ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ
Учебное пособие с примерами решения задач

В учебном пособии содержится краткое изложение некоторых разделов механики (принцип Даламбера, общее уравнение динамики, принцип возможных перемещений и уравнения Лагранжа 2-го рода).

Даны примеры решения задач на применение этих принципов и уравнений.

1. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1.1. Принцип Даламбера для точки и системы

Силой инерции точки называется вектор, направленный противоположно вектору абсолютного ускорения точки и равный по величине произведению массы точки на ее абсолютное ускорение

$$\overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a}. \tag{1.1}$$

Сформулируем принцип Даламбера для точки.

Если к точке, кроме равнодействующей активных сил и реакций связей, условно приложить еще силу инерции этой точки, то полученная система сил в любой момент времени становится уравновешенной (рис. 1)

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0, \tag{1.2}$$

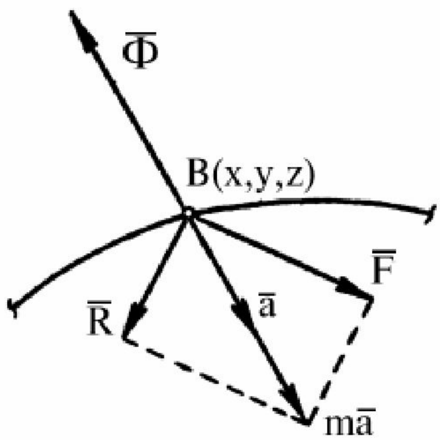

Рис. 1

где $\overline{F}$ — равнодействующая активных сил;
$\overline{R}$ — равнодействующая реакций связей;
$\overline{\Phi}$ — сила инерции точки.

Рассмотрим несвободную систему, состоящую из n точек. Применим для изучения движения каждой точки принцип Даламбера для точки.

Если к каждой точке системы, кроме равнодействующей активных сил, условно приложить еще силу инерции, то полученная система сил в любой момент времени становится уравновешенной

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Совокупность n векторных равенств (1.3) выражает принцип Даламбера для системы.

1.2. Следствия из принципа Даламбера для системы

Заметим, что

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ — внешняя и внутренняя силы, приложенные к k-й точке системы.

Равенство (1.4) принимает вид

$$\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{\Phi}_k = 0. \tag{1.4'}$$

Для уравновешенной системы сил $\left\{\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n, \overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_n, \overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_n\right\}$ справедливы зависимости

$$\overline{R}^e + \overline{R}^i + \overline{R}^{ин} = 0; \tag{1.5}$$

$$\overline{M}_0^e + \overline{M}_0^i + \overline{M}_0^{ин} = 0. \tag{1.6}$$

По свойству внутренних сил системы

$$\overline{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0 \tag{1.7}$$

и

$$\overline{M}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^i\right) = 0. \tag{1.8}$$

Окончательно получаем

$$\overline{R}^e + \overline{R}^{ин} = 0; \qquad (1.5')$$

$$\overline{M}_0^e + \overline{M}_0^{ин} = 0, \qquad (1.6')$$

где $\overline{R}^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$ — главный вектор внешних сил;

$\overline{R}^{ин} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k$ — главный вектор сил инерции точек системы;

$\overline{M}_0^e = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^e\right)$ — главный момент внешних сил относительно центра O;

$\overline{M}_0^{ин} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{\Phi}_k\right)$ — главный момент сил инерции относительно центра O.

Равенства (1.5') и (1.6') выражают собой следствия из принципа Даламбера для системы (рис. 2).

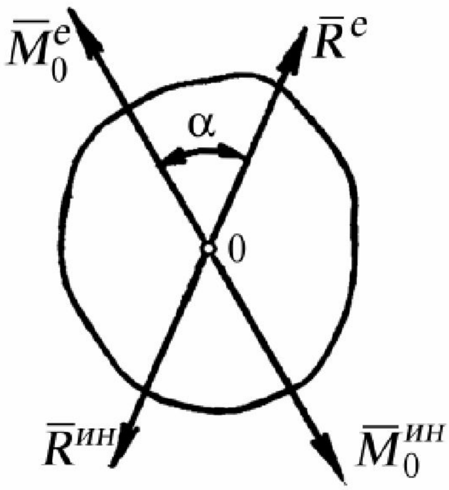

Рис. 2

В любой момент времени для любой системы сумма главных векторов внешних сил и сил инерции точек системы равна нулю; сумма главных моментов внешних сил и сил инерции точек системы относительно произвольного центра равна нулю.

В проекциях на оси координат получаем

$$
\begin{cases}
\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kx}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_{kx} = 0; \\
\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{ky}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_{ky} = 0; \\
\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_{kz}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_{kz} = 0; \\
\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x \left(\overline{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_x \left(\overline{\Phi}_k\right) = 0; \\
\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y \left(\overline{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_y \left(\overline{\Phi}_k\right) = 0; \\
\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z \left(\overline{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z \left(\overline{\Phi}_k\right) = 0.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

1.3. Главный вектор и главный момент сил инерции точек системы

Главный вектор сил инерции точек системы

$$
\overline{R}^{ин} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k = -\frac{d\overline{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(M \cdot \overline{V}_c\right) = -M \cdot \overline{a}_c, \tag{1.10}
$$

где $\overline{Q}$ — количество движения системы;

M — масса системы;

$\overline{V}_c$ — скорость центра масс системы;

$\overline{a}_c$ — ускорение центра масс системы.

Итак, главный вектор сил инерции точек системы равен силе инерции ее центра масс при условии, что в центре масс сосредоточена вся масса системы.

Главный момент сил инерции точек системы относительно центра O

$$\overline{M}_0^{ин} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{\Phi}_k\right) = -\frac{d\overline{K}_o}{dt}, \qquad (1.11)$$

где $\overline{K}_o$ — кинетический момент системы относительно центра О.

Главный вектор $\overline{R}^{ин}$ и главный момент $\overline{M}_0^{ин}$ прикладываются к центру приведения О сил инерции точек системы (рис. 3).

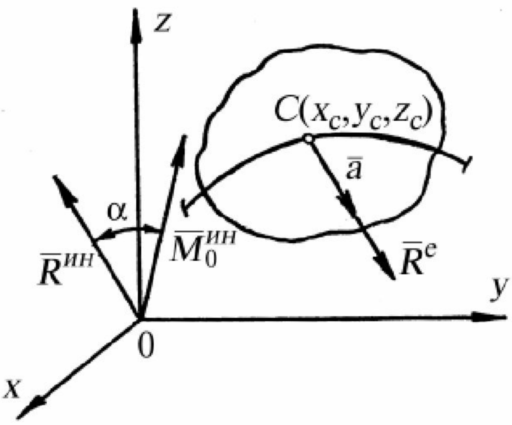

Рис. 3

1.4. Понятие о приведении сил инерции точек твердого тела в частных случаях его движения

Основная теорема статики утверждает, что приложенная к телу система сил при приведении к некоторому центру может быть заменена одной силой и одной парой сил, причем сила равна главному вектору системы сил и приложена в центре приведения, а векторный момент пары равен главному моменту системы сил относительно этого центра

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) = \left(\overline{R}, \overline{M}_0\right), \qquad (1.12)$$

где $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ и $\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_k\right)$

При любом движении тела главный вектор сил инерции его точек равен силе инерции центра масс при условии, что в нем сосредоточена вся масса тела.

Остается рассмотреть вопрос о вычислении главного момента сил инерции точек тела в частных случаях его движения.

Поступательное движение тела

Примем в качестве центра приведения центр масс тела (точку С).

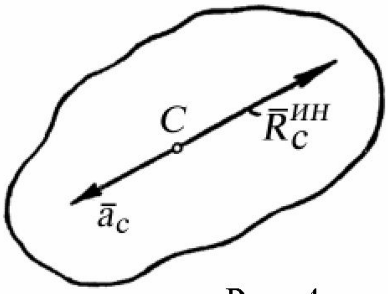

Рис. 4

При поступательном движении тела силы инерции его точек приводятся к равнодействующей силе, равной силе инерции центра масс при условии, что в нем сосредоточена вся масса тела (рис. 4)

$$\left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, ..., \overline{\Phi}_n\right) = \overline{R}_c^{ин}, \tag{1.13}$$

где

$$\overline{R}_c^{ин} = -M \cdot a_c.$$

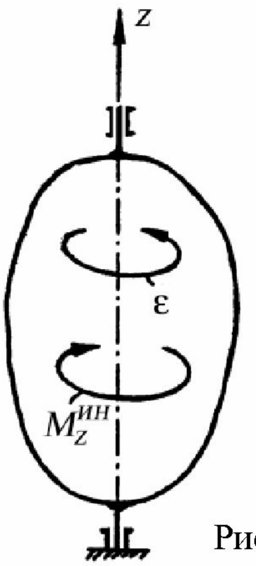

Рис. 5

Вращательное движение тела

Главный момент сил инерции точек тела относительно оси вращения тела создают касательные силы инерции его точек, так как линии действия нормальных сил инерции точек тела пересекают ось вращения.

Главный момент сил инерции точек тела (рис. 5)

$$M_z^{ин} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overline{\Phi}_k\right) = -J_z \cdot \varepsilon, \qquad (1.14)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Z;

ε — угловое ускорение тела.

Плоскопараллельное движение тела

Примем в качестве центра приведения центр масс тела (точку C).

При плоскопараллельном движении тела силы инерции его точек приводятся к приложенной в центре масс силе, равной главному вектору сил инерции его точек, и к паре сил, лежащей в плоскости движения тела, момент которой равен главному моменту сил инерции точек тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения (рис. 6)

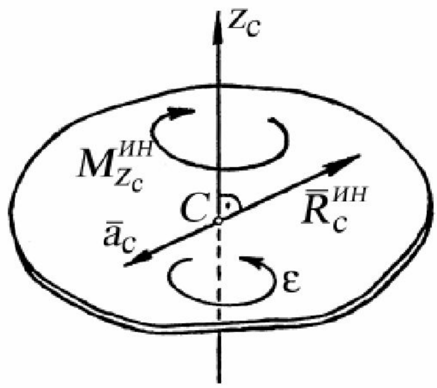

Рис. 6

$$\left(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_n\right) = \left(\overline{R}_c^{ин}, M_{Z_C}^{ин}\right), \qquad (1.15)$$

где

$$\overline{R}_c^{ин} = -M \cdot \overline{a}_c \ \text{ и } \ M_{Z_C}^{ин} = -J_{Z_C} \cdot \varepsilon.$$

2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

2.1. Связи и их классификация

Система точек называется свободной, если координаты и скорости ее точек могут принимать произвольные значения. В противном случае система является несвободной.

Ограничения, наложенные на координаты и скорости точек системы, называются связями.

Связи осуществляются при помощи материальных тел, шарнирных соединений, тросов, рельсов и т.д.

Каждая связь устанавливает какую-то зависимость между временем, координатами точек и их производными по времени.

Связь называется удерживающей, если при своем движении точки системы не могут покинуть связи.

Связь, которая не меняется с течением времени, называется стационарной.

Связь называется геометрической или голономной, если она накладывает ограничения только на положение точек системы в пространстве.

Будем рассматривать только геометрические, стационарные и удерживающие связи.

2.2. Возможные перемещения точки и системы

Возможным перемещением точки называют мыслимое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое в данный момент времени наложенными на точку связями.

Обозначать возможное перемещение будем следующим образом

$$\delta\bar{r} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}.$$

Вектор $\delta\bar{r}$ направлен по касательной к кинематически возможной (допускаемой связями) траектории точки (рис. 7). При этом

$$|\delta\bar{r}| = \delta S,$$

где $S = \overset{\cup}{OB}$ — криволинейная координата точки.

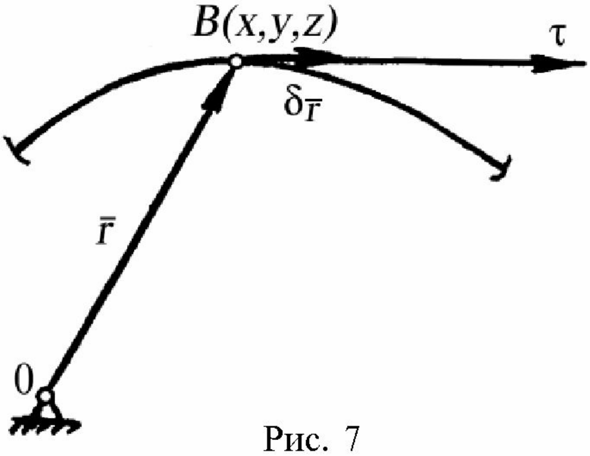

Рис. 7

Возможным перемещением системы называется совокупность возможных перемещений всех ее точек

$$\{\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, \ldots, \delta\bar{r}_n\}.$$

Действительным перемещением точки за время dt называют фактическое перемещение, которое точка совершает в пространстве при заданных связях

$$d\bar{r} = \bar{v} \cdot dt,$$

где $\bar{v}$ — скорость точки.

Число независимых координат (или перемещений) точек системы называют числом степеней ее свободы.

Число степеней свободы системы

$$N = 3 \cdot n - s, \qquad (2.1)$$

где n — число точек, входящих в систему;

s — число наложенных на систему связей.

2.3. Возможная работа силы

Возможной работой силы называют работу, выполняемую силой на возможном перемещении точки ее приложения.

Возможная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор возможного перемещения точки ее приложения (рис. 8)

$$\delta A = \bar{F} \cdot \delta\bar{r}. \qquad (2.2)$$

Очевидно, что

$$\delta A = F_\tau \cdot \delta S, \qquad (2.3)$$

где

$$F_\tau = \left|\bar{F}\right| \cdot \cos(\bar{F}, \widehat{\ } \delta\bar{r}), \quad \delta S = \left|\delta\bar{r}\right|.$$

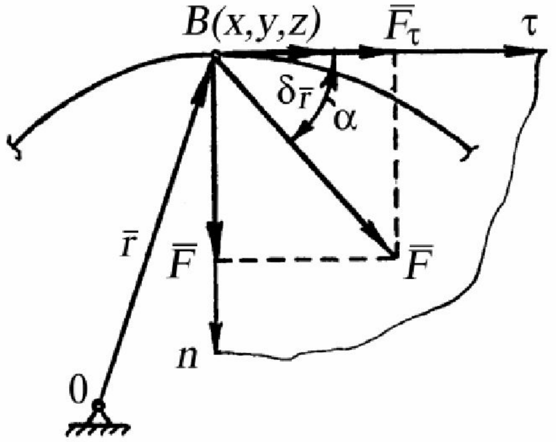

Рис. 8

Или

$$\delta A = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z;$$
$$\overline{F} = \{F_x,\ F_y,\ F_z\}; \qquad \delta\overline{r} = \{\delta x,\ \delta y,\ \delta z\}.$$

2.4. Идеальные и неидеальные связи

Связи называются идеальными, если сумма возможных работ их реакций равна нулю. В противном случае связи называются неидеальными.

Условие идеальности связей имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{R}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0, \tag{2.5}$$

где $\overline{R}_k$ — реакция связи, наложенной на k-ю точку системы;

$\delta\overline{r}_k$ — возможное перемещение этой точки.

К числу идеальных связей относятся связи, реализуемые в виде абсолютно гладких поверхностей и линий, гибких нерастяжимых нитей, абсолютно гладких шарниров и т.д. Абсолютно твердая поверхность при качении по ней без скольжения является идеальной связью.

2.5. Обобщенные координаты и обобщенные силы

Обобщенными координатами системы называется совокупность независимых между собой геометрических параметров, однозначно определяющих положение системы в пространстве. Будем обозначать обобщенные координаты $q_1,\ q_2,...,q_N$.

Число обобщенных координат равно числу степеней свободы системы.

Сообщим системе возможное перемещение $\delta\bar{r}_1,\ \delta\bar{r}_2,...,\delta\bar{r}_n$ и вычислим сумму возможных работ приложенных к ней активных сил $\bar{F}_1,\ \bar{F}_2,...,\bar{F}_n$. Силы трения при этом следует отнести к активным силам.

Сумма возможных работ всех активных сил

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{акт}=\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{F}_k\cdot\delta\bar{r}_k\right)=\sum_{i=1}^{n}Q_i^{акт}\cdot\delta q_i, \tag{2.6}$$

где $\delta q_1,\ \delta q_2,...,\delta q_N$ — приращения (вариации) соответствующих обобщенных координат;

$Q_1^{акт},\ Q_2^{акт},...,Q_N^{акт}$ — обобщенные силы при обобщенных координатах.

Обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате данной системы, называется коэффициент при приращении этой обобщенной координаты в выражении для суммы возможных работ всех активных сил системы.

Обобщенные силы определяются по формуле

$$Q_i^{акт}=\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{F}_k\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right);\qquad i=1,\ 2,...,N. \tag{2.7}$$

2.6. Способы вычисления обобщенных сил

Первый способ

Выразим декартовы координаты всех точек системы через обощенные координаты (в виде некоторых функций)

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_k(q_1,\ q_2,\dots,q_N);\\
y_k &= y_k(q_1,\ q_2,\dots,q_N); \qquad k=1,\ 2,\dots,n.\\
z_k &= z_k(q_1,\ q_2,\dots,q_N).
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Заметим при этом, что радиус-векторы всех точек системы $\bar{r}_k = \{x_k,\ y_k,\ z_k\}$ также могут быть выражены через обобщенные координаты

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1,\ q_2,\dots,q_N). \tag{2.9}$$

Используя зависимости (2.8), вычислим частные производные

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_i},\ \frac{\partial y_k}{\partial q_i},\ \frac{\partial z_k}{\partial q_i}.$$

Вычисление обобщенных сил выполняется по формуле

$$Q_i^{акт} = \sum_{k=1}^{n}\left(\bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\cdot\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) \tag{2.10}$$

Второй способ

Этот способ наиболее удобен.

Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором перемещения всех обобщенных координат, кроме одной (соответствующей обобщенной силе), равны нулю. Это означает, что у системы отнимаются все степени свободы кроме одной. Коэффициент при ненулевом приращении обобщенной координаты в выражении для суммы возможных работ всех активных сил системы дает нам искомую обобщенную силу.

Пусть $\delta q_i \neq 0$, а все остальные $\delta q_j = 0$, $(j \neq i)$;

$$
\begin{aligned}
&\sum \delta A_k^{акт} = \sum \delta A_{k/i}^{акт} = Q_i^{акт}\cdot\delta q_i;\\
&Q_i^{акт} = \frac{\sum \delta A_{k/i}^{акт}}{\delta q_i}; \qquad i=1,\ 2,\dots,N.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

По формуле (2.11) последовательно вычисляются все обобщенные силы системы.

Третий способ

Этот способ применяется только для потенциальных сил. Потенциальной энергией системы в данном положении называют величину той работы, которую совершили бы потенциальные силы при перемещении системы из данного положения (M) в начальное положение (M_0)

$$П = \sum_{\overset{\cup}{(MM_0)}} A_к = -\sum_{\overset{\cup}{(M_0M)}} A_к; \quad k = 1,\ 2,...,n. \tag{2.12}$$

Проекции потенциальной силы на оси координат

$$F_{kx} = -\frac{\partial П}{\partial x_к}; \qquad F_{ky} = -\frac{\partial П}{\partial x_y}; \qquad F_{kz} = -\frac{\partial П}{\partial x_z}, \tag{2.13}$$

где $П = П(x_1, y_1, z_1,..., x_n, y_n, z_n)$ — потенциальная энергия системы;

x_k, y_k, z_k — координаты точки приложения потенциальной силы $\overline{F}_k\left(F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}\right)$.

В данном случае обобщенные силы определяются по формуле

$$Q_i^{пот} = -\frac{\partial П}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2,...N. \tag{2.14}$$

2.7. Общее уравнение динамики

При любом движении системы сумма возможных работ активных сил и сил инерции точек системы равна нулю в любой момент

$$\sum \delta A_к^{акт} + \sum \delta A_к^{ин} = 0; \tag{2.15}$$

$$\sum \overline{F}_k \cdot \delta\overline{r}_k + \sum \overline{\Phi}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0; \qquad (2.15')$$

$$\sum [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \cdot \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \cdot \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \cdot \delta z_k] = 0; \qquad (2.15'')$$

$$\overline{\Phi}_к = \{-m_k \ddot{x}_k,\ -m_k \ddot{y}_k,\ -m_k \ddot{z}_k\}; \quad \delta\overline{r}_к = \{\delta x_k,\ \delta y_k,\ \delta z_k\}.$$

Уравнение (2.15) называется общим уравнением динамики.

2.8. Общее уравнение динамики, выраженное в обобщенных координатах

Переходя от (2.15) к обобщенным силам, получим

$$\sum Q_i^{акт} \cdot \delta q_i + \sum Q_i^{ин} \cdot \delta q_i = 0; \qquad i = 1,\ 2, \ldots, N. \qquad (2.16)$$

Уравнение (2.16) называется общим уравнением динамики в обобщенных координатах.

В силу независимости приращений обобщенных координат будем иметь

$$Q_i^{акт} + Q_i^{ин} = 0; \qquad i = 1,\ 2, \ldots, N. \qquad (2.17)$$

Уравнение (2.17) представляет собой принцип Даламбера для системы, выраженный в обобщенных силах. Это уравнение называется общим уравнением динамики в обобщенных силах. Число общих уравнений динамики в обобщенных силах равно числу степеней свободы системы.

3. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ СТАТИКИ)

3.1. Формулировка принципа возможных перемещений

Из общего уравнения динамики вытекает как частный случай общее уравнение статики или принцип возможных перемещений. Этот принцип устанавливает необходимое и достаточное условие равновесия системы.

Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех активных сил была равна нулю и скорости всех точек системы в начальный момент времени были равны нулю

$$\sum \delta A_к^{акт} = 0; \tag{3.1}$$

$$\bar{\upsilon}_k(0) = 0; \qquad k = 1, 2, ..., n. \tag{3.2}$$

Глубокое содержание принципа возможных перемещений выражается при помощи уравнения (3.1), которое называется общим уравнением статики.

Приведем различные формы общего уравнения статики

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0; \tag{3.1'}$$

$$\sum F_k^{\tau} \cdot \delta s_k = 0, \tag{3.1*}$$

где

$$F_k^{\tau} = F_k \cos(\bar{F}_k, \widehat{\ } \ \delta\bar{r}_k); \quad \delta s_k = |\delta\bar{r}_k|;$$

$$\sum \left[F_{kx} \cdot \delta x_k + F_{ky} \cdot \delta y_k + F_{kz} \cdot \delta z_k\right] = 0. \tag{3.1\#}$$

3.2. Общее уравнение статики, выраженное в обобщенных силах

Переходя от (3.1) к обобщенным силам, получим

$$\sum Q_i^{акт} \cdot \delta q_i = 0, \quad i = 1,\ 2,...,N. \tag{3.3}$$

В силу независимости приращений обобщенных координат будем иметь

$$Q_i^{акт} = 0; \quad i = 1,\ 2,...,N. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.4) представляют собой условия равновесия системы, выраженные в обобщенных силах. Число условий равновесия системы равно числу степеней ее свободы.

Уравнение (3.4) представляет собой общее уравнение статики, выраженное в обобщенных силах.

Итак, для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы обобщенные активные силы при выбранных обобщенных координатах были равны нулю.

Для консервативной системы получаем

$$Q_i^{пот} = -\frac{\partial П}{\partial q_i}; \quad i = 1,\ 2,...,N. \tag{3.5}$$

Положения равновесия консервативной системы могут иметь место только при тех значениях обобщенных координат, при которых потенциальная энергия системы принимает экстремальные значения (максимум или минимум).

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА 2-ГО РОДА (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ)

4.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i^{акт}; \qquad i=1,\ 2,\ldots,N, \tag{4.1}$$

где T — кинетическая энергия системы;
q_i — обобщенные координаты;
$\dot{q}_i$ — обобщенные скорости;
$Q_i^{акт}$ — обобщенные силы при выбранной обобщенной координате q_i;
N — число степеней свободы системы.

Количество уравнений Лагранжа 2-го рода равно количеству степеней свободы системы. Уравнения Лагранжа 2-го рода представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах. Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка относительно обобщенных координат. Преимущества уравнений Лагранжа 2-го рода состоят в следующем:

1. Эти уравнения дают единый и притом достаточно простой метод решения задач для любых систем или тел, как угодно движущихся.
2. Число уравнений не зависит от числа входящих в систему точек или тел и равно числу степеней свободы системы.
3. Силы, действующие на систему, представлены в виде обобщенных сил, в которых учитываются только активные силы, а реакции идеальных связей исключаются.

4.2. Методика применения уравнений Лагранжа 2-го рода к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений движения системы

1. Изобразить систему в произвольный момент времени. Приложить к точкам системы заданные (активные) силы. Силы трения следует отнести к активным силам.

2. Определить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты.

3. Вычислить кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенные координаты и скорости.

4. Найти обобщенные силы системы, соответствующие выбранным обобщенным координатам.

5. Выполнить математические операции, предусмотренные уравнениями Лагранжа 2-го рода.

6. Указать начальные условия (начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей).

7. Проинтегрировать составленные уравнения Лагранжа 2-го рода с учетом начальных условий.

4.3. Уравнения Лагранжа 2-го рода в случае потенциальных сил

В случае потенциальных сил имеем

$$Q_i^{акт} = Q_i^{пот} = -\frac{\partial П}{\partial q_i}; \qquad i = 1,\ 2,...,N.$$

Тогда уравнения (4.1) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \qquad i = 1,\ 2,...,N, \tag{4.2}$$

где $L = T - П$ — кинетический потенциал или функция Лагранжа.

Уравнения (4.2) представляют собой уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил.

4.4. Циклические координаты и циклические интегралы

Обобщенные координаты, которые не входят в выражение кинетического потенциала, называются циклическими координатами.

Те обобщенные координаты, которые явно входят в выражение кинетического потенциала, называются позиционными или нециклическими.

Производная от кинетического потенциала по любой циклической координате равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}=0; \qquad j=1,\ 2,...,p, \tag{4.3}$$

где p — количество циклических координат.

В этом случае p уравнений Лагранжа 2-го рода принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=0; \qquad j=1,\ 2,...,p. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=C_j=\text{const}. \tag{4.5}$$

Равенства (4.5) называются циклическими интегралами.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА

Задача 1

При каких значениях скорости V шарик пройдет высшую точку M круговой петли радиусом R, не отрываясь от нее? Петля расположена в вертикальной плоскости (рис. 9).

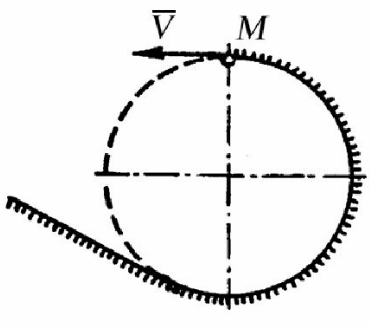

Рис. 9

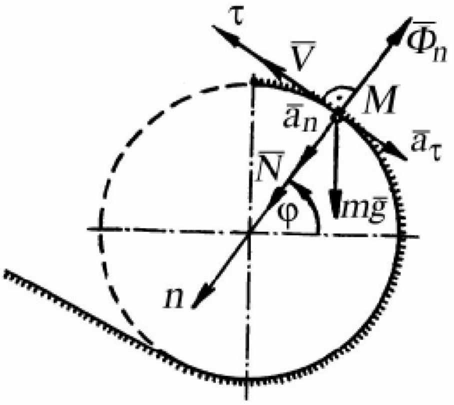

Рис. 10

Решение

Воспользуемся принципом Даламбера для точки.

Изобразим шарик в промежуточном положении на его траектории (рис. 10). Приложим к шарику активную силу (силу тяжести $\overline{mg}$), реакцию связи (нормальную реакцию петли $\overline{N}$), нормальную и касательную силы инерции $(\overline{\Phi}_\tau, \overline{\Phi}_n)$.

Полученная система сил является уравновешенной в любой момент времени и условие равновесия этой системы сил имеет вид

$$\sum F_{kn} + \sum R_{kn} + \sum \Phi_{kn} = 0$$

или

$$mg\sin\varphi + N - \Phi_n = 0. \qquad (1)$$

Нормальная сила инерции шарика

$$\Phi_n = ma_n = m\frac{V^2}{R}; \quad a_n = \frac{V^2}{R},$$

где V — скорость шарика;

a_n — его нормальное ускорение.

По условию задачи при 90° нормальная реакция петли равна нулю ($N = 0$).

Из (1) получаем

$$mg - \frac{mV^2}{R} = 0; \quad V = \sqrt{gR}.$$

Задача 2

Тонкие однородные стержни AB и $ДE$ одинаковой длины L и массой m жестко скреплены с осью OO_1 и вращаются вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Оба стержня перпендикулярны оси вращения и в настоящий момент времени $AB \parallel Oy$ и $DE \parallel Ox$. Даны размеры $OД = ДA = AO_1 = b.$ На концах стержней в точках B и E находятся точечные грузы массой m (рис. 11). Определить проекции реакций подпятника O и подшипника O_1 на оси координат.

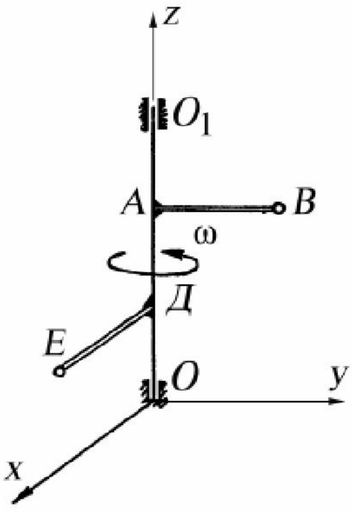

Рис. 11

Решение (рис. 12)

Применим для решения задачи принцип Даламбера для системы.

Приложим к конструкции внешние силы — силы тяжести стержней и грузов, реакции подпятника O и подшипника O_1. Приложим к стержням и грузам силы инерции $\overline{\Phi}_{C1}^n, \overline{\Phi}_{C2}^n, \overline{\Phi}_B^n, \overline{\Phi}_E^n$, причем

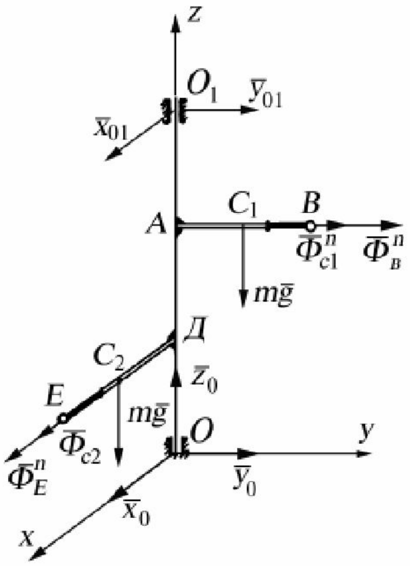

Рис. 12

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{C1}^n = m \cdot a_{C1}^n = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{2}; && a_{C1}^n = \omega^2 \cdot \frac{L}{2};\\
&\Phi_{C2}^n = m \cdot a_{C2}^n = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{L}{2}; && a_{C2}^n = \omega^2 \cdot \frac{L}{2};\\
&\Phi_{B}^n = m \cdot a_{B}^n = m \cdot \omega^2 \cdot L; && a_{B}^n = \omega^2 \cdot L;\\
&\Phi_{E}^n = m \cdot a_{E}^n = m \cdot \omega^2 \cdot L; && a_{E}^n = \omega^2 \cdot L;
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $a_{C1}^n, a_{C2}^n, a_B^n, a_E^n$ — нормальные ускорения точек C_1, C_2, B и E.

Полученная пространственная система сил является уравновешенной в любой момент времени

$$\left(\overline{mg},\overline{mg},\overline{mg},\overline{mg},\overline{X}_O,\overline{Y}_O,\overline{Z}_O,\overline{X}_{O1},\overline{Y}_{O1},\overline{\Phi}^n_{C1},\overline{\Phi}^n_{C2},\overline{\Phi}^n_B,\overline{\Phi}^n_E\right)=0.$$

Составим условия равновесия этой системы сил

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F^e_{kx}+\sum \Phi_{kx}=0; \quad X_O+X_{O1}+\Phi^n_E+\Phi^n_{C2}=0;\\
&\sum F^e_{ky}+\sum \Phi_{ky}=0; \quad Y_O+Y_{O1}+\Phi^n_B+\Phi^n_{C1}=0;\\
&\sum F^e_{kz}+\sum \Phi_{kz}=0; \quad Z_O-4mg=0;\\
&\sum m_x\left(\overline{F}^e_k,\overline{\Phi}_k\right)=0; \quad -Y_{O1}\cdot 3b-\left(\Phi^n_B+\Phi^n_{C1}\right)\cdot 2b-mgL-mg\frac{L}{2}=0;\\
&\sum m_y\left(\overline{F}^e_k,\overline{\Phi}_k\right)=0; \quad -X_{O1}\cdot 3b-\left(\Phi^n_E+\Phi^n_{C1}\right)\cdot b-mgL-mg\frac{L}{2}=0.
\end{aligned}\right\}(2)$$

Получаем 5 уравнений с 5-ю неизвестными величинами $\left(X_O,Y_O,Z_O,X_{O1},Y_{O1}\right)$. Из (2) с учетом (1) находим

$$\begin{aligned}
X_O&=-m\omega^2L+\frac{1}{2}mg\frac{L}{b};\\
Y_O&=-\frac{1}{2}m\omega^2L+\frac{1}{2}mg\frac{L}{b};\\
Z_O&=4mg;\\
X_{O1}&=-\frac{1}{2}m\omega^2L-\frac{1}{2}mg\frac{L}{b};\\
Y_{O1}&=-m\omega^2L-\frac{1}{2}mg\frac{L}{b}.
\end{aligned}$$

Задача 3

Тонкий однородный стержень массы m и длины L может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 13). В начальный момент стержень отведен в горизонтальное положение и отпущен без начальной скорости. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда он повернется на угол φ = 30°, а также реакцию оси O в этот же момент.

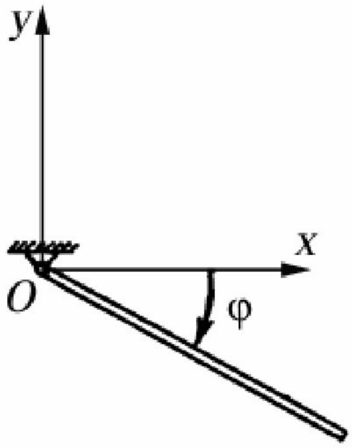

Рис. 13

Решение

Стержень совершает вращательное движение под действием силы тяжести. Найдем угловую скорость и угловое ускорение стержня.

Угловое ускорение стержня получим из дифференциального уравнения его движения

$$J_O \frac{d\omega}{dt} = mg\frac{L}{2}\cos\varphi; \qquad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgL\cos\varphi}{2J_O} = \frac{3g}{2L}\cos\varphi, \quad (2)$$

где $J_O = \dfrac{1}{3}mL^2$ — момент инерции стержня относительно оси O (рис.14).

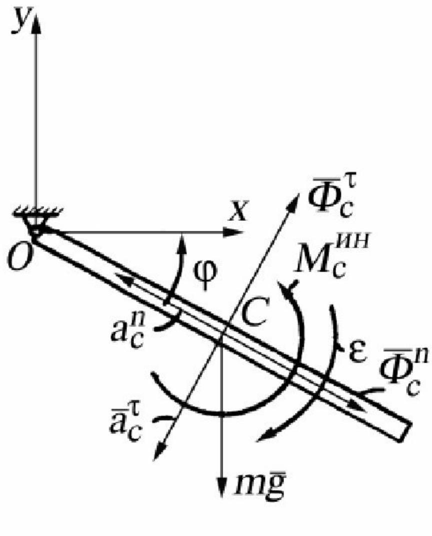

Рис. 14

Угловую скорость стержня найдем с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e$$

или

$$\frac{1}{2} J_O \omega^2 = mg\frac{L}{2}\sin\varphi; \quad (T_0 = 0); \tag{3}$$

$$\omega^2 = \frac{mgL\sin\varphi}{J_O} = \frac{3g}{L}\sin\varphi. \tag{4}$$

Для определения реакции шарнира O воспользуемся принципом Даламбера для системы.

Приложим к стержню внешние силы — силы тяжести и реакции шарнира $O(\overline{mg},\ \overline{X}_O,\ \overline{Y}_O)$. Приложим к стержню силы инерции и момент сил инерции относительно центра масс $\overline{\varPhi}_C^{\tau},\ \overline{\varPhi}_C^{n},\ M_C^{ин}$, причем

$$\begin{aligned} &\varPhi_C^{\tau} = ma_C^{\tau} = m\varepsilon\frac{L}{2}; &&a_C^{\tau} = \varepsilon\frac{L}{2};\\ &\varPhi_C^{n} = ma_C^{n} = m\omega^2\frac{L}{2}; &&a_C^{n} = \omega^2\frac{L}{2};\\ &\left|\mathrm{M}_{\mathrm{C}}^{\text{ин}}\right| = J_C\varepsilon, \end{aligned} \tag{5}$$

где $J_C = \dfrac{1}{12}mL^2$ — момент инерции стержня относительно оси С.

Получена плоская уравновешенная система сил

$$\left\{\overline{mg},\ \overline{X}_O,\ \overline{Y}_O,\ \overline{\varPhi}_C^{\tau},\ \overline{\varPhi}_C^{n},\ M_C^{ин}\right\} = 0.$$

Условия равновесия этой системы сил имеют вид

$$\left.\begin{array}{ll}\sum F_{kx}^e + \sum \Phi_{kx} = 0; & X_0 + \Phi_C^\tau \sin\varphi + \Phi_C^n \cos\varphi = 0; \\ \sum F_{ky}^e + \sum \Phi_{ky} = 0; & Y_0 - mg - \Phi_C^n \sin\varphi + \Phi_C^\tau \cos\varphi = 0;\end{array}\right\}. \qquad (6)$$

При $\varphi = 30°$ из (2) и (4) следует

$$\varepsilon = \frac{3g}{2L}\cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{g}{L}; \qquad (7)$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{L}\sin 30° = \frac{3}{2}\cdot\frac{g}{L}. \qquad (8)$$

Из (6) при $\varphi = 30°$ с учетом (5), (7) и (8) получаем окончательно

$$X_0 = -\Phi_C^\tau \sin 30° - \Phi_C^n \cos 30° = -\frac{9\sqrt{3}}{16}mg;$$

$$Y_0 = mg + \Phi_C^n \sin 30° - \Phi_C^\tau \cos 30° = \frac{13}{16}mg.$$

Задача 4

Тонкий однородный стержень AB длиной L вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси OO_1 (рис. 15). Найти угол отклонения стержня от вертикали, не учитывая трение в шарнире A. При каком наименьшем значении ω стержень отклоняется от вертикали?

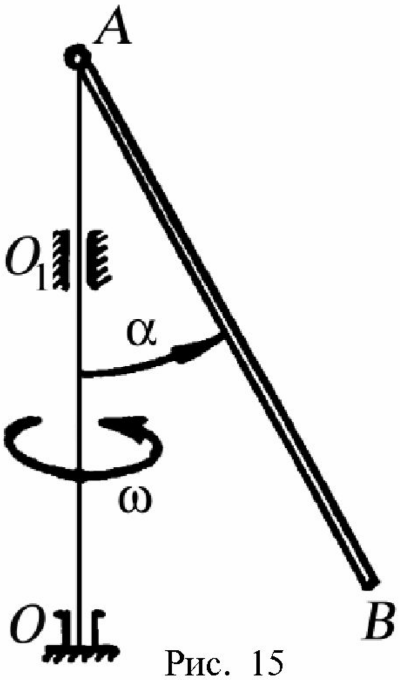

Рис. 15

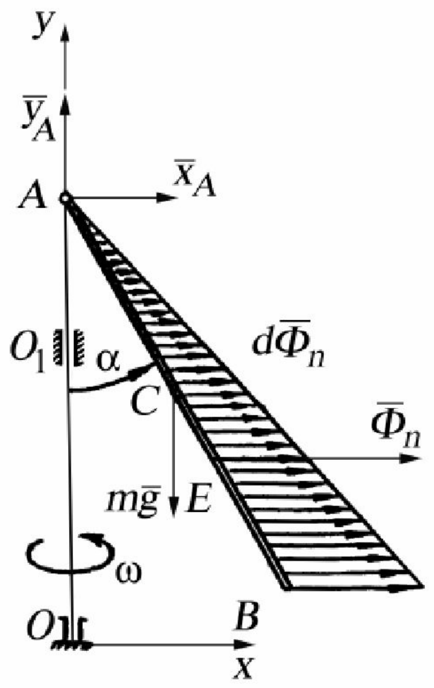

Рис. 16

Решение

Воспользуемся принципом Даламбера для системы.

Приложим к стержню внешние силы — силу тяжести $\overline{mg}$, реакции шарнира A – $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$.

Нормальные силы инерции элементарных частиц стержня образуют плоскую систему параллельных сил (рис. 16). Приложим к точке E стержня ее равнодействующую нормальную силу инерции, причем

$$AE = \frac{2}{3}L; \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Phi_n = ma_C^n = m\omega^2 \dfrac{L}{2}\sin\alpha; \\ a_C^n = \omega^2 \dfrac{L}{2}\sin\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь a_C^n – нормальное ускорение центра масс стержня (точки C).

Образована плоская уравновешенная система сил $\left\{\overline{mg},\ \overline{X}_A,\ \overline{Y}_A,\ \overline{\Phi}_n\right\} = 0$.

Составим условие равновесия этой системы сил

$$\sum m_A\left(\overline{F}_k^e, \overline{\Phi}_k\right) = 0;$$

$$\Phi_n \frac{2}{3} L\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\sin\alpha = 0, \tag{3}$$

Из (3) с учетом (2) получаем

$$\cos\alpha = \frac{3g}{2L\omega^2}.$$

Стержень будет отклоняться от вертикали (при $\alpha > 0$ или при $\cos\alpha \le 0$). Отсюда следует

$$\frac{3g}{2L\omega^2} \le 1; \qquad \omega = \omega_{\min} = \frac{3g}{2L}.$$

Задача 5

Тонкий однородный и гладкий диск массы m и радиуса R установлен между валом OO_1 и стержнем AB, приваренным к нему под углом φ. Стержень и вал вращаются с постоянной угловой скоростью ω (рис. 17). Определить давление диска на стержень и вал.

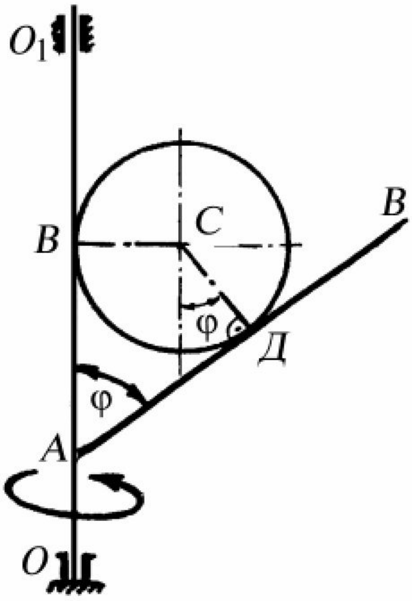

Рис. 17

Решение

Применим для решения задачи принцип Даламбера для системы.

Приложим к диску внешние силы — силу тяжести $\overline{mg}$, реакции вала $\overline{N}_B$ и стержня $\overline{S}_D$ (рис. 18).

Приложим к диску силу инерции $\overline{\Phi}_n$, причем

$$\Phi_n = ma_C^n = m\omega^2 R, \tag{1}$$

где $a_C^n = \omega^2 R$ — нормальное ускорение центра масс стержня.

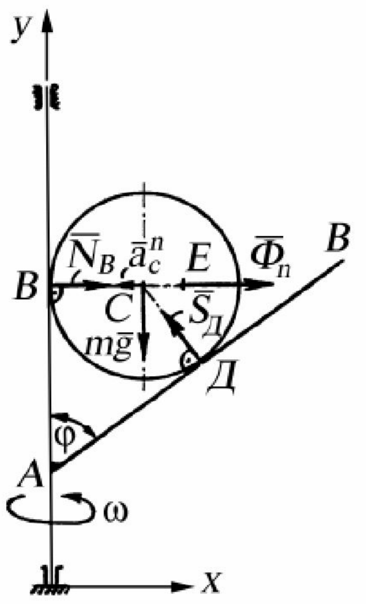

Рис. 18

Получена уравновешенная система сил $\left(\overline{mg},\ \overline{N}_B,\ \overline{S}_D,\ \overline{\Phi}_n\right)=0.$

Составим условия равновесия этой системы сил

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_{kx}^e+\sum \Phi_{kx}=0; \quad N_B+\Phi_n-S_D\cos\varphi=0;\\ &\sum F_{ky}^e+\sum \Phi_{ky}=0; \quad -mg+S_D\sin\varphi=0.\end{aligned}\right\}(2)$$

Из (2) с учетом (1) находим

$$S_D=\frac{mg}{\sin\varphi};$$

$$N_B=\frac{mg\cos\varphi}{\sin\varphi}-m\omega^2R.$$

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ

Задача 1

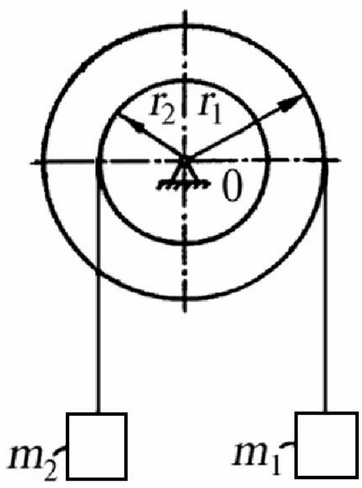

Рис. 19

Ступенчатый барабан массы m может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис.19). Радиус инерции барабана относительно этой оси равен ρ, а радиусы ступеней r_1 (больший) и r_2 (меньший). На барабан намотаны нерастяжимые невесомые нити, к концам которых прикреплены грузы массой m_1 и m_2. Грузы движутся под влиянием силы тяжести (груз массой m_1 опускается). Определить угловое ускорение барабана.

Решение

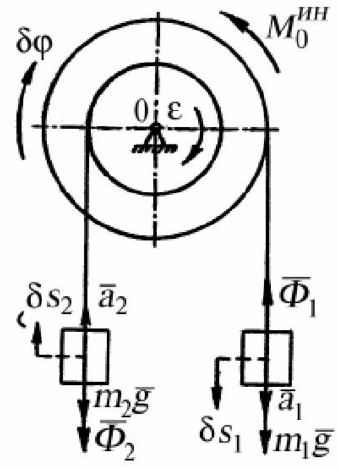

Рис. 20

Изображаем активные силы, действующие на грузы и барабан (рис. 20) $\overline{m_1 g}, \overline{m_2 g}, \overline{mg}$.

Прикладываем к грузам силы инерции и к барабану момент сил инерции (момент пары сил)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= m_1 a_1, \\ \Phi_2 &= m_2 a_2, \\ M_O^{ин} &= J_O \cdot \varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где a_1 и a_2 — ускорения грузов;

ε — угловое ускорение барабана;

$J_O = m\rho^2$ — момент инерции барабана относительно оси O.

Составим общее уравнение динамики

$$m_1 g\delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - M_O^{ин}\delta\varphi - m_2 g\delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 = 0, \qquad (2)$$

где δs_1 и δs_2 — возможные поступательные перемещения грузов;

$\delta\varphi$ — возможное вращательное перемещение барабана.

Устанавливаем следующие кинематические соотношения

$$\left.\begin{aligned} \delta s_1 &= r_1 \delta\varphi; \qquad & \delta s_2 &= r_2 \delta\varphi; \\ a_1 &= r_1 \varepsilon; \qquad & a_2 &= r_2 \varepsilon. \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Из (2) с учетом (1) и (3) находим угловое ускорение барабана

$$\varepsilon = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2)g}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m\rho^2}.$$

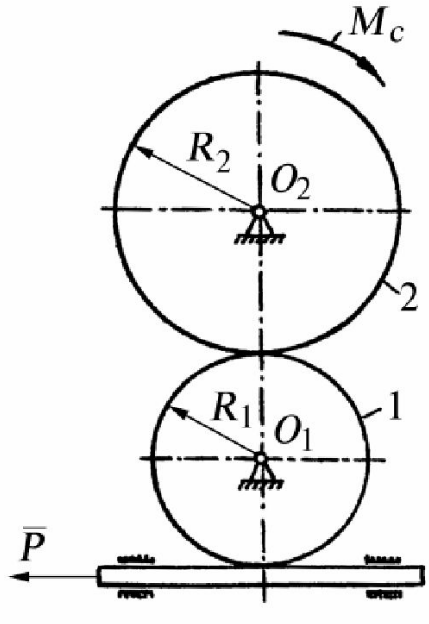

Рис. 21

Задача 2

К зубчатой рейке массы m приложена постоянная сила P. Рейка приводит в движение зубчатые колеса 1 и 2 массами m_1 и m_2, радиусами R_1 и R_2 (рис. 21). К колесу 2 приложена пара сил сопротивления с постоянным моментом M_C. Определить угловое ускорение ε_2 колеса 2 и касательную составляющую T силы, действующей на него со стороны колеса 1. Колеса считать сплошными однородными дисками.

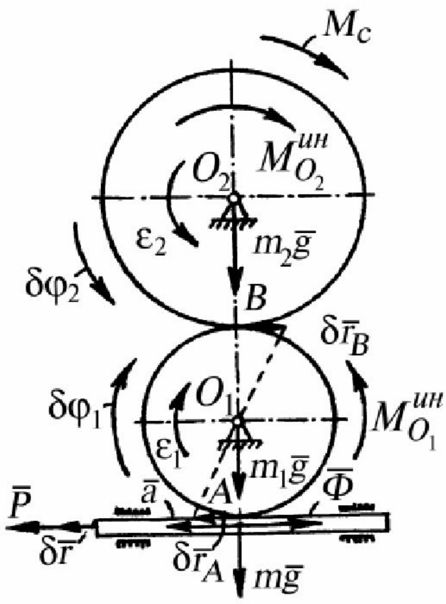

Рис. 22

Решение

Приложим к рейке и к колесам активные силы $\overline{m_1 g}$, $\overline{m_2 g}$, $\overline{mg}$ момент сопротивления M_C, силу инерции $\overline{\Phi}$ и моменты сил инерции $M_{O1}^{ин}$ и $M_{O2}^{ин}$, (рис. 22) причем

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= ma, \\ M_{O1}^{ин} &= J_{O1}\varepsilon_1, \\ M_{O2}^{ин} &= J_{O2}\varepsilon_2, \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где a — ускорение рейки;
ε_1 и ε_2 — угловые ускорения колес;

$J_{O1} = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ и $J_{O2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$ —

моменты инерции колес относительно соответствующих осей вращения O_1 и O_2.

Общее уравнение динамики имеет вид

$$P\delta s - \Phi\delta s - M_{O1}^{ин}\delta\varphi_1 - M_{O2}^{ин}\delta\varphi_2 - M_C\delta\varphi_2 = 0, \qquad (2)$$

где δs — возможное поступательное перемещение рейки;
$\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ — и возможные вращательные перемещения колес.

Имеют место следующие кинематические зависимости

$$\begin{aligned} &\delta s = \delta s_A = R_1\delta\varphi_1 = \delta s_B = R_2\delta\varphi_2; \\ &a = a_A^\tau = R_1\varepsilon_1 = a_B^\tau = R_2\varepsilon_2, \end{aligned} \qquad (3)$$

откуда

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s}{R_1}; \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s}{R_2}; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2\frac{R_2}{R_1}. \qquad (3')$$

Из (2) с учетом (1) и (3) определяем угловое ускорение колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{2(PR_2 - M_C)}{(2m + m_1 + m_2)R_2{}^2}.$$

Применим общее уравнение динамики к колесу 2 (рис. 23)

$$(TR_2)\delta\varphi_2 - M_{O2}^{ин}\delta\varphi_2 - M_C\delta\varphi_2 = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$T = \frac{1}{R_2}\left(M_{O2}^{ин} + M_C\right) = \frac{m_2R_2}{2}\varepsilon_2 + \frac{M_C}{R_2}.$$

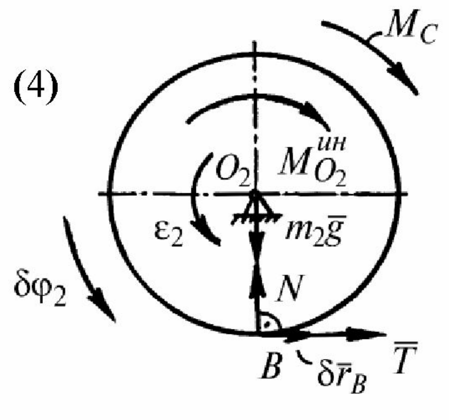

Рис. 23

Задача 3

Груз 3 массы M приводит в движение цилиндрический каток 1 массы m и радиуса R при помощи нити, намотанной на каток (рис. 24). Определить ускорение груза 3, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен λ. Массой блока 2 пренебречь.

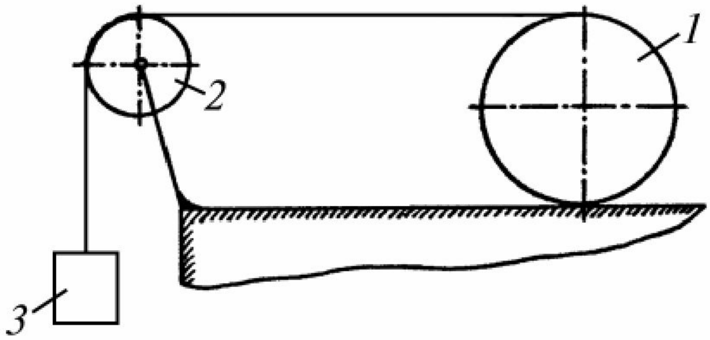

Рис. 24

Решение

Приложим к катку и грузу активные силы $\overline{Mg}$, $\overline{mg}$, реакции $\overline{N}$ и $\overline{F}_{тр}$, а также силы инерции $\overline{\Phi}$, $\overline{\Phi}_C$ и $M_C^{ин}$ (рис. 25), причем

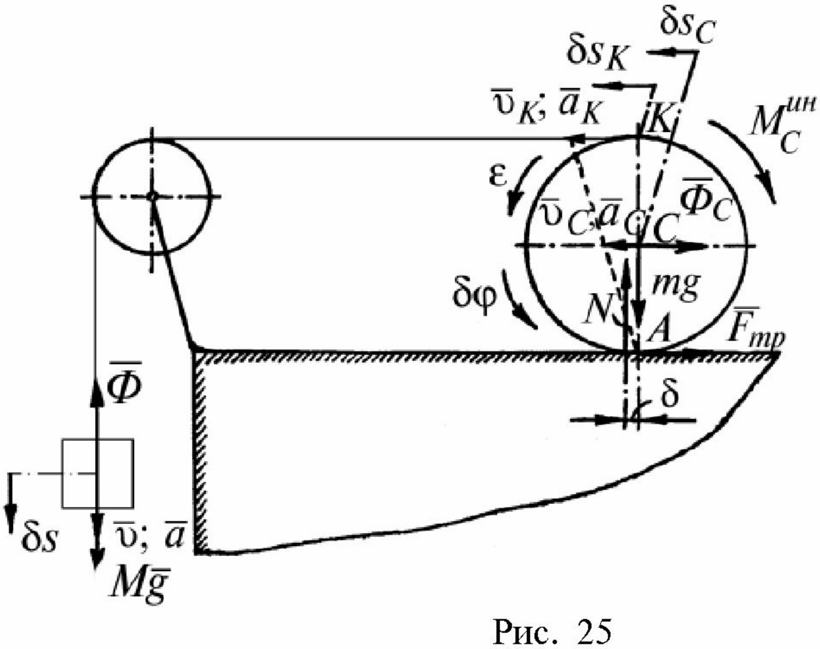

Рис. 25

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = Ma, \\ &,\Phi_C = ma_C, \\ &M_C^{ин} = J_C \cdot \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a — ускорение груза;
a_C — ускорение центра масс катка (точки С);
ε — угловое ускорение катка;

$J_C = \dfrac{mR^2}{2}$ — собственный момент инерции катка.

Реакции N и $F_{тр}$, приложенные к катку, отнесем к активным силам $(N = Mg)$.

Составим общее уравнение динамики

$$Mg\delta s - \Phi\delta s - (N\lambda)\delta\varphi - \Phi_C\delta s_C - M_C^{ин}\delta\varphi = 0, \tag{2}$$

где δs — возможное перемещение груза;
δs_C — возможное перемещение точки С;
$\delta\varphi$ — возможные вращательное перемещение катка.

Находим следующие кинематические зависимости (точка А — мгновенный центр скоростей катка)

$$\begin{aligned} &\delta s = \delta s_K = 2R\delta\varphi; \quad \delta s_C = \frac{1}{2}\delta s; \quad \delta\varphi = \frac{\delta s}{2R}; \\ &a_C = \frac{1}{2}a; \quad \varepsilon = \frac{a}{2R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (2) с учетом (1) и (3) определяем ускорение груза

$$a = \frac{\left(M - m\dfrac{\lambda}{2R}\right)}{M + \dfrac{3}{8}m}g.$$

При $M = m$ и $\lambda = 0$ $\quad a = \dfrac{8}{11}g.$

Задача 4

Двухосная тележка движется по горизонтальному участку пути (рис. 26). К передней колесной паре тележки приложена пара сил с моментом *M,* колеса радиуса *R* катятся без скольжения. Масса тележки колесной пары *m*, ее радиус инерции относительно геометрической оси равен ρ. Определить ускорение тележки.

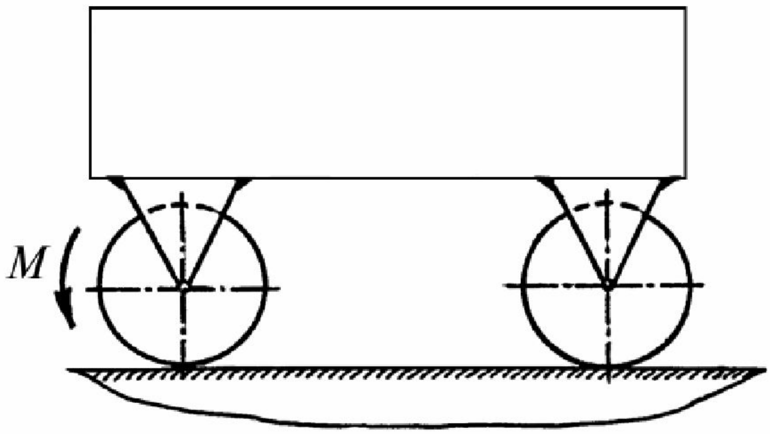

Рис. 26

Решение

Приложим к корпусу тележки и ее колесным парам активные силы $\overline{m_1 g}, \overline{m_1 g}, mg$ и силы инерции $\overline{\Phi}$, $\overline{\Phi}_{O1}$, $\overline{\Phi}_{O2}$, $M^{ин}_{O1}$ и$M^{ин}_{O2}$ (рис. 27), причем

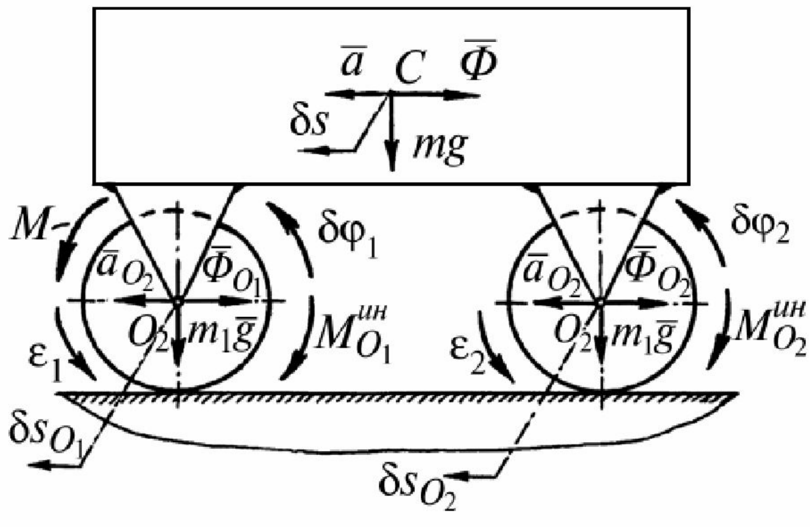

Рис. 27

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi = Ma,\\
&\Phi_{O1} = \Phi_{O2} = m_1 a,\\
&M_{O1}^{ин} = M_{O2}^{ин} = J_{O1}\cdot\varepsilon_1,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)
$$

где $a = a_{O1} = a_{O2}$ — ускорение тележки;
$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ — угловое ускорение колесных пар;
$J_{O1} = J_{O2} = m\rho^2$ — моменты инерции колесной пары относительно ее геометрической оси.

Воспользуемся общим уравнением динамики, учитывая, что силы тяжести перпендикулярны перемещениям соответствующих центров масс

$$
M\delta\varphi_1 - M_{O1}^{ин}\delta\varphi_1 - \Phi_{O1}\delta s_{O1} - M_{O2}^{ин}\delta\varphi_2 - \Phi_{O2}\delta s_{O2} - \Phi\delta s = 0. \qquad (2)
$$

Имеют место следующие кинематические соотношения

$$
\begin{aligned}
&\delta s = \delta s_{O1} = \delta s_{O2}; \qquad \delta\varphi_1 = \frac{\delta s_{O1}}{R} = \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_{O2}}{R} = \frac{\delta s}{R};\\
&a = a_{O1} = a_{O2}; \qquad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \delta\varphi; \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Из (2) с учетом (1) и (3) находим ускорение тележки

$$
a = \frac{M}{R\left[m + 2m\left(1 + \frac{\rho^2}{R^2}\right)\right]}.
$$

Задача 5

Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 28). Определить угол отклонения стержней OA и OB от вертикали, принимая во внимание только массу m каждого из шаров и массу m_1 муфты C. Все стержни имеют одинаковую длину L.

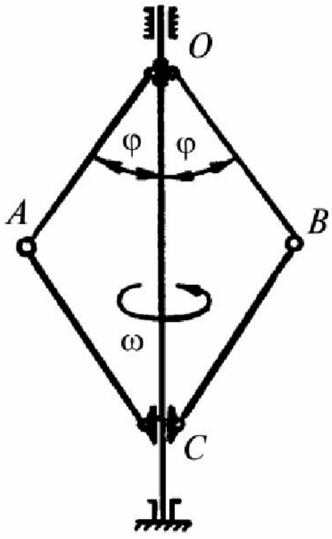

Рис. 28

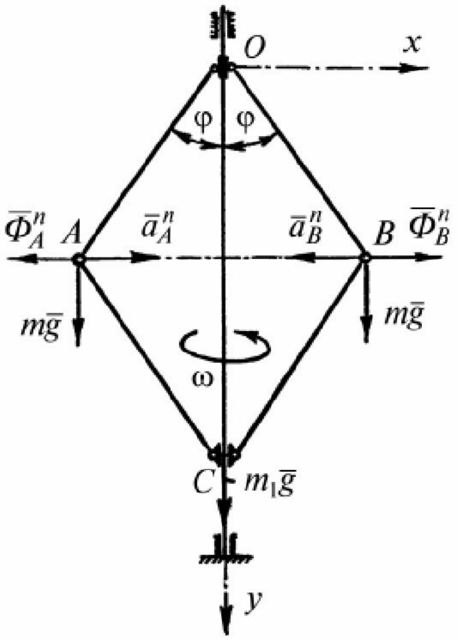

Рис. 30

Решение (координатный способ)

Приложим к шарам и к муфте (рис. 29) активные силы $\overline{m_1 g}, \overline{mg}, mg,$ а также силы инерции $\overline{\Phi}{}^n_A$ и $\overline{\Phi}{}^n_B$, причем

$$\left.\begin{aligned} \Phi^n_A &= ma^n_A = m\omega^2 L\sin\varphi; \\ \Phi^n_B &= ma^n_B = m\omega^2 L\sin\varphi, \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $a^n_A = a^n_B = \omega^2 L\sin\varphi$ — нормальные ускорения шаров A и B.

Составим общее уравнение динамики в аналитической (координатной) форме

$$\sum\left\{\left(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k\right)\delta x_k + \left(F_{ky} - m_k\ddot{y}_k\right)\delta y_k\right\} = 0;$$

или

$$mg\delta y_A - \Phi^n_A\delta x_A + mg\delta y_B + \Phi^n_B\delta x_B + m_1 g\delta y_C = 0. \qquad (2)$$

Выразим координаты точек A, B и C через независимый параметр φ, являющийся обобщенной координатой

$$\begin{aligned} x_A &= -L\sin\varphi; & y_A &= L\cos\varphi; \\ x_B &= L\sin\varphi; & y_B &= L\cos\varphi; \\ y_C &= 2L\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (3)$$

Вычислим проекции возможных перемещений этих точек на оси координат

$$\begin{aligned} \delta x_A &= -L\cos\varphi\cdot\delta\varphi; & \delta y_A &= -L\sin\varphi\cdot\delta\varphi; \\ \delta x_B &= L\cos\varphi\cdot\delta\varphi; & \delta y_B &= -L\sin\varphi\cdot\delta\varphi; \\ \delta y_C &= -2L\sin\varphi\cdot\delta\varphi. \end{aligned} \qquad (4)$$

После подстановки (1) и (4) в (2) получим

$$\cos\varphi = \frac{(m_1 + m)g}{m\omega^2 L}.$$

Решение (векторный способ)

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержни AO и OB на угол $\delta\varphi_{OA} = \delta\varphi_{OB} = \delta\varphi$ (рис. 30). Точки A, B и C получат возможные перемещения $\delta\bar{r}_A, \delta\bar{r}_B$ и $\delta\bar{r}_C$. Стержни BC и AC совершат возможные плоско-параллельные перемещения (вращательные перемещения $\delta\varphi_{AC}$ и $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точек P_{AC} и P_{BC}).

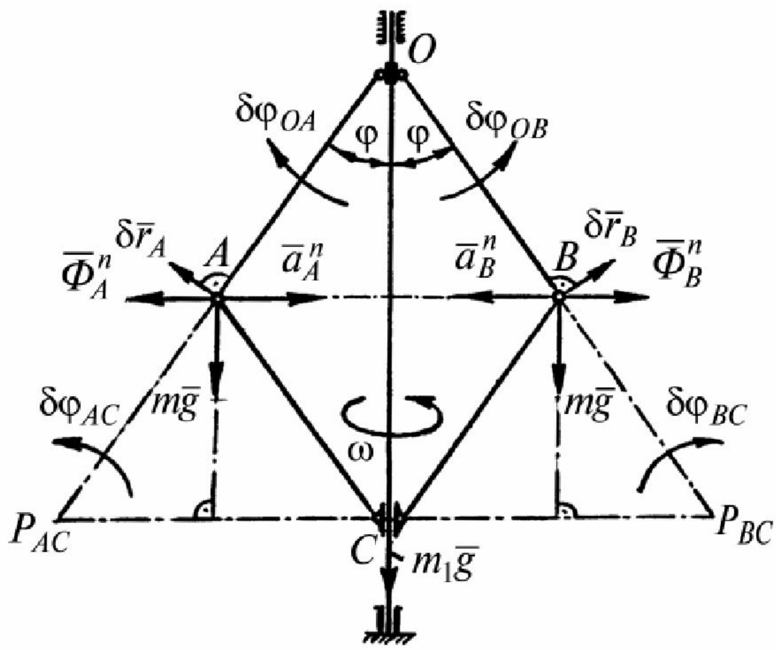

Рис. 30

Составим общее уравнение динамики в векторной форме

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k + \sum \bar{\Phi}_k \cdot \delta\bar{r}_k = 0;$$

или

$$\overline{mg} \cdot \delta\bar{r}_A + \bar{\Phi}_A^n \cdot \delta\bar{r}_A + \overline{mg} \cdot \delta\bar{r}_B + \bar{\Phi}_B^n \cdot \delta\bar{r}_B + \overline{m_1 g} \cdot \delta\bar{r}_C = 0. \qquad (5)$$

Из рис. 30 находим кинематические соотношения

$$
\begin{aligned}
&\delta s_A = \delta s_B = L \cdot \delta\varphi; \\
&\delta s_A = \left|\delta \bar{r}_A\right| = L \cdot \delta\varphi_{OA} = L \cdot \delta\varphi_{AC}; \qquad \delta\,\varphi_{OA} = \delta\varphi_{AC} = \delta\varphi; \\
&\delta s_B = \left|\delta \bar{r}_B\right| = L \cdot \delta\varphi_{OB} = L \cdot \delta\varphi_{BC}; \qquad \delta\,\varphi_{OB} = \delta\varphi_{BC} = \delta\varphi; \\
&\delta s_C = CP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = 2L \sin\varphi \cdot \delta\varphi.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Преобразуем (5) с учетом (6)

$$
\begin{aligned}
&mg \cdot \delta s_A \cos(90^\circ + \varphi) + \left(m\omega^2 L \sin\varphi\right)\delta s_A \cos\varphi + \\
&+ mg \cdot \delta s_B \cos(90^\circ + \varphi) + \left(m\omega^2 L \sin\varphi\right)\delta s_B \cos\varphi + \\
&+ m_1 g \cdot \delta s_C \cos 180^\circ = 0.
\end{aligned} \tag{5'}
$$

Из (5') с учетом (6) окончательно имеем

$$\cos\varphi = \frac{(m_1 + m)g}{m\omega^2 L}.$$

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

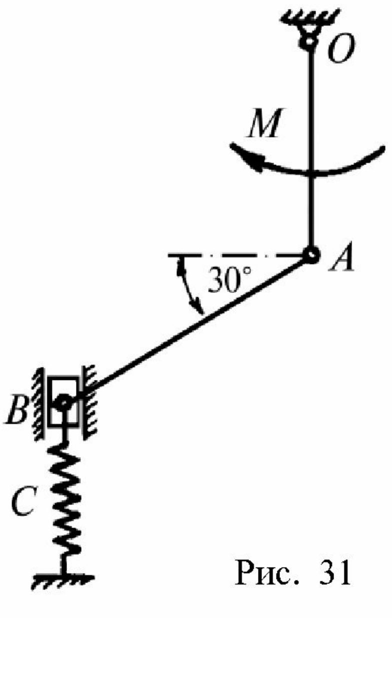

Рис. 31

Задача 1

Для механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, определить деформацию пружины в положении равновесия, если известны длина стержня $OA = L$, момент M пары, приложенной к стержню OA, и коэффициент жесткости пружины C (рис. 31).

Решение

Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений. Сообщим системе, имеющей одну степень свободы, возможное перемещение, повернув стержень OA на угол $\delta\varphi_{OA}$ (рис. 32). Точки A и B получают возможные перемещения $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_B$. Стержень AB совершит возможное плоскопараллельное перемещение (вращательное перемещение $\delta\varphi_{AB}$ вокруг точки P_{AB}). К стержню АО приложена пара сил с моментом M, а к точке B — сила упругости пружины $F_{упр}$.

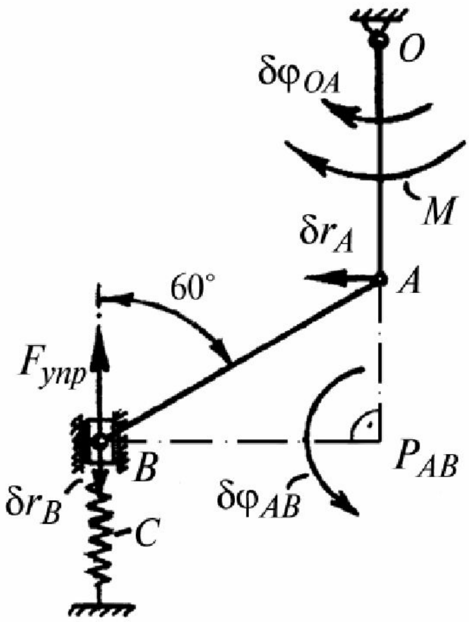

Рис. 32

Общее уравнение статики в данном случае имеет вид

$$M\delta\varphi_{OA} - F_{упр}\delta s_B = 0;$$
$$F_{упр} = c\lambda.$$

Деформация пружины

$$\lambda = \frac{M}{c}\cdot\frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_B} = \frac{M}{c}\cdot i.$$

Найдем передаточное отношение механизма

$$i = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_B} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{\delta s_A}\cdot\frac{\delta s_A}{\delta s_B} = \frac{\delta\varphi_{OA}}{L\cdot\delta\varphi_{OA}}\cdot\frac{AP_{AB}\cdot\delta\varphi_{AB}}{BP_{AB}\cdot\delta\varphi_{AB}} = \frac{1}{L}tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}L,$$

где $\delta s_A = |\delta\bar{r}_A| = L\cdot\delta\varphi_{OA} = AP_{AB}\cdot\delta\varphi_{AB}$;

$\delta s_B = |\delta\bar{r}_B| = BP_{AB}\cdot\delta\varphi_{AB}$.

Окончательно получаем

$$\lambda = \frac{M}{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

Задача 2

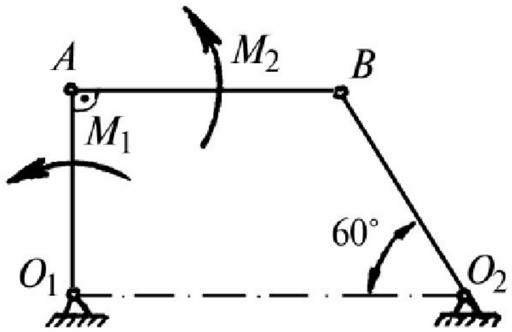

Рис. 33

Определить момент M_2 пары сил, приложенной к стержню AB, если даны момент пары M_1, приложенной к стержню O_1A, и длины стержней $O_1A = L_1$ и $AB = L_2$ (рис. 33). Весом стержней пренебречь.

Решение

Применим для решения задачи принцип возможных перемещений. Система имеет одну степень свободы. Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень O_1A на угол $\delta\varphi_{O_1A}$ (рис. 34). Точки A и B получат возможные перемещения $\delta\bar{r}_A$ и $\delta\bar{r}_B$. Стержень BO_2 совершит возможное вращательное перемещение $\delta\varphi_{B_2O}$, а стержень AB — возможное плоскопараллельное перемещение (вращательное перемещение $\delta\varphi_{AB}$ вокруг точки P_{AB}).

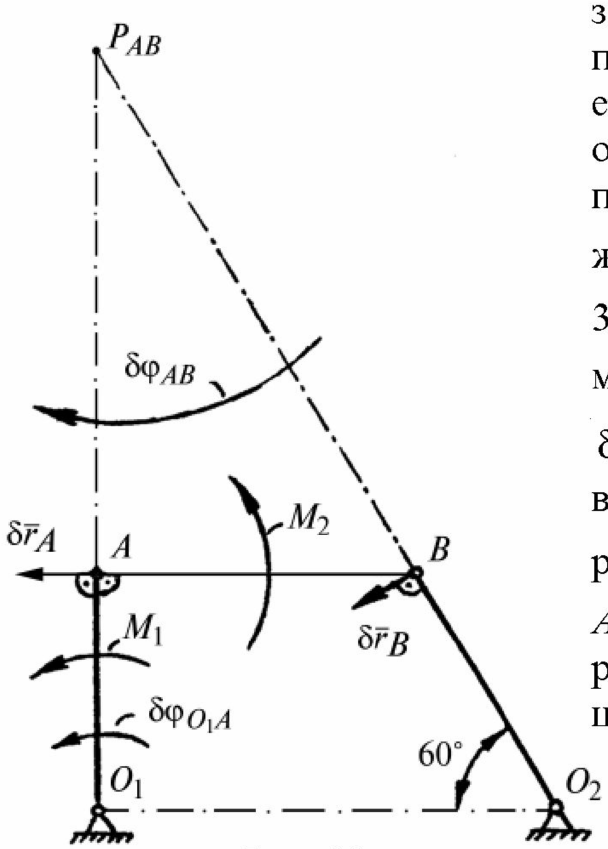

Рис. 34

К стержням AO_1 и AB приложены пары сил с моментами M_1 и M_2. На основании общего уравнения статики имеем

$$M_1\delta\varphi_{O_1A} - M_2\delta\varphi_{AB} = 0,$$

откуда

$$M_2 = M_1 \cdot \frac{\delta\varphi_{O_1A}}{\delta\varphi_{AB}} = M_1 \cdot i.$$

Вычислим передаточное отношение механизма

$$i = \frac{\delta\varphi_{O_1A}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{O_1A}}{\delta s_A} \cdot \frac{\delta s_A}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta\varphi_{O_1A}}{L_1 \cdot \delta\varphi_{O_1A}} \cdot \frac{AP_{AB} \cdot \delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{1}{L_1} L_2 tg60^\circ = \frac{\sqrt{3}L_2}{L_1},$$

где $\delta s_A = \left|\delta\bar{r}_A\right| = L_1 \cdot \delta\varphi_{O_1A} = AP_{AB} \cdot \delta\varphi_{AB}$;

$AP_{AB} = L_2 \mathrm{tg}60^\circ.$

Окончательно имеем

$$M_2 = M_1 \frac{L_2}{L_1}\sqrt{3}.$$

Задача 3

Для составной конструкции, изображенной на рис. 35, определить реактивный момент в заделке, если даны интенсивность распределенной нагрузки q, угол $\alpha = 30^\circ$, длины стержней $AB = L_1$ и $BC = L_2$.

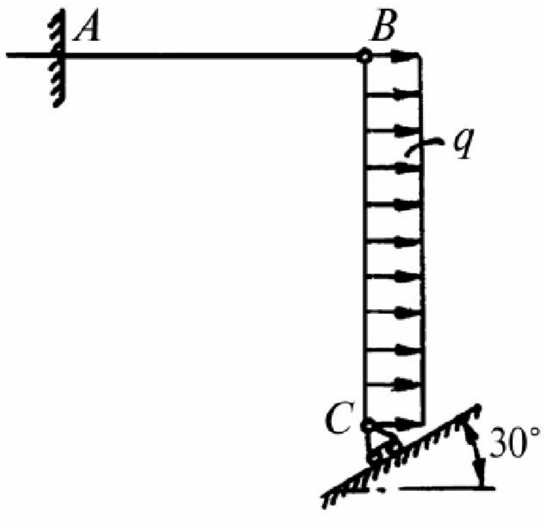

Рис. 35

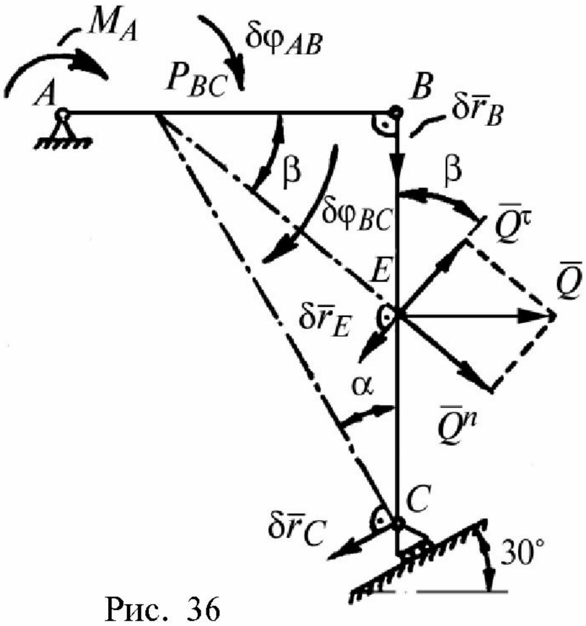

Рис. 36

Решение

Решим задачу с помощью принципа возможных перемещений.

Заменим заделку в точке A шарнирной неподвижной опорой, компенсировав отброшенную связь ее реакцией — реактивной парой с неизвестным моментом M_A (рис. 36).

Система имеет теперь одну степень свободы. Заменим равномерно распределенную нагрузку на участке BC равнодействующей силой Q, приложенной к точке E, причем

$$Q = qL_2; \quad BE = EC = \frac{1}{2}L_2.$$

Сообщим системе возможное перемещение, повернув стержень AB на угол $\delta\varphi_{AB}$. Точки B, C и E получат возможные перемещения $\delta\bar{r}_B, \delta\bar{r}_C$ и $\delta\bar{r}_E$. Стержень BC совершит возможное плоскопараллельное перемещение (вращательное перемещение $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точки P_{BC}).

Составим общее уравнение статики

$$M_A\delta\varphi_{AB} - Q^\tau\delta s_E = 0; \qquad Q^\tau = Q\sin\beta.$$

где $\delta s_E = \left|\delta\bar{r}_E\right| = EP_{BC}\cdot\delta\varphi_{BC}$.

Момент в заделке

$$M_A = Q\sin\beta\frac{\delta s_E}{\delta\varphi_{AB}} = (Q\sin\beta)\cdot i.$$

Передаточное отношение механизма

$$i = \frac{\delta s_E}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{\delta s_E}{\delta s_B} \cdot \frac{\delta s_B}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{EP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC}}{BP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC}} \cdot \frac{L_1 \cdot \delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{AB}} = \frac{1}{\cos\beta} L_1,$$

где $\delta s_B = \left|\delta\bar{r}_B\right| = BP_{BC} \cdot \delta\varphi_{BC} = L_1 \cdot \delta\varphi_{AB}$.

Из рис. 36 устанавливаем соотношение

$$BP_{BC} = \frac{1}{2} L_2 \cdot \mathrm{ctg}\beta = L_2 \mathrm{tg}\alpha; \qquad tg\beta = \frac{1}{2\mathrm{tg}\alpha}.$$

Окончательно получаем

$$M_A = (Q\sin\beta)\cdot i = Q\sin\beta \frac{1}{\cos\beta} L_1 = qL_2L_1\mathrm{tg}\beta = \frac{q}{2} L_1L_2 \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Задача 4

Определить вертикальную составляющую реакции шарнира C (рис. 37).

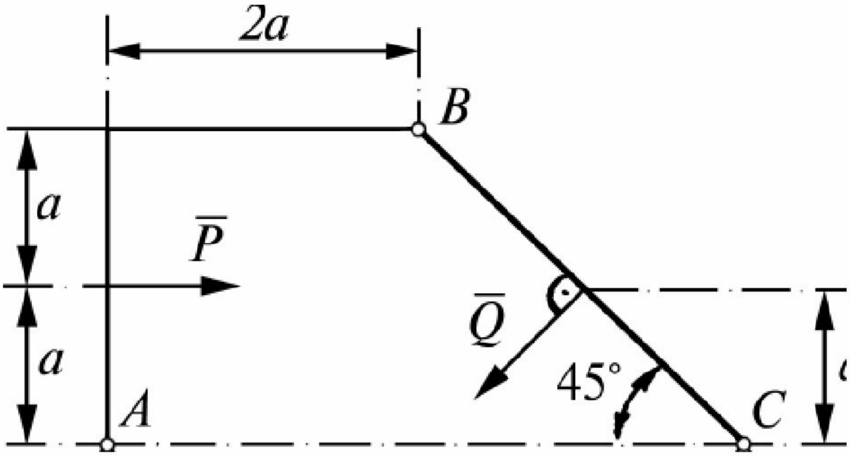

Рис. 37

Решение

Используем для решения задачи принцип возможных перемещений.

Заменим шарнир в точке C ползуном, который может перемещаться в вертикальном направлении, а отброшенную связь компенсируем вертикальной реакцией Y_C (рис. 38).

Система приобретает теперь одну степень свободы.

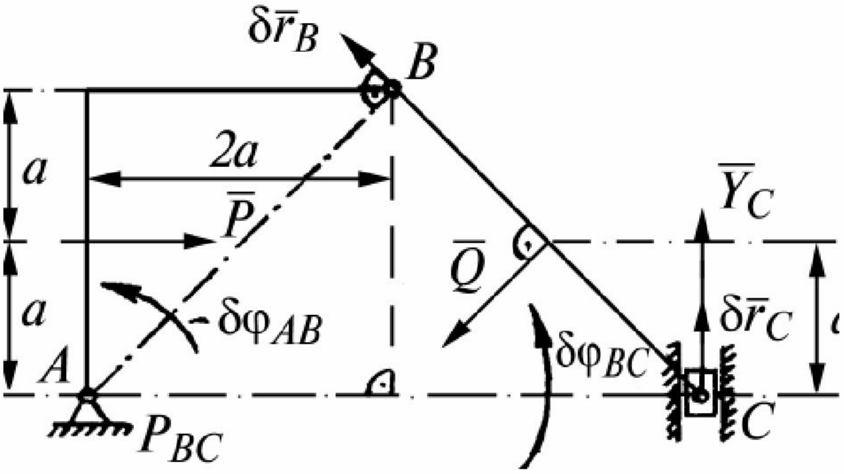

Рис. 38

Сообщим системе возможное перемещение, повернув уголок AB на угол $\delta\varphi_{AB}$. Точки B и C получат возможные перемещения $\delta\bar{r}_B$ и $\delta\bar{r}_C$. Стержень BC совершит возможное плоскопараллельное перемещение (вращательное перемещение $\delta\varphi_{BC}$ вокруг точки P_{BC}, совпадающей с точкой A). К конструкции приложены силы $\bar{P}, \bar{Q}$ и $\bar{Y}_C$.

Общее уравнение статики имеет вид

$$(Y_C \cdot 4a)\delta\varphi_{BC} - (P \cdot a)\delta\varphi_{AB} - (Q \cdot \sqrt{2}a)\delta\varphi_{BC} = 0;$$

откуда

$$Y_C = \frac{1}{4} P \frac{\delta\varphi_{AB}}{\delta\varphi_{BC}} + Q\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С помощью рис. 38 устанавливаем зависимость

$$\delta s_B = |\delta \bar{r}_B| = AB \cdot \delta\varphi_{AB} = AB \cdot \delta\varphi_{BC}; \quad \delta\varphi_{AB} = \delta\varphi_{BC}.$$

Величина вертикальной составляющей реакции шарнира С

$$Y_C = \frac{1}{4}P + \frac{\sqrt{2}}{2}Q.$$

Задача 5

Используя принцип возможных перемещений, определить реакцию опоры *Д* составной балки от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q. Размеры балки указаны на рис. 39.

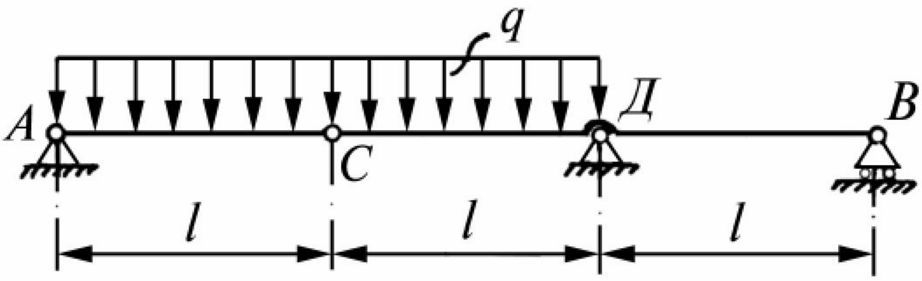

Рис. 39

Решение

Заменим шарнирную неподвижную опору *Д* ползуном, который может перемещаться в вертикальном направлении, а отброшенную связь компенсируем вертикальной реакцией $\bar{Y}_Д$ (рис. 40). Система получила одну степень свободы.

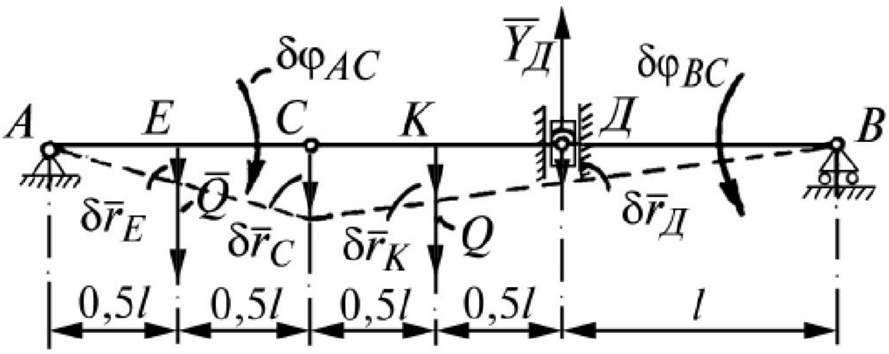

Рис. 40

Заменим равномерно распределенные нагрузки на участках AC и $CД$ равнодействующими силами Q_1 и Q_2, приложенными к точкам E и K, причем

$$Q_1 = Q_2 = Q = qL.$$

Сообщим системе возможное перемещение, повернув балку AC на угол $\delta\varphi_{AC}$. Точки E, K, $Д$ и C получат возможные перемещения $\delta\bar{r}_E, \delta\bar{r}_K, \delta\bar{r}_Д$ и $\delta\bar{r}_C$. Балка BC совершит возможное вращательное перемещение $\delta\varphi_{BC}$.

Воспользуемся общим уравнением статики

$$\overline{Q_1} \cdot \delta\bar{r}_E + \overline{Q_2} \cdot \delta\bar{r}_K + \overline{Y_Д} \cdot \delta\bar{r}_C = 0.$$

Выполним преобразования

$$Q_1 \delta s_E \cos 0° + Q_2 \delta s_K \cos 0° + Y_Д \delta s_Д \cos 180° = 0,$$

откуда

$$Y_Д = Q_1 \frac{\delta s_E}{\delta s_Д} + Q_2 \frac{\delta s_K}{\delta s_Д}.$$

Определим соотношения возможных перемещений

$$\frac{\delta s_E}{\delta s_Д} = \frac{\delta s_E}{\delta s_C} \cdot \frac{\delta s_C}{\delta s_Д} = \frac{\frac{1}{2} L \cdot \delta\varphi_{AC}}{L \cdot \delta\varphi_{AC}} \cdot \frac{2L \cdot \delta\varphi_{BC}}{L \cdot \delta\varphi_{BC}} = 1;$$

$$\frac{\delta s_K}{\delta s_Д} = \frac{\frac{3}{2} L \cdot \delta\varphi_{BC}}{L \cdot \delta\varphi_{BC}} = \frac{3}{2},$$

где $\delta s_E = \left|\delta\bar{r}_E\right| = \frac{1}{2} L \cdot \delta\varphi_{AC};$

$\delta s_C = \left|\delta\bar{r}_C\right| = L \cdot \delta\varphi_{AC} = 2L \cdot \delta\varphi_{BC};$

$\delta s_Д = \left|\delta\bar{r}_Д\right| = L \cdot \delta\varphi_{BC};$

$\delta s_K = \left|\delta\bar{r}_K\right| = \frac{3}{2} L \cdot \delta\varphi_{BC}.$

В результате получаем

$$Y_Д = Q_1 \frac{\delta s_E}{\delta s_Д} + Q_2 \frac{\delta s_K}{\delta s_Д} = qL + \frac{3}{2}qL = \frac{5}{2}qL.$$

8. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА 2-го РОДА

Задача 1

Барабан массы m в виде сплошного однородного цилиндра радиуса R может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O, совпадающей с его геометрической осью. На барабан намотана гибкая нерастяжимая нить, к концу которой прикреплен груз массы M (рис. 41). С каким ускорением опускается груз?

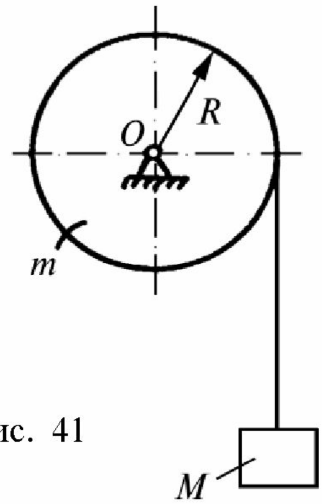

Рис. 41

Решение

Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты примем перемещение груза (рис. 42)

$$q = s.$$

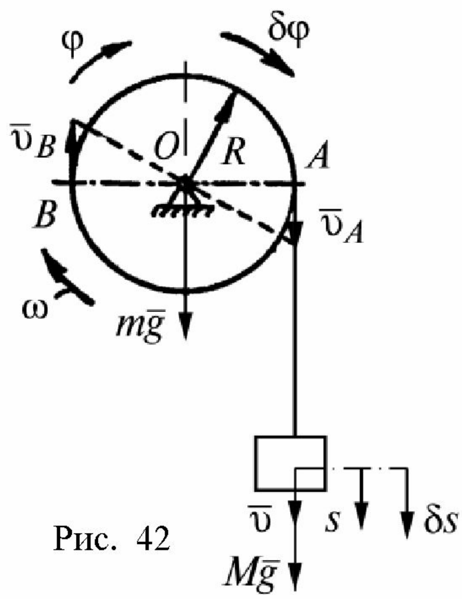

Рис. 42

Тогда обобщенная скорость и обобщенное ускорение

$$\dot{q} = \dot{s} = v;$$

$$\ddot{q} = \ddot{s} = a.$$

Вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}M \cdot v^2 + \frac{1}{2}J_o \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}M \cdot \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{s}^2,$$

где $J_o = \dfrac{mR^2}{2}$ — собственный момент инерции барабана;

$\omega = \dot{\varphi} = \dfrac{v_A}{R} = \dfrac{v}{R} = \dfrac{\dot{s}}{R}$ — угловая скорость барабана.

Определим обобщенную силу. Дадим обобщенной координате приращение $\delta q = \delta s$ и вычислим сумму возможных работ всех активных сил

$$\sum \delta A_k^{акт} = Mg\delta s = Q^{акт} \cdot \delta q.$$

Обобщенная сила

$$Q^{акт} = Mg.$$

Составим уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_i^{акт}.$$

Выполним математические операции, предусмотренные этим уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_i^{акт}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \left(M + \frac{1}{2}m\right) \cdot \ddot{s};$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \left(M + \frac{1}{2} m \right) \cdot \dot{s};$$

откуда

$$\ddot{s} = a = \frac{M}{M + \frac{1}{2} m} g.$$

Задача 2

К зубчатой рейке массой m приложена постоянная сила P. Рейка, приводит в движение зубчатые колеса 1 и 2 массами m_1 и m_2, радиусами R_1 и R_2 (рис. 21). К колесу 2 приложена пара сил сопротивления с постоянным моментом M_C. Определить угловое ускорение ε_2 колеса 2.

Решение

Система обладает одной степенью свободы. Примем в качестве обобщенной координаты угол поворота шкива 2 (рис. 43)

$$q = \varphi_2.$$

Тогда обобщенная скорость и обобщенное ускорение

$$\dot{q} = \dot{\varphi}_2 = \omega_2;$$
$$\ddot{q} = \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2.$$

Используя кинематические зависимости

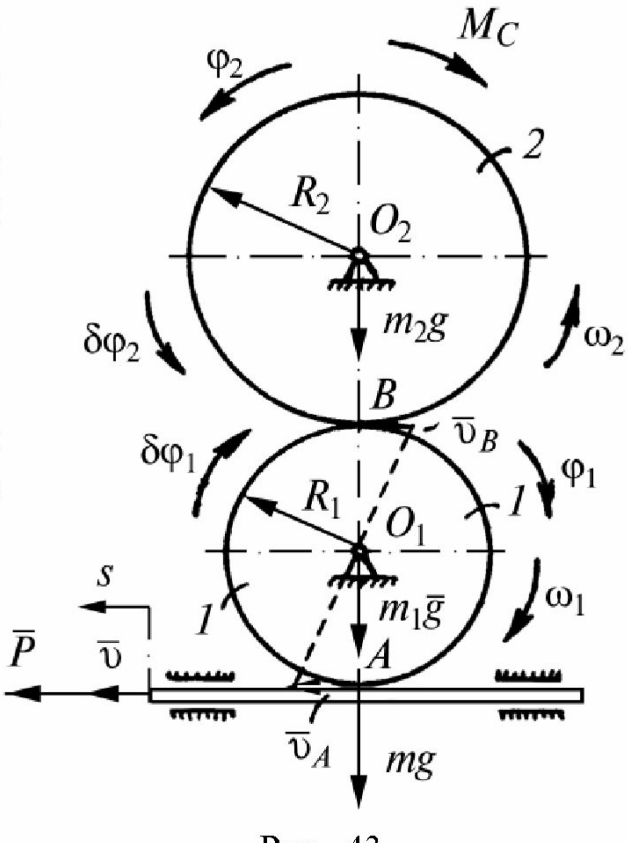

Рис. 43

$$v_B = \omega_2 R_2 = v_A = \omega_1 R_1 = v,$$

вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_{O1} \omega_1{}^2 + \frac{1}{2} J_{O2} \omega_2{}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (\omega_2 R_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 R_1{}^2}{2} \cdot \left(\omega_2 \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 R_2{}^2}{2} \cdot \omega_2{}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cdot R_2{}^2 \cdot \omega_2{}^2 = \frac{1}{2} J_{пр} \cdot \omega_2{}^2,$$

где $J_{пр} = \left(m + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \cdot R_2{}^2$ — приведенный к оси вращения 2-го колеса момент инерции движущихся частей;

$J_{O1} = \dfrac{m_1 R_1{}^2}{2}$ и $J_{O2} = \dfrac{m_2 R_2{}^2}{2}$ — собственные моменты инерции 1-го и 2-го колеса соответственно.

Найдем обобщенную силу. Дадим обобщенной координате q приращение и вычислим сумму возможных работ всех активных сил

$$\sum \delta A_k^{акт} = P \delta s - M_C \delta \varphi_2 = (P R_2 - M_C) \delta \varphi_2 = Q^{акт} \delta q,$$

$$s_B = \varphi_2 R_2 = s_A = \varphi_1 R_1 = s; \quad \delta s = R_2 \delta \varphi_2.$$

Обобщенная сила

$$Q^{акт} = P R_2 - M_C.$$

Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода и выполним математические операции, предусмотренные этим уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=Q^{акт}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}=\frac{\partial T}{\partial \omega_2}=J_{пр}\omega_2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right)=J_{пр}\cdot\varepsilon_2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2}=0.$$

В результате получаем

$$J_{пр}\varepsilon_2=P\cdot R_2-M_C,$$

откуда

$$\varepsilon_2=\frac{P\cdot R_2-M_C}{J_{пр}}=\frac{P\cdot R_2-M_C}{\left(m+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}m_2\right)\cdot R_2{}^2}.$$

Задача 3

Двухосная тележка скатывается по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 44). Колеса радиуса R катятся без скольжения. Масса тележки без колесных пар равна M, масса каждой колесной пары m, коэффициент трения качения λ. Колесные пары выполнены в виде сплошных однородных дисков. Определить ускорение тележки.

Решение

Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты перемещение тележки (рис. 45)

$$q=s.$$

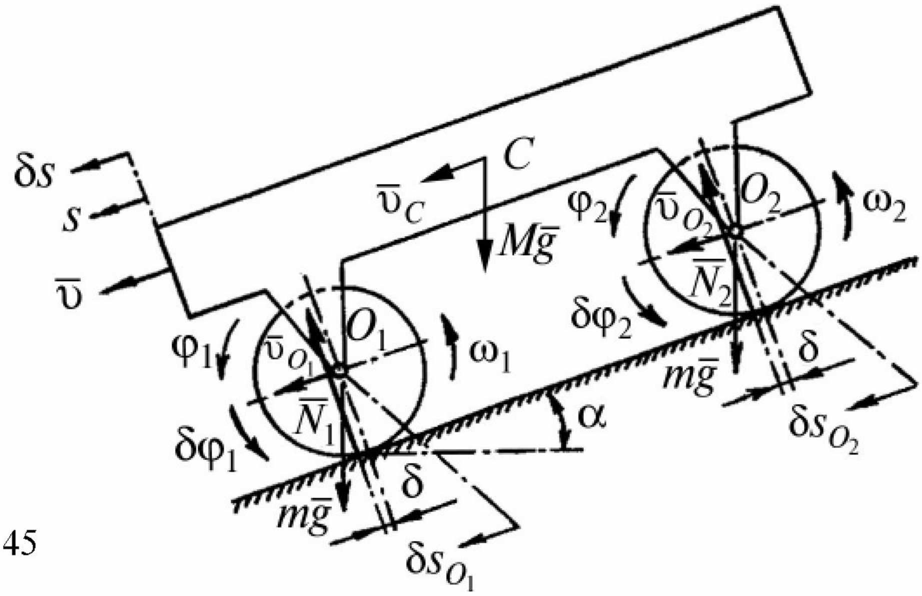

Рис. 45

Тогда обобщенная скорость и обобщенное ускорение будут иметь вид

$$\dot{q} = \dot{s} = v;$$
$$\ddot{q} = \ddot{s} = a.$$

Используя кинематические зависимости

$$v_C = v_{O1} = v_{O2} = v = \dot{s},$$
$$\omega_1 = \frac{v_{O1}}{R} = \frac{\dot{s}}{R} = \omega_2 = \frac{v_{O2}}{R},$$

вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_{O1}{}^2 + \frac{1}{2}J_{O1}\omega_1{}^2 + \frac{1}{2}mv_{O2}{}^2 + \frac{1}{2}J_{O2}\omega_2{}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + 2\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\dot{s}^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}(M+3m)\dot{s}^2.$$

где $J_{O1} = \dfrac{m_1 R_1{}^2}{2}$ и $J_{O2} = \dfrac{m_2 R_2{}^2}{2}$ — собственные моменты инерции 1-го и 2-го колеса соответственно.

Найдем обобщенную силу. Дадим обобщенной координате q приращение $\delta q = \delta s$ и вычислим сумму возможных работ всех активных сил

$$\sum \delta A_k^{акт} = Mg\sin\alpha\cdot\delta s + mg\sin\alpha\cdot\delta s_{O1} + mg\sin\alpha\cdot\delta s_{O2} - (N_1\cdot\lambda)\cdot\delta\varphi_1 -$$

$$-(N_2\cdot\lambda)\cdot\delta\varphi_2 = \left[(M+2m)\sin\alpha - \frac{\lambda}{R}(M+2m)\cos\alpha\right]g\cdot\delta s = Q^{акт}\cdot\delta q,$$

$$N_1 + N_2 = (M+2m)g\cos\alpha;$$

$$\delta s_{O1} = \delta s_{O2} = \delta s;$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_{O1}}{R} = \frac{\delta s}{R} = \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_{O2}}{R}.$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q^{акт} = (M+2m)\cdot\left(\sin\alpha - \frac{\lambda}{R}\cos\alpha\right)\cdot g.$$

Составим уравнение Лагранжа 2-го рода и выполним математические операции, предусмотренные этим уравнением

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q^{акт}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot s} = (M+3m)\cdot\dot s;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s}\right) = (M+3m)\cdot\ddot s;$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Окончательно получаем

$$(M+2m)\cdot\ddot{s}=(M+2m)\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\lambda}{R}\cos\alpha\right)\cdot g,$$

откуда

$$\ddot{s}=a=\frac{(M+2m)\cdot\left(\sin\alpha-\frac{\lambda}{R}\cos\alpha\right)\cdot g}{M+3m}.$$

Задача 4

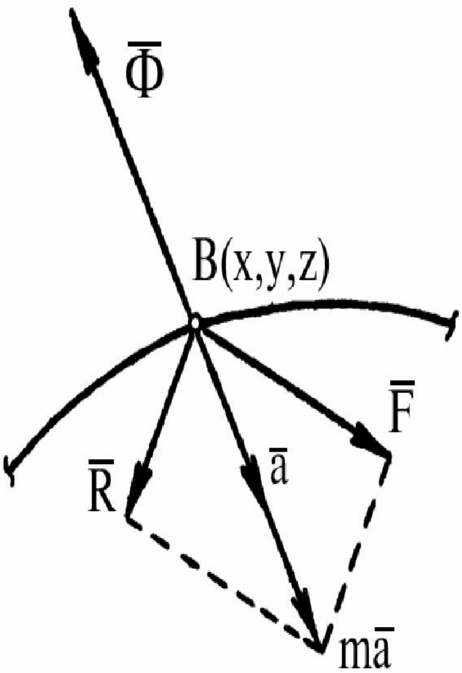

Рис. 46

Определить круговую частоту k свободных колебаний системы, а также кинематические уравнения ее движения (рис. 46). Начальные значения обобщенных координат S и φ равны нулю. Нерастяжимую нить и пружину жесткостью $C = 1$ кН/м считать невесомыми, блок 2 — сплошным однородным, трением в оси O пренебречь. Начальная деформация пружины $\lambda_0=\dfrac{mg}{C}$; $R = 0{,}5$ м; $m_1 = m_2 = m_3 = m = 10$ кг. При $t = 0$ $\dot{S}_0 = 1$ м/с и $\dot{\varphi}_0 = 0$.

Решение

Система имеет две степени свободы. Обобщенные координаты и обобщенные скорости (рис. 47)

$$q_1=S; \qquad q_2=\varphi;$$

$$\dot{q}_1=\dot{S}=v_3; \qquad \dot{q}_2=\dot{\varphi}=\omega.$$

Используя кинематические зависимости

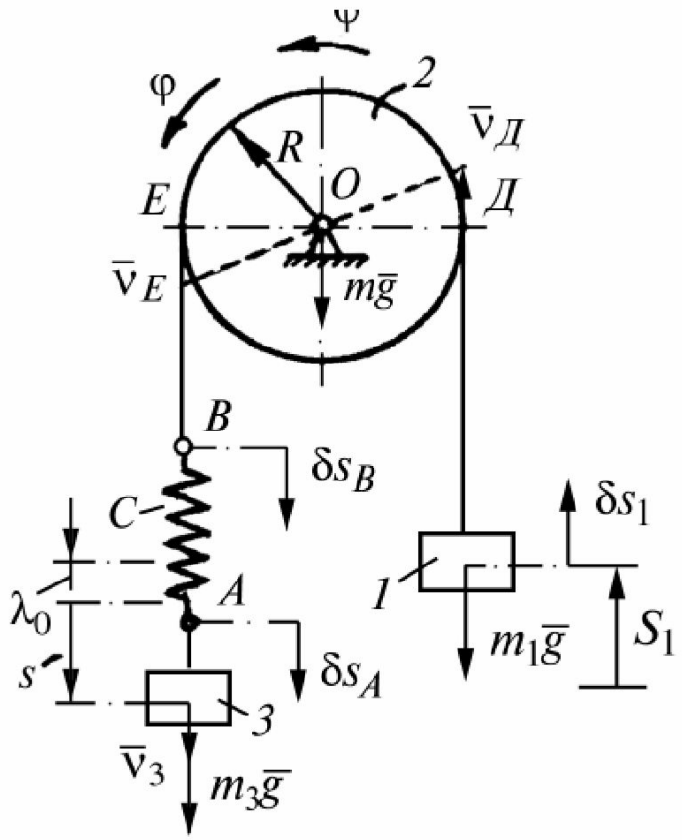

Рис. 47

$$v_Д = v_1 = v_E = R\omega = R\dot{\varphi},$$

вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}m_3 v_3{}^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{S}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\cdot(R\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}m\cdot\dot{S}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2,$$

где $J_0 = \dfrac{mR^2}{2}$ — момент инерции блока 2 относительно оси O.

Найдем обобщенные силы. Для этого сообщим системе возможные перемещения и вычислим сумму возможных работ всех активных сил

$$\sum \delta A_k^{акт} = \delta A(m_3\bar{g}) + \delta A(\bar{F}) + \delta A(m_1\bar{g}).$$

Возможная работа силы упругости пружины

$$\delta A(\overline{F}) = F \cdot \delta\lambda = -C\lambda \cdot \delta\lambda,$$

где λ и $\delta\lambda$ — деформация и возможная деформация пружины, причем

$$\lambda = \lambda_0 + S_A - S_B = \lambda_0 + S - R\varphi;$$
$$\delta\lambda = \delta S - R\delta\varphi; \qquad S_A = S; \qquad S_B = S_E = R\varphi.$$

Сила упругости пружины

$$F = C\lambda.$$

Учитывая, что

$$\delta S_1 = \delta S_Д = \delta S_E = R\delta\varphi,$$

получим

$$\sum \delta A_k^{акт} = m_3 g\delta S - m_1 g\delta S_1 - F\delta\lambda = mg\delta S - mgR\delta\varphi -$$
$$- C(\lambda_0 + S - R \cdot \varphi)(\delta S - R \cdot \delta\varphi) = Q_{(S)}\delta S + Q_{(\varphi)}\delta\varphi.$$

Следовательно, обобщенные силы при выбранных обобщенных координатах (учтем, что $C \cdot \lambda_0 = mg$) имеют вид

$$Q_{(S)} = mg - CS + CR\varphi - C\lambda_0 = -C(S - R\varphi);$$
$$Q_{(\varphi)} = CRS - CR^2\varphi + C\lambda_0 R - mgR = CR(S - R\varphi).$$

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_{(S)};$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{(\varphi)}.$$

Выполним математические операции, предусмотренные этими уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial \dot S} = m\dot S; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot S}\right) = m\ddot S; \qquad \frac{\partial T}{\partial S} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2}mR^2\dot\varphi; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{3}{2}mR^2\ddot\varphi; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$m\ddot S = -C(S - R\varphi); \qquad (1)$$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot\varphi = CR(S - R\varphi) \qquad (2)$$

или

$$\ddot S = -\frac{C}{m}(S - R\varphi); \qquad (1)$$

$$R\ddot\varphi = \frac{2C}{3m}(S - R\varphi). \qquad (2')$$

Вычитая из (2') (1'), получим

$$(\ddot S - R\ddot\varphi) + \left(\frac{C}{m} + \frac{2C}{3m}\right)(S - R\varphi) = 0$$

или

$$\ddot\xi + k^2\xi = 0, \qquad (3)$$

где $\xi = S - R\varphi.$

Частота свободных колебаний системы

$$k = \sqrt{\left(\frac{C}{m} + \frac{2C}{3m}\right)} = \sqrt{\frac{5C}{3m}} \quad \left[\frac{1}{\text{c}}\right].$$

Решением дифференциального уравнения (3) является функция

$$\xi = C_1 \cdot \cos(kt) + C_2 \cdot \sin(kt); \qquad (4)$$

$$\dot{\xi} = -C_1 \cdot k \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot k \cdot \cos(kt). \qquad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим с помощью начальных условий движения системы

при $t = 0$;

$$\xi_0 = S_0 - R\varphi_0 = 0;$$

$$\dot{\xi}_0 = \dot{S}_0 - R\dot{\varphi}_0 = \dot{S}_0;$$

$$C_1 = \xi_0 = 0 \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\dot{\xi}_0}{k} = \frac{\dot{S}_0}{k}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\xi = C_1 \cdot \cos(kt) + C_2 \cdot \sin(k \cdot t) = \frac{\dot{S}_0}{K} \cdot \sin(kt); \qquad (4')$$

Последовательно интегрируя (1), получим

$$\ddot{S} = -\frac{C}{m}(S - R \cdot \varphi) = -\frac{C}{m}\xi = -\frac{C}{m} \cdot \frac{\dot{S}_0}{K} \cdot \sin(kt);$$

$$\dot{S} = \frac{C}{m} \cdot \frac{\dot{S}_0}{k^2} \cdot \cos(kt) + D_1 = \frac{3}{5}\dot{S}_0 \cdot \cos(kt) + D_1; \qquad (6)$$

$$S = \frac{3}{5} \cdot \frac{\dot{S}_0}{k} \cdot \sin(kt) + D_1 t + D_2. \qquad (7)$$

При $t = 0$; $S = S_0 = 0$; $\dot{S} = \dot{S}_0$.

Тогда из(6) и (7) получаем

$$\begin{cases} \dot{S}_0 = \frac{3}{5}\dot{S}_0 + D_1; \\ 0 = D_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} D_1 = \frac{2}{5}\dot{S}_0; \\ D_2 = 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к выражению (7), имеем

$$S = \frac{3}{5} \cdot \frac{\dot{S}_0}{k} \cdot \sin(kt) + \frac{2}{5}\dot{S}_0 t = \frac{1}{5}\dot{S}_0 \cdot \left(\frac{3}{k} \cdot \sin(kt) + 2 \cdot t \right).$$

Интегрируя (2’), получим

$$\ddot{\varphi} = \frac{2C}{3mR}(S - R\varphi) = -\frac{2C}{3mR}\xi = \frac{2C}{3mR} \cdot \frac{\dot{S}_0}{k} \cdot \sin(kt)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{2C}{3mR} \cdot \frac{\dot{S}_0}{k^2} \cdot \cos(kt) + B_1 = -\frac{2\dot{S}_0}{5R} \cdot \cos(kt) + B_1; \qquad (8)$$

$$\varphi = -\frac{2}{5} \cdot \frac{\dot{S}_0}{R \cdot k} \cdot \sin(kt) + B_1 \cdot t + B_2. \qquad (9)$$

При $t = 0$; $\varphi = \varphi_0 = 0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$.
Тогда из (8) и (9) получаем

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{2\dot{S}_0}{5R} + B_1; \\ 0 = B_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} B_1 = \dfrac{2\dot{S}_0}{5R}; \\ B_2 = 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к выражению (9), получаем окончательно

$$\varphi = -\frac{2}{5} \cdot \frac{\dot{S}_0}{R \cdot k} \cdot \sin(kt) + \frac{2\dot{S}_0}{5R} \cdot t = \frac{2\dot{S}_0}{5R}\left(-\frac{1}{k} \cdot \sin(kt) + t \right).$$

Задача 5

Определить круговую частоту k свободных колебаний системы, а также кинематические уравнения ее движения при малых отклонениях стержня 2 от вертикали (рис.48).

Начальные значения обоб-щенных координат s и φ равны нулю. Каток считать сплошным однородным цилиндром, катящимся по горизонтальной плоскости без скольжения. Трением в шарнире A пренебречь, стержень 2 — тонкий и однородный. Массы катка и стержня $m_1 = m_2 = m$; $AB = = L = 0{,}4$ м. При $t = 0$ $\dot{s}_0 = 0$ и $\dot{\varphi}_0 = 0{,}1$ с$^{-1}$.

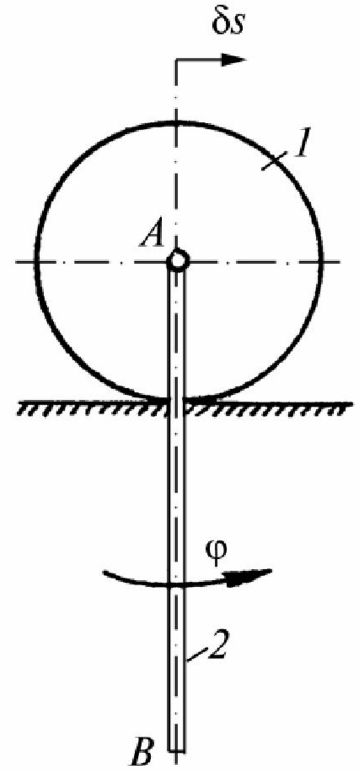

Рис. 48

Решение

Система обладает двумя степенями свободы. Обобщенные координаты и обобщенные скорости (рис. 49)

$$q_1 = s; \qquad q_2 = \varphi;$$

$$\dot{q}_1 = \dot{s} = v_A; \qquad \dot{q}_2 = \dot{\varphi} = \omega_2.$$

Используя кинематические зависимости (рис. 49)

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R} = \frac{\dot{s}}{R};$$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_C^{пер} + \bar{v}_C^{отн};$$

$$v_C^{пер} = v_A = \dot{s};$$

$$v_C^{отн} = \frac{L}{2}\omega_2 = \frac{L}{2}\dot{\varphi};$$

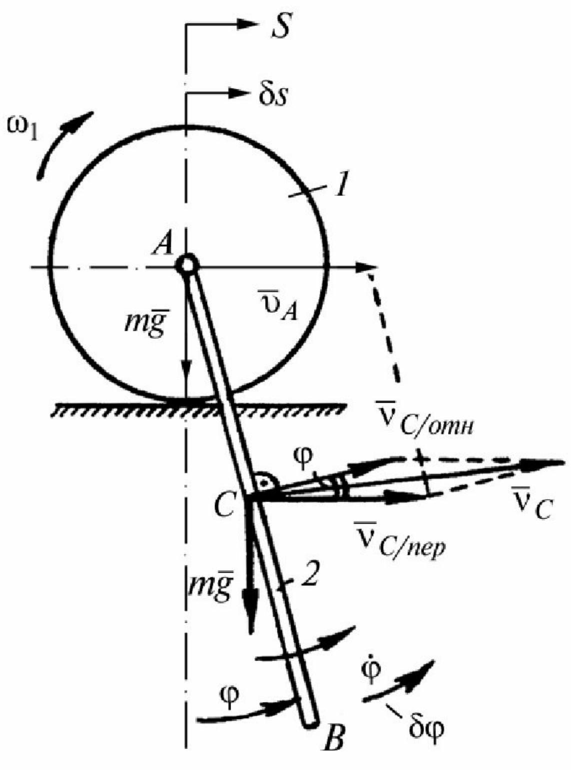

Рис. 49

$$v_C{}^2 = \left(v_C^{пер}\right)^2 + \left(v_C^{отн}\right)^2 + 2v_C^{пер}v_C^{отн}\cos\varphi =$$
$$= \dot{s}^2 + \frac{1}{4}L^2\dot{\varphi}^2 + L\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_1{}^2 + \frac{1}{2}mv_C{}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_2{}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\dot{s}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\left\{\dot{s}^2 + \frac{1}{4}(L\dot{\varphi})^2 + L\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{mL^2}{12}\dot{\varphi}^2 \approx \frac{5}{4}m\dot{s}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mL\dot{s}\dot{\varphi},$$

где $J_A = \dfrac{mR^2}{2}$ — собственный момент инерции катка;

$J_C = \dfrac{mL^2}{12}$ — собственный момент инерции стержня 2;

$\cos\varphi \approx 1$ (φ — малый угол).

Найдем обобщенные силы системы. Для этого сообщим системе поочередно возможные перемещения, оставляя только одну степень свободы, и вычислим сумму возможных работ всех активных сил.

Пусть сначала $\delta q_1 = \delta s \neq 0$ и $\delta q_2 = \delta\varphi = 0$ (стержень *2* неподвижен).

Тогда

$$\sum \delta A_{k(s)}^{акт} = Q_s\delta s = 0; \qquad Q_s = 0.$$

Пусть теперь $\delta q_1 = \delta s = 0$, а $\delta q_2 = \delta\varphi \neq 0$ (каток *1* неподвижен). Тогда

$$\sum \delta A_{k(\varphi)}^{акт} = Q_\varphi \delta\varphi = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi \approx -mg\frac{L}{2}\varphi,$$

где φ — малый угол).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\sum \delta A_{k(\varphi)}^{акт} = Q_\varphi \delta\varphi = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = -mg\frac{L}{2}\sin\varphi \approx -mg\frac{L}{2}\varphi.$$

Выполним математические операции, предусмотренные этими уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}} = \frac{5}{2}m\dot{s} + \frac{1}{2}mL\dot{\varphi}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}}\right) = \frac{5}{2}m\ddot{s} + \frac{1}{2}mL\ddot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}mL\dot{s}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mL\ddot{s};$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{5}{2}m\ddot{s} + \frac{1}{2}mL\ddot{\varphi} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}mL\ddot{s} = -\frac{1}{2}mgL\varphi. \tag{2}$$

или

$$5\ddot{s}+L\ddot{\varphi}=0; \qquad (1')$$

$$3\ddot{s}+2L\ddot{\varphi}=-3g\varphi. \qquad (2')$$

Исключив из уравнений (2') и (1') неизвестное $\ddot{s}$, получим

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0, \qquad (3)$$

где $k=\sqrt{\dfrac{15g}{7L}}$ — частота свободных колебаний системы.

Решение дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$\varphi=C_1\cos(kt)+C_2\sin(kt); \qquad (4)$$

$$\dot{\varphi}=-C_1k\sin(kt)+C_2k\cos(kt). \qquad (5)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим с помощью начальных условий движения системы

При $t = 0$; $\varphi_0=0$;

$\dot{\varphi}_0=0.1\,\text{с}^{-1}$.

Подставив начальные значения в (4) и (5), получим

$$C_1=\varphi_0=0 \;\text{ и }\; C_2=\frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\varphi=\frac{\dot{\varphi}_0}{к}\sin(kt); \qquad (4')$$

Из (1) находим, что

$$\ddot{s}=-\frac{L}{5}\ddot{\varphi}=\frac{L}{5}\dot{\varphi}_0k\sin(kt); \qquad (6)$$

Интегрируя (6), получим

$$\dot{s} = -\frac{L}{5}\dot{\varphi} = -\frac{L}{5}\dot{\varphi}_0 \cos(kt) + C_3; \tag{7}$$

$$s = -\frac{L}{5}\varphi = -\frac{L}{5}\frac{\dot{\varphi}_0}{k} \cdot \sin(kt) + C_3 t + C_4. \tag{8}$$

При $t = 0$; $s_0 = 0$; $\dot{s}_0 = 0$.

Тогда из (7) и (8) имеем

$$\begin{cases} 0 = -\frac{L}{5}\dot{\varphi}_0 + C_3; \\ 0 = C_4. \end{cases}$$

Возвращаясь к выражению (8), находим

$$s = -\frac{L}{5}\frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin(kt) + \frac{L}{5}\dot{\varphi}_0 t.$$

Задача 6

Определить круговую частоту k свободных колебаний системы, а также кинематические уравнения ее движения (рис. 50). Ось O_2 цилиндра 2 перемещается только по вертикали. Начальные значения обобщенных координат φ и ψ равны нулю. Нерастяжимую нить, намотанную на цилиндр 2 и охватывающую шкив 1, а также пружину жесткостью C = 1 кН/м считать невесомыми, шкив и цилиндр — сплошными однородными, трением в оси O_1 пренебречь. Начальная деформация пружины λ_0 = *0*. Кроме того, R = 0,5 м и $m_1 = m_2 = m$ = 60 кг, при $t = 0$: $\dot{\varphi}_0$ = 0 и $\dot{\psi}_0$ = 0.

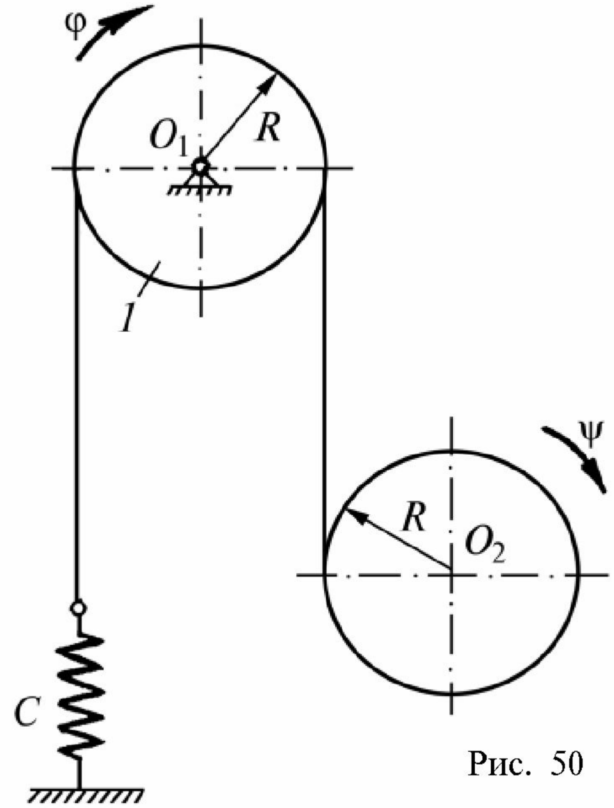

Рис. 50

Решение

Система обладает двумя степенями свободы. Обобщенные координаты и обобщенные скорости (рис. 51)

$$q_1 = \varphi; \qquad q_2 = \psi;$$

$$\dot q_1 = \dot\varphi = \omega_1; \qquad \dot q_2 = \dot\psi = \omega_2.$$

Используя кинематические зависимости (рис. 51)

$$\bar v_{O_2} = \bar v_E + \bar v_{O_2 E};$$

$$v_E = v_C = \omega_1 R = R\dot\varphi,$$

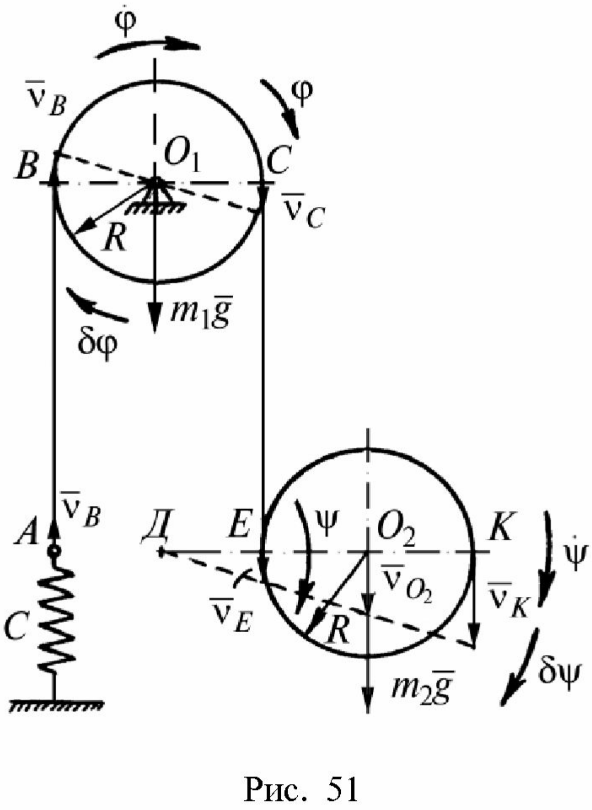

Рис. 51

$$v_{O_2E} = \omega_2 R = R\dot{\psi},$$

$$v_{O_2} = v_E + v_{O_2E} = R\dot{\varphi} + R\dot{\psi},$$

вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2}J_{O_1}{\omega_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{O_2}}^2 + \frac{1}{2}J_{O_2}{\omega_2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left(R\dot{\varphi} + R\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\psi}^2 + mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi},$$

где $J_{O_1} = J_{O_2} = \dfrac{mR^2}{2}$ — собственные моменты инерции цилиндров.

Найдем обобщенные силы системы. Для этого сообщим системе поочередно возможные перемещения, оставляя только одну степень свободы, и вычислим сумму возможных работ всех активных сил.

Пусть сначала $\delta q_1 = \delta\varphi \neq 0$ и $\delta q_2 = \delta\psi = 0$ (цилиндр *2* перемещается поступательно).

Тогда

$$\sum \delta A_{k(\varphi)}^{акт} = Q_\varphi \delta\varphi = m_2 g \delta s_{O_2} - F_{упр}\delta\lambda = \left(mg - CR\varphi\right)R\delta\varphi;$$

$$\delta s_{O_2} = \delta s_E = \delta s_C = \delta s_B = \delta s_A = R\delta\varphi.$$

Сила упругости пружины и ее деформация

$$F_{упр} = C\lambda; \quad \lambda = s_A = s_B = R\varphi;$$

$$\delta\lambda = R\delta\varphi,$$

Пусть теперь $\delta q_1 = \delta\varphi = 0$, а $\delta q_2 = \delta\psi \neq 0$ (цилиндр *1* неподвижен).

Тогда

$$\sum \delta A_{k(\psi)}^{акт} = Q_\psi \delta\psi = m_2 g \delta s_{o2} = mgR\delta\psi;\ \delta s_{O2} = R\delta\psi.$$

Обобщенные силы при выбранных обобщенных координатах:

$$Q\varphi = (mg - CR\varphi)R;$$

$$Q_\psi = mgR.$$

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi.$$

Выполним математические операции, предусмотренные этими уравнениями

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{2} mR^2 \dot\varphi + mR^2 \dot\psi; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{3}{2} mR^2 \ddot\varphi + mR^2 \ddot\psi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = \frac{3}{2} mR^2 \dot\psi + mR^2 \dot\varphi; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot S}\right) = \frac{3}{2} mR^2 \ddot\psi + mR^2 \ddot\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{3}{2} mR^2 \ddot\varphi + mR^2 \ddot\psi = (mg - CR\varphi)R; \tag{1}$$

$$mR^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}mR^2\ddot{\psi} = mgR. \tag{2}$$

или

$$3mR\ddot{\varphi} + 2mR\ddot{\psi} = 2mg - 2CR\varphi; \tag{1'}$$

$$2R\ddot{\varphi} + 3mR\ddot{\psi} = 2g. \tag{2'}$$

Исключив из (1’) и (2’) неизвестное $\ddot{\psi}$, получим

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h, \tag{3}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{6C}{5m}}$ — частота свободных колебаний системы;

Проинтегрировав (1’) и (2’) с учетом начальных условий, окончательно имеем

$$\varphi = \frac{g}{3R}(1 - \cos(kt));$$

$$\psi = \frac{g}{3R}\left[t^2 - \frac{4}{5k^2}(1 - \cos(kt))\right].$$

СОДЕРЖАНИЕ