ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-практическое пособие для студентов
заочной формы обучения

Настоящее учебно-практическое пособие предназначено для студентов технологических специальностей и содержит в краткой форме теоретические материалы, примеры решения задач, контрольные вопросы и тесты.

Содержание

Введение

Современные промышленные производства, в том числе пищевые, являются высокомеханизированными производствами. На технологическое оборудование возлагается решение все более сложных задач, что в свою очередь ведет к усложнению оборудования. Формирование современного инженера немыслимо без знания фундаментальных дисциплин. Одной из таких дисциплин является *теоретическая механика*.

Теоретическая механика – раздел механики, в котором излагаются основные законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. *Механическим движением* называется изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел, *механическим взаимодействием* – такое взаимодействие, в результате которого изменяется механическое движение или изменяется взаимное положение частей тела.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято делить на: *статику, кинематику и динамику*.

В статике изучаются условия *равновесия* материальных тел и методы тождественного преобразования системы сил. *Равновесие* – это состояние, при котором тело при действии сил остается неподвижным или движется равномерно прямолинейно.

В кинематике рассматриваются общие геометрические характеристики движения тел. Действующие на тело силы не рассматриваются. Закон движения задается. *Закон движения тела* – это зависимость положения тела в пространстве от времени.

В динамике изучают общие законы движения тел под действием сил.

Курс теоретической механики является базой таких учебных дисциплин, как теория механизмов и машин, сопротивление материалов, детали машин и др.

Роль теоретической механики не ограничивается ее техническим приложением. Законы и методы теоретической механики позволяют изучать и объяснять явления, происходящие в окружающем нас мире, способствуют развитию естествознания на базе материалистического мировоззрения.

1. Статика твердого тела

1.1. Основные понятия статики

Абсолютно твердое тело (твердое тело, тело) – материальное тело, расстояние между любыми точками в котором не изменяется. Следствие размеры и форма тела не изменяются.

Материальная точка – тело, размерами которого по условиям задачи можно пренебречь.

Свободное тело – тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений.

Несвободное (связанное) тело – тело, на перемещение которого наложены ограничения.

Связи – тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта (тела или системы тел).

Механическая система – совокупность взаимосвязанных между собой тел или материальных точек.

Твердое тело можно рассматривать как механическую систему, положения и расстояние между точками которой не изменяются.

Сила – векторная величина, характеризующая механическое действие одного материального тела на другое.

Сила как вектор характеризуется точкой приложения, направлением действия и абсолютным значением (рис.1.1). Единица измерения модуля силы – Ньютон.

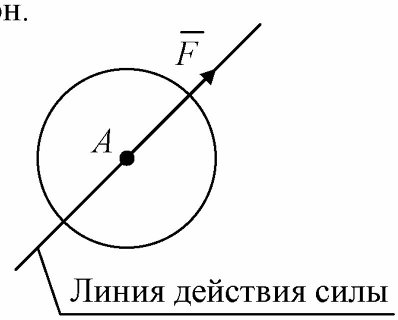


Рис.1.1.

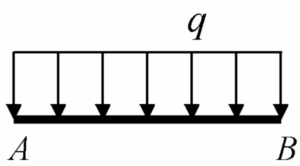


Рис.1.2.

Линия действия силы – прямая, вдоль которой направлен вектор силы.

Сосредоточенная сила – сила, приложенная в одной точке.

Распределенные силы (распределенная нагрузка) – силы, действующие на все точки объема, поверхности или длины тела (рис.1.2).

Распределенная нагрузка задается силой, действующей на единицу объема (поверхности, длины).Размерность распределенной нагрузки – Н/м^3 (Н/м^2, Н/м).

Внешняя сила – сила, действующая со стороны тела, не принадлежащего рассматриваемой механической системе.

Внутренняя сила – сила, действующая на материальную точку механической системы со стороны другой материальной точки, принадлежащей рассматриваемой системе.

Система сил – совокупность сил, действующих на механическую систему.

Плоская система сил – система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.

Пространственная система сил – система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.

Система сходящихся сил – система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис.1.3).

Произвольная система сил – система сил, линии действия которых не пересекаются в одной точке.(рис.1.4)

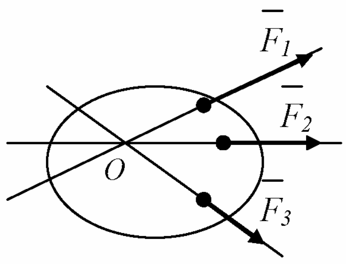


Рис.1.3

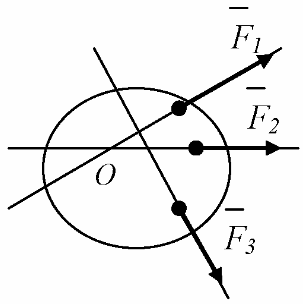


Рис.1.4

Эквивалентные системы сил – такие системы сил, замена которых одна на другую не изменяет механического состояния тела. Принятое обозначение:

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \Leftrightarrow \left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_m\right)$$

Уравновешенная система сил – система сил, которая будучи приложена к свободному твердому телу не изменяет его механического состояния (не выводит из равновесия).

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \Leftrightarrow 0$$

Равнодействующая сила – сила, действие которой на тело эквивалентно действию системы сил.

$$\vec{R} \Leftrightarrow \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$$

Момент силы – величина, характеризующая вращающую способность силы.

Пара сил – система двух параллельных равных по модулю противоположно направленных сил. Принятое обозначение – $(\vec{F}, \vec{F}')$.Под действием пары сил тело будет совершать вращательное движение.

Проекция силы на ось – отрезок, заключенный между перпендикулярами, проведенными из начала и конца вектора силы к этой оси (рис.1.5).

Проекция положительна, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси.

Проекция силы на плоскость – вектор на плоскости, заключенный между перпендикулярами, проведенными из начала и конца вектора силы к этой плоскости (рис.1.6).

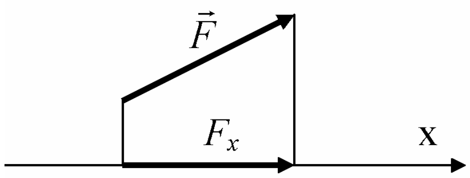


Рис.1.5

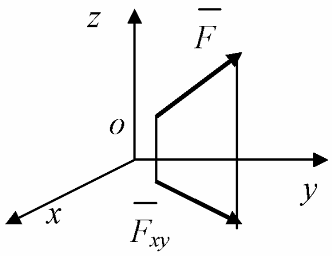


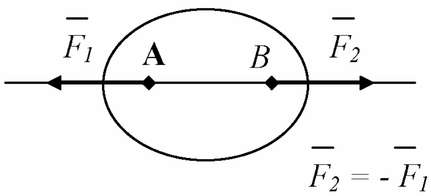
Рис.1.6

1.2. Аксиомы статики

В основе теоретических положений статики лежит ряд аксиом. Аксиома, это закон, сформулированный в результате обобщения результатов наблюдений.

1. Аксиома равновесия.

Две силы, действующие на твердое тело, уравновешиваются только в том случае, если они равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.1.7).



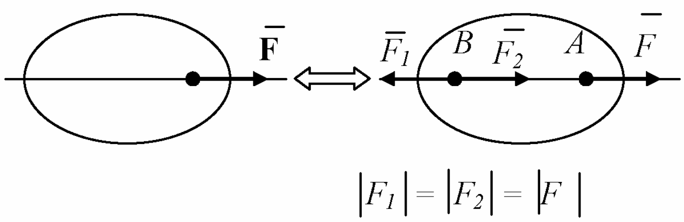


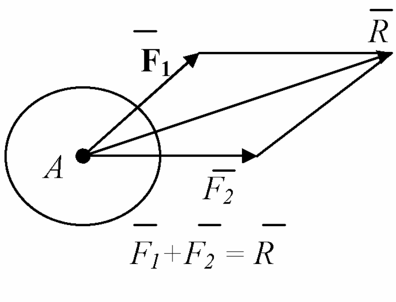
Рис.1.7 *Рис.1.8*

2. *Аксиома присоединения (исключения) уравновешенной системы сил.*

Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или исключить из нее уравновешенную систему сил (рис 1.8).

3. *Аксиома о параллелограмме сил.*

Система двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, имеет равнодействующую, приложенную в той же точке. Вектор равнодействующей является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис.1.9).



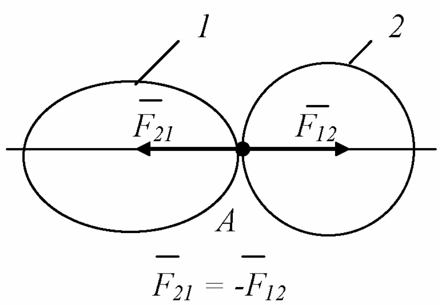


Рис. 1.9 *Рис.1.10*

4.Аксиома противодействия.

При действии одного твердого тела на другое возникает сила противодействия, равная по модулю, противоположно направленная действующей силе (рис.1.10).

Примечание. Силу, действие которой задано, называют *активной силой*, силу противодействия называют *реакцией*.

5.Аксиома связей.

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими реакциями.

1.3. Связи и их реакции

Тела, препятствующие перемещению рассматриваемого объекта, будем называть связями. Сила, с которой связь действует на рассматриваемый объект, называется *реакцией связи*. При определении возможных реакций связи следует исходить из того, что реакция это сила, препятствующая перемещению рассматриваемого тела. Реакция направлена в сторону, противоположную той, куда связь не позволяет перемещаться телу.

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся связи .

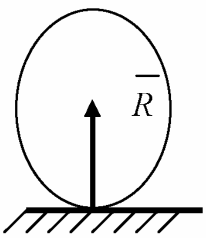
Гладкая поверхность ограничивает перемещение по нормали к поверхности опоры. Реакция направлена перпендикулярно поверхности (рис.1.11).

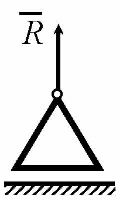
Шарнирная подвижная опора ограничивает перемещение тела по нормали к опорной плоскости. Реакция направлена по нормали к поверхности опоры (рис.1.12)

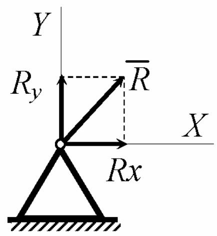
Шарнирная неподвижная опора противодействует любому перемещению в плоскости ,перпендикулярной оси вращения. При расчетах реакцию Fr, как правило, представляют в виде двух составляющих по осям X и Y (рис.1.13).

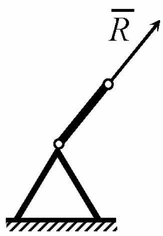
Шарнирный невесомый стержень противодействует перемещению тела вдоль линии стержня. Реакция будет направлена вдоль линии стержня (рис.1.14).

Глухая заделка противодействует любому перемещению и вращению в плоскости (рис.1.15). Ее действие можно заменить силой, представленной в виде двух составляющих и парой сил с моментом.









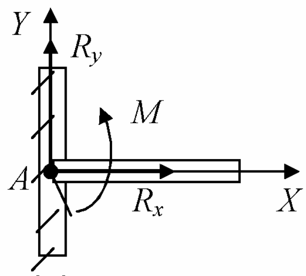


Рис.1.11 *Рис. 1.12* *Рис.1.13* *Рис.1.14* *Рис.1.15*

1.4. Момент силы относительно точки

Под действием силы твердое тело наряду с поступательным движением может совершать вращение вокруг того или иного центра. Вращательная способность силы характеризуется моментом силы. Вращательный эффект силы зависит от модуля силы, расстояния от центра до линии действия силы, направления поворота в плоскости вращения.

Абсолютное значение момента равно произведению модуля силы $\vec{F}$ на кратчайшее расстояние h от центра вращения до линии действия силы. Расстояние h называют *плечом силы (рис.1.16).*

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot h, \qquad (1.1)$$

Момент считают положительным, если сила стремится вращать плечо h против хода часовой стрелки и отрицательным при вращении по ходу часовой стрелки.

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы не изменится при переносе точки приложения силы вдоль линии действия силы.
2. Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через точку приложения силы.
3. Момент равнодействующей силы относительно точки равен сумме моментов слагаемых сил относительно этой точки.

$$M_o(\vec{R}) = M_o(\vec{F_1}) + M_o(\vec{F_2}), \quad \text{где } \vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \qquad (1.2)$$

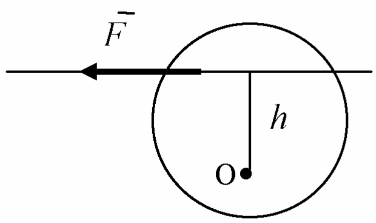


Рис.1.16.

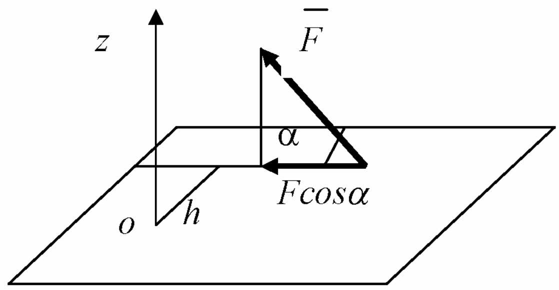


Рис.1.17.

1.5. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент считается положительным, если с положительного конца оси поворот, который сила стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу часовой стрелки.

$$M_z\left(\vec{F}\right) = M_0\left(\vec{F}_{xy}\right) = F_{xy} h \,. \qquad (1.3)$$

Чтобы найти момент силы относительно оси, нужно (рис 1.17);

1. Провести плоскость перпендикулярную оси z.

2. Спроецировать силу $\vec{F}$ на эту плоскость и вычислить величину проекции F_{xy} .

3. Провести плечо h из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы F_{xy} и вычислить его длину.

4. Найти произведение этого плеча и проекции силы с соответствующим знаком /

Свойства момента силы относительно оси

Момент силы относительно оси равен нулю, если:

1. $F_{xy} = 0$, т.е. сила $\vec{F}$ параллельна оси.
2. h=0 , т.е. линия действия силы пересекает ось.

1.6. Момент пары сил

Пара сил оказывает на тело вращающее действие. Момент пары сил равен произведению одной силы на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары, которое называется плечом пары (рис.1.18)

$$M(\vec{F},\vec{F}\ )=F\,h, \qquad (1.4)$$

где: $\vec{F},\vec{F}$ -силы, составляющие пару;

h - плечо пары

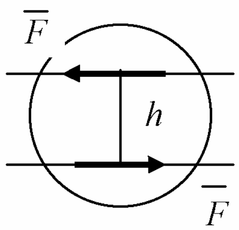


Рис.1.18.

Момент пары считают положительным, если силы $\vec{F},\vec{F}$ стремятся вращать плечо h против хода часовой стрелки.

Свойства пары сил

1. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.
2. Не изменяя момента пары можно одновременно соответственно изменять значение сил и плечо пары.
3. Пару можно переносить в плоскости ее действия при этом действие пары на тело не изменится.

1.7. Тождественное преобразование систем сил

Преобразование может быть выполнено графическим или аналитическим способом.

1.7.1. Преобразование сходящейся системы сил

Равнодействующая $\overline{R}$ двух сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ находится на основании аксиомы о параллелограмме сил. (рис.1.9). Геометрическая сумма любого числа сходящихся сил может быть определена путем последовательного сложения двух сил (рис.1.19) – способ векторного многоугольника.

Вывод: *система сходящихся сил ($\vec{F}_n$) приводится к одной равнодействующей силе $\vec{R}$.*

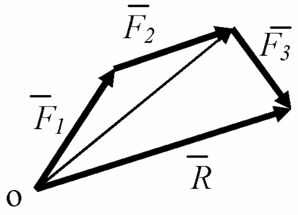


Рис.1.19

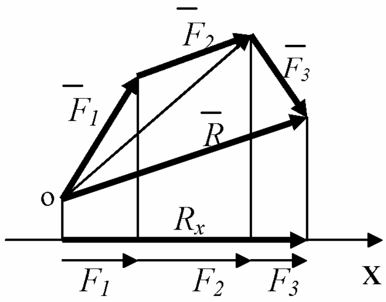


Рис.1.20.

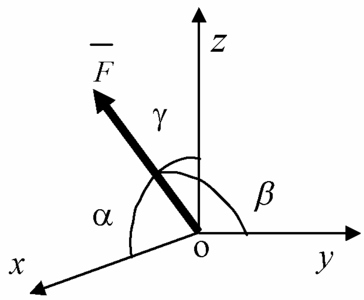


Рис.1.21.

Аналитически равнодействующая сила может быть определена через ее проекции на оси координат

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ , \qquad (1.5)$$

Согласно теореме: *проекция равнодействующей на ось равна сумме проекций слагаемых сил на эту ось (рис.1.20).* $R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$, или в общем виде $R_x = \sum F_{kx}$ (1.6)

С учетом (1.6) равнодействующая определяется выражением

$$R = \sqrt{\left(\sum F_{kx}\right)^2 + \left(\sum F_{ky}\right)^2 + \left(\sum F_{kz}\right)^2}\ , \qquad (1.7)$$

Направление вектора равнодействующей определяется косинусами углов между вектором $\vec{R}$ и осями x, y, z (рис.1.20)

$$\cos\alpha = \frac{\sum F_{kx}}{R}; \quad \cos\beta = \frac{\sum F_{ky}}{R}; \quad \cos\gamma = \frac{\sum F_{kz}}{R},$$ где α, β, γ

1.7.2. Преобразование произвольной системы сил.

Применить правило параллелограмма сил непосредственно к произвольной системе сил нельзя, так как линии действия сил не пересекаются в одной точке. Предварительно систему сил приводят к одному центру на основании теоремы о параллельном переносе силы.

Теорема: *силу, приложенную к твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, перенести параллельно в другую точку тела, прибав-*

ляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, в которую она переносится (рис.1.22).

В результате указанного преобразования получается сходящаяся система сил и сумма моментов пар сил. Действие сходящейся системы сил заменяют действием суммарной силы, действие моментов - суммарным моментом. Суммарный вектор $\vec{R}^*$ называют *главным вектором* системы сил, суммарный момент $M_0^*(\vec{F}_k)$ - *главным моментом* системы сил.

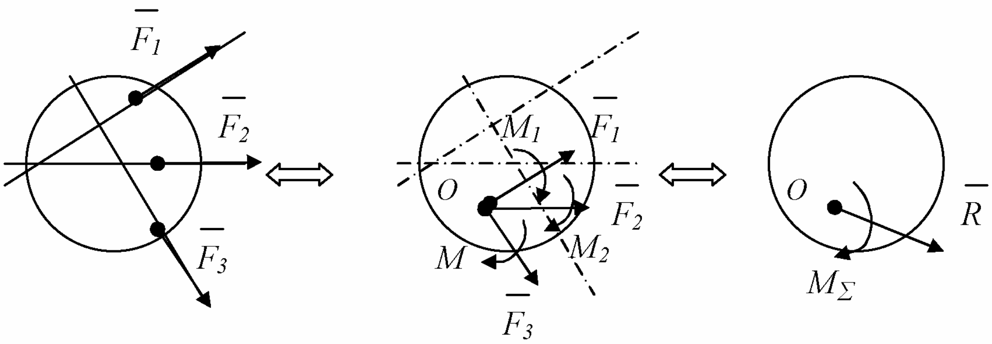


Рис.1.22

Вывод: *произвольная система сил в результате тождественного преобразования приводится к главному вектору $\vec{R}^*$ и главному моменту $M_0^*(\vec{F}_k)$ системы сил.*

Аналитически главный вектор и главный момент системы сил могут быть определены через их проекции на оси координат

$$R = \sqrt{\left(\sum R_{kx}\right)^2 + \left(\sum R_{ky}\right)^2 + \left(\sum R_{kz}\right)^2}\,, \qquad (1.8)$$

$$M = \sqrt{\left(\sum M_{kx}\right)^2 + \left(\sum M_{ky}\right)^2 + \left(\sum M_{kz}\right)^2}\,. \qquad (1.9)$$

1.8 Условия равновесия систем сил

1.8.1. ***Равновесие системы сходящихся сил***

По определению (см.п.1.1) действие системы сходящихся сил эквивалентно действию одной равнодействующей силы $\vec{R}$. Для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю $\vec{R}= 0$. Из формулы (1.7) следует, что для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси X,Y,Z равнялась нулю

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum F_{ky} = 0 \\ \sum F_{kz} = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.10)$$

Для равновесия плоской сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси X,Y равнялась нулю

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_{kx} = 0\\ \sum F_{ky} = 0\end{array}\right\} \qquad (1.11)$$

1.8.2. Равновесие произвольной системы сил.

Действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. Для равновесия необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left.\begin{array}{l}\vec{R}^* = 0\\ \overline{M}_0{}^*(\vec{F}_k) = 0\end{array}\right\} \qquad (1.12)$$

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на оси X,Y,Z и суммы моментов всех сил относительно осей X,Y,Z равнялись нулю.

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_{kx} = 0\\ \sum F_{ky} = 0\\ \sum F_{kz} = 0\\ \sum M_x(\vec{F}_{\mathrm{k}}) = 0\\ \sum M_y(\vec{F}_{\mathrm{k}}) = 0\\ \sum M_z(\vec{F}_{\mathrm{k}}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1.13)$$

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций главного вектора на оси X,Y, и алгебраическая сумма моментов сил относительно центра O были равны нулю.

$$\left.\begin{array}{l}\sum \mathrm{F_{kx}} = 0\\ \sum \mathrm{F_{ky}} = 0\\ \sum \mathrm{M_o}(\vec{F}_{\mathrm{k}}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1.14)$$

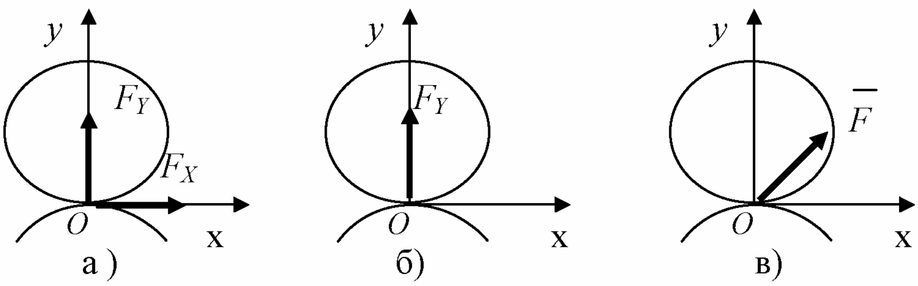
1.9. Вопросы для самоконтроля по разделу

1. Дайте определение абсолютно твердого тела, материальной точки, силы, линии действия силы, системы сил (плоской, пространственной, сходящейся) произвольной систем сил.
2. Что называется проекцией силы на ось, на плоскость?
3. Что называется моментом силы, как определяется момент силы относительно точки?
4. Изменяется ли момент силы относительно данной точки при переносе силы вдоль линии ее действия?
5. В каком случае момент силы относительно данной точки равен нулю?
6. Какая система сил называется парой сил, чему равен момент пары сил?
7. Что называют связью? В чем заключается принцип освобождения от связей? Перечислите основные типы связей, покажите их реакции.
8. Каковы условия и уравнения равновесия системы сходящихся и произвольной систем сил, расположенных в пространстве и в плоскости?
9. Сформулируйте порядок решения задач статики.

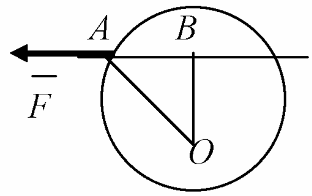
1.10. Тесты по разделу

1.1. Статика изучает:
а) законы движения тел;
б) условия равновесия;
в) движение тел при действии сил.

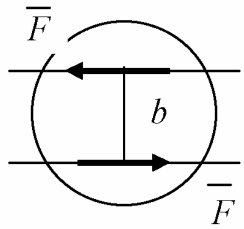
1.2. Реакции связи показаны правильно



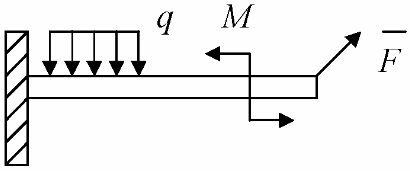
1.3. Момент силы относительно точки «О» определен правильно
а) $M_o(\overline{F}) = F \cdot |OA|$, б) $M_o(\overline{F}) = F \cdot |OB|$.



1.4. Момент пары сил определен правильно
а) $M(\overline{F},\overline{F}') = F \cdot b + F' \cdot b$; б) $M(\overline{F},\overline{F}') = F \cdot b$; в) $M(\overline{F},\overline{F}') = -F \cdot b$;



1.5. На балку действует система сил
а) пространственная; б) плоская сходящаяся; в) плоская произвольная.



1.6. Уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил приведены в варианте

а) $\left.\begin{array}{l}\Sigma F_{kx} = 0\\ \Sigma F_{ky} = 0\\ \Sigma M_o(\overline{F}_k) = 0\end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l}\Sigma F_{kx} = 0\\ \Sigma F_{ky} = 0\end{array}\right\}$

2. Кинематика

Кинематика- раздел теоретической механики, в котором рассматриваются общие геометрические свойства механического движения, как процесса, происходящего в пространстве и во времени. Движущиеся объекты рассматривают как геометрические точки или геометрические тела. Соответственно, изучение делят на кинематику точки и кинематику твердого тел

2.1. Основные понятия кинематики

Закон движения точки (тела) – зависимость положения точки (тела) в пространстве от времени.

Траектория точки – геометрическое место положений точки в пространстве при ее движении.

Скорость точки (тела) – характеристика изменения во времени положения точки (тела) в пространстве.

Ускорение точки (тела) – характеристика изменения во времени скорости точки (тела)

2.2. Кинематика точки

2.2.1. Способы задания движения точки

Задать движение точки - значит задать изменение ее положения по отношению к выбранной системе отсчета. Существует три основных систем отсчета: *векторная, координатная, естественная*. Соответственно возможны три способа задания движения точки.

В векторной системе положение точки относительно начала отсчета задается радиус-вектором $\bar{r}$ (рис.2.1). Закон движения $\bar{r} = \bar{r}(t)$

Положение точки в системе координат OXYZ задается тремя координатами X,Y,Z (рис.2.2). Закон движения – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Положение точки в естественной системе отсчета задается расстоянием S от начала отсчета до этой точки вдоль траектории (рис.2.3). Закон движения –

$s = s(t)$.

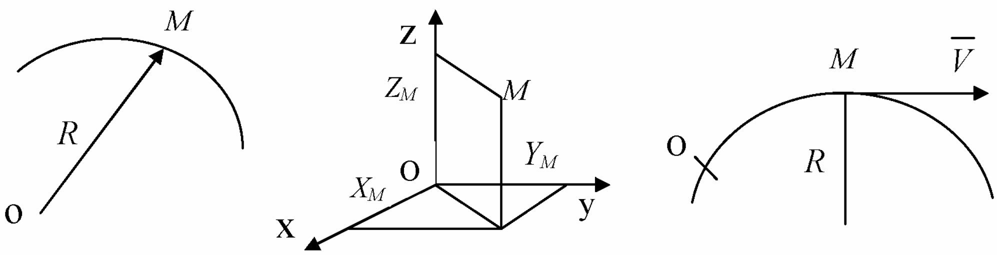


Рис.2.1 *Рис. 2.2* *Рис.2.3*

Движение точки при естественном способе задания движения определено если известны:

1. Траектория движения.
2. Начало и направление отсчета дуговой координаты.
3. Уравнение движения.

При естественном способе задания движения, в отличии от других способов, используются подвижные координатные оси, движущиеся вместе с точкой по траектории. Такими осями являются (рис. 2.4).

Касательная (τ) – направлена в сторону возрастания дуговой координаты по касательной к траектории.

Главная нормаль (n) – направлена в сторону вогнутости кривой.

Бинормаль ($в$) – направлена перпендикулярно к осям τ , n.

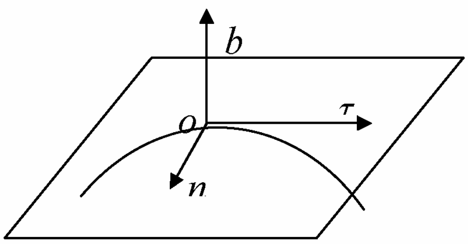


Рис. 2.4

2.2.2 Определение кинематических характеристик точки

Траектория точки

В векторной системе отсчета траектория описывается выражением $\bar{r} = \bar{r}(t)$

В координатной системе отсчета траектория определяется по закону движения точки и описывается выражениями $z = f(x,y)$ - в пространстве, или y = f(x) – в плоскости.

В естественной системе отсчета траектория задается заранее.

Скорость точки

Согласно определению (см. п. 2.1) скорость характеризует изменение во времени положения точки (тела) в пространстве.

Определение скорости точки в векторной системе координат

При задании движения точки в векторной системе координат отношение перемещения к интервалу времени $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}_{cp}$ называют средним значением скорости на этом интервале времени Δt.

Принимая интервал времени бесконечно малой величиной, получают значение скорости в данный момент времени (мгновенное значение скорости)

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (2.1)$$

Вектор средней скорости $\bar{V}cp$ направлен вдоль вектора $\Delta \bar{r}$ в сторону движения точки, вектор мгновенной скорости $\bar{V}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки (рис.2.5).

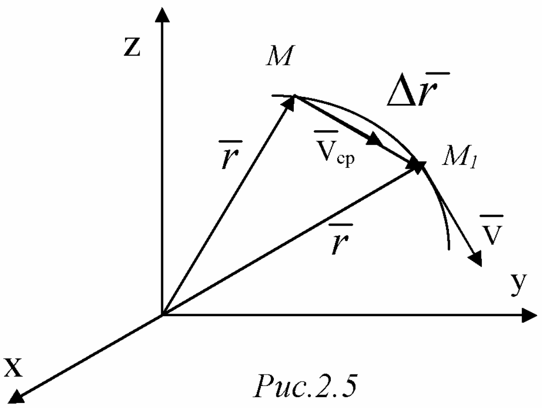


Рис.2.5

Вывод: *скорость точки – векторная величина, равная производной от закона движения по времени.*

Отметим и используем в дальнейших рассуждениях следующее свойство производной*: производная от какой либо величины по времени определяет скорость изменения этой величины.*

Определение скорости точки в координатной системе отсчета

На основании свойства производной определим скорости изменения координат точки

$$V_X = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt} \tag{2.2}$$

Модуль полной скорости точки при прямоугольной системе координат будет равен

$$V = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2} + V_я^{\ 2}} \tag{2.3}$$

Направление вектора скорости определяется косинусами направляющих углов

$\cos\alpha = \frac{V_X}{V}$; $\cos\beta = \frac{V_y}{V}$; $\cos\gamma = \frac{V_Z}{V}$, где α, β, γ - углы между вектором скорости и осями координат.

Определение скорости точки в естественной системе отсчета

Скорость точки в естественной системе отсчета определяется как производная от закона движения точки

$$V = \frac{dS}{dt} \tag{2.4}$$

Согласно предыдущим выводам вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения точки и в осях τnb определяется только одной проекцией V_τ.

Ускорение точки

По определению ускорение характеризует изменение скорости, т.е. скорость изменения скорости.

Ускорения точки в векторной системе отсчета

На основании свойства производной

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}, \tag{2.5 }$$

Вектор скорости может изменяться по модулю и направлению. Для определения приращения вектора $d\bar{V}$ совместим начала векторов $\bar{V}$, $\bar{V}_1$ (рис.2.6). Вектор ускорения направлен по линии приращения вектора скорости, т. е. В сторону искривления траектории.

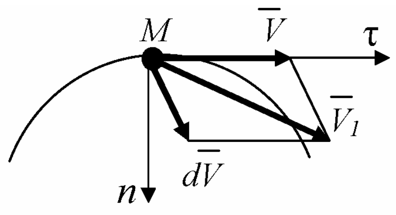


Рис.2.6

Ускорение точки в координатной системе отсчета

Ускорение изменения координат точки равно производной по времени от скоростей изменения этих координат

$$a_x=\frac{dVx}{dt}; \qquad a_y=\frac{dVy}{dt}; \qquad a_z=\frac{dVz}{dt}.$$

Полное ускорение в прямоугольной системе координат будет определяться выражением

$$a=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}, \qquad (2.6)$$

Направляющие косинусы вектора ускорения

$$cos\alpha=\frac{a_x}{a}; \quad \cos\beta=\frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}.$$

Ускорение точки в естественной системе отсчета

Приращение вектора скорости $d\overline{V}$ (рис.2.7) можно разложить на составляющие, параллельные осям естественной системы координат

$$d\overline{V}=d\overline{V}_\tau+d\overline{V}_n, \qquad (2.7)$$

Разделив левую и правую части равенства (2.7) на dt, получим,

$$\overline{a}=\overline{a}_\tau+\overline{a}_n, \qquad (2.8)$$

где: $\overline{a}_\tau=\frac{dV}{dt}$ - тангенциальное ускорение, (2.9)

$\overline{a}_n=\frac{V^2}{R}$ - нормальное ускорение, (вывод см .[1], п.43)

где R - радиус кривизны траектории в окрестности точки

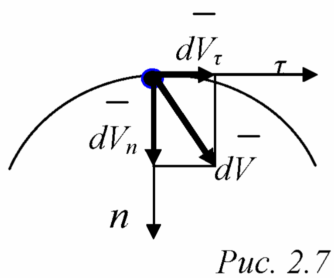


Рис. 2.7

2.3. Кинематика твердого тела

В отличие от кинематики точки в кинематике твердых тел решаются две основные задачи:

- задание движения и определение кинематических характеристик тела в целом;
- определение кинематических характеристик точек тела.

Способы задания и определения кинематических характеристик зависят от типов движения тел.

В настоящем пособии рассматриваются три типа движения: поступательное, вращательное вокруг неподвижной оси и плоско-параллельное движение твердого тела

2.3.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называют движение, при котором прямая, проведенная через две точки тела, остается параллельной ее первоначальному положению (рис.2.8).

Доказана теорема: *при поступательном движении все точки тела движутся по одинаковым траекториям и имеют в каждой момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения (рис.2.8).*

Вывод: *Поступательное движение твердого тела определяется движением любой его точки, в связи с чем, задание и изучение его движения сводится к кинематике точки.*

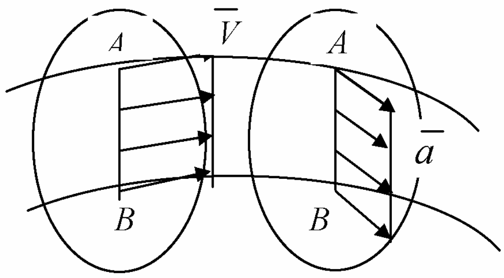


Рис. 2.8

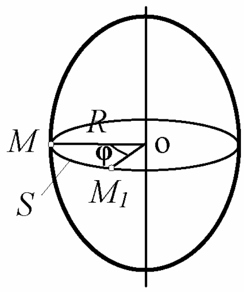


Рис. 2.9

2.3.2 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Вращательным вокруг неподвижной оси называют движение твердого тела, при котором две точки, принадлежащие телу, остаются неподвижными в течение всего времени движения.

Положение тела определяется углом поворота φ (рис.2.9). Единица измерения угла – радиан. (Радиан - центральный угол окружности, длина дуги которого равна радиусу, полный угол окружности содержит 2π радиана.)

Закон вращательного движения тела вокруг неподвижной оси φ = φ(t). Угловую скорость и угловое ускорение тела определим методом дифференцирования

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ - угловая скорость, рад/с;} \qquad (2.10)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ - угловое ускорение, рад/с}^2 \qquad (2.11)$$

При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси его точки, не лежащие на оси вращения, движутся по окружностям с центром на оси вращения.

Если рассечь тело плоскостью перпендикулярной оси, выбрать на оси вращения точку C и произвольную точка M, то точка M будет описывать вокруг точки C окружность радиуса R (рис. 2.9). За время dt происходит элементарный поворот на угол $d\varphi$, при этом точка M совершит перемещение вдоль траектории на расстояние $ds = R \cdot d\varphi$.Определим модуль линейной скорости:

$$V = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega \qquad (2.12)$$

Ускорение точки M при известной траектории определяется по его составляющим, см.(2.8)

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где: $\overline{a}_\tau = \dfrac{dV}{dt}$; $\overline{a}_n = \dfrac{V^2}{R}$.

Подставляя в формулы выражение (2.12) получим:

$$a_\tau = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \cdot \varepsilon, \qquad .a_n = \frac{(R\omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2, \qquad (2.13)$$

где: a_τ - тангенциальное ускорение,

a_n -нормальное ускорение.

2.3.3. Плоско - параллельное движение твердого тела

Плоско- параллельным называется движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных одной неподвижной плоскости (рис.2.10). Для изучения движения тела достаточно изучить движение одного сечения S этого тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости. Движение сечения S в своей плоскости можно рассматривать как сложное, состоящее из двух элементарных движений: а) поступательного и вращательного; б) вращательного относительно подвижного (мгновенного) центра.

В первом варианте движение сечения может быть задано уравнениями движения одной его точки (полюса) и вращением сечения вокруг полюса (рис.2.11). В качестве полюса может быть принята любая точка сечения.

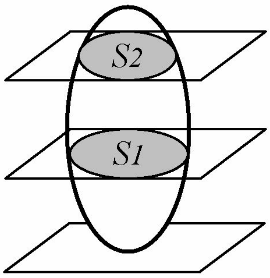


Рис. 2.10

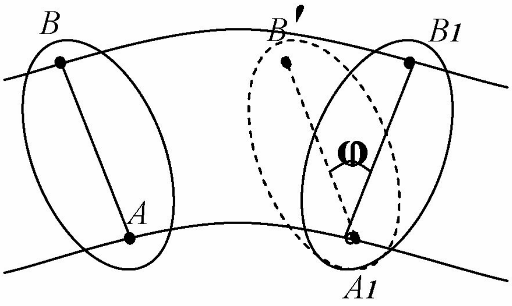


Рис. 2.11

Уравнения движения запишутся в виде:

$$\left.\begin{array}{l} X_A = X_A(t) \\ Y_A = Y_A(t) \\ \varphi_A = \varphi_A(t) \end{array}\right\} \qquad (2.14)$$

Кинематические характеристики полюса определяют из уравнений его движения.

Скорость любой точки плоской фигуры, движущейся в своей плоскости слагается из скорости полюса (произвольно выбранной в сечении точки A) и скорости вращательного движения вокруг полюса (вращение точки B вокруг точки A).

Ускорение точки движущейся плоской фигуры складывается из ускорения полюса относительно неподвижной системы отсчета и ускорения за счет вращательного движения вокруг полюса.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (2.15)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \qquad (2.16)$$

Во втором варианте движение сечения рассматривается как вращательное вокруг подвижного (мгновенного) центра P (рис.1.12). В этом случае скорость любой точки В сечения будет определяться по формуле

для вращательного движения

$$V_b = |PB| \cdot \omega_P \qquad (2.17)$$

Угловая скорость вокруг мгновенного центра P может быть определена если известна скорость какой либо точки сечения, например точки А.

$$\omega_P = \frac{V_A}{|PA|} \qquad (2.18)$$

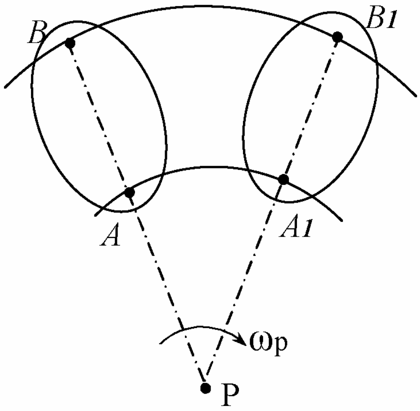


Рис.2.12

Положение мгновенного центра вращения может быть определено на основании следующих свойств:

- вектор скорости точки перпендикулярен радиусу;
- модуль скорости точки пропорционален расстоянию от точки до центра вращения ($V = \omega \cdot R$) ;
- скорость в центре вращения равна нулю.

Рассмотрим некоторые случаи определения положения мгновенного центра.

1. Известны направления скоростей двух точек плоской фигуры (рис.2.13). Проведем линии радиусов. Мгновенный центр вращения P находится на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей.

2. Скорости точек А и В известны, причем вектора $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ параллельны друг другу, а линия AB перпендикулярна $\vec{V}_A$ (рис. 2. 14). В этом случае мгновенный центр вращения лежит на линии AB. Для его нахождения проведем линию пропорциональности скоростей на основании зависимости $V = \omega R$.

3. Тело катится без скольжения по неподвижной поверхности другого тела (рис.2.15). Точка касания тел в данный момент имеет нулевую скорость в то время, как скорости других точек тела не равны нулю. Точка касания P будет мгновенным центром вращения.

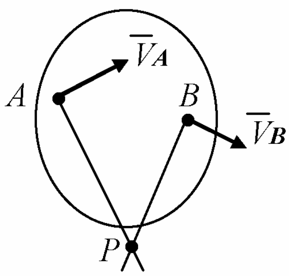


Рис. 2.13

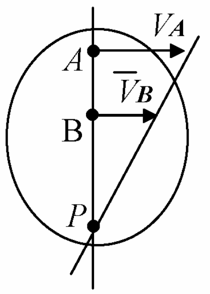


Рис. 2.14

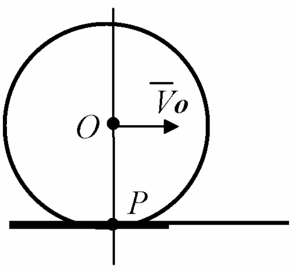


Рис. 2.15

Кроме рассмотренных вариантов скорость точки сечения может быть определена на основании теоремы о проекциях скоростей двух точек твердого тела.

Теорема: *проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, проведенную через эти точки, равны между собой и одинаково направлены.*

Доказательство: расстояние AB изменяться не может, следовательно, $V_A \cos\alpha$ не может быть больше или меньше $V_B \cos\beta$ (рис.2.16).

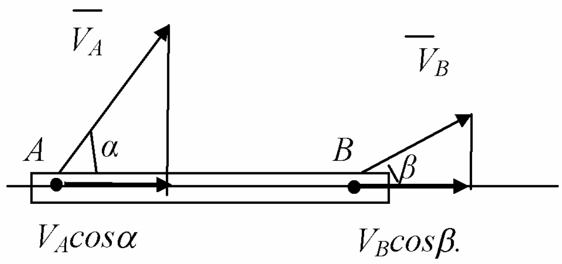


Рис. 2.16

Вывод: $V_A\cos\alpha = V_B\cos\beta$. (2.19)

2.4. Сложное движение точки

В предыдущих параграфах рассматривалось движение точки относительно неподвижной системы отсчета, так называемое абсолютное движение. В практике встречаются задачи, в которых известно движение точки относительно системы координат, которая движется относительно неподвижной системы. При этом требуется определить кинематические характеристики точки относительно неподвижной системы.

Принято называть: движение точки относительно подвижной системы – *относительным*, движение точки вместе с подвижной системой – *переносным*, движение точки относительно неподвижной системы – *абсолютным*. Соответственно называют скорости и ускорения:

$\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$ -относительные; $\vec{V}_e$, $\vec{a}_e$ - переносные; $\vec{V}$, $\vec{a}$ -абсолютные.

Согласно теореме о сложении скоростей абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей (рис.).

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e , \qquad (2.20)$$

Абсолютное значение скорости определяется по теореме косинусов

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2\, V_r V_e \cos\alpha} , \qquad (2.21)$$

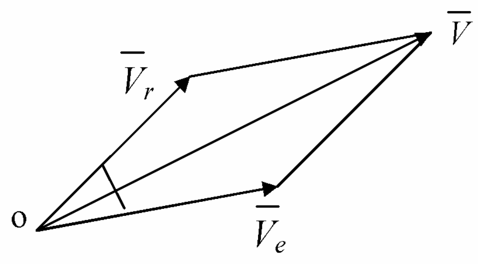


Рис.2.17

Ускорение по правилу параллелограмма определяется *только при поступательном переносном движении*

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e$$

$$a = \sqrt{a_r^{\,2} + a_e^{\,2} + 2a_r a_e \cos\alpha}\,, \qquad (2.22)$$

При непоступательном переносном движении появляется третья составляющая ускорения, называемое поворотным или кориолисовым.

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k\,, \qquad (2.23)$$

где $\vec{a}_k = 2\,\vec{\omega}_e \cdot \vec{V}_r$

Кориолисово ускорение численно равно

$$a_k = 2\omega_e V_r \cos\alpha\,,$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$

Направление вектора кориолисова ускорения удобно определять по правилу Н.Е. Жуковского: вектор $\vec{V}_r$ спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, проекцию повернуть на 90 градусов в сторону переносного вращения. Полученное направление будет соответствовать направлению кориолисова ускорения.

2.5. Вопросы для самоконтроля по разделу

1. В чем состоят основные задачи кинематики? Назовите кинематические характеристики.
2. Назовите способы задания движения точки и определение кинематических характеристик.
3. Дайте определение поступательного, вращательного вокруг неподвижной оси, плоскопараллельного движения тела.
4. Как задается движение твердого тела при поступательном, вращательном вокруг неподвижной оси и плоскопараллельном движении тела и как определяется скорость и ускорение точки при этих движениях тела?

2.6. Тесты по разделу

2.1. Точка движется по окружности радиуса R по закону $S = 2t^2$. В какой системе отсчета задано движение точки?

а) в координатной ; б) в естественной.

2.2. По какой формуле определяется скорость точки в координатной системе отсчета?

а) $V=\dfrac{dS}{dt}$; б) $V=\sqrt{V_x^2+V_y}^{\,2}$.

2.3. По какой формуле определяется ускорение точки в естественной системе отсчета?

а) $a=\dfrac{dV}{dt}$; б) $a=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}}$; в) $a=\sqrt{a_\tau^{\ 2}+a_n^{\ 2}}$.

2.4. По какой формуле определяется тангенциальное ускорение?

а) $a=\dfrac{V^2}{R}$; б) $a=\varepsilon\cdot R$.

2.5. Тангенциальное ускорение направлено:

а) по касательной к траектории, б) по радиусу.

3. Динамика

3.1. Задачи динамики

В динамике решаются два типа задач. Первая состоит в определении действующих сил при заданном законе движения материального объекта (точки или системы). Вторая задача обратная первой: определяется закон движения материального объекта при известных действующих на него силах.

3.2. Основные понятия динамики.

Инерционность - свойство материальных тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока внешние силы не изменят этого состояния.

Масса - количественная мера инерционности тела. Единица измерения массы - килограмм (кг).

Материальная точка - тело, обладающее массой, размерами которого при решении данной задачи пренебрегают.

Центр масс механической системы - геометрическая точка, координаты которой определяются формулами.

$$X_C = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{m}; Y_C = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{m}; Z_C = \frac{\sum m_k \cdot z_k}{m}; \qquad (3.1)$$

где m_k, x_k, y_k, z_k- масса и координаты k - той точки механической системы, m - масса системы.

В однородном поле тяжести положение центра масс совпадает с положением центра тяжести.

Момент инерции материального тела относительно оси – количественная мера инертности при вращательном движении.

Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки от оси.

$$J_Z = m \cdot r^2 \qquad (3.2)$$

Момент инерции системы (тела) относительно оси равен арифметической сумме моментов инерции всех точек.

$$J_Z = \sum m_k \cdot r_k^2 \qquad (3.3)$$

Сила инерции материальной точки - векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на модуль ускорения и направленная противоположно вектору ускорения

$$\vec{F}^u = -m\vec{a} \qquad (3.4)$$

Сила инерции материального тела - векторная величина, равная по модулю произведению массы тела на модуль ускорения центра масс тела и направленная противоположно вектору ускорения центра масс

$$\vec{F}^u = -m\vec{a}_c, \qquad (3.5)$$

где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс тела.

Элементарный импульс силы - векторная величина $d\vec{S}$, равная произведению вектора силы $\vec{F}$ на бесконечно малый промежуток времени dt

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt, \qquad (3.6)$$

Полный импульс силы за Δt равен интегралу от элементарных импульсов

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt \qquad (3.7)$$

Элементарная работа силы - скалярная величина dA, равная скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на бесконечно малое перемещение $d\vec{S}$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их модулей на косинус угла между направлениями векторов.

$$dA = F \cdot ds \cdot cos\alpha, \qquad (3.8)$$

где α - угол между направлениями векторов перемещения и силы.

Работа силы $\vec{F}$ на конечном перемещении точки её приложения равна интегралу от элементарной работы, взятому по перемещению.

$$A = \int_0^s F \cdot Cos\alpha \cdot ds \qquad (3.9)$$

Единица измерения работы - Джоуль (1 Дж=1 Н·м).

Количество движения материальной точки - векторная величина $\vec{q}$, равная произведению массы m на её скорость $\vec{V}$.

$$\vec{q} = m\vec{V} \qquad (3.10)$$

Количество движения механической системы $\vec{Q}$ равно векторной сумме количества движения её точек.

$$\vec{Q} = \sum m_k \cdot \vec{V}_k \qquad (3.11)$$

или с учетом формул (3.1).

$$\vec{Q} = m\vec{V}_C \ , \qquad (3.12)$$

где: m- масса механической системы,

$\vec{V}_C$ - вектор скорости центра масс системы.

Кинетическая энергия материальной точки - скалярная величина T, равная половине произведения массы точки на квадрат её скорости.

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (3.13)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех её точек.

$$T = \sum T_k \qquad (3.14)$$

3.3. Аксиомы динамики

Первая аксиома - закон инерции.

Если на свободную материальную точку не действуют никакие силы или действует уравновешенная система сил, то точка будет находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Вторая аксиома- закон пропорциональности ускорения.

Ускорение, сообщаемое материальной точке действующей на неё силой, пропорционально этой силе и по направлению совпадает с направлением силы.

$$m\vec{a} = \vec{F} \ , \qquad (3.15)$$

Выражение (3.15) называют *основным законом динамики.*

Третья аксиома - закон противодействия.

Силы, с которыми действуют друг на друга две материальные точки, равны по модулю и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \qquad (3.16)$$

Четвертая аксиома - закон независимости действия сил.

При действии на материальную точку системы сил полное ускорение этой точки равно геометрической сумме ускорений от действия каждой силы

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k, \qquad (3.17)$$

3.4. Дифференциальные уравнения динамики

Дифференциальные уравнения движения точки связывают ускорение точки с действующими на нее силами. Фактически дифференциальные уравнения являются записью основного закона динамики в явной дифференциальной форме.

Для абсолютного движения точки (движение в инерциальной системе отсчета) дифференциальное уравнение имеет вид

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_k, \qquad (3.18)$$

Векторное уравнение (3.17) может быть записано в проекциях на оси прямоугольной инерциальной системы координат

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV_x}{dt} &= \sum \vec{F}_k, \\ m\frac{dV_y}{dt} &= \sum \vec{F}_k, \\ m\frac{dV_z}{dt} &= \sum \vec{F}_k, \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

При известной траектория движения точки уравнение (3.18) может быть записано в проекциях на оси естественной системы координат

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= \sum F_\tau, \\ ma_n &= \sum F_n \end{aligned}\right\} \qquad (3.20)$$

С учетом (2.8) уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= \sum F_\tau \\ m\frac{V^2}{R} &= \sum F_n \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

3.5. Общие теоремы динамики

Общие теоремы динамики устанавливают зависимость между мерами механического движения и механического взаимодействия. Выводы теорем являются результатом тождественного преобразования основного закона динамики.

Теорема об изменении количества движения: *изменение количества движения материальной точки (механической системы) за конечный промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени* $m\vec{V}-m\vec{V}_0=\sum\vec{S}_k$ -для материальной точки; (3.22)

$\vec{Q}-\vec{Q}_0=\sum\vec{S}_k$ -для механической системы. (3.23)

Теорема об изменении кинетической энергии: *изменение кинетической энергии точки (механической системы) при её перемещении равно сумме работ всех действующих внешних сил на этом перемещении*

$\frac{mV_1^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k)$ - для материальной точки (3.24)

$T-T_o=\sum A(F_k)$ - для механической системы (3.25)

Кинетическая энергия механической системы определяется в соответствии с (3.14), при этом для твердых тел выведены следующие зависимости

$T=\frac{mV^2}{2}$ -при поступательном движении тела, (3.26)

$T=\frac{J_z\omega^2}{2}$ - при вращательном движении тела, (3.27)

$T=\frac{mV^2}{2}+\frac{J_z\omega^2}{2}$ - при плоско-параллельном движении тела. (3.28)

Моменты инерции некоторых однородных тел

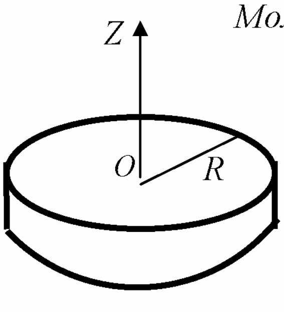


Рис. 3.1

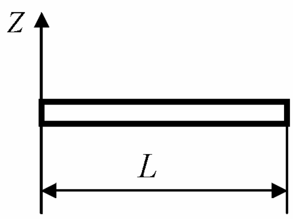
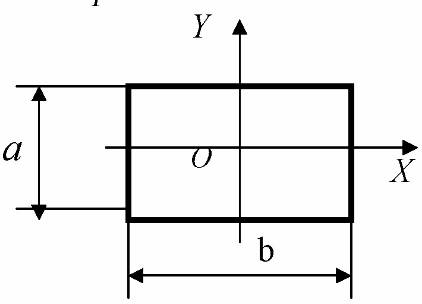


Рис.3.2.



Р*ис.3.3.*

Момент инерции цилиндра относительноего оси (рис. 3.1.)

$$I_z = \frac{1}{2} \cdot mR^2$$

Момент инерции стержня относительно оси z (рис.3.2)

$$I_z = \frac{1}{3} \cdot ml^2$$

Момент инерции прямоугольной пластины относительно осей x и y (рис.3.3)

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot ma^2$$

Момент инерции шара определяется по формуле:

$$I_z = \frac{2}{5} \cdot mR^2$$

В общем случае работа сил определяется в соответствии с (3.8),(3.9).В ряде случаев действия сил работа может быть определена по частным зависимостям.

Работа силы тяжести

$$A = Ph, \qquad (3.29)$$

где: P - сила тяжести,

h - изменение положения тела по вертикали.

Работа силы при вращательном движении тела

$$A = M\omega, \qquad (3.30)$$

где: M - момент силы,

ω - угловая скорость тела.

Следует иметь в виду, что работа, как скалярная величина, может быть положительной или отрицательной. Работа будет положительной если направление действия силы совпадает с направлением движения.

3.6. Принцип Даламбера

Изложенные выше методы исследования движения тел, базируются на законах Ньютона. Разработаны методы, в основу которых положены другие принципы. Одним из них является *принцип Даламбера*. Принцип формулируеся: *если в любой момент времени к действующим на точку силам присоединить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной*

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}_K^{И} = 0, \qquad (3.31)$$

или для механической системы

$$\left.\begin{aligned} \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}_K^{И} = 0 \\ \sum \vec{M}\left(\vec{F}_k\right) + \sum \vec{M}\left(\vec{F}_k^{И}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

Принцип Даламбера позволяет применять к решению задач динамики более простые методы статики, поэтому он широко используется в инженерной практике.

3.7. Вопросы для самоконтроля по разделу

1. Сформулируйте основные задачи динамики.
2. Дайте определения массы, момента инерции, импульса силы, работы силы, количества движения, кинетической энергии.
3. Сформулируйте основные законы динамики.
4. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением динамики? Какой алгоритм решения задач динамики с помощью дифференциальных уравнений?
5. Сформулируйте общие теоремы динамики.
6. Сформулируйте принцип Даламбера. Как определяются силы инерции?
7. Сформулируйте принцип возможных перемещений. Для каких условий применяется принцип возможных перемещений?

3.8. Тесты по разделу

3.1 Под массой тела в теоретической механике понимают:

а) вес тела б) силу притяжения тела в) инерционность тела

3.2 Момент инерции характеризует:

а) меру вращающего действия, б) меру инерционности

3.3 Момент инерции материальной точки относительно оси определяется по формуле

а) $J_r = mV^2$; б) $J_r = mr^2$; в) $J_r = \frac{mr^2}{2}$.

3.4 Кинетическая энергия материальной точки определяется по формуле

а) $T = mV^2$; б) $T = \frac{mV^2}{2}$; в) $T = \frac{mr^2}{2}$.

3.5 Какая формула соответствует теореме об изменении количества движения материальной точки?

а) $m\overline{V} - m\overline{V}_0 = \overline{F}t$; б) $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \overline{F}\overline{s}$.

3.6 По какой формуле определяется кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении:

а) $T = \frac{mV^2}{2}$; б) $T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$; в) $T = \frac{J\omega^2}{2}$.

3.7 Какая формула соответствует принципу Даламбера:

а) $\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^n = 0$; б) $\sum \delta A\left(\overline{F}_k^a\right) = 0$; в) $\sum \delta A\left(\overline{F}_k^a\right) + \sum \delta A\left(\overline{F}_k^n\right) = 0$.

4. Решение тренировочных заданий

Задача 1

Определить реакции связей балки, показанной на рисунке. В точке *A* балка имеет неподвижную шарнирную опору, в точке *B* – подвижную шарнирную опору на катках. На балку действует силы P=5 кн; пара сил с моментом M = 2 кнм, равномерно распределена нагрузка интенсивностью q = 1 кн/м. Все действующие силы и размеры показаны на рисунке

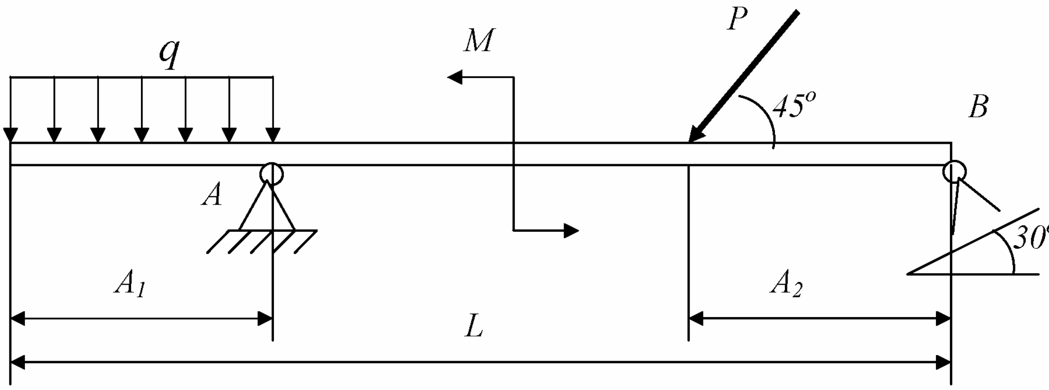


Рис.4.1.

Решение

1. Объектом равновесия является балка *AB*. На нее действует плоская система сил, поэтому выбираем плоскую систему отсчета, прямоугольные оси координат *XAY*.

2. На балку действуют: сосредоточенная сила *P*., в точке, пара сил с моментом *M*, распределенная нагрузка на участке *ДА*= a_1. Заменим распределенную нагрузку равнодействующей сосредоточенной силой:

$$Q = q{\cdot}a_1 = 1H$$

Эта сила приложена в середине участка *ДА*.

3. На балку наложены связи: в точке *A* шарнирно- неподвижная опора, в точке В- шарнирно- подвижная опора.

Отбрасываем связи и заменяем их реактивными силами. Реакция шарнирно- неподвижной опоры в точке *A* лежит в плоскости ⊥ оси шарнира (в плоскости чертежа), направление ее зависит от направления и величины активных сил, поэтому раскладываем ее на составляющие по координатным осям *Ax* и *Ay* –R_A- (X_A, $У_A$). Реакция катковой опоры в точке *B* направлена по нормалям к опорной поверхности. Силы, направленные под углом к осям координат, разложим на составляющие, параллельные осям:

$$P = P\cos 45^O + P\sin 45^O;$$

$$F_B = F_B\cos 30^O + F_B\sin 30^O$$

Расчетная схема приведена на рис. 4.2.

Таким образом, балка находится под действием плоской системы сил.

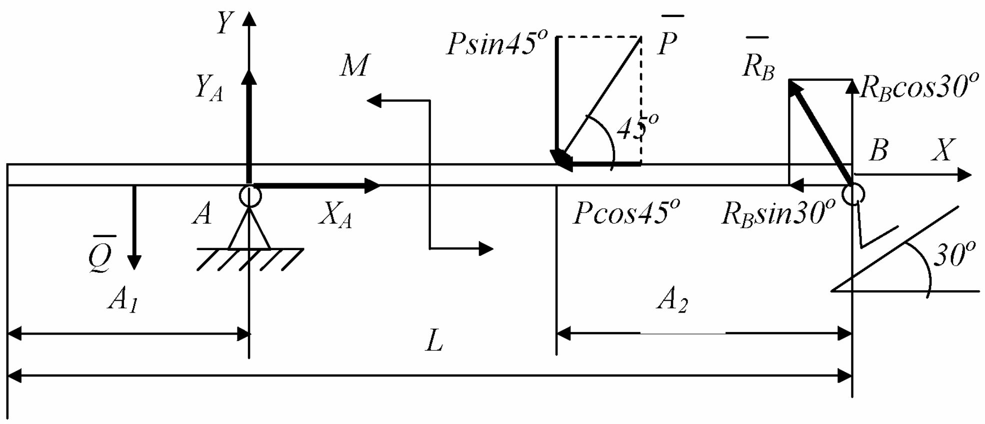


Рис.4.2.

1. Для плоской системы сил можно составить три не зависимых уравнения равновесия, в задаче три неизвестных силы X_A, $У_A$, R_B- задача статически определима.

2. Уравнения равновесия:

Σ Fix =0; X_A-Pcos 45°-$R_B$sin30°=0

Σ Fiy =0; Y_A-Q –Psin45° +$R_B$cos30°=0

$\Sigma M_A(Fi)=0$; $Q \cdot \frac{a_1}{2} + M - P\,sin\,45^o\left(\ell - a_1 - a_2\right) + R_B\,cos\,30^o\left(\ell - a_1\right) = 0$

из уравнения (4.3):

$$R_B = \frac{P \cdot sin\,45^o\left(\ell - a_1 - a_2\right) - Q\frac{a_1}{2} - M}{h_2} = \frac{5 \cdot 0{,}707(10 - 1 - 2) - 1 \cdot 0{,}5 - 2}{7{,}8} = 2{,}85\ кН$$

из уравнения (4.1):

$$X_A = P \cdot cos\,45° + R_B \cdot sin\,30° = 5\frac{\sqrt{2}}{2} + 2{,}85\frac{1}{2} = 4{,}97\ кН$$

из уравнения (4.2):

$$Y_A = Q + P \cdot sin\,45° - R_B \cdot cos\,30° = 2 + 5\frac{\sqrt{2}}{2} - 2{,}85\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3{,}54 - 2{,}47 = 3{,}07\ кН$$

$$R_A = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2} = \sqrt{4{,}97^2 + 3{,}07^2} = 5{,}87\ кН$$

Направление вектора R_A определим по направляющим косинусам:

$$cos\left(x\,\hat{}\,\overline{R}_A\right) = \frac{4{,}97}{5{,}87} = 0{,}8516;\ \ угол\left(x\,\hat{}\,\overline{R}_A\right) = 31{,}6°$$

Если в значении реактивной силы получаем знак “минус”, это значит, что реактивная сила направлена в сторону противоположную принятой по схеме.

Ответы: R_A = 5,87 кН, R_B = 2,85 кН

Задача 2

Определить скорость, касательное, нормальное и полное ускорение точки *M* механизма, показанного на рисунке 4.3 в момент времени t =10. Груз 1 опускается по закону S=0,4(t^3 +2t) м, R_1=0,1 м; R_2=0,15 м; R_3=0,3 м; R_4=0,6м.

Дано: S=0,4(t^3 +2t)
R_1= 0,1м
R_2= 0,15м
R_3= 0,3м
R_4= 0,6м
Определить $\overline{V}_M, \overline{a}_M^n, \overline{a}_M^\varepsilon, \overline{a}_M$

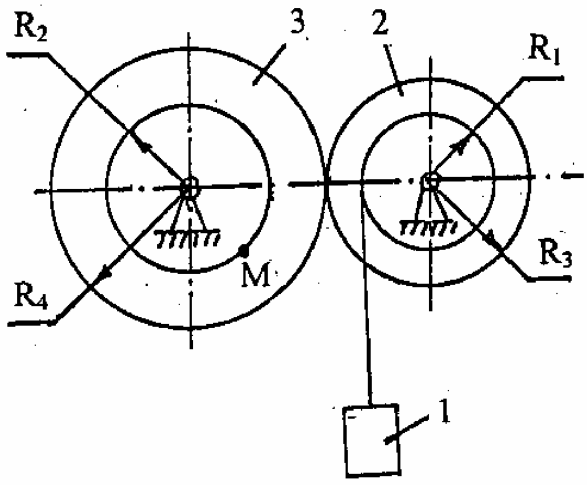


Рис. 4.3

Решение

1. Скорость точки *B* нити (скорость точки *B* колеса) равна:

$$V_B = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\left(0{,}4t^3 - 0{,}8t\right) = 1{,}2t^2 - 0{,}8$$

2. Угловая скорость ступенчатого колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R_1} = \frac{12t^2 - 8}{0{,}1} = 1{,}2t^2 - 8$$

3. Скорость точки А

$$V_A = \omega_2 \cdot R_3 = \left(12t^2 - 8\right) \cdot 0{,}3 = 3{,}6t^2 - 2{,}4$$

4. Угловая сокрость колеса 3

$$\omega = \frac{V_A}{R_4} = \frac{3{,}6t^2 - 2{,}4}{0{,}6} = 6t^2 - 4$$

5.Угловое ускорение колеса 3

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 12t \;\; E_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 12t$$

3. Скорость точки М

$$V_M = \omega_3 \cdot R_2 = \left(6t^2 - 4\right)0{,}15 \;\; V_M = \omega_3 \cdot R_2 = \left(6t^2 - 4\right)0{,}15$$

При t=2с: $V_M=(6*2^2-4)0{,}15=3$ м/с

7.Нормальное ускорение точки М (рис. 44)

$$a_м^n = \omega_3{}^2 \cdot R_2 = \left(6 \cdot t^2 - 4\right)^2 \cdot 0{,}15$$

При t=2с; $a_м^n = \left(6 \cdot 2^2 - 4\right)^2 \cdot 0{,}15 = 60 м/с^2$

8. Тангенциальное ускорение точки M

$$a_м^\tau = E_3 R_2 = 12 \cdot t \cdot 0{,}15$$

При t=2с: $a_м^\tau = 12 \cdot 2 \cdot 0{,}15 = 3{,}6 м/с^2$

9.Полное ускорение точки M

$$a_м = \sqrt{\left(a_м^n\right)^2 + \left(a_м^\tau\right)^2} = \sqrt{60^2 + 3{,}6^2} = 60{,}1 м/с^2$$

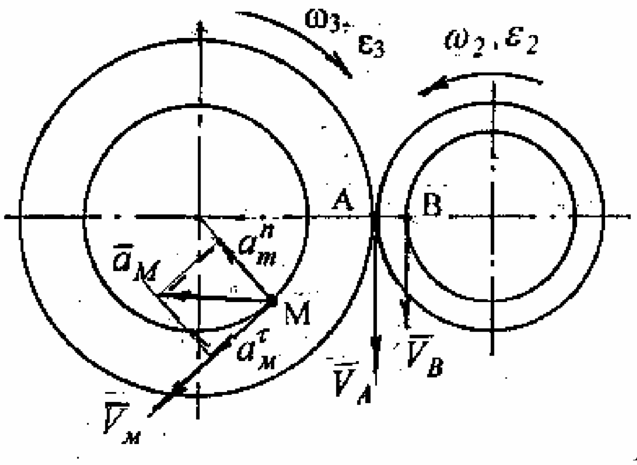


Рис. 4.4.

Ответы: V_M=15 м/с $a\frac{\tau}{a_\tau} = 0$,*18 м/с^2; $a\frac{n}{a_n}$=0,15 м/с^2; $a_м = 23{,}4$ м/с^2

Задача 3

В механической системе определить скорость груза 2, в момент времени, когда груз 1 переместится на величину S_1=1м, если m_1= 4кг, m_2=2кг, m_3=3кг, радиусы ступенчатого шкива R_3=20см, r_3=10см. Сила F, приложенная к грузу 1 изменяется по закону F=70 (1+S) (Н), коэффициент трения скольжения груза 1- f_1=0,12. Масса шкива равномерно распределена по его объему.

Дано: m_1=4 кг ; m_2=2 кг ; m_3=3 кг ; R_3=20 см ; r_3=10 см ; F=70 (1+S) (н);
f_1=0,12 ; S_1=1 м /

Определить V_2

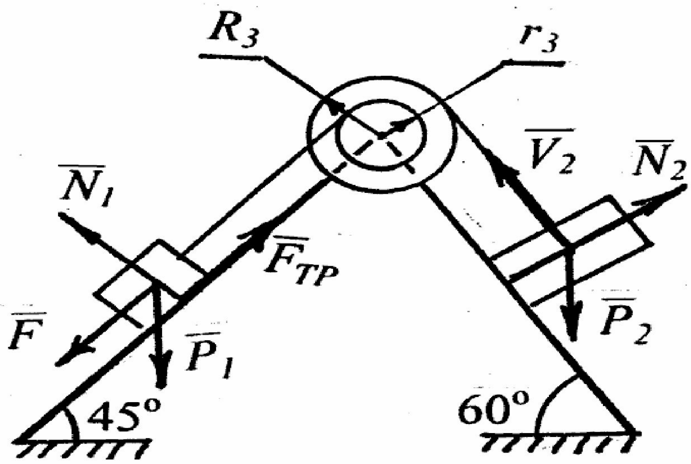


Рис. 4.5

Решение

1. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии системы - конечную форму записи

$$T - T_0 = \Sigma A = 0,$$

В начальный момент система находилась в покое - $T_O = 0$.

Уравнение (1) принимает вид: $T = \Sigma A$

1. *Определим T_1*

Т – кинетическая энергия системы в момент времени, соответствующий перемещению груза 1- на S_1

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

T_1- кинетическая энергия груза 1, перемещающегося поступательно.

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Выразим V_1 через скорость груза 2.

$$V_1 = \frac{V_2}{R_3} \cdot r_3 = \frac{V_2}{2}; \quad T_1 = \frac{m_1 V_2^2}{8}$$

T_2 - кинетическая энергия груза 2, перемещающегося поступательно.

$$T_2 = \frac{m_1 v_2^2}{2}$$

T_3- кинетическая энергия шкива 3, вращающегося вокруг неподвижной оси 0. $T_3 = J_O \dfrac{\omega_3^2}{2}$; J_O- момент инерции шкива

$J_O = \dfrac{1}{2} m_3 R_3^2$ относительно оси вращения.

Выразим угловую скорость ω_3 через скорость груза 2.

$$\omega_3 = \frac{V_2}{R_3}; \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{V_2^2}{R_3^2 2} = \frac{1}{4} m_3 V_2^2$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_2^2}{4}$$

Окончательно имеем:

$$T = \frac{m_1 V_2^2}{8} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{m_3 V_2^2}{4} = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{4} \right) \cdot V_2^2 = (0{,}5 + 1 + 0{,}75) \cdot V_2^2 = 2{,}25 V_2^2$$

3. Определим сумму работ всех внешних сил, действующих в системе на перемещениях, соответствующих S_1. Выразим все перемещения через S_1.

Покажем на схеме все внешние силы системы – $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ – силы тяжести элементов; $\overline{F}_{TP}$ – сила трения груза 1; $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, –нормальные реакции опорных поверхностей, $\overline{F}$ – движущаяся сила.

$$\Sigma A \frac{e}{i} = A_{p1} + A_{p2} + A_{p3} + A_{F_{TP}} + A_F + A_{N1} + A_{N2}$$

Работа силы тяжести $\overline{P}_1 - A_{P1}$

$$A_{P1} = P_1 \cdot h_1 = P_1 \cdot S_1 \cdot \sin 45^o = m_1 \cdot g \cdot S_1 \cdot \sin 45^o = 28{,}3 \text{ Дж}$$

g =10 м/с^2 - принимаем для всех расчетов.

Работа силы тяжести P_2-A_{P2}

$$A_{P2} = -P_2 h_2 = -m_2 g 2 s_1 \cdot \sin 60^o = -2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -34{,}6 \text{Дж}$$

$$h_2 = S_2 \cdot \sin 60^o = S_1 \cdot \frac{R_2}{r_3} \cdot \sin 60^o = 2 S_1 \cdot \sin 60^o$$

Работа силы тяжести P_3- $A_{p3} = 0$, т.к. точка приложения этой силы неподвижна.

Работа силы $\overline{F} - A_F$ $\overline{F} - A_F$

$$A_F = \int_0^{S_1} 70(1+S) ds = 70 S_1 + \frac{S_1^2}{2} \cdot 70 = 70 + 35 = 105 \text{Дж}$$

Работа силы трения $\overline{F}_{TP} - A_{FTP}$

$$A_{FTP} = -F_{TP} \cdot S_1 = -N_1 \cdot f_1 \cdot S_1 = -m_1 g \cdot \cos 45^o \cdot f_1 \cdot S_1 = -4 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0{,}12 \cdot 1 = -3{,}4$$

Работа реакций $A_{N_1} = A_{N_2} = 0$, так как эти силы перпендикулярны перемещениям.

Окончательно: $\sum A_i^e$ =28,3-34,6+105-3,4=95,3 *Дж*

4. Выражения (2) и (3) подставляем в уравнение (1)

$$2{,}25 V_2^2 = 95{,}3$$

$$V_2 = 6{,}5 \text{ м/с}$$

Ответ: Скорость груза 2 в момент времени соответствующий S_1 -

$$V_2 = 6{,}5 \text{ м/с}$$

Задача 4

Груз массой m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют сила Q и сила сопротивления среды R. С достигнутой на участке AB скоростью груз в точке B переходит на движение по участку BC. На этом участке на груз кроме силы тяжести действует сила F, направленная по линии движения груза (ось X) и сила трения скольжения. Коэффициент трения f. Найти закон движения груза на участке BC (рис. 4.6).

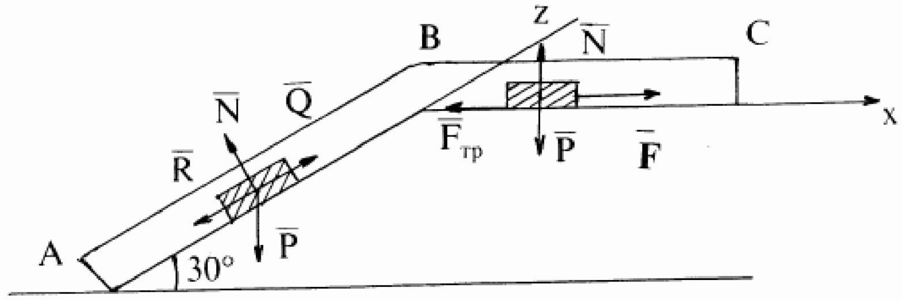


Рис.4.6

Дано: m=1,6 кг, V_0=18 м/с, Q=4 Н, R=0,4V Н,
t_1=2 с, f=0,2, F=4cos (4t) Н

Определить: закон движения на участке BC, т.е. $x=f(t)$

Решение

1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая его материальной точкой. На груз действует: $\overline{p} = m\overline{g}$ - сила тяжести, N - реакция опоры, силы $\overline{Q}$ и $\overline{R}$.

Покажем действующие силы на схеме

Проведем ось AZ по направлению движения груза и составим дифференциальное уравнение в проекциях на эту ось.

$$m\frac{dV_Z}{dt} = \Sigma F_{KZ}$$

$$m\frac{dV_Z}{dt} = Q - R - P\sin 30°$$

$$m\frac{dV_Z}{dt} = Q - 0{,}4V_Z - mg\sin 30°,$$

Решим полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных, предварительно выполнив необходимые преобразования.

$$\frac{dV_Z}{dt} = -\frac{0{,}4}{m}V_Z - g\sin 30° + \frac{Q}{m} = -\frac{0{,}4}{m}\left(V_Z + \frac{m}{0{,}4}g\sin 30° - \frac{Q}{0{,}4}\right)$$

Для сокращения записи подставим числовые значения:

$$\frac{dV_Z}{dt}=-\frac{0,4}{1,6}\left(V_Z+\frac{1,6}{0,4}10\sin 30^\circ-\frac{4}{0,4}\right)=-0,25(V_Z+10)$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dV_Z}{V_Z+10}=-0,25dt; \qquad \ell_n\left|V_z+10\right|=-0.25t+C_1$$

Определим постоянную интегрирования C_1 по начальным условиям:

$$t=0,\ V_{Z0}=18\ м/с.$$

Подставим эти значения переменных в уравнение (2):

$$\ell n|18+10|=0+C_1, C_1=\ell n28$$

Уравнение (2) примет вид:

$$\ell n|V_Z+10|=-0,25t+\ell n28$$

Преобразуем уравнение:

$$\ell n|V_Z+10|-\ell n28=-0,25t$$

$$\ell n\frac{|V_Z+10|}{28}=-0,25t; \ell n\frac{|V_Z+10|}{28}=-0,25t*\ell ne$$

$$\ell n\frac{|V_Z+10|}{28}=\ell ne^{-0,25t}$$

Из равенства логарифмов

$$\frac{V_Z+10}{28}=e^{-0,25t}; V_Z=28e^{-0,25t}-10$$

Скорость в точке В, для которой t=2с, получим:

$$V_B=28e^{-0,25*2}-10=6,95м/с$$

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС. На груз действует сила: $\overline{P}$ - сила тяжести, $\overline{F}_{тр}$ - сила трения, $\overline{N}$ - реакция опоры и заданная сила $\overline{F}$.

Покажем действующие на тело силы на схеме, при этом учтем, что сила трения направлена противоположно движению тела.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекциях на ось X:

$$m\frac{dV_X}{dt}=\Sigma F_{KX}$$

$$m\frac{dV_X}{dt}=F-F_{тр}=4\cos(4t)-F_{тр}, \qquad (3)$$

Определим силу трения:

$$F_{тр}=fN$$

Для определения силы N запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекциях на ось Y $(Y\perp X)$.

$$m\frac{dV_Y}{dt}=\Sigma F_{KY}$$

Так как при движении тела вдоль оси X координата Y не изменяется (т.е. Y=const), то $\frac{dV_Y}{dt}=0$ и, следовательно, $\Sigma F_{KY}=0$.

Запишем это равенство в соответствии со схемой сил
$N\text{-}P=0$, откуда $N=P=mg$; $F_{тр}=fmg$.

Уравнение (3) примет вид

$$m\frac{dV_X}{dt}=4\cos(4t)-fmg$$

$$\frac{dV_X}{dt}=\frac{4}{m}\cos(4t)-fg$$

$$\frac{dV_X}{dt}=\frac{4}{1{,}6}\cos(4t)-0{,}2*10=2{,}5\cos(4t)-2$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$dV_X=2{,}5\cos(4t)dt-2dt \qquad V_X=\frac{2{,}5}{4}\sin(4t)-2t+C_2,$$

Начальные условия для участка BC: $t=0$, $V_X=V_B=6{,}95$ м/с.
Подставим начальные условия в уравнение $6{,}95=C_2$

Учитывая, что $V_X=\frac{dx}{dt}$ и C_2=6,95, уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2{,}5}{4}\sin(4t)-2t+6{,}95; dx=0{,}625\sin(4t)dt-2tdt+6{,}95dt$$

$$X=-0{,}156\cos(4t)-t^2+6{,}95t+C_3,$$

Определяем C_3 из начальных условий: $t=0$, $X_0=0$

$$0=-0{,}156+C_3;\ C_3=0{,}156$$

Окончательно уравнение примет вид

$$X=-0{,}156\cos(4t)-t^2+6{,}95t+0{,}156$$

Ответ: Закон движения груза на участке BC

$$X=-t^2+6{,}95t-0{,}156\cos(4t)+0{,}156$$

Задача 5

Даны уравнения движения точки в плоскости XY:

$$X=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3,\ Y=2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-1$$

(X, Y- в см, t – в с).

Определить:

1) уравнение траектории точки;
2) скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны траектории при t=1 с.

Решение:

Для определения уравнения траектории точки y=f(x) необходимо исключить из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right), \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения функций:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}$$

Полученные значения функций подставляем в равенство (1).

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки.

$$X = (y+1)^2 + 1$$

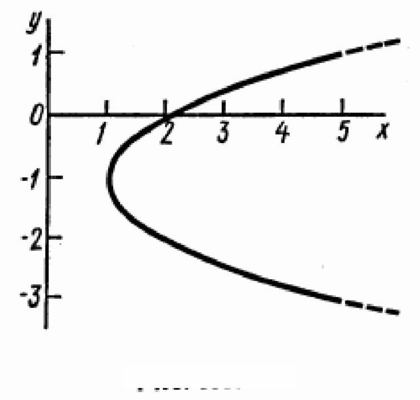


Рис.4.7.

1. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

при $t_1 = 1$ *с*: $v_{1x} = 1{,}11$ *см/с*, $v_{1y} = 0{,}73$ *см/с*, $v_1 = 1{,}33$ *см/с*

2. Аналогично найдем ускорение точки

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right); a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ *с*:

$$a_{1x} = 0{,}87 см/с^2,\ a_{1y} = -0{,}12 см/с^2;\ a_1 = 0{,}88 см/с^2$$

3.Касательное ускорение a_τ найдем, дифференцируя по времени равенство $V^2 = V_x^2 + V_y^2$. Получим:

$$2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\frac{dV_y}{dt} \quad \text{и} \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

Числовые значения величин V_x, V_y, a_x, a_y, входящих в правую часть выражения, определены выше. Подставив эти значения, найдем, что при t_1=1 с $a_{1\tau} = 0{,}66 см/с^2$.

4. Нормальное ускорение точки найдем из равенства $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$, откуда $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при t_1=1 с, a_{1n}=0,58 см/с^2.

5. Радиус кривизны траектории определим из выражения $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$ или $\rho = V^2 / a_n$. Подставляя числовые значения V_1 и a_{1n}, найдем, что при t_1=1 с, ρ_1=3,05 см.

Ответ: V_1=1,33 см/с, a_1=0,88 см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66 см/с^2$

a_{1n}=0,58 см/с^2, ρ_1=3,05 см.

Задача 6

Однородный стержень длиной ℓ, массой *m* прикреплен под углом α к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω=const.

Вал закреплен в подпятнике *A* и в цилиндрическом подшипнике *B*. Отрезки *AK=KB=a*. Определить реакции связей вала.

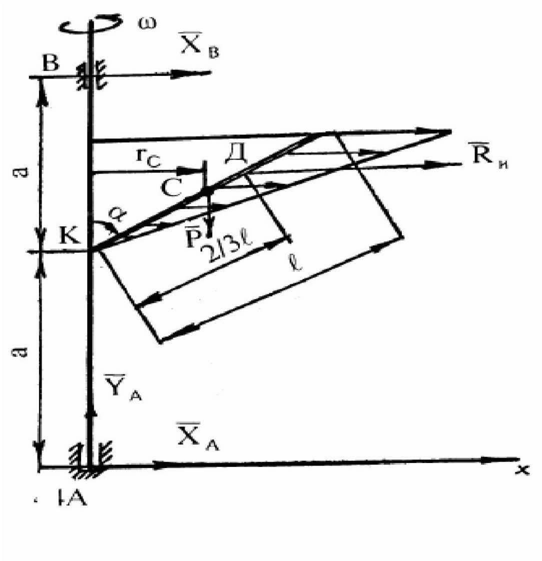


Рис.4.8

Дано: m, ℓ, a, α, ω=const

Определить реакции связей.

Решение.

Строим расчетную схему.
Применим для решения принцип Даламбера. Изобразим действующие на систему силы: силу тяжести $\overline{P} = m\overline{g}$, реакции связей $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B$, силы инерции элементов однородного стержня. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $a_K^n = \omega^2 r_K$, где r_K- расстояние элементов стержня от оси вращения. Силы инерции элементов стержня направлены от оси вращения и численно равны

$$F_K^u = m_K \omega^2 r_K$$

Эпюра сил инерции элементов стержня образует треугольник. Полученную систему параллельных сил заменим равнодействующей, равной главному вектору этих сил.

$$\overline{R}^u = -m\overline{a}_C ,$$

где $\overline{a}_C$ *- вектор ускорения центра масс стержня*

Линия действия равнодействующей $\overline{R}^{u}$ должна проходить через центр тяжести эпюры сил инерции.

Центр тяжести треугольника находится на расстоянии 2/3 его высоты от вершины (или 1/3 от основания).

Таким образом, равнодействующая сила инерции стержня численно равна

$$R^{u} = ma_C = m\omega^2 r_C = m\omega^2 * \frac{\ell}{2}\sin\alpha$$

Вектор силы $\overline{R}^{u}$ приложен в т. *Д*, находящейся на расстоянии 2/3ℓ от точки К.

Полученная система сил $\left\{\overline{P}, \overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B, \overline{R}^{u}\right\}$ уравновешена.

1. $\Sigma F_{KX} = 0$; $\quad X_A + R^{u} + X_B = 0$,
2. $\Sigma F_{KY} = 0$; $\quad Y_A - P = 0$
3. $\Sigma M_A\left(\overline{F}_K\right) = 0$; $\quad -\Pr_C - R^{u}\left(a + \frac{2}{3}\ell\cos\alpha\right) - X_B * 2a = 0$

Решим полученную систему уравнений. Из уравнения (2): $Y_A = P = mg$.
Из уравнения (3):

$$X_B = \frac{1}{2}a\left[-\Pr_C - R^{u}\left(a + \frac{2}{3}\ell\cos\alpha\right)\right] =$$
$$\frac{1}{2}a\left[-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha - m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\alpha\left(a + \frac{2}{3}\ell\cos\alpha\right)\right].$$

Из уравнения (1):

$$X_A = -R^{u} - X_B = -m\omega^2\frac{\ell}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}a *$$
$$\left[mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + m\omega\frac{2\ell}{2}\sin\alpha * \left(a + \frac{2}{3}\ell\cos\alpha\right)\right]$$

Ответ: $X_A = \frac{m\ell}{4a}\left(g\sin\alpha + \omega^2\sin\alpha * a + \frac{2}{3}\omega^2\ell\sin\alpha * \cos\alpha\right)$

$Y_A = mg$

$X_B = -\frac{m\ell}{4a}\left(g\sin\alpha + \omega^2 * a\sin\alpha + \frac{2}{3}\ell\omega^2 * \sin\alpha\cos\alpha\right)$

5. Тесты по дисциплине

1. Какой вектор в механике называют скользящим?
а) вектор равнодействующей системы сил;
б) вектор силы;

в) вектор скорости.

2. Какую способность силы характеризует момент?
а) вращательную способность силы;
б) способность силы совершать поступательное движение;
в) способность силы быть перемещенной по линии ее действия.

3. Что такое пара сил?
а) Система двух сил, линии действия, которых параллельны;
б) Система двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению;
в) Система двух равных по модулю, параллельных, направленных в противоположных стороны и не лежащих на одной прямой сил действующих на абсолютно твердое тело.

4. Какое из выражений определяет необходимые и достаточные условия для равновесия произвольной плоской системы сил?
а) $\Sigma F_{kx} = 0; \ \Sigma F_{Ry} = 0;$
б) $\Sigma F_{kx} = 0; \ \Sigma F_{ky} = 0;$
в) $\Sigma F_{kx} = 0; \qquad \Sigma M_z(\overline{F}_k) = 0.$
$\Sigma F_{ky} = 0; \qquad \Sigma M_y(\overline{F}_k) = 0.$
$\Sigma F_{ля} = 0; \qquad \Sigma M_x(\overline{F}_k) = 0.$

5. Что называется интенсивностью распределения нагрузки?
а) Это значение силы приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка;
б) Это сила, которая заменяет действие на тело распределенной силы;
в) Эта сила, численно равное площади эпюры распределенной нагрузки.

6.При координатном способе задания движения точки, закон движения определяется следующим выражением:
а) $\overline{r} = x\overline{i} + g\overline{j} + z\vec{k}$;
б) $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$;
в) $S = f(t)$.

7. Каким образом направлен вектор скорости точки в данной момент времени?
а) вектор скорости направлен по нормали к траектории;
б) вектор скорости направлен вдаль хорды в сторону движения точки;
в) вектор скорости точки направлен по касательной и траектории в сторону движения.

8. Скорость точки тела, совершающего вращательное движение определить по формуле:

а) $U = R \cdot \omega$; б) $U = \frac{\pi n}{30}$; в) $U = U_0 + at$.

9. Как определить скорость точки тела, совершающего плоскопараллельное движение?

а) Как геометрическую сумму скоростей точки A принятой за полюс вращения и скорости рассматриваемой точки при вращении вокруг точки А;

б) Аналогично определению вектора скорости при вращательном движении;

в) Как сумма проекций скоростей двух точек, принадлежащих рассматриваемому телу.

10. Что такое переносное движение точки?

а) Движение точки совершаемое относительно подвижной системы отсчета;

б) Движение совершаемое подвижной системой отсчета(и связанными с ней точками) относительно неподвижной системе отсчета;

в) Движение точки совершаемое по отношению к неподвижной системе отсчета;

11. Как можно сформулировать вторую (основную) задачу динамики для материальной точки?

а) Зная закон движения точки определить действующую на нее силу;

б) Зная действующие на точку силы определить закон движение точки;

в) Зная закон движения определить реакцию связей, наложенных на точку.

12. Что такое количество движения материальной точки?

а) векторная величина равное произведению масса точки на ее скорость mU;

б) векторная величина равное произведению силы, действующей на точку на элементарный промежуток времени Δt $\overline{F} \cdot$dt;

в) векторная величина равное отношению силы, действующей на точку к элементарному перемещению $\frac{\overline{F}}{ds}$.

13. Кинетическую энергию системы можно определить по формуле:

а) $\frac{mU^2}{2} = T$; б) $\Sigma \frac{m_k U_k^{\ 2}}{2} = T$; в) $\Sigma \frac{m_k U_k^{\ 2}}{2} - \Sigma \frac{m_{k0} U_{k0}^{\ 2}}{2} = T$.

14. Принцип Даламбера формулируется следующим образом?

а) При движении системы сумма работ всех активных сил и сил инерции системы равных нулю;

б) В каждый момент времени заданные силы и реакции связей, действующие на материальную точку (тело) как бы уравновешиваются силой инерции;

в) Сумма работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе равна изменению количества движения системы.

15. Момент инерции цилиндра относительно оси Z находится по формуле:

а) $J_z = mR^2$; б) $J_z = \frac{mR^2}{2}$; в) $J_z = mR$.

Ответы на тесты по темам

Ответы на тесты по теме “Статика”

1.1- б); 1.2- в); 1.3- б); 1.4- б); 1.5- в); 1.6- б).

Ответы на тесты по теме “Кинематика”

2.1- б); 2.2- б); 2.3- а); 2.4- б); 2.5- а).

Ответы на тесты по теме “Динамика”

3.1- а); 3.2- б); 3.3- б); 3.4- б); 3.5- б); 3.6- б); 3.7- а).

Список рекомендуемой литературы

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2001г. - с. (и другие издания)

3. Яблонский А.А., Никифорова В.Н. Курс теоретической механики. М. “Лань”, 2000г. – с. (и другие издания).