\overline{r}_A / dt = \overline{v}_A$ есть скорость полюса А; величина же dr'/dt равна скорости $\overline{v}_{MA}$, которую точка М получает при $\overline{r}_A$=const, т. е. относительно осей Ax'y', или, иначе говоря, при вращении фигуры вокруг полюса А. Таким образом, из предыдущего равенства действительно следует, что

$$\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA}.$$

Скорость $\overline{v}_{MA}$, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг полюса А:

$$v_{MA} = \omega MA \qquad \left(\overline{v}_{MA} \perp \overline{MA}\right),$$

где ω - угловая скорость фигуры.

Таким образом, скорость любой точки М плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки А, принятой за полюс, и скорости, которую точка М получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление скорости $\overline{v}_M$ находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.18).

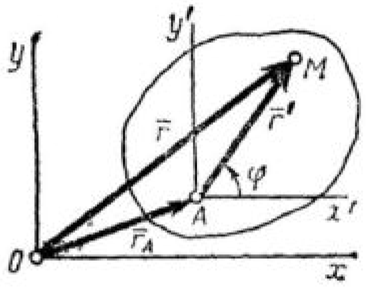

Рис 17

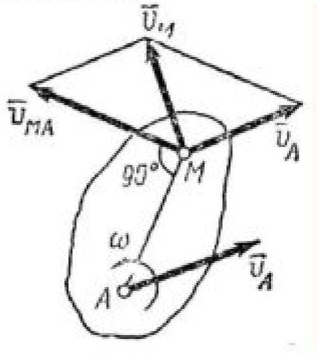

Рис 18

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ДВУХ ТОЧЕК ТЕЛА

Определение скоростей точек плоской фигуры (или тела, движущегося плоскопараллельно) связано обычно с довольно сложными расчетами. Однако можно получить ряд других, практически более удобных и простых методов определения скоростей точек фигуры (или тела).

Один из таких методов дает теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу. Рассмотрим какие-нибудь две точки A и B плоской фигуры (или тела). Принимая точку A за полюс (рис.19), получаем $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$. Отсюда, проектируя обе части равенства на ось, направленную по AB, и учитывая, что вектор $\overline{v}_{BA}$ перпендикулярен AB, находим

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha,$$

и теорема доказана.

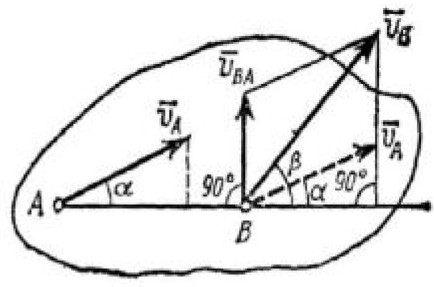

Рис.19

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ С ПОМОЩЬЮ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ

Другой простой и наглядный метод определения скоростей точек плоской фигуры (или тела при плоском движении) основан на понятии о мгновенном центре скоростей.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Легко убедиться, что если фигура движется непоступательного такая точка в каждый момент времени t существует и притом единственная. Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$, не параллельные друг другу (рис.20). Тогда точка P, лежащая на пересечении перпендикуляров Aa вектору га и BЬ к вектору vB, и будет мгновенным центром скоростей так как Vp=0. В самом деле, если допустить, что Vp=0, то по теореме о проекциях скоростей вектор Vp должен быть одновременно перпендикулярен и AP, (так как $\overline{v}_A \perp AP$) и BP (так как $\overline{v}_B \perp BP$), что невозможно. Из той же теоремы видно, что никакая другая точка фигуры в этот момент времени не может иметь скорость, равную нулю.

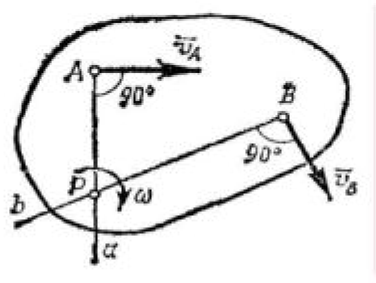

Рис.20

Если теперь в момент времени t взять точку P за полюс, то скорость точки A будет

$$\overline{v}_A = \overline{v}_P + \overline{v}_{PA} = \overline{v}_{PA},$$

так как Vp=0. Аналогичный результат получается для любой другой точки фигуры. Следовательно, скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей. При этом

$v_A = \omega PA \quad (\bar{v}_A \perp PA);$

$v_B = \omega PB$, $(\bar{v}_B \perp PB)$ и т.д.

Из равенств, следует еще, что

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB},$$

т.е. что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от МЦС.

Полученные результаты приводят к следующим выводам.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ каких-нибудь двух точек А и В плоской фигуры (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных из точек А и В к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).
2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры, надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки А фигуры и направление скорости другой ее точки В. Тогда, восставив из точек А и В перпендикуляры к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, построим мгновенный центр скоростей Р и по направлению $\bar{v}_A$ определим направление поворота фигуры. После этого, зная vA, найдем скорость vM любой точки М плоской фигуры. Направлен вектор $\bar{v}_M$ перпендикулярно РМ в сторону поворота фигуры.
3. Угловая скорость ω плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию от мгновенного центра скоростей Р:

$$\omega = \frac{v_B}{PB}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи определения мгновенного центра скоростей.

а)Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного, то точка Р катящегося тела, касающаяся неподвижной поверхности (рис.21), имеет в данный момент времени вследствие отсутствия скольжения скорость, равную нулю (uP=o), и, следовательно, является мгновенным центром скоростей. Примером служит качение колеса по рельсу.

б)Если скорости точек А и В плоской фигуры параллельны друг другу, причем линия АВ не перпендикулярна $\bar{v}_A$ (рис.22,а), то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны $\bar{v}_A$. При этом из теоремы о проекциях скоростей следует, что $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$, т. е. $v_B = v_A$; аналогичный результат получается для всех других точек. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости всех точек фигуры в данный момент времени равны друг другу и по модулю, и по направлению, т. е. фигура

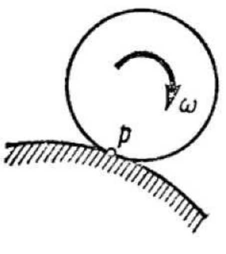

Рис 21

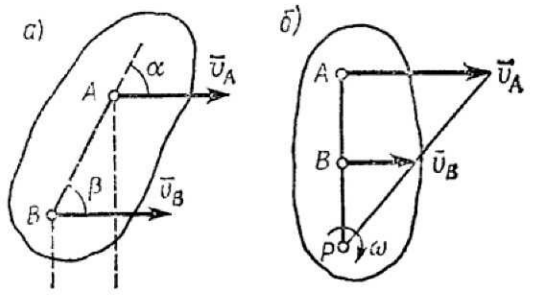

Рис 22

имеет мгновенное поступательное распределение скоростей (такое состояние движения тела называют еще мгновенно поступательным). Угловая скорость w тела в этот момент времени, как видно равна нулю.

в) Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна $\overline{v}_A$, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рис. 22, б. Справедливость построений следует из пропорции. В этом случае, в отличие от предыдущих, для нахождения центра p надо кроме направлений знать еще и модули скоростей v_B и v_A.

г) Если известны вектор скорости $\overline{v}_B$ какой-нибудь точки B фигуры и ее угловая скорость ω, то положение мгновенного центра скоростей P, лежащего на перпендикуляре к $\overline{v}_B$ (см.рис.22), можно найти как $BP = v_B / \omega$.

Решение задач на скорости

Для определения искомых кинематических характеристик (угловой скорости тела или скоростей его точек) надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки и направление скорости другой точки сечения этого тела. С определения этих характеристик по данным задачи и следует начинать решение.

Механизм, движение которого исследуется, надо изображать на чертеже в том положении, для которого требуется определить соответствующие характеристики. При расчете следует помнить, что понятие о мгновенном центре скоростей имеет место для данного твердого тела. В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое непоступательное движущееся тело имеет в данный момент времени свой мгновенный цент скоростей P и свою угловую скорость.

Определение ускорений точек плоской фигуры

Покажем, что ускорение любой точки M плоской фигуры (так же, как и скорость) складывается из ускорений, которые точка получает при поступательном и вращательном движениях этой фигуры. Положение точки м по отношению к осям OXY (см.рис.17) определяется радиусом-вектором $\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{r}'$, где $\overline{r}' = \overline{AM}$. Тогда

$$\overline{a}_M = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\overline{r}'}{dt^2}.$$

В правой части этого равенства первое слагаемое есть ускорение $\overline{a}_A$ полюса A, а второе слагаемое определяет ускорение $\overline{a}_{AM}$, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг полюса A. Следовательно,

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}.$$

Значение $\overline{a}_{AM}$, как ускоерния точки вращающегося твердого тела, определяется как

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2},\ tg\mu = \varepsilon / \omega^2,$$

где ω и ε - угловая скорость и угловое ускорение фигуры, а μ - угол между вектором $\overline{a}_{MA}$ и отрезком MA (рис.23).

Таким образом, ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса. Модуль и направление ускорения $\overline{a}_M$, находятся построением соответствующего параллелограмма (рис.23).

Однако вычисление aM с помощью параллелограмма, изображенного на рис.23, усложняет расчет, так как предварительно надо будет находить значение угла μ, а затем - угла между векторами $\overline{a}_{MA}$ и $\overline{a}_A$. Поэтому при решении задач удобнее вектор $\overline{a}_{MA}$ заменять его касательной $(\overline{a}^{\tau}_{MA})$ и нормальной $(\overline{a}^{n}_{MA})$ составляющими и представить в виде

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{MA} + \overline{a}^{n}_{MA}.$$

При этом вектор $\overline{a}^{\tau}_{MA}$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если оно замедленное; вектор $\overline{a}^{n}_{MA}$ всегда направлен от точки M к полюсу A (рис.24). Численно же

$$a^{\tau}_{MA} = AM\varepsilon,$$

$$a^{n}_{MA} = AM\omega^2.$$

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной $\overline{a}^{\tau}_A$ и нормальной $\overline{a}^{n}_A$ составляющих, тогда

$$\overline{a}_M = \overline{a}^{\tau}_A + \overline{a}^{n}_A + \overline{a}^{\tau}_{MA} + \overline{a}^{n}_{MA}.$$

Наконец, когда точка M движется криволинейно и ее траектория известна, то $\overline{a}_M$ можно заменить суммой $\overline{a}^{\tau}_M + \overline{a}^{n}_M$.

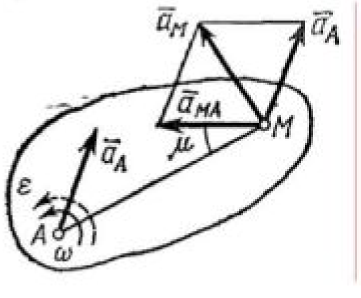

Рис 23

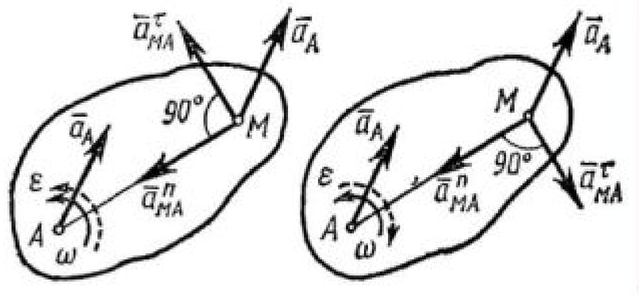

Рис.24

Решение задач на ускорения

Ускорение любой точки плоской фигуры в данный момент времени можно найти, если известны: 1) векторы скорости $\overline{v}_A$ и ускорения $\overline{a}_A$ какой-нибудь точки A этой фигуры в данный момент; 2) траектория какой-нибудь другой точки B фигуры. В ряде случаев вместо траектории второй точки фигуры достаточно знать положение мгновенного центра скоростей.

Тело (или механизм) при решении задач надо изображать в том положении, для которого требуется определить ускорение соответствующей точки. Расчет начинается с определения по данным задачи скорости и ускорения точки, принимаемой за полюс.

План решения (если заданы скорость и ускорение одной точки плоской фигуры и направления скорости и ускорения другой точки фигуры):

1. Находим мгновенный центр скоростей, восставляя перпендикуляры к скоростям двух точек плоской фигуры.
2. Определяем мгновенную угловую скорость фигуры.
3. Определяем центростремительное ускорение точки вокруг полюса. , приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.
4. Находим модуль вращательного ускорения, приравнивая нулю сумму проекций всех слагаемых ускорений на ось, перпендикулярную к известному направлению ускорения.
5. Определяем мгновенное угловое ускорение плоской фигуры по найденному вращательному ускорению.
6. Находим ускорение точки плоской фигуры при помощи формулы распределения ускорений.

При решении задач можно применять «теорему о проекциях векторов ускорений двух точек абсолютно твердого тела»:

- «Проекции векторов ускорений двух точек абсолютно твердого тела, которое совершает плоскопараллельное движение, на прямую, повернутую относительно прямой, проходящей через эти две точки, в плоскости движения этого тела на угол

$$\delta = arctg(\omega^2 / |\varepsilon|)$$

в сторону углового ускорения, равны».

- Эту теорему удобно применять, если известны ускорения только двух точек абсолютно твердого тела как по модулю, так и по направлению, известны только направления векторов ускорений других точек этого тела (геометрические размеры тела не известны), не известны ω и ε – соответственно проекции векторов угловой скорости и углового ускорения этого тела на ось, перпендикулярную плоскости движения, не известны скорости точек этого тела.
- Известны еще 3 способа определения ускорений точек плоской фигуры:

1. Способ основан на дифференцировании дважды по времени законов плоскопараллельного движения абсолютно твердого тела.
2. Способ основан на использовании мгновенного центра ускорений абсолютно твердого тела (о мгновенном центре ускорений абсолютно твердого тела будет рассказано ниже).
3. Способ основан на использовании плана ускорений абсолютно твердого тела.

МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

При непоступательном движении плоской фигуры у нее в каждый момент времени имеется точка Q, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений. Определяется положение центра Q, если известны ускорение $\bar{a}_A$ какой-нибудь точки A фигуры и величины ω и ε, следующим путем:

1. находим значение угла μ, из формулы $tg\mu = \varepsilon / \omega^2$;

2. от точки А под углом μ, к вектору $\overline{a}_A$ проводим прямую AE (рис.25); при этом прямая AE должна быть отклонена от $\overline{a}_A$ в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным, и против вращения, если оно является замедленным, т. е. в сторону направления углового ускорения ε;

3. откладываем вдоль линии AE отрезок AQ, равный $AQ = a_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

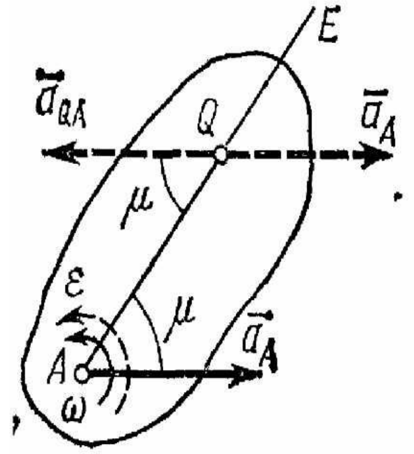

Рис.25

Построенная таким путем точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, известно что

$$\overline{a}_Q = \overline{a}_A + \overline{a}_{QA},$$

где численно $a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Подставляя сюда значение AQ находим, что $a_{QA} = a_A$. Кроме того, вектор $\overline{a}_{QA}$ должен образовывать с линией AQ угол μ, следовательно, вектор $\overline{a}_{QA}$ параллелен $\overline{a}_A$, но направлен в противоположную сторону. Поэтому $\overline{a}_{QA} = -\overline{a}_A$ и $\overline{a}_Q = 0$.

Если точку Q выбрать за полюс, то так как $\overline{a}_Q = 0$, ускорение любой точки M тела, будет

$$\overline{a}_M = \overline{a}_Q + \overline{a}_{MQ} = \overline{a}_{MQ}.$$

При этом численно

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Следовательно, ускорения точек плоской фигуры определяются в данный момент времени так, как если бы движение фигуры, было вращением вокруг мгновенного центра ускорений Q. При этом

$$a_M / MQ = a_A / AQ = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

т. е. ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений. Картина распределения ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени показана на рис.26.

Следует иметь в виду, что положения мгновенного центра скоростей P и мгновенного центра ускорений Q в данный момент времени не совпадают. Например, если колесо катится по прямолинейному рельсу (см. рис.27), причем скорость его центра С постоянна (uC=const), то мгновенный центр скоростей находится в точке P (vP=0), но при этом, как было показано $a_P \neq 0$; следовательно, точка P не является одновременно мгновенным центром ускорений.

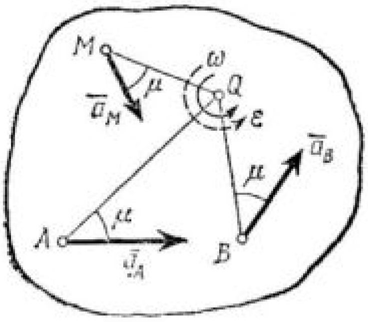

Рис 26

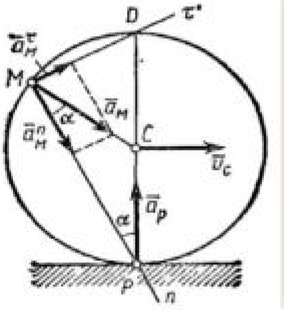

Рис.27

Мгновенный центр ускорений в этом случае находится, очевидно, в точке C, так как она движется равномерно и прямолинейно и aC=0. Центры скоростей и ускорений совпадают тогда, когда фигура (тело) вращается вокруг неподвижной оси.

Понятием о мгновенном центре ускорений удобно пользоваться при решении некоторых задач.

Лекция 8.

Сложное движение точки

Относительное, переносное и абсолютное движения

До сих пор мы изучали движение точки или тела по отношению к одной заданной системе отсчета. Однако в ряде случаев при решении задач механики оказывается целесообразным (а иногда и необходимым) рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной или условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называют составным или сложным. Например, шар, катящийся по палубе движущегося парохода, можно считать совершающим по отношению к берегу сложное движение, состоящее из качения по отношению к палубе (подвижная система отсчета), и движение вместе с палубой парохода по отношению к берегу (неподвижная система отсчета). Таким путем сложное движение шара разлагается на два более простых и более легко исследуемых.

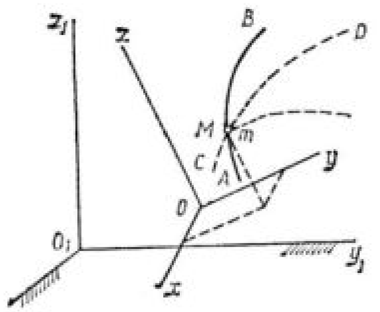

Рис.28

Рассмотрим точку M, движущуюся по отношению к подвижно системе отсчета Oxyz, которая в свою очередь как-то движется относительно другой системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, которую называем основной или условно неподвижной (рис. 28). Каждая из этих систем отсчета связана, конечно, с определенным телом, на чертеже не показанным. Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой М по отношению к подвижной системе отсчета (к осям Oxyz), называется относительным движением (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними). Траектория АВ, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией. Скорость точки М по отношению к осям Oxyz называется относительной скоростью (обозначается $\bar{v}_r$), а ускорение - относительным ускорением (обозначается $\bar{a}_r$). Из определения следует, что при вычислении $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$ можно движение осей Oxyz во внимание не принимать (рассматривать их как неподвижные).
2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета Oxyz (и всеми неизменно связанными с нею точками пространства) по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки М переносным движением.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями Oxyz точки m, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка М, называется переносной скоростью точки М в этот момент (обозначается $\bar{v}_e$), а ускорение этой точки т - переносным ускорением точки М (обозначается $\bar{a}_e$). Таким образом,

$$\bar{v}_{пер} = \bar{v}_m, \bar{a}_{пер} = \bar{a}_m.$$

Если представить себе, что относительное движение точки происходит по поверхности (или внутри) твердого тела, с которым жестко связаны подвижные оси Oxyz, то переносной скоростью (или ускорением) точки М в данный момент времени будет скорость (или ускорение) той точки т тела, с которой в этот момент совпадает точка М.

3. Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется абсолютным или сложным. Траектория CD этого движения называется абсолютной траекторией, скорость - абсолютной скоростью (обозначается $\bar{v}_{аб}$) и ускорение - абсолютным ускорением (обозначается $\bar{a}_{аб}$).

В приведенном выше примере движение шара относительно палубы парохода будет относительным, а скорость - относительной скоростью шара; движение парохода по отношению к берегу будет для шара переносным движением, а скорость той точки палубы, которой в данный момент времени касается шар будет в этот момент его переносной скоростью; наконец, движение шара по отношению к берегу будет его абсолютным движением, а скорость - абсолютной скоростью шара

Теорема сложения скоростей

Пусть некоторая точка М совершает движение по отношению к системе отсчета Oxyz, которая сама движется произвольным образом по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$, (рис.29). Положение подвижной системы отсчета может быть определено, если задать положение точки О радиусом-вектором r0, проведенным из начала неподвижной системы отсчета, и направления единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ подвижных осей OX, OY, OZ.

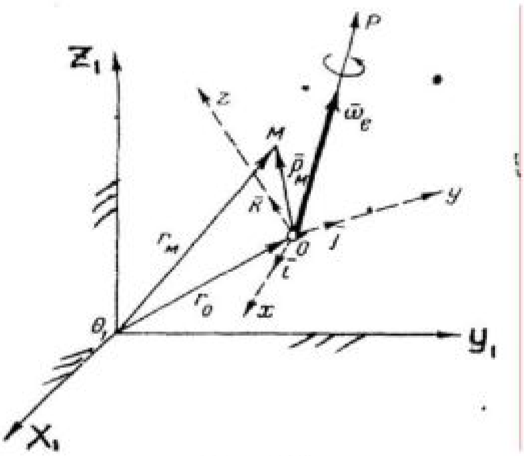

Рис.29

Произвольное переносное движение подвижной системы отсчета слагается из поступательного движения со скоростью v0 точки O и движения вокруг мгновенной оси вращения OP, походящей через точку O, с мгновенной угловой скоростью $\overline{\omega}_e$. Вследствие переносного движения подвижной системы отсчета радиус-вектора $\bar{r}$ 0 и направления единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ изменяются. Если векторы $\bar{r}$ 0, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ заданы в функции времени, то переносное движение подвижной системы отсчета вполне определено.

Положение точки M по отношению к подвижной системе отсчета можно определить радиусом-вектором $\overline{\rho}_M$

$$\overline{\rho}_M = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

где координаты x,y,z точки M изменяются с течением времени вследствие движения точки M относительно подвижной системы отсчета. Если радиус-вектор $\overline{\rho}$ M задан в функции времени, то относительное движение точки M, т.е. движение этой точки относительно подвижной системы отсчета, задано.

Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, может быть определено радиусом-вектором rM. Из рис.30 видно, что

$$\bar{r}_M = \bar{r}_0 + \overline{\rho}_M = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

Если относительные координаты x,y,z точки M и векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ определены в функции времени, то слагающееся из относительного и переносного движений составное движение точки M, т.е. движение этой точки по отношению к неподвижной системе отсчета, также надо считать заданным.

Скорость составного движения точки M, или абсолютная скорость этой точки, равна, очевидно, производной от радиуса-вектора rM точки м по времени t

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_M}{dt}.$$

Поэтому, дифференцируя равенство (1) по времени t, получим

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на две группы по следующему признаку.

К первой группе отнесем те слагаемые, которые содержат производные только от относительных координат x,y и z, а ко второй - те слагаемые, которые содержат производные от векторов $\bar{r}_0$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т.е. от величин, изменяющихся только вследствие переносного движения подвижной системы отсчета

$$\bar{v}_r = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \tag{3}$$

$$\bar{v}_e = \bar{r}_0 + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \tag{4}$$

Каждая из групп слагаемых, обозначенных через vr и ve, представляет собой, по крайней мере, по размерности некоторую скорость. Выясним физический смысл скоростей $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$.

Скорость $\bar{v}_r$, как это следует из равенства (3), вычисляется в предположении, что изменяются только относительные координаты x,y,z точки М, но векторы $\bar{r}_0$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ остаются постоянными, т.е. подвижная система отсчета Oxyz как бы условно считается неподвижной. Итак скорость $\bar{v}_r$ представляет собой относительную скорость точки М.

Скорость $\bar{v}_e$ вычисляется так, как будто бы точка М не двигалась относительно подвижной системы отсчета, так как производные x,y,z в равенство (4) не входят. Поэтому скорость $\bar{v}_e$ представляет собой переносную скорость точки М.

Итак,

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r \tag{5}$$

Это равенство выражает теорему сложения скоростей в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютная скорость точки М равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки.

Теорема сложения ускорений

Ускорение составного движения точки М, или абсолютное ускорение этой точки, равно, очевидно, производной от абсолютной скорости точки М по времени t

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt}$$

Поэтому, дифференцируя равенство по времени, получим

$$\bar{a}_a = \ddot{\bar{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + 2\left(\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right).$$

Разделим слагаемые правой части этого равенства на три группы.

К первой группе отнесем слагаемые, содержащие только производные от относительных координат x,y и z, но не содержащие производные от векторов $\bar{r}_0$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a}_r = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}.$$

Ко второй группе отнесем слагаемые, которые содержат только производные от векторов $\bar{r}_0$, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, но не содержащие производных от относительных координат x,y,z:

$$\bar{a}_e = \ddot{\bar{r}}_0 + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Осталась еще одна группа слагаемых, которые не могли быть отнесены ни к первой, ни ко второй, так как они содержат производные от всех переменных x,y,z, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Обозначим эту группу слагаемых через $\bar{a}_k$:

$$\bar{a}_k = 2\left(\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right).$$

Каждая из выделенных групп представляет собой, по крайней мере по размерности, некоторое ускорение. Выясним физический смысл всех трех ускорений: $\bar{a}_r, \bar{a}_e, \bar{a}_k$.

Ускорение $\bar{a}_r$, как это видно из равенства, вычисляется так, как если бы относительные координаты x,y,z изменялись с течением времени, а векторы $\bar{r}_0, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ оставались неизменными, т.е. подвижная система отсчета Oxyz как бы покоилась, а точка М двигалась. Поэтому ускорение $\bar{a}_r$ представляет собой относительное ускорение точки М. Так как ускорение (и скорость) относительного движения вычисляется в предположении, что подвижная система отсчета находится а покое, то для определения относительного ускорения (и скорости) можно пользоваться всеми правилами, изложенными ранее в кинематике точки.

Ускорение $\bar{a}_e$, как это видно из равенства, вычисляется в предположении, что сама точка М покоится по отношению к подвижной системе отсчета Oxyz (x=const, y=const, z=const) и перемещается вместе с этой системой отсчета по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$. Поэтому ускорение $\bar{a}_e$ представляет собой переносное ускорение точки М.

Третья группа слагаемых определяет ускорение $\bar{a}_k$, которое не может быть отнесено не к относительному ускорению $\bar{a}_r$, так как содержит в своем выражении производные $\frac{d\bar{i}}{dt}, \frac{d\bar{j}}{dt}, \frac{d\bar{k}}{dt}$, не к переносному ускорению $\bar{a}_e$, так как содержит в своем выражении производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Преобразуем правую часть равенства, припомнив, что

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i};\ \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j};\ \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}.$$

Подставляя эти значения производных в равенства, получим

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times x\bar{i} + \bar{\omega}_e \times x\bar{j} + \bar{\omega}_e \times x\bar{k})$$

или

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}).$$

Здесь вектор $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ есть относительная скорость $\bar{v}_r$ точки М, поэтому

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r.$$

Ускорение $\bar{a}_k$ называют ускорением Кориолиса. Ввиду того, что ускорение Кориолиса появляется в случае вращения подвижной системы отсчета, его называют еще поворотным ускорением.

С физической точки зрения появление поворотного ускорения точки объясняется взаимным влиянием переносного и относительного движений.

Итак, ускорение Кориолиса точки равно по модулю и направлению удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на относительную скорость точки.

Равенство, которое теперь можно сокращенно записать в виде

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k.$$

представляет теорему сложения ускорений в случае, когда переносное движение является произвольным: абсолютное ускорение точки равно векторной сумме переносного, относительного и поворотного ускорений. Эту теорему часто называют теоремой Кориолиса.

Из формулы следует, что модуль поворотного ускорения будет

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha,$$

где а - угол между вектором $\bar{\omega}$ е и вектором $\bar{v}$ r. Чтобы определить направление поворотного ускорения $\bar{a}_k$, нужно мысленно перенести вектор $\bar{\omega}_e$ в точку М и руководствоваться правилом векторной алгебры. Согласно этому правилу, вектор $\bar{a}$ нужно направлять перпендикулярно к плоскости, определяемой векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$, и так, чтобы, смотря с конца вектора $\bar{a}$, наблюдатель мог видеть кратчайший поворот от $\bar{\omega}_e$ к $\bar{v}_r$ происходящим против движения часовой стрелки (рис. 30).

Для определения направления $\bar{a}_K$ можно также пользоваться следующим правилом Н. Е. Жуковского: чтобы получить направление поворотного ускорения $\bar{a}_K$, достаточно составляющую $\bar{v}_1$ относительной скорости $\bar{v}_r$ точки М, перпендикулярную к вектору $\bar{\omega}_e$, повернуть (в плоскости, перпендикулярной к вектору $\bar{\omega}_e$) на прямой угол вокруг точки М в направлении переносного вращения (рис.30).

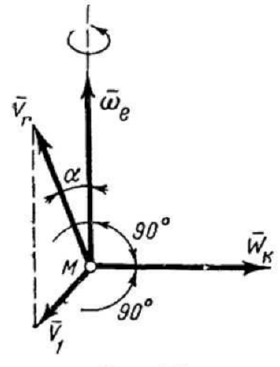

Рис.30

Если переносное движение подвижной системы отсчета есть поступательное движение, то $\bar{\omega}_e$=0 и поэтому поворотное ускорение а точки также равно нулю. Поворотное ускорение равно, очевидно, нулю и в том случае, когда $\bar{\omega}_e$ в данный момент времени обращается в нуль.

Кроме того, поворотное ускорение точки может, очевидно, обращаться в нуль, если:

а) вектор относительной скорости $\overline{v}_r$ точки параллелен вектору угловой скорости $\overline{\omega}_e$ переносного вращения, т.е. относительное движение точки происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения;

б) точка не имеет движения относительно подвижной системы отсчета или относительная скорость $\overline{v}_r$ точки в данный момент времени равна нулю ($\overline{v}_r$ =о).

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Рассмотрим основные виды этих передач.

1. Рядовой назовем передачу, в которой все оси колес, находящихся в последовательном зацеплении, неподвижны. При этом одно из колес (например, колесо 1 на рис.31) является ведущим, а остальные ведомыми.

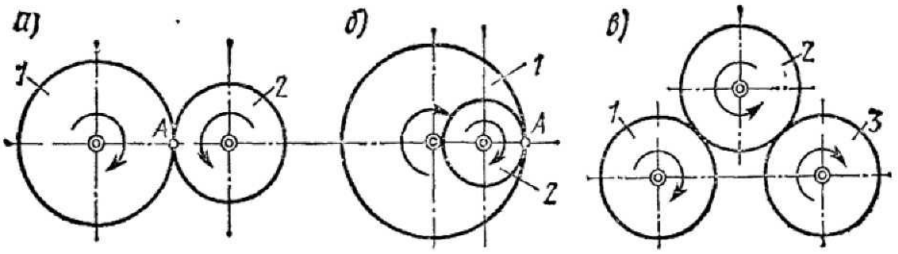

Рис.31

В случае внешнего (рис. 31, а) или внутреннего (рис. 31, б) зацепления двух колес имеем $|\omega_1|r_1 = |\omega_2|r_2$, так как скорость точки сцепления А у обоих колес одинакова. Учитывая, что число z зубцов сцепленных колес пропорционально их радиусам, а вращения колес происходят при внутреннем зацеплении в одну сторону, а при внешнем в разные, получаем

$$(\omega_1 / \omega_2)_{внеш} = -r_2 / r_1 = -z_2 / z_1; (\omega_1 / \omega_2)_{внут} = r_2 / r_1 = z_2 / z_1.$$

При внешнем зацеплении трех колес (рис. 32, в) найдем, что

$$\omega_1 / \omega_2 = -r_2 / r_1, \omega_2 / \omega_3 = -r_3 / r_2 \text{ и } \omega_1 / \omega_3 = r_3 / r_2 = z_3 / z_1.$$

Следовательно, отношение угловых скоростей крайних шестерен в этой передаче обратно пропорционально их радиусам (числу зубцов) и не зависит от радиусов промежуточных (паразитных) шестерен.

Из полученных результатов следует, что при рядовом сцеплении шестерен

$$\omega_1 / \omega_n = (-1)^k r_n / r_1 = (-1)^k z_n / z_1,$$

где k - число внешних зацеплений (в случае, изображенном на рис.31,а имеется одно внешнее зацепление; на рис.31, в - два внешних зацепления, на рис.31, б внешних зацеплений нет).

Передаточным числом данной зубчатой передачи называется величина i_{1n}, дающая отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого:

$$i_{1n} = \omega_1 / \omega_n.$$

2. Планетарной называется передача (рис.32), в которой шестерня 1 неподвижна, а оси остальных шестерен, находящихся в последовательном зацеплении, укреплены на кривошипе АВ, вращающемся вокруг оси неподвижной шестерни.

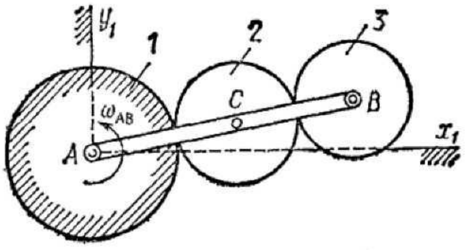

Рис.32

3. Дифференциальной называется передача, изображенная на рис. 32, если в ней шестерня 1 не является неподвижной и может вращаться вокруг своей оси А независимо от кривошипа АВ.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно производить, сообщив мысленно всей неподвижной плоскости Ax1y1 вращение с угловой скоростью -ω AB, равной по модулю и противоположной по направлению угловой скорости кривошипа АВ (метод остановки или метод Виллиса).

Тогда кривошип в этом сложном движении будет неподвижен, а любая шестерня радиуса rk будет иметь угловую скорость

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB},$$

где ωk - абсолютная угловая скорость этой шестерни по отношению к осям Ax1y1 (рис.32).

При этом оси всех шестерен будут неподвижны и зависимость между $\tilde{\omega}_k$ можно будет определить приравнивая скорости точек сцепления.

Расчет планетарных и дифференциальных передач можно также производить с помощью мгновенных центров скоростей.

Сложение поступательного и вращательного движений. Винтовое движение.

Если сложное движение тела слагается из вращательного вокруг оси Аа с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и поступательного со скоростью v, направленной параллельно оси Аа (рис.33), то такое движение тела называется винтовым. Ось Аа называют осью винта. Когда векторы v и $\overline{\omega}$ направлены в одну сторону, то при принятом нами правиле изображения ω винт будет правым; если в разные стороны, - левым.

Расстояние, проходимое за время одного оборота любой точкой тела, лежащей на оси винта, называется шагом h винта. Если величины v и $\overline{\omega}$ постоянны, то шаг винта также будет постоянным. Обозначая время одного оборота через Т, получаем в этом случае vT=h и ωT=2π, откуда h=2πv/ω.

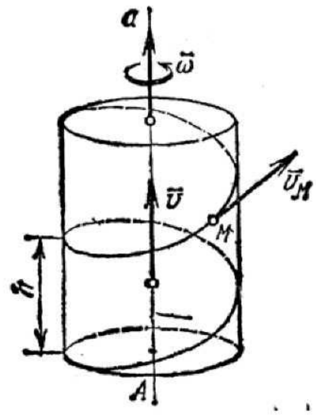

Рис.33

При постоянном шаге любая точка М тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Скорость точки М, находящейся от оси винта на расстоянии r, слагается из поступательной скорости v и перпендикулярной ей скорости, получаемой во вращательном движении, которая численно равна ωr. Следовательно,

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

Направлена скорость $\overline{v}_M$ по касательной к винтовой линии. Если цилиндрическую поверхность, по которой движется точка М, разрезать вдоль образующей и развернуть, то винтовые линии, обратятся в прямые, наклоненные к основанию цилиндра под углом

$$\alpha(\operatorname{tg}\alpha = h / 2\pi r).$$

Рекомендуемая литература

Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Т. 1,2. - М.: Высш. шк., 1977.

Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.,1980.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш. шк., 1986.

Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.1,2. - М., 1982.