ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

Лекция 1

Краткое содержание: Введение в теоретическую механику. Введение в статику. Элементы векторной алгебры: понятие вектора, свойства векторов, правые и левые системы координат, скалярное и векторное произведение двух векторов.

Введение

Теоретическая механика – это наука в которой изучаются механические движения вещественных форм материальных объектов.

Теоретическую механику называют еще классической механикой или механикой Ньютона.

Механическое движение – это перемещение материальных объектов в пространстве с течением времени без рассмотрения физических свойств этих объектов и их изменения в процессе движения.

Теоретическая механика изучает только вещественные формы материальных объектов. Элементарные частицы и различные поля не являются предметом изучения в теоретической механике.

Движение материальных объектов происходит в пространстве и во времени. Пространство является трехмерным пространством Эвклида.

Теоретическая механика является базой для других разделов механики (теории упругости, сопротивления материалов, теории механизмов и машин и пр.) и многих технических дисциплин.

Теоретическая механика делится на три части: статику, кинематику и динамику. Главной частью является динамика.

Изучение теоретической механики обычно начинается со статики.

Рекомендуемая литература:

1. В.В.Добронравов, Н.Н.Никитин «Курс теоретической механики». М., Высшая школа, 1974 г. и последующие издания.
2. С.М.Тарг. «Краткий курс теоретической механики». М., Высшая школа, 2001 г.
3. А.А.Яблонский. «Курс теоретической механики». М., Высшая школа 1977 г. и последующие издания.
4. Г. Корн и Т. Корн. СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ. Для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970

Статика. Введение.

Статика - это раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием тела в статике понимается состояние его покоя по отношению к другим телам, принимаемым за неподвижные.

Элементы векторной алгебры

В теоретической механике рассматриваются такие векторные величины как сила, моменты силы относительно точки и оси, момент пары сил, скорость, ускорение и другие.

1. Понятие вектора.

Для определенности рассматриваем прямоугольную декартову систему координат.

Вектор это направленный отрезок, который характеризуется длиной и направлением.

Операции над векторами. Вектора можно складывать и умножать на число.

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$ сумма двух векторов есть вектор

$\alpha \cdot \bar{a}=\bar{b}$ произведение вектора на действительное число есть вектор

$\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$ существует нулевой вектор

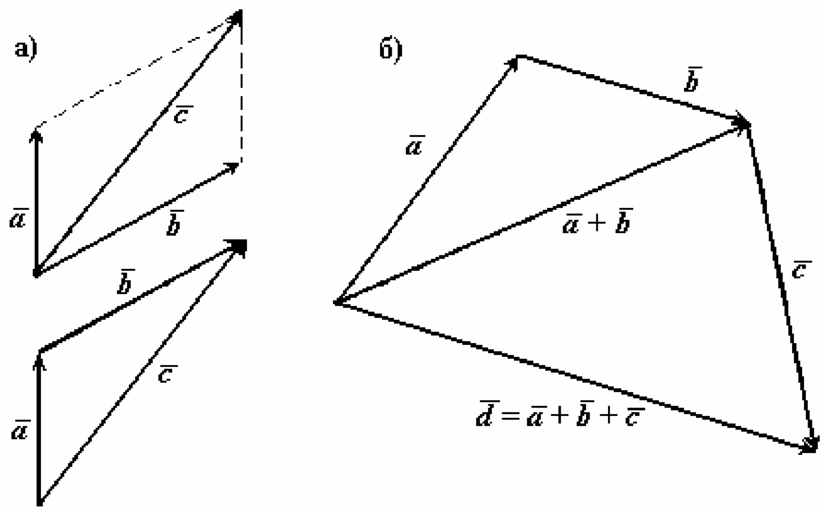


Рис. 1-1

В математике все вектора являются свободными, их можно переносить параллельно самим себе.

В сумме двух векторов (рис. 1-1а) начало второго вектора можно поместить в конец первого вектора, тогда сумму двух векторов можно представить как вектор, имеющий начало в начале первого вектора, а конец в конце второго вектора. Применяя это правило для суммы нескольких векторов (рис. 1-1б) получаем, что суммой нескольких векторов является вектор замыкающий ломаную линию, состоящую из слагаемых векторов.

Операции над векторами подчиняются следующим законам (см. рис. 1-2):

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ $\quad\quad$ $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{a})=(\alpha \cdot \beta)\cdot \bar{a}$ $\quad\quad$ $(\alpha+\beta)\cdot \bar{a}=\alpha \cdot \bar{a}+\beta \cdot \bar{a}$

$$\alpha \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \alpha \cdot \overline{a} + \alpha \cdot \overline{b} \qquad 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$$

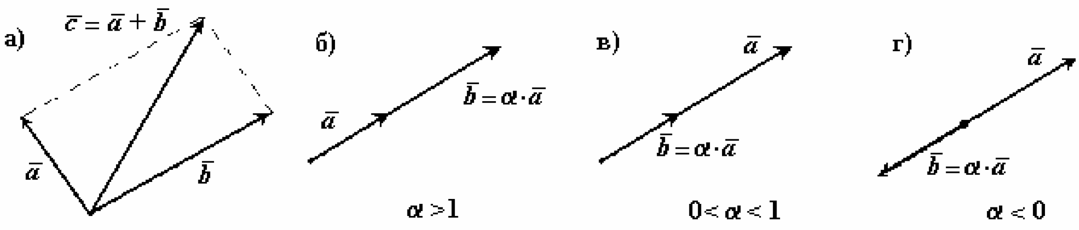


Рис. 1-2

2. Правые и левые системы координат.

Декартовы системы координат делятся на два вида: **правую и левую**.

Рассмотрим декартовы системы координат на плоскости (см. рис. 1-3).

При повороте оси Ox правой системы координат на 90° против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .

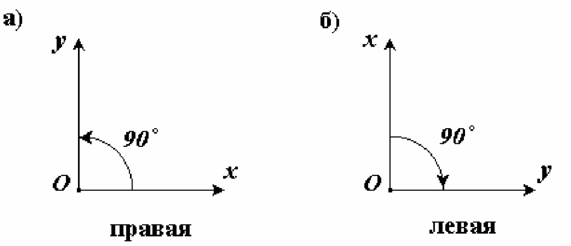


Рис. 1-3

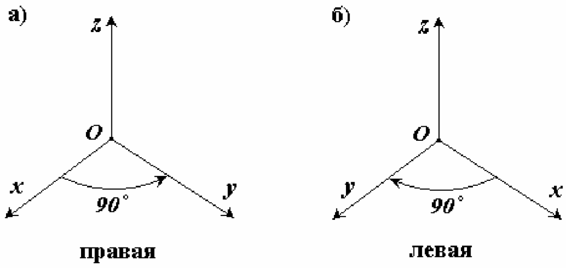


Рис. 1-4

Рассмотрим декартовы системы координат в пространстве (см. рис. 1-4).

При повороте оси Ox правой системы координат вокруг оси Oz на 90° против часовой стрелки она совпадает с осью Oy .

3. Длина, проекции и направляющие косинусы вектора.

В дальнейшем будем рассматривать правую декартову систему координат. Единичные вектора вдоль осей Ox, Oy и Oz образуют систему единичных (или базисных) векторов. Любой вектор, имеющий начало в точке O, можно представить как сумму $\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k},$ числа (a_x , a_y , a_z) - это проекции вектора $\overline{a}$ на оси координат (см. рис. 1-5).

Длина (или модуль) вектора $\overline{a}$ определяется формулой $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и обозначается a или $\left|\overline{a}\right|$

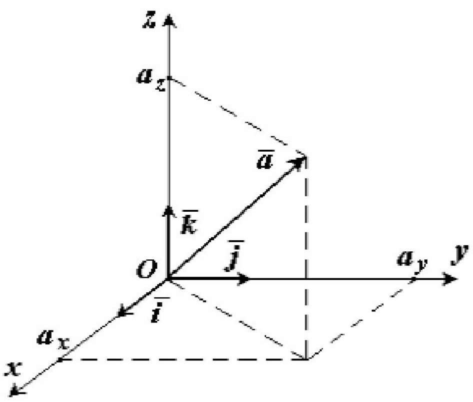


Рис. 1-5

Проекцией вектора на ось называется скалярная величина, которая определяется отрезком, отсекаемым перпендикулярами, опущенными из начала и конца вектора на эту ось. Проекция вектора считается положительной (+), если направление ее совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной (-), если проекция направлена в противоположную сторону (см. рис. 1-6).

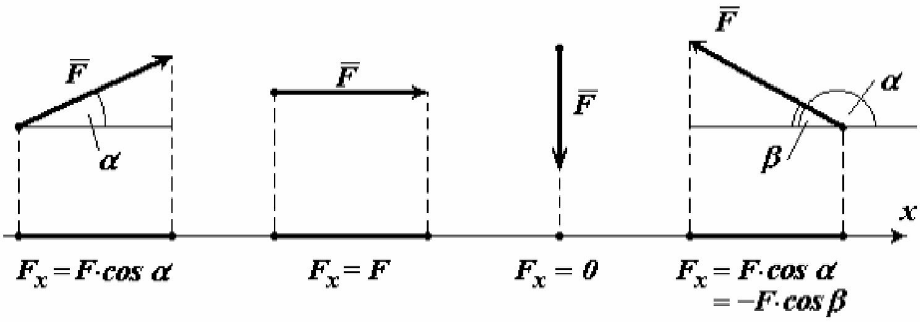


Рис. 1-6

Направляющими косинусами $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ вектора называются косинусы углов между вектором и положительными направлениями осей ***Ox***, ***Oy*** и ***Oz*** соответственно.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

Любая точка пространства с координатами (x, y, z) может быть задана своим радиус-вектором

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

Координаты (x, y, z) это проекции вектора $\bar{r}$ на оси координат.

4. Скалярное произведение двух векторов

Имеется два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. $\qquad \bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\qquad \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Результатом скалярного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является скалярная величина (число).

Записывается как $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$. Скалярное произведение двух векторов равно $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\alpha)$

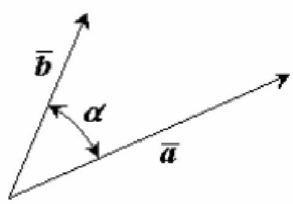


Рис. 1-7

Свойства скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a} \qquad\qquad \bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$$

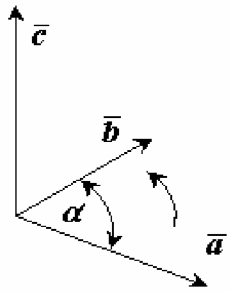
$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|^2=a^2\geq 0$$

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1 \qquad\qquad \bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k})\cdot(b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k})=$$
$$=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

5. Векторное произведение двух векторов

Имеется два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. $\qquad \bar{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\bar{b}=(b_x,b_y,b_z)$.



Результатом векторного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является вектор $\bar{c}$. Записывается как $\bar{a}\times\bar{b}$ или $[\bar{a},\ \bar{b}]$.

Векторное произведение двух векторов это вектор $\bar{c}$, перпендикулярный к обоим этим векторам, и направленный так, чтобы с его конца поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ был виден против часовой стрелки.

Рис. 1-8

Длина (или модуль) векторного произведения равна $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin(\alpha)$.

Свойства векторного произведения:

$$\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a} \qquad\qquad \bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$$
$$(\alpha\cdot\bar{a})\times\bar{b}=\alpha\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) \qquad\qquad \bar{a}\times\bar{a}=0$$
$$\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=0$$

Векторное произведение двух векторов вычисляется через их проекции следующим образом:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\bar{i}+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\bar{k}=$$
$$=(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y)\cdot\bar{i}+(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z)\cdot\bar{j}+(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x)\cdot\bar{k}$$

$$c_x=(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y)$$

$$c_y=(a_z\cdot b_x-a_x\cdot b_z)$$

$$c_z=(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x)$$

Лекция 2

Краткое содержание: Основные понятия и определения статики: материальная точка и абсолютно твердое тело, механическая система, сила, система сил. Аксиомы и теоремы статики.

Основные понятия и определения статики

Материальным телом называется некоторое количество вещества, которое заполняет какой-нибудь объем в пространстве. Возможны случаи, когда тело в тех или иных направлениях имеет весьма малые размеры по сравнению с размерами в других направлениях.

Материальной точкой называется простейшая модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы, и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механическим воздействием одного тела на другое называется такое воздействие, при котором пренебрегают изменениями в химической структуре тела и его физическом состоянии. Если тело испытывает механическое воздействие со стороны других материальных тел, то оно может изменять свое движение в пространстве или оставаться в покое. Механическое воздействие может происходить как при соприкосновении тел, так и на расстоянии (притяжение, отталкивание).

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или **неизменяемой механической системой**) называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Сила - это основная количественная мера механического воздействия одного тела на другое, которая характеризует его интенсивность и направление.

Природа силы может быть различной. Это могут быть гравитационные, электромагнитные, упругие силы или силы давления. Теоретическая механика не интересуется природой сил.

Сила определяется точкой приложения, числовым значением и направлением действия, т.е. **является векторной величиной**.

Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Для статического измерения силы служат приборы, называемые **динамометрами**.

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора (например, $\overline{F}$ или $\overline{P}$). Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора или те же буквы, но без знака вектора (например, $|\overline{F}|$ и $|\overline{P}|$ или F и P).

Системой сил называется группа сил, которые действуют на рассматриваемое тело или (в общем случае) на точки механической системы.

Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, - то система сил называется **пространственной**.

Системой сил эквивалентной нулю (или **уравновешенной системой сил**) называется такая система сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \text{ эквивалентна } 0$$

Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях.

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \text{ эквивалентна } \left(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \ldots, \overline{F}'_k\right)$$

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называется сила, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующую силу обозначают обычно $\overline{R}$

$$\left(\overline{R}\right) \text{ эквивалентна } \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right)$$

Уравновешивающей силой рассматриваемой системы сил называется сила, добавление которой к заданной системе сил дает новую систему, эквивалентную нулю.

Уравновешивающая сила равна по модулю равнодействующей и противоположна ей по направлению.

Сила, приложенная к телу в одной его точке называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки данного объема, данной части поверхности тела или данной части кривой, называются **распределенными**.

Понятие о сосредоточенной силе является условным. Силы, которые в механике рассматриваются как сосредоточенные, представляют собой равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

Аксиомы статики

Аксиома о равновесии двух сил. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

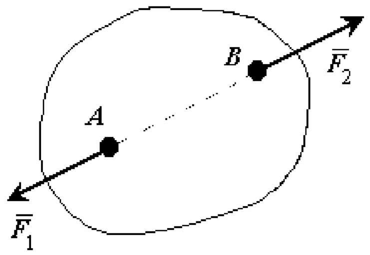


Рис. 2-1

Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил. Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) уравновешенную систему сил. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил эквивалентна первоначальной.

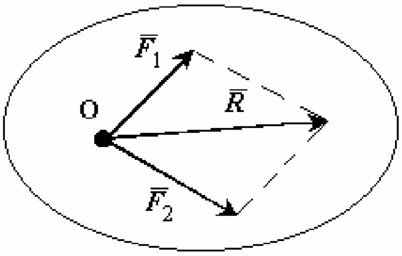


Рис. 2-2

<u>Аксиома параллелограмма сил.</u> Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах. $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right)}$$

Эта аксиома допускает и обратное утверждение:

Силу можно разложить бесчисленным множеством способов на две силы, приложенные в любой точке линии действия данной силы.

<u>Аксиома о равенстве действия и противодействия</u>. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

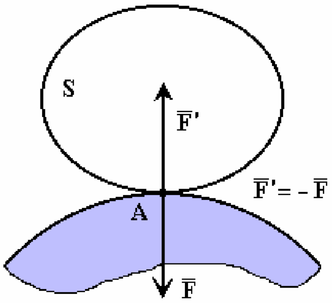


Рис. 2-3

Если к данному телу приложена сила воздействия $\overline{F}$ от другого тела, то от данного тела к другому телу будет приложена сила $\overline{F'}$, равная и прямо противоположная силе $\overline{F}$. Силы приложены в одной геометрической точке, но к разным телам.

<u>Свободным твердым телом</u> называется тело, имеющее возможность получать любое движение из данного положения, для чего необходимо приложить соответствующую силу.

При решении большинства задач механики приходится иметь дело с телами **<u>несвободными</u>**, т.е. лишенными возможности перемещаться в направлении действия приложенных к ним активных сил. Тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела, называются **<u>связями</u>**. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении называется **<u>силой реакции</u>** (противодействия) **<u>этой связи</u>** или просто **<u>реакцией связи</u>**.

<u>Аксиома о связях</u>. Эффект от действия связей такой же, как от действия определенных, дополнительных сил, которые могут быть приложены к свободному телу вместо связей.

Аксиому о связях называют также **<u>принципом освобождаемости от связей.</u>** Согласно этой аксиоме, не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией связи.

Силы, которые могут сообщать свободному телу движение, называются **<u>активными силами</u>**. Приложив к телу, кроме активных сил, реакции связей, можно рассматривать тело как свободное. Активные силы и силы реакции называются внешними силами.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар. Плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу $\overline{N}$, равную по модулю весу шара $\overline{P}$ и противоположную ему по направлению. Сила $\overline{N}$ и есть реакция плоскости (реакция связи). Шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действует задаваемая (активная) сила $\overline{P}$ и реакция плоскости $\overline{N}$.

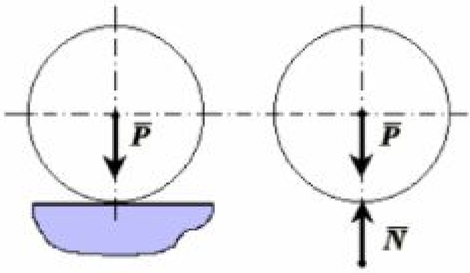
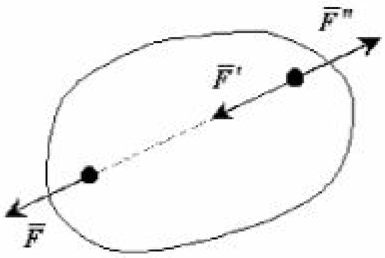


Рис. 2-4

Аксиома отвердевания. Равновесие механической системы не нарушается от наложения новых связей; в частности, равновесие механической системы не нарушится, если все части системы связать между собой неизменно, жестко.

Теоремы статики

Теорема о переносе силы вдоль линии действия. Действие силы на твердое тело не изменится от переноса силы вдоль своей линии действия.



$(\overline{F})$ эквивалентна $(\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}'')$

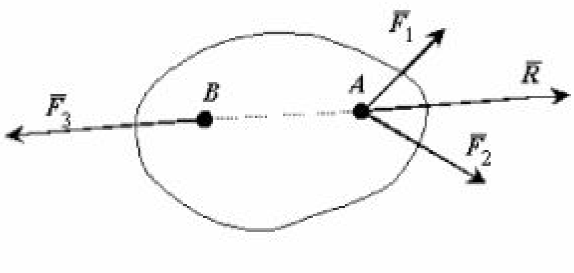
$\overline{F}'' = -\overline{F}'$

$(\overline{F}, \overline{F}'')$ эквивалентна 0

$(\overline{F})$ эквивалентна $(\overline{F}')$

Рис. 2-5

Теорема о трех силах. Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пресекаются в одной точке.



$(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ эквивалентна $(\overline{R})$

$(\overline{R}, \overline{F}_3)$ эквивалентна (0)

следовательно силы пересекаются в одной точке.

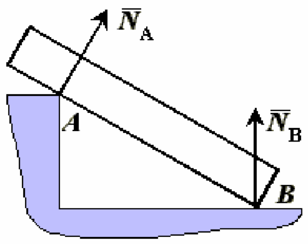
Рис. 2-6

Лекция 3

Краткое содержание: Соединение тел между собой и направление сил реакции связей. Система сходящихся сил. Условия равновесия системы сходящихся сил. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси.

Соединение тел между собой

Отдельное тело может быть связано с другими телами разными способами.



Опирание на поверхность

Если соприкасаются абсолютно гладкие тела, то силы взаимодействия между ними направлены по общей нормали к их поверхностям в точке соприкосновения.

Рис. 3-1

Связь с помощью нитей (нить, цепь, трос)

Связь, осуществляемая в виде гибкой нерастяжимой и невесомой нити, не дает удаляться телу от точки подвеса нити вдоль нити. Поэтому реакция натянутой нити также направлена вдоль нити, к точке ее подвеса.

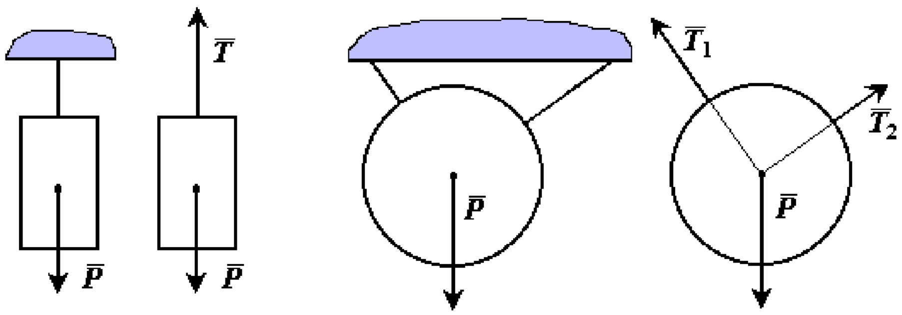
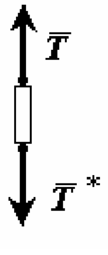


Рис. 3-2

Освободим гирю от связи разрезав (мысленно) нить в любом месте и добавив силу реакции связи, которую направим вдоль нити вверх (обозначим ее $\bar{T}$). Гиря становится свободным твердым телом на которое действуют две силы и при этом оно находится в покое. Согласно аксиоме о равновесии двух сил, силы $\bar{P}$ и $\bar{T}$ равны по величине и противоположны по направлению.



Вырежем (мысленно) кусочек нити в любом месте и добавим в местах разреза силы реакции связи (обозначим их $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$). Тело под действием двух сил находится в равновесии. Согласно аксиоме о равновесии двух сил, силы $\bar{T}$ и $\bar{T}^*$ равны по величине и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны. Реакция связи натянутой нити направлена вдоль нити

Соединение тел с помощью шарниров.

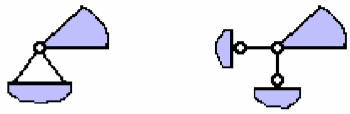
Шарниром называется устройство, связывающее тела и позволяющее совершать вращение одного тела относительно другого.

Цилиндрический шарнир допускает вращение тел вокруг одной оси (и скольжение вдоль нее).

Шарнирно-неподвижная опора препятствует любому поступательному движению, но дает возможность свободно вращаться вокруг оси шарнира.

Реакция $\overline{R}$ шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира O и лежит в плоскости перпендикулярной к оси шарнира, но ее модуль и направление неизвестны.

Условные обозначения:



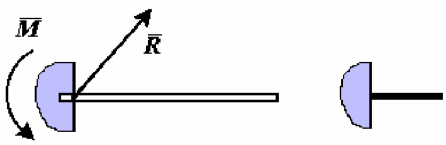
Шарнирно-подвижная опора (шарнирно-неподвижная опора поставленная на катки) не препятствует перемещению параллельно опорной поверхности. Если не учитывать трения катков, то линия действия реакции такой опоры проходит через центр шарнира перпендикулярно опорной поверхности. Неизвестен только модуль этой реакции.

Условные обозначения:

Шаровой шарнир. Шаровым шарниром называется устройство, позволяющее сочлененным телам, имеющим общую точку сочленения, совершать вращение в пространстве относительно друг друга вокруг общей точки. Шаровой шарнир состоит из сферической чаши, находящейся на одном теле, и сферического выступа того же диаметра на другом. Реакция в шаровом шарнире может иметь любое направление в пространстве.

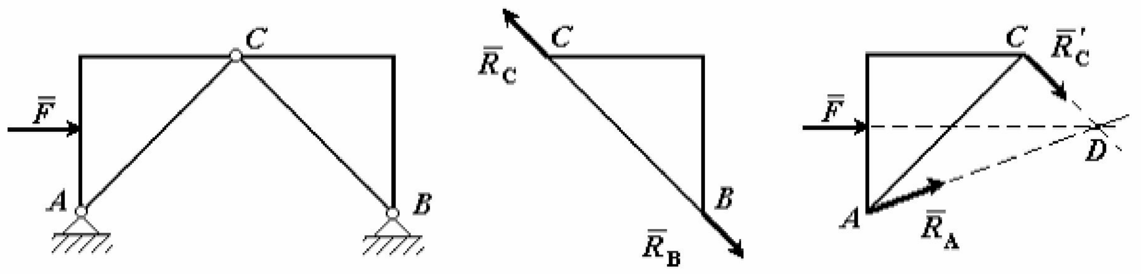
Жесткая заделка.

В случае заделки одного тела в другое реакция связи состоит из силы $\overline{R}$ и пары сил с моментом $\overline{M}$. Величина и направление реакции определяется из общих уравнений равновесия твердого тела.



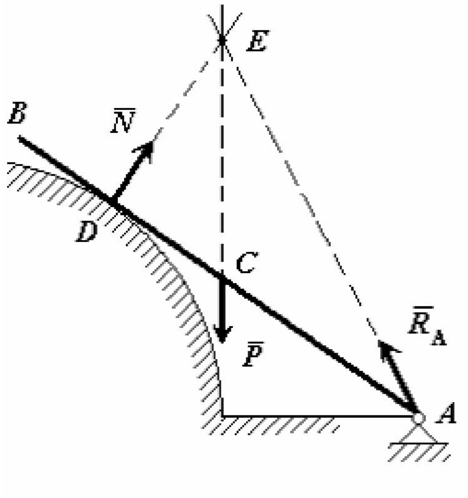
Пример 2-1. На невесомую трехшарнирную арку действует горизонтальная сила $\overline{F}$. Определить линию действия реакции $\overline{R_A}$ (реакции связи в точке А).

Решение: Рассмотрим правую часть арки отдельно. В точках В и С приложим силы реакции связей $\overline{R_B}$ и $\overline{R_C}$. Тело под действием двух сил находится в равновесии. Согласно аксиоме о равновесии двух сил, силы $\overline{R_B}$ и $\overline{R_C}$ равны по величине и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны. Таким образом направление силы $\overline{R_C}$ нам известно (вдоль линии ВС).



Рассмотрим левую часть арки отдельно. В точках А и С приложим силы реакции связей $\overline{R_B}$ и $\overline{R'_C}$. Сила $\overline{R'_C} = -\overline{R_C}$, действие равно противодействию. На тело действуют три силы, направления двух сил ($\overline{F}$ и $\overline{R'_C}$.) известно. Согласно теореме о трех силах линии действия всех трех сил пресекаются в одной точке. Следовательно, сила $\overline{R_A}$ направлена вдоль линии AD.

Пример 2-2. Однородный стержень закреплен шарнирно в точке А и опирается на гладкий цилиндр. Определить линию действия реакции $\overline{R_A}$ (реакции связи в точке А).



Решение: Так как стержень однородный, то равнодействующая сил тяжести (сила $\overline{P}$), действующих на стержень, приложена в его геометрическом центре (точка С). Так как стержень опирается на гладкую поверхность, то реакция связи (сила $\overline{N}$) в точке касания (точка D) направлена по нормали к этой поверхности. На тело действуют три силы, направления двух сил ($\overline{N}$ и $\overline{P}$.) известно. Согласно теореме о трех силах линии действия всех трех сил пресекаются в одной точке. Следовательно, сила $\overline{R_A}$ направлена вдоль линии АЕ.

Система сходящихся сил

Системой сходящихся сил (или пучком сил) называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке – центре пучка.

Равнодействующая системы сходящихся сил равна векторной сумме слагаемых сил и определяется замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах как на составляющих. Точка приложения равнодействующей силы совпадает с точкой пересечения линий действия сил.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_3 = \sum_i \overline{F}_i$$

Проекции равнодействующей силы на оси координат равны алгебраической сумме проекций составляющих сил на эти оси.

$$R_x = \sum F_{xi} \qquad R_y = \sum F_{yi} \qquad R_z = \sum F_{zi}$$

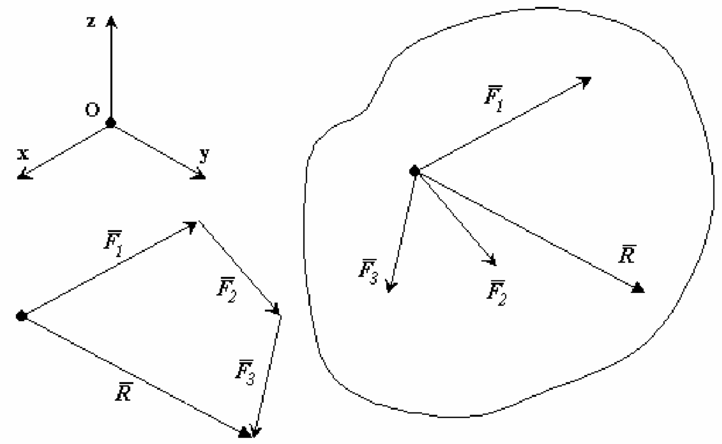


Рис. 3-3

Условия равновесия системы сходящихся сил в векторной форме

Для равновесия сходящейся системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила была равна нулю.

$$\overline{R} = 0$$

Условия равновесия системы сходящихся сил в алгебраической форме

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю.

$$\sum F_{xi} = 0 \qquad \sum F_{yi} = 0 \qquad \sum F_{zi} = 0$$

Момент силы относительно точки

Если под действием приложенной силы твердое тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то для того, чтобы охарактеризовать вращательный эффект силы, необходимо ввести новое понятие - момент силы относительно точки.

Рассмотрим силу $\overline{F}$, приложенную к телу в точке А. Из некоторой точки О опустим перпендикуляр на линию действия силы $\overline{F}$.

Плечом h силы $\overline{F}$ относительно точки О называется кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы.

Через силу $\overline{F}$ и точку О можно провести плоскость. Сила $\overline{F}$ пытается вращать тело вокруг оси, которая проходит через точку О и которая перпендикулярна плоскости в которой лежит сила. Точка О называется моментной точкой.

Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки О называется вектор $\overline{M_0(\overline{F})}$, приложенный в этой точке и равный векторному произведению радиус-вектора $\overline{r}$, соединяющего эту точку с точкой приложения силы, на вектор силы $\overline{F}$.

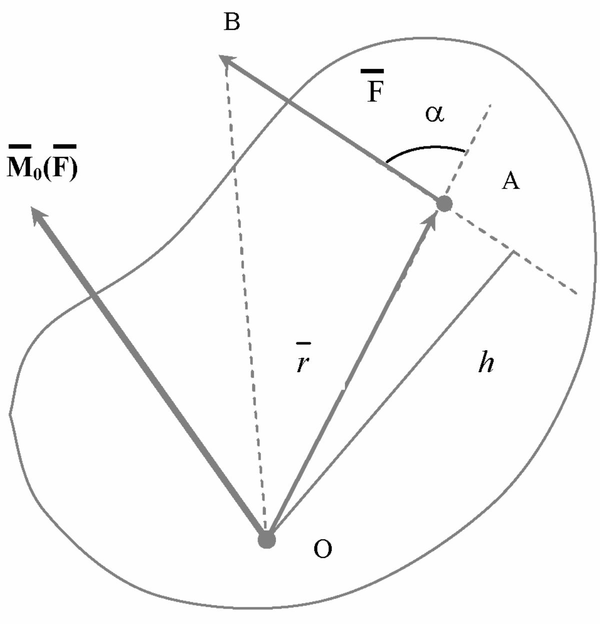


Рис. 3-4

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

Модуль вектора $M_0(\overline{F})$ равен произведению модуля силы F на ее плечо h .

$$M_0(\overline{F}) = F \cdot r \cdot sin(\alpha) = F \cdot h$$

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки О направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка (радиус-вектор), в том направлении откуда видно стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки.

Момент силы относительно точки не меняется от переноса силы вдоль линии ее действия.

Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.

Если сила $\overline{F}$ задана своими проекциями F_x F_y F_z на оси координат и даны координаты x y z точки приложения этой силы, то момент силы относительно начала координат вычисляется следующим образом:

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \bar{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \bar{k}$$

Проекции момента на оси координат равны:

$$M_{0x}(\overline{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_{0y}(\overline{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_{0z}(\overline{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

Момент силы относительно оси

К твердому телу в точке A приложена сила $\overline{F}$. Проведем в пространстве ось (например z). На оси z произвольно выберем точку O. Соединим точку O с точкой A радиус-вектором. Через точку O проведем плоскость П перпендикулярную оси z. Спроектируем вектора $\overline{F}$ и $\bar{r}$ на плоскость П.

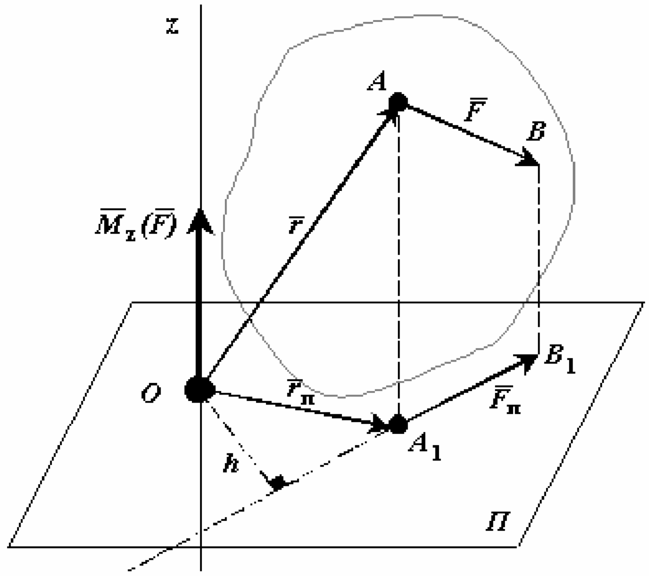


Рис. 3-3

Моментом силы $\overline{F}$ относительно оси называется вектор равный моменту проекции силы $\overline{F}$ на плоскость П относительно точки O пересечения оси z с плоскостью П.

$$\overline{M_z}(\overline{F}) = \overline{M_0}(\overline{F_П}) = \overline{r_П} \times \overline{F_П}$$

$$M_z(\overline{F}) = F_П \cdot r_П \cdot sin(\overline{r_П}, \overline{F_П}) = F_П \cdot h$$

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси.

2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекается с осью. В этом случае равно нулю плечо силы.

Связь момента силы относительно оси с моментом силы относительно точки.

Проведем через точку O, где задан момент силы относительно точки $\overline{M_0}(\overline{F})$ декартовы оси координат ***x, y, z***. Момент силы относительно точки можно представить в виде суммы трех векторов $\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{M_x}(\overline{F}) + \overline{M_y}(\overline{F}) + \overline{M_z}(\overline{F})$. Эти вектора являются моментами силы относительно осей ***x, y, z*** соответственно.

$$\overline{M_x}(\overline{F}) = M_{0x}(\overline{F}) \cdot \bar{i} \qquad \overline{M_y}(\overline{F}) = M_{0y}(\overline{F}) \cdot \bar{j} \qquad \overline{M_z}(\overline{F}) = M_{0z}(\overline{F}) \cdot \bar{k}$$

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно любой точки на оси.

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F}) \cdot cos(Oz, \overline{M_0}(\overline{F}))$$

Формулы для моментов силы относительно осей координат.

Если сила $\overline{F}$ задана своими проекциями F_x F_y F_z на оси координат и даны координаты x y z точки приложения этой силы, относительно осей координат, то моменты силы относительно осей координат вычисляется следующим образом:

$$M_x(\overline{F}) = M_{0x}(\overline{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_y(\overline{F}) = M_{0y}(\overline{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_z(\overline{F}) = M_{0z}(\overline{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

Лекция 4

Краткое содержание: Пара сил. Теорема о сумме моментов пары сил. Теорема об эквивалентности пар сил. Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость. Теорема о сложении пар сил. Условия равновесия пар сил.

ПАРА СИЛ

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело.

Плоскостью действия пары сил называется плоскость в которой расположены эти силы.

Плечом пары сил d называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Моментом пары сил называется вектор $\overline{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия сил пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. $M = F_1 \cdot d$

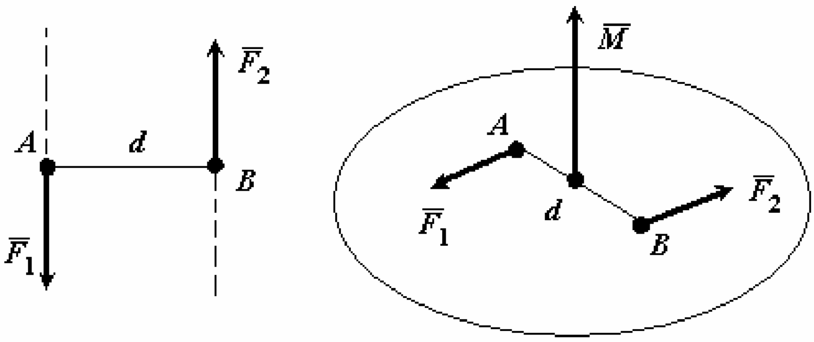


Рис. 4.1

Теорема о сумме моментов пары сил. Сумма моментов сил, входящих в состав пары, относительно любой точки не зависит от выбора этой точки и равна моменту этой пары сил.

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$$

Доказательство: Выберем произвольно точку О. Проведем из нее в точки А и В радиус-векторы (Смотри Рис. 4.2).

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \qquad \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{AB}$$

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 - \overline{r}_1 \times \overline{F}_2 =$$
$$(\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \times \overline{F}_2 = \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{M}_A(\overline{F}_2) = \overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$$

Что и требовалось доказать.

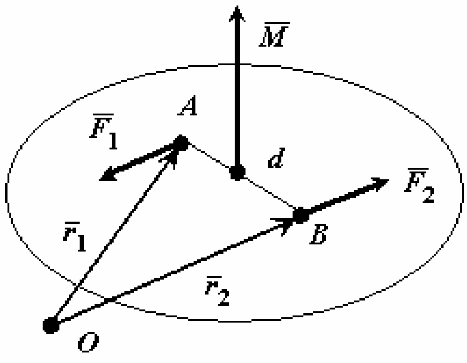
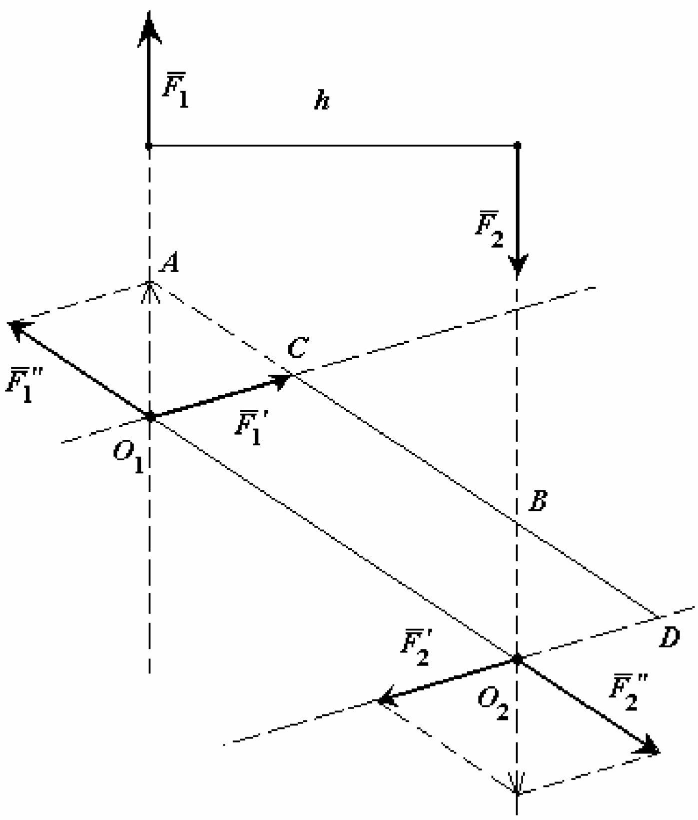


Рис. 4.2

<u>Две пары сил называются эквивалентными</u>, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях.

<u>Теорема об эквивалентности пар сил.</u> Пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющий одинаковый с первой парой момент.

Доказательство: Пусть на твердое тело действует пара сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$.



Перенесем силу $\overline{F}_1$ в точку O_1, а силу $\overline{F}_2$ в точку O_2. Проведем через точки O_1, O_2 две любые параллельные прямые, пересекающие линии действия сил пары. Соединим точки O_1, O_2 отрезком прямой и разложим силы $\overline{F}_1$ в точке O_1 и $\overline{F}_2$ в точке O_2 по правилу параллелограмма.

$$\overline{F}_1 = \overline{F}_1' + \overline{F}_1''$$

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_2' + \overline{F}_2''$$

Так как $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$, то

$$\overline{F}_1' = -\overline{F}_2' \quad \text{и} \quad \overline{F}_1'' = -\overline{F}_2''$$

Поэтому $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ эквивалентна системе $(\overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_1'', \overline{F}_2'')$, а эта система эквивалентна системе $(\overline{F}_1', \overline{F}_2')$, так как $(\overline{F}_1'', \overline{F}_2'')$ эквивалентна нулю.

Таким образом мы заданную пару сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ заменили другой парой сил $(\overline{F}_1', \overline{F}_2')$. Докажем, что моменты у этих пар сил одинаковы.

Момент исходной пары сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ численно равен площади параллелограмма O_1ABO_2, а момент пары сил $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2)$ численно равен площади параллелограмма O_1CDO_2. Но площади этих параллелограммов равны, так как площадь треугольника O_1AC равна площади треугольника O_2BD.

Что и требовалось доказать.

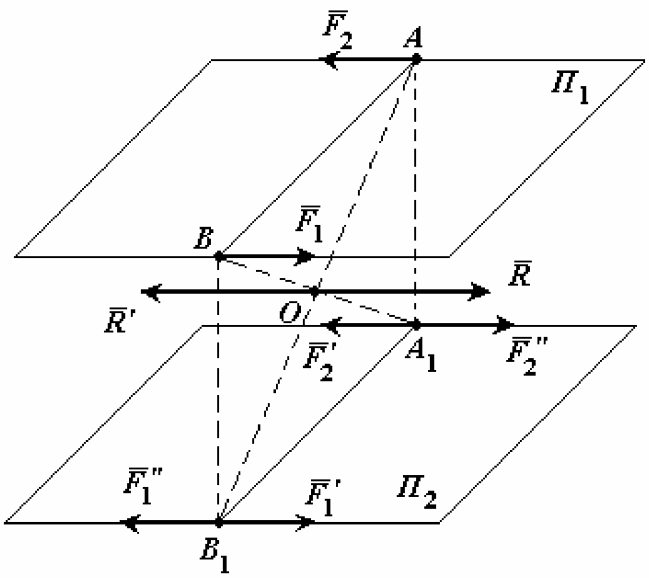
Выводы:

1. Пару сил как жесткую фигуру можно как угодно поворачивать и переносить в ее плоскости действия.
2. У пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом момент пары и плоскость действия.

Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость. Действие пары сил на твердое тело не изменится от переноса этой пары в параллельную плоскость.

Доказательство: Пусть на твердое тело действует пара сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ в плоскости $П_1$. Из точек приложения сил A и B опустим перпендикуляры на плоскость $П_2$ и в точках их пересечения с плоскостью $П_2$ приложим две системы сил $(\overline{F}'_1, \overline{F}''_1)$ и $(\overline{F}'_2, \overline{F}''_2)$, каждая из которых эквивалентна нулю.

$\overline{F}'_1 = -\overline{F}''_1$ $\quad$ $\overline{F}'_2 = -\overline{F}''_2$ $\quad\quad$ $\overline{F}'_1 = -\overline{F}_1$ $\quad$ $\overline{F}'_2 = -\overline{F}_2$



Сложим две равные и параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}''_2$. Их равнодействующая $\overline{R}$ параллельна этим силам, равна их сумме и приложена посредине отрезка AB_1 в точке О.

Сложим две равные и параллельные силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}''_1$. Их равнодействующая $\overline{R}'$ параллельна этим силам, равна их сумме и приложена посредине отрезка BA_1 в точке О.

Так как $\overline{R} = -\overline{R}'$, то система сил $(\overline{R}, \overline{R}')$ эквивалентна нулю и ее можно отбросить.

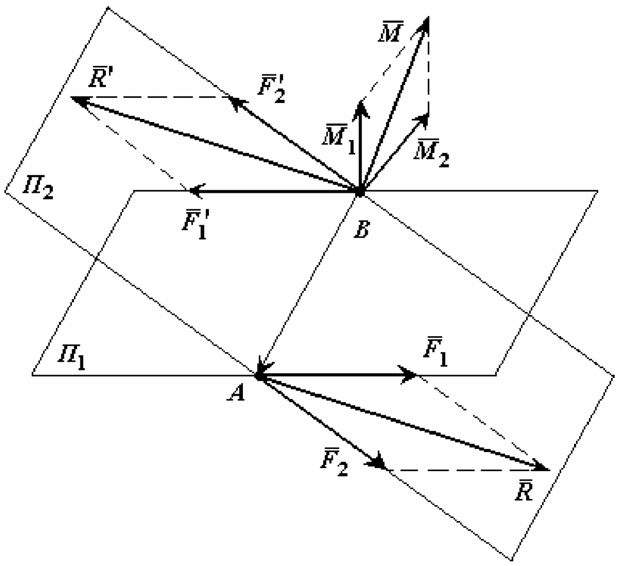
Таким образом пара сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ эквивалентна паре сил $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2)$, но лежит в другой, параллельной плоскости. Что и требовалось доказать.

Следствие: Момент пары сил, действующий на твердое тело, есть свободный вектор.

Две пары сил, действующих на одно и то же твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению моменты.

Теорема о сложении пар сил. Две пары сил, действующих на одно и то же твердое тело, и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой сил, момент которой равен сумме моментов заданных пар сил.

$$\overline{M} = \overline{M_1} + \overline{M_2}$$



Доказательство: Пусть имеются две пары сил, расположенные в пересекающихся плоскостях. Пара сил $(\overline{F_1}, \overline{F_1'})$ в плоскости $П_1$ характеризуется моментом $\overline{M_1}$, а пара сил $(\overline{F_2}, \overline{F_2'})$ в плоскости $П_2$ характеризуется моментом $\overline{M_2}$.

Расположим пары сил так, чтобы плечо пар было общим и располагалось на линии пересечения плоскостей. Складываем силы, приложенные в точке А и в точке В, $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$ $\overline{R'} = \overline{F_1'} + \overline{F_2'}$. Получаем пару сил $(\overline{R}, \overline{R'})$.

$$\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{R} = \overline{BA} \times (\overline{F_1} + \overline{F_2}) = \overline{BA} \times \overline{F_1} = \overline{BA} \times \overline{F_2} = \overline{M_1} + \overline{M_2}$$

Что и требовалось доказать.

Условия равновесия пар сил.

Если на твердое тело действует несколько пар сил, как угодно расположенных в пространстве, то последовательно применяя правило параллелограмма к каждым двум моментам пар сил, можно любое количество пар сил заменить одной эквивалентной парой сил, момент которой равен сумме моментов заданных пар сил.

$$\overline{M} = \sum \overline{M_i}$$

Теорема. Для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы момент эквивалентной пары сил равнялся нулю.

$$\overline{M} = 0$$

Теорема. Для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций моментов пар сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю.

$$M_x = \sum M_{ix} = 0 \qquad M_y = \sum M_{iy} = 0 \qquad M_z = \sum M_{iz} = 0$$

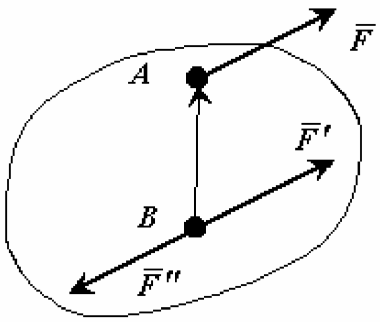
Лекция 5

Краткое содержание: Приведение силы к заданному центру. Приведение системы сил к заданному центру. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Условия равновесия плоской системы сил. Теорема о трех моментах. Статически определимые и статически неопределимые задачи. Равновесие системы тел.

ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ЗАДАННОМУ ЦЕНТРУ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

Приведение силы к заданному центру.

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью сложения сил по правилу параллелограмма. Очевидно, что аналогичную задачу можно будет решить и для произвольной системы сил, если найти для них метод, позволяющий перенести все силы в одну точку.



Теорема о параллельном переносе силы. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Пусть сила $\overline{F}$ приложена в точке А. Действие этой силы не изменяется, если в точке В приложить две уравновешенные силы. Полученная система трех сил представляет собой силу $\overline{F}\,'$ равную $\overline{F}$, но приложенную в точке В и пару $(\overline{F},\overline{F''})$ с моментом $\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F}$. Процесс замены силы $\overline{F}$ силой $\overline{F}\,'$ и парой сил $(\overline{F},\overline{F''})$ называется приведением силы $\overline{F}$ к заданному центру В .

Приведение системы сил к заданному центру.

Основная теорема статики (Пуансо).

Любую произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил. Этот процесс замены системы сил одной силой и одной парой сил называется **приведением системы сил к заданному центру**.

Главным вектором системы сил называется вектор, равный векторной сумме этих сил.

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_{i}$$

Главным моментом системы сил относительно точки О тела, называется вектор, равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.

$$\overline{L_0} = \sum \overline{M_0}(\overline{F}_{i})$$

Формулы для вычисления главного вектора и главного момента

$$R_x = \sum F_{ix} \qquad R_y = \sum F_{iy} \qquad R_z = \sum F_{iz}$$

$$L_{0x} = L_x = \sum M_x(\overline{F}_i) = \sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy})$$

$$L_{0y} = L_y = \sum M_y(\overline{F}_i) = \sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz})$$

$$L_{0z} = L_z = \sum M_z(\overline{F}_i) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

Формулы для вычисления модуля и направляющих косинусов главного вектора и главного момента

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$cos(x,\overline{R}) = \frac{R_x}{R} \qquad cos(y,\overline{R}) = \frac{R_y}{R} \qquad cos(z,\overline{R}) = \frac{R_z}{R}$$

$$L_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

$$cos(x,\overline{L_0}) = \frac{L_x}{L_0} \qquad cos(y,\overline{L_0}) = \frac{L_y}{L_0} \qquad cos(z,\overline{L_0}) = \frac{L_z}{L_0}$$

Условия равновесия системы сил.

Векторная форма .

Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительно любого центра приведения также был равен нулю.

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_{\mathrm{i}} = 0 \qquad \overline{L_0} = \sum \overline{M_0}(\overline{F}_{\mathrm{i}}) = 0$$

Алгебраическая форма.

Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси декартовых координат были равны нулю и три суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также были равны нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum F_{iz} = 0$$

$$\sum M_x(\overline{F_i}) = 0 \qquad \sum M_y(\overline{F_i}) = 0 \qquad \sum M_z(\overline{F_i}) = 0$$

Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

На тело действует система параллельных сил. Расположим ось Oz параллельно силам.

Уравнения $\sum F_{iz} \equiv 0 \qquad \sum F_{iy} \equiv 0 \qquad \sum M_z(\overline{F}_i) \equiv 0$

Для равновесия пространственной системы параллельных сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил была равна нулю и суммы моментов этих сил относительно двух координатных осей, перпендикулярным силам, также были равны нулю.

$$\sum F_{iz} = \sum F_i = 0 \qquad \sum M_x(\overline{F}_i) = 0 \qquad \sum M_y(\overline{F}_i) = 0$$

F_i - проекция силы на ось Oz.

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ.

Условия равновесия плоской системы сил.

На тело действует плоская система сил. Расположим оси Ox и Oy в плоскости действия сил.

Уравнения $\sum F_{iz} \equiv 0 \qquad \sum M_x(\overline{F}_i) \equiv 0 \qquad \sum M_y(\overline{F}_i) \equiv 0$

Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов этих сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил также была равна нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum M_0(\overline{F}_i) = 0$$

Теорема о трех моментах.

Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = 0 \qquad \sum M_B(\overline{F}_i) = 0 \qquad \sum M_C(\overline{F}_i) = 0$$

Статически определимые и статически неопределимые задачи.

Для любой плоской системы сил, действующих на твердое тело, имеется три независимых условия равновесия. Следовательно, для любой плоской системы сил из условий равновесия можно найти не более трех неизвестных.

В случае пространственной системы сил, действующих на твердое тело, имеется шесть независимых условия равновесия. Следовательно, для любой пространственной системы сил из условий равновесия можно найти не более шести неизвестных.

Задачи, в которых число неизвестных не больше числа независимых условий равновесия для данной системы сил, приложенных к твердому телу, называются **статически определимыми**.

В противном случае задачи статически неопределимы.

Равновесие системы тел.

Рассмотрим равновесие сил, приложенных к системе взаимодействующих между собой тел. Тела могут быть соединены между собой с помощью шарниров или иным способом.

Силы, действующие на рассматриваемую систему тел, можно разделить на внешние и внутренние.

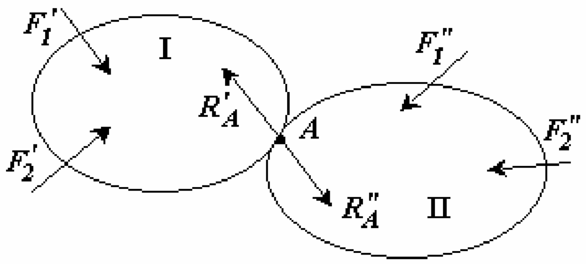
Внешними называются силы, с которыми на тела рассматриваемой системы действуют тела, не входящие в эту систему сил.

Внутренними называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

При рассмотрении равновесия сил, приложенных к системе тел, можно мысленно расчленить систему тел на отдельные твердые тела и к силам, действующим на эти тела, применить условия равновесия, полученные для одного тела. В эти условия равновесия войдут как внешние, так и внутренние силы системы тел. Внутренние силы на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия в каждой точке сочленения двух тел образуют равновесную систему сил.

Покажем это на примере системы двух тел и плоской системы сил.

Если составить условия равновесия для каждого твердого тела системы тел,



то для тела I $\sum \overline{F_i'} + \overline{R_A'} = 0$

$$\sum M_0(\overline{F_i'}) + M_0(\overline{R_A'}) = 0 \ .$$

для тела II $\sum \overline{F_i''} + \overline{R_A''} = 0$

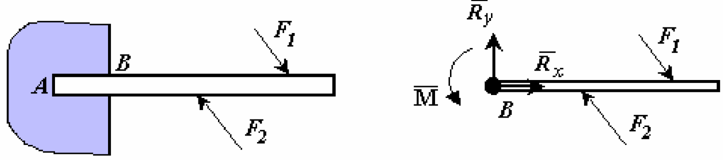
$$\sum M_0(\overline{F_i''}) + M_0(\overline{R_A''}) = 0$$

Кроме того, из аксиомы о равенстве сил действия и противодействия для двух взаимодействующих тел имеем $\overline{R_A'} = -\overline{R_A''}$ $\quad M_0(\overline{R_A'}) = -M_0(\overline{R_A''})$.

Представленные равенства и есть условия равновесия внешних сил, действующих на систему.

Реакция заделки.

Рассмотрим балку один конец которой AB заделан в стену. Такое крепление конца балки AB называется **заделкой в точке** B. Пусть на балку действует плоская система сил. Определим силы, которые надо приложить к точке B балки, если часть балки AB отбросить. К сечению балки (B) приложены распределенные силы реакции. Если эти силы заменить элементарными



сосредоточенными силами и затем привести их к точке B, то в точке B получим силу $\overline{R_B}$ (главный вектор сил реакции) и пару сил с моментом M (главный вектор сил реакции относительно точки B) . Момент M **называют моментом заделки** или **рективным моментом.** Силу реакции $\overline{R_B}$ можно заменить двумя составляющими $\overline{R_x}$ и $\overline{R_y}$**.**

Заделка в отличие от шарнира создает не только неизвестную по величине и направлению реакцию $\overline{R_B}$, но еще и пару сил с неизвестным моментом M в заделке.

Лекция 6

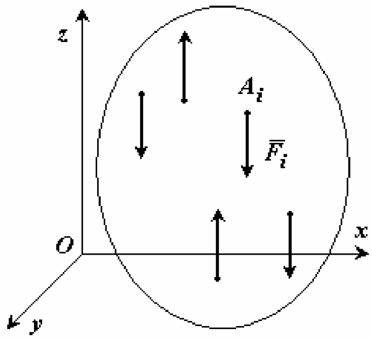
Краткое содержание: Центр параллельных сил. Параллельные силы распределенные по отрезку прямой. Центр тяжести твердого тела, поверхности и линии. Способы определения координат центра тяжести.

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ.
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ.

Центр параллельных сил.

Для системы параллельных сил введем понятие **центра параллельных сил.**

На тело действует система параллельных сил $\overline{F_i}$, приложенных в точках $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была параллельна силам.



$F_{ix} \equiv 0$, $\quad F_{iy} \equiv 0$, $\quad F_{iz} = F_i$

F_i - проекция силы на ось Oz.

$$x_C = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

$$y_C = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

$$z_C = \frac{\sum z_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

Точка C с координатами (x_C, y_C, z_C) называется **центром параллельных сил** .

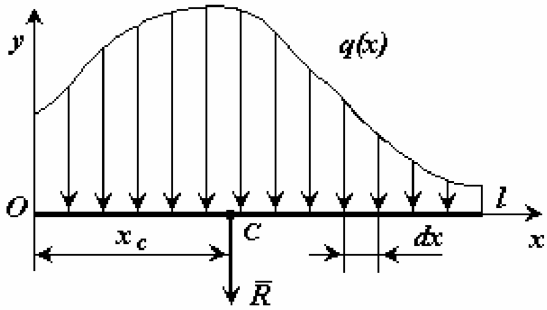
F_i - проекция силы на ось Oz.

Свойства **центра параллельных сил:**

1. Сумма моментов всех сил $\overline{F_i}$ относительно точки C равна нулю $\sum M_C(\overline{F_i}) = 0$
2. Если все силы повернуть на угол , не меняя точек приложения сил, то центр новой системы параллельных сил будет той же точкой C.

Параллельные силы распределенные по отрезку прямой.

а) общий случай



$q(x)$ - интенсивность распределенной силы [Н/м],

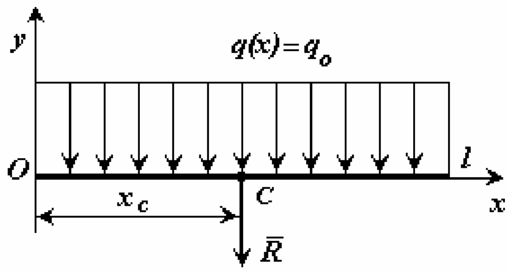
$dR = q(x)\cdot dx$ - элементарная сила.

l – длина отрезка

Распределенная по отрезку прямой сила интенсивности $q(x)$ эквивалентна сосредоточенной силе $R = \int\limits_0^l q(x)dx$. Сосредоточенная сила прикладывается в точке C (центре параллельных сил) с координатой

$$x_C = \frac{\int\limits_0^l xq(x)dx}{R}$$

б) постоянная интенсивность

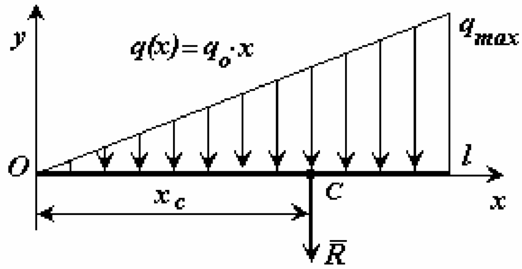


$$R = \int\limits_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l$$

$$\int\limits_0^l x\cdot q_0 dx = q_0 \cdot l^2/2$$

$$x_C = \frac{l}{2}$$

в) интенсивность, меняющаяся по линейному закону



$$R = \int\limits_0^l q_0 \cdot xdx = q_0 \cdot l^2/2$$

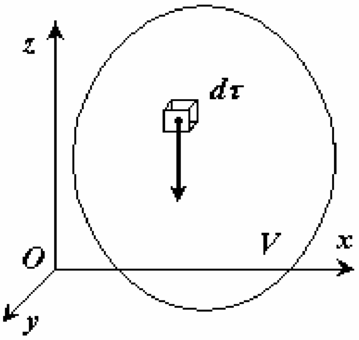
$$\int\limits_0^l q_0 \cdot x^2 dx = q_0 \cdot l^3/3$$

$$x_C = \frac{2\cdot l}{3}$$

Центр тяжести.

Центром тяжести тела называется геометрическая точка, жестко связанная с этим телом, и являющаяся центром параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частицам тела.

Координаты центра тяжести **неоднородного твердого тела** в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:



$$x_C = \frac{\int\limits_V x \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau}{\int\limits_V \gamma_T(x,y,z)d\tau} \qquad y_C = \frac{\int\limits_V y \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau}{\int\limits_V \gamma_T(x,y,z)d\tau}$$

$$z_C = \frac{\int\limits_V z \cdot \gamma_T(x,y,z)d\tau}{\int\limits_V \gamma_T(x,y,z)d\tau}$$ где

$\gamma_T(x,y,z)$ - вес единицы объема тела (удельный вес)

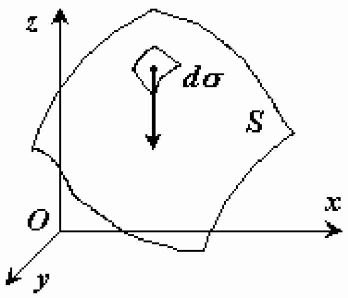
$\int\limits_V \gamma_T(x,y,z)d\tau$ - Вес всего тела.

Для **однородного твердого тела** $\gamma_T(x,y,z) = const$ и формулы получают вид:

$$x_C = \frac{\int\limits_V x d\tau}{\int\limits_V d\tau} \qquad y_C = \frac{\int\limits_V y d\tau}{\int\limits_V d\tau} \qquad z_C = \frac{\int\limits_V z d\tau}{\int\limits_V d\tau}$$

$V = \int\limits_V d\tau$ - Объем всего тела.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную поверхность,** то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:



$$x_C = \frac{\int\limits_S x \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma}{\int\limits_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma} \qquad y_C = \frac{\int\limits_S y \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma}{\int\limits_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma}$$

$$z_C = \frac{\int\limits_S z \cdot \gamma_S(x,y,z)d\sigma}{\int\limits_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma}$$

где $\gamma_S(x,y,z)$ - вес единицы площади тела ,

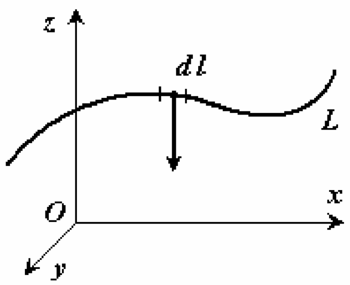
$\int\limits_S \gamma_S(x,y,z)d\sigma$ - Вес всего тела.

Для **однородной поверхности** $\gamma_S(x,y,z)=const$ и формулы получают вид:

$$x_C=\frac{\int\limits_S x d\sigma}{\int\limits_S d\sigma} \qquad y_C=\frac{\int\limits_S y d\sigma}{\int\limits_S d\sigma} \qquad z_C=\frac{\int\limits_S z d\sigma}{\int\limits_S d\sigma}$$

$S=\int\limits_S d\sigma$ - Площадь поверхности.

Если твердое тело представляет собой **неоднородную линию,** то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:



$$x_C=\frac{\int\limits_L x\cdot\gamma_L(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma_L(x,y,z)dl} \qquad y_C=\frac{\int\limits_L y\cdot\gamma_L(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma_L(x,y,z)dl}$$

$$z_C=\frac{\int\limits_L z\cdot\gamma_L(x,y,z)dl}{\int\limits_L \gamma_L(x,y,z)dl}$$

где $\gamma_L(x,y,z)$ - вес единицы длины тела ,

$\int\limits_L \gamma_L(x,y,z)dl$ - Вес всего тела.

Для **однородной линии** $\gamma_L(x,y,z)=const$ и формулы получают вид:

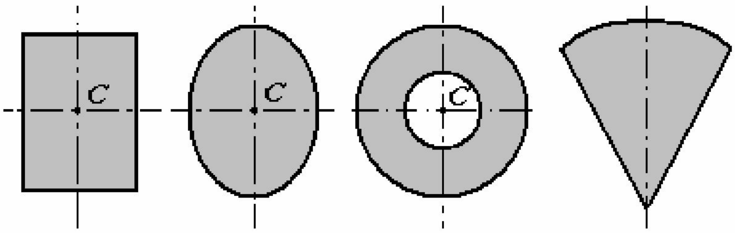
$$x_C=\frac{\int\limits_L x dl}{\int\limits_L dl} \qquad y_C=\frac{\int\limits_L y dl}{\int\limits_L dl} \qquad z_C=\frac{\int\limits_L z dl}{\int\limits_L dl}$$

$L=\int\limits_L dl$ - Длина линии.

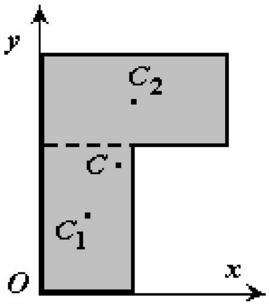
Способы определения координат центра тяжести.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

1. Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, оси симметрии или в центре симметрии.



2. Разбиение. Тело разбивается на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести и площадь известны.



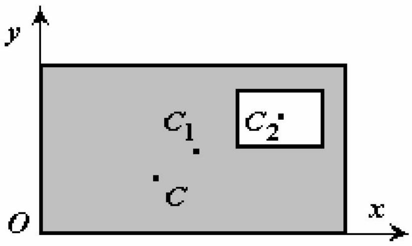
$C_1(x_1, y_1)$, S_1 $\qquad$ $C_2(x_2, y_2)$, S_2

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$S = S_1 + S_2$$

3. Дополнение. Частный случай способа разбиения. Он применяется к телам имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.



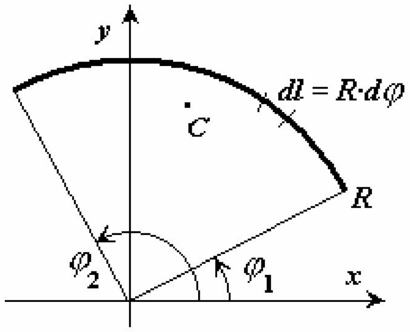
$C_1(x_1, y_1)$, S_1 $\qquad$ $C_2(x_2, y_2)$, S_2

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$S = S_1 - S_2$$

Центр тяжести дуги окружности



$$x = R \cdot \cos\varphi \qquad y = R \cdot \sin\varphi$$

$$L = \int_L dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R\,d\varphi = R \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$S_y = \int_L x dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2 \cdot \cos\varphi\, d\varphi = R^2 \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

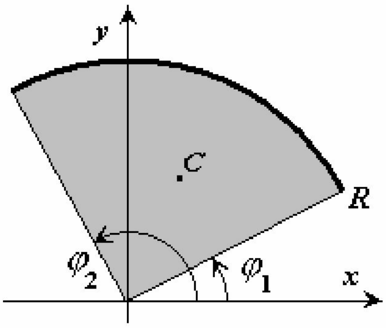
$$S_x = \int_L y dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2 \cdot \sin\varphi\, d\varphi = R^2 \cdot (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

$$x_C = \frac{S_y}{L} = \frac{R}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

$$y_C = \frac{S_x}{L} = \frac{R}{(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

Для дуги равной половине окружности $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $x_C = 0$, $y_C = \dfrac{2 \cdot R}{\pi}$

Центр тяжести площади сектора круга



$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

$$d\sigma = dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$S = \int_S d\sigma = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^R r\, drd\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$S_y = \int_S x d\sigma = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^R r^2 \cdot \cos\varphi\, drd\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

$$S_x = \int_S y d\sigma = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^R r^2 \cdot \sin\varphi\, drd\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

$$x_C = \frac{S_y}{S} = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

$$y_C = \frac{S_x}{S} = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

Для площади равной половине круга $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$, $x_C = 0$, $y_C = \dfrac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$

Лекция 7

Краткое содержание: Трение скольжения. Законы Кулона. Угол и конус трения. Условия равновесия. Трение качения.

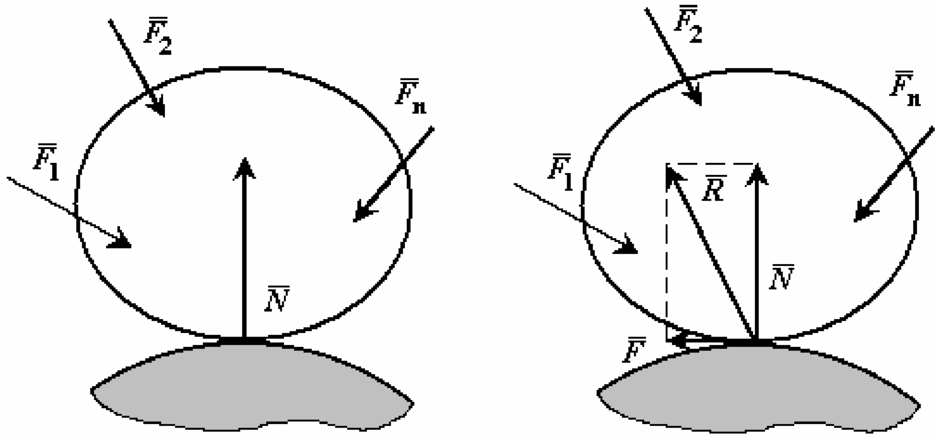
ТРЕНИЕ

Трение скольжения

Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению. Эту силу, называют силой трения скольжения.

Если твёрдое тело находится на абсолютно гладкой поверхности другого тела в равновесии, то реакция связи направлена по нормали к поверхности.

В действительности абсолютно гладких поверхностей не бывает. Все поверхности тел в той или иной степени шероховаты. Поэтому сила реакции $\overline{R}$ шероховатой поверхности при равновесии тела зависит от активных сил не только по числовой величине, но и по направлению.



Разложим силу реакции $\overline{R}$ шероховатой поверхности на составляющие: одну из которых $\overline{N}$ направим по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другую $\overline{F}$ направим в касательной плоскости к этим поверхностям.

Силой трения скольжения (или просто силой трения) называется составляющая силы реакции связи, которая лежит в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел.

Силой нормальной реакцией связи называется составляющая силы реакции связи, которая направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел.

$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}$$

Природа силы трения очень сложная и Мы ее не касаемся. В теоретической механике предполагается, что между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Сухим трением называется трение, когда между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Будем рассматривать два случая: трения при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле:

$$\overline{F} = -\sum \overline{F_{\tau i}}$$

Аналогично при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы:

$$\overline{N} = -\sum \overline{F_{ni}}$$

При движении одного тела по поверхности другого сила трения является постоянной величиной.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления сухого трения. Эти закономерности называются законами трения скольжения или законами Кулона.

Законы Кулона

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела под действием активных сил. Сила трения зависит от активных сил, и её модуль заключён между нулём и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, то есть:

   $$0 < \overline{F} < \overline{F}_{max}$$

   $\overline{\boldsymbol{F}}_{max}$ - называется **предельной силой трения**.
2. Предельная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например кирпич, надо приложить одну и туже, силу, независимо, от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.
3. Предельная сила трения скольжения пропорциональна нормальной реакции (нормальному давлению), то есть

   $$\overline{F}_{max} = f \cdot \overline{N},$$

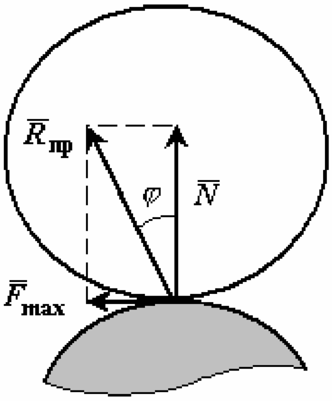
   где безразмерный коэффициент f называют коэффициентом трения скольжения; он не зависит от нормальной реакции.
4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, то есть от величины и характера шероховатости, влажности, температуры и других условий. Коэффициент трения устанавливается экспериментально.

   Считается, что коэффициент трения не зависит от скорости движения.

Угол трения. Условия равновесия.

Многие задачи на равновесие тела на шероховатой поверхности, т.е. при наличии трения, удобно решать геометрически. Для этого введем понятие угла и конуса трения.

Реакция реальной (шероховатой) связи $\overline{\boldsymbol{R}}$ слагается из двух составляющих: нормальной реакции $\overline{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\overline{F}$. Следовательно, реакция связи $\overline{\boldsymbol{R}}$ отклоняется от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до максимальной, сила реакции $\overline{\boldsymbol{R}}$ меняется от нуля до $\overline{\boldsymbol{R}}_{np}$, а ее угол с нормалью растет от нуля до некоторого предельного значения φ.



Углом трения называется наибольший угол φ между предельной силой реакции шероховатой связи $\overline{\boldsymbol{R}}_{np}$ и нормальной реакцией $\overline{N}$.

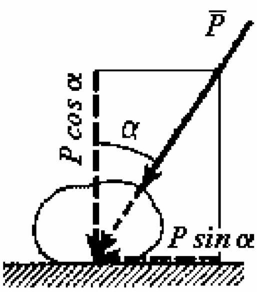
$$tg\varphi = \frac{F_{\max}}{N}; \qquad F_{\max} = f \cdot N \Rightarrow tg\varphi = f;.$$

Угол трения φ зависит от коэффициента трения.

Конусом трения называют конус, описанный предельной силой реакции шероховатой связи $\overline{R}_{np}$ вокруг направления нормальной реакции.

Пример.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить силу P, образующую угол α с нормалью, то тело сдвинется только тогда, когда сдвигающее усилие $P \cdot \sin\alpha$. будет больше предельной силы трения $F_{\max} = f \cdot P \cdot \cos\alpha$. (если пренебречь весом тела, то $N = P \cdot \cos\alpha$..но неравенство



$$P \cdot \sin\alpha \ge f \cdot P \cdot \cos\alpha.$$

Выполняется только при $tg(\alpha) \ge tg(\varphi)$, т.е. при $\alpha \ge \tilde{\varphi}$,

Следовательно, ни какой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения φ. тело вдоль данной поверхности сдвинуть нельзя.

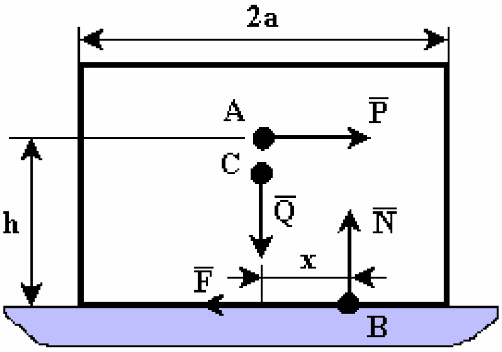
Для равновесия твёрдого тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на твёрдое тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если её линия действия проходит внутри конуса трения.

Пример.

Рассмотрим тело имеющее вертикальную плоскость симметрии. Сечение тела этой плоскости имеет форму прямоугольника. Ширина тела равна 2a.

К телу в точке С, лежащей на оси симметрии, приложена вертикальная сила $\overline{Q}$ и в точке А, лежащей на расстоянии h от основания, горизонтальная сила $\overline{P}$. Реакция плоскости основания (реакция связи) приводится к нормальной реакции $\overline{N}$ и силе трения $\overline{F}$. Линия действия силы $\overline{N}$ неизвестна. Расстояние от точки С до линии



действия силы $\overline{N}$ обозначим x. ($x \le a$). Составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad P - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P$$

$$\sum F_{iy} = 0 \qquad N - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Q$$

$$\sum M_B(\overline{F_i}) = 0 \qquad Q \cdot x - P \cdot h = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{P \cdot h}{Q} \le a$$

Согласно закону Кулона $F \le f \cdot N$, т.е. $P \le f \cdot Q$. (1)

Так как $\frac{P \cdot h}{Q} \le a$, то $P \le \frac{a}{h} Q$ (2)

Проанализируем полученные результаты:

Будем увеличивать силу $\overline{P}$.

1) Если $f < \frac{a}{h}$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет своей предельной величины, условие (1) превратится в равенство. Дальнейшее увеличение силы приведет к скольжению тела по поверхности.

2) Если $f > \frac{a}{h}$, то равновесие будет иметь место до тех пор, пока сила трения не достигнет величины $\frac{a \cdot Q}{h}$, условие (2) превратится в равенство. Величина x будет равна h. Дальнейшее увеличение силы приведет к тому, что тело станет опрокидываться вокруг точки B (скольжения не будет).

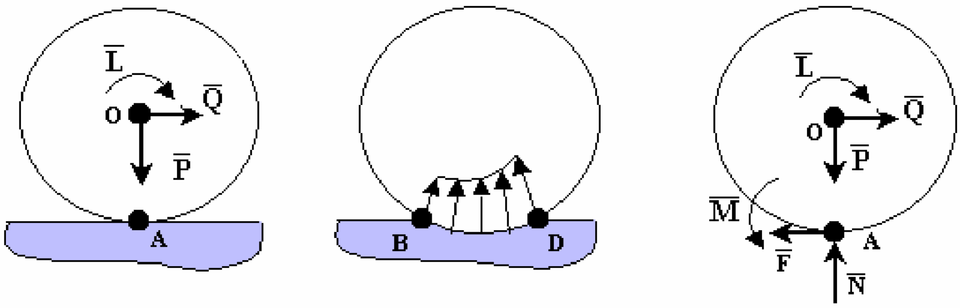
Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим цилиндрический каток радиуса r на горизонтальной плоскости. Под катка и плоскости в месте их соприкосновения могут возникнуть реакции, препятствующие действием активных сил каток может катиться по плоскости. Из-за деформации поверхностей не только скольжению, но и качению.

Активные силы, действующие на катки в виде колес, обычно состоят из силы тяжести $\overline{P}$, горизонтальной силы $\overline{Q}$, приложенной к центру катка, и пары сил с моментом $\overline{L}$, стремящейся катить колесо. Колесо в этом случае называется **ведомо-ведущим**. Если $\overline{L}=0$, а $\overline{Q}\neq 0$, то колесо называется **ведомым.** Если $\overline{L}\neq 0$, а $\overline{Q}=0$, то колесо называется **ведущим**.

Соприкосновение катка с неподвижной плоскостью из-за деформации катка и плоскости происходит не в точке, а по некоторой линии BD. По этой линии на каток действуют распределенные силы реакции. Если привести силы реакции к точке А, то в этой точке получим главный вектор $\overline{R}$ этих распределенных сил с составляющими $\overline{N}$ (нормальная реакция) и $\overline{F}$ (сила трения скольжения), а также пару сил с моментом $\overline{M}$.



Рассмотрим равновение катка. Система сил – плоская. Запишем уравнения равновесия системы сил.

$$(x) \qquad Q-F=0 \quad \Rightarrow \quad F=Q$$

$$(y) \qquad N-P=0 \quad \Rightarrow \quad N=P$$

$$(M_A) \qquad M-Q\cdot r-L=0 \quad \Rightarrow \quad M=L+Q\cdot r$$

Момент $\overline{M}$ называется моментом трения качения. Наибольшее значение M достигается в момент начала качения катка по плоскости.

Установлены следующие приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующих качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующих качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальной реакции N.

$$M_{max}=k\cdot N.$$

Коэффициент пропорциональности k называют **коэффициентом трения качения** при покое. Размерность k - это размерность длины.

3. Коэффициент трения качения k зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

Для вагонного колеса по рельсу $k = 0.5$ мм.

Рассмотрим движение ведомого колеса. $\overline{L} = 0$, а $\overline{Q} \neq 0$.

Качение колеса начнется, когда выполнится условие $Q \cdot r > M_{max}$ или

$$Q > \frac{M_{max}}{r} = \frac{k \cdot N}{r} = \frac{k}{r} \cdot r$$

Скольжение колеса начнется, когда выполнится условие $Q > F_{max} = f \cdot N$.

Обычно отношение $\frac{k}{r} < f$ и качение начинается раньше скольжения.

Если $\frac{k}{r} > f$, то колесо будет скользить по поверхности, без качения.

КИНЕМАТИКА

Лекция 1

Краткое содержание: Введение в кинематику. Кинематика точки. Понятие траектории. Способы задания движения: векторный, координатный и естественный. Скорость точки при различных способах задания движения.

Введение. Кинематикой называется раздел теоретической механики в котором изучаются движения материальных объектов таких как точка и твердое тело, без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение.

Такое изучение движения материальных объектов не требует учета материальных характеристик этих объектов - массы, моментов инерции и пр.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

В курсе теоретической механики кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела.

Кинематика точки

В кинематике точки рассматриваются характеристики движения точки, такие, как скорость и ускорение и методы их определения при различных способах задания движения.

Траекторией точки называется геометрическое место ее последовательных положений в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета.

Форма траектории может быть прямолинейной или криволинейной и зависит от выбранной системы координат.

Пример 1.

С горизонтально летящего относительно Земли самолета сброшен груз. Сопротивление воздуха отсутствует.

Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с Землей, будет парабола. Рис. 1.1а).

Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета $O_1x_1y_1$, жестко связанной с летящим самолетом, будет прямая линия. Рис. 1.1б).

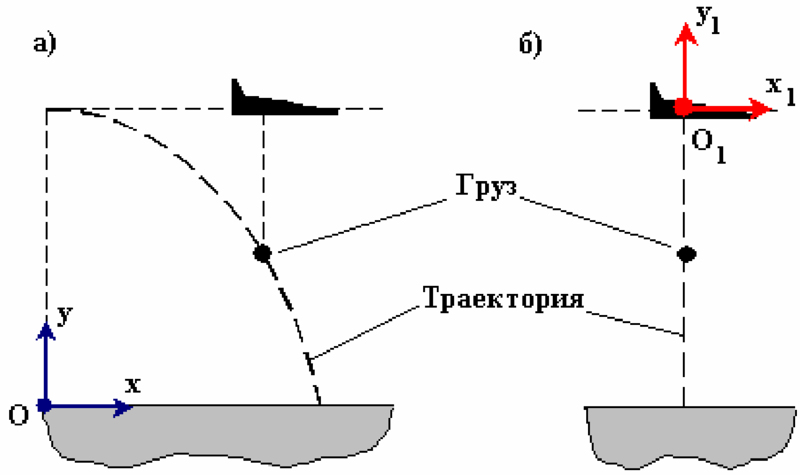


Рис. 1-1

Пример 2.

Колесо радиуса R катится по горизонтальной прямой без скольжения. Точка A на ободе колеса совершает сложное движение.

Траекторией точки A относительно системы отсчета Oxy, жестко связанной с прямой, будет кривая под названием циклоида.

Траекторией точки A относительно системы отсчета $O_1x_1y_1$, которая движется поступательно и начало отсчета которой находится в центре масс колеса, будет окружность радиуса R, центр которой находится в точке O_1.

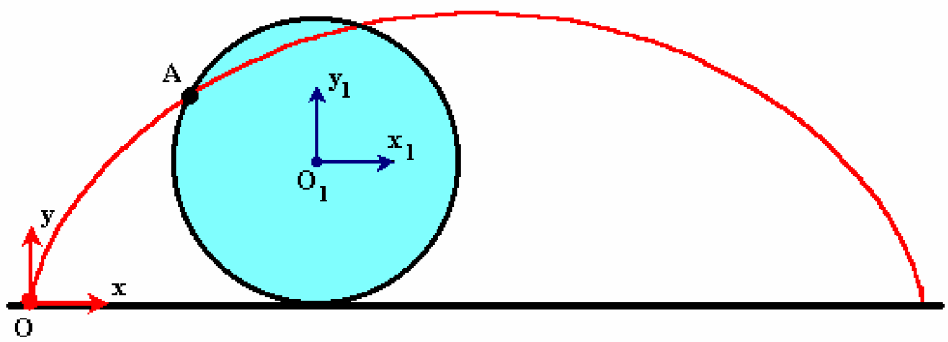


Рис. 1-2

Способы задания движения.

Движение точки можно изучать, используя любую систему координат. Рассмотрим три способа задания движения: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ.

Будем рассматривать случай декартовой прямоугольной системы координат. Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета задано, если известен радиус-вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$ этой точки как функция времени, т.е.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{1-1}$$

Векторный способ обычно применяется для теоретического изложения кинематики точки.

Координатный способ.

Движение точки можно изучать используя любую систему координат. Рассмотрим случай декартовой прямоугольной системы координат.

Движение точки задано, если известны координаты точки, как непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени, т.е.

$$x = f_1(t)\,,\quad y = f_2(t)\,,\quad z = f_3(t) \tag{1-2}$$

Уравнения движения есть также уравнения траектории точки в параметрической форме. Параметром является время t.

$$\bar{r}(t) = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{k} \tag{1-3}$$

Уравнения траектории в координатной форме получаются из уравнений (1-2) исключением параметра t. Получаются уравнения двух поверхностей $\Phi_1(x,y)=0$, $\Phi_2(x,y)=0$. Пересечение этих поверхностей дает кривую в пространстве – траекторию точки.

Естественный способ задания движения.

При естественном способе задания движения задаются траектория точки и закон движения точки по траектории. Движение точки рассматривается относительно фиксированной системы отсчета.

Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку О, принимаемую за начало отсчета. Кроме того, необходимо задать начало отсчета времени.

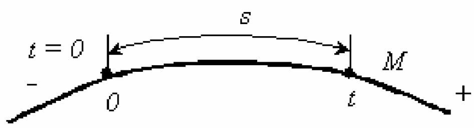


Рис. 1.3

$s = f(t)$ - закон движения точки по траектории.

Функция $s = f(t)$ должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.

От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом. Закон движения точки по траектории в дифференциальной форме через декартовы координаты выражается в виде

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

и после интегрирования - в конечной форме

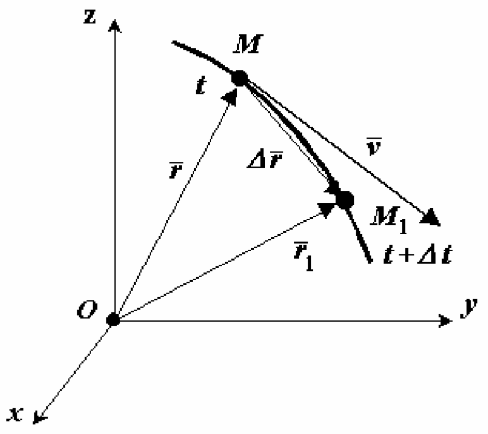
$$s = \int_0^t \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2}\,dt$$

если $x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$ $z = f_3(t)$

Скорость точки

Одной из основных характеристик движения точки является ее скорость относительно выбранной системы отсчета.

Скорость точки при векторном способе задания движения



Положение движущейся точки M относительно системы отсчета в момент времени t определяется радиус-вектором $\bar{r}$. В другой момент времени $t_1 = t + \Delta t$ точка займет положение M_1 с радиус-вектором $\bar{r}_1$. За время Δt радиус-вектор движущейся точки изменится на $\Delta r = \bar{r}_1 - \bar{r}$.

Средней скоростью $\bar{v}_{cp}$ называется отношение изменения радиус-вектора $\Delta\bar{r}$ к изменению времени Δt.

Рис. 1.4

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad (1\text{-}4)$$

Скорость точки равна первой производной по времени от ее радиус-вектора.

$$\bar{v} = lim\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0 \qquad (1\text{-}5)$$

Скорость точки при координатном способе задания движения

Разложим радиус-вектор и скорость на составляющие, параллельные осям координат. Получим

$$\bar{r}(t) = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\cdot\bar{j} + z(t)\cdot\bar{k}$$

$$\bar{v}(t) = v_x(t)\cdot\bar{i} + v_y(t)\cdot\bar{j} + v_z(t)\cdot\bar{k} \qquad (1\text{-}6)$$

После дифференцирования

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{x(t)}{dt}\cdot\bar{i} + \frac{y(t)}{dt}\cdot\bar{j} + \frac{z(t)}{dt}\cdot\bar{k} \qquad (1\text{-}7)$$

Отсюда следует

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \qquad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) \qquad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t) \qquad (1\text{-}8)$$

Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль скорости и направляющие косинусы равны:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$$

$$cos(\bar{v},x)=\frac{v_x}{v}=\frac{\dot{x}}{v} \qquad cos(\bar{v},y)=\frac{v_y}{v}=\frac{\dot{y}}{v} \qquad cos(\bar{v},z)=\frac{v_z}{v}=\frac{\dot{z}}{v}$$

Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат Ox и Oy в этой плоскости, получим:

$$z=const=0, \quad v_z=\dot{z}=0 \qquad v=|\bar{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}$$

Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось Ox, направляем по траектории. Тогда

$$y=z=const=0, \quad v_y=\dot{y}=0, \quad v_z=\dot{z}=0 \qquad v=|\bar{v}|=v_x=\dot{x}$$

Скорость точки при естественном способе задания движения.

Пусть скорость точки задана естественным способом, т.е. заданы траектория точки и закон ее движения по траектории $s=f(t)$.

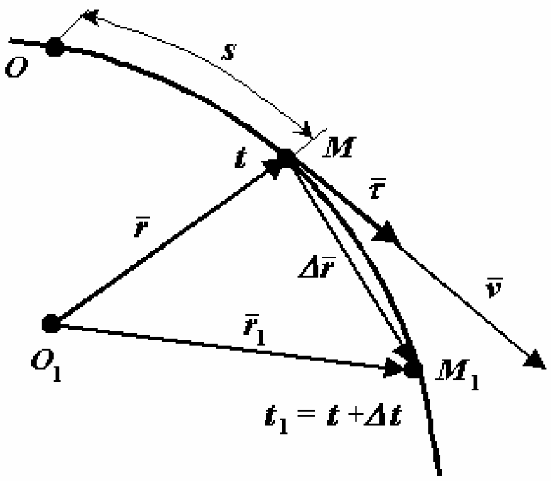


Рис. 1.5

Вычислим скорость точки.

Используем радиус-вектор $\bar{r}$. движущейся точки, начало которого находится в неподвижной точке O_1

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\dot{s}$$

$\dfrac{d\bar{r}}{ds}=\bar{\tau}$ - единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону возрастающих расстояний.

$$\bar{v}=\dot{s}\cdot\bar{\tau} \tag{1-9}$$

При $ds>0$ направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ совпадают. Если точка движется в сторону убывающих расстояний, то $ds<0$ и направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ противоположны.

При $\dot{s}>0$ вектор скорости направлен по $\bar{\tau}$, т.е. в сторону возрастающих расстояний; при $\dot{s}<0$ он имеет направление, противоположное $\bar{\tau}$, т.е. в сторону убывающих расстояний.

$\dot{s}=v_\tau$ - <u>алгебраическая скорость точки</u>, проекция скорости $\bar{v}$ на положительное направление касательной к траектории.

Естественное задание движения точки полностью определяет скорость по величине и направлению.

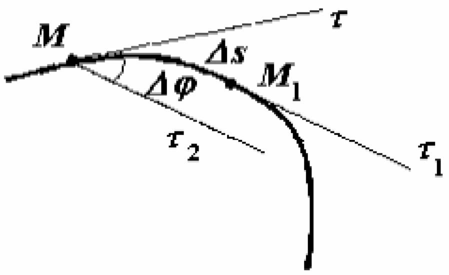
Лекция 2

Краткое содержание: Геометрические понятия: кривизна кривой, радиус кривизны, оси естественного трехгранника. Дифференцирование единичного вектора. Ускорение точки при различных способах задания движения. Частные случаи движения точки.

Геометрические понятия

В точке M кривой линии проведем касательную $M\tau$. В точке M_1 построим касательную $M_1\tau_1$. Между точками M и M_1 расстояние Δs.

В общем случае пространственной кривой касательные $M\tau$ и $M_1\tau_1$ будут скрещиваться. Проводим в точке M прямую линию $M\tau_2$ параллельную $M_1\tau_1$. Угол $\Delta\varphi$ между линиями $M\tau$ и $M\tau_2$ называется *углом смежности*.

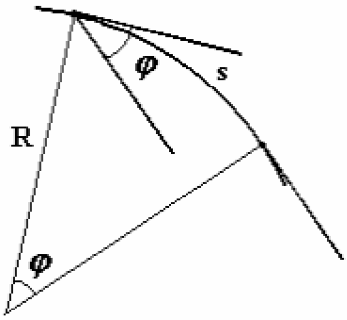


Кривизной кривой k в точке M называется предел, к которому стремится угол смежности, приходящийся на единицу расстояния Δs, при Δs , стремящемся к нулю, т.е.

Рис. 2-1

$$k = lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{при } \Delta s \to 0 \qquad (2\text{-}1)$$

Радиусом кривизны кривой ρ в точке M называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке, т.е.



$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi} \qquad (2\text{-}2)$$

Вычислим радиус кривизны дуги окружности радиуса R. Дуга окружности длиной s, опирающаяся на центральный угол φ, выражается зависимостью $s = R\cdot\varphi$ $\quad \rho = \dfrac{ds}{d\varphi} = R$

Рис. 2-2

Через пересекающиеся прямые $M\tau$ и $M\tau_2$ проводим плоскость. Предельное положение этой плоскости при совпадении в пределе точек M и M_1 называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке M.

В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость для всех точек кривой является сама плоскость, в которой расположена эта кривая.

Естественный трехгранник

Построим в точке M кривой линии естественные оси этой кривой.

Первой естественной осью является касательная $M\tau$. Ее положительное направление совпадает с направлением единичного вектора $\bar{\tau}$.

Перпендикулярно касательной $M\tau$ располагается нормальная плоскость кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости называется главной нормалью. По главной нормали Mn внутрь вогнутости кривой направим единичный вектор $\bar{n}$. Он определяет положительное направление второй оси. Нормаль, перпендикулярная главной нормали называется бинормалью. Положительное направление бинормали определяется единичным вектором $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$

Три взаимноперпендикулярные оси $M\tau$, Mn и Mb называются естественными осями кривой. Эти оси образуют в точке M естественный трехгранник.

Дифференцирование единичного вектора

Вычисление производной от единичного вектора $\bar{\tau}$ по времени дает следующий результат $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} \cdot \bar{n}$ Радиус кривизны считаем положительным.

Единичный вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\bar{\tau}$, направ-ленному по касательной к кривой и лежит в соприкасающейся плоскости. Вектор $\bar{n}$ направлен по главной нормали кривой в сторону ее вогнутости.

Ускорение точки

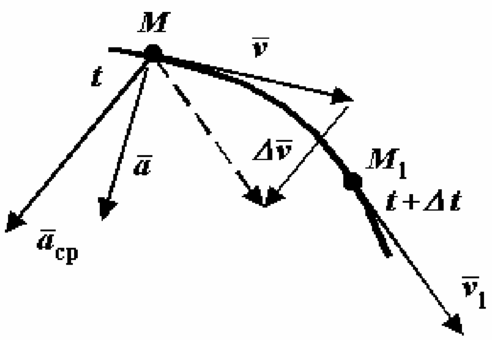


Рис. 2-3

Пусть движущаяся точка M в момент времени имеет скорость $\bar{v}$. В другой момент времени $t_1 = t + \Delta t$ эта точка будет занимать положение M_1 и иметь скорость $\bar{v}_1$. Чтобы изобразить прираще-ние скорости $\Delta\bar{v}$ за время Δt, перенесем вектор $\bar{v}_1$ параллельно самому себе в точку M.

Средним ускорением точки $\bar{a}_{ср}$ за время Δt называется отношение вектора приращения скорости $\Delta\bar{v}$ к изменению времени Δt.

$$\bar{a}_{ср} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} \qquad (2\text{-}3)$$

Ускорением точки $\bar{a}$ в момент времени t называется предел к которому стремится среднее ускорение при Δt, стремящемся к нулю. Ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки или второй производной по времени от радиус-вектора.

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{a_{cp}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} \qquad (2\text{-}4)$$

Ускорение точки в декартовых координатах

Разложим ускорение и скорость точки на составляющие, параллельные осям декартовой системы координат. Получим

$$\overline{a}(t) = a_x(t) \cdot \overline{i} + a_y(t) \cdot \overline{j} + a_z(t) \cdot \overline{k}$$

$$\overline{v}(t) = v_x(t) \cdot \overline{i} + v_y(t) \cdot \overline{j} + v_z(t) \cdot \overline{k} \qquad (2\text{-}5)$$

После дифференцирования

$$\overline{a}(t) = \frac{d\overline{r}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \cdot \overline{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \cdot \overline{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \cdot \overline{k} \qquad (2\text{-}6)$$

Отсуда следует

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \ddot{x}(t) \qquad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \ddot{y}(t) \qquad a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \ddot{z}(t) \qquad (2\text{-}7)$$

Проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль ускорения и направляющие косинусы равны:

$$a = |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2} \qquad (2\text{-}8)$$

$$cos(a, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a} \qquad cos(a, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a} \qquad cos(a, z) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a} \qquad (2\text{-}9)$$

Если точка движется в плоскости, то, выбрав оси координат Ox и Oy в этой плоскости, получим:

$$z = const = 0, \quad a_z = \ddot{z} = 0 \qquad a = |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}$$

Для прямолинейного движения точки координатную ось, например ось Ox, направляем по траектории. Тогда

$$y = z = const = 0, \quad a_y = \ddot{y} = 0, \quad a_z = \ddot{z} = 0 \qquad a = |\overline{a}| = a_x = \ddot{x}$$

Ускорение точки при естественном способе задания движения.

Скорость точки равна $\overline{v} = \dot{s} \cdot \overline{\tau} = v_\tau \cdot \overline{\tau}$.

В соответствии с определением ускорения

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\cdot\bar{\tau} + \dot{s}\cdot\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s}\cdot\bar{\tau} + \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\cdot\bar{n} = \ddot{s}\cdot\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\cdot\bar{n}.$$

Или $$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n \qquad (2\text{-}10)$$

Таким образом получено разложение вектора ускорения точки по осям естественного трехгранника.

Часть ускорения $$\bar{a}_\tau = \ddot{s}\cdot\bar{\tau} = \frac{dv_\tau}{dt}\cdot\bar{\tau} \qquad (2\text{-}11)$$

называется **касательной составляющей ускорения.**

Другая часть ускорения $$\bar{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\cdot\bar{n} = \frac{v^2}{\rho}\cdot\bar{n} \qquad (2\text{-}12)$$

называется **нормальной составляющей ускорения.** Она направлена внутрь вогнутости траектории, т.е. в сторону положительного направления единичного вектора главной нормали $\bar{n}$.

Формулы для проекции ускорения на естественные оси:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_b = 0$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad tg(\alpha) = \frac{a_\tau}{a_n}$$

Касательная составляющая $\bar{a}_\tau$, при $\ddot{s} > 0$ направлена по направлению вектора $\bar{\tau}$, при $\ddot{s} < 0$ противоположно $\bar{\tau}$.

Вычисление проекций ускорения точки на естественные оси

Пусть движение точки задано в координатной форме. Проекция ускорения на касательную к траектории равна $a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt}$, алгебраическая скорость с точностью до знака равна модулю скорости $v_\tau = \pm v$, а модуль скорости равен

$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}$. Вычислим первую производную по времени от этого выражения, получим

$$a_\tau = \frac{v_x\cdot a_x + v_y\cdot a_y + v_z\cdot a_z}{v_\tau} = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{x} + \dot{y}\cdot\ddot{y} + \dot{z}\cdot\ddot{z}}{v_\tau}$$

Проекция ускорения на нормаль к траектории равна $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$.

Радиус кривизны траектории в текущей точке равен $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$.

Частные случаи движения точки

Равномерное движение

При равномерном движении точки по траектории любой формы модуль скорости v=*const*, следовательно постоянна и алгебраическая скорость v_τ, которая может отличаться от v только знаком.

Так как $\dfrac{ds}{dt} = v_\tau$, то $ds = v_\tau \cdot dt$. Если принять при $t = t_0$, $s = s_0$, то после интегрирования получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_\tau \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad s - s_0 = v_\tau \cdot (t - t_0) \quad \text{или} \quad s = v_\tau \cdot (t - t_0) + s_0$$

Можно также записать $\quad v_\tau = \dfrac{s - s_0}{(t - t_0)} \quad (t - t_0) = \dfrac{s - s_0}{v_\tau}$

Равнопеременное движение

Равнопеременным движением называется такое движение точки по траектории любой формы, при котором касательное ускорение постоянно, т.е. a_τ =*const* Движение называется <u>*равноускоренным*</u> если алгебраическая скорость v_τ и касательное ускорение a_τ имеют одинаковые знаки. Если v_τ и a_τ имеют разные знаки, то назыется <u>*равнозамедленным*</u> . Получим формулы для алгебраической скорости и расстояния при равнопеременном движении.

Имеем:

$$\frac{dv_\tau}{dt} = a_\tau, \qquad dv_\tau = a_\tau \cdot dt.$$

Если принять при $t = t_0$, $v_\tau = v_0$ $s = s_0$, то после интегрирования получим

$$\int_{v_0}^{v_\tau} dv_\tau = a_\tau \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad v_\tau - v_0 = a_\tau \cdot (t - t_0) \qquad \text{или} \quad v_\tau = v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0).$$

Можно также записать $\quad a_\tau = \dfrac{v_\tau - v_0}{(t - t_0)} \qquad (t - t_0) = \dfrac{v_\tau - v_0}{a_\tau}$

Далее $ds = (v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0)) \cdot dt$ и после интегрирования

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_0}^{t} (v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0))dt, \quad s - s_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + a_\tau \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$\text{или} \quad s = s_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + a_\tau \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

Можно также записать $\quad v_0 = \dfrac{s - s_0}{(t - t_0)} - \dfrac{a_\tau \cdot (t - t_0)}{2}$

$$a_\tau = \frac{2 \cdot (s - s_0)}{(t - t_0)^2} - \frac{2 \cdot v_0}{(t - t_0)}$$

Если решить квадратное уравнение, то можно найти $(t - t_0)$.

Лекция 3

Краткое содержание: Скорость и ускорение точки в полярных координатах.

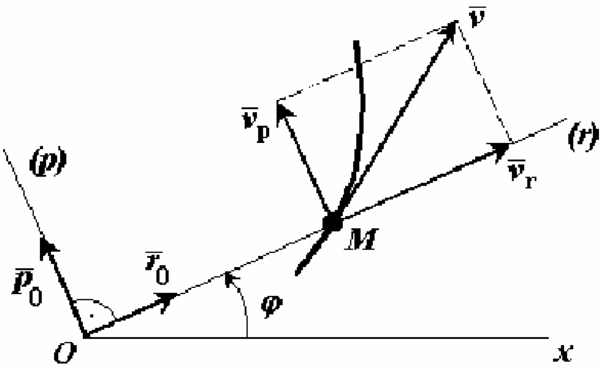
Скорость и ускорение точки в полярных координатах

Рассмотрим движение точки в плоскости. В этом случае движение можно задать в полярных координатах. Для этого примем какую-либо точку O плоскости за полюс и проведем из нее полярную ось, например ось Ox. Положение движущейся точки M на плоскости известно, если заданы радиус r и полярный угол φ как функции времени, т.е.

$$r = r(t) \text{ и } \varphi = \varphi(t). \tag{3-1}$$

Эти уравнения называются ***уравнениями движения точки в полярных координатах***. Если из уравнений (3-1) исключить параметр - время t, то получим уравнение траектории в полярных координатах: $F(r,\varphi) = 0$.

Введем единичный вектор $\overline{r_0}$, направленный по радиус-вектору от полюса O к точке M. Тогда $\overline{OM} = \overline{r} = r \cdot \overline{r_0}$.



Для скорости $\overline{v}$ получаем выражение

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \overline{r_0}) = \frac{dr}{dt} \cdot \overline{r_0} + r \cdot \frac{d\overline{r_0}}{dt}$$

Производная от единичного вектора по времени равна $\dfrac{d\overline{r_0}}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt} \cdot \overline{p_0}$

(без доказательства)

$\overline{p_0}$ - единичный вектор,направление которого получается поворотом вектора $\overline{r_0}$ на 90^0 в положительном направлении угла φ.

После этого для скорости $\overline{v}$ получаем выражение $\overline{v} = \dot{r} \cdot \overline{r_0} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{p_0}$

Это разложение скорости точки на радиальную v_r и трансверсальную (поперечную) v_p составляющие, т.е.

$$\overline{v} = \overline{v_r} + \overline{v_p} \qquad \overline{v_r} = \dot{r} \cdot \overline{r_0} \qquad \overline{v_p} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{p_0}$$

$v_r = \dot{r}$ - радиальная скорость; $\qquad v_p = r \cdot \dot{\varphi}$ - трансверсальная скорость.

Модуль скорости равен $v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2}$.

Определим ускорение точки $\qquad \overline{a} = \dfrac{d\overline{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \overline{r_0} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{p_0})$

После дифференцирования получаем $\overline{a} = (\ddot{r} - \dot{r}\cdot\dot{\varphi}^2)\cdot\overline{r_0} + (r\cdot\ddot{\varphi} + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\varphi})\cdot\overline{p_0}$

Получили разложение ускорения точки на радиальную a_r и трансверсальную (поперечную) a_p составляющие, т.е.

$$\overline{a} = \overline{a_r} + \overline{a_p} \qquad \overline{a_r} = (\ddot{r} - \dot{r}\cdot\dot{\varphi}^2)\cdot\overline{r_0} \qquad \overline{a_p} = (r\cdot\ddot{\varphi} + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\varphi})\cdot\overline{p_0}$$

$a_r = (\ddot{r} - \dot{r}\cdot\dot{\varphi}^2)$ - радиальная скорость;

$a_p = (r\cdot\ddot{\varphi} + 2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\varphi})$ - трансверсальная скорость.

Модуль ускорения равен $a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2}$.

<u>Частные случаи:</u>

1. Если $\varphi = const$, то имеем прямолинейное движение по прямой $\boldsymbol{Or}$.

В этом случае $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ и

$$v_r = \dot{r} \qquad v_p = 0 \qquad v = |\dot{r}|$$

$$a_r = \ddot{r} \qquad a_p = 0 \qquad a = |\ddot{r}|$$

2. Если $r = const$, то имеем движение по окружности .

В этом случае $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ и

$$v_r = 0 \qquad v_p = r\cdot\dot{\varphi} \qquad v = r\cdot|\dot{\varphi}|$$

$$a_r = -r\cdot\dot{\varphi}^2 \qquad a_p = r\cdot\ddot{\varphi} \qquad a = r\cdot\sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$\dot{\varphi}$ - угловая скорость вращения радиус-вектора, $\ddot{\varphi}$ - его угловое ускорение.

Скорость и ускорение точки в цилиндрических координатах

При движении точки в пространстве иногда используются цилиндрические оси координат.

Положение точки определяется координатами

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad \text{и} \quad z = z(t). \qquad (3\text{-}2)$$

Лекция 4

Краткое содержание: Задачи кинематики твердого тела. Виды движения твердого тела. Число степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердым телом называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;
2. определение кинематических характеристик (траектория, скорость и ускорение) движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

1. поступательное движение;
2. вращение вокруг неподвижной оси;
3. плоское движение;
4. вращение вокруг неподвижной точки;
5. свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела:

Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета.

Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.

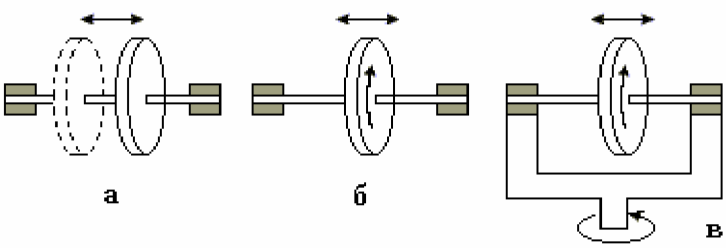


Рис. 4-1

Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис. а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис. б), то он приобретает еще одну степень свободы - к координате x добавляется угол поворота φ диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. в), то число степеней свободы становится равным трем – к x и φ добавляется угол поворота рамки ϕ.

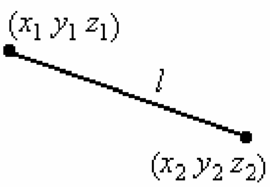
Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты x, y и z. Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (r, φ, z) и сферической (r, φ, ϕ) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат xOy, то координаты x и y определяют положение точки на плоскости, а координата z тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины l. Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.



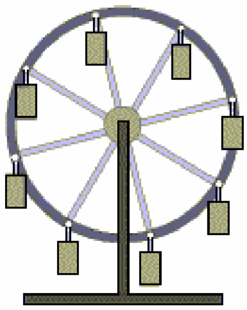
Уравнение $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют $(2 \cdot 3 - 1 = 5)$ пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно $(3 \cdot 3 - 3 = 6)$ шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащие на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

Поступательное движение твердого тела.

<u>Поступательным движением</u> твёрдого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.



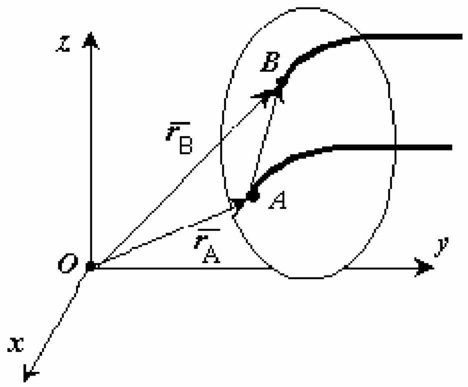
Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

Рис. 4-2

Теорема. При поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы.

Если выбрать две точки твердого тела А и В, то радиус-векторы этих точек связаны соотношением $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{AB}$. Траектория точки А это кривая, которая задается функцией $\overline{r_A}(t)$, а траектория точки В это кривая, которая задается функцией $\overline{r_B}(t)$. Траектория точки В получается переносом траектории точки А в пространстве вдоль вектора $\overline{AB}$, который не меняет своей величины и направления во времени. Следовательно, траектории всех точек твердого тела одинаковы.



Продифференцируем по времени выражение $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{AB}$.

Получаем $\overline{v_B} = \frac{\overline{r_A}}{dt} + \frac{\overline{AB}}{dt} = \overline{v_A}$, так как $\frac{\overline{AB}}{dt} = \overline{0}$. Продифференцируем по времени скорости и получим выражение $\overline{a_B} = \overline{a_A}$.

Рис. 4-3

Следовательно, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы. Что и требовалось доказать.

Поступательное движение твёрдого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки.

Твёрдое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Для задания движения твердого тела в декартовой системе координат достаточно знать координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ любой его точки.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ называются **уравнениями поступательного движения твердого тела**.

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется **осью вращения тела**.

Пусть точки А и В неподвижны. Вдоль оси вращения направим ось Oz. Через ось вращения проведём неподвижную плоскость Π_0 и подвижную Π, скреплённую с вращающимся телом (при $t = 0$ $\Pi \to \Pi_0$).

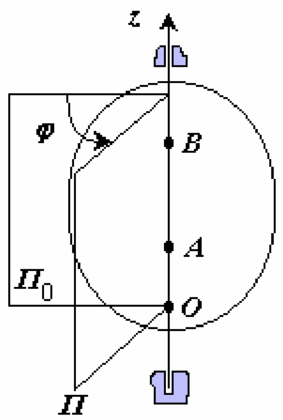


Рис. 4-4

Положение плоскости Π и самого тела определяется двугранным углом между плоскостями Π и Π_0. Обозначим его φ. Угол φ называется **углом поворота тела**.

Положение тела относительно выбранной системы отсчета однозначно определяется в любой момент времени, если задано уравнение $\varphi = f(t)$, где $f(t)$ - любая дважды дифференцируемая функция времени. Это уравнение называется **уравнением вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси**.

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла φ.

Угол φ считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном направлении. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси введём понятия угловой скорости и углового ускорения.

Алгебраической угловой скоростью тела в какой-либо момент времени называется первая производная по времени от угла поворота в этот момент, то есть $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Угловая скорость является положительной величиной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Размерность угловой скорости по определению: $[\omega] = \dfrac{угол}{время} = \dfrac{рад}{с} = c^{-1}$

В технике угловая скорость – это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За одну минуту тело повернётся на угол $2 \cdot \pi \cdot n$, где n - число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим

$$\omega_{c^{-1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_{об/мин}}{60} = \frac{\pi \cdot n_{об/мин}}{30} \approx 0.1 \cdot n_{об/мин}$$

Алгебраическим угловым ускорением тела называется первая производная по времени от угловой скорости, то есть вторая производная от угла поворота т.е. $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\omega}{dt^2}$

Размерность углового ускорения по определению: $[\varepsilon] = \dfrac{угол}{время^2} = \dfrac{рад}{c^2} = c^{-2}$

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела. $\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{k}$ и $\overline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \overline{k}$, где $\overline{k}$ - единичный вектор оси вращения. Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ можно изображать в любых точках оси вращения, они являются скользящими векторами.

Алгебраическая угловая скорость это проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Алгебраическое угловое ускорение это проекция вектора углового ускорения скорости на ось вращения.

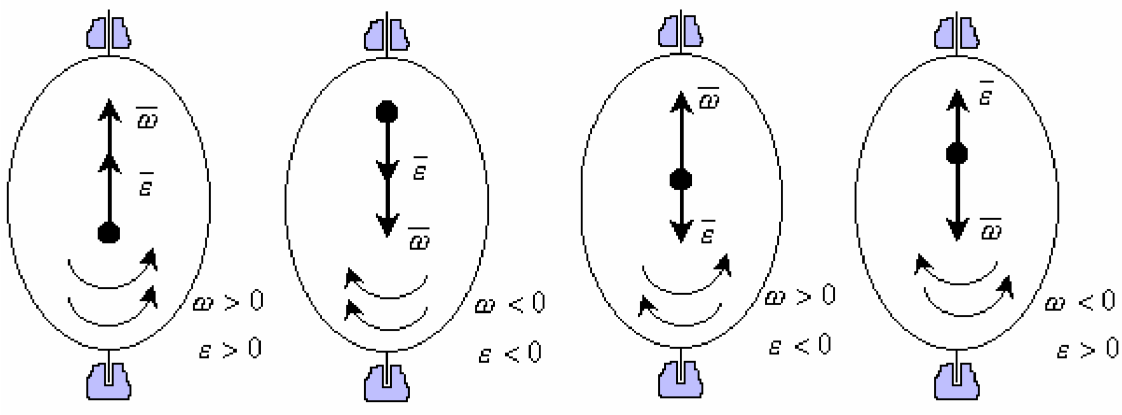


Рис. 4-5

Если $\varepsilon > 0$ при $\omega > 0$, то алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону. Направление векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ совпадают, оба они направлены в положительную сторону оси вращения Oz.

При $\varepsilon < 0$ и $\omega < 0$ тело вращается ускоренно в отрицательную сторону. Направление векторов $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ совпадают, оба они направлены в отрицательную сторону оси вращения Oz.

Если $\varepsilon < 0$ при $\omega > 0$, то имеем замедленное вращение в положительную сторону. Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны.

Если $\varepsilon > 0$ при $\omega < 0$, то имеем замедленное вращение в отрицательную сторону. Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (если нельзя изобразить вектора). Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела, а дуговая стрелка для углового ускорения – направление, в котором увеличивается алгебраическая угловая скорость. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного их направления противоположны.

Частные случаи вращения твердого тела

Равномерное вращение

Вращение называется равномерным, если его угловая скорость постоянна, т.е. $\omega = const$.

Так как $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$, то $d\varphi = \omega \cdot dt$. Начальные условия: $t = t_0, \varphi = \varphi_0$, то после интегрирования получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega \cdot (t - t_0) \qquad \text{или} \quad \varphi = \omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0$$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{(t - t_0)}, \quad (t - t_0) = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega}$$

Равнопеременное вращение

Вращение называется равноускоренным, если его угловое ускорение постоянно и больше нуля, т.е. $\varepsilon = const > 0$.

Вращение называется равнозамедленным, если его угловое ускорение постоянно и меньше нуля, т.е. $\varepsilon = const < 0$.

Так как $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, то $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Начальные условия: $t = t_0$, $\varphi = \varphi_0$ $\omega = \omega_0$, то после интегрирования получим

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \cdot \int_{t_0}^{t} dt, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon \cdot (t - t_0) \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)$$

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{(t - t_0)}, \quad (t - t_0) = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}$$

далее $d\varphi = \omega \cdot dt$, $d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)) \cdot dt$ и после интегрирования,

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0}^{t} (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)) dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$\text{или} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

Лекция 5

Краткое содержание: Скорости и ускорения точек тела при вращении. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Сложение скоростей. Сложение ускорений при поступательном движении твердого тела.

Скорости и ускорения точек тела при вращении.

Перейдем к изучению движения отдельных точек твердого тела. Известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси $\varphi(t)$.

Рассмотрим какою-нибудь точку M твердого тела, находящуюся на расстоянии h от оси вращения. При вращении твердого тела точка M будет описывать окружность радиуса h, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр O лежит на самой оси. Если за время dt происходит элементарный поворот тела на угол $d\varphi$, то точка M при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение $ds = h \cdot d\varphi$.

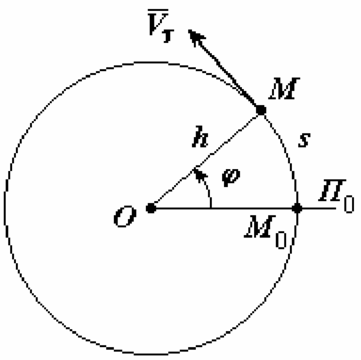


Рис. 5-1

Тогда алгебраическая скорость будет равна

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad v_\tau = h \cdot \omega \qquad (5\text{-}1)$$

Скорость точки равна $\overline{v} = v_\tau \cdot \overline{\tau}$. Скорость $\overline{v}$ в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной** или **окружной скоростью**.

Модуль скорости равен

$$v = h \cdot |\omega|. \qquad (5\text{-}2)$$

Величины скоростей точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ω. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Ускорение точки раскладываем на касательную и нормальную составляющие, т.е.

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n .$$

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

$$a_\tau = \ddot{s} = h \cdot \ddot{\varphi} = h \cdot \varepsilon , \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{h^2 \cdot \omega^2}{h} = h \cdot \omega^2 .$$

Таким образом $a_\tau = h \cdot \varepsilon$, $a_n = h \cdot \omega^2$ и модуль ускорения вычисляется по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

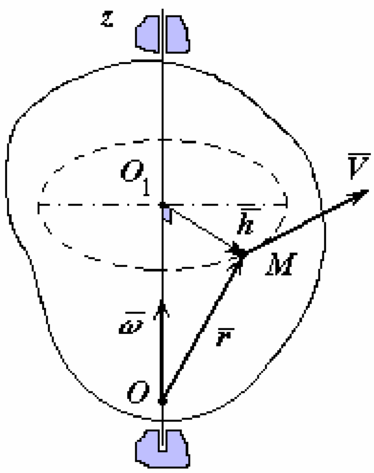
Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, как и скорости, так же пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения.

Векторные скорости и ускорения точек тела

Скорость точки по модулю и направлению можно представить векторным произведением

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \qquad (5\text{-}3)$$

где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки М, проведенный из произвольной точки оси вращения Oz.



Это выражение называется **векторной формулой Эйлера.**

Доказательство. Вектор $\bar{\omega} \times \bar{r}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{r}$, следовательно, по направлению он совпадает со скоростью $\bar{v}$. Модуль векторного произведения $|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot r \cdot sin(\bar{\omega}, \bar{r}) = \omega \cdot h = v$ Таким образом, векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{r}$ по модулю и направлению определяет скорость точки.

Рис. 5-2

Определим ускорение точки продифференцировав формулу Эйлера.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}, \text{ или}$$

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

Первое слагаемое является касательным ускорением, а второе – нормальным.

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} \qquad \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = -\bar{h} \cdot \omega^2.$$

Сопоставление двух формул для скорости точки $\left(\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}\right.$ и $\left.\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}\right)$ дает формулу для вычисления производной по времени от вектора $\bar{r}$:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

В этой формуле вектор $\bar{r}$ имеет постоянный модуль, так как соединяет все время две точки твердого тела.

Сложное движение точки

Основные понятия

Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга.

В простейшем случае сложное движение точки состоит из **относительного** и **переносного** движений. Определим эти движения.

Рассмотрим две системы отсчета движущиеся друг относительно друга. Одну систему отсчета $O_1x_1y_1z_1$ примем за основную и неподвижную. Вторая система отсчета $Oxyz$ будет двигаться относительно первой.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется **относительным.** Характеристики этого движения, такие как, траектория, скорость и ускорение, называются **относительными.** Их обозначают индексом r.

Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется **абсолютным** (или сложным). Траектория, скорость и ускорение этого движения называются **абсолютными.** Их обозначают без индекса.

Переносным движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S, с которым скреплена подвижная система отсчета. **Переносной** скоростью и **переносным** ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. **Переносные** скорость и ускорение обозначают индексом e.

Если траектории всех точек тела S, скрепленного с подвижной системой отсчета, изобразить на рисунке, то получим семейство линий – семейство траекторий переносного движения точки М. Вследствие относительного движения точки М в каждый момент времени она находится на одной из траекторий переносного движения.

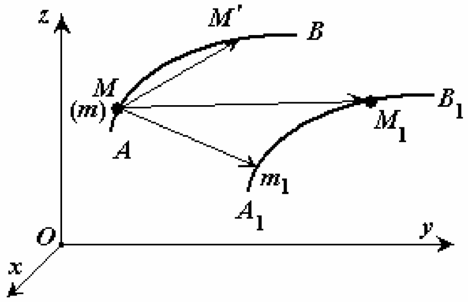
Одно и то же абсолютное движение, выбирая различные подвижные системы отсчета, можно считать состоящим из разных переносных и соответственно относительных движений.

Пример.

Имеется круглый диск, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси перпендикулярной плоскости диска. На диске имеется канавка, направленная вдоль радиуса диска. Вдоль канавки перемещается материальная точка. Материальная точка совершает сложное движение. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным. Подвижную систему отсчета жестко свяжем с вращающимся диском, одну из осей (например, x) направим вдоль канавки. Движение точки вдоль оси x будет относительным, движение точки вместе с подвижной системой отсчета (вместе с диском) будет переносным движением.

Сложение скоростей

Определим скорость абсолютного движения точки М, если известны скорости абсолютного и переносного движений этой точки.



За малый промежуток времени dt вдоль траектории AB точка М совершит относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{MM'}$. Сама кривая AB, двигаясь вместе с подвижными осями, перейдет за тот же промежуток времени в новое положение A_1B_1 Одновременно та точка m кривой AB, с которой совпадала точка М, совершит переносное перемещение $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результате точка M совершит перемещение $\overline{MM_1}$.

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{MM'}$$

Деля обе части равенства на dt и переходя к пределу, получим

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}$$

Сложение ускорений при поступательном переносном движении.

Определим ускорение абсолютного движения точки в частном случае поступательного переносного движения.

Справедлива теорема $\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}$. Если подвижная система отсчета $Oxyz$ движется поступательно относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$, то все точки тела, скрепленного с этой системой, имеют одинаковые скорости и ускорения, равные скорости и ускорению начала координат подвижной системы О. Следовательно, для скорости и ускорения переносного движения имеем

$$\overline{v_e} = \overline{v_0}\,, \qquad \overline{a_e} = \overline{a_0}$$

Выразим относительную скорость в декартовых координатах

$$\overline{v_r} = \dot{x}\cdot\overline{i} + \dot{y}\cdot\overline{j} + \dot{z}\cdot\overline{k}$$

Подставляя в теорему о сложении скоростей значения переносной и относительной скоростей получаем $\overline{v} = \overline{v_0} + \dot{x}\cdot\overline{i} + \dot{y}\cdot\overline{j} + \dot{z}\cdot\overline{k}$

По определению $\overline{a} = \dfrac{d}{dt}\overline{v} = \dfrac{d}{dt}(\overline{v_0} + \dot{x}\cdot\overline{i} + \dot{y}\cdot\overline{j} + \dot{z}\cdot\overline{k})$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v_0}}{dt} + \ddot{x}\cdot\overline{i} + \ddot{y}\cdot\overline{j} + \ddot{z}\cdot\overline{k}\,, \qquad \frac{d\overline{v_0}}{dt} = \overline{a_0}\,, \qquad \overline{a_r} = \ddot{x}\cdot\overline{i} + \ddot{y}\cdot\overline{j} + \ddot{z}\cdot\overline{k}\,.$$

Следовательно, $\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r}$

Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений.

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2\cdot a_e\cdot a_r\cdot cos(\overline{a_e}, \overline{a_r})}$$

Лекция 6

Краткое содержание: Плоское движение твердого тела. Уравнения плоского движения. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Угловая скорость и угловое ускорение при плоском движении. Скорости точек тела при плоском движении. Мгновенный центр скоростей. Методы нахождения положения мгновенного центра скоростей.

Плоское движение твердого тела

Плоским движением твердого тела называется такое его движение, при котором каждая его точка все время движется в одной и той же плоскости.

Плоскости, в которых движутся отдельные точки тела, параллельны между собой и параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Плоское движение твердого тела часто называют плоскопараллельным. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Плоское движение твердого тела имеет большое значение в технике. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем движения твердого тела.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

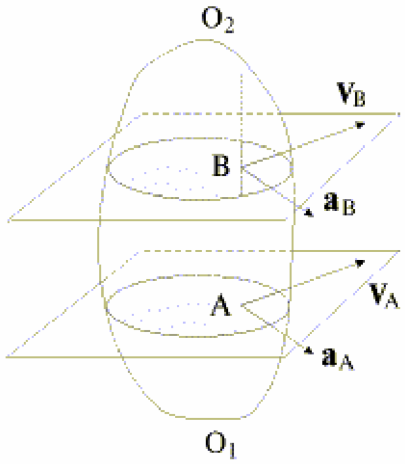


Рис. 6-1

Если в теле провести некоторую прямую O_1O_2, перпендикулярную плоскостям, в которых происходит движение точек, то все точки этой прямой будут двигаться по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями; сама прямая будет, естественно, сохранять свою ориентацию в пространстве. Таким образом, при плоском, движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела.

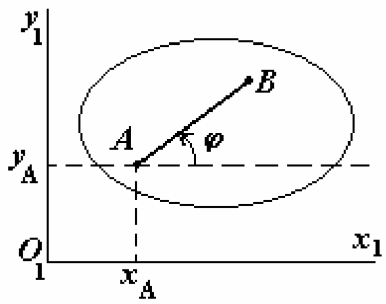
Сечение твердого тела будем называть плоской фигурой. Положение фигуры на ее плоскости полностью определяется положением отрезка прямой линии, жестко скрепленной с этой плоской фигурой.

Уравнения плоского движения твердого тела

Для задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат $O_1x_1y_1$, лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка AB, скрепленного с фигурой.

Положение отрезка AB, относительно системы координат $O_1x_1y_1$ определяется заданием координат какой-нибудь точки этого отрезка и его направления. Например, координаты точки A (x_A, y_A) и направление, заданное углом φ.

Уравнения движения плоской фигуры относительно системы координат $O_1x_1y_1$ имеют вид: $x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t),\ \ \varphi = \varphi(t)$.



Твердое тело при плоском движении имеет три степени свободы.

Функции

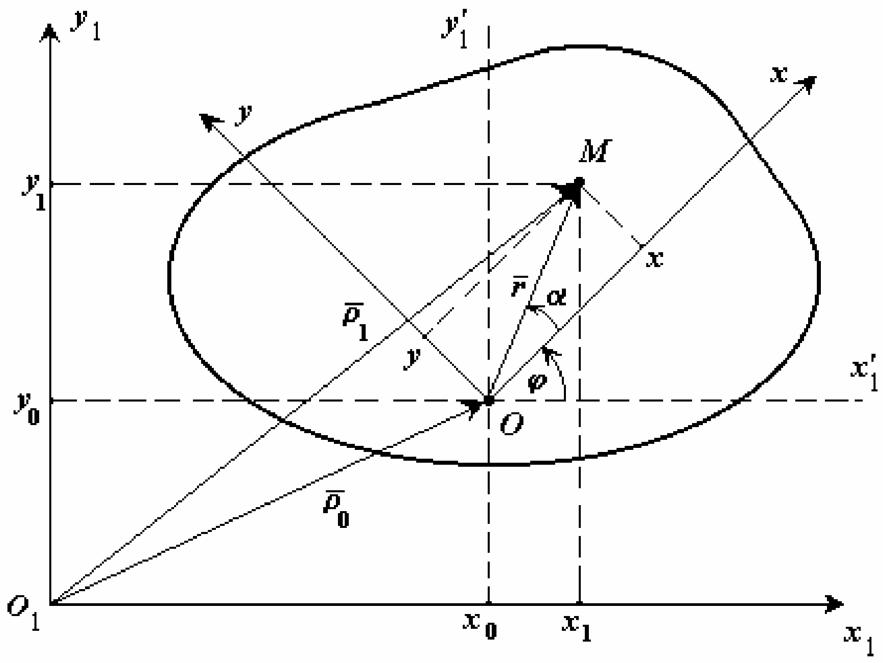
$$x_A = x_A(t),\ \ y_A = y_A(t),\ \ \varphi = \varphi(t)$$

называются **уравнениями плоского движения твердого тела**.

Рис. 6-2

Перейдем к изучению движения отдельной точки твердого тела. Положение любой точки М плоской фигуры относительно подвижной системы отсчета Oxy, скрепленной с этой движущейся фигурой и лежащей в ее плоскости, полностью определяется заданием координат x и y точки М (Рис.6-3).

Рис. 6-3



Между координатами точки М в различных системах отсчета существует связь:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + r\cdot cos(\alpha+\varphi) \\ y_1 &= y_0 + r\cdot sin(\alpha+\varphi) \end{aligned}\right\}, \qquad (6\text{-}1)$$

где r - длина отрезка ОМ, α - постоянный угол между ОМ и осью Ox. С учетом выражений $r\cdot cos(\alpha) = x$ и $r\cdot sin(\alpha) = y$ получаем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x\cdot cos(\varphi) - y\cdot sin(\varphi) \\ y_1 &= y_0 + x\cdot sin(\varphi) + y\cdot cos(\varphi) \end{aligned}\right\}, \qquad (6\text{-}2)$$

Формулы (6-2) являются уравнениями движения точки M плоской фигуры относительно координат $O_1x_1y_1$. Эти формулы позволяют определить координаты любой точки плоской фигуры по заданным уравнениям движения этой фигуры и координатам этой точки относительно подвижной системы отсчета, скрепленной с движущейся фигурой.

Используя матрично-векторные обозначения уравнения (6-2) можно записать в такой форме:

$$\overline{\rho}_1 = \overline{\rho}_0 + A \cdot \overline{r}, \tag{6-3}$$

где A – матрица поворота на плоскости:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \overline{\rho}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\rho}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения.

Теорема. Любое движение твердого тела, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, бесчисленным множеством способов можно разложить на два движения, одно из которых переносное, а другое – относительное.

В частности, движение плоской фигуры в ее плоскости относительно системы $O_1x_1y_1$, расположенной в той же плоскости, можно разложить на переносное и относительное движения следующим образом. Примем за переносное движение фигуры ее движение вместе с поступательно движущейся системой координат $Ox_1'y_1'$, начало которой скреплено с точкой O фигуры, принятой за полюс. Тогда относительное движение фигуры будет по отношению к подвижной системе координат $Ox_1'y_1'$ вращением вокруг подвижной оси, перпендикулярной плоской фигуре и проходящей через выбранный полюс.

Для доказательства этого достаточно показать, что плоскую фигуру в ее плоскости из одного положения в любое другое можно перевести двумя перемещениями – поступательным перемещением в плоскости фигуры вместе с каким –либо полюсом и поворотом в той же плоскости вокруг этого полюса.

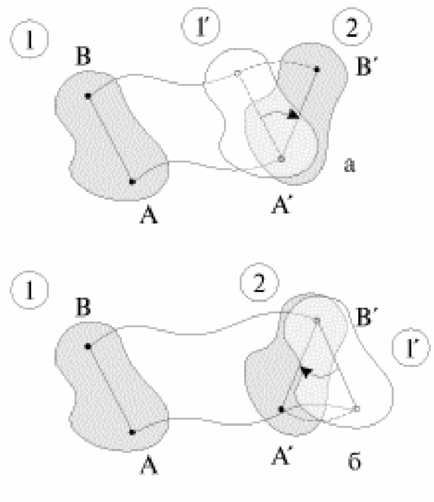


Рис. 6-4

Рассмотрим два любых положения плоской фигуры 1 и 2. Выделим отрезок AB в рассматриваемой фигуре. Перевод фигуры из положения 1 в положение 2 можно рассматривать как суперпозицию двух движений: поступательного из 1 в 1' и вращательного из 1' в 2 вокруг точки A', называемой обычно полюсом (рис. 6-4а). Существенно, что в качестве полюса можно выбрать любую точку, принадлежащую фигуре или даже лежащую в плоскости вне фигуры. На рис. 6-4б, к примеру, в качестве полюса выбрана точка В. Обратите внимание: длина пути при поступательном перемещении изменилась (в данном случае увеличилась), но угол поворота остался прежним!

Угловая скорость и угловое ускорение тела при плоском движении.

Для характеристики вращательной части плоского движения твердого тела вокруг подвижной оси, проходящей через выбранный полюс, вводится понятие угловой скорости $\overline{\omega}$ и углового ускорения $\overline{\varepsilon}$.

$\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{k}$ и $\overline{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \overline{k}$, где $\overline{k}$ - единичный вектор, направленный по оси вращения.

Если угол поворота вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, обозначить φ, то $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, а $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

Векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ можно изображать в любых точках подвижной оси вращения, т.е. они являются свободными векторами.

Скорости точек тела при плоском движении

Теорема. Скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки от вращения фигуры вокруг полюса.

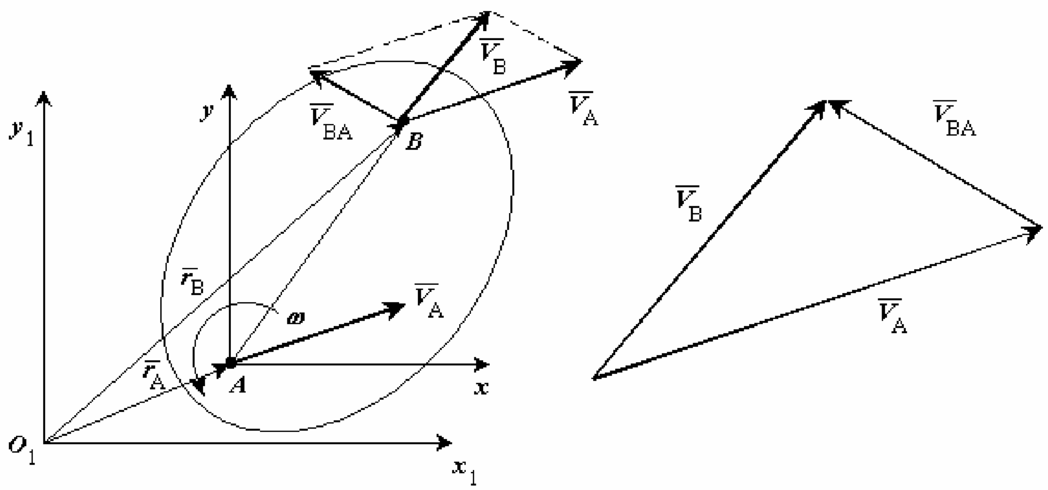


Рис. 6-5

Применяя к плоскому движению теорему о сложении скоростей для какой-либо точки В фигуры, получаем $\overline{v_B} = \overline{v_{Be}} + \overline{v_{Br}}$, где $\overline{v_B}$ - абсолютная скорость точки В плоской фигуры; $\overline{v_{Be}}$ - скорость точки В переносного поступательного движения плоской фигуры вместе, например, с точкой А этой фигуры;

$\overline{v_{Br}}$ - скорость точки В в относительном движении, которым является вращение плоской фигуры вокруг точки А с угловой скоростью ω.

Так как за переносное движение выбрано поступательное движение вместе с точкой А, то у всех точек плоской фигуры одинаковые переносные скорости, совпадающие с абсолютной скоростью точки А, т.е. $\overline{v_{Be}} = \overline{v_A}$

Скорость относительного движения, в случае когда оно является вращательным движением, равна $v_{Br} = \omega \cdot AB$

Скорость $\overline{v_{Br}}$ расположена в плоскости движущейся фигуры и направлена перпендикулярно отрезку АВ, соединяющему точку В с полюсом А. Эту относительную скорость можно выразить в виде векторного произведения $\overline{v_{Br}} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$, где угловая скорость $\overline{\omega}$ считается направленной по подвижной оси вращения, проходящей через точку А и перпендикулярной плоскости фигуры. Относительную скорость $\overline{v_{Br}}$ обозначим $\overline{v_{BA}}$. Это обозначение показывает, что скорость относительного движения точки В получается от вращения плоской фигуры вокруг подвижной оси, проходящей через точку А, или просто вокруг точки А.

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}}, \qquad \text{где} \quad v_{BA} = \omega \cdot AB$$

Что и требовалось доказать.

Мгновенный центр скоростей

<u>Мгновенным центром скоростей</u> называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

<u>Теорема</u>. В каждый момент времени при плоском движении фигуры в ее плоскости при $\omega \neq 0$ (непоступательное движение), имеется один единственный центр скоростей.

Для доказательства достаточно указать способ нахождения мгновенного центра скоростей, если известны скорость какой-либо точки О плоской фигуры и ее угловая скорость в рассматриваемый момент времени.

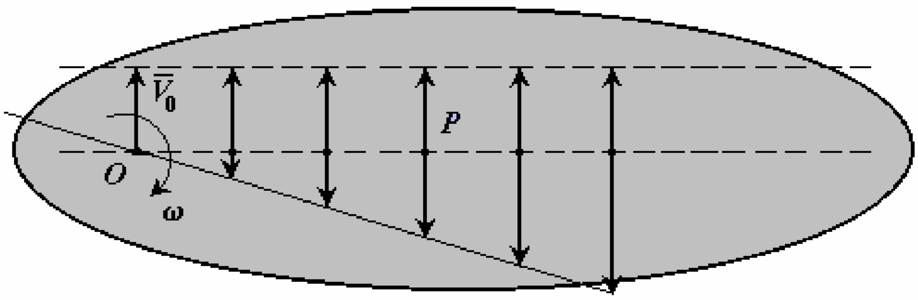


Рис. 6-6

$$\overline{v}_P = \overline{v}_O + \overline{v}_{PO} = 0, \quad \overline{v}_{PO} = -\overline{v}_O, \quad v_{PO} = \omega \cdot OP, \quad \text{следовательно}$$

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

Мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к скорости $\bar{v}_O$, проведенном из точки О, на расстоянии $OP = {v_O}/{\omega}$.

Мгновенный центр скоростей это единственная точка плоской фигуры для данного момента времени. В другой момент времени мгновенным центром скоростей будет уже другая точка.

Возьмем точку Р за полюс $\bar{v}_O = \bar{v}_P - \bar{v}_{PO} = \bar{v}_P + \bar{v}_{OP}$

Так как $\bar{v}_P = 0$, то $\bar{v}_O = \bar{v}_{OP}$. Аналогичный результат получается для любой другой точки плоской фигуры.

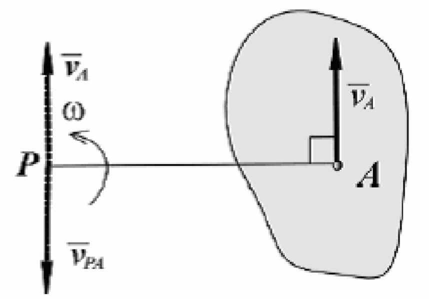
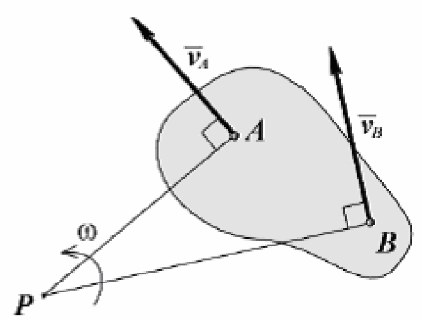
$\bar{v}_A = \bar{v}_{AP}$ $\quad v_{AP} = \omega \cdot PA$ $\quad \bar{v}_A$ перпендикулярно PA.

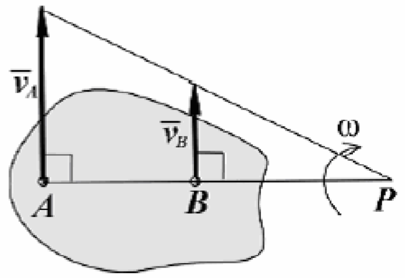
$\bar{v}_B = \bar{v}_{BP}$ $\quad v_{BP} = \omega \cdot PB$ $\quad \bar{v}_B$ перпендикулярно PB.

Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.

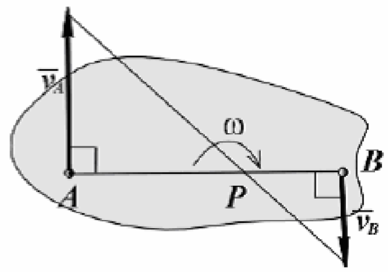
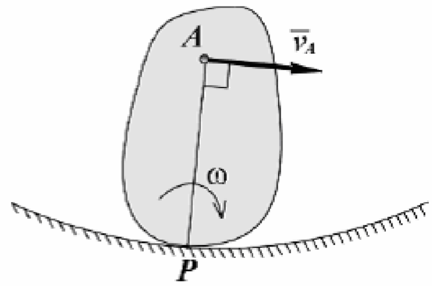
Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

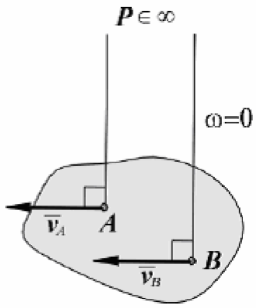
Методы нахождения положения МЦС

<table>
<tr>
<td>1). Известен вектор скорости $\bar{v}_A$ какой -либо точки А плоской фигуры и ее угловая скорость $\omega \neq 0$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">МЦС (точка Р) находится на перпендикуляре к вектору $\bar{v}_A$, проведенном через точку А. Расстояние $PA = {v_A}/{\omega}$ и откладывается в сторону, которую указывает вектор $\bar{v}_A$ после поворота на угол ${\pi}/{2}$ в направлении дуговой стрелки ω. При этом получается, что скорость
$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA} = \bar{v}_A - \bar{v}_A = 0 \qquad (v_{PA} = \omega \cdot PA = v_A)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>2). Известны не параллельные друг другу скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ двух точек плоской фигуры.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">МЦС (точка Р) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки А и В к скоростям этих точек. Угловая скорость плоской фигуры</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">равна $\omega = {}^{v_A}\!/_{PA} = {}^{v_B}\!/_{PB}$. Отметим, что для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь направления скоростей двух точек .</td></tr>
<tr><td>3). Известны параллельные друг другу скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в одну сторону и не равные по модулю ($\bar{v}_A \neq \bar{v}_B$).</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">МЦС (точка P) находится в точке пересечения продолжения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции $v_A : v_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры $\omega = {}^{v_A}\!/_{PA} = {}^{v_B}\!/_{PB}$. Случай равенства ($\bar{v}_A = \bar{v}_B$) см. п. 6.</td></tr>
</table>

Методы нахождения положения МЦС

<table>
<tr><td>4). Известны параллельные друг другу скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB, направленные в разные стороны.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">МЦС (точка P) находится в точке пересечения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции: $v_A : v_B = PA : PB$. Угловая скорость фигуры $\omega = {}^{v_A}\!/_{PA} = {}^{v_B}\!/_{PB}$.</td></tr>
<tr><td>5). Плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">МЦС (точка P) находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю. Если известна скорость</td></tr>
</table>

какой-либо точки A фигуры, то угловая скорость $\omega = {}^{v_A}\!/_{PA}$.	
6). Известно, что скорости $\bar{v}_A$ *и* $\bar{v}_B$ *двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны отрезку AB.*	
МЦС в данный момент времени *не существует* или, другими словами, *находится в бесконечности*. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю. Движение фигуры называется *мгновенно-поступательным*. Скорости всех точек фигуры равны $\bar{v}_A = \bar{v}_B$. Аналогичный результат показан в п. 4.	

Лекция 9

Краткое содержание: Сложное движение точки в общем случае: абсолютная и относительная производные, сложение скоростей, сложение ускорений. Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского.

Сложное движение точки в общем случае

Абсолютная и относительная производные

При рассмотрении сложного движения точки необходимо рассматривать изменение векторных величин с течением времени по отношению к системам отсчета, движущимся друг относительно друга.

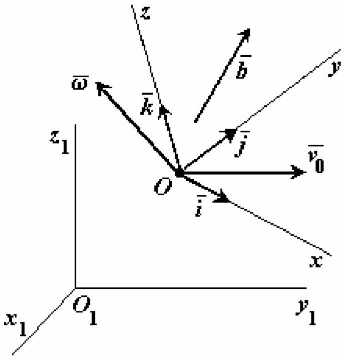


Рис. 9-1

Рассмотрим произвольный вектор $\bar{b}(t)$ в двух системах отсчета: подвижной и неподвижной. В подвижной системе отсчета только проекции вектора $\bar{b}$ являются функциями времени, в неподвижной системе отсчета кроме проекций, функциями времени являются и единичные вектора $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ (они изменяют свое направление в пространстве).

$$\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k} \qquad (9\text{-}1)$$

Введем обозначения $\dfrac{d\bar{b}}{dt}$ - абсолютная производная – производная в неподвижной системе отсчета; $\left(\dfrac{d\bar{b}}{dt}\right)_r$ - относительная производная – производная в подвижной системе отсчета.

Установим зависимость между абсолютной и относительной производными. Вычислим абсолютную производную по времени от вектора $\bar{b}(t)$ используя формулу (9-1). Получим

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{b}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}\right) = \\ &= \left(\frac{db_x}{dt}\cdot\bar{i} + \frac{db_y}{dt}\cdot\bar{j} + \frac{db_z}{dt}\cdot\bar{k}\right) + \left(b_x\cdot\frac{d\bar{i}}{dt} + b_y\cdot\frac{d\bar{j}}{dt} + b_z\cdot\frac{d\bar{k}}{dt}\right)\end{aligned} \qquad (9\text{-}2)$$

Первые три слагаемых учитывают изменение вектора $\bar{b}(t)$ при неизменных $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ и поэтому составляют относительную производную, т.е.

$$\left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right)_r = \left(\frac{db_x}{dt}\cdot\bar{i} + \frac{db_y}{dt}\cdot\bar{j} + \frac{db_z}{dt}\cdot\bar{k}\right). \qquad (9\text{-}3)$$

Производные по времени от единичных векторов определим по формулам Пуассона $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$

Вектор $\bar{\omega}$ - это угловая скорость вращательной части движения вокруг точки О подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

После подстановки получаем

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = \left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right)_r + \bar{\omega} \times \left(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}\right) = \left(\frac{d\bar{b}}{dt}\right)_r + \bar{\omega} \times \bar{b}. \qquad (9\text{-}4)$$

Получена формула зависимости производных вектора $\bar{b}(t)$ в двух системах отсчета движущихся друг относительно друга (формула Бура).

Сложение скоростей

Пусть система отсчета $O_1x_1y_1z_1$ - неподвижная, а система отсчета $Oxyz$ - подвижная. Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется **абсолютным.** Движение точки относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется **относительным. Переносным** движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Относительные скорость и ускорение обозначают $\bar{v}_r$ и $\bar{a}_r$, переносные - $\bar{v}_e$ и $\bar{a}_e$, а абсолютные - $\bar{v}$ и $\bar{a}$.

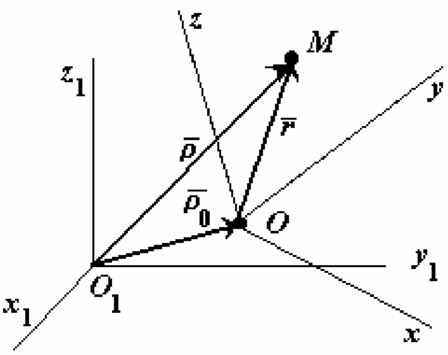


Рис. 9-2

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной можно охарактеризовать скоростью ее поступательного движения $\bar{v}_O$, например вместе с точкой O, и вектором угловой скорости $\bar{\omega}$ ее вращения вокруг O.

Теорема. Скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей. $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$

Доказательство. Рассмотрим движение точки M. Положение точки M относительно неподвижной системы отсчета определяется вектором $\bar{\rho}$, а относительно подвижной вектором $\bar{r}$. Положение точки O относительно неподвижной системы отсчета определяется вектором $\bar{\rho}_0$. Для любого момента времени выполняется тождество $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}$.

Продифференцируем его по времени (вычислим производные в неподвижной системе отсчета) и получим

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d\overline{\rho_0}}{dt} + \frac{d\overline{r}}{dt} \qquad (9\text{-}5)$$

По определению, $\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{v}$ - абсолютная скорость точки M, $\frac{d\overline{\rho_0}}{dt} = \overline{v_0}$ - абсолютная скорость точки O. Для вычисления $\frac{d\overline{r}}{dt}$ применим формулу Бура. Имеем $\frac{d\overline{r}}{dt} = \left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_r + \overline{\omega} \times \overline{r}$. Относительная производная $\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_r = \overline{v_r}$ - является относительной скоростью точки M по отношению к неподвижной системе отсчета, а $\overline{\omega}$ - угловая скорость вращения подвижной системы отсчета.

Таким образом из (9-5) получаем

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{\omega} \times \overline{r} + \overline{v_r} \qquad (9\text{-}6)$$

Скорость

$$\overline{v_e} = \overline{v_0} + \overline{\omega} \times \overline{r}$$

является скоростью точки свободного твердого тела, скрепленного с подвижной системой координат, с которой в данный момент совпадает точка M в движении тела относительно неподвижной системы отсчета. Это есть переносная скорость точки M.

Окончательно получаем

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}, \qquad (9\text{-}7)$$

что и требовалось доказать.

Сложение ускорений в общем случае переносного движения

Теорема. (кинематическая теорема Колиолиса) Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений - переносного, относительного и Кориолиса. $\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_k}$

Доказательство. Абсолютное ускорение точки M определим вычислением полной производной по времени от абсолютной скорости.

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v_0} + \overline{\omega} \times \overline{r} + \overline{v_r}\right) = \frac{d\overline{v_0}}{dt} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt} + \frac{d\overline{v_r}}{dt}$$

Для производных от векторов $\overline{r}$ и $\overline{v_r}$ применим формулу Бура. Получим

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_r + \overline{\omega} \times \overline{r} \qquad \frac{d\overline{v_r}}{dt} = \left(\frac{d\overline{v_r}}{dt}\right)_r + \overline{\omega} \times \overline{v_r}$$

Учитывая, что $\frac{d\overline{v_0}}{dt} = \overline{a_0}$, $\frac{d\overline{\omega}}{dt} = \overline{\varepsilon}$, $\left(\frac{d\overline{r}}{dt}\right)_r = \overline{v_r}$, $\left(\frac{d\overline{v_r}}{dt}\right)_r = \overline{a_r}$,

получим для абсолютного ускорения

$$\overline{a} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) + \overline{a_r} + 2 \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{v_r}\right) \qquad (9\text{-}8)$$

В этой формуле первые три слагаемых являются переносным ускорением для точки M $\overline{a_e} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)$. Последнее слагаемое называется **ускорением Кориолиса** (иногда его называют добавочным или поворотным ускорением) и обозначается $\overline{a_k} = 2 \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{v_r}\right)$.

В итоге формула (9-8) принимает вид

$$\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_k}, \qquad (9\text{-}9)$$

что и требовалось доказать.

Ускорение Кориолиса

Теорема (Правило Жуковского). Модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения; чтобы получить направление ускорения Кориолиса, необходимо вектор проекции относительной скорости повернуть на 90^0 вокруг оси, параллельной оси переносного вращения в направлении этого вращения.

ДИНАМИКА

Лекция 1

Краткое содержание: Введение в динамику. Аксиомы классической механики. Системы единиц. Дифференциальные уравнения движения точки. Основные задачи динамики. Основные виды прямолинейного движения точки.

Введение

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

Материальная точка это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы** и **твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Аксиомы классической механики

Первая аксиома или закон инерции. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой**.

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

Вторая аксиома или основной закон динамики. Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе.

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}$$

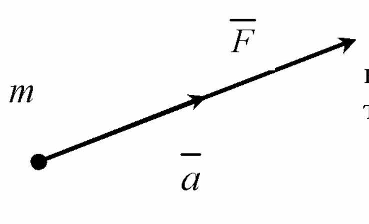


Рис. 1-1

Положительный коэффициент пропорциональности ***m***, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.

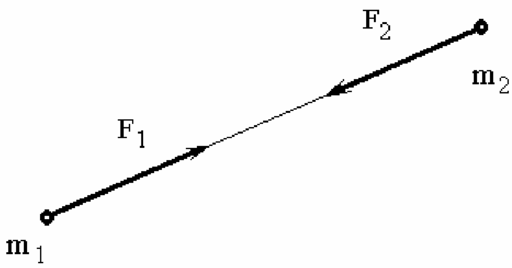


Рис. 1-2

Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия. Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. $\overline{F_1} = -\overline{F_2}$

Четвертая аксиома или закон независимого действия сил. При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \overline{a_i} = \overline{F_i} \qquad \overline{a} = \sum_i \overline{a_i}$$

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

Системы единиц

	СГС	Си	Техническая
[L]	см	м	м
[M]	г	кг	Т.е.м.
[T]	сек	сек	сек
[F]	дина	Н	кГ
[v]	см/сек	м/сек	м/сек
[a]	см/сек^2	м/сек^2	м/сек^2
[L]			

1 кГ = 9.8 Н, 36 км/час = 10 м/сек, 1 Т.е.м. = 9.8 кг

Дифференциальные уравнения движения точки.

Основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$

можно записать так $m \cdot \dfrac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}$ или так $m \cdot \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$

Проецируя уравнение $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на оси координат получаем

$$m \cdot a_x = F_x \qquad m \cdot a_y = F_y \qquad m \cdot a_z = F_z$$

так как $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, то

$$m \cdot \ddot{x} = F_x \qquad m \cdot \ddot{y} = F_y \qquad m \cdot \ddot{z} = F_z$$

Частные случаи:

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты xOy получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x$ $m \cdot \ddot{y} = F_y$ $F_z \equiv 0$

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату Ox получаем $m \cdot \ddot{x} = F_x$ $F_y \equiv 0$ $F_z \equiv 0$

Основное уравнение динамики $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ можно спроецировать на естественные подвижные оси.

$$m \cdot a_\tau = F_\tau \qquad m \cdot a_n = F_n \qquad m \cdot a_b = F_b$$

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad a_b \equiv 0$$

Эта форма уравнений удобна для исследования некоторых случаев полета снарядов и ракет.

Основные задачи динамики

Первая или прямая задача:

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

$$\boldsymbol{m} \qquad x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$$

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot f_1''(t) \qquad F_y = m \cdot \ddot{y} = m \cdot f_2''(t) \qquad F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot f_3''(t)$$

Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

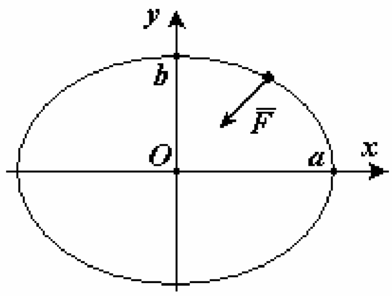
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

Пример 1: Движение точки в плоскости xOy определяется уравнениями:

$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$; $\quad y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $\quad a, b, \omega - const$; $\quad t$ – время.

Решение:

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t);$$



$$F_y = m \cdot \ddot{y} = -m \cdot \omega^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t);$$

$$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x; \qquad F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y.$$

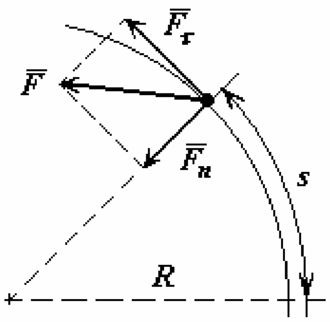
$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс).

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \overline{r}; \qquad \cos(\overline{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \qquad \cos(\overline{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

Пример 2: Точка, имеющая массу m, движется из состояния покоя по окружности радиуса R с постоянным касательным ускорением a_τ. Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние $s_1 = R\sqrt{2}$.

Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:



$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \qquad F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}; \qquad F_b = 0;$$

Так как $a_\tau = const$, то $\quad v_\tau = a_\tau \cdot t$, $\quad s = \dfrac{a_\tau \cdot t^2}{2}$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \qquad F_n = m \cdot \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R};$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}$$

$$s_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}; \quad \text{следовательно} \quad t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_\tau};$$

$$\frac{a_\tau^2 \cdot t_1^4}{R^2} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2} = 8; \qquad \text{следовательно}$$

$$F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

$$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

Вторая или обратная задача:

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \qquad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad z(t_0) = z_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0} \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}$$

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Основные виды прямолинейного движения точки

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox имеет вид:

$m \cdot \ddot{x} = F_x(t,x,\dot{x})$, Начальные условия $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_{x0}$.

Наиболее важные случаи.

1. Сила постоянна. $F_x = const$ $\qquad m \cdot \ddot{x} = const \qquad \ddot{x} = const$

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

2. Сила зависит от времени. $F_x = F_x(t) \qquad m \cdot \ddot{x} = F_x(t)$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(t)dt \qquad \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t \left(\int_0^t F_x(t)dt \right)dt$$

3. Сила зависит от координаты или скорости.

Силу, зависящую от координаты x $F_x(x)$, создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина). $F_x = F_x(t)$

Сила, зависящая от скорости движения $F_x(\dot{x})$, это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.)

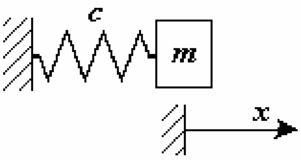
В этих случаях решение задачи упрощается.

Лекция 2

Краткое содержание: Свободные колебания без сопротивления. Понятие о фазовой плоскости. Свободные колебания в поле постоянной силы. Параллельное включение упругих элементов. Последовательное включение упругих элементов. Вынужденные колебания без сопротивления. Резонанс. Свободные колебания с вязким сопротивлением. Вынужденные колебания с вязким сопротивлением.

Свободные колебания без сопротивления

Существуют устройства (упругие элементы), которые создают силу пропорциональную их удлинению. $F = -c \cdot x$, Эту силу называют **восстанавливающей или центральной силой**. Коэффициент пропорциональности **называется жесткостью упругого элемента**.



Дифференциальное уравнение движения точки с массой m, закрепленной на упругом элементе, имеет вид:

Рис. 2-1

$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$ или $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$, где $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$

Начальные условия имеют вид: при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Это дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки без сопротивления.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$

Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega = 0$

Решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \cdot C_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$C_1 = x_0 \qquad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ - амплитуда колебаний; $tg(\alpha) = \dfrac{x_0 \cdot \omega}{v_0}$

ω - круговая или циклическая частота колебаний (собственная частота). Измеряется в $рад/сек$

α - фазовый угол (или просто фаза).

$T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$ - период колебаний.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$$ - частота колебаний (1 кол./сек=1 Гц)

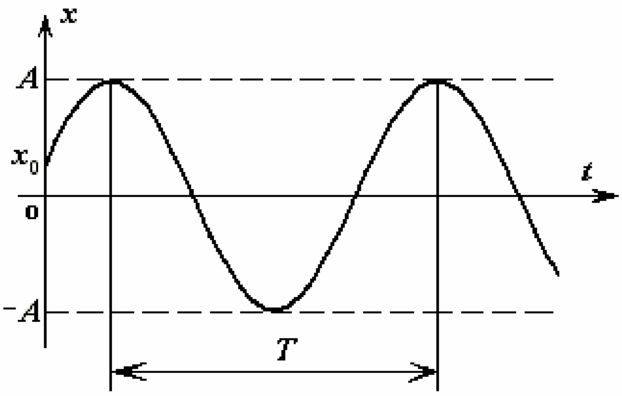


Рис. 2-2

Движение материальной точки – это свободные гармонические колебания с постоянной амплитудой. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий и круговой частоты.

Понятие о фазовой плоскости

Обычное описание движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости координаты от времени $x = x(t)$ не является единственно возможным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных механических колебаний, определенными достоинствами обладает представление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени t определяется парой соответствующих значений x и $v = \dot{x}$ и может быть представлено изображающей (фазовой) точкой в плоской декартовой системе координат x, v, если откладывать по оси абсцисс координату x, а по оси ординат – скорость v. Такая плоскость называется **фазовой**.

В процессе движения рассматриваемой системы величины x и v изменяются и, соответственно, меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. **Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией**.

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения $x = x(t)$ нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости $v = \dot{x}(t)$, а затем исключить время из двух уравнений: $x = x(t)$, $v = \dot{x}(t)$.

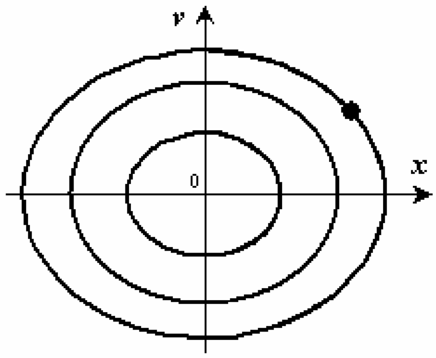
Функция $v = v(x)$ и описывает фазовую траекторию данного движения.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Совокупность фазовых траекторий , которая описывает все возможные движения данной системы, называется фазовой диаграммой (фазовым портретом) данной системы.

Для свободных гармонических колебаний $x(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \alpha)$, а $v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$. Исключая из этих выражений время t получаем

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega \cdot A}\right)^2 = 1.$$



Это уравнение эллипса. Его полуоси зависят от амплитуды и круговой частоты.

Рис. 2-3

Свободные колебания в поле постоянной силы

На материальную точку кроме упругой силы, действует сила постоянная по величине и направлению.

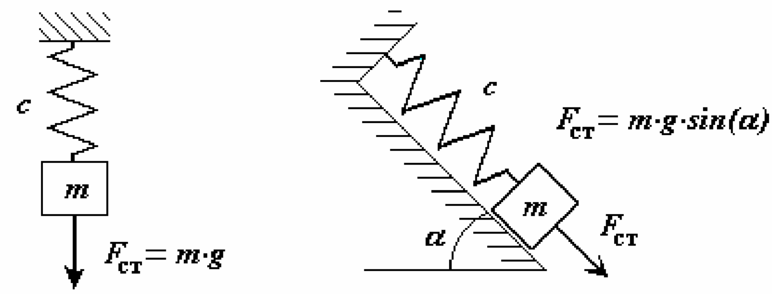


Рис. 2-4

Обозначим ее F_{cm} , тогда дифференциальное уравнение движения точки примет вид:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_{cm} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_{cm}}{m}, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Начальные условия имеют вид: при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения $x_{частн.}(t) = x_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}$.

Решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{cm}}{c}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \cdot C_1 \cdot sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot C_2 \cdot cos(\omega \cdot t)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_{cm}}{c} \qquad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_{cm}}{c}\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{cm}}{c},$$

Если начало отсчета координаты сдвинуть на $x_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}$, $x_1 = x - x_{cm}$, тогда в новой системе отсчета решение будет иметь вид:

$$x_1(t) = x_{10} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t), \qquad x_1(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$A = \sqrt{x_{10}{}^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ - амплитуда колебаний;

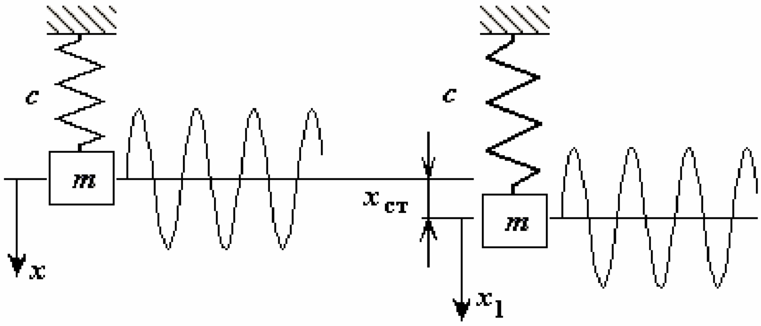


Рис. 2-5

Параллельное включение упругих элементов

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных параллельно.

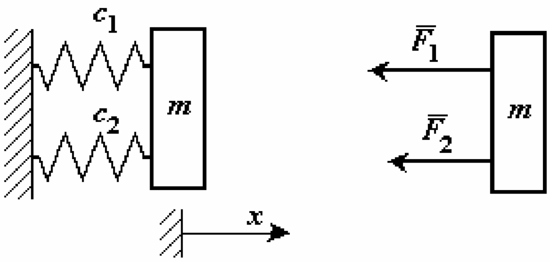


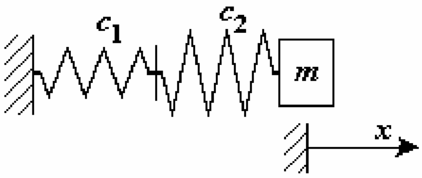
Рис. 2-6

Сместим массу на расстояние x. $F_1 = -c_1 \cdot x$, $F_2 = -c_2 \cdot x$,

$$F = F_1 + F_2 = -(c_1 + c_2) \cdot x = -c_\Sigma \cdot x$$

Результирующая жесткость упругих элементов расположенных параллельно равна сумме жесткостей этих элементов..

Последовательное включение упругих элементов



Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных последовательно.

Рис. 2-7

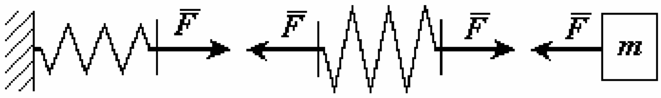


Рис. 2-8

Сместим массу на расстояние x. В упругих элементах возникает восстанавливающая (упругая) сила F, одинаковая для обоих элементов. Первый упругий элемент изменит длину на x_1, второй - на x_2. $x = x_1 + x_2$.

$$F = -c_1 \cdot x_1, \quad F = -c_2 \cdot x_2, \quad F = -c_\Sigma \cdot x.$$

$$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_2} = -\frac{F}{c_\Sigma}, \text{ следовательно } \frac{1}{c_\Sigma} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Обратная величина результирующей жесткости упругих элементов расположенных последовательно равна сумме обратных величин жесткостей этих элементов.

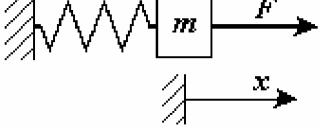
Обратная величина жесткости упругого элемента называется податливостью этого элемента.

$$u = \frac{1}{c}, \quad u_1 = \frac{1}{c_1}, \quad u_2 = \frac{1}{c_2}, \qquad u = u_1 + u_2$$

Результирующая податливость упругих элементов расположенных последовательно равна сумме податливостей этих элементов..

Вынужденные колебания без сопротивления

Рассмотрим движение точки под действием двух сил: одна восстанавливающая, другая зависит от времени. $F(t) = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ - гармоническая возмущающая сила.



F_0 - амплитуда возмущающей силы.

ω - круговая частота возмущающей силы.

Рис. 2-9

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m, закрепленной на упругом элементе, под действием возмущающей гармонической силы имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Задавая решение уравнения в виде: $x(t) = x_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение получим алгебраическое уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний.

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_0 + c \cdot x_0 = F_0 .$$

Разделим его на массу и обозначим $\Omega^2 = \dfrac{c}{m}$, тогда $x_0 \cdot \left(\Omega^2 - \omega^2\right) = F_0 / m$ и окончательно

$x_0 = \dfrac{F_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний.

Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω.

Построим зависимость модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω.

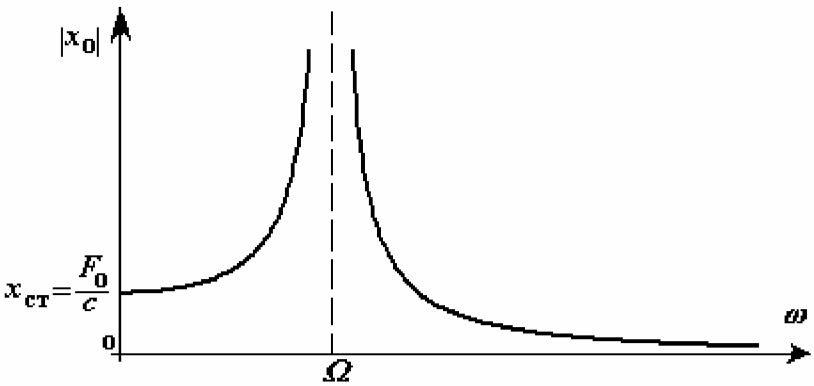


Рис. 2-10

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{cm} = \dfrac{F_{cm}}{c}$ (при $\omega = 0$) до бесконечности (при $\omega = \Omega_-$) и убывает от бесконечности (при $\omega = \Omega_+$) до нуля (при $\omega \to \infty$).

Явление, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой колебаний системы, называется **резонансом**.

Свободные колебания с вязким сопротивлением

Существуют устройства (демпферы), которые создают силу пропорциональную относительной скорости. $F_Д = -b \cdot \dot{x}$. Коэффициент пропорциональности **называется коэффициентом демпфирования или коэффициентом вязкого сопротивления**.

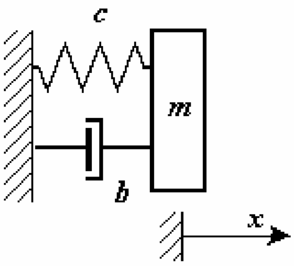


Рис. 2-11

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m, закрепленной на упругом элементе и демпфере имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} = F_У + F_Д$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2 \cdot n + \omega^2 \cdot x = 0, \qquad \omega^2 = \frac{c}{m}, \qquad 2 \cdot n = \frac{b}{m}.$$

Начальные условия имеют вид: $t = 0 \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0$.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + \omega^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

Рассмотрим возможные решения:

1-й случай $n < \omega \qquad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \qquad \lambda_{1,2} = -n \pm i \cdot \omega_1$

Решение имеет вид:

$$x(t) = A \cdot e^{-n \cdot t} \cdot sin(\omega_1 \cdot t + \alpha)$$

$A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{(v_0 + n \cdot x_0)^2}{\omega_1^{\,2}}}$, $\quad A \cdot e^{-n \cdot t}$ - условная амплитуда затухающих колебаний;

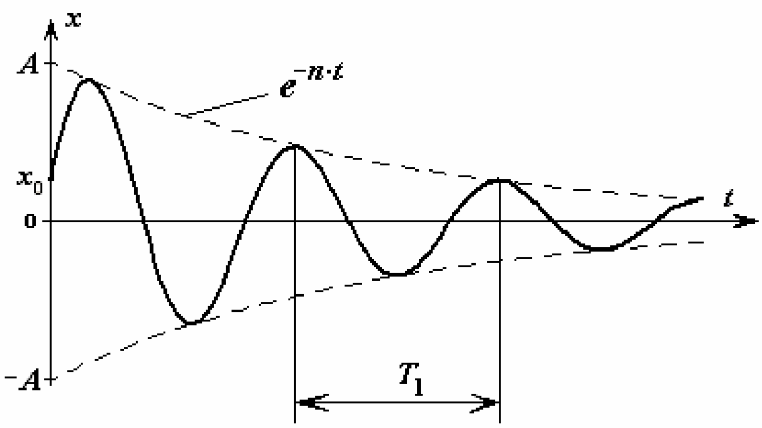


Рис. 2-12

ω_1 - круговая или циклическая частота затухающих колебаний Измеряется в $рад/сек$

α - фазовый угол (или просто фаза). $tg(\alpha) = \dfrac{x_0 \cdot \omega_1}{v_0 + n \cdot x_0}$

$T_1 = \dfrac{2\cdot\pi}{\omega_1} > T = \dfrac{2\cdot\pi}{\omega}$ - период затухающих колебаний.

$\nu_1 = \dfrac{1}{T_1} = \dfrac{\omega_1}{2\cdot\pi}$ - частота колебаний (1 колеб/сек=1 Гц)

$D = \dfrac{x_i^{\max}}{x_{i+1}^{\max}} = e^{n\cdot T_1}$ - декремент колебаний.

$\eta = \ln(D) = n \cdot T_1$ - логарифмический декремент колебаний.

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ω_1 и амплитудой, величина которой все время убывает.

Движение изображающей точки на фазовой плоскости показано на Рис. 2-13 .

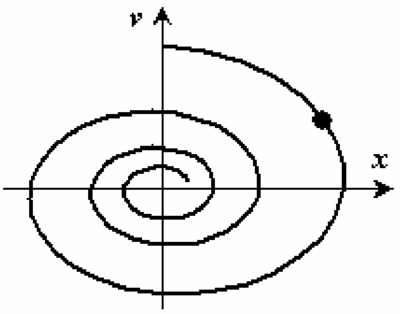


Рис. 2-13

2-й случай $n > \omega$ $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$, $\lambda_{1,2} = -n \pm \omega_2$

Решение имеет вид:

$x(t) = e^{-n\cdot t} \cdot (C_1 \cdot e^{\omega_2 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega_2 \cdot t})$

Материальная точка совершает затухающее неколебательное движение. Рис. 2-14.

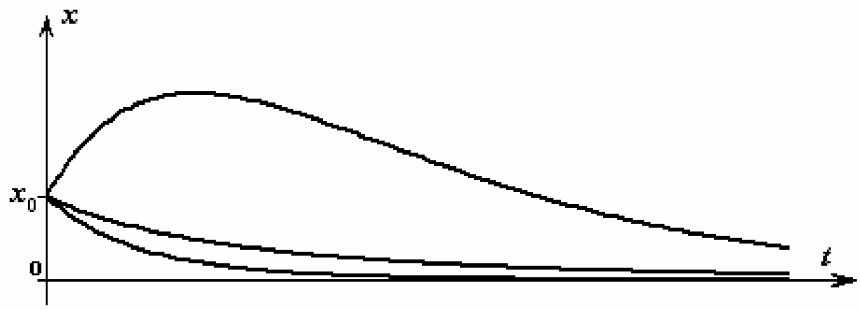


Рис. 2-14

3-й случай $n=\omega$, $\lambda_{1,2}=-n$ (два одинаковых корня)

Решение имеет вид:

$$x(t)=e^{-n\cdot t}\cdot(C_1\cdot t+C_2)$$

Материальная точка так же совершает затухающее неколебательное движение. Рис. 2-14.

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением

Рассмотрим движение точки под действием трех сил: одна восстанавливающая сила, вторая - сила демпфирования (сила вязкого сопротивления), а третья зависит от времени. $F(t)=F_0\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$ - гармоническая возмущающая сила.

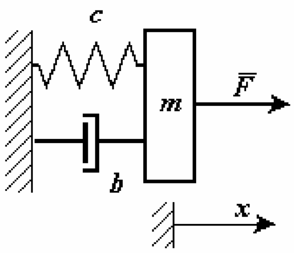


Рис. 2-15

F_0 - амплитуда возмущающей силы.

ω - круговая частота возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m, закрепленной на упругом элементе и демпфере, под действием возмущающей гармонической силы имеет вид:

$$m\cdot\ddot{x}+b\cdot\dot{x}+c\cdot x=F_0\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

Задавая решение уравнения в виде: $x(t)=x_0\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение получим алгебраическое уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний.

$$-m\cdot\omega^2\cdot x_0+i\cdot\omega\cdot b\cdot x_0+c\cdot x_0=F_0.$$

Разделим его на массу и обозначим $\Omega^2=\dfrac{c}{m}$, $2\cdot n=\dfrac{b}{m}$, тогда $x_0\cdot\left(\Omega^2-\omega^2+i\cdot\omega\cdot 2\cdot n\right)=F_0/m$ и окончательно

$$x_0=\frac{F_0/m}{\Omega^2-\omega^2+i\cdot\omega\cdot 2\cdot n}$$ - амплитуда вынужденных колебаний.

Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω.

Построим зависимость модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω.

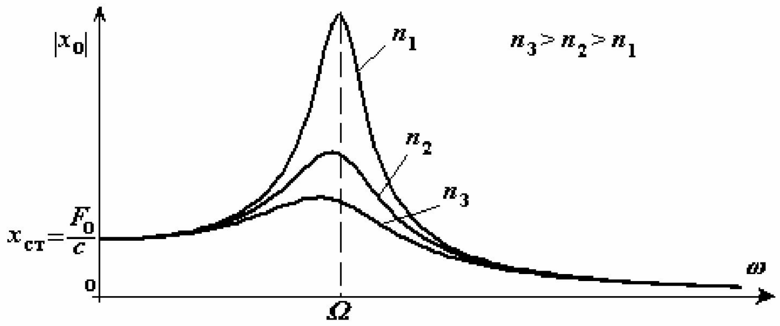


Рис. 2-16

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{cm} = \dfrac{F_{cm}}{c}$ (при $\omega = 0$) до некоторой величины, а затем убывает до нуля (при $\omega \to \infty$).

Лекция 3

Краткое содержание: Общие теоремы динамики точки. Количество движения точки. Элементарный и полный импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки. Момент количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки. Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Принцип Даламбера для материальной точки

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, которые являются следствием основного закона динамики.

Количество движения точки

Количеством движения материальной точки $\overline{q}$ называется вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость $\overline{v}$. $\overline{q} = m \cdot \overline{v}$

Количество движения точки в физике часто называют **импульсом материальной точки**.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$q_x = m \cdot v_x = m \cdot \dot{x}, \quad q_y = m \cdot v_y = m \cdot \dot{y}, \quad q_z = m \cdot v_z = m \cdot \dot{z}$$

Единицей измерения количества движения в СИ является – $1 кг \cdot м/с = 1 Н \cdot с$

Элементарный и полный импульс силы.

Действие силы $\overline{F}$ на материальную точку в течении времени dt можно охарактеризовать **элементарным импульсом силы** $d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt$.

Полный импульс силы $\overline{F}$ за время t, или импульс силы $\overline{S}$, определяется по формуле $\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt$. (Полный интеграл за время t от элементарного импульса).

В частном случае, если сила $\overline{F}$ постоянна и по величине , и по направлению ($\overline{F} = const$), $\overline{S} = \overline{F} \cdot t$.

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$\overline{S}_x = \int_0^t \overline{F}_x dt \qquad \overline{S}_y = \int_0^t \overline{F}_y dt \qquad \overline{S}_z = \int_0^t \overline{F}_z dt$$

Единицей измерения импульса в СИ является – $1 Н \cdot с$

Теорема об изменении количества движения точки.

Теорема. Производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе.

Запишем основной закон динамики $m \cdot \overline{a} = \overline{F}$ в виде $m \cdot \dfrac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}$. Так как масса постоянна, то внесем ее под знак производной.

Тогда $$\frac{d(m \cdot \overline{v})}{dt} = \overline{F}, \qquad (*)$$

что и требовалось доказать.

В проекциях на координатные оси уравнение (*) можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \overline{v}_x) = \overline{F}_x \qquad \frac{d}{dt}(m \cdot \overline{v}_y) = \overline{F}_y \qquad \frac{d}{dt}(m \cdot \overline{v}_z) = \overline{F}_z$$

Теорема импульсов (в дифференциальной форме)**.** Дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.

Умножим левую и правую части уравнения (*) на dt и получим

$$d(m \cdot \overline{v}) = d\overline{F} \cdot dt = d\overline{S} \qquad (**)$$

В проекциях на координатные оси получаем:

$$d(m \cdot \overline{v}_x) = d\overline{F}_x \cdot dt = d\overline{S}_x,$$

$$d(m \cdot \overline{v}_y) = d\overline{F}_y \cdot dt = d\overline{S}_y,$$

$$d(m \cdot \overline{v}_z) = d\overline{F}_z \cdot dt = d\overline{S}_z.$$

Теорема импульсов (в интегральной форме)**.** Изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за этот же промежуток времени.

Интегрируя обе части уравнения (**) по времени в пределах от нуля до t получаем:

$$m \cdot \overline{v} - m \cdot \overline{v}_0 = \overline{S}$$

В проекциях на координатные оси получаем:

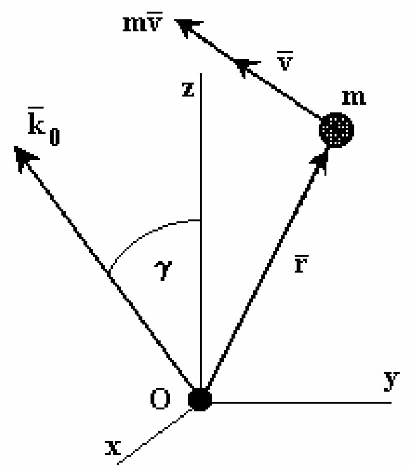
$$m \cdot \overline{v}_x - m \cdot \overline{v}_{0x} = \overline{S}_x,$$

$$m \cdot \overline{v}_y - m \cdot \overline{v}_{0y} = \overline{S}_y,$$

$$m \cdot \overline{v}_z - m \cdot \overline{v}_{0z} = \overline{S}_z$$

Момент количества движения точки.

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движущейся точки вместо самого количества движения рассматривают его момент относительно какого-либо центра или оси. Эти моменты определяются также как и моменты силы.



Моментом количеством движения материальной точки $\overline{k_0}$ относительно некоторого центра О называется вектор, определяемый равенством $\overline{k_0} = M_0(m \cdot \bar{v}) = \bar{r} \times m \cdot \bar{v}$

Момент количества движения точки называют также **кинетическим моментом**.

Момент количества движения относительно какой-либо оси Oz, проходящий через центр О, равен проекции вектора количества движения $\overline{k_0}$ на эту ось $k_z = M_z(m \cdot \bar{v}) = k_0 \cdot cos(\gamma)$.

Если количество движения $m \cdot \bar{v}$ задано своими проекциями $m \cdot v_x$, $m \cdot v_y$, $m \cdot v_z$ на оси координат и даны координаты x y z точки m в пространстве, то момент количества движения $\overline{k_0}$ относительно начала координат вычисляется следующим образом:

$$\overline{k_0} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ m \cdot v_z & m \cdot v_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y) \cdot \bar{i} + (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x) \cdot \bar{k}$$

Проекции момента количества движения $\overline{k_0}$ на оси координат равны:

$$k_x = (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y)$$

$$k_y = (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z)$$

$$k_z = (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x)$$

Единицей измерения количества движения в СИ является – $1 кг \cdot м^2 / с = 1 Н \cdot м \cdot с$.

Теорема об изменении момента количества движения точки.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_0(m \cdot \bar{v})) = \overline{M}_0(\overline{F})$$

Доказательство: Продифференцируем момент количества движения по времени $\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\cdot\bar{v})=\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\cdot\bar{v}+\bar{r}\times\frac{d}{dt}(m\cdot\bar{v})=\bar{v}\times m\cdot\bar{v}+\bar{r}\times(m\cdot\bar{a})$

$\bar{v}\times m\cdot\bar{v}=0$, $\bar{r}\times(m\cdot\bar{a})=\bar{r}\times\bar{F}$, следовательно $\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\cdot\bar{v})=\bar{r}\times\bar{F}$, (*)

что и требовалось доказать.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какой-либо оси, равна моменту действующей на точку силы относительно той же оси.

Для доказательства достаточно спроектировать векторное уравнение (*) на эту ось. Для оси Oz это будет выглядеть так: $\frac{dk_z}{dt}=M_z(\bar{F})$

Следствия из теорем:

1. Если момент силы относительно точки равен нулю, то момент количества движения относительно этой точки величина постоянная.

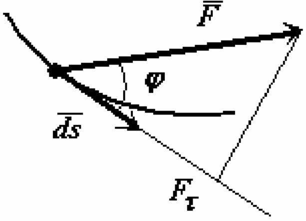
$\bar{M}_0(\bar{F})=0, \quad \Rightarrow \quad \bar{k}_0=\bar{M}_0(m\cdot\bar{v})=(\bar{r}\times m\cdot\bar{v})=\overline{const}$

2. Если момент силы относительно оси равен нулю, то момент количества движения относительно этой оси величина постоянная.

$\bar{M}_z(\bar{F})=0, \quad \Rightarrow \quad \bar{k}_z=\bar{M}_z(m\cdot\bar{v})=\overline{const}$

Работа силы. Мощность.

Одна из основных характеристик силы, оценивающих действие силы на тело при некотором его перемещении.



Элементарная работа силы скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.

$dA = F_\tau \cdot ds$. $dA = F\cdot ds\cdot cos(\varphi)$,

φ - *угол между* $\bar{F}$ *и* $\overline{ds}$

Единицей измерения работы в СИ является – $1Н\cdot м = 1Дж$

При $F_\tau > 0$, $dA > 0$ при $F_\tau < 0$, $dA < 0$

Частные случаи: $\varphi = 0^0$, $dA = F\cdot ds$

$\varphi = 90^0$, $dA = 0$

$\varphi = 180^0$, $dA = -F\cdot ds$

Элементарное перемещение равно дифференциалу радиуса вектора точки приложения силы.

<u>Элементарная работа силы</u> равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение или на дифференциал радиуса вектора точки приложения силы.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{ds} = \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

<u>Элементарная работа силы</u> равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{dr} = \overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt = \overline{dS} \cdot \overline{v}$$

Если сила $\overline{F}$ задана своими проекциями ($F_x \quad F_y \quad F_z$) на оси координат и элементарное перемещение задано своими проекциями ($dx \quad dy \quad dz$) на оси координат, то элементарная работа силы равна:

$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$ (аналитическое выражение элементарной работы).

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

$$A = \int_{M_0}^{M} dA = \int_{M_0}^{M} \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{M_0}^{M} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)$$

<u>Мощностью силы</u> называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. В общем случае мощность равна первой производной по времени от работы.

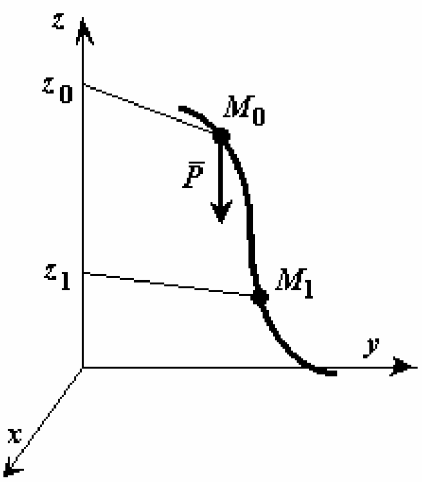
$$W = \frac{dA}{dt}, \qquad W = \frac{\overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v}$$

<u>Мощность</u> равна скалярному произведению силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является – $1 Дж / с = 1 Вт$

В технике за единицу силы принимается $1 л.с. = 736 Вт = 75 \frac{кГ \cdot м}{с}$.

Пример 1. Работа силы тяжести.



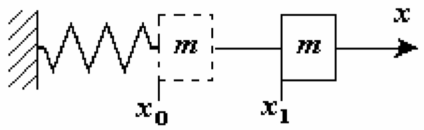
Пусть точка М, на которую действует сила тяжести Р, перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх.

Тогда, $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = P$ и

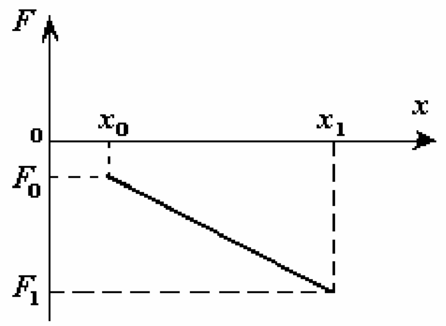
$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P \cdot (z_0 - z_1)$$

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Пример 2. Работа силы упругости.



Рассмотрим материальную точку закрепленную на упругом элементе жесткости c, которая совершает колебания вдоль оси x. Сила упругости (или восстанавливающая сила) $F_x = -c \cdot x$. Пусть точка М, на которую действует только сила упругости, перемещается из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$. ($F_y = 0$, $F_z = 0$).



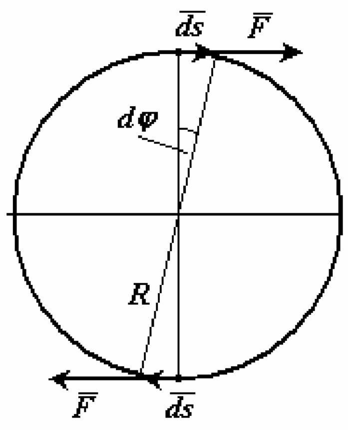
$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{x_0}^{x_1} (-c \cdot x) dx = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого элемента на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) упругого элемента.

Работа силы упругости равна площади фигуры (трапеции) расположенной под кривой $F_x(x)$. $A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2) = -\frac{(F_1 + F_0)}{2} \cdot (x_1 - x_0)$

Пример 3. Работа и мощность пары сил.

Пусть пара сил приложена к вращающемуся вокруг неподвижной оси телу. Элементарная работа пары сил равна $dA = 2 \cdot F \cdot ds = 2 \cdot F \cdot R \cdot d\varphi$. Полная работа пары сил равна $A = 2 \cdot F \cdot R \cdot \varphi = M \cdot \varphi$



φ - угол поворота тела, M - момент пары сил.

Мощность пары сил равна

$$W = \frac{dA}{dt} = M \cdot \omega$$

Кинетическая энергия точки

Кинетической энергией материальной точки (или ее живой силой) называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Теорема. Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

$$d(\frac{m \cdot v^2}{2}) = dA$$

Доказательство: Основной закон динамики $m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$.

Умножим левую и правую части уравнения скалярно на $d\bar{r}$ справа, получаем

$m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = \bar{F} \cdot d\bar{r}$. $\bar{F} \cdot d\bar{r} = dA$ - элементарная работа.

$m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot d\bar{r} = m \cdot (d\bar{v} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}) = m \cdot (d\bar{v} \cdot \bar{v}) = d(\frac{m \cdot v^2}{2})$ - дифференциал от кинетической энергии.

$d(\frac{m \cdot v^2}{2}) = dA$, что и требовалось доказать.

Теорема. Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.

$$\frac{d}{dt}(\frac{m \cdot v^2}{2}) = W$$

Теорема. Изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на этом же перемещении.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = A$$

Принцип Даламбера для материальной точки

Уравнение движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и сил реакции связей имеет вид:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F} + \bar{R},$$

$\bar{F}$ - равнодействующая активных сил, $\bar{R}$ - равнодействующая сил реакции связей.

Силой инерции материальной точки называют произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т.е. $\bar{\Phi} = -m \cdot \bar{a}$.

Если использовать понятие силы инерции, то основной закон динамики принимает вид: $\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0$

Принцип Даламбера. При движении материальной точки активные силы и силы реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил.

Принцип Даламбера называют еще методом кинетостатики. Задачи динамики с помощью этого метода сводятся к задачам статики.

Лекция 4

Краткое содержание: Динамика несвободной материальной точки. Относительное движение материальной точки. Частные случаи.

Динамика несвободной материальной точки

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются **связями**.

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое называется уравнением связи.

$$f(x, y, z) = 0$$

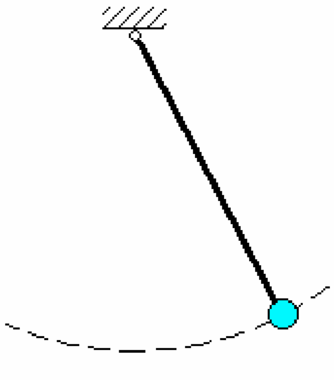
Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии, то уравнениями связи являются уравнения этой лини.

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к ней активных сил и начальных условий, но так же от имеющихся связей. При этом значения начальных параметров должны удовлетворять уравнениям связей.

Связи бывают двухсторонние или удерживающие и односторонние или неудерживающие.

Связь называется двухсторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих кривые или поверхности в пространстве на которых должна находится точка.



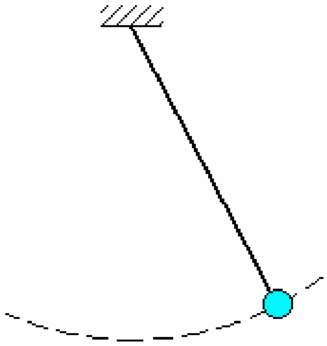
Пример

Материальная точка подвешена на стержне длины l.

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Связь называется односторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме неравенств. Односторонняя связь препятствует перемещению точки лишь в одном направлении и допускает ее перемещение в других направлениях.



Пример

Материальная точка подвешена на нити длины l.

Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2$$

Принцип освобождаемости от связей

Связь можно отбросить заменив действие связи силой реакции связи.

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{R}.$$

В проекциях на оси декартовой системы координат это будет выглядеть так:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x + R_x,$$

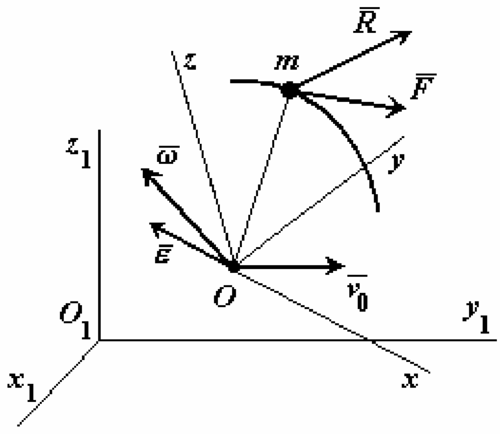
$$m \cdot \ddot{y} = F_y + R_y,$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_z + R_z.$$

Относительное движение материальной точки

Во многих задачах динамики движение материальной точки рассматривается относительно системы отсчета, движущейся относительно инерциальной системы отсчета.

Получим дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно подвижной системы отсчета.



$O_1x_1y_1z_1$ - инерциальная система отсчета.

$Oxyz$ - подвижная система отсчета.

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{R},$$

где $\overline{F}$ - сумма активных сил, $\overline{R}$ - сумма сил реакции связи.

Согласно теореме Кориолиса $\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_k}$

Перепишем дифференциальное уравнение следующим образом

$m \cdot \overline{a_r} = \overline{F} + \overline{R} - m \cdot \overline{a_e} - m \cdot \overline{a_k}$

Введем обозначения

$\overline{\Phi_e} = -m \cdot \overline{a_e}$ - переносная сила инерции,

$\overline{\Phi_k} = -m \cdot \overline{a_k}$ - кориолисова сила инерции.

С учетом этих обозначений мы получаем **<u>динамическую теорему Кориолиса</u>** (уравнения относительного движения).

Материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и силам реакции связей следует добавить кориолисову и переносную силу инерции.

$$m \cdot \overline{a_r} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi_e} + \overline{\Phi_k}$$

Силы $\overline{\Phi_e}$ и $\overline{\Phi_k}$ являются поправками на неинерционность системы.

В проекциях на подвижные оси

$$m \cdot \ddot{x} = F_x + R_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx}$$

$$m \cdot \ddot{y} = F_y + R_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky}$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_z + R_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz}$$

Частные случаи относительного движения

1. Относительное движение по инерции

Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение **<u>называется относительным движением по инерции.</u>**

$\overline{v_r} = \overline{const}$, $\overline{a_r} = 0$, следовательно

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi_e} + \overline{\Phi_k} = 0$$

2. Относительное равновесие

При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость и ускорение равны нулю, т.е.

$\overline{v_r} = 0$ и $\overline{a_r} = 0$, следовательно ускорение Кориолиса тоже равно нулю $\overline{a_k} = 2 \cdot \left(\overline{\omega} \times \overline{v_r}\right) = 0$

Условие относительного равновесия имеет вид:

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi_e} = 0$$

3. Инерциальные системы отсчета

Переносное ускорение в общем случае вычисляется по формуле

$$\overline{a_e} = \overline{a_0} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}),$$

где $\overline{a_0}$ - ускорение точки, принятой за полюс (начало координат); $\overline{\omega}$ - угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса; $\overline{\varepsilon}$ - угловое ускорение этого вращения ($\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$); $\overline{r}$ - радиус-вектор движения точки относительно полюса.

Если подвижная система отсчета движется поступательно, прямолинейно и равномерно, то

$$\overline{\Phi_e} = -m \cdot \overline{a_e} = 0, \qquad \overline{\Phi_k} = -m \cdot \overline{a_k} = 0$$

и уравнения относительного движения имеют вид:

$$m \cdot \overline{a_r} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi_e} + \overline{\Phi_k}.$$

Подвижная система отсчета тоже инерциальна.

Лекция 5

Краткое содержание: Внутренние и внешние силы. Центр масс. Моменты инерции относительно точки и осей. Теорема Штейнера.

Введение в динамику системы

Механической системой называется любая система материальных точек и тел.

Внешними силами механической системы называются силы, с которыми на точки и тела механической системы действуют точки и тела не входящие в рассматриваемую систему.

Равнодействующая всех внешних сил приложенных к $i-ой$ точке обозначается $\overline{F}_i^{(e)}$ (от латинского exterior - внешний).

Внутренними силами механической системы называются силы взаимодействия между точками и телами рассматриваемой системы.

Равнодействующая всех внутренних сил приложенных к $i-ой$ точке обозначается $\overline{F}_i^{(i)}$ (от латинского interior - внутренний).

Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Внутренние силы системы обладают следующими свойствами:

Теорема. Главный вектор всех внутренних сил системы (векторная сумма) равен нулю при любом состоянии системы. $\sum \overline{F}_i^{(i)} = 0$.

Доказательство: Согласно одной из аксиом динамики, любые две точки системы действуют друг на друга с равными по величине, но противоположно направленными силами. Векторная сумма этих сил равна нулю. Все внутренние силы являются большим количеством таких парных сил. Поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю.

Теорема. Главный момент всех внутренних сил системы (векторная сумма) относительно любой точки или оси равен нулю при любом состоянии системы. $\sum M_0(\overline{F}_i^{(i)}) = 0$ или $\sum M_z(\overline{F}_i^{(i)}) = 0$.

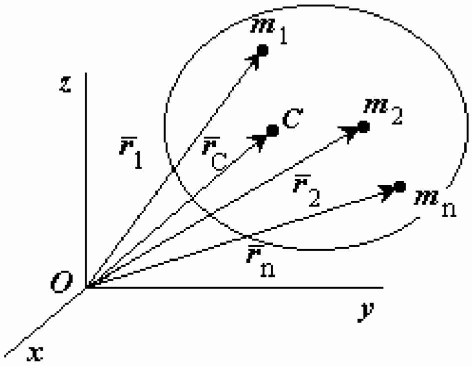
Доказательство: Любые две точки системы действуют друг на друга с равными по величине, но противоположно направленными силами. Сумма моментов этих сил относительно любой точки или оси равна нулю. Все внутренние силы являются большим количеством таких парных сил. Поэтому сумма моментов всех внутренних сил относительно любой точки или оси равна нулю.

Дифференциальные уравнения системы в векторной форме:

$$m_i \cdot \frac{d^2\overline{r_i}}{dt^2} = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}, \quad i = 1,\dots,n$$

Геометрия масс

Рассмотрим механическую систему, которая состоит из конечного числа n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, а положение точек в пространстве задается радиус-векторами $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$, то



Центром масс механической системы называется геометрическая точка С, радиус-вектор которой $\bar{r}_c$ определяется выражением

$$\bar{r}_c = (\sum_i m_i \cdot \bar{r}_i)/M$$

где $M = \sum_i m_i$ - масса системы.

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то его разбивают на элементарные частицы с бесконечно малыми массами $dm = \rho \cdot dv$. Суммы в пределе переходят в интегралы и центр масс определяется выражением $\bar{r}_c = \int_V \bar{r} \cdot \rho dv / M$

Центр масс является не материальной точкой, а геометрической. Центр масс характеризует распределение масс в системе.

Координаты центра масс имеют вид:

$$x_c = (\sum_i m_i \cdot x_i)/M \qquad x_c = \int_V x \cdot \rho dv / M$$

$$y_c = (\sum_i m_i \cdot y_i)/M \qquad y_c = \int_V y \cdot \rho dv / M$$

$$z_c = (\sum_i m_i \cdot z_i)/M \qquad z_c = \int_V z \cdot \rho dv / M$$

Для тел типа тонкого листа (поверхность) и тонкой проволоки (линия) $dm = \rho_S \cdot ds$ и $dm = \rho_l \cdot dl$, где ρ_S и $\cdot\, \rho_l$ - поверхностная и линейная плотности соответственно. Интегралы вычисляются по поверхности и линии.

Моменты инерции

Для характеристики распределения масс в телах при рассмотрении вращательных движений требуется ввести понятия **моментов инерции.**

Момент инерции относительно точки

Скалярная величина

$$J_o = \sum m_i \cdot d_i^2 \qquad \text{или} \qquad J_o = \int_V d^2 \cdot \rho dv$$

называется **полярным моментом инерции** относительно точки О. ***d*** – расстояние от текущей точки до точки О.

Момент инерции относительно оси

Скалярная величина $J_l = \sum m_i \cdot r_i^2$ или $J_l = \int_V r^2 \cdot \rho dv$

называется **моментом инерции относительно оси *l*.** ***r*** – расстояние от точки до оси.

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является **радиус инерции**.

Величина $\rho_l = \sqrt{J_l / M}$ называется **радиусом инерции**.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой же оси определяется выражением $J_l = \rho_l^2 \cdot M$.

Моменты инерции относительно осей координат

$$J_x = \sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) \qquad J_x = \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho dv$$

$$J_y = \sum m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) \qquad J_y = \int_V (x^2 + z^2) \cdot \rho dv$$

$$J_z = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \qquad J_z = \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho dv$$

$$J_o = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad J_o = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho dv$$

Центробежные моменты инерции

$$J_{xy} = \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i \qquad J_{xy} = \int_V x_i \cdot y_i \cdot \rho dv$$

$$J_{xz} = \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i \qquad J_{xz} = \int_V x_i \cdot z_i \cdot \rho dv$$

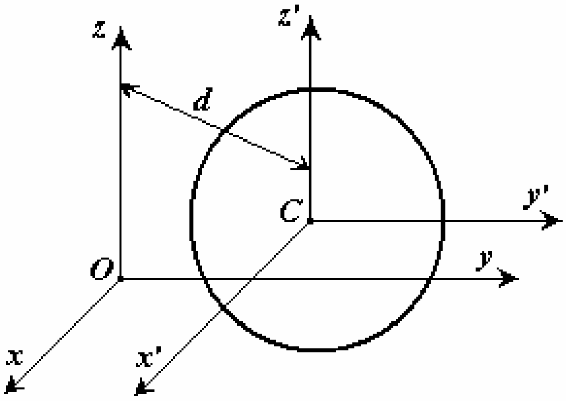
$$J_{yz} = \sum m_i \cdot z_i \cdot y_i \qquad J_{yz} = \int_V z_i \cdot y_i \cdot \rho dv$$

Установим зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. (Теорема Штейнера)

Момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями. $J_{Ol} = J_{Cl} + M \cdot d^2$

Доказательство: Пусть имеется две декартовы системы координат $Oxyz$ и $Cx'y'z'$, оси которых параллельны. Начало системы $Cx'y'z'$ находится в центре масс системы. Докажем теорему для осей Oz и Cz'.



$$J_{Oz} = \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) \qquad J_{Cz'} = \sum m_i \cdot (x_i'^2 + y_i'^2)$$

Координаты связаны между собой соотношениями:

$$x_i = x_i' + x_C, \qquad y_i = y_i' + y_C, \qquad z_i = z_i' + z_C$$

$$\sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i \cdot ((x_i' + x_C)^2 + (y_i' + y_C)^2) =$$
$$\sum m_i \cdot (x_i^2 + 2 \cdot x_i' \cdot x_C + x_C^2 + y_i'^2 + 2 \cdot y_i' \cdot y_C + y_C^2) =$$
$$\sum m_i \cdot (x_i'^2 + y_i'^2) + M \cdot (x_C^2 + y_C^2) + 2 \cdot x_C \cdot \sum m_i \cdot x_i' + 2 \cdot y_C \cdot \sum m_i \cdot y_i'$$

$$2 \cdot x_C \cdot \sum m_i \cdot x_i' = 0, \qquad 2 \cdot y_C \cdot \sum m_i \cdot y' = 0_i, \qquad x_C^2 + y_C^2 = d^2.$$

Следовательно $J_{Oz} = J_{Cz} + M \cdot d^2$, что и требовалось доказать.

Главными осями инерции называются оси, в которых центробежные моменты инерции равны нулю.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются **главными моментами инерции тела.**

Тензор инерции и тензор инерции для главных осей:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

<u>Лекция 6</u>

<u>Краткое содержание:</u> Общие теоремы динамики системы и твердого тела: Количество движения системы. Теорема об изменении количества движения системы. Законы сохранения количества движения. Теорема о движении центра масс. Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела. Момент количества движения системы. Теорема об изменении момента количества движения системы. Законы сохранения момента количества движения. Кинетическая энергия системы. Кинетическая энергия твердого тела. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Общие теоремы динамики системы и твердого тела

Количество движения системы.

<u>Количеством движения</u> системы материальных точек $\overline{Q}$ называется векторная сумма количеств движений отдельных точек системы.

$$\overline{Q} = \sum m_i \cdot \overline{v_i}$$

Единицей измерения количества движения в СИ является – $1кг \cdot м / с = 1Н \cdot с$

Количество движения системы можно выразить через массу системы и скорость центра масс. $\overline{Q} = M \cdot \overline{v_C}$

Теорема об изменении количества движения системы.

Эта теорема существует в трех различных формах.

<u>Теорема.</u> Производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i^{(e)}, \qquad (6.1)$$

Доказательство: Теорема об изменении количества движения для $i-ой$ точки имеет вид:

$$\frac{d(m_i \cdot \overline{v}_i)}{dt} = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Сложим все n уравнений и получим:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F_i^{(e)}},$$

что и требовалось доказать.

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{ix}^{(e)}, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{iy}^{(e)}, \qquad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{iz}^{(e)}.$$

<u>Теорема.</u> (в дифференциальной форме)<u>.</u> Дифференциал от количества движения системы равен сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему.

Умножим левую и правую части уравнения (6.1) на dt и получим

$$d\overline{Q} = \sum \overline{F_i^{(e)}} \cdot dt \ , \tag{6.2}$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$dQ_x = \sum F_{ix}^{(e)} \cdot dt \ , \qquad dQ_y = \sum F_{iy}^{(e)} \cdot dt \ , \qquad dQ_z = \sum F_{iz}^{(e)} \cdot dt \ .$$

Теорема (в интегральной форме). Изменение количества движения системы за какой-либо промежуток времени равно векторной сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему за этот же промежуток времени.

Интегрируя обе части уравнения (**) по времени в пределах от нуля до t получаем:

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_i^{(e)}$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{ix}^{(e)} , \qquad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{iy}^{(e)} , \qquad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{iz}^{(e)} \ .$$

Законы сохранения количества движения.

1. Если главный вектор всех внешних сил системы равен нулю ($\sum \overline{F}_i^{(e)} = 0$), то количество движения системы постоянно по величине и направлению. $\overline{Q} = const$

2. Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю ($\sum \overline{F}_{ix}^{(e)} = 0$), то проекция количества движения системы на эту ось является постоянной величиной. $Q_x = const$

Теорема о движении центра масс.

Теорема Центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i^{(e)} \qquad \overline{Q} = M \cdot \overline{v_C} \text{, следовательно} \quad M \cdot \overline{a_C} = \sum \overline{F}_i^{(e)}$$

Момент количества движения системы.

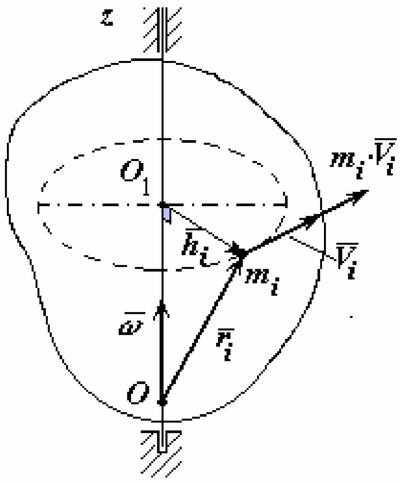
Моментом количества движения системы материальных точек $\overline{K_0}$ относительно некоторого центра O называется векторная сумма моментов количества движения отдельных точек этой системы относительно того же центра O

$$\overline{K_0} = \sum \overline{k_0} = \sum \overline{r_i} \times m_i \cdot \overline{v_i}$$

Моментом количества движения системы материальных точек $\overline{K_z}$ относительно какой-либо оси Oz, проходящей через центр O, называется проекция вектора количества движения $\overline{K_0}$ на эту ось $K_z = K_0 \cdot \cos(\gamma)$.

Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела.

Вычислим момент количества движения твердого тела относительно оси вращения.



$$K_z = \sum M_z(m_i \cdot \overline{v_i})$$

$$v_i = h_i \cdot \omega$$

$$M_z(m_i \cdot \overline{v_i}) = h_i \cdot m_i \cdot v_i = m_i \cdot h_i^2 \cdot \omega$$

$$K_z = \omega \cdot \sum m_i \cdot h_i^2 = \omega \cdot J_z$$

Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения. $K_z = \omega \cdot J_z$

Теорема об изменении момента количества движения системы.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какого-нибудь центра, равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)} \qquad (6.3)$$

Доказательство: Теорема об изменении момента количества движения для $i-ой$ точки имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_0(m_i \cdot \overline{v_i})) = \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(e)}) + \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(i)}), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Сложим все n уравнений и получим:

$$\frac{d}{dt}\sum \overline{M}_0(m_i \cdot \overline{v_i}) = \sum \overline{M}_0(\overline{F}_i^{(e)}) \quad \text{или} \qquad \frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какой-либо оси, равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно той же оси.

Для доказательства достаточно спроектировать векторное уравнение (6.3) на эту ось. Для оси Oz это будет выглядеть так:.

$$\frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{L}_z^{(e)} \qquad (6.4)$$

<u>Теорема об изменении момента количества движения системы относительно центра масс.</u> (без доказательства)

Для осей движущихся поступательно вместе с центром масс системы, теорема об изменении момента количества движения системы относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.

Законы сохранения момента количества движения.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно точки O равен нулю ($\overline{L}_0^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно точки O постоянен по величине и направлению. $\overline{K}_0 = const$

2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо оси равна нулю ($L_x^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно этой оси является постоянной величиной. $K_x = const$

Кинетическая энергия системы.

<u>Кинетической энергией системы</u> называют сумму кинетических энергий всех точек системы.

$$T = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}$$

Теорема Кенига. Кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс.

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + T_C^{(r)}$$

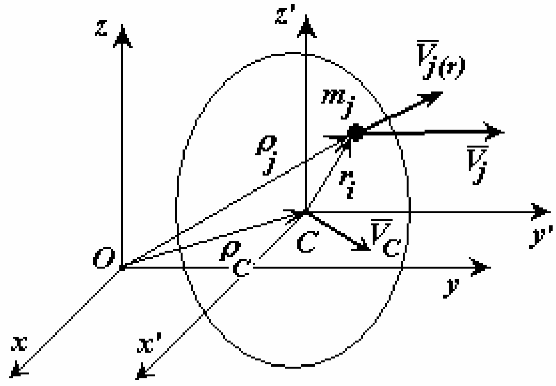
Доказательство: Рассмотрим движение механической системы относительно двух систем координат. Одна система неподвижна, другая, с началом в центре масс системы, перемещается относительно первой поступательно.

$\overline{\rho_j}$, $\overline{v_j}$ - радиус-вектор и абсолютная скорость $j-ой$ точки соответственно;

$\overline{\rho_C}$, $\overline{v_C}$ - радиус-вектор и абсолютная скорость центра масс системы соответственно;

$\overline{r_j}$, $\overline{v_{j(r)}}$ - радиус-вектор $j-ой$ точки относительно центра масс и относительная скорость этой точки соответственно.

$\overline{\rho_j} = \overline{\rho_C} + \overline{r_j}$, $\quad \overline{v_j} = \overline{v_C} + \overline{v_{j(r)}}$ (так как переносное движение поступательное)



$$T = \sum \frac{m_j \cdot v_j^2}{2} = \sum \frac{m_j \cdot v_C^2}{2} + \sum \frac{2 \cdot m_j \cdot v_C \cdot v_j}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2} =$$

$$M \cdot \frac{v_C^2}{2} + 2 \cdot v_C \cdot \sum \frac{m_j \cdot v_j}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2}$$

Так как $\sum m_j \cdot v_j = 0$, то

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + \sum \frac{m_j \cdot v_{j(r)}^2}{2} \quad \text{или} \quad T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + T_C^{(r)}$$

Кинетическая энергия твердого тела.

1. Поступательное движение тела.

Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе этого тела.

$T = M \cdot \frac{v^2}{2}$, v - скорость любой точки твердого тела

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

$T = J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}$, ω - угловая скорость вращения твердого тела.

3. Плоское движение тела.

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении складывается из кинетической энергии тела вместе с центром масс и кинетической энергии тела от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения..

$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}$, v_C - скорость центра масс твердого тела, ω - угловая скорость вращения твердого тела.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Эта теорема существует в двух формах.

Теорема. Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

$$dT = dA = \sum \overline{F}_i^{(e)} \cdot d\overline{r_i} + \sum \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r_i}$$

Доказательство: Теорема об изменении кинетической энергии для $i - ой$ точки имеет вид:

$$d(\frac{m \cdot v_i^2}{2}) = dA_i^{(e)} + dA_i^{(i)}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Сложим все n уравнений и получим:

$$\sum d(\frac{m \cdot v_i^2}{2}) = \sum dA_i^{(e)} + \sum dA_i^{(i)}$$

или $$d\left(\sum \frac{m \cdot v_i^2}{2}\right) = dT = \sum dA_i^{(e)} + \sum dA_i^{(i)}$$

или $$dT = \sum \overline{F}_i^{(e)} \cdot d\overline{r_i} + \sum \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r_i}$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы..

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)} + \sum A_i^{(i)}$$