ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Конспект лекций

Лекция 1

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Статика есть общее учение о силах без учета изменений движений тел, связанных с ними .Статика, также, изучает законы относительного равновесия материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Основными понятиями, являются понятия *о силе и об абсолютно твердом теле*, так как выводы статики относятся к абсолютно твердому телу.

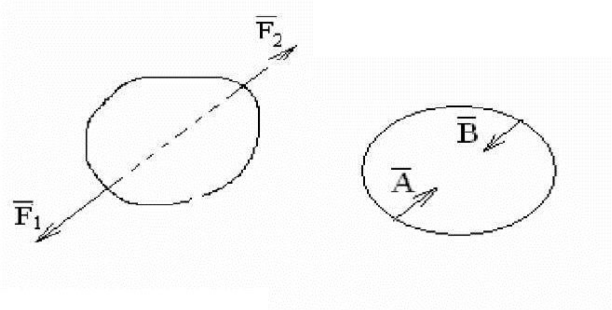
Действия окружающих тел на данное тело, результатом которых является изменение движения данного тела, называются силами.

Сила, характеризуется определенной величиной, направлением и точкой приложения. Сила – величина векторная. Совокупность сил, действующих на тело, называется системой сил. Если данное тело под действием системы сил ($\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, …, $\overline{F_n}$) находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, то такая система называется *уравновешенной.*

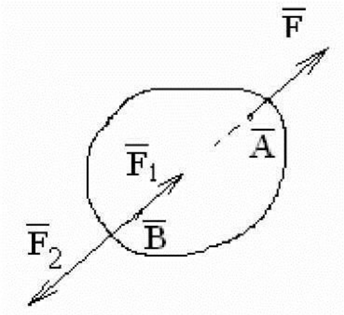
Абсолютно твердым телом (АТТ) называется тело, расстояние между каждыми двумя точками которого при всех условиях остается неизменным, то есть абсолютно твердое тело всегда сохраняет свою геометрическую форму и размеры. Абсолютно твердое тело является абстракцией, так как в природе все тела являются деформируемыми. Данное допущение упрощает решение задач без ущерба для точности.

Аксиомы статики

А1. *Абсолютно твердое тело может находиться в равновесии под действием двух сил тогда и только тогда, когда они равны по величине и действуют по одной прямой в противоположные стороны.*



А2. *Кинематическое состояние абсолютно твердого тела не изменится, если приложить к нему или отнять от системы сил, действующих на него, уравновешенную систему сил.*



Следствие: кинематическое состояние абсолютно твердого тела не нарушится от перенесения точки приложения силы в любое положение вдоль линии ее действия.

Доказательство

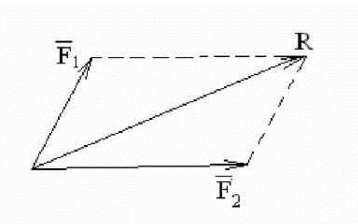
Дана сила $\overline{F}$, прибавим к ней уравновешенную систему сил $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$, причем $F_1 = F_2 = F$. Так как $\overline{F}$ *и* $\overline{F}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению, их можно отбросить. Таким образом, осталась только сила $\overline{F_1}$.

Две системы сил, приложенные к АТТ, называются *статически эквивалентными*, если одну систему можно заменить другой, не нарушая кинематического состояния тела $(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}) \sim (\overline{P_1}, \overline{P_2}, \ldots, \overline{P_n})$.

Если система сил эквивалента одной силе $\overline{R}$, то сила $\overline{R}$ называется *равнодействующей.* Замена системы сил их равнодействующей называется сложением сил.

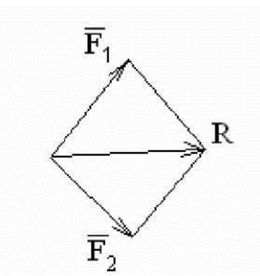
А3. *Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела, приложена в той же точке, направлена по диагонали параллелограмма, построенного на слагаемых силах и по величине определяется длиной этой диагонали.*

Следствие 1.



Равнодействующая двух сил, направленных по одной прямой, равна алгебраической сумме этих сил и направлена по этой прямой.

Следствие 2.



Всякая сила R может быть разложена на две силы по правилу параллелограмма. Из закона равенства действия и противодействия следует, что внутренние силы образуют уравновешенную систему.

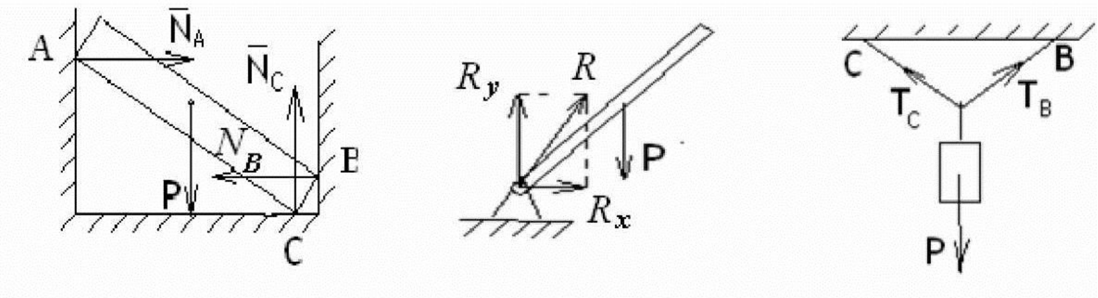
А4. *Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

А5 (принцип отвердевания*). Равновесие деформированного тела, находящегося под действием системы сил, не нарушится, если тело считать отвердевшим (абсолютно твердым).*

<u>Связи и их реакции. Аксиома связей</u>

Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется *свободным.* Если же на тело наложены условия, ограничивающие свободу его перемещения, то тело называется *несвободным,* а условия ограничивающие свободу перемещения – *связями.* Можно считать, что эффект действия связей такой же, как и действие сил. *Силы, с которыми связи действуют на рассматриваемое тело, называются реакциями связей.*

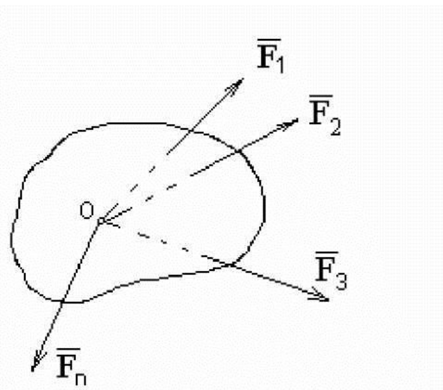
Величина и направление реакции связи зависит от действующих сил. Поэтому они являются пассивными силами, а задаваемые силы – активными.



опора шарнир гибкая связь

Аксиома связей. *Не изменяя кинематического состояния твердого тела каждую с вязь, наложенную на тело, можно отбросить, заменив ее действие силой реакции отброшенной связи.*

Эта аксиома позволяет рассматривать тело уже как свободное, но находящееся под действием как активных, так и реактивных сил.



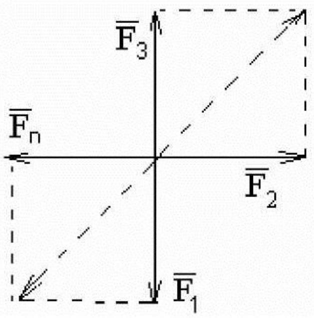
<u>Система сходящихся сил</u>

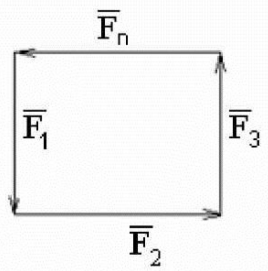
Пусть имеем систему сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2 ....., \overline{F}_n)$, линии действия которых пересекаются в одной точке. Такая система сил называется *сходящейся.*

Перенесем все силы вдоль линий их действия в точку О, т.е. заменим её другой системой сил, приложенных в точке О.

Все силы можно заменить равнодействующей. Условие равновесия твердого тела под действием такой системы сил, а именно: *для того, чтобы твердое тело, находящееся под действием сходящейся системы сил, было в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю.* $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = 0$.

Геометрическое условие состоит в том, что силовой многоугольник, должен быть замкнутым .





$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0 \qquad R = 0$,

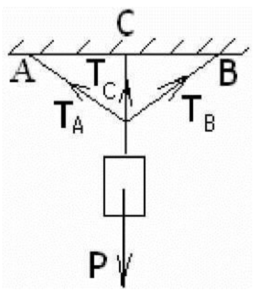
если $R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0$.

или $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases}$.

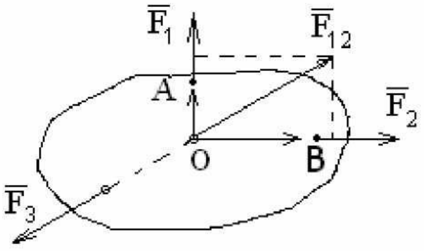
Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трёх координатных осей равнялась нулю.

Если все силы расположены в одной плоскости XOY то: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy} = 0 \end{cases}$.

Задачи, в которых число неизвестных не превышает число уравнений равновесия, называются *статически определимыми*, если число неизвестных превышает число уравнений - *статически неопределимыми*.



Например, для системы, изображенной на рисунке, можно составить только два уравнения равновесия, т.к. система сил плоская, а неизвестных – три (T_A, T_C и T_B).



Теорема о трех силах

Если твердое тело находится в равновесии под действием трёх непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Перенесем силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ вдоль линий их действия в точку О в соответствии с аксиомой А2. По аксиоме А3 сложим эти силы.

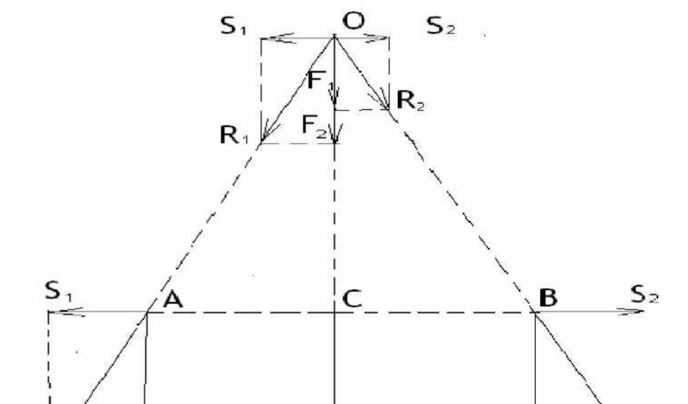
Т.к. тело находится в равновесии, то из аксиомы А1 следует, что $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_3$ и эти силы лежат на одной прямой.

Лекция 2

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Теорема. *Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, равную по величине их алгебраической сумме, параллельную им и направленную в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая делит отрезок между точками приложения слагаемых сил на части, обратно пропорциональные этим силам, внутренним образом.*

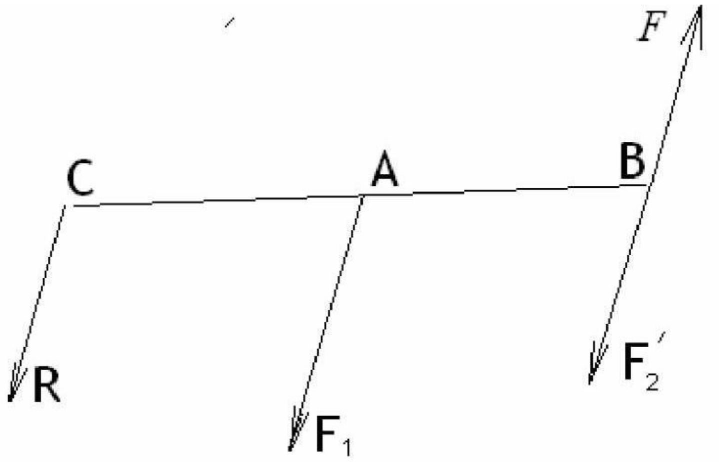


Пусть на тело действуют две параллельные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Соединим точки А и В отрезком прямой. Приложим к телу уравновешенную систему сил $(\overline{S}_1, \overline{S}_2)$ ~ 0 и найдем равнодействующие $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$. Перенесем $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ в точку их пересечения О. Отметим, что $(\overline{R}_1,\overline{R}_2)$ ~ $(\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ Разложим систему $(\overline{R}_1,\overline{R}_2)$ на составляющие $(\overline{S}_1,\overline{S}_2,\overline{F}_1,\overline{F}_2)$. Т. к $(\overline{S}_1,\overline{S}_2)$ ~ 0, то отбрасываем её. Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ направлены параллельно друг другу. Согласно аксиоме А3, их сумма равна $\overline{F}_1+\overline{F}_2=\overline{R}$. Переносим силу $\overline{R}$ вдоль ее линии действия в точку *С* на отрезке *АВ*. Из подобия треугольников:

$\frac{OC}{AC}=\frac{F_1}{S_1}$; $\frac{OC}{CB}=\frac{F_2}{S_2}$. Разделив эти выражения друг на друга, получим:

$\frac{CB}{AC}=\frac{F_1}{F_2}$ или $\frac{F_1}{CB}=\frac{F_2}{AC}$. Из свойств пропорции $\frac{F_1}{CB}=\frac{F_2}{AC}=\frac{F_1+F_2}{CB+AC}=\frac{R}{AB}$.

Сложение двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны



Пусть на тело действуют две параллельные силы, направленные в разные стороны (антипараллельные) силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_2}$ причём, $F_1>F_2$. В соответствии с аксиомой статики разложим $\overline{F_1}$ на две параллельные силы $\overline{F_2'}=-\overline{F}$, приложенные в точке *В* и силу $\overline{R}$, приложенную в точке *С*. Таким образом, $\overline{F}_1=\overline{F_2'}+\overline{R}$.

$$\frac{R}{AB}=\frac{F_2'}{AC}=\frac{F_1}{CB};\ R=F_1-F_2; AC=AB\frac{F_2}{R};\ BC=AB\frac{F_1}{R}.$$

Т.к. $(\overline{F}_2,\overline{F_2'})$ ~ 0, то остаётся только сила *R*.

Следовательно, *система двух антипараллельных сил имеет равнодействующую, которая по величине равна разности этих сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку С, которая лежит на продолжении отрезка АВ, соединяюще-*

го точки приложения слагаемых сил, за большей силой и делит этот отрезок обратно пропорционально силам внешним образом.

Пара сил и её свойства

Пусть имеем равные антипараллельные силы $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$, тогда $\overline{R} = 0$; $AC = \infty$; $BC = \infty$. Следовательно, точка C находится в бесконечности.

Система двух равных по величине параллельных и направленных в разные стороны сил называется *парой сил.*.

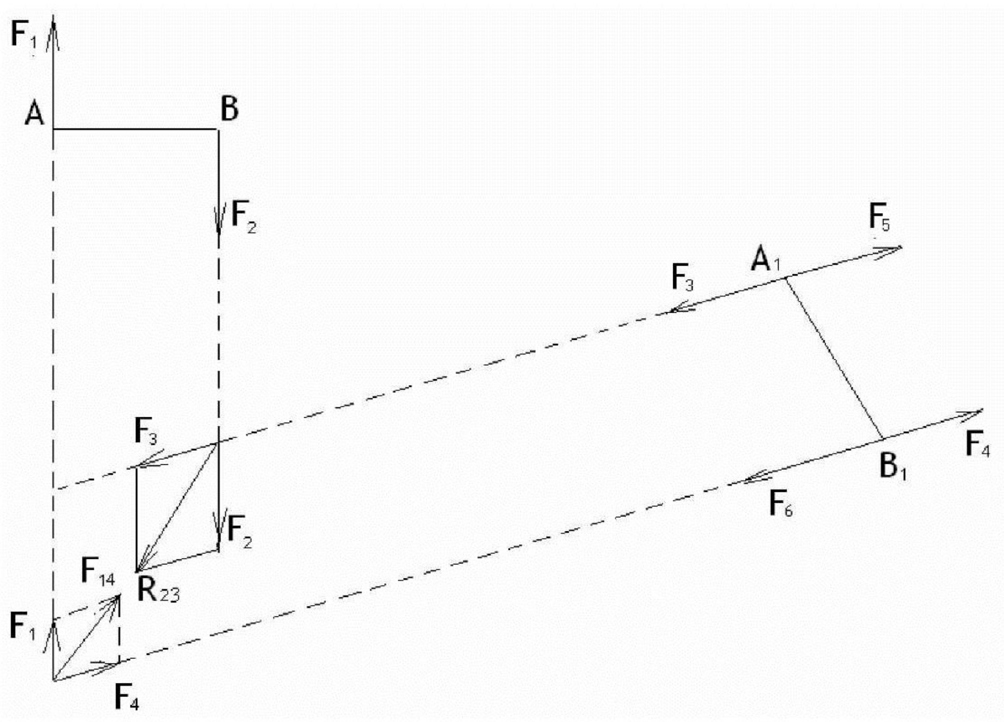
Пара сил не имеет равнодействующей, следовательно, она не ведет к поступательному движению тела. Она приводит тело во вращательное движение. Действие пары на тело зависит от величины сил, плеча и направления сил.

Моментом пары называется вектор, величина которого равна взятому со знаком плюс или минус произведению одной из сил пары на плечо пары.

Будем считать: «+»- момент направлен против часовой стрелки; «-»- по часовой стрелке. Размерность момента – *Н·м*.

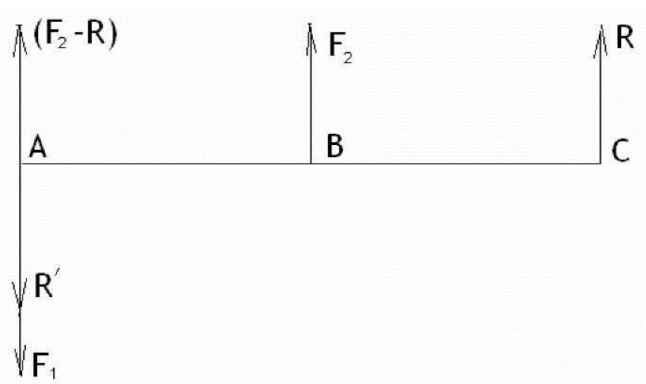
Теорема. *Не нарушая кинематического состояния тела, можно переносить пару в любое положение в плоскости её действия.*

Доказательство: Пусть на тело действует пара $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ Произвольно на таком же плече A_1B_1 возьмём две уравновешенные пары $(\overline{F}_3, \overline{F}_4)\, и\, (\overline{F}_5, \overline{F}_6)$, эквивалентные нулю. Продлим их линии действия и сложим силы $\overline{F}_3, \overline{F}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_4$.



Равнодействующие силы $\overline{R}_{14}$ и $\overline{R}_{23}$ равны по величине, направлены по одной линии (диагональ ромба) и противоположны. Остается система сил $(\overline{F}_5, \overline{F}_6)$, эквивалентная $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$. Т.к. точки A_1B_1 выбирались произвольно, то теорема доказана.

Теорема. *Не изменяя действия данной пары на тело, можно силу и плечо пары изменять любым способом, но так, чтобы момент пары остался неизменным.*

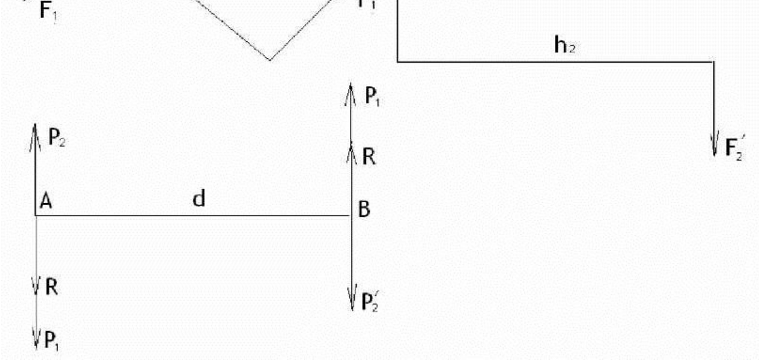


Пусть дана пара сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ с плечом AB. Разложим силу на составляющие $\overline{R}$ и $\overline{F}_2 - \overline{R}$, тогда $\overline{R}' = \overline{F}_1 - (\overline{F}_2 - \overline{R}) = \overline{R}$, следовательно, имеем новую пару $(\overline{R}', \overline{R})$. На плече AC пара $(\overline{R}', \overline{R})$ эквивалентна паре $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, причем для любой пары плечо AC удовлетворяет условию $\frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}$ или $R \cdot AC = F_2 AB$. Теорема доказана. Таким образом, задаваясь плечом, можно определить $\overline{R}$, и наоборот.

Теорема. *Две пары, лежащие в одной плоскости и имеющие равные моменты, статически эквивалентны.* Без доказательства.

Совокупность пар называется *системой пар.*

Теорема. *Система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар.*



Доказательство: Возьмем две пары $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ и $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$, произвольно расположенные на плоскости. Приведем их к одинаковому плечу d. Согласно аксиоме А3 силы $\overline{P_1}, \overline{P_2}$ и $\overline{P_1'}\,\overline{P_2'}$ можно алгебраически сложить: $\overline{R} = \overline{P_1} - \overline{P_2}$; $\overline{R'} = \overline{P_1'} - \overline{P_2'}$. Силы $\overline{R}$ и $\overline{R'}$ равны по величине и противоположны по направлению, следовательно, это новая пара с моментом $m = R \cdot d$, эквивалентным двум данным парам. Нетрудно заметить, что $m = R \cdot d = (P_1 - P_2) \cdot d = P_1 \cdot d - P_2 \cdot d$. Это значит, что $m = m_1 + m_2$ или

$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ (момент каждой пары должен быть взят со своим знаком).

Условие равновесия пар

Так как взятую систему пар, расположенных в одной плоскости можно заменить одной парой, то для равновесия такой системы необходимо и достаточно, чтобы момент результирующей пары равнялся нулю. $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$.

Момент силы относительно центра

Пусть дана сила F и точка O. Опустим из точки O перпендикуляр на линию действия силы F. Перпендикуляр h называется *плечом* действия силы F.

Моментом силы относительно произвольно выбранного центра называется векторное произведение радиуса-вектора точки приложения силы на вектор самой силы.

Величина момента силы F относительно центра (точки) O равна взятому со знаком плюс или минус произведению величины силы на длину плеча.

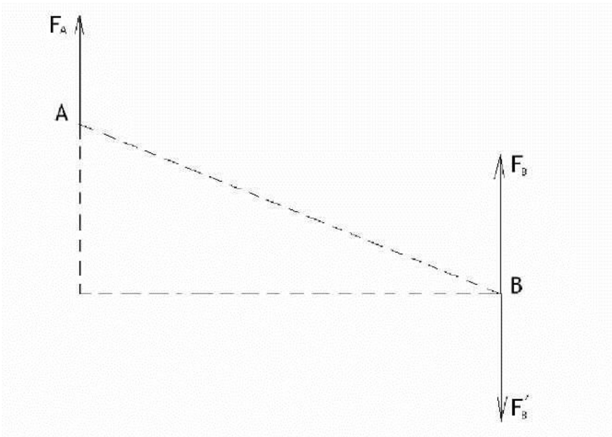
$$m_0(\overline{F}) = \pm F \cdot h.$$

Знак «+» берется в случае, если мысленный поворот тела от действия силы происходит против часовой стрелки; знак «-» – почасовой стрелке.

Момент силы относительно точки равен нулю, если плечо силы равно нулю ($h = 0$), т.е. моментная точка лежит на линии действия силы.

Плоская система сил

Теорема Пуансо о переносе силы. *Всякая сила, приложенная в данной точке A, эквивалентна той же самой силе, приложенной в другой точке B и* *паре с моментом, равным моменту силы, приложенной в точке А, относительно точки В.*



Доказательство: Пусть задана сила $\overline{F}_A$, приложенная в точке A. В произвольной точке B приложим уравновешенную систему $\left(\overline{F}_B, \overline{F}'_B\right)$ - эквивалентную нулю, причем $F_B = F_A$. Таким образом, силы $\overline{F}_A$ и $\overline{F}'_B$ образуют пару. Итак, сила $\overline{F}_A$ эквивалентна $\overline{F}_B$ и паре $\left(\overline{F}_A, F'_B\right)$, причём момент пары равен моменту силы $\overline{F}_A$ относительно точки B.

<u>Приведение произвольной плоской системы сил к данному центру</u>

Выберем точку O и назовем её центром. перенесём все силы, действующие на тело в точку O. Получим систему сходящихся сил и некоторое количество пар. Сложив полученную систему сил, по известному правилу силового многоугольника получим одну силу $\overline{F}$, называемую *главным вектором системы*. $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$.

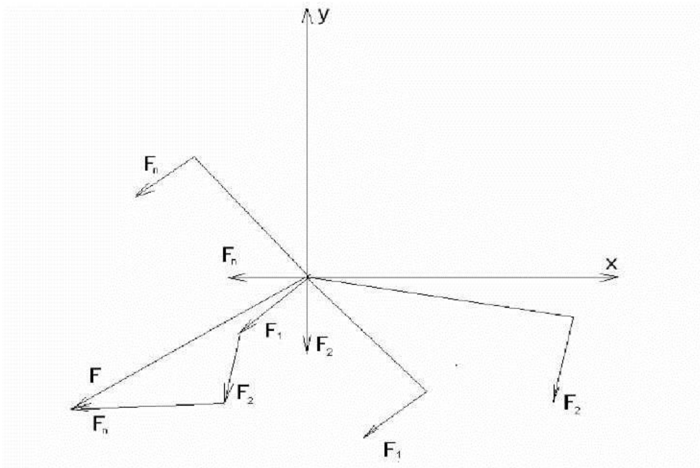
Складывая пары, получим результирующую пару с моментом, равным алгебраической сумме моментов слагаемых пар. Обозначив момент результирующей пары *m*, а моменты слагаемых пар $m_1, m_2, \ldots, m_n$ имеем: $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

однако ранее доказано, что

$$
\begin{aligned}
&m_1 = m_0(F_1) \\
&m_2 = m_0(F_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_2 = m_0(F_n)
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_i\right)$.

Эта сумма моментов всех сил относительно какого-либо центра приведения называется *главным моментом системы.*



Всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы и приложенной в произвольно выбранном центре приведения, и парой с моментом, равным главному моменту системы относительно выбранного центра приведения.

Важно отметить, что сила F не является равнодействующей системы, т.к. она замещает систему только в совокупности с главным моментом.

Для аналитического определения главного вектора проведем оси координат и спроецируем уравнение

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$$

на эти оси: $\begin{array}{l} F_x = \sum F_{ix} \\ F_y = \sum F_{iy} \Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{array}$.

Направление главного вектора определяют направляющие косинусы.

$$\left.\begin{array}{l} \cos(F, x) = \dfrac{F_x}{F} \\ \cos(F, y) = \dfrac{F_y}{F} \end{array}\right\}.$$

Теорема Вариньона

Момент равнодействующих сил, расположенных в одной плоскости, относительно некоторой точки равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки . (Без доказательства).

Уравнения равновесия плоской системы сил

Теорема. *Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы были равны нулю:*

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i} = 0, \quad \overline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F_i}) = 0.$$

Т.к. $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, а $F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$ $F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$,

то уравнения равновесия будут иметь вид: $\left.\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum m_0(F_i) &= 0 \end{aligned}\right\}.$

Для равновесия произвольной плоской системы необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из двух выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы сумма моментов всех сил системы относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Данную форму уравнений равновесия плоской системы сил *первой формой.*

Вторая форма уравнений равновесия плоской системы сил:

Теорема. *Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно двух произвольных точек равнялась нулю и чтобы сумма проекций всех сил на произвольную ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей эти центры, равнялась нулю.*

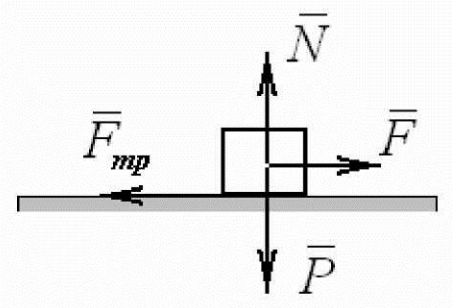
$$\left.\begin{aligned} \sum m_A(F_i) &= 0 \\ \sum m_B(F_i) &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Третья форма уравнений равновесия плоской системы сил:

Теорема. *Для равновесия произвольной плоскости системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил системы относительно каждого из трёх произвольных, но не лежащих на одной прямой центров равнялась нулю.* (Без доказательства)

ТРЕНИЕ

При стремлении сдвинуть одно тело (силой F)по поверхности другого, в плоскости соприкосновения тел возникает сила препятствующая смещению, это сила трения, $F_{тр}$.. Сила трения всегда направлена в сторону противоположную возможному смещению.



Сила трения может принимать любые значения от нуля до некоторого предельного. Предельная сила трения численно равна произведению статического коэффициента трения (коэффициенту трения покоя) на нормальную реакцию.

$$F_{тр} = fN$$

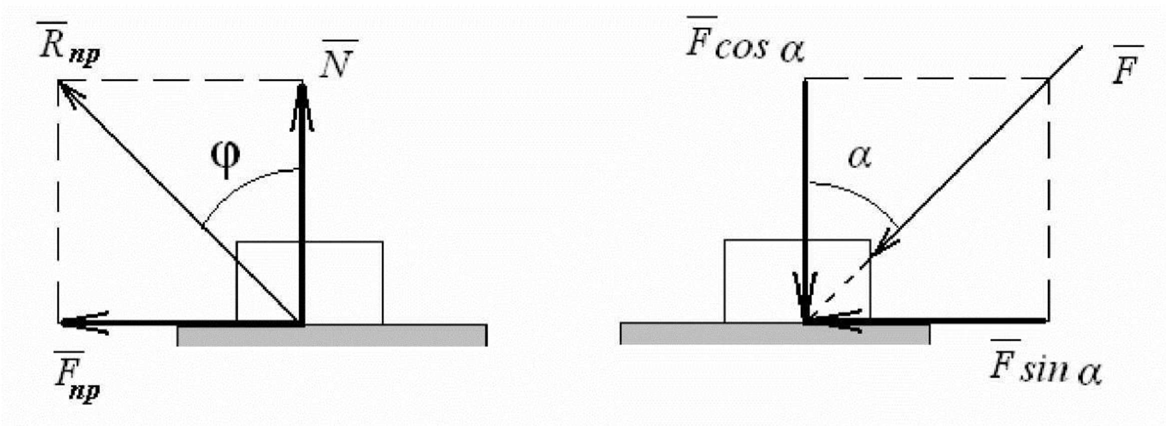
Коэффициент трения – величина безразмерная. Он может принимать значения от 0 до 1 $(0 > f > 1)$ и определяется экспериментально. Например, при тени сталь по стали f = 0,15…0,26, сталь по льду f = 0,03, дерево по дереву 0,4….0,7. Для уменьшения коэффициента трения применяют смазку жидкую или пластичную.

Значение предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей тел. При равновесии, сила трения всегда меньше или равна ее предельного значения. Равновесие, при котором $F_{тр} = F_{пр}$ называется предельным равновесием.

При движении сила трения всегда направлена в сторону противоположную движению тоже равна $F_{тр} = fN$, где f – динамический коэффициент трения. Он зависит не только от материала трущихся тел и состояния поверхностей, но и в некоторой степени от скорости. Обычно динамический коэффициент трения немного меньше статического.

Полная реакция шероховатой связи слагается из нормальной реакции и силы трения. Следовательно, полная реакция отклонена от нормаль к поверхности на угол φ. Максимальное значение этого угла будет соответствовать случаю, когда сила трения примет предельное значение. Такой угол называется углом трения.

$$tg\,\varphi = \frac{F_{пр}}{N} = \frac{fN}{N} = f$$



Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности, приложить некоторую силу F, образующую угол α с нормалью, то тело сдвинется только тогда, когда проекция силы на касательную к поверхности будет больше предельной силы трения:

$$F\sin\alpha > F_{пр} \text{ или } F\sin\alpha > fN \text{, следовательно } F\sin\alpha > fF\cos\alpha.$$

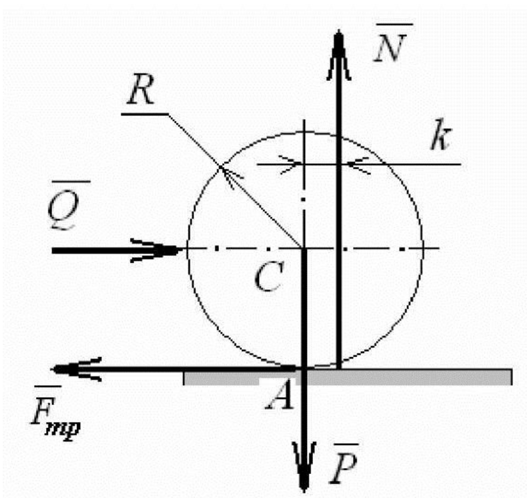
Разделив обе части неравенства на F, получим

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > f \text{ или } tg\alpha > f \text{, или } tg\alpha > tg\varphi \text{, следовательно } \alpha > \varphi.$$

Никакой силой, образующей с нормалью угол α, меньший угла трения φ, тело вдоль шероховатой поверхности сдвинуть нельзя. Этим объясняется явление заклинивания.

Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.



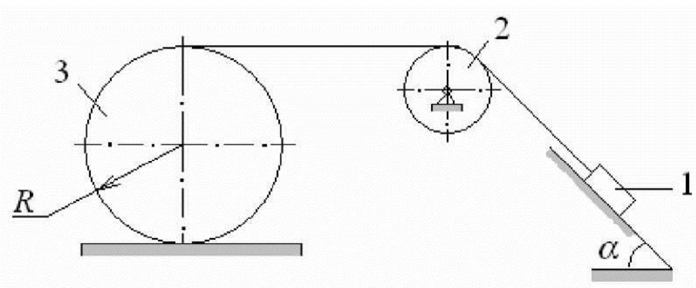
Рассмотрим цилиндрический каток весом P и радиусом R, лежащий на горизонтальной плоскости. Приложим к катку силу Q, тогда в точке A возникнет сила трения $F_{тр}$, численно равная Q. Вследствие деформации тел касание их происходит по некоторой площадке, причем интенсивность давления в различных точках площадки не одинакова. В результате реакция N смещается в сторону действия силы Q, в сторону возможного смещения катка на некоторую величину k. Линейная величина k называется коэффициентом трения качения.

Составим уравнение равновесия моментов относительно точки A:

$Nk - QR = 0$. Из равенства находим $Q = \dfrac{Nk}{R}$. Произведение в числителе называется моментом трения или моментом сопротивления качению. Коэффициент трения качения также как и коэффициент трения скольжения зависит от материала тел. Например, при качении дерева по дереву k =0,05…0,08, сталь по стали – k = 0,001…0,005.

Задача.

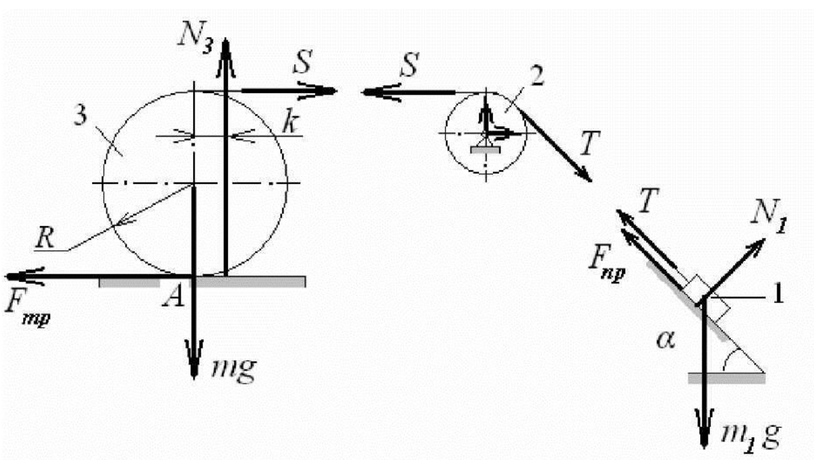
На шероховатой наклонной поверхности, наклоненной под углом α к горизонту, находится брус 1, который связан нерастяжимой невесомой нитью с катком 3. Нить перекинута через неподвижный невесомый блок 2. Коэффициент трения скольжения между брусом и наклонной плоскостью f, коэффициент трения качения между катком и горизонтальной плоскостью k. Считая массу катка равной m, определить максимальную массу бруса, при котором система тел останется в равновесии.



Решение.

Расчленим систему на отдельные тела и покажем все действующие силы.

Заметим, что силы T и S имеют одинаковые значения, т.к. блок 2 невесом (идеальный). Брус 1 находится в предельном равновесии и предельная сила трения $F_{пр}$ будет направлена вдоль наклонной плоскости вверх.



Составим уравнения равновесия:

- для тела 1это будут проекции сил на ось вдоль наклонной плоскости вниз и на нормаль к наклонной плоскости : $\begin{matrix} m_1 g\sin\alpha - T - F_{np} = 0 \\ N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \end{matrix}$. Выразим N_1 из нижнего уравнения и подставим в верхнее, учитывая, что $F_{np} = fN_1$ получим:

$$m_1 g\sin\alpha - T - m_1 gf\cos\alpha = 0 \quad (*)$$

- для катка 3 это будет проекция сил на нормаль к горизонтальной плоскости (направлена вертикально вверх) и сумма моментов относительно точки A:

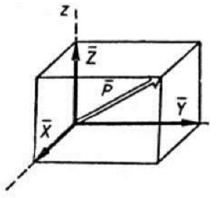
$$\begin{matrix} N_3 - mg = 0 \\ N_3 k - S\cdot 2R = 0 \end{matrix}.$$

Выражаем N3 из первого уравнения, подставляем во второе и выражаем силу натяжения нити: $S = T = \dfrac{mgk}{2R}$. Теперь выразим m_1 из уравнения (*) и подставим в него значение силы натяжения: $m_1 = \dfrac{mgk}{2Rg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$, сократив на g, получим ответ:

$$m_1 = \frac{mk}{2R(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Любую силу $\overline{P}$ можно представить диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на составляющих $\overline{X}$, $\overline{Y}$ $\overline{Z}$, которые по модулю равны проекциям данной силы на оси координат *x, y, z.* Модуль и направление $\overline{P}$ определяют по формулам:



$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\ ,$$

$$\cos(\overline{P},\hat{\ } x) = \frac{X}{P},\ \cos(\overline{P},\hat{\ } y) = \frac{Y}{P},\ \cos(\overline{P},\hat{\ } z) = \frac{Z}{P}.$$

Система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости, но. пересекаются данной точке, называется пространственной системой сходящихся сил. Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил равна геометрической сумме слагаемых сил:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n = \sum \overline{P}.$$

Равнодействующая $\overline{R}$ выражается замыкающей стороной пространственного силового многоугольника, стороны которого равны и параллельны данным силам. В частности, если число слагаемых сходящихся сил равно трем, то их равнодействующая по модулю и направлению выражается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах. Силовой многоугольник пространственной системы сходящихся сил не является плоской фигурой, поэтому при сложении сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, предпочтительнее аналитический метод.

Теорема. *Проекция равнодействующей системы сходящихся сил на какую-либо ось равна сумме проекций всех сил на эту же ось.*

$$R_x = \sum X\ ,\ R_Y = \sum Y\ ,\ R_z = \sum Z\ .$$

Зная составляющие, находим модуль и направление равнодействующей.

<u>Равновесие пространственной системы сходящихся сил</u>

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этой системы сил равнялась нулю,

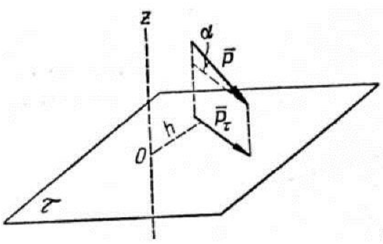
т. е. $$\overline{P} = \sum P = 0 .$$

Это равенство выражает условие замкнутости силового многоугольника данной системы сил, т. е. условие равновесия пространственной системы сходящихся сил в геометрической форме. Вместо векторного равенства можно составить три скалярных: $$\sum X = 0 ,\ \sum Y = 0 ,\ \sum Z = 0 ,$$

которые выражают условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме и их называют уравнениями равновесия пространственной системы сходящихся сил. Система уравнений позволяет определить только три неизвестных. Если число неизвестных больше трех, то пространственная система сходящихся сил является статически неопределимой.

Момент силы относительно оси

Момент силы P относительно оси z равен моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси z, относительно точки O (точка пересечение оси z плоскостью ι)



$$M_z(\overline{P}) = M_o(\overline{P}_\tau),$$

$$M_o\left(\overline{P}_\tau\right) = \pm P_\tau h = Ph\cos\alpha ,$$

где P_τ — проекция силы P на плоскость ι, перпендикулярную к оси z; h — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия проекции P_τ

Отметим, что проекция силы на ось — скалярная величина; проекция силы на плоскость — вектор.

Момент считается положительным, если, глядя с конца положительного направления оси, видим вращение плоскости τ под действием составляющей P_τ против часовой стрелки. В противном случае момент считается отрицательным.

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила пересекает ось (h = 0) или параллельна оси(P_τ=0).

Равновесие произвольной пространственной системы сил

Теорема. *Для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент равнялись нулю,* т. е.

$$\overline{R}=0,\ \overline{M}=0.$$

Эти два векторных равенства можно заменить шестью скалярными:

$$\sum X=0;\ \sum Y=0;\ \sum Z=0;$$

$$\sum M_x=0;\ \sum M_Y=0;\ \sum M_z=0.$$

Приведенные условия называют уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил: *для равновесия тела в пространстве необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на координатные оси и суммы моментов всех сил относительно трех координатных осей равнялись нулю.*

Частные случаи

1. Для пространственной системы сходящихся сил получим уже известную систему: $\sum X=0,\ \sum Y=0,\ \sum Z=0.$

2. Для пространственной системы сил, параллельных оси x:

$$\sum X=0,\ \sum M_Y=0;\ \sum M_z=0;$$

оси y: $\sum Y=0,\ \sum M_x=0,\ \sum M_z=0;$

оси z: $\sum Z=0,\ \sum M_Y=0,\ \sum M_x=0.$

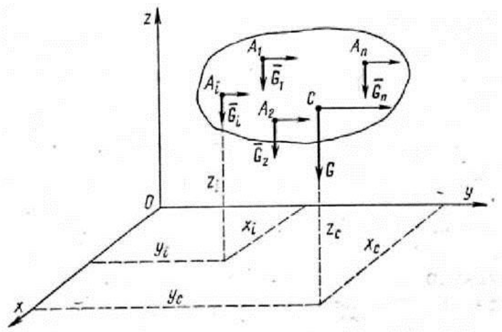
Сила тяжести и центр тяжести однородных тел

В физике вводится два понятия:

1) центр масс (центр инерции) – точка, характеризующая распределение масс в механической системе;

2) центр тяжести – точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, действующих на все частицы этого тела.

Положение центра тяжести твёрдого тела совпадает с положением его центра масс. Сила, с которой каждое тело притягивается к Земле, называется *силой тяжести.* Она распределена по всему объёму тела, т.е. приложена к каждой частице тела и направлена вертикально вниз к центру Земли (см. рис.). Элементарные силы тяжести этих частиц $\overline{G_1}$, $\overline{G_2} \dots \overline{G_n}$ практически параллельны и направлены вниз. То есть имеется система параллельных сил, выходящих из множества материальных точек, координаты которых $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2) \dots A_n(x_n; y_n; z_n)$. Равнодействующая этих параллельных сил $\overline{G}$, называется силой тяжести тела приложена в точке C, являющейся центром тяжести тела, Итак, *центром тяжести тела* называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц тела.



Очевидно что $G = G_1 + G_2 + ...G_n = \sum G_i$

Используя теорему Вариньона, найдем момент равнодействующей относительно оси Oy как сумму моментов составляющих сил относительно той же оси: $$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2 + ...G_nx_n = \sum G_ix_i$$

Отсюда найдем координату центра тяжести x_c: $$x_c = \frac{\sum G_ix_i}{G}.$$

Затем мысленно повернём тело против часовой стрелки на 90°, тогда все силы также повернутся против часовой стрелки на 90°. Используя уравнение моментов относительно оси Ox, получим $Z_c = \dfrac{\sum G_iz_i}{G}$.

Координаты центров тяжести однородных тел

Однородная материальная линия. Тело, у которого два измерения (высота и ширина) пренебрежимо малы по сравнению с третьим измерением (длиной), называют материальной линией (например, стержень). У таких тел отношение силы тяжести G к длине l – постоянная величина для любого произвольного участка линии: $\dfrac{G}{l} = const$. $x_c = \dfrac{\sum l_ix_i}{l}$, $y_c = \dfrac{\sum l_iy_i}{l}$, $z_c = \dfrac{\sum l_iz_i}{l}$.

Однородная материальная поверхность. Материальной поверхностью называют тело, у которого одно измерение (толщина) пренебрежимо мало по сравнению с двумя другими (длиной и шириной). У однородной материальной поверхности отношение силы тяжести к площади поверхности есть постоянная величина для любой произвольной части поверхности: $\frac{G}{A} = const$.

Формулы для определения координат центра тяжести:

$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A}$, $y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A}$, $z_c = \frac{\sum A_i z_i}{A}$, где A – полная площадь поверхности.

Однородный материальный объем. Материальный объем имеет соизмеримыми все три измерения. Для любой части однородного тела $\frac{G}{V} = const$.

Формулы для определения координат центра тяжести:

$x_c = \frac{\sum V_i x_i}{V}$, $y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}$. где V — полный объем тела.

Статический момент площади. Произведение площади фигуры A на расстояние от ее центра тяжести до какой-либо оси называют *статическим моментом* этой площади относительно данной оси. Так $S_x = A \cdot y_C$ - статический момент площади A относительно оси x, а $S_y = A \cdot x_C$ - статический момент этой же площади относительно оси y. Чтобы определить статический момент площади сложной фигуры относительно некоторой оси, необходимо сложить статические моменты отдельных частей фигуры относительно этой же оси, т.е.

$$S_x = \sum A_i y_i;$$

$$S_y = \sum A_i x_i.$$

Ось, проходящую через центр тяжести, называют *центральной.* Статический момент плоской фигуры относительно любой центральной оси равен нулю.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

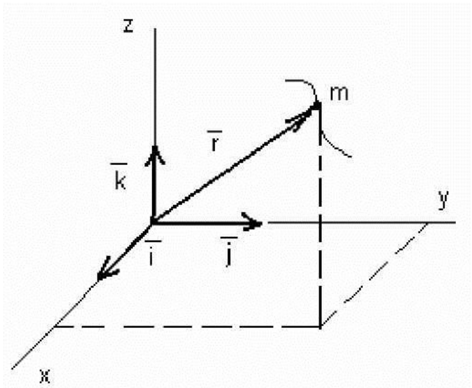
Кинематикой называется раздел механики, изучающий механическое движение материальных тел независимо от причин, обусловливающих это движение, то есть независимо от действующих на него сил.

Аналитические способы задания движения точки в пространстве

Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией. Она может быть прямолинейной или криволинейной. Движение точки считается заданным, если для любого момента времени можно указать все кинематические параметры движения: положение по отношению к системе отсчета, траекторию, скорость, ускорение.

Векторно-координатный способ задания движения точки

Пусть точка ***m*** совершает движение по отношению к прямоугольной системе координат xyz. Для определения положения точки в этой системе необходимо знать ее координаты (x, y, z). Если они известны для любого момента времени, то движение точки считается заданным.



$$\left.\begin{aligned} X &= X(t) \\ Y &= Y(t) \\ Z &= Z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Положение точки ***m*** в пространстве может быть определено радиусом-вектором $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Приняв за начало радиуса-вектора $\bar{r}$ начало координат системы XYZ, всегда можно выразить $\bar{r}$ через его проекции на оси координат:

$\bar{r} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные орты координатных осей, X, Y, Z - координаты точки ***m***, равные проекциям вектора $\bar{r}$ на соответствующие оси. Величина радиуса вектора равна $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

а направление его определяют направляющие косинусы

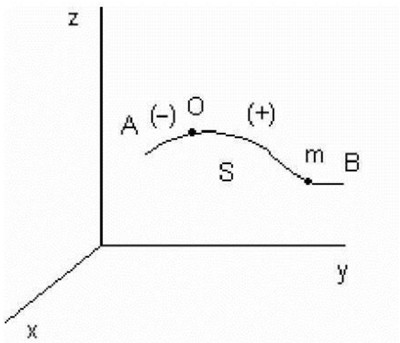
$$\cos(\hat{r,x}) = \frac{x}{r};\ \cos(\hat{r,y}) = \frac{y}{r};\ \cos(\hat{r,z}) = \frac{z}{y}.$$

Очевидно, если заданы уравнения (1), то можно определить $\overline{r}$, и наоборот. Уравнения (1) могут рассматриваться как параметрические, с параметром t. При переходе от параметрических уравнений к уравнениям, связывающим координаты (путем исключения параметра t), получают уравнение траектории точки. Например, из первого уравнения, выразим $t = \varphi(x)$ и подставим в остальные

$$Y = Y[\varphi(x)],$$
$$Z = Z[\varphi(x)].$$

Эти уравнения дают траекторию точки в виде линии пересечения двух поверхностей.

Естественный способ задания движения точки



При естественном способе задания движения задана траектория движения точки ***m*** XYZ. Возьмем на траектории AB точку O и назовем ее началом отсчета. Измерим длину дуги $O\breve{m} = S$ (со знаком + или -). Длину дуги S называют *дуговой координатой точки **m***. Заданием дуговой координаты $S = S(t)$ для любого момента времени однозначно определяется положение точки на ее траектории. $S = S(t)$ - уравнение движения точки при естественном способе задания движения или закон движения точки.

Скорость точки

Под скоростью точки подразумевается быстрота изменения радиуса - вектора или дуговой координаты точки, определяющей ее положение.

Определение скорости точки при векторно-координатном способе задания движения.

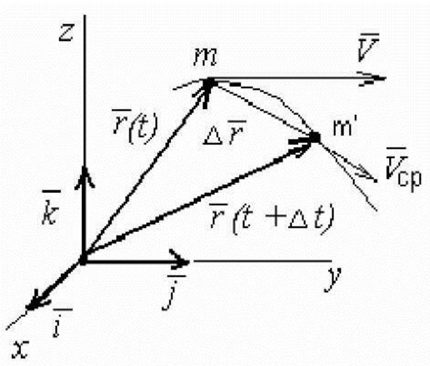
Пусть закон движения задан радиус-вектором $\overline{r} = \overline{r}(t)$ или равносильной ему системой трех скалярных координат:

$$\left.\begin{aligned} X &= X(t) \\ Y &= Y(t) \\ Z &= Z(t) \end{aligned}\right\}.$$

Допустим, в некоторый момент времени t положение точки $\boldsymbol{m}$ определяет $\bar{r}(t)$, а в следующий момент $t+\Delta t$ соответственно $\bar{r}(t+\Delta t)$, тогда за время Δt радиус-вектор получит приращение $\Delta\bar{r} = \overline{mm'} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$.

Вектор $\Delta\bar{r} = \overline{mm'}$ называется вектором перемещения точки за Δt. Отношение вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени называется *вектором средней скорости* точки за промежуток времени Δt.

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}.$$



$\bar{V}_{cp}$ - вектор, направленный по хорде mm' в сторону движения. Очевидно, чем меньше Δt, тем точнее $\bar{V}_{cp}$ будет выражать скорость точки в момент времени t. Поэтому переходим в равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$.

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$ – векторная производная.

Скорость точки равна векторной производной от радиус- вектора точки по времени и направлена по касательной к ее траектории в сторону движения.

$$\bar{V} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \qquad \text{или} \qquad \bar{V} = V_x\bar{i} + V_y\bar{j} + V_z\bar{k},$$

где V_X, V_y, V_z - проекции вектора скорости на координатные оси

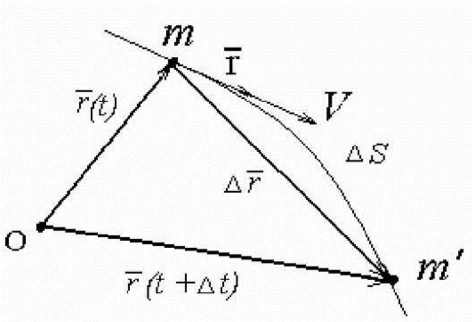
$$\left.\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_Z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \qquad V = \sqrt{V_X^2 + V_y^2 + V_Z^2}\,.$$

Таким образом, если движение точки задано уравнениями (1), можно найти величину и направление скорости.

<u>Определение скорости точки при естественном</u>

<u>способе задания движения</u>

Пусть движение точки ***m*** задано уравнением $S = S(t)$. Пусть точка m определяется еще и радиус-вектором $\bar{r}$ относительно точки O, тогда



$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \bar{r} \cdot \Delta S}{\Delta S \cdot \Delta t} \right).$$

Т.к. при $\Delta t \to 0$, $\Delta S \to 0$, то можно записать

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta S}. \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Предел отношения направляющей хорды к стягивающей ею дуге по величине равен 1 и направлен по касательной к траектории.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta S} = \bar{r}$, тогда $\bar{V} = \dfrac{dS}{dt} \cdot \bar{r}$, а алгебраическая величина скорости

$$V = \frac{dS}{dt}.$$

Вектор $\bar{r}$ направлен всегда в сторону возрастания дуговой координаты, поэтому при движении точки в сторону возрастания $\dfrac{dS}{dt} > 0$, а при движении в обратную сторону – $\dfrac{dS}{dt} < 0$.

Скорость точки равна первой производной от дуговой координаты по времени и направлена по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Ускорение точки

Мера быстроты изменения скорости называется ускорением.

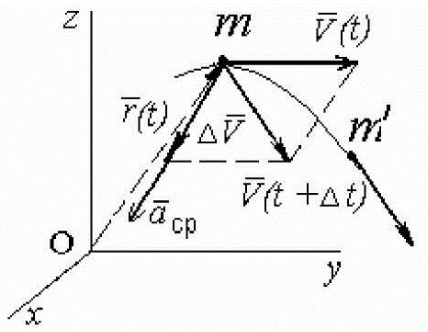
Определение ускорения точки

при векторном координатном способе задания движения

Пусть движение точки m задано уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t)$ или

$$\left. \begin{aligned} X &= X(t) \\ Y &= Y(t) \\ Z &= Z(t) \end{aligned} \right\}.$$

Если в момент времени t точка m имеет скорость $\bar{V}(t)$, то в следующий



момент $t + \Delta t$ ее скорость – $\bar{V}(t + \Delta t)$. Тогда

$$\Delta\bar{V} = \bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t).$$

Перенесем вектор $\bar{V}(t + \Delta t)$ из точки m' в точку m и построим параллелограмм. Тогда $\Delta\bar{V}$ будет его стороной. Отношение приращения $\Delta\bar{V}$ к промежутку времени Δt называется средним ускорением точки m за время Δt:

$$\bar{a}_{ср} = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}.$$

вектор $\bar{a}_{cp}$ направлен по вектору $\Delta\bar{V}$. Ускорением точки в данный момент времени t называется предел, к которому стремится вектор среднего ускорения при $\Delta t \to 0$.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}.$$

Ускорение точки равна производной от вектора ее скорости по времени.

Т.к. $\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ $\qquad \bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$

представим радиус-вектор через его проекции $\bar{r} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$.

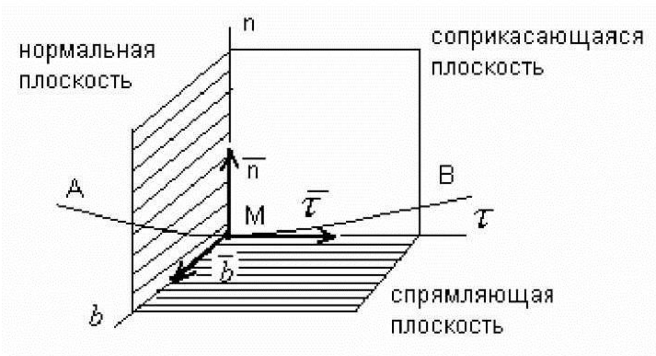
Тогда $\bar{a} = \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$

или $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$.

Сравнивая эти равенства, получим:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{X} \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{Y} \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{Z} \end{aligned}\right\}, \; a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Естественные оси координат

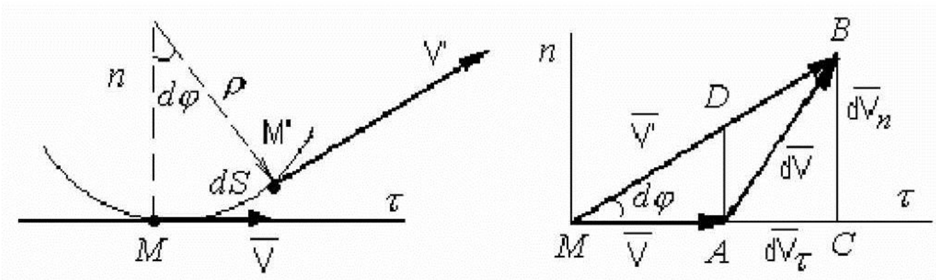


Построим к кривой AB в точке M касательную, единичный вектор которой обозначим через $\bar{\tau}$. Перпендикуляр к касательной называется нормалью. Очевидно, их может быть бесконечно большое число. Все они будут лежать в плоскости, проходящей через точку M, и перпендикулярны к касательной. Это нормальная плоскость к кривой в данной точке. *Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости (плоскости кривой) называется главной нормалью,* ее единичный вектор $\bar{n}$ направлен в сторону вогнутости кривой AB. *Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется бинормалью*, ее единичный вектор обозначим как $\bar{b}$. Плоскость τMb называется *спрямляющей плоскостью. Три взаимно перпендикулярные оси, имеющие начало в точке* M *и на-*

правленные по векторам $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ *называются естественными или натуральными осями координат (оси естественного трехгранника).* Такая система будет подвижной, так как при движении точки M начало координат и направление осей изменяется.

<u>Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения</u>

Пусть точка M движется по некоторой траектории $S = S(t)$, лежащей в соприкасающейся плоскости. Найдем проекции ускорения на нормаль и касательную к траектории, dV_τ - проекция приращения вектора скорости на касательную, а dV_n - проекция на нормаль. Пусть точка движется из положения M в положение M' и в этих точках имеет соответственно скорости $\bar{V}$ и $\bar{V}'$, тогда $d\bar{V} = \bar{V}' - \bar{V}$.



Тогда $$a_\tau = \frac{(dV)_\tau}{dt}$$ *– касательное ускорение,*

$$a_n = \frac{(dV)_n}{dt}$$ *– нормальное ускорение.*

Перенесем вектор $\bar{V}'$ в точку M, при этом

$$d\bar{V} = A\bar{B};\ \bar{V} = M\bar{A};\ \bar{V}' = M\bar{B}.$$

При $\Delta t \to 0$ $d\varphi$ также стремится к нулю, а фигура $ADBC$ стремится к прямоугольнику, в котором диагональ AB стремится к AC. Так как $AC = DB$, $MA = MD$, то $d\bar{V} = \bar{V}' - \bar{V} = MB - MD = AC$. Но AC – проекция $d\bar{V}$ на касательную, то есть $(dV)_r = AC$, тогда $dV = (dV)_r$, следовательно

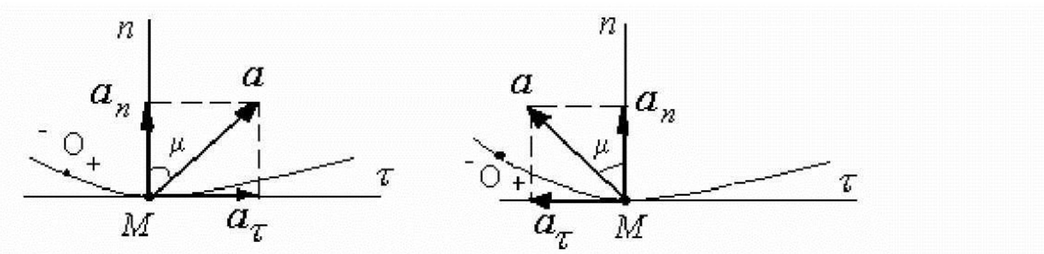
$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

AD – это проекция $d\overline{V}$ на нормаль, то есть $AD = (dV)_n$ можно рассматривать как элементарную дугу радиуса MA, тогда $AD = MA \cdot d\varphi = V \cdot d\varphi$ и, следовательно $$a_n = \frac{Vd\varphi}{dt}$$

Угол φ между касательной и кривой в двух ее точках называется углом смежности, $d\varphi$ - элементарный угол смежности, тогда $\rho \cdot d\varphi = dS$, где ρ – радиус кривизны траектории, тогда $d\varphi = \frac{dS}{\rho}$, $a_n = \frac{V \cdot dS}{\rho \cdot dt} = \frac{V^2}{\rho}$.

Тангенциальное (касательное) ускорение (проекция ускорения точки на касательную) равна первой производной от числового значения скорости или второй производной от расстояния (криволинейной координаты) по времени. Нормальное (центростремительное) ускорение (проекция ускорения на главную нормаль) равна квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке кривой.

Пусть точка M движется по кривой. Изобразим векторы $\overline{a}_n, \overline{a}_\tau, \overline{a}$. Вектор нормального ускорения $\overline{a}_n$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой.



Вектор $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории как в сторону скорости (ускоренное движение), так и противоположно ей (замедленное движение).

Полное ускорение точки
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2},$$
$$tg\mu = \frac{a_r}{a_n}; -\frac{\pi}{2} \le \mu \le \frac{\pi}{2}$$

Частные случаи движения точки

1. Прямолинейное движение точки

Траектория - прямая, следовательно $\rho = \infty$, тогда $a_n = \dfrac{V^2}{\rho} = 0$. Поэтому полное ускорение равно касательному $a = a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$.

2. Равномерное движение точки

Тогда $V = const$, следовательно, $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = 0$, поэтому полное ускорение равно лишь нормальному $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$.

3. Равномерное прямолинейное движение точки

$$a_n = 0; \quad a_\tau = 0.$$

Из рассмотренных случаев видно, что касательное ускорение характеризует изменение величины (модуля) скорости, а нормальное – изменение направления скорости.

4. Равнопеременное движение

За равные промежутки времени скорости изменяется на равные величины

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = const; \quad dV = a_\tau \cdot dt$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t a_\tau \cdot dt$$

$$\text{или} \quad V - V_0 = a_\tau \cdot t \Rightarrow V = V_0 + a_\tau \cdot t$$

где V_0 - скорость точки при $t = 0$ (начальная скорость).

Так как $V = \dfrac{dS}{dt}$, $\Rightarrow dS = V \cdot dt$ или $dS = (V_0 + a_\tau t) \cdot dt$.

Интегрируя, получим $\displaystyle\int_0^S dS = \int_0^t (V_0 + a_\tau t)dt$, $\quad S = V_0 \cdot t + \dfrac{a_\tau \cdot t^2}{2}$.

Лекция 5

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором отрезок прямой, соединяющий две любые точки тела, во все время движения остается себе параллельным (например, AB, см. рис. 1).

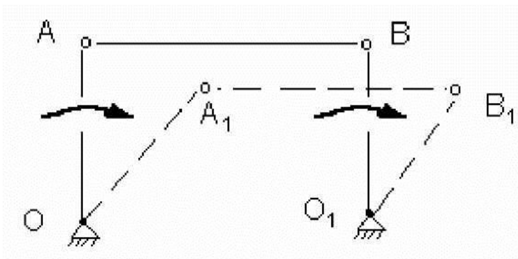


Рис.1

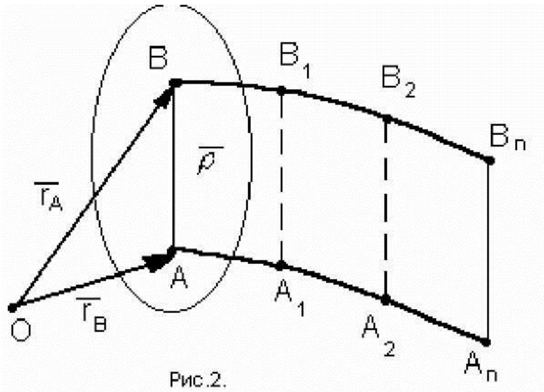


Рис.2.

Теорема. *При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения всех его точек одинаковы.*

Доказательство:

Пусть отрезок AB тела за время t перемещается поступательно. Возьмем произвольную точку O и определим в пространстве положение отрезка AB радиусами-векторами $\overline{r_A}$ и $\overline{r_B}$ (рис. 2). Обозначим $\overline{\rho}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки B относительно точки A: $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{\rho}$ (1)

Вектор $\overline{\rho}$ не изменяется ни по величине, ни по направлению, так как $AB = const$ (по определению поступательного движения). Из соотношения (1) видно, что траектория точки B получается из траектории точки А параллельным смещением точек этой траектории на постоянный вектор $\overline{\rho} = A\overline{B}$. Таким образом, траектории точек A и B будут одинаковыми.

$$\frac{d\overline{r_B}}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt}, \text{ т.е. } \overline{V}_B = \overline{V}_A. \quad \frac{d\overline{V}_B}{dt} = \frac{d\overline{V}_A}{dt} \text{ или } \overline{a}_B = \overline{a}_A.$$

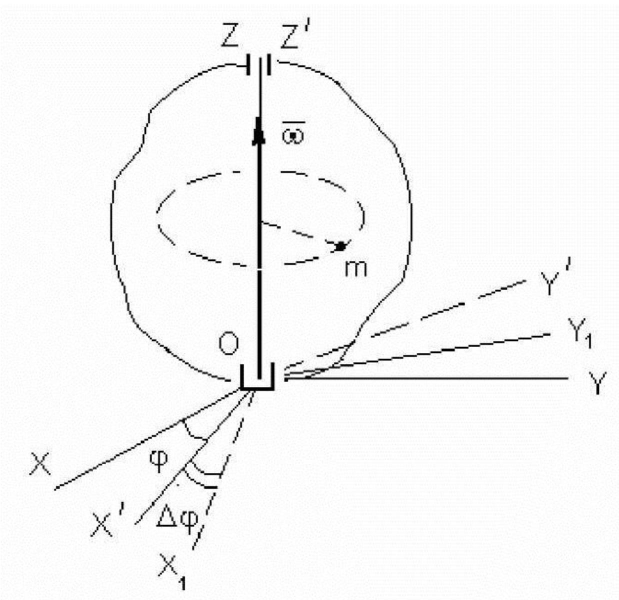
Следовательно, при поступательном движении твердого тела скорости и ускорения всех его точек в данный момент времени одинаковы.

Для изучения поступательного движения тела достаточно изучить движение какой-либо одной точки. Т.е. задача сводится к задаче кинематики точки.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если во все время движения твердого тела две какие-либо его точки остаются неподвижными, то такое движение тела называется вращением вокруг неподвижной оси, а прямая проходящая через две неподвижные точки называется осью вращения тела.

Выберем неподвижную систему координат $OXYZ$, ось OZ которой совпадает с осью вращения твердого тела. Возьмем также систему $OX'Y'Z'$, вращающуюся вместе с телом. Положение подвижной системы относительно неподвижной будет определяться двугранным углом между плоскостями с XOZ и X_1OZ_1. Обозначим его через φ. Угол φ изменяется с течением времени и представляет собой некоторую непрерывную функцию времени t. Таким образом, закон вращательного движения твердого тела имеет вид: $\varphi = \varphi(t)$



За положительное направление φ примем направление против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси OZ.

Угловая скорость

Для характеристики быстроты изменения φ введем понятие угловой скорости. Пусть в момент времени t положение тела определялось углом $\varphi(t)$, а в момент $t + \Delta t$ углом $\varphi(t + \Delta t)$. Тогда за время Δt угол поворота получит приращение $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$. Отношение приращения $\Delta\varphi$ к Δt называется *средней угловой скоростью тела* за время Δt: $\omega_{ср} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим $\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$,

где ω - угловая скорость тела в данный момент времени.

Величина угловой скорости твердого тела при вращении его вокруг неподвижной оси равна первой производной от угла поворота по времени.

Знак ω определяет направление вращения тела. Если вращение происходит против хода часовой стрелки, то ω > 0, т.е. положительное приращение угла отсчитывается против хода часовой стрелки. Размерность угловой скорости – *1/с* или c^{-1}.

Угловую скорость можно изображать в виде вектора $\overline{\omega}$, модуль которого равен $|\omega|$ и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки.

Угловое ускорение

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости с изменением времени. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ угловая скорость изменится на величину $\omega = \omega_1 - \omega_0$, то числовое значение среднего углового ускорения равно: $\varepsilon_{ср} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $\quad \varepsilon = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Числовое значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени. Размерность углового ускорения – 1/с^2 или c^{-2}.

Вектор углового ускорения $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt}$ направлен вдоль оси вращения: если $\overline{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\overline{\omega}$, то вращение ускоренное, если нет – замедленное.

Равномерное и равнопеременное вращение

Если угловая скорость во все время движения тела остается постоянной, то вращение тела называется равномерным (ω = *const*).

Закон движения в дифференциальной форме имеет вид $d\varphi = \omega \cdot dt$.

В начальный момент времени $t = t_0$ угол $\varphi = \varphi_0$. Интегрируя уравнение в пределах $\varphi \div \varphi_0$ и $0 \div t$, получим $\varphi = \varphi_0 + \omega t$.

При $\varphi_0 = 0$; $\varphi = \omega \cdot t$ или $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$.

В технике угловая скорость соответствует характеристике, называемой *частотой вращения,* обозначаемой как *n* и измеряемой в *об/мин.*

Т.к. 1 оборот=2π радиан, 1 минута = 60 секунд, то перевод из *об/мин* в c^{-1} осуществляется по формуле: $\omega = \dfrac{2\pi n}{60} = \dfrac{\pi n}{30}$.

Если угловое ускорение все время остается постоянным, то такое вращение называется равнопеременным $(\varepsilon = const)$. $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon \cdot dt$.

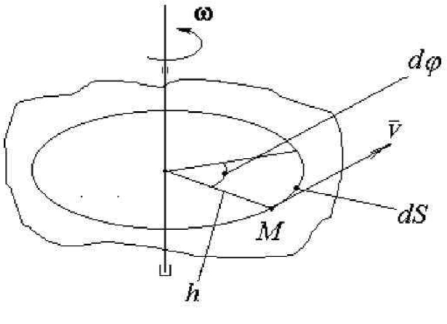
Проинтегрировав в пределах $\omega_0 \div \omega$ и $0 \div t$, получим $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$.

Представив $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, получим $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t$ или

$$d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon \cdot tdt \Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}.$$

Если ω и ε имеют одинаковые знаки, то движение является *равноускоренным*, в противном случае – *равнозамедленным*.

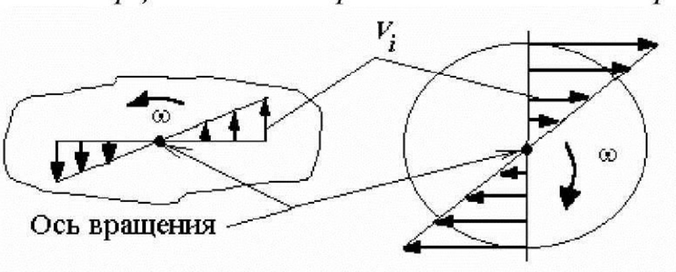
Скорости и ускорения точек вращающегося тела



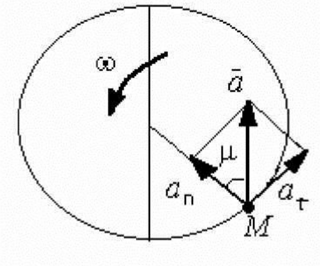
Возьмем точку *M* тела на расстоянии *h* от оси вращения. Точка *M* будет описывать окружность радиуса *h*, плоскость которой перпендикулярна оси вращения. Если за время *dt* происходит элементарный поворот $d\varphi$, то $\overline{V}=\dfrac{dS}{dt}$, скорость $\overline{V}$ называется *линейной или окружной.*

Учитывая, что $dS=h\cdot d\varphi$ получим $\overline{V}=\dfrac{h\cdot d\varphi}{dt}=h\cdot\omega$.

Числовое значение скорости точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения. Скорость направлена по касательной к описываемой окружности. Так как ω *для всех точек тела одинаковы, то скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям до оси вращения.*



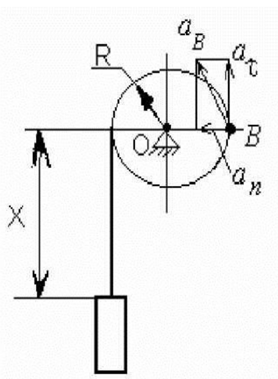
$a_\tau=\dfrac{dV}{dt}$; $a_n=\dfrac{V^2}{\rho}$. В нашем случае $\rho=h\Rightarrow a_\tau=\dfrac{h\cdot d\omega}{dt}\Rightarrow$;



$$a_\tau=\varepsilon\cdot h,\quad a_n=\frac{h^2\cdot\omega^2}{h}=\omega^2\cdot h,$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(h\varepsilon)^2+(\omega^2h)^2}=h\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}.\quad tg\mu=\frac{a_\tau}{a_n}=\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Пример. Вал радиуса $R=10$ см приводится во вращение гирей, подвешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x=100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выражаемое в см, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение точки B на поверхности вала в момент времени t. $x=R\cdot\varphi$; где φ - угол поворота вала



$$\varphi=\frac{x}{R}=\frac{100t^2}{R}=10t^2\,рад.\quad \omega=\dot{\varphi}=20\cdot t\quad c^{-1},$$

$$\varepsilon=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}=20\ c^{-2},\quad a_n=\omega^2\cdot R=400t^2\cdot 10=4000t^2\ см/c^2,$$

$$a_\tau=\varepsilon\cdot R=20\cdot 10=200\ см/c^2.$$

$$a_B=\sqrt{(a_n)^2+(a_\tau)^2}=200\sqrt{1+400t^4}\ см/c^2.$$

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

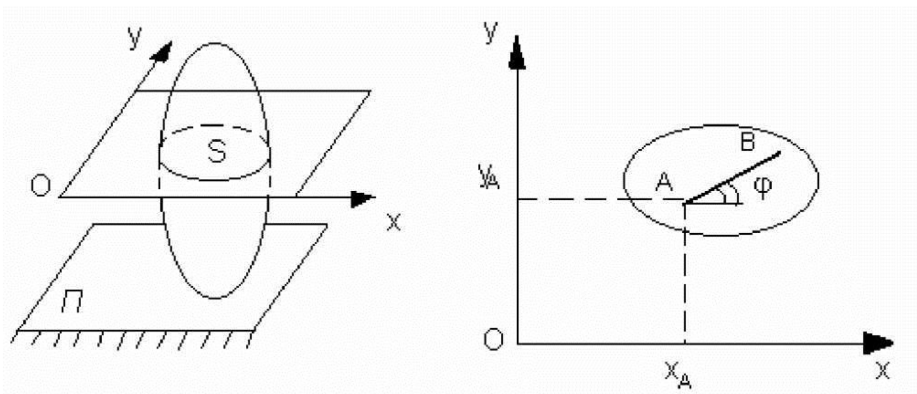
Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется в плоскости XOY сечение S этого тела.

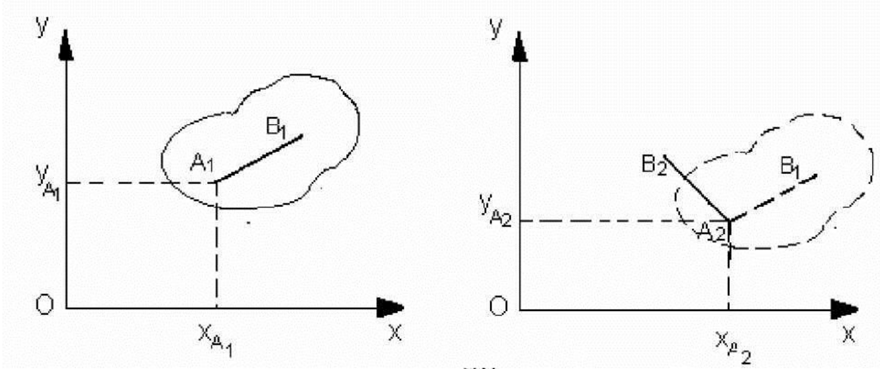
Положение фигуры S в плоскости XOY определяется положением какого-нибудь отрезка AB, проведенного на этой фигуре. В свою очередь, положение отрезка AB можно определить, зная координаты X_A, Y_A, φ. *Точку A, выбранную для определения положения фигуры S, будем называть полюсом.*

Чтобы знать закон движения фигуры необходимо знать зависимости:

$$X_A = f_1(t),\ Y_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$



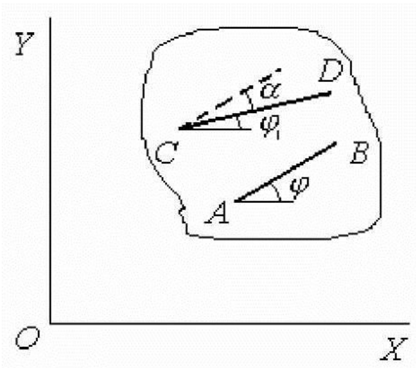
Это уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости. Первые два уравнения определяют поступательное движение полюса (при $\varphi = const$), а третье уравнение определяет вращательное движение фигуры вокруг полюса ($X_A = const$, $Y_A = const$).



Следовательно, *движение плоской фигуры в ее плоскости может рассматриваться как слагающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс А, и из вращательного движения вокруг этого полюса.*

Кинематическими характеристиками такого движения будут:

$\overline{V}_{поступ} = \overline{V}_A$, $\overline{a}_{поступ} = \overline{a}_A$; ω и ε.



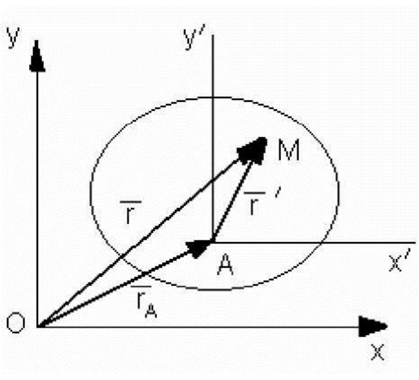
В качестве полюса можно выбрать любую точку фигуры, например C и определить положение фигуры отрезком *СД*. Характеристика поступательного движения изменится, так как в общем случае $\overline{V_C} \neq \overline{V_A}$; и $\overline{a}_C \neq \overline{a}_A$; (иначе движение было бы поступательным). Характеристики вращательной части движения (ω и ε) остаются неизменными, так как $\varphi_1 = \varphi - \alpha$, где $\alpha = const$. Поэтому $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}$; $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}$.

За полюс принимается такая точка, скорость которой либо задана, либо ее легко определить из условия задачи. Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.

<u>Определение скоростей точек плоской фигуры</u>

Пусть оси $Y'AX'$ движутся вместе с точкой A, оставаясь параллельными осям XOY. Положение точки M определяется радиусом-вектором $\overline{r}$:

$\overline{r} = \overline{r}_A + \overline{r}'$, где $\overline{r}' = AM$. Тогда скорость точки определяется выражением



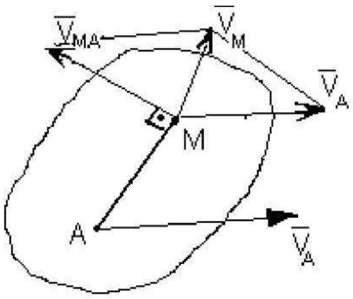
$$\overline{V}_M = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{r}'}{dt}.$$

$\dfrac{d\overline{r}_A}{dt} = \overline{V_A}$ – скорость полюса A, $\dfrac{d\overline{r}'}{dt} = \overline{V}_{MA}$ - скорость, которую точка M получает при $\overline{r'} = const$, то есть при вращении плоской фигуры относительно точки A (полюса): $\overline{V}_M = \overline{V}_A + \overline{V}_{MA}$

При этом $V_{MA} = \omega \cdot MA$ $\left(\overline{V}_{MA} \perp MA\right)$, где ω - угловая скорость фигуры.

Скорость любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и скорости, которую точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

Модуль и направление скорости $\overline{V}_M$ находятся построением параллелограмма.

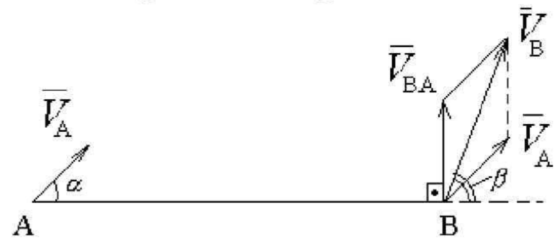


Теорема о проекциях скоростей двух точек тела

Проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны друг другу, то есть $V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta$.

Доказательство:

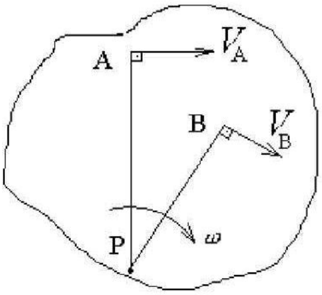
Разложим скорость $\overline{V}_B$ на две составляющие в соответствии с равенством $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$. Проецируя обе части равенства на ось, проходящую через точки A и B , получим $V_B \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha + V_{BA} \cdot \cos 90°$ или $V_B \cdot \cos\beta = V_A \cdot \cos\alpha$.



Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если тело движется непоступательно, то такая точка существует и при этом единственная.



Пусть в момент времени t скорости точек A и B плоской фигуры будут не параллельны, тогда точка P будет мгновенным центром скоростей, так как по теореме о проекциях $\overline{V}_P$

должна проецироваться в ноль на отрезки AP и PB одновременно. Это возможно, если $V_P = 0$. Если за полюс взять точку P, то $\overline{V}_A = \overline{V}_P + \overline{V}_{PA} = \overline{V}_{PA}$, так как $V_P = 0$.

Скорости точек плоской фигуры в данный момент времени определяются так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей:

$$V_A = \omega \cdot PA \left(\overline{V}_A \perp PA\right),$$

$$V_B = \omega \cdot PB \left(\overline{V}_B \perp PB\right),$$

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \ldots = \frac{V_N}{PN} = \omega.$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

Выводы:

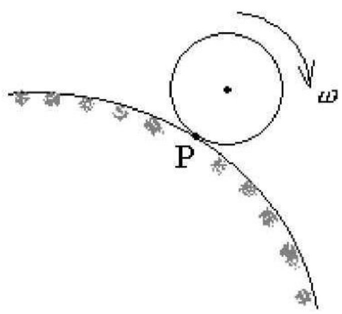
1. Для определения мгновенного центра скоростей достаточно знать только направления скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ каких-нибудь двух точек А и B плоской фигуры.

2. Для определения скорости любой точки плоской фигуры необходимо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A фигуры и направление скорости другой ее точки B.

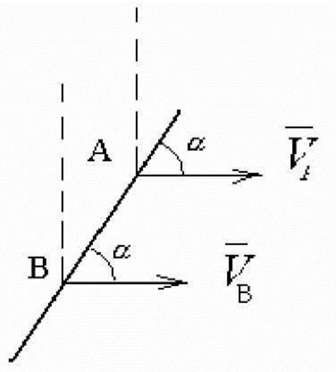
3. Угловая скорость плоской фигуры равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки фигуры к ее расстоянию до мгновенного центра скоростей P.

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей

а) Если движение осуществляется путем качения (без скольжения) одного цилиндрического тела по поверхности другого неподвижного тела, то точка P катящегося тела, касающаяся неподвижного тела, имеет скорость $V_P = 0$ и, следова-

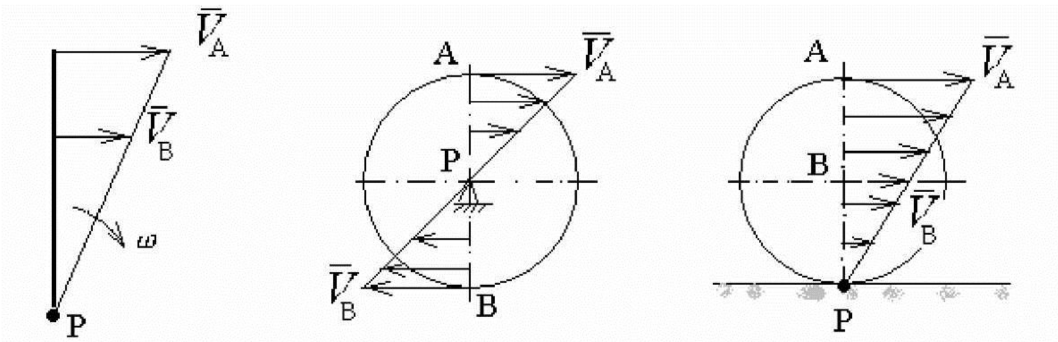


следовательно, является мгновенным центром скоростей.



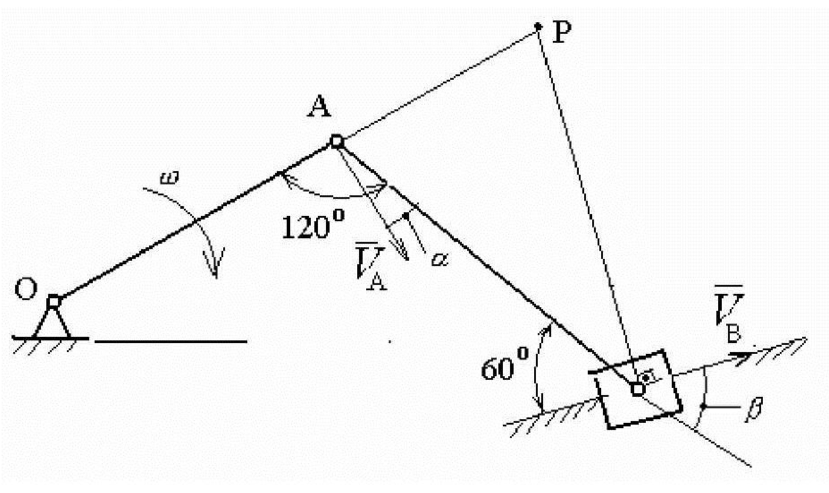
б) Если скорости точек А и B параллельны друг другу, причем линия AB не перпендикулярна векторам скоростей, то мгновенный центр скоростей находится в бесконечности, а движение в данный момент времени поступательное.

в) Если скорости точек A и B параллельны друг другу и при этом AB перпендикулярна векторам



скоростей, то мгновенный центр скоростей P определяется построением, показанным на рисунке.

Пример. Определить скорость ползуна B для показанного на рисунке положения механизма, если угловая скорость кривошипа OA равна $\omega = 10\, рад/с,\ OA = r = 0{,}1м$. Решение выполнить двумя способами:



1. С использованием теоремы о проекциях скоростей двух точек тела.

2. Построением мгновенного центра скоростей (МЦС) шатуна AB.

Решение:

1. $V_A = \omega \cdot OA = 10 \cdot 0{,}1 = 1 м/с$, $\overline{V}_A \perp OA$. Т.к. скорость $\overline{V}_B$ направлена вдоль оси ползуна, то, по теореме о проекциях скоростей, имеем:

$$V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta \quad ; \alpha = 30°; \ \beta = 60°$$

$$V_B = V_A \cdot \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = 1 \cdot tg 60° = \sqrt{3} \approx 1{,}73 м/с.$$

2. Найдем положение МЦС (точка P – см. рис.), тогда:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}; \ V_B = V_A \frac{BP}{AP}.$$

ΔAPB - прямоугольный, так как $\angle ABP = 30°$;

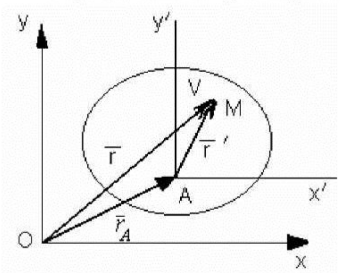
$$\angle BAP = 60° \Rightarrow \frac{BP}{AB} = tg 60°, \ V_B = 1 \cdot tg 60° = \sqrt{3} \approx 1{,}73 м/с.$$

Лекция 7

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение ускорений точек тела

Пусть тело совершает плоское движение в координатах XOY. Требуется определить ускорение точки M. Обозначим полюс точкой A и проведем через



него оси $y' \ x'$, которые движутся вместе с полюсом A, оставаясь параллельными осям x и y. Обозначим положение точек A и M радиус-векторами:

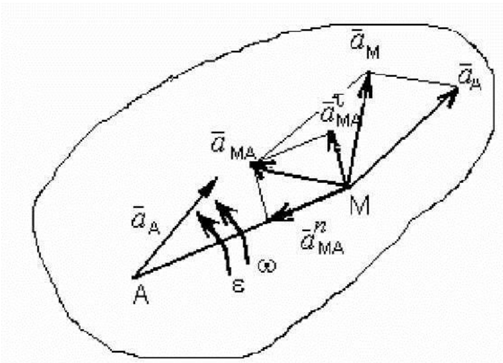
$$\overline{r} = \overline{r_A} + \overline{r'}, \text{ где } |r'| = AM,$$

тогда $\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \dfrac{d^2\overline{r}_A}{dt^2} + \dfrac{d^2\overline{r}'}{dt^2}$ или $\overline{a_M} = \overline{a_A} + \overline{a}_{MA}$.

Так как $\overline{a}_{MA}$ – ускорение во вращательном движение точки M вокруг точки A, то $\overline{a}_{MA} = \overline{a}^n_{MA} + \overline{a}^\tau_{MA}$, где $a^n_{MA} = \omega^2_{MA} \cdot MA$, $a^\tau_{MA} = \varepsilon_{MA} \cdot MA$. Таким образом, $\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{MA} + \overline{a}^\tau_{MA}$.

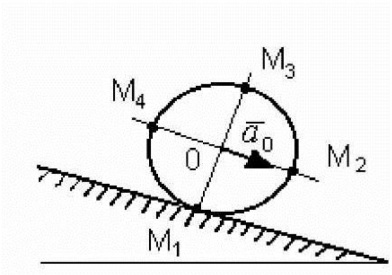
Ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса.

При этом вектор $\overline{a}_{MA}^{\tau}$ *направлен перпендикулярно MA в сторону вращения, если движение ускоренное, и против вращения, если движение замедленное. Вектор* $\overline{a}_{MA}^{n}$ *всегда направлен от точки M к точке A.*



Если движение полюса *A* является криволинейным, получим

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_{MA}^n + \overline{a}_{MA}^{\tau}.$$



Пример. Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути. Найти ускорение концов двух взаимно перпендикулярных диаметров колеса, из которых один параллелен рельсу, если в рассматриваемый момент времени скорость центра колеса $\overline{V}_O = 1 м/с$, ускорение центра колеса $\overline{a}_O = 3 м/с^2$, радиус колеса $R = 0{,}5 м$.

<u>Решение:</u>

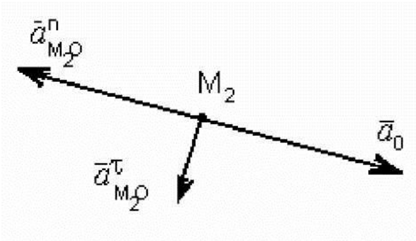
Точка M_1 - мгновенный центр скоростей, следовательно, угловая скорость колеса равна $\omega = \dfrac{V_O}{OM_1} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2c^{-1}$.

Угловое ускорении колеса $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d(\frac{V_O}{OM_1})}{dt} = \dfrac{1}{OM_1} \cdot \dfrac{dV_0}{dt} = \dfrac{a_O}{OM_1} = \dfrac{3}{0{,}5} = 6c^{-2}$.

Примем за полюс точку *O*, тогда $\overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{a}_{MO}^n + \overline{a}_{MO}^{\tau}$,

где $a_{MO}^n = \omega^2 \cdot MO = 2^2 \cdot 0{,}5 = 2 м/с^2$, $a_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot MO = 6 \cdot 0{,}5 = 3 м/с^2$.

Решим задачу для точки M_2, для этого покажем векторы ускорения:



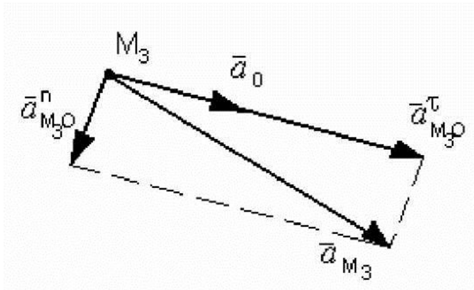
$$a_{M_2} = \sqrt{\left(a_O - a^n_{M_2O}\right)^2 + \left(a^\tau_{M_2O}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(3-2)^2 + 3^2} = 3{,}16 м/с^2.$$

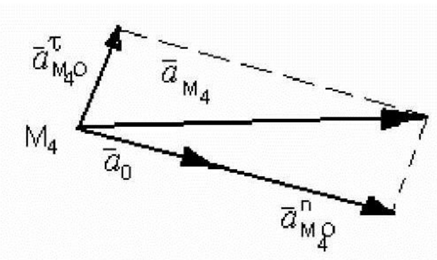
Решим задачу для точки M_3:

$$a_{M_3} = \sqrt{\left(a_O + a^\tau_{M_3O}\right)^2 + \left(a^n_{M_3O}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(3+3)^2 + 2^2} = 6{,}32 м/с^2$$



Решим задачу для точки M_4:

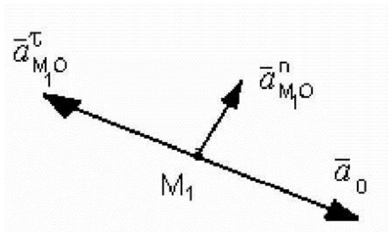


$$a_{M_4} = \sqrt{\left(a_O + a^n_{M_4O}\right)^2 + \left(a^\tau_{M_4O}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(3+2)^2 + 3^2} = 5{,}83 м/с^2.$$

Решим задачу для точки M_1:

$$a_{M_1} = \sqrt{\left(a_O - a^\tau_{M_1O}\right)^2 + \left(a^n_{M_1O}\right)^2} = a^n_{M_1O} = 2 м/с^2.$$



Пример. В механизме эллипсографа в данный момент времени ползун движется со скоростью $V_A = 40\, см/с$ и ускорением $a_A = 20 см/с^2$ Направления векторов указаны на рисунке.. Длина стержня $AB = 20$ *см*. Определить скорость и ускорение ползуна *B* и точки *C*, лежащей в центре стержня *AB*.

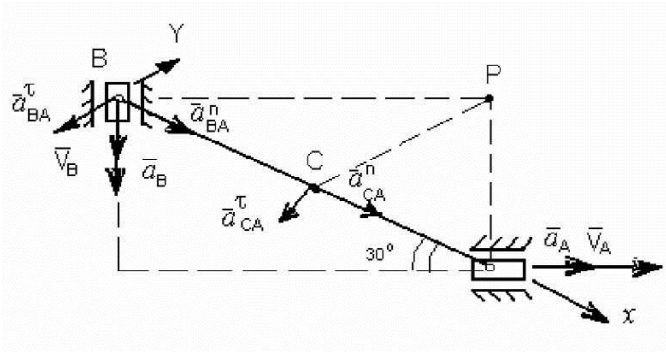
Решение:

1. Определение скоростей точек *B* и *C*

Скорость точки *B* направлена вниз вдоль направляющих. Определяем точку *P* – мгновенный центр скоростей.

$AP = AB \cdot \sin 30^o = 0{,}5 \cdot 20 = 10 см$, $BP = AB \cdot \cos 30^o = 0{,}861 \cdot 20 = 10\sqrt{3} см$.

Так как $\dfrac{V_A}{AP}=\dfrac{V_B}{BP}=\dfrac{V_C}{CP}$; то $V_B=V_A\cdot\dfrac{BP}{AP}=40\sqrt{3}=69,2см/с$.



$CP=10см$ (как часть диагонали прямоугольника), поэтому

$$V_C=V_A\cdot\frac{CP}{AP}=40см/с.$$

2. Определение ускорений точек *B* и *C*. По теореме об ускорениях точек твердого тела при его плоском движении

$$\bar{a}_B=\bar{a}_A+\bar{a}^n_{BA}+\bar{a}^\tau_{BA},\ (*)$$

где $a^n_{BA}=\omega^2_{BA}\cdot BA$; $\omega_{BA}=\dfrac{V_A}{AP}=\dfrac{40}{10}=4,0c^{-1}$. $a^n_{BA}=4^2\cdot 20=320\ см/с^2$.

Величину a^τ_{BA} - находим, проецируя равенство (*) на оси *X* и *Y*:

X: $a_B\cdot\cos 60^o=a_A\cdot\cos 30^o+a^n_{BA}+0$,

Y: $-a_B\cdot\sin 60^o=a_A\cdot\sin 30^o+0-a^\tau_{BA}$,

Откуда $a_B=\dfrac{a_A\cdot\cos 30^o+a^n_{BA}}{\cos 60^o}=\dfrac{20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+320}{0,5}=678,3\ см/с^2$

$$a^\tau_{BA}=a_A\cdot\sin 30^o+a_B\cdot\sin 60^o=20\cdot 0,5+678,3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=597,4см/с^2.$$

Т.к. $a^\tau_{BA}=\varepsilon_{BA}\cdot BA$,

то $\varepsilon_{BA}=\dfrac{a^\tau_{BA}}{BA}=\dfrac{597,4}{20}=29,87c^{-2}$ – направлено против часовой стрелки.

Для точки С имеем: $\bar{a}_C=\bar{a}_A+\bar{a}^n_{CA}+\bar{a}^\tau_{CA}$, (**)

$a^n_{CA}=\omega^2_{BA}\cdot CA=4^2\cdot 10=160см/с^2$,

$a^\tau_{CA}=\varepsilon_{AB}\cdot CA=29,87\cdot 10=298,7см/с^2$.

Проецируя выражение (**) на оси X и Y, получим:

X: $a_{CX} = a_A \cdot \cos 30^o + a_{CA}^n = 20 \cdot 0{,}866 + 160 = 177{,}3 см / c^2$,

Y: $a_{CY} = a_A \cdot \sin 30^o - a_{CA}^\tau = 20 \cdot 0{,}5 - 298{,}7 = -288{,}7 см / c^2$;

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{177{,}3^2 + (-288{,}7)^2} = 338{,}6 см / c^2.$$

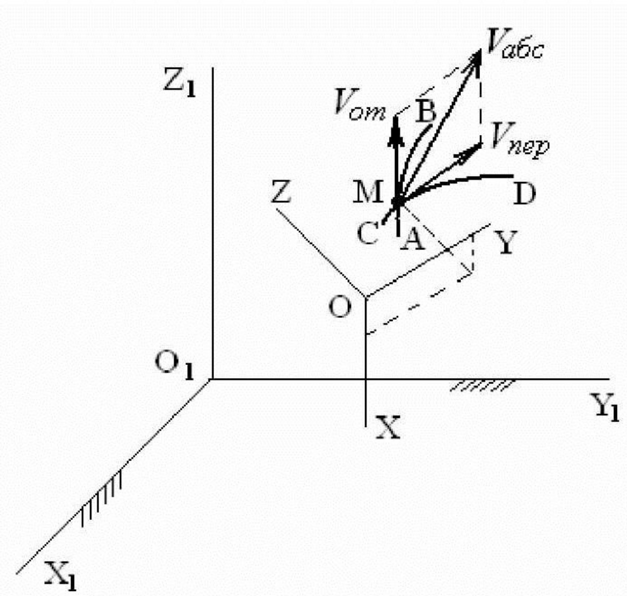
Лекция 8

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Возьмем точку М, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета OXYZ, которая, в свою очередь, движется по отношению к другой системе $O_1X_1Y_1Z_1$, которую назовем основной (условно неподвижной).

Введем следующие определения:

1. Движение, совершаемое точкой М по отношению к подвижной системе отсчета, называется относительным движением. Траектория, описываемая точкой в относительном движении, называется относительной траекторией (линия AB). Скорость точки по отношению к системе OXYZ – относительная скорость $V_{от}$, а ускорение – относительное ускорение $a_{от}$. При вычислении $V_{от}$ и $a_{от}$. движение координатных осей OXYZ во внимание не принимается.



2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета OXYZ и всеми, связанными с ней точками, по отношению к неподвижной системе $O_1X_1Y_1Z_1$, движением является для точки М переносным движением. Соответственно, скорость – переносная скорость $V_{пер}$, ускорение – переносное ускорение $a_{пер}$.

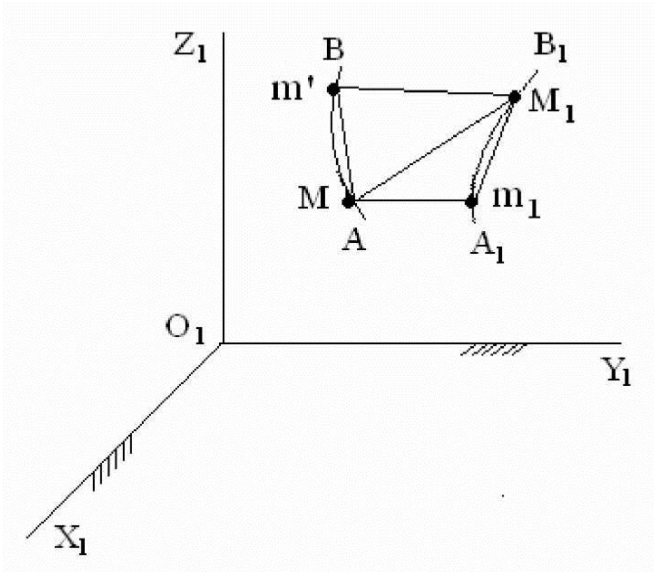
3. Движение, совершаемое точкой М по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$,, называется абсолютным или сложным. Траектория - абсо-

лютная траектория, скорость – абсолютная скорость $V_{абс}$, ускорение - абсолютное ускорение $a_{абс}$.

Например, движение человека относительно трамвая будет относительным, движение трамвая относительно рельс – переносным, а движение относительно земли - абсолютным.

<u>Теорема о сложении скоростей</u>

Рассмотрим сложное движение точки М.



Пусть точка М за время $\Delta t = t_1 - t$ совершает относительное перемещение, определяемое вектором $\overline{Mm}'$. Сама кривая АВ двигаясь вместе с подвижной системой OXYZ за это же время перейдет в положение A_1B_1. Одновременно точка М перейдет в положение m_1, определяемое вектором $\overline{Mm}_1$. В результате точка М перейдет в положение M_1. Из векторного треугольника следует

$$\overline{MM}_1 = \overline{M}m_1 + m_1\overline{M}_1$$

Деля обе части уравнения на Δt и переходя к пределу получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M}m_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\overline{M}}{\Delta t}$$

Но по определению $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM}}{\Delta t} = \overline{V}_{абс}$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M}m_1}{\Delta t} = \overline{V}_{пер}$.

При $\Delta t \to 0$ кривая A_1B_1 стремится к кривой АВ, т.е.

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{m_1\overline{M}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M}m'}{\Delta t} = \overline{V}_{от}$. В результате получим $\overline{V}_{абс} = \overline{V}_{пер} + \overline{V}_{от}$

При сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скорости.

Если угол между $\overline{V}_{от}$ и $\overline{V}_{пер}$ равен α, то по модулю

$$\overline{V}_{абс} = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2 + 2V_{от}V_{пер}\cos\alpha}.$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Продифференцируем полученное уравнение скоростей

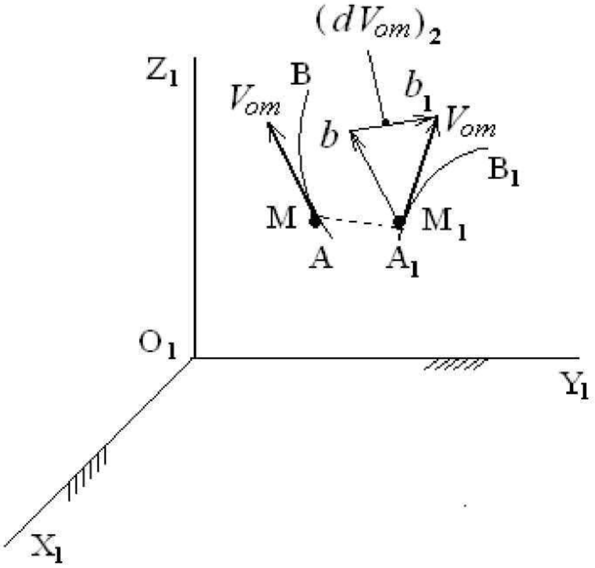
$$\overline{a}_{абс} = \frac{d\overline{V}_{абс}}{dt} = \frac{d\overline{V}_{пер}}{dt} + \frac{d\overline{V}_{от}}{dt}.$$

Производные здесь определяются изменением каждого вектора в абсолютном движении. Эти изменения слагаются, в общем случае, из изменений при переносном и относительном движениях. Условимся изменения векторов скорости при относительном движении отмечать индексом «1», а при переносном - индексом «2». Тогда

$$\overline{a}_{абс} = \frac{(d\overline{V}_{пер})_1}{dt} + \frac{(d\overline{V}_{пер})_2}{dt} + \frac{(d\overline{V}_{от})_1}{dt} + \frac{(d\overline{V}_{от})_2}{dt}$$

$a_{от} = \dfrac{(d\overline{V}_{от})_1}{dt}$ - относительное ускорение, $a_{пер} = \dfrac{(d\overline{V}_{пер})_2}{dt}$ - переносное ускорение, $a_{кор} = \dfrac{(d\overline{V}_{пер})_1}{dt} + \dfrac{(d\overline{V}_{от})_2}{dt}$ - кориолисово ускорение.

Величина $a_{кор}$, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости при ее относительном движении, называется поворотным или кориолисовым ускорением.



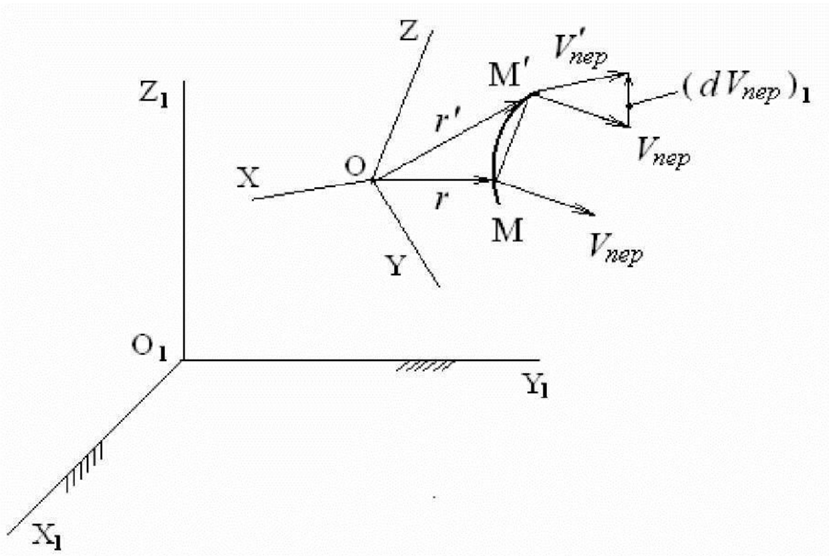
$$\overline{a}_{абс} = \overline{a}_{от} + \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{кор}$$

При сложном движении, ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова.

Найдем $\dfrac{(d\overline{V}_{от})_2}{dt}$. В общем случае, переносное движение кривой АВ можно считать слагающимся из поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг полюса с угловой скоростью ω (переносная угловая скорость).
$(d\overline{V}_{от})_2 = \overline{b\,b_1} = V_b dt$, где V_b – скорость с которой перемещается точка b (конец вектора) при повороте вектора $\overline{M_1 b} = \overline{V}_{от}$. Поворот это происходит с угловой скоростью ω, следовательно, $\overline{V}_b = \overline{\omega} \times \overline{M_1 b}$. Тогда
$\overline{V}_b dt = \overline{\omega} \times \overline{V}_{от} \cdot dt$, или

$$\frac{(d\overline{V}_{от})_2}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{V}_{от}$$

Теперь определим $\dfrac{(d\overline{V}_{пер})_1}{dt}$. Примем точку О за полюс. Тогда



$$\overline{V}_{пер} = \overline{V}_O + \overline{\omega} \times r;$$
$$\overline{MM}' = \overline{V}_{от} dt;$$
$$\overline{r}' = r + \overline{MM}'$$

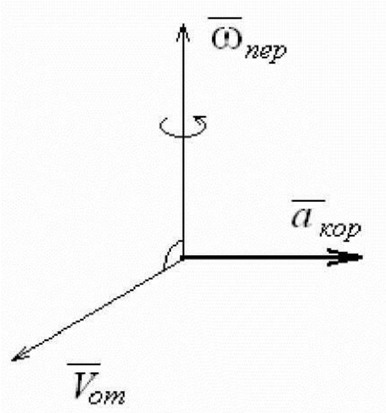
$$\overline{V}'_{пер} = \overline{V}_O + \overline{\omega} \times \overline{r} = = \overline{V}_O + \overline{\omega} \times (\overline{r} + \overline{MM}');$$
$$\overline{MM}' = \overline{V}_{от} dt.$$

Тогда
$(d\overline{V}_{пер})_1 = \overline{V}'_{пер} - \overline{V}_{пер} = \overline{\omega} \times \overline{MM}' = \overline{\omega} \times \overline{V}_{от} dt$, следовательно
$\dfrac{(d\overline{V}_{пер})_1}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{V}_{от}$. $\overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{V}_{от})$, где ω – переносная угловая скорость.

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

Модуль кориолисова ускорения определяется как $a_{кор} = |\omega| \cdot |V_{от}| \cdot \sin\alpha$,

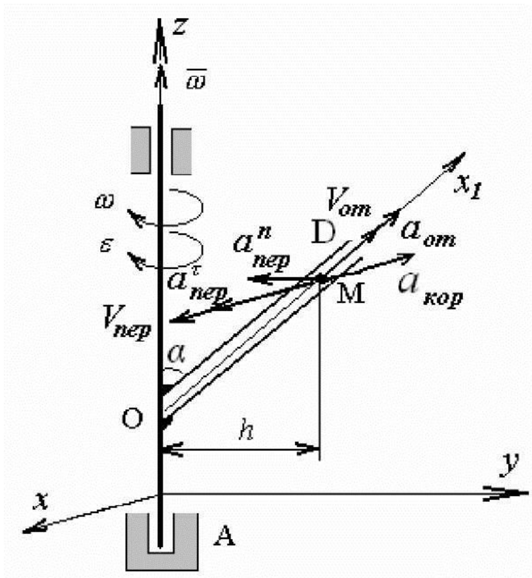
где α – угол между векторами ω и $V_{от}$. Направлено кориолисово ускорение перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{V}_{от}$ в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение $\overline{\omega}$ с $\overline{V}_{от}$ видно происходящим против хода часовой стрелки.



В трех случаях кориолисово ускорение может равняться нулю:

1. $\omega = 0$
2. $\overline{V}_{от} = 0$
3. $\alpha = 0^0$ или 180^0

Пример. Точка M движется вдоль трубки OD, наклоненной под углом α=30^O к оси oz, OM=2t^2. Трубка OD и ось Ox_1 вращаются вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω = 2c^{-1}. Требуется определить скорость и ускорение точки M в неподвижной системе координат $Oxyz$ в момент времени t=1c. В этом случае движение точки удобно представить как сложное, состоящее из двух простых движений: прямолинейного относительного движения вдоль оси Ox_1 и переносного движения, то есть вращательного движения вместе с трубкой OD.



Абсолютным движением будет движение точки относительно системы координат, принятой в качестве неподвижной (xyz).

Относительным движением считаем движение точки относительно подвижной системы координат: движение точки по трубке OD.

Правило. Для определения относительной скорости и ускорения следует мысленно остановить переносное движение, а для определения переносной скорости и ускорения следует мысленно остановить относительное движение.

Относительное движение точки M является прямолинейным, поэтому относительная скорость $\overline{V}_{от} = \dot{x}_1 = 4t$, при t=1c $\overline{V}_{от} = 4$ м/с. Относительное ускорение $a_{от} = \ddot{x}_1 = 4$ м/с и направлены вдоль оси Ox_1.

Переносное движение - движение подвижной системы координат относительно неподвижной: вращение трубки OD относительно оси Z.

Переносная скорость точки M - это скорость той точки трубки OD, которая совпадает в данный момент с движущейся точкой M. Так как трубка OD совершает вращательное движение, то переносная скорость и переносное ускорение определяют как скорость, так и ускорение точки M вращающегося тела. То есть, переносная скорость направлена параллельно оси Ox и перпендикулярно плоскости yOz , $V_{пер} = \omega h$, $h = OM \sin\alpha$ или $V_{пер} = \omega 2t^2 \sin 30^o$. При t = 1c, $V_{пер} = 2$ м/с. Т.к. переносная и относительная скорости взаимно перпендикулярны, то $\overline{V}_{абс} = \sqrt{\overline{V}_{от}^2 + \overline{V}_{пер}^2}$

Переносное ускорение точки M, как ускорение точки вращающегося тела, раскладывается на два вектора: $\overline{a}_{пер}^{\tau}$, который направлен параллельно оси Ox, и $a_{пер}^{n}$, который направлен от точки M к оси вращения Oz.

$a_{пер}^{\tau} = \varepsilon h = 0$, т.к. угловая скорость постоянная и $\varepsilon = 0$.

$a_{пер}^{n} = \omega^2 h$, при t = 1c, $a_{пер}^{n} = \omega^2 h = 4$ м/с^2.

Кориолисово ускорение $\overline{a}_{к} = 2\left|\omega_{пер}\right| \cdot \left|V_{от}\right| \sin\alpha = 8$ м/с^2.. Модуль абсолютного ускорения определяется как геометрическая сумма проекций векторов ускорений на координатные оси:

$$a_{абс} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-a_{кор})^2 + (-a_{пер}^{n} + a_{от} \sin\alpha)^2 + (a_{от} \cos\alpha)^2} \approx 8{,}4$$

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил.

Законы классической динамики

Закон I. *Изолированная материальная точка сохраняет без изменения величину и направление своей скорости.*

Изолированная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, можно сказать также, что ее ускорение равно нулю.

Это свойство называется инертностью материи. Принцип инертности установил Г. Галилей, а *прямолинейное равномерное движение называется движением по инерции.* Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называют *инерциальными системами отсчета.*

Закон II. *Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

$$m\overline{a} = \overline{F}.$$

Это равенство называют *основным уравнением динамики.*

Если на точку одновременно действует несколько сил, то они будут эквивалентны одной силе (равнодействующей) $m\overline{a} = \overline{R}$ или $m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$.

Закон III. *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Задачи динамики

Первая задача динамики: *зная закон движения точки, определить действующую на нее силу.*

Вторая (основная) задача динамики: *зная действующую на точку силы, определить закон движения.*

Для несвободной точки М, закон движения которой определен поверхностью, направляющими и т.п. обычно, зная активные силы, определяют реакции связей (первая задача). Определение закона движения точки является обратной задачей.

Дифференциальные уравнения движения точки

Из кинематики известно, что в прямоугольных декартовых координатах уравнения движения точки задаются уравнениями:

$$x = f_1(t)\ ,\ y = f_2\ (t)\ , z = f_3\ (t).$$

Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием сил F_1, $F_2 ... F_n$,. Проецируем равенство $m\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ на оси x, y, z. Учитывая, что $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}$,

Получим $$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}\ ;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}\ ;\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}\ .$$

Это *дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах.*

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

Для получения уравнений движения материальной точки на плоскости спроецируем основное уравнение динамики на оси естественного трехгранника τ, n, b. Зная что $\alpha_\tau = \dfrac{dV}{dt}$; $\alpha_n = \dfrac{V^2}{\rho}$,

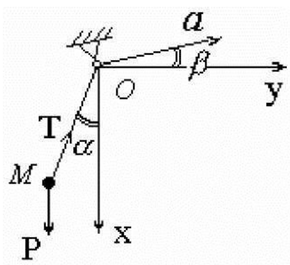
Получим $$m\frac{V^2}{\rho} = \sum F_{\text{К}n}\ ;\qquad m\frac{dV}{dt} = \sum F_{\text{К}\tau}\ ;\quad 0 = \sum F_{\text{К}b}\ .$$

Пример. Движение материальной точки массой m с некоторого момента времени происходит по окружности радиусом r согласно уравнению $S = b + 2r\ ln\ t$ (b=*const*). Определить модуль равнодействующей силы, приложенной к точке, как функцию времени t.

Решение: $F_\tau = m\dfrac{dV}{dt} = m\ddot{s} = -\dfrac{2mr}{t^2}$; $F_n = m\dfrac{V^2}{\rho} = \dfrac{m\dot{s}^2}{r} = m\dfrac{4r}{t^2}$.

Следовательно, $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{\dfrac{4m^2r^2 + 16m^2r^2}{(t^2)^2}} = \dfrac{2mr}{t^2}\sqrt{5}$.

Пример. Самолет в период взлета движется поступательно и прямолинейно с постоянным ускорением a, образующим с горизонтом угол α. Определить модуль этого ускорения, если известно, что нить OM математического маятника, находящегося на самолете, отклонена от вертикали на угол β. Каково натяжение нити, если масса маятника равна m ?



Решение: $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{T}$.

Проецируя на оси X и Y, получим x: $-ma\sin\beta = P - T\cos\alpha$, (1)

y: $ma\cos\beta = T\sin\alpha$. (2)

Помножив первое уравнение на $\cos\beta$, а второе – на $\sin\beta$, и, складывая их, получим: $0 = P\cos\beta - T\cos\alpha\sin\beta + T\sin\alpha\cos\beta$, откуда

$$T = \frac{P\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{P\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

После подстановки полученного значения силы T в уравнение (2) получим:

$$a = \frac{m\cdot g\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha}{m\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta} = \frac{g\cdot\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}.$$

Алгоритм решения второй задачи динамики

1. Составить дифференциальные уравнения движения. Для этого необходимо:

а) выбрать координатные оси, поместив их начало в начальном положении точки (если движение прямолинейное, то одну из координатных осей следует проводить вдоль линии движения точки);

б) изобразить движущуюся точку в произвольный момент времени t и показать на рисунке все действующие на нее силы, в том числе и реакции связей (если они есть);

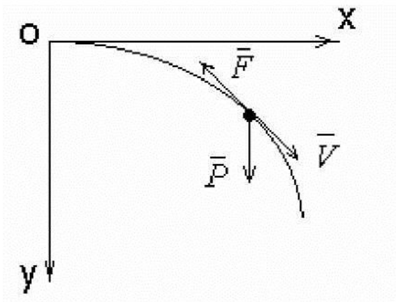
в) найти сумму проекций всех сил на выбранные оси и подставить в уравнения движения.

2. Проинтегрировать полученные уравнения .

3. Установить начальные условия движения точки М и по ним определить константы интегрирования.

4. Из полученных уравнений определить искомые величины.

Пример. Груз массой *m* сброшен без начальной скорости с самолета, движущегося горизонтально со скоростью V_o. Определить уравнение движения груза, если при его движении действует сила сопротивления $\overline{F} = -k\overline{V}$, где *k* – положительный коэффициент.



Решение:

$$m\ddot{x} = P_x + F_x = -kV_x = -k\dot{x},$$
$$m\ddot{y} = P_y + F_y = P - kV_y = P - k\dot{y}.$$

Разделяем переменные, заменив

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}; \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{md\,\dot{x}}{\dot{x}} = -\int kdt, \quad m\ln\dot{x} = -kt + C_1,$$

$$\int \frac{md\,\dot{y}}{P - k\dot{y}} = \int dt, \quad -\frac{m}{k}\ln(P - k\dot{y}) = t + C_2.$$

Начальные условия: при

$$t = 0; \quad \dot{x}_0 = V_0; \quad \dot{y}_0 = 0 \Rightarrow C_1 = m\ln V_0; \quad C_2 = -\frac{m}{k}\ln P.$$

Тогда

$$m\ln\dot{x} = -kt + m\ln V_0,$$

$$-\frac{m}{k}\ln(P - k\dot{y}) = t - \frac{m}{k}\ln P$$. Интегрируем еще раз:

$$x = -\frac{v_0 m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} + C_3, \qquad \dot{x} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$y = -\frac{P}{k} t + \frac{Pm}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} + C_4 \, . \qquad \dot{y} = \frac{P}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$

Начальные условия: *t=0; x=0; y=0,* тогда

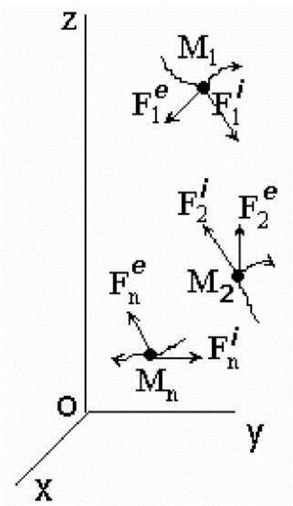
$C_3 = \frac{V_0 m}{k}; C_4 = -\frac{Pm}{k^2}$ Таким образом, находим искомые уравнения:

$$x = -\frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}),$$

$$y = -\frac{mg}{k}[t - \frac{m}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})] \, .$$

Лекция 10

ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ



Механической системой будем называть систему материальных точек. Представим себе механическую систему $M_1, M_2, ... M_i, ... M_n$ и обозначим координаты *i*-й точки через x_i;; y_i ; z_i.

Геометрическая точка ***C*** определяемая координатами

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \quad (1)$$

где $M = \sum m_i$ - масса всей системы, называется *центром инерции или центром масс системы.* Умножив числитель и знаменатель в этих формулах на ускорение свободного падения ***g***, получим выражения: $x_C = \frac{\sum p_i x_i}{P}; \ y_C = \frac{\sum p_i y_i}{P}; \ z_C = \frac{\sum p_i z_i}{P}$,

где P - вес системы.

Центр инерции (ЦИ) совпадает с центром тяжести (ЦТ) системы.

Положение центра инерции может быть также определено значением радиуса-вектора, проведенного в центр инерции из начала координатных осей. Обозначим радиус- векторы точек системы $M_1, M_2, ... M_i, ... M_n$ через $\overline{r}_1, \overline{r}_2, ... \overline{r}_n$,

тогда
$$\overline{r}_C = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{M} \qquad (2)$$

Это векторное равенство равносильно предыдущим трем, т.к., проецируя обе части равенства (2) на координатные оси, получим равенство (1).

Теорема о движении центра масс механической системы

Допустим, наша система совершает некоторое движение, при этом центр масс будет перемещаться в пространстве. Известно, что все силы можно разделить на внутренние и внешние (в данном случае это удобнее, чем деление сил на заданные и реакции связей). Обозначим равнодействующие внешних (индекс e) и внутренних (индекс i) сил через

$$\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e, \overline{F}_3^e \dots \overline{F}_n^e \quad \text{и} \quad \overline{F}_1^i, \overline{F}_2^i, \overline{F}_3^i \dots \overline{F}_n^i$$

Умножив обе части равенства (2) на M, будем иметь: $M\overline{r}_C = \sum m_i \overline{r}_i$.

Продифференцируем дважды по времени t: $M\dfrac{d^2\overline{r}_C}{dt^2} = \sum m_i \dfrac{d^2\overline{r}_i}{dt^2}$.

Т.к. вторая производная от радиуса-вектора по времени есть ускорение ***a***, запишем: $M\overline{a}_c = \sum m_i \overline{a}_i$.

С другой стороны, написав основное уравнение динамики для точки m_i,

имеем:
$$m_i \overline{a}_c = \overline{F}_i^e + \overline{F}_i^i .$$

Следовательно, $M\overline{a}_c = \sum \overline{F}_i^e + \sum \overline{F}_i^i$.

Заметим, что $\sum \overline{F}_i^i = 0$, т.к. система внутренних сил твердого тела всегда уравновешена, тогда $M\ \overline{a}_c = \sum \overline{F}_i^e$.

Отсюда следует закон движения ЦИ: *центр инерции системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы.*

Проецируя уравнение на координатные оси, получим:

$$M\ddot{x}_c = \sum X_i^e \ , \quad M\ddot{y}_c = \sum Y_i^e \ , \quad M\ddot{z}_c = \sum Z_i^e \ .$$

Это *дифференциальные уравнения движения центра масс.*

Значение доказанной теоремы состоит в следующем:

1. Теорема дает обоснование использования методов динамики точки при рассмотрении системы, т.е. решение, которое мы получаем, рассматривая тело как материальную точку, определяет закон движения центра масс этого тела. Поступательно движущееся тело всегда можно рассматривать как материальную точку.
2. Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все неизвестные внутренние силы. В этом и состоит ее практическая ценность.

<u>Закон сохранения движения центра масс</u>

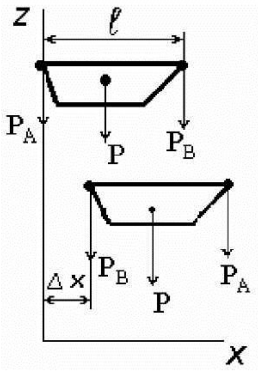
Представляет собой следствие из закона движения ЦИ.

1. *Если сумма действующих на систему внешних сил равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной скоростью, т.е. равномерно и прямолинейно.* $\sum \overline{F}_i^e = 0$ тогда $\overline{a}_C = 0$ следовательно; $\overline{V}_c = const$.

2. *Если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось есть величина постоянная.* При $\ddot{x} = 0 \quad \dot{x} == V_{CX} = const$.

В частном случае, если $V_{CX} = 0$, то $X_C = const$, т.е. положение центра масс останется неизменным.

Пример. На носу и корме лодки весом P сидят на расстоянии L друг от друга два человека весом P_A и P_B. Пренебрегая сопротивлением воды, определить, куда и насколько переместится лодка, если люди поменяются местами.



<u>Решение:</u> Рассмотрим лодку, как одну систему. Это позволит исключить внутренние силы (трение подошвы о лодку и т.п.). Все внешние силы будут вертикальными, следовательно $\sum F_x = 0$, а т.к. в начальный момент $V_C = 0$, то центр тяжести останется на месте, т.е. $x_C = \dfrac{\sum p_i x_i}{P} = \dfrac{P_A x_A + P_B x_B + P x_o}{P_A + P_B + P} =$

$\dfrac{P_B \Delta x + P(\Delta x + \frac{l}{2}) + P_A(\Delta x + l)}{P_A + P_B + P}$. тогда

$P_A \cdot 0 + P_B \cdot l + P \cdot \dfrac{l}{2} = P_B \cdot \Delta x + P \cdot (\Delta x + \dfrac{l}{2}) + P_A \cdot (\Delta x + l)$, откуда $\Delta x = \dfrac{l \cdot (P_B - P_A)}{P_A + P_B + P}$.

<u>Осевые моменты инерции</u>

Момент инерции тела относительно оси; радиус инерции. Осевой момент является мерой инертности тела при вращательном движении и играет такую же роль, как масса при поступательном движении. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний до этой оси:* $J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^2$. Размерность– $кг \cdot м^2$.

Величину h_k^2 можно выразить через координаты точек x_K; y_K; z_K, например: $h_k^2 = y_k^2 + x_k^2$, тогда $J_Z = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2)$.

Аналогично, $J_X = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$; (3)

$$J_Y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2).$$

При практических расчетах пользуются также линейной величиной, называемой *радиусом инерции* и обозначаемой i. Представим выражение для момента инерции в виде $J_Z = M \cdot i^2$, где M - масса тела.

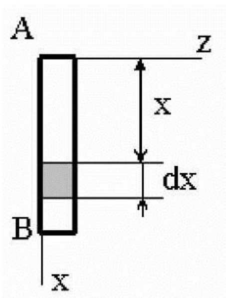
Тогда радиус инерции – это расстояние от оси до той точки, в которой нужно сосредоточить массу тела, чтобы момент инерции этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Рассматривая формулы (3)с учетом того, что $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, V – объем, получим $J_Z = \int\limits_V h^2 dm = \int\limits_V \rho h^2 dV = \int\limits_V \rho(x^2 + y^2) dV$

<u>Моменты инерции некоторых тел</u>

1. Тонкий однородный стержень длиной l ***и массой М.***

Найдем момент инерции относительно оси Az. Для любого отрезка dx величина $h = x$, а масса $dm = \rho \cdot dx$, где $\rho = M/l$ – масса единицы длины стержня. $J_Z = \int\limits_0^l x^2 \cdot dm = \rho \cdot \int\limits_0^l x^2 \cdot dx = \dfrac{\rho \cdot l^3}{3}$.



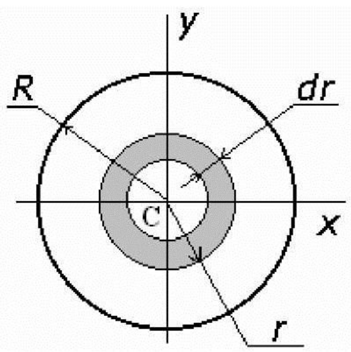
Подставляя значение ρ, получим $J_Z = \dfrac{M \cdot l^2}{3}$.

2.Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой М.

Все точки кольца равноудалены от его центра C, следовательно:

$J_{ZC} = \sum m_k \cdot R^2 = R^2 \cdot \sum m_k = M \cdot R^2$. Таким образом, $J_{ZC} = M \cdot R^2$.

Такой же результат будет для цилиндрической оболочки.



3. Круглая однородная пластина (диск).

Выделим элементарное кольцо радиусом r, шириной dr. Площадь кольца $S = 2\pi\, r \cdot dr$

$dm = \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$, где $\rho = \dfrac{M}{\pi \cdot R^2}$, тогда

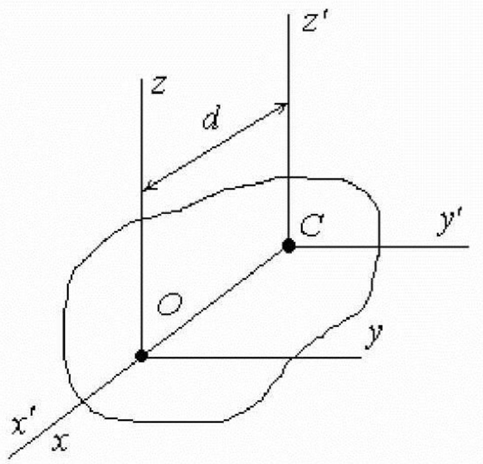
$dJ = r^2 \cdot dm$. Интегрируем:

$$J_{ZC} = \int\limits_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot \rho \cdot \int\limits_0^R r^3 \cdot dr = \frac{\pi \cdot \rho \cdot R^4}{2}.$$

Подставив значение ρ, получим: $J_{ZC}=\dfrac{M\cdot R^2}{2}$.

Момент инерции тела относительно параллельных осей

Теорема Гюйгенса. Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, в общем случае, разными. Зная J_C относительно одной оси, можно найти J_O относительно другой, ей параллельной.



Проведем оси x', y', z' через центр масс C и через произвольную точку 0, лежащую на оси Cx', – параллельные оси x, y, z на расстоянии d.

Пользуясь формулами (3), запишем:

$$J_{OZ}=\sum m_k(x_k^2+y_k^2);\;\; J_{CZ'}=\sum m_k(x_k'^2+y_k'^2).$$

Из рисунка видно, что

$$x_k=x_k'-d;\;\; x_k^2=x_k'^2+d^2-2x_k'd;\;\; y_k=y_k'.$$

Тогда $$J_{OZ}=\sum m_k(x_k'^2+y_k'^2)+\sum m_k d^2-\sum m_k x_k' 2d,$$

$$\sum m_k(x_k'^2+y_k'^2)=J_{CZ'};\;\; \sum m_k d^2=Md^2;\;\; \sum m_k x_k' 2d=Mx_k'.$$

Т.к. точка C является центром тяжести, то $x_C'=\dfrac{\sum m_k x_k'}{M}=0$,

Следовательно, третья сумма равна нулю, тогда $J_{OZ}=J_{OZ'}+Md^2$.

Итак, теорема Гюйгенса формулируется следующим образом:

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, ей параллельной, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.

Очевидно, что $J_{OZ}>J_{CZ'}$, момент инерции тела, относительно оси, проходящей через центр масс, будет наименьшим

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\vec{V}$ *, равная произведению массы точки на вектор ее скорости.*

Единица измерения $[m\vec{V}]$ – *кг м/с* или *Н с.*

Элементарным импульсом силы называется векторная величина $d\vec{s}$ *, равная произведению вектора силы* $\vec{F}$ *на элементарный промежуток времени* dt *:*

$$d\vec{s} = \vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = \int_0^{t_1} \vec{F}\,dt$$

Импульс силы за некоторый промежуток времени t_1 равен определенному интегралу от элементарного импульса взятому в пределах от 0 до t_1. Если сила F постоянна по модулю и направлению, то $\bar{s} = \overline{F}t$. В общем случае модуль $\bar{s}$ может быть вычислен по его проекциям на координатные оси:

$$s_X = \int_0^{t_1} \vec{F}_X\,dt \;; \quad s_Y = \int_0^{t_1} \vec{F}_Y\,dt \;; \quad s_Z = \int_0^{t_1} \vec{F}_Z\,dt \;.$$

Единица измерения $[s]$ - *Н·с = кг м с/с*^{2} *= кг м / с*

По второму закону Ньютона: $m\bar{a} = \sum \overline{F}$,

а т.к. $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$, то $\dfrac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$.

Таким образом, теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме формулируется в следующем виде:

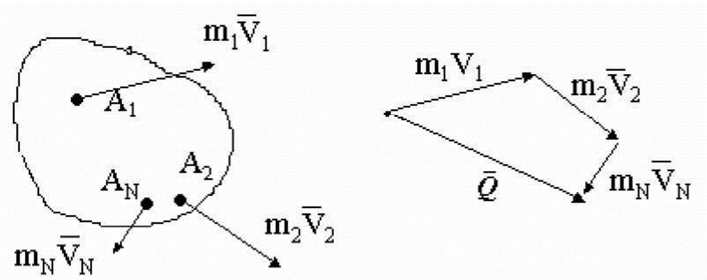
Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на нее сил.

Умножим обе части равенства на dt и проинтегрируем:

$$m\,\overline{V_1} - m\,\overline{V_0} = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_K\,dt \quad \text{или} \quad m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \sum \overline{S}_K .$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме: *изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.*

Количеством движения механической системы называется векторная величина $\overline{Q}$ *, равная геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы:* $\vec{Q} = \sum m_K \vec{V}_K$.



Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_K \vec{r}_K}{M}$$ или $$\sum m_K \vec{r}_K = M \cdot \vec{r}_C .$$

Продифференцируем уравнение по времени: $\sum m_K \dfrac{d\vec{r}_K}{dt} = M \dfrac{d\vec{r}_C}{dt} \Rightarrow \sum m_K \vec{V}_K = M\vec{V}_C$.

Следовательно, $$\overline{Q} = M \cdot \vec{V}_C .$$

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.

При $Vc = 0$, $Q = 0$, например, при вращении тела относительно оси проходящей через центр масс тела.

Если движение тела сложное или плоскопараллельное, то количество движения Q не зависит от вращательного движения вокруг центра масс (например, колесо катится по рельсу). *Количество движения - характеристика поступательного движения тела, а при сложном движении - характеристика поступательной части движения вместе с центром масс.*

Рассмотрим систему из n материальных точек. Составим уравнения движения для каждой точки и сложим их: $$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i .$$

Т.к. $\sum \vec{F}_k^i = 0$ (свойство внутренних сил), то

$$\sum m_k \vec{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e .$$

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e ; \qquad \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e ; \qquad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e .$$

Разделив переменные и взяв интеграл, получим запись теоремы об изменении количества движения в конечной форме:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt \quad \text{или} \quad \vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e .$$

В проекциях на координатные оси :

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e ,$$
$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e ,$$
$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e .$$

При решении задач о движении твердого тела удобнее пользоваться теоремой о движении центра масс $M \cdot \overline{a}_c = \sum \overline{F}_k^e$. Однако, в задачах с газами, жидкостью, реактивным движением и ударом удобнее пользоваться теоремой об изменении количества движения $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$.

<u>Закон сохранения количества движения</u>

1. *Если сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то вектор количества движения системы есть величина постоянная по модулю и направлению:*

Если $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = 0$, следовательно $\overline{Q} = const$.

2. *Если сумма проекций всех действующих сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная:*

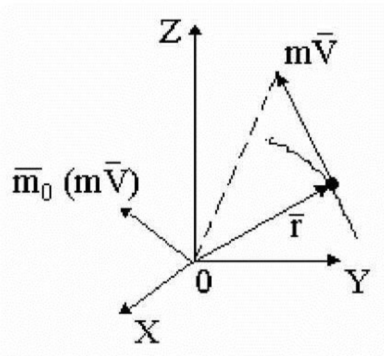
Если $\sum F_{kx}^{e} = 0$, то $\dfrac{dQ_x}{dt} = 0$, следовательно $Q_X = const$.

Лекция 12

ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВ ДВИЖЕНИЯ
(кинетический момент) системы относительно центра и оси

Моментом количества движения точки относительно некоторого центра O называется векторная величина $\bar{m}_o(m\bar{V})$, *определяемая равенством*

$$\overline{m}_o(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V} \qquad (*),$$



где $\bar{r}$ – радиус-вектор движущейся точки. Вектор $m_0(m\overline{V})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через $m\overline{V}$ и центр O, а модуль равен

$$\left|m_0(m\overline{V})\right| = m \cdot V \cdot h,$$

где h – кратчайшее расстояние от центра до линии действия вектора скорости.

Момент количества движения (МКД) точки относительно какой либо оси Oz, проходящей через центр O, равен проекции вектора $\overline{m}_0(m\bar{V})$ *на эту плоскость:*

$$m_z(m\vec{V}) = \left[\vec{m}_0(m\vec{V})\right]_Z = \left|m_0(m\vec{V})\right|\cos\gamma.$$

Продифференцируем обе части уравнения (*):

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{V}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{V}\right) + \left(\vec{r}\times m\frac{d\vec{V}}{dt}\right) = (\vec{V}\times m\vec{V}) + (\vec{r}\times m\vec{a}).$$

Выражение $(\vec{V} \times m\vec{V}) = 0$ как векторное произведение двух параллельных векторов. Учитывая, что $\vec{r} \times m\bar{a}$ – момент силы $\bar{F}$ относительно центра O, получим:
$$\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_0(m\vec{V})\right] = \vec{m}(\vec{F}).$$

Теорема об изменении момента количества движения точки. *Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.*

<u>Закон сохранения момента количества движения точки</u>

Из равенства следует, что если $\vec{m}(\vec{F}) = 0$, то $\vec{m}_0(m\vec{V}) = const$.

Если момент действующих сил относительно некоторого центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная.

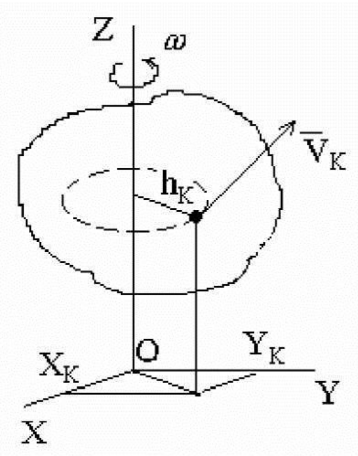
Такое возможно в двух случаях: либо $\bar{R} = \sum \bar{F}_K = 0$, либо плечо равно нулю, тогда эта сила будет называться центральной, т.е. линия ее действия проходит все время через данный центр O (например, сила притяжения планет к Солнцу, сила натяжения нити при кордовой модели).

Главным моментом количеств движения (или кинетическим моментом) системы относительно данного центра O называется векторная величина $\vec{K}_0$, *равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:*
$$\vec{K}_0 = \sum \vec{m}_0(m_K\vec{V}_K)$$

Аналогично определяются моменты количеств движения (МКД) относительно координатных осей:
$$K_x = \sum m_x(m_K\vec{V}_K),$$
$$K_y = \sum m_y(m_K\vec{V}_K),$$
$$K_z = \sum m_z(m_K\vec{V}_K).$$

Главный МКД системы может рассматриваться как характеристика вращательного движения.

Кинетический момент вращающегося тела



Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Z. Определим K_Z

Возьмем точку K на расстоянии h_K от оси. Она будет иметь скорость, равную

$$V_K = \omega h_K,$$

где ω - угловая скорость тела.

Тогда $m_Z(m_k\vec{V}_k) = m_k V_k h_k = m_k h_k^2 \omega$.

Для всего тела $K_Z = \sum m_Z(m_k\vec{V}_k) = \sum(m_k h_k^2)\cdot\omega$.

Т.к. $\sum m_k h_k^2 = J_Z$, то $$K_Z = J_Z \cdot \omega$$

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной оси, то $$K_Z = J_{1Z}\cdot\omega_1 + J_{2Z}\cdot\omega_2 + \ldots + J_{nZ}\cdot\omega_n.$$

Теорема об изменении главного момента количеств движения механической системы (теорема моментов)

Как было доказано для любой точки системы

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_0(m\vec{V})\right] = \overline{m}_0(\vec{F}_k^e) + \overline{m}_0(\vec{F}_k^i),$$

где $\overline{m}_0(\vec{F}_k^e)$ и $\overline{m}_0(\vec{F}_k^i)$ – моменты внешних и внутренних сил. Составим такие уравнения для всех точек и, складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum \vec{m}_0(m_K\vec{V}_K)\right] = \sum \overline{m}_0(\vec{F}_K^e) + \sum \overline{m}_0(\vec{F}_K^i).$$

Т. к. $\sum \overline{m}_0(\vec{F}_K^i) = 0$, то $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \sum \overline{m}_0(\vec{F}_K^e)$.

Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проецируя уравнение на координатные оси, получим:

$$\frac{dK_X}{dt} = \sum m_X(\vec{F}_K^e),$$

$$\frac{dK_Y}{dt} = \sum m_Y(\vec{F}_K^e),$$

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\vec{F}_K^e).$$

Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения может быть изучена с помощью теорем о движении центра масс или об изменении количества движения, а вращательная – с помощью теоремы моментов.

Для осей, движущихся поступательно вместе с центром масс, теорема сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра:

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum \overline{m}_C(\vec{F}_K^e).$$

<u>Законы сохранения главного момента количеств движения</u>

Из теоремы можно получить два следствия:

1. *Если сумма моментов всех действующих внешних сил относительно данного центра равна нулю, то главный МКД относительно этого центра есть величина постоянная по модулю и направлению:*

$$\sum \vec{m}_0(m_K \vec{V}_K) = 0 \Rightarrow \vec{K}_0 = const.$$

2. *Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный МКД системы относительно этой оси будет величиной постоянной:*

$$\sum m_X(m_K\overline{V}_K)=0 \Rightarrow K_X = const \,.$$

Это и есть законы сохранения главного МКД, т.е. внутренние силы изменить главный МКД не могут.

Частный случай вращающейся системы.

Пусть система вращается относительно оси , проходящей через центр масс, тогда $K_Z = J_Z \cdot \omega$. Если в этом случае $\sum m_Z(m_K\overline{V}_K)=0$, то $K_z = J_Z \cdot \omega = const$.

Отсюда следуют два вывода:

а) если тело абсолютно твердое (J_Z= *const*), то и ω = *const* (неизменяемая система);

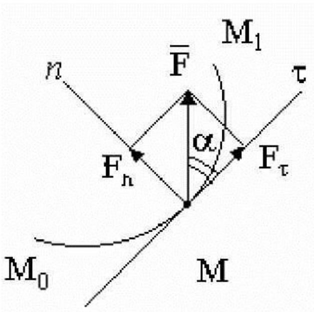
б) если система является изменяемой, то при увеличении момента инерции J_Z угловая скорость ω будет уменьшаться, и наоборот (например, фигуристы в волчке , гимнасты при исполнении сальто, раскачивание качели и т.п.).

Лекция 13

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при его перемещении, существует понятие о работе силы.

Элементарной работой силы F приложенной в точке M называется скалярная величина $dA = F_\tau \cdot dS,$



где F_τ - проекция силы на касательную к траектории (направление скорости):

$F_\tau = F \cdot cos\alpha,$ тогда $dA = F \cdot ds\ cos\alpha.$.

При остром угле α работа положительна (сила помогает движению); если α - тупой, работа отрицательна (мешает движению); при $\alpha = 90^0$ работа равна нулю (не влияет на движение)

Если учесть, что $dS = /dr/$, где dr - вектор элементарного перемещения точки, то элементарная работа равна скалярному произведению двух векторов:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}\ .$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения точки её приложения.

Т.к. $r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z$, то аналитическое выражение работы:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz\ .$$

Работа на любом перемещении – это предел интегрируемой суммы:

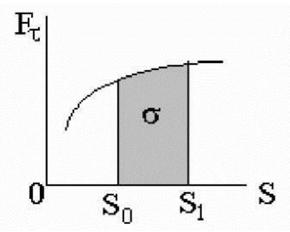
$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot ds\ , \quad A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z . dz)$$

В этих выражениях интеграл вычисляется вдоль кривой M_0M_1 .

Если величина $F_\tau = const$,то $A_{(M_0M_1)} = F_\tau \cdot s$.

Единица измерения работы – 1 *Джоуль* = 1 *Н·м.*

Графический способ вычисления работы



$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{S_0}^{S_1} F_\tau ds .$$

Геометрический смысл работы - площадь, ограниченная осью S, кривой $F_\tau(S)$ и ординатами силы F_τ.

Мощность

Мощностью называется величина, равная работе, совершенной в единицу времени.

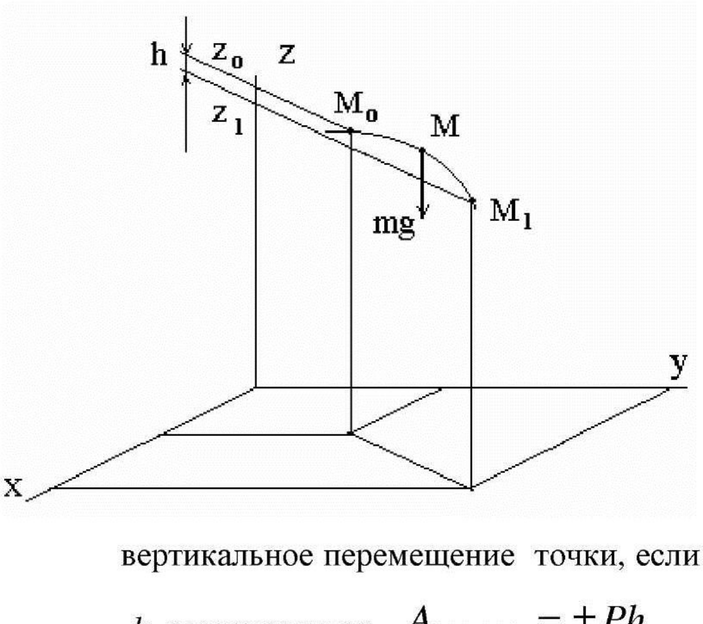
$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau \cdot ds}{dt} = F_\tau \cdot V .$$

Если работа совершается равномерно, то $N = \dfrac{A}{t}$.

Единица измерения мощности – 1 *Ватт* = 1 *Дж/с*. В технике используется также единица, называемая *лошадиной силой* (л.с.): 1 л.с. = 736 Вт.

Для измерения работы в технике широко используется единица, называемая *киловатт-часом:* 1 $кВт{\cdot}ч = 3{,}6\ 10^6$ *Дж.*

Из равенства $N = F{\cdot}V$ видно, что при движении в гору автомобиль, развивая ту же мощность, может увеличить силу тяги, уменьшив скорость. Поэтому и включают пониженную передачу.



Примеры вычисления работы

1. Работы силы тяжести. Пусть точка М под действием силы тяжести перемещается из положения M_0 в положение M_1.

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{Z_0}^{Z_1} F_z dz = \int_{Z_0}^{Z_1} - Pdz$$

Если M_0 выше M_1 то $Z_0 - Z_1 = h$, где h- вертикальное перемещение точки, если точка перемещается вверх, то $Z_0 - Z_1 = -h$, следовательно, $A_{(M_0 M_1)} = \pm Ph$.

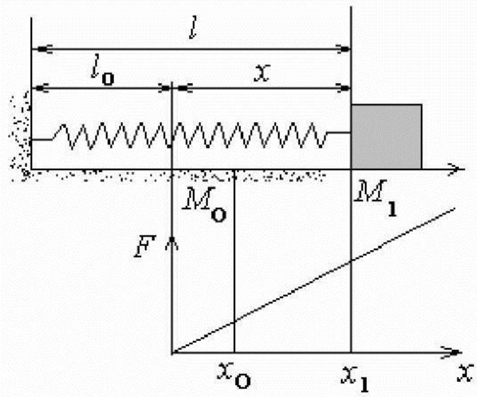
Работа силы тяжести не зависит от траектории движения точки, т.е.сила тяжести является потенциальной.

2. Работа силы упругости. Рассмотрим груз M , лежащий на плоскости и прикрепленный к свободному концу пружины.

l_0 - длина свободной пружины; l - длина растянутой пружины;

$\lambda = l - l_0$ - удлинение пружины. Т.к. $\lambda = x$, а $F_x = -cx$ (по закону Гука), то

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1}(-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2) .$$

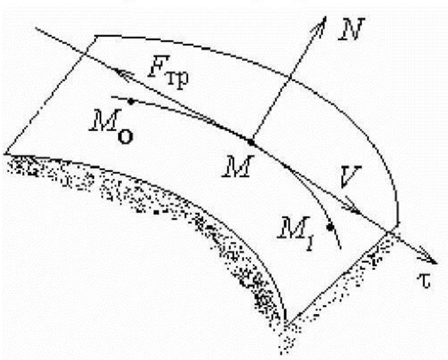


Этот же результат можно получить графически.

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинения.

Формула справедлива и тогда, когда перемещение груза не является прямолинейным, т.е. не зависит от траектории, следовательно, *сила упругости тоже является потенциальной.*

3. Работа силы трения. Пусть точка движется по шероховатой поверхности по кривой M_0M_1. Известен коэффициент трения $f_{тр}$.. Поскольку



$$F_\tau = -F_{тр} = -f_{тр} \cdot N ,$$

где N - нормальная реакция поверхности, то

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_{тр}\, ds = \int_{M_0}^{M_1} f_{тр} \cdot N ds .$$

Если сила трения постоянна, то

$A_{(M_0M_1)} = -F_{тр} \cdot s$, где S - длина дуги кривой.

Таким образом, работа силы трения скольжения всегда отрицательна. Т.к. сила трения зависит от длины дуги (от траектории), то является *непотенциальной.*

Вычисление работы сил, приложенных к вращающемуся телу

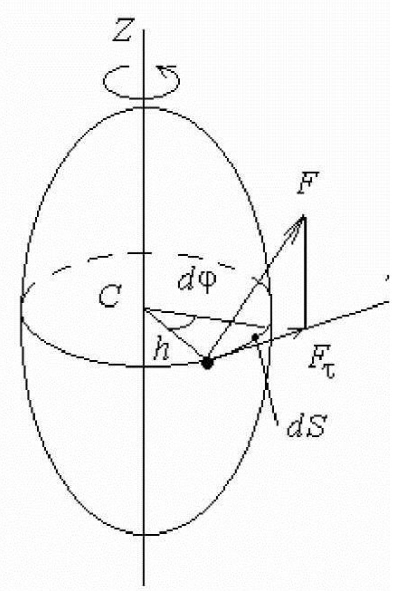
Элементарная работа $dA = F_\tau dS = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi$, где $dS = h\,d\varphi$ (см. рис.).

Т.к. произведение $F_\tau \cdot h = M_z$ (M_z – вращающий момент), то $dA = M_z \cdot d\varphi$.

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z d\varphi .$$

В случае постоянного момента $A = M_Z \cdot \varphi_1$.

Работа при вращательном движении равна произведению вращающего момента на угол поворота тела.



Определим мощность: $N = \dfrac{dA}{dt} = M \cdot \dfrac{d\varphi}{dt} = M \cdot \omega$.

Мощность при вращательном движении равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия (КЭ) материальной точки называется скалярная величина $\dfrac{mV^2}{2}$,*равная половине произведения массы точки на квадрат скорости.*

Единица измерения КЭ – 1 *Джоуль* (та же, что и для измерения работы).

Пусть точка массой m перемещается из положения M_0 со скоростью V_0 в положение M_1, где ее скорость будет V_1.

Известно, что $m \cdot a = \sum F_k$. Проецируя равенство на ось τ, получим

$$m \cdot a_\tau = \sum F_{k\tau} . \qquad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV \cdot ds}{ds \cdot dt} = V \cdot \frac{dV}{ds} .$$

Тогда $$m \cdot V \cdot \frac{dV}{ds} = \sum F_{k\tau} \Rightarrow m \cdot V \cdot dV = \sum F_{k\tau} \cdot ds ,$$

следовательно, $m \cdot V \cdot dV = \sum dA \Rightarrow d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum dA$.

Проинтегрировав это выражение в пределах от M_0 до M_1, получим:

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)} .$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Эту теорему называют теоремой об изменении кинетической энергии точки в конечном виде.

Кинетическая энергия системы

Кинетической энергией системы называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы: $T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}$.

Вычислим кинетическую энергию при различных видах движения твердого тела.

Поступательное движение. В этом случае все точки движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс – $V_k = V_c$.

$T = \sum \frac{m_k V_c^2}{2} = (\sum m_k)\frac{V_c^2}{2}$, следовательно, $T = \frac{MV_c^2}{2}$.

Вращательное движение. Пусть тело вращается относительно оси Oz с угловой скоростью ω, тогда $V_k = \omega \cdot h_k$

где h_k - расстояние от точки до оси вращения; ω - угловая скорость, тогда

$T = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = (\sum m_k h_k^2)\frac{\omega^2}{2}$, следовательно, $T = \frac{J_Z \cdot \omega^2}{2}$.

Плоскопараллельное движение. *При этом движении все точки тела совершают вращательное движение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей, следовательно* $T = \dfrac{J_P \cdot \omega^2}{2}$,

где J_P - момент инерции тела относительно оси проходящей через МЦС. J_P – величина переменная, т.к. положение мгновенного центра скоростей (точки P) в каждый момент времени меняется. По теореме Гюйгенса $J_P = J_C + Md^2$,

где $d = PC$, тогда $\omega d = \omega PC = V_C$ $T = \dfrac{M \cdot V_C^2}{2} + \dfrac{J_C \cdot \omega^2}{2}$.

При плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, доказанной Кенигом (1751 г.).

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Вспомним, что эта теорема для точки записывается в следующем виде:

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i$$

Составим также уравнения для системы из n точек и почленно их сложим:

$$d\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = d\sum A_k^e + d\sum A_k^i \quad \text{или} \quad dT = d\sum A_k^e + d\sum A_k^i.$$

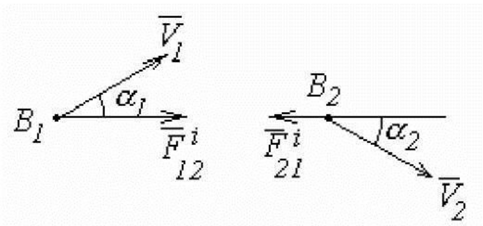
Это равенство выражает *теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.* Проинтегрировав, получим:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Это запись теоремы *в интегральной форме.*

Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

В отличии от других теорем внутренние силы здесь не исключаются. Несмотря на то, что $F_{12}^{i} + F_{21}^{i} = 0$, точки B_1 и B_2 могут перемещаться по направлению друг к другу, а работы сил будут положительными и сумма работа не равна нулю.



Неизменяемой называется такая система, в которой расстояние между каждыми двумя точками в течение всего времени движения остается неизменным.

По теореме о проекциях скоростей $V_1 \cdot \cos\alpha_1 = V_2 \cdot \cos\alpha_2$

или, поскольку $ds = V \cdot dt$, $ds_1 \cdot \cos\alpha_1 = ds_2 \cdot \cos\alpha_2$.

Кроме того, $F_{12}^{i} + F_{21}^{i} = 0$,тогда

$$dA_1 + dA_2 = F_{12}^{i} \cdot ds_1 \cdot \cos\alpha_1 - F_{21}^{i} \cdot ds_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0.$$

В случае неизменяемой системы сумма работ внутренних сил равна нулю, а уравнение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме примет вид: $dT = \sum dA_k^e$, $T_1 - T_0 = \sum A_k^e$.

Изменение кинетической энергии неизменяемой системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних сил.

Система с идеальными связями

Разделим все внешние и внутренние силы на активные и реакции связей, тогда $dT = d\sum A_k^A + d\sum A_k^R$.

Но при идеальных связях отсутствует перемещение связей, следовательно, $dA_k^R = 0$, т.к. $dS = 0$.

Например, при движении (скольжении) тела по поверхности без трения (так же, как и при качении без скольжения) работа реакции N равна нулю. Работа реакции шарнира, если пренебречь трением, также равна нулю. Поэтому

$$dT = d\sum A_k^A, \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^A.$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Пусть на материальную точку массой m действует система активных сил с равнодействующей $\overline{F}^a$ и реакция связи $\overline{N}$. Под действием этих сил точка будет двигаться по отношению к системе отсчета с ускорением $\overline{a}$. Введем величину

$$\vec{F}^{\,u} = -m\,\overline{a}$$

и назовем ее *силой инерции.*

Если в любой момент времени к действующим на точку активным силам и реакции связи присоединить силу инерции, то полученная система будет уравновешенной:

$$\vec{F}^{\,a} + \overline{N} + \vec{F}^{\,u} = 0\,.$$

Это *принцип Даламбера для материальной точки* (начало Даламбера). Очевидно, что он эквивалентен второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}^{a} + \vec{N}.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Возьмем точку системы массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил точка будет двигаться с ускорением $\overline{a}$. Введем силу инерции и сформулируем принцип Даламбера для механической системы.

Если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме действующих на нее внешних и внутренних сил, присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.

$$\vec{F}_k^{\,e} + \vec{F}_k^{\,i} + \vec{F}_k^{\,u} = 0$$

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при решении задач динамики уравнения движения системы составляются в виде простых уравнений равновесия (статики):

$$\sum(\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u) = 0$$

$$\sum[\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^u)] = 0\cdot$$

Введем обозначения: $\vec{R}^{u} = \sum \vec{F}_k^{u}$ - главный вектор сил инерции системы, $\vec{M}_0^{u} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^{u})$ - главный момент относительно центра инерции O. Учитывая, что сумма внутренних сил и их моментов равна нулю, получим:

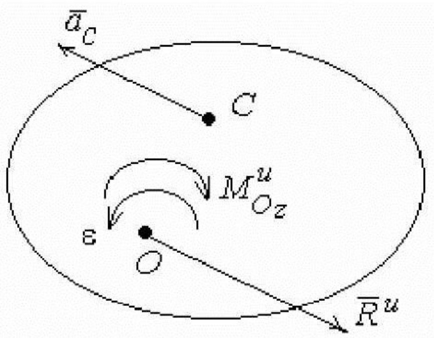
$$\sum(\vec{F}_k^{e} + \vec{R}^{u}) = 0,$$

$$\sum[\vec{m}_0(\vec{F}_k^{e}) + \vec{M}_0^{u}] = 0.$$

В проекции на координатные оси эти уравнения аналогичны уравнениям статики.

Приведение сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение. Все точки тела движутся с одинаковыми траекториями и ускорениями, равными ускорению центра масс $\overline{a}_C$ (по определению поступательного движения). Тогда имеем равнодействующую сил инерции, проходящую через центр масс:



$$\vec{F}^{u} = -m \cdot \vec{a}_C .$$

2. Вращательное движение. Пусть твердое тело вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной плоскости xOy (плоскости материальной симметрии). Если привести силы инерции к центру O, то образуется равнодействующая сил инерции $\overline{R}^{u}$, приложенная в точке O, и главный момент сил инерции

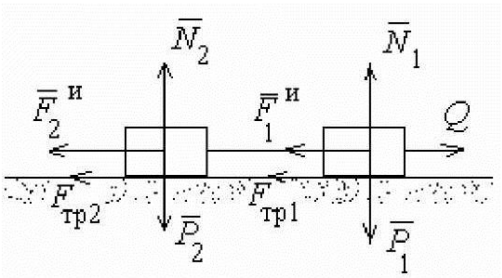
$$\overline{M}_{oz}^{u} = -J_{0z} \cdot \overline{\varepsilon} = -J_{oz} \cdot \overline{\dot{\omega}}$$, лежащий в плоскости xOy.

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. В этом случае $\overline{R}^{u} = 0$, т.к. $a_C = 0$. Таким образом, система сил инерции тела приводится только к паре с моментом

$$\overline{M}_{oz}^{u} = -J_{0z} \cdot \overline{\varepsilon} .$$

4. Плоскопараллельное движение. Если тело движется параллельно плоскости симметрии, то система сил инерции приведется к $\overline{R}^{и}$, приложенной в центре масс и паре с моментом $\overline{M}^{и}_{cz} = -J_{cz} \cdot \overline{\varepsilon}$

Пример. Два груза весом $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, связанные нитью, движутся по горизонтальной плоскости под действием силы $\overline{Q}$, приложенной к первому грузу. Коэффициент трения скольжения грузов о плоскость равен f. Определить ускорение грузов и натяжение нитей.



Решение:

Обозначим все действующие внешние силы и приложим в центре масс каждого из грузов силы инерции, численно равные:

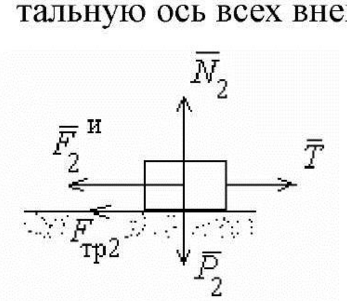
$$F_1^{и} = \frac{P_1}{g}a; \quad F_2^{и} = \frac{P_2}{g}a.$$

Запишем уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось:

$$Q - f\cdot(P_1+P_2) - \frac{P_1+P_2}{g}\cdot a = 0,$$

$$a = \frac{Q - f\cdot(P_1+P_2)}{P_1+P_2}\cdot g = \left[\frac{Q}{P_1+P_2} - f\right]\cdot g.$$

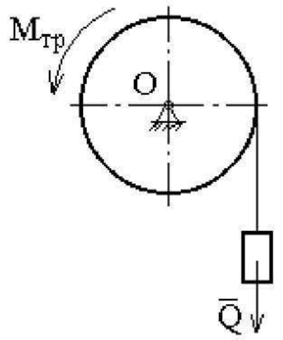
Для определения натяжения нити рассмотрим сумму проекций на горизонтальную ось всех внешних сил, действующих, например, на второй груз:



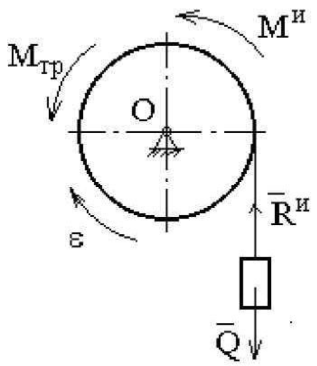
$$T - F_2^{и} - F_{тр2} = 0, \quad \text{откуда } T = \frac{P_2}{g}\cdot a + P_2\cdot f = P_2\cdot\frac{Q}{P_1+P_2}.$$

Интересно, что сила натяжения не зависит от коэффициента трения (от силы трения) и тем меньше, чем меньше вес второго груза.

Пример. На барабан весом P и радиусом r намотана нить с грузом на конце, весом $\overline{Q}$. Пренебрегая весом нити, определить угловое ускорение барабана и натяжение нити, если радиус инерции относительно оси O равен ρ и на барабан действует постоянный момент сил трения Mтр.



Решение:



"Остановим" груз силой инерции (т.к. он движется поступательно), а барабан - моментом сил инерции:

$$R^u = \frac{Q}{g} \cdot a^\tau = \frac{Q}{g} \cdot r \cdot \varepsilon;$$

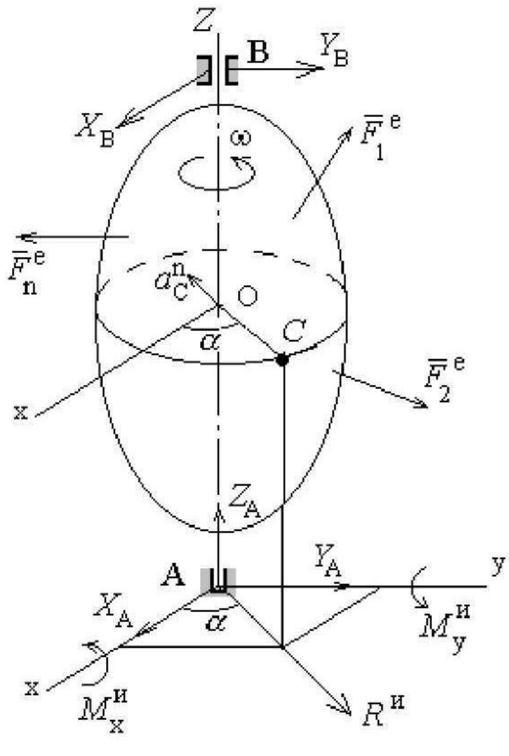
$$M^u = J_0 \cdot \varepsilon = \frac{P}{g} \cdot \rho^2 \cdot \varepsilon$$

Теперь система находится в равновесии. Применим к ней уравнения статики (на рисунке не показаны вес барабана и реакция шарнира, т.к. они не дают момент относительно центра O): $\sum M_0 = 0; \quad M^u + R^u r - Qr + M_{mp} = 0$ или

$$\frac{P}{g} \cdot \rho^2 \cdot \varepsilon + \frac{Q}{g} \cdot r^2 \cdot \varepsilon - Q \cdot r + M_{mp} = 0 \text{, Откуда}$$

$$\varepsilon = \frac{(Q \cdot r - M_{mp}) \cdot g}{P \cdot \rho^2 + Q \cdot r^2}.$$

Натяжение нити находится аналогично предыдущей задаче.



<u>Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела</u>

Пусть твердое тело вращается равномерно вокруг оси Oz в подшипниках A и B. Пусть координатные оси $Axyz$ вращаются вместе с телом. На тело действуют силы $\overline{F}_1^e, \overline{F}_2^e \dots \overline{F}_n^e$ Их равнодействующая $\overline{R}^e = \sum \overline{F}_i^e$ имеет

проекции R_x^e, R_y^e, R_z^e, а их главные моменты – $M_x^e; M_y^e; M_z^e$.
При этом $M_z^e = 0$, т.к. $\omega = const.$

Для определения динамических реакций подшипников X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B присоединим к заданным силам и реакциям силы инерции $\overline{F}_k^u$ всех частиц тела и приведем их к точке A. Таким образом, получим:

$$\overline{R}^u = \sum \overline{F}_k^u \quad , \quad \overline{M}_A^u = \sum \overline{m}_A(F_k^u).$$

Согласно принципу Даламбера составим уравнения равновесия, полагая, что $AB = b$:

$$\begin{aligned}
&X_A + X_B + R_x^u + R_x^e = 0,\\
&Y_A + Y_B + R_y^u + R_y^e = 0,\\
&Z_A + R_z^u + R_z^e = 0,\\
&-Y_B \cdot b + M_x^e + M_x^u = 0,\\
&X_B \cdot b + M_y^e + M_y^u = 0.
\end{aligned}$$

$M_z^e + M_z^u \equiv 0$, т.к. $M_z^e = 0$ и $M_z^u = 0$.

Главный вектор сил инерции $\vec{R}^u = -m\vec{a}_c$. При равномерном вращении возникает лишь нормальное ускорение $a_c^n = \omega^2 \cdot h_c$, где h_C - расстояние от точки C до оси вращения. Проецируем $\overline{R}^u$ на оси координат, учитывая что $h_C \cos\alpha = x_C$; $h_C \sin\alpha = y_C$,

где x_C и y_C - координаты центра тяжести.

Тогда $R_x^u = m \cdot \omega^2 \cdot h_c \cdot \cos\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot x_c$; $R_y^u = m \cdot \omega^2 \cdot y_c$; $R_z^u = 0$.

Чтобы определить M_x^u и M_y^u, рассмотрим частицу тела, удаленную от оси на расстояние h_C, тогда

$$F_{kx}^u = m_k \cdot \omega^2 \cdot x_k; \quad F_{ky}^u = m_k \cdot \omega^2 \cdot y_k; \quad F_{kz}^u = 0.$$

Для всех точек тела

$$M_x^u = -(\sum m_k \cdot y_k \cdot z_k) \cdot \omega^2; \; M_y^u = -(\sum m_k \cdot x_k \cdot z_k)\omega^2,$$

где, $J_{yz} = -\sum m_k \cdot y_k \cdot z_k$ и $J_{xz} = -\sum m_k \cdot x_k \cdot z_k$ – центробежные моменты инерции.

Подставим найденные значения в написанную систему уравнений

$$X_A + X_B = -R_x^e - m \cdot x_c \cdot \omega^2,$$
$$Y_A + Y_B = -R_y^e - m \cdot y_c \cdot \omega^2,$$
$$Z_A = -R_z^e,$$
$$-Y_B \cdot b = -M_x^e - J_{yz} \cdot \omega^2; \; X_B \cdot b = -M_y^e - J_{xz} \cdot \omega^2.$$

Если $\omega = 0$, то получим статические реакции. Очевидно, что динамические реакции могут быть значительно больше статических. Причем они зависят от ω, x_C, y_C, J_{XY}, J_{YZ}. Однако, если центр тела будет лежать на оси вращения, то $x_C = 0$, $y_C = 0$, $J_{XZ} = 0$, $J_{YZ} = 0$, тогда, если ось вращения будет главной центральной осью инерции тела, динамические реакции будут равны статическим.

Если тело вращается вокруг одной из главных центральных осей тела, то динамические реакции равны статическим.

Центробежные моменты характеризуют степень динамической неуравновешенности тела. Динамическое уравновешивание является важной технической задачей.

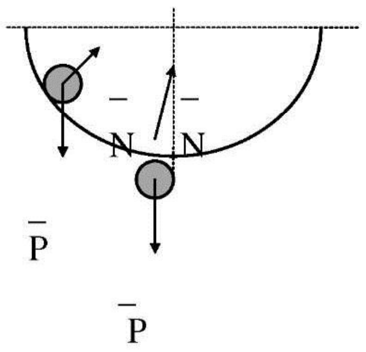
Известно, что любое тело имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярные главные центральные оси инерции. Любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции прибавлением к телу двух точечных масс. Такой метод уравновешивания широко используется в технике. При этом окончательная балансировка проводится на специальных стендах.

Лекция 15

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (общее уравнение динамики)

Связями называются ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и которые выполняются независимо от того, какие на систему действуют силы.

Классификация связей



Стационарные связи не изменяются со временем. *Нестационарные связи* изменяются со временем (пример нестационарной связи показан на рисунке). Геометрические - накладывают ограничения на положение (координаты).

Кинематические (дифференциальные) связи ограничивают скорость. Обычно кинематическая связь является одновременно и геометрической, т.к. скорость является первой производной от координаты по времени. Если дифференциальную связь можно представить как геометрическую, т.е. зависимость между скоростями можно свести к зависимости между координатами, то такая связь называется *интегрируемой,* в противном случае –*неинтегрируемой.*

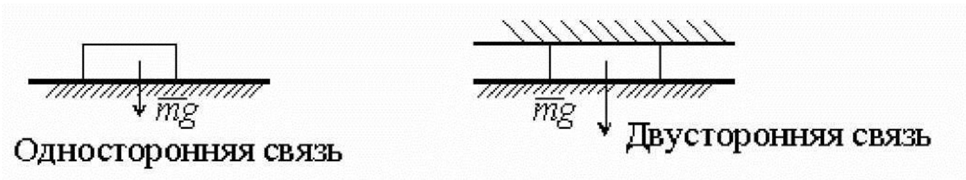
Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называются *голономными*, а неинтегрируемые – *неголономными. Механические системы также делятся по виду связей на голономные и неголономные.*

Пример. Колесо катится по рельсу, при этом $Vc = \omega R$. $\dot{X}_C = \dot{\varphi} R$.

Проинтегрировав, получим $X_C = \varphi R$, следовательно, связь является голономной. Она также является геометрической, кинематической, дифференциальной и интегрируемой.

Удерживающие (двусторонние) связи препятствуют перемещению точек в противоположных направлениях. *Неудерживающие (односторонние) связи* препятствуют перемещению точек в одном направлении.

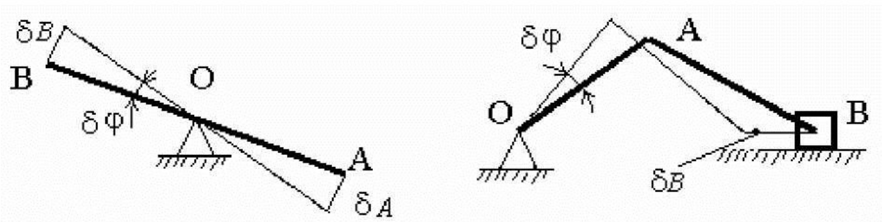
Пример:



<u>Возможные (виртуальные) перемещения</u>

Возможными перемещениями называются бесконечно малые перемещения системы, допускаемые связями, существующими в этой системе.

Представим механическую систему и сообщим ей возможное перемещение. Отдельные точки этой системы получают ничтожно малые перемещения, которые и называются возможными. Они представляют собой дуги траекторий. Известно, что, рассматривая элементарное перемещение как величину первого порядка малости, можно заменить криволинейное перемещение точки прямолинейным.



Следует различать действительное перемещение $d\bar{r}$ движущейся точки, которое она совершает за время dt и возможное перемещение $\delta\bar{r}$, которое точка не совершает, а только могла бы совершить, не разрушая наложенных на нее связей. Поэтому будем обозначать возможные перемещения символом

$\delta\bar{r}$, $\delta s = |\delta r|$, и $\delta x, \delta y, \delta z$ - проекции $\delta\bar{r}$ на координаты оси.

<u>Число степеней свободы</u>

Представим себе стержень *AB* на неподвижной оси вращения *O*. Чтобы однозначно определить положение всех точек, очевидно, достаточно задать закон изменения угла поворота стержня.

Возьмем кривошипный механизм. Здесь тоже положение всех точек определяется заданием одного угла поворота кривошипа.

Теперь представим центробежный регулятор, вращающийся вокруг вертикальной оси. Для того, чтобы вполне определить положение любой точки,

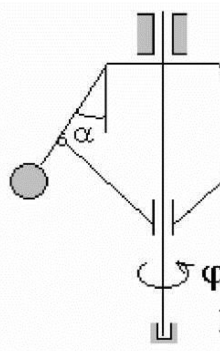


Рис. 2

необходимо задать две величины – угол φ и угол α. Или, например, рассмотрим материальную точку, находящуюся на плоскости. Для задания ее положения в двух взаимно перпендикулярных направлениях необходимо задать координаты x и y. Эти системы обладают двумя степенями свободы.

Вообще, *если положение всех точек системы вполне определяется заданием К независимых величин, то говорят, что система имеет К степеней свободы.*

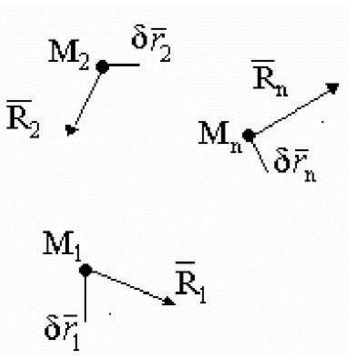
Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называется числом степеней свободы этой системы.

У свободной точки три степени свободы – вдоль координат x, y, z. У свободного твердого тела – 6 степеней свободы: три линейных перемещения вдоль осей x, y, z и три поворота относительно этих трех осей.

<u>Идеальные связи</u>

Представим механическую систему, состоящую из материальных точек $M_1, M_2, ... M_i, ... M_n$. Пусть каждая точка этой системы подчинена двусторонней связи. Реакции связей обозначим через R_1, $R_2 ... R_n$. Сообщим системе какое-либо возможное перемещение. Перемещения точек системы обозначим через $\delta\overline{r}_1, \delta\overline{r}_2, \delta\overline{r}_n$.

Вычислим сумму работ реакций связей на этих перемещениях. Если сумма



работ равна нулю для всех возможных перемещений системы, то данная связь называется *идеальной.*

Идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_K^R = 0 .$$

Докажем, что если механическая система с идеальными связями находится в равновесии под действием приложенных сил, то при любом возможном перемещении системы должно выполняться равенство:

$$\sum \delta A_K^a = 0 \quad \text{или} \quad \sum \vec{F}_k^{\,a} \cdot \delta \vec{r}_k = \sum F_k^a \cdot \delta s_k \cdot \cos \alpha_k = 0 ,$$

где α - угол между силой и возможным перемещением.

Обозначим силы, действующие на точку через $\overline{F}_k^a$ и $\overline{R}_k$, тогда для каждой точки системы $\overline{F}_k^a + \overline{R}_k = 0$, т.к. система находится в равновесии, а следовательно и сумма работ этих сил при любом перемещении точки равна нулю: $\delta A_K^a + \delta A_K^R = 0$.

Составив такие равенства для всех точек системы и сложив их почленно, получим $\sum \delta A_K^a + \sum \delta A_K^R = 0$.

Но т.к. связи идеальные, то второе слагаемое равно нулю, тогда равна нулю и первая сумма.

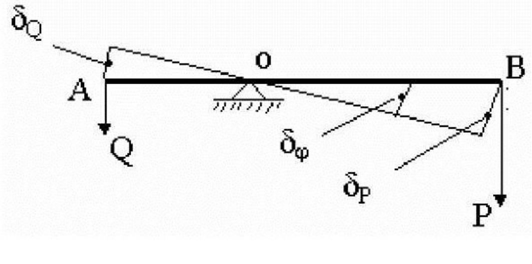
Принцип возможных перемещений

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю:

$$\sum (F_{kx}^a \delta x_k + F_{kx}^a \delta y_k + F_{kx}^a \delta z_k) = 0 .$$

Этот принцип позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Равновесие рычага (золотое правило механики)



Представим рычаг вращающийся на шарнире O, на концах которого действуют силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$. Обозначим $AO = a$, $BO = в$. Дадим системе возможное перемещение, тогда точки A и B сместятся соответственно на δ_Q и δ_P. Получим: $P \cdot \delta_P - Q \cdot \delta_Q = 0$, а так как $\delta_Q = a\ \delta_\varphi$ и $\delta_З = в\ \delta_\varphi$, то

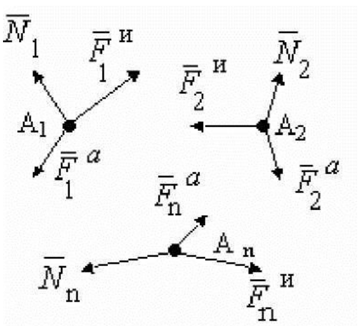
$$\delta_\varphi \text{ - } Qв\ \delta_\varphi = 0.$$

Сократив на δ_φ получим : $$P \cdot a - Q \cdot b = 0$$

Это и есть условие равновесия рычага. Очевидно, что это уравнение моментов относительно точки O. $\dfrac{\delta_Q}{\delta_P} = \dfrac{P}{Q}$.

Если рычаг находится в равновесии под действием двух сил, то возможные перемещения точек приложения сил обратно пропорциональны этим силам. Это можно сформулировать так: *то, что выигрывается в силе, теряется в скорости* (золотое правило механики).

<u>Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики)</u>



Пусть дана система материальных точек $A_1, A_2, \ldots A_n$. Если ко всем точкам системы приложить, кроме действующих на них активных сил и реакций связей еще и силы инерции $\overline{F}_k^u = -m_k \overline{a}_k$, то, согласно принципу Даламбера, система будет находится в равновесии. В соответствии с принципом возможных перемещений

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{U} + \sum \delta A_k^R = 0.$$

Если связи идеальные, то последняя сумма равна нулю, тогда

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{U} = 0.$$

принцип Даламбера-Лагранжа:

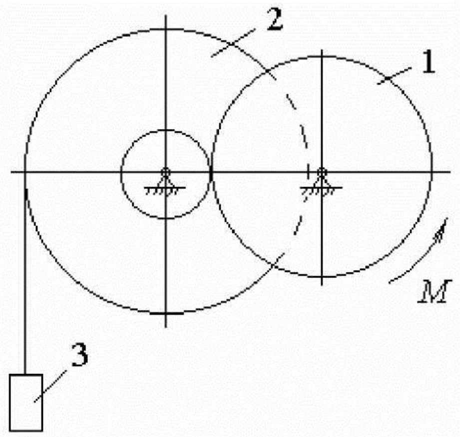
При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Уравнение, выражающее этот принцип, называют *общим уравнением динамики*. В аналитической форме оно имеет вид:

$$\sum[(F_{kx}^{a}+F_{kx}^{u})\cdot\delta x_{k}+(F_{ky}^{a}+F_{ky}^{u})\cdot\delta y_{k}+(F_{kz}^{a}+F_{kz}^{u})\cdot\delta z_{k}]=0 .$$

Если система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнения нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

Пример. В подъемнике, изображенном на рисунке, к шестерне *1*, имеющей массу m_1 и радиус R_1, приложен вращающий момент M. Определить ускорение поднимаемого груза 3 весом Q, пренебрегая весом веревки и трением в осях. Барабан, на который наматывается веревка, жестко скреплен с другой шестерней; их общая масса равна m_2, радиус инерции равен i_2, радиусы шестерен равны соответственно R_1 и R_2.

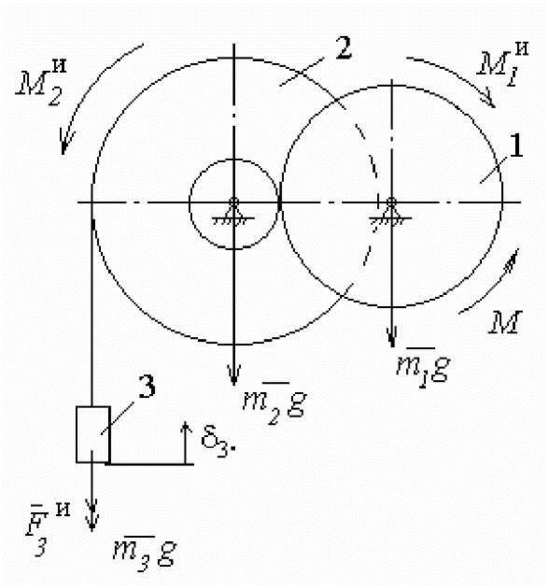


Решение:

Обозначим все активные силы (в данном случае это силы тяжести тел) и применим принцип Даламбера. Приложим к грузу *3* силу инерции $\overline{F}_3^{И}$ и к дискам *1*и *2* – моменты сил инерции $M_1^{И};M_2^{И}$

Теперь применим принцип возможных перемещений. Сообщим грузу 3 возможное перемещение δ_3. Диски при этом получат перемещение $\delta_{\varphi 1}$ и $\delta_{\varphi 2}$. Согласно принципу Даламбера-Лагранжа, сумма работ всех активных сил и всех сил инерции на возможном перемещении системы должна быть равна нулю. Следовательно: $M\cdot\delta_{\varphi 1}-M_1^{u}\cdot\delta_{\varphi 1}-M_2^{u}\cdot\delta_{\varphi 2}-F_3^{u}\cdot\delta_3-m_3\cdot g\cdot\delta_3=0$.

Выразим все перемещения через δ_3 . Для простоты решения задачи, сначала выразим скорости всех тел через скорость груза *3*. Т.к. связи дифференциальные и интегрируемые, то перемещения и ускорения тел будут подвержены тем же зависимостям:



$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2} \Rightarrow \delta_{\varphi 2} = \frac{\delta_3}{R_2} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2},$$

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{r_2}{R_1} = V_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1} \Rightarrow \delta_{\varphi 1} = \delta_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = a_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1}.$$

Выразим моменты и силы инерции с учетом уже полученных зависимостей:

$$F_3^и = m_3 \cdot a_3; \quad M_2^и = J_2 \cdot \varepsilon_2 = m_2 \cdot i_2^2 \cdot \frac{a_3}{R_2};$$

$$M_1^и = J_1 \cdot \varepsilon_1 = \frac{m_1 \cdot R_1^2}{2} \cdot a_3 \frac{r_2}{R_2 R_1}.$$

Подставим полученные значения в уравнение возможных работ. Далее сократив левую и правую части уравнения на δ_3, выразим α_3.

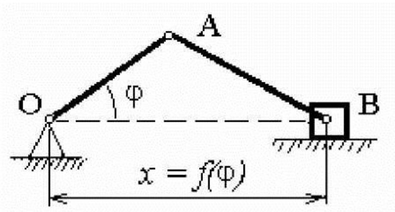
$$M \cdot \delta_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1} - \frac{m_1 \cdot R_1^2}{2} \cdot a_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1} \cdot \delta_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_1} - m_2 \cdot i_2^2 \cdot \frac{a_3}{R_2} \cdot \frac{\delta_3}{R_2} -$$
$$- m_3 \cdot g \cdot \delta_3 - m_3 \cdot a_3 \cdot \delta_3 = 0,$$

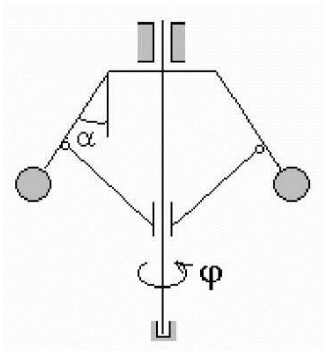
Откуда $a_3 = \dfrac{M \cdot \dfrac{r_2}{R_2 \cdot R_1} - m_3 \cdot g}{m_1 \cdot \dfrac{r_2^2}{R_2^2} + m_2 \cdot \dfrac{i_2^2}{R_2^2} + m_3}.$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II-ГО РОДА

Обобщенными координатами механической системы называются величины, заданием которых вполне определяется положение всех точек системы.

Числом степеней свободы системы называется число независимых обобщенных координат, определяющих положение точек системы.

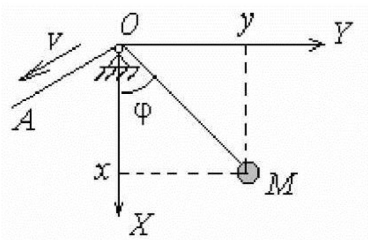




Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек: M_1, M_2, …M_n, имеющую K степеней свободы. Обозначим ее независимые обобщенные координаты q_1, q_2, … q_k. Декартовы координаты системы будут функциями обобщенных координат:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots q_k),$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots q_k),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots q_k).$$

Возможно существование связей, изменяющихся с течением времени.



Пример: нить маятника тянут за конец A с постоянной скоростью V.

Пусть $OM = l$, тогда $l = l_0 - Vt$,

$$x = l\cos\varphi = (l_0 - Vt)\cos\varphi,$$
$$y = l\sin\varphi = (l_0 - Vt)\sin\varphi.$$

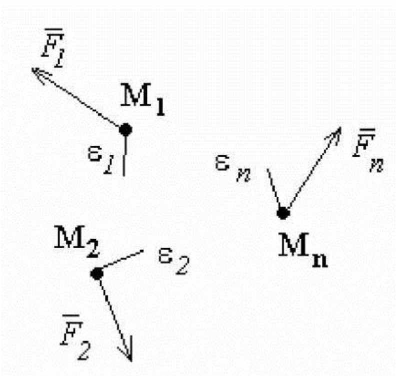
Декартовы координаты – не только функции обобщенной координаты φ, но и времени t. В этом случае имеем:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t),$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t).$$

Связи, не зависящие от времени, называются *склерономными (или стационарными)*, а изменяемые с течением времени – *реономными (или нестационарными).*

Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек: M_1, M_2, …M_n, имеющую K степеней свободы. Обозначим ее независимые обобщенные координаты q_1, q_2, … q_k. К точкам системы приложены силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots \overline{F}_n$. Чтобы вычислить обобщенную силу, дадим координате q_1 малое приращение δq_1, оставляя прочие координаты без изменения. Это изменение координаты q_1 вызовет ничтожно малые перемещения ε_1, ε_2, ε_n всех точек системы. Вычислим сумму работ сил $F_1, F_2, \ldots F_n$ на перемещениях ε_1, ε_2, ε_n. : $\delta A_1 = \sum F_i \cdot \varepsilon_i \cdot \cos(F, \widehat{\varepsilon}) = Q_1 \cdot \delta q_1$.



Пусть эта работа равна произведению некоторого множителя Q_1 на приращение координаты δq_1. Поступая аналогично, найдем $Q_2 \ldots Q_k$,соответствующие координатам q_2, … q_k : $\delta A_K = Q_K \cdot \delta q_K$.

Обобщенная сила – это величина, равная коэффициенту при приращении обобщенной координаты в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

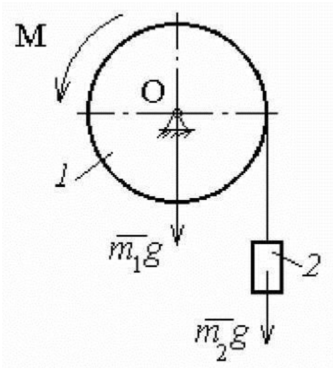
Не следует считать, что обобщенная сила всегда имеет размерность [Ньютон]. Работа всегда вычисляется в джоулях (1 *Дж* =1 *Н·м*).

Размерность обобщенной координаты	Размерность обобщенной силы
м *рад* $м^3$	*Н* *Н·м* *Па*

В механической системе с идеальными связями обобщенные реакции связей всегда равны нулю, поэтому при переходе к обобщенным силам реакции связей автоматически выпадают из расчетов. В этом большое преимущество методов Лагранжа.

Примеры вычисления обобщенной силы

К барабану *1* радиуса *R* приложен момент M , под действием которого осуществляется подъем груза *2*. Массы барабана и груза соответственно равны m_1 и m_2.



Представленная на рисунке механическая система имеет одну степень свободы. Для определения обобщенной силы выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота барабана - φ (направим его против часовой стрелки). Дадим обобщенной координате приращение $\delta\varphi$ и вычислим полную элементарную работу всех активных сил на этом перемещении:

$$\sum \delta A = M \cdot \delta\varphi - m_2 \cdot g \cdot R \cdot \delta\varphi = (M - m_2 \cdot g \cdot R) \cdot \delta\varphi.$$

Работа от веса барабана равна нулю, т.к. ось его вращения не перемещается. Тогда обобщенная сила равна $Q = (M - m_2 \cdot g \cdot R)$.

Другой пример. Пусть система материальных точек $M_1, M_2, M_3 \ldots M_n$ имеет $к$ степеней свободы. Обозначим ее обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots q_k$. Возьмем декартовы оси x,y,z и обозначим координаты точки Mi через x_i, y_i, z_i. Координаты являются функциями обобщенных координат и времени:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t),$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots q_k, t).$$

К системе приложены силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2 \ldots \overline{F}_n$. Вычислим обобщенные силы $Q_1, Q_2 \ldots Q_k$. Например, $Q_1 \cdot \delta q_1 = \sum F_i \cdot \varepsilon_i \cdot \cos(F_i, \widehat{\varepsilon})$.

Элементарную работу силы F_i мы можем вычислить как

$$F_i \cdot \varepsilon_i \cdot \cos(F_i, \hat{\varepsilon}) = F_{xi} \cdot \delta x_i + F_{yi} \cdot \delta y_i + F_{zi} \cdot \delta z_i .$$

Т.к. $\delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1; \quad \delta y_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1; \quad \delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1,$ то

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = \sum (F_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_1}) \cdot \delta q_1 .$$

Рассуждая аналогично и поделив обе части равенства на δq ,получим:

$$Q_1 = \sum (F_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_1}),$$

$$Q_2 = \sum (F_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + F_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + F_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_2}),$$

$$Q_к = \sum (F_{xi} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_к} + F_{yi} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_к} + F_{zi} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_к})$$

или $\vec{Q}_k = \sum \vec{F}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

Условие равновесия системы в обобщенных силах

Согласно принципу возможных перемещений, необходимым и достаточным условием является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы $\sum \delta A_i = 0$, тогда

$$Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3 + ... + Q_k \cdot \delta q_k = 0 .$$

Так как обобщенные координаты $\delta q_1, \delta q_2 ... \delta q_k$ не зависят друг от друга, то равенство выполнимо только в том случае, если каждое слагаемое равно нулю,

т.е: $Q_1 = 0; \;\; Q_2 = 0; \;\; ..Q_k = 0$.

Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным для системы обобщенным координатам, были равны нулю.

Уравнения Лагранжа

Общее уравнение динамики: $\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^И = 0$.

Пусть система имеет $к$ степеней свободы. Тогда

$$\sum \delta A_i^a = Q_1 \cdot \delta q_1 + Q_2 \cdot \delta q_2 + Q_3 \cdot \delta q_3 + ... + Q_k \cdot \delta q_k ,$$

$$\sum \delta A_i^{И} = Q_1^{И} \cdot \delta q_1 + Q_2^{И} \cdot \delta q_2 + Q_3^{И} \cdot \delta q_3 + ... + Q_к^{И} \cdot \delta q_k .$$

Подставляя в общее уравнение динамики, получим:

$$(Q_1 + Q_1^{И}) \cdot \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{И}) \cdot \delta q_2 + (Q_3 + Q_3^{И}) \cdot \delta q_3 + ... + (Q_k + Q_k^{И}) \cdot \delta q_k = 0$$

или $Q_1 + Q_1^{И} = 0;\ Q_2 + Q_2^{И} = 0;\ Q_3 + Q_3^{И} = 0; ...\ Q_k + Q_k^{И} = 0$,

где $Q_i^{И}$ - обобщенные силы инерции, которые равны: $\vec{Q}_1^{И} = \sum \vec{F}_i^{И} \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

Т.к. $\overline{F}_i^{И} = -m_i \overline{a}_i = -m_i \dfrac{d\overline{V}_i}{dt}$, то $\overline{Q}_1^{И} = -\sum m_i \cdot \dfrac{d\overline{V}_i}{dt} \cdot \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}$ (1)

Выразим обобщенную силу через кинетическую энергию. Имеем

$$\frac{d\overline{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{V}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) - \overline{V}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right),$$

где
$$\frac{d}{dt}\left(\overline{V}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) = \frac{d\overline{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} + \overline{V}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) \qquad (2)$$

Заметим, что $\dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \overline{V}_i}{\partial \dot{q}_1}$, $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) = \dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{d\overline{r}_i}{dt}\right) = \dfrac{\partial \overline{V}_i}{\partial q_1}$.

Подставим полученные выражения в уравнение (2):

$$\frac{d\overline{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{V}_i \cdot \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial \dot{q}_1}\right) - \overline{V}_i \cdot \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_i^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V_i^2}{\partial q_1}.$$

Тогда уравнение (1): $-Q_1 = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial\left(\dfrac{\sum m_i V_i^2}{2}\right)}{\partial \dot{q}_1}\right] - \dfrac{\partial\left(\dfrac{\sum m_i V_i^2}{2}\right)}{\partial q_1} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1}$,

где T – кинетическая энергия.

Аналогичные выражения получаем для всех остальных обобщенных координат. Поскольку $Q_i = -Q_i^{и}$, то:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,$$

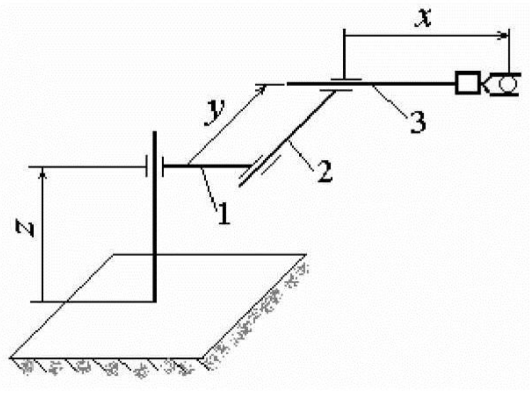
....

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k.$$

Это *уравнения Лагранжа II-го рода* . Число этих уравнений равно числу степеней свободы системы. Основные преимущества использования уравнений Лагранжа при решении задач:

1. Количество уравнений не зависит от количества тел, входящих в систему.
2. Данный способ позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей.

Пример. Механизм робота-манипулятора состоит из колонны для вертикального перемещения, устройства для горизонтального перемещения, состоящего из звеньев 1 и 2, и выдвигающейся горизонтальной руки со схватом 3. Массы звеньев механизма m_1, m_2 и m_3. Движущие силы, создаваемые приводами в поступательных парах, равны соответственно F_{01}, F_{12}, и F_{23}. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь.



Решение:

Рассматриваемая механическая система имеет три степени свободы. Выберем обобщенные координаты: $q_1 = z;\ q_2 = y,\ \ q_3 = x$,

тогда обобщенные скорости выразятся как $\dot{q}_1 = \dot{z};\ \dot{q}_2 = \dot{y},\ \dot{q}_3 = \dot{x}$.

Вычислим кинетическую энергию системы. Т.к. звенья 1, 2 и 3 двигаются поступательно, то

$$T = \frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot V_3^2}{2} = \frac{m_1 \cdot \dot{z}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot (\dot{z}^2 + \dot{y}^2)}{2} + \frac{m_3 \cdot (\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2)}{2}.$$

Вычислим частные производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m_1 \cdot \dot{z} + m_2 \cdot \dot{z} + m_3 \cdot \dot{z}; \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_2 \cdot \dot{y} + m_3 \cdot \dot{y};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_3 \cdot \dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Далее, дифференцируя по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_2 + m_3) \cdot \ddot{y},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_3 \cdot \ddot{x}.$$

Для определения обобщенной силы Q_i сообщим системе перемещение δz. При этом работу совершит движущая сила F_{01}, направленная вверх, и силы тяжести всех 3-х звеньев: $\delta A_z = [F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g] \cdot \delta z$.

$$Q_z = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g.$$

Аналогично вычислим обобщенные силы Q_y и Q_x:

$$\delta A_y = F_{12} \cdot \delta y \text{, тогда } Q_y = F_{12}.$$

Силы тяжести не совершают работу, т.к. движение вдоль оси y происходит по горизонтали, поэтому $\delta A_x = F_{23} \cdot \delta x$, откуда $Q_x = F_{23}$.

Запишем полученные дифференциальные уравнения движения:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g,$$
$$(m_2 + m_3) \cdot \ddot{y} = F_{12},$$
$$m_3 \cdot \ddot{x} = F_{23}.$$

Лекция 17

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Точка с массой *m,* на которую действуют силы $\overline{F}_K$ (к = 1, 2, ..., *n*). Представим импульс любой из этих сил за промежуток времени τ в виде $\overline{F}_K^{cp} \cdot \tau$, где $\overline{F}_K^{cp}$ есть среднее значение силы за время τ. Тогда теорема об изменении количества движения этой точки дает $m \cdot (\overline{V}_1 - \overline{V}_0) = \sum \overline{F}_K^{cp} \cdot \tau$.

Отсюда видно, что, если время τ: бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости $\Delta\overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}_0$ будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако, если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка $\frac{1}{\tau}$), то приращение скорости за малый промежуток времени окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени τ *изменяются на конечную величину, называется ударом.*

Силы, при действии которых происходит удар, будем называть *ударными силами* $\overline{F}_{УД}$. Очень малый промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем *временем удара.*

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами *ударные силы,* а их *импульсы,* которые называют *ударными импульсами*. Величина ударного импульса определяется равенством:

$$\overline{S} = \int_0^\tau \overline{F}_{УД} \cdot dt = \overline{F}_{УД}^{cp} \cdot \tau \qquad (1)$$

Ударный импульс $\overline{S}$ будет величиною конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь. Скорость точки в начале удара $\overline{v}$, а скорость в конце удара $\overline{u}$. Тогда:

$$m \cdot (\overline{u} - \overline{v}) = \sum \overline{S}_K . \qquad (2)$$

Теорема об изменении количества движения точки при ударе: *изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов*.

Уравнение (2). является *основным уравнением теории удара*.

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменение скоростей точек тела за время удара определяется основным уравнением теории удара (2).

Общие теоремы теории удара

Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Рассмотрим систему, состоящую из материальных точек. Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, приложенных в точке с массой m_K, через $\overline{S}_K^e$, а равнодействующую внутренних ударных импульсов – через $\overline{S}_K^i$ Тогда, по уравнению (2) $m \cdot (\overline{u} - \overline{v}) = \overline{S}_K^e + \overline{S}_K^i$.

Составляя подобные уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим: $\sum m_K \cdot \overline{u}_K - \sum m_K \cdot \overline{v}_K = \sum \overline{S}_{УД}^e + \sum \overline{S}_{УД}^i$.

Суммы, стоящие слева, представляют собой количества движения системы в конце и в начале удара, которые обозначим $\overline{Q_1}$ и $\overline{Q_0}$. Стоящая справа сумма внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю. Окончательно находим $\overline{Q_1} - \overline{Q_0} = \sum \overline{S}_K^e$, (3) т. е. *изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему*.

В проекциях на оси координат уравнение (3) дает:

$$\begin{aligned} Q_{1X} - Q_{0X} &= \sum S^{e}_{KX}, \\ Q_{1Y} - Q_{0Y} &= \sum S^{e}_{KY}, \\ Q_{1Z} - Q_{0Z} &= \sum S^{e}_{KZ}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения (3), количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

Коэффициент восстановления при ударе

Величина ударного импульса, возникающего при соударении двух тел, зависит не только от масс и скоростей этих тел до удара, но и от упругих свойств. Для характеристики этих свойств в теорию удара вводится величина, называемая *коэффициентом восстановления*.

Рассмотрим шар, падающий вертикально и притом поступательно на неподвижную горизонтальную плиту. Для удара, который при этом произойдет, можно различить две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара v, убывают до нуля. Шар при этом деформируется (плиту считаем абсолютно жесткой), и вся его начальная кинетическая энергия $\frac{mV^2}{2}$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Затем шар под действием внутренних упругих сил начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. Часть энергии уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость u шара в конце удара будет меньше скорости v,

В рассмотренном случае скорость шара до удара была направлена по нормали к плите; такой удар называется *прямым*. *Величина k, равная при пря-*

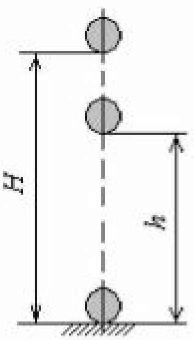
мом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе: $k = \dfrac{u}{v}$. (5)

Значение коэффициента восстановления для разных тел определяется опытным путем. Величина k зависит только от материала соударяющихся тел. Так как $u < v$, то для реальных тел $k < 1$.

В качестве предельного рассматривают случай *абсолютно упругого удара* ($k = 1$), при котором механическая энергия тела после удара полностью восстанавливается, и случай *абсолютно неупругого удара* ($k = 0$), когда удар заканчивается в первой стадии и вся механическая энергия тела расходуется на его деформацию и нагревание.

<u>Экспериментальное определение коэффициента восстановления</u>

Величина k определяется экспериментально. Рассмотрим, например, шар, свободно падающий на плиту с предварительно измеренной высоты H. Определим высоту его подъема L после удара. Тогда по формуле Галилея



$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$, а $u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

и, следовательно, $k = \sqrt{\dfrac{h}{H}}$.

Коэффициента восстановления (при скоростях соударения порядка 3 *м/сек),* составляют:дерево о дерево - 0,5; сталь о сталь .-.0,56; слоновая кость о слоновую кость - 0,89; стекло о стекло – 0,94

Соударения тела с неподвижной плоскостью:

- если скорость v направлена по нормали к плоскости, то удар называется *прямым*, в противном случае удар называется *косым*;

- если нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры масс, то удар называется *центральным*. Для шара это условие выполняется всегда.

Прямой удар шара по плоскости

Ударный импульс в проекции на нормаль к плоскости:

$m(u_n - v_n) = S_n$, где $u_n = u;\ v_n = v;\ S_n = S$, следовательно:

$m(u - v) = S$. Учитывая, что $u = kv$, получим $S = m(1 + k)$.

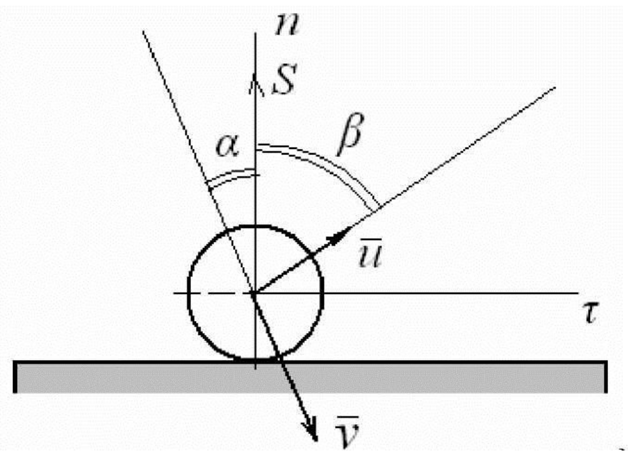
Таким образом, ударный импульс S тем больше, чем больше коэффициент восстановления k. Чтобы найти среднюю силу при ударе, например, реакцию плоскости, необходимо знать время удара τ, которое определяется экспериментально.

Рассмотрим пример. Стальной шар массой m =1 кг падает с высоты 3 м на стальную плиту (k = 0,56). Время удара 0,0005 с. Определить среднюю силу при ударе $N_{уд}^{ср}$.

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 3} \approx 7{,}7\,м/с;\ u = kv = 0{,}56 \cdot 7{,}7 \approx 4{,}3\,м/с;$$

$$S = mv(1+k) = 1 \cdot 7{,}7 \cdot 1{,}56 \approx 12\,Н \cdot с;\ N_{уд}^{ср} = \frac{S}{\tau} = \frac{12}{0{,}0005} = 24000\,Н$$

Косой удар шара по плоскости

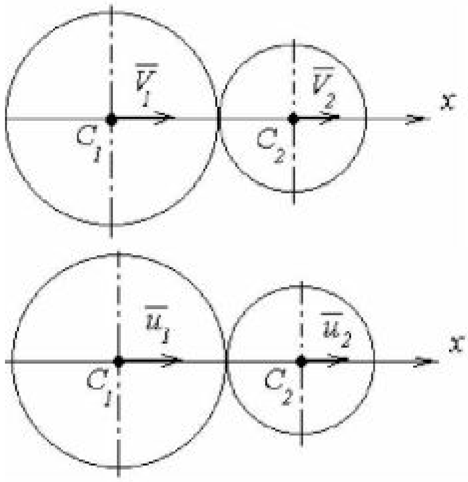


Пусть скорость центра масс v образует с нормалью угол α, а скорость u – угол β. Тогда спроецировав ударный импульс на нормаль и касательную получим:

$$\tau: m(u_\tau - v_\tau) = 0$$
$$n: m(u_n - v_n) = S$$

Т.к. $k = \dfrac{|u_n|}{|v_n|}$, то с учетом знака $u_n = -k v_n$. Из проекции ударного импульса на касательную следует, что $u_\tau = v_\tau$ или $|u_n| tg\alpha = |v_n| tg\beta$. Тогда $k = \dfrac{|u_n|}{|v_n|} = \dfrac{tg\alpha}{tg\beta}$, а ударный импульс $S = m|v_n|(1+k)$.

Прямой центральный удар двух тел (удар шаров)



Обозначим массы тел m_1 и m_2, скорости их центров масс в -начале удара v_1 и v_2, а в конце удара – u_1 и u_2.. Тогда, чтобы произошел удар, должно быть выполнено условие $v_1 > v_2$ (иначе первое тело не догонит второе). Кроме того, должно выполняться условие $u_{1X} \le u_{2X}$, так как ударившее тело не может опередить ударяемое.

Считая m_1 , m_2,, v_{1x}, v_{2x} и k известными, найдем u_{1x}, u_{2x}. Применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут внутренними и $\sum S^e_{УД} = 0$.

В результате первое из уравнений (4) дает $K_{1X} = K_{0X}$ или

$$m_1 \cdot u_{1X} + m_2 \cdot u_{2X} = m_1 \cdot v_{1X} + m_2 \cdot v_{2X}.$$

При соударении двух тел интенсивность удара (ударный импульс) зависит от разности $v_{1X} - v_{2X}$ (скорости сближения). Поэтому при ударе двух тел, если учесть, что всегда $v_{1X} > v_{2X}$, а $u_{1X} \le u_{2X}$, получим:

$$k = \frac{|u_{1X} - u_{2X}|}{|v_{1X} - v_{2X}|} = -\frac{u_{1X} - u_{2X}}{v_{1X} - v_{2X}} \qquad (6)$$

или $$u_{1X} - u_{2X} = -k \cdot (v_{1X} - v_{2X}) \qquad (7).$$

Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнение для какого-нибудь одного из тел, например, для первого:

$$S_{1X} = m_1 \cdot (u_{1X} - v_{1X}); \quad S_{2X} = -S_{1X}.$$

Рассмотрим два предельных случая.

Абсолютно неупругий удар (k = 0). В этом случае из уравнения (6) находим, что оба тела после удара движутся с одной и той же скоростью

$$u_{1X} = u_{2X} = \frac{m_1 \cdot v_{1X} + m_2 \cdot v_{2X}}{m_1 + m_2}.$$

Действующий на тело ударный импульс при этом равен

$$S_{2X} = -S_{1X} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{1X} - v_{2X}).$$

Абсолютно упругий удар (k = 1). В этом случае будем иметь:

$$u_{1X} = v_{1X} = \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{1X} - v_{2X}),$$

$$u_{2X} = v_{2X} = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_{1X} - v_{2X}).$$

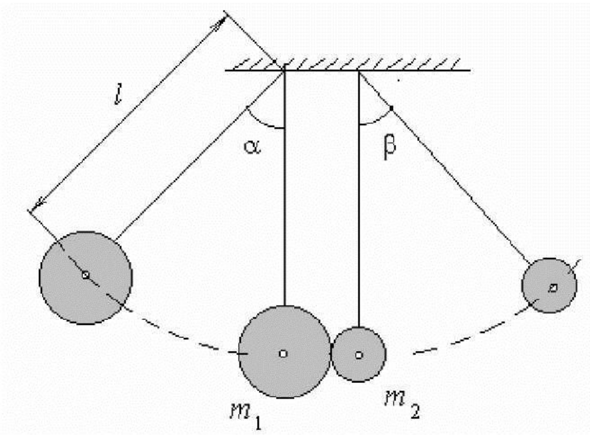
Действующий на тело ударный импульс при этом равен

$$S_{2X} = -S_{1X} = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{1X} - v_{2X}).$$

При абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом. В частном случае, когда $m_1 = m_2 = m$, получаем

$$u_{1X} = v_{2X} = u_{2X} = v_{1X}.$$

Таким образом, два тела одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.



Пример. Два шара с массами m_1 и m_2 подвешены так, как показано на рисунке. Первый шар отклоняют от вертикали на угол α и отпускают без начальной скорости. После удара второй шар отклоняется на угол β. Найти коэффициент восстановления для шаров при ударе.

Решение:

По данным задачи можно определить скорость v_1 центра первого шара в начале удара и скорость v_2 центра второго шара в конце удара.

$$\frac{m_1 \cdot V_1^2}{2} = m_1 \cdot g \cdot h = m_1 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos\alpha),$$

где l —расстояние центра шара от точки подвеса.

Отсюда $v_1 = 2 \cdot \sqrt{g \cdot l \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$. Аналогично находим, что $u_2 = 2 \cdot \sqrt{g \cdot l \cdot \sin\frac{\beta}{2}}$.

Вследствие того, что в нашем случае $V_2 = 0,$ имеем:

$$m_1 \cdot u_{1X} + m_2 \cdot u_{2X} = m_1 \cdot v_{1X}; \qquad u_{2X} - u_{1X} = k \cdot v_{1X}.$$

Исключая из этих уравнений u_{1X} и замечая, что $v_{1X} = v_1$, а $u_{2X} = u_2$, получим:

$$m_1 \cdot v_1 \cdot (1 + k) = (m_1 + m_2) \cdot u_2.$$

Отсюда окончательно находим: $k = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot u_2}{m_1 \cdot v_1} - 1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{m_1 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} - 1.$