ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
РАЗДЕЛ 1. КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА
РАЗДЕЛ 2. СТРУКТУРНЫЙ, КИНЕМАТИЧЕСКИЙ и ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

Курс лекций

Курс лекций составлен в соответствии с учебной программой по дисциплине «Прикладная механика» и соответствует государственным образовательным стандартам по механике.

Пособие состоит из двух разделов; в первом разделе рассмотрены основы статики твердого тела, кинематика движущейся точки и динамика механической системы; во втором разделе изложены общие методы определения кинематических и динамических характеристик механизмов, динамический анализ и синтез механизмов, колебания в механизмах.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Теоретическая механика

ВВЕДЕНИЕ

Механика абсолютно твердого тела (теоретическая механика) это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Курс теоретической механики формирует у курсантов и слушателей логическое и инженерное мышление, создает научную базу для изучения специальных дисциплин.

Теоретическая механика является естественной наукой, опирающейся на опыт, наблюдения, практику. Аксиомы теоретической механики являются обобщением многовекового опыта. На основе этих эмпирических законов строится теория, которая, в свою очередь, является научной базой для разработки инженерных методов исследования и решения практических задач.

Одним из главных элементов теоретической механики является научная абстракция. Рассматривая сложные физические явления, мы не можем учесть и аналитически описать все их многообразие. Необходимо выделить основное и пренебречь второстепенным (абстрагироваться от второстепенного).

Приведем несколько примеров научных абстракций.

Инерциальная система отсчета. Это такая система отсчета (координат), которая находится либо в состоянии покоя, либо в состоянии прямолинейного и равномерного движения (перемещается без ускорений). В природе подобных состояний нет. Например, Земля вращается вокруг своей оси, обращается относительно Солнца, вместе с Солнечной системой движется в пределах Галактики и т. д. Но так как угловые скорости движения Земли малы (1 оборот в сутки, 1 оборот в год), поэтому и ускорения сравнительно невелики. При решении большинства практических задач в качестве инерциальной выбирается система отсчета, связанная с Землей.

Абсолютно твердое тело. Это система материальных точек, в которой любые расстояния между точками неизменны. Все реальные тела деформативны. Однако в большинстве задач механики твердого тела упругие деформации являются пренебрежимо малыми величинами.

При решении каждой конкретной задачи мы абстрагируемся от ряда факторов и рассматриваем не действительный объект при реальных условиях, а некоторое упрощенное отображение, называемое расчетной схемой.

Определяя место теоретической механики среди других естественных наук, отметим, что она является разделом теоретической физики, из которой была выделена, и в свою очередь стала основой развития ряда дисциплин специального и прикладного значения, например, сопротивления материалов, теории машин и механизмов, строительной механики, теории упругости и пластичности, гидромеханики, аэродинамики, небесной механики и других.

История развития механики связана с историей развития техники. Механика - одна из первых и древнейших естественных наук, зародившихся несколько тысячелетий назад. Но подлинной наукой она стала около трехсот лет назад, когда в ней сложились свои методы теоретических исследований. Обычно указывают на 1687 год как на дату "рождения" механики. В этом году вышла в свет знаменитая работа Исаака Ньютона "Математические начала натуральной философии".

Однако начала развития механики лежат в глубокой древности, о чем свидетельствуют грандиозные постройки Вавилона, Египта, Греции и Рима, невозможные без применения наклонных плоскостей, катков, рычагов, блоков и других механических приспособлении.

Механика - греческое слово, что означает "машина", причем под этим словом подразумевалась не вообще машина, а устройство для подъема и опускания на сцену в греческом театре богов (V век до н.э.).

Как правило, развитие любой науки связывается с именами ученых, внесших наибольший вклад в ее становление.

Аристотель (384 - 322 г. до н. э.) - выдающийся философ древней Греции. Основоположником статики как точной науки следует считать выдающегося ученого древности Архимеда (287 - 212 г. до н.э.).

Средневековый период характеризуется застоем и даже регрессом механики. Так, например, на смену гелиоцентрической системы Пифагора пришла геоцентрическая система мироздания Птолемея (90 - 160 г.н.э.).

В эпоху возрождения, начиная с 15 века, снова наступает период развития механики. До сих пор не потеряли своей ценности работы Леонардо да Винчи (1452-1519) в области теории механизмов, трения, гидравлики. Революционным переворотом в воззрениях на строение вселенной явились открытия польского ученого Николая Коперника (1473 - 1543). В работах Коперника вскрыты особенности движения планет и даны расчеты, относящиеся к предсказаниям солнечных и лунных затмений. Им сформулированы основы кинематики относительного движения.

Немецкий ученый Иоганн Кеплер (1571 - 1630) на основании учения Коперника и многочисленных астрономических наблюдений установил три закона движения планет (законы Кеплера), которые в дальнейшем послужили Ньютону для открытия закона всемирного тяготения.

Новую эпоху в развитии механики открывают работы великого итальянского ученого Галилео Галилея (1564 - 1642). Галилей считается основоположником важнейшего раздела механики - динамики.

Продолжением работ Галилея по динамике явились исследования голландского ученого Христиана Гюйгенса (1629 - 1695), который создал теорию физического маятника, установил понятие центробежной силы, занимался теорией удара твердых тел.

Исаак Ньютон (1643-1727), являющийся основоположником современной классической механики, четко сформулировал аксиомы статики, ввел понятие массы, открыл закон всемирного тяготения, систематизировал и изложил начала механики.

Большое влияние на развитие теоретической механики в России оказал гениальный ученый и первый русский академик М.В.Ломоносов (1711 - 1765).

Иоганн Бернулли (1667 - 1748) сформулировал принцип возможных перемещений, исследовал явление удара твердых тел.

Неоценимый вклад в развитие аналитических методов решения задач механики внес Леонард Эйлер (1707 - 1783), который работал в Петербургской Академии наук, занимался теории несвободного движения точки, созданием теории движения твердого тела, расчетами баллистических траекторий с учетом сопротивления среды, ему принадлежит вывод дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости.

Даламбер (1717 - 1783) предложил общий метод решения задач динамики несвободной механической системы, позволяющий в задачах динамики использовать методы статики.

Развитие результатов Эйлера в области динамики твердого тела было проведено в дальнейшем главным образом русскими учеными. Знаменитая русская женщина-математик С.В.Ковалевская (1850 - 1891) нашла решение задачи о движении несимметричного гироскопа.

Особенно много работал в различных областях теоретической и технической механики знаменитый профессор Московского университета Н.Е. Жуковский (1847 - 1921). Он является создателем новой науки - аэромеханики, сделал важные открытия по теории регулирования хода машин, теории механизмов.

Развитию теоретической механики в России способствовали работы П.Л.Чебышева (1821 - 1894), внесшего существенный вклад в теорию механизмов и машин, Н.П.Петрова (1836 - 1920), разработавшего теорию гидродинамического трения в подшипниках скольжения и И.А. Вышнеградского (1831 - 1895), создавшего теорию регулирования хода машин.

1. ВВЕДЕНИЕ В КИНЕМАТИКУ. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. 1. Предмет кинематики

В кинематике изучается движение материальных тел с геометрической точки зрения, то есть без рассмотрения причин, вызывающих это движение. При таком узком подходе движение должно быть задано, а определяются лишь его пространственно-временные характеристики (путь, скорость, ускорение).

Понятие "движение" подразумевает изменение положения тела с течением времени по отношению какого-либо другого материального объекта, или поверхности Земли, или Солнца, или Галактики.

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Например, тело, движущееся в радиальном направлении по вращающемуся диску, с точки зрения наблюдателя, расположенного на диске, (в подвижной системе отсчета) движется прямолинейно, а для "неподвижного" наблюдателя (в неподвижной системе отсчета) - по спирали.

Движение тела совершается в пространстве и во времени. В классической механике рассматривается трехмерное эвклидово пространство и "абсолютное" время, то есть не учитываются релятивистские эффекты: зависимость пространства и времени от скорости движения тел, что допустимо при скоростях существенно меньших скорости света (300 000 км/с).

Прежде, чем изучать движение тела, необходимо рассмотреть кинематику точки, чему и посвящена настоящая лекция.

1. 2. Способы задания движения точки, твердого тела

Считается, что движение точки по отношению к какой-либо системе отсчета задано, если известен способ, по которому можно определить ее положение в любой момент времени.

Существуют ***три основных способа задания движения точки:*** *векторный, координатный и естественный.*

1. Векторный способ

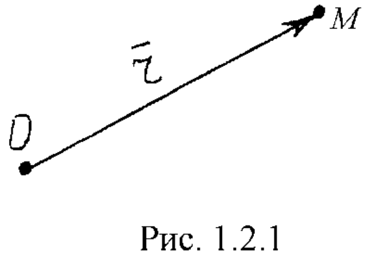


Рис. 1.2.1

Положение точки M в пространстве относительно начальной точки O определяется радиусом – вектором: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (см. рис. 1.2.1).

2. Координатный способ

Требует предварительного выбора системы координат. Выбор системы координат диктуется соображениями целесообразности при исследовании данной задачи.

Чаще всего используют декартову прямоугольную систему координат. В ряде задач удобна цилиндрическая система или ее частный случай - полярная система.

Заметим, что точка в пространстве имеет три степени свободы, то есть ее движение определяется тремя независимыми параметрами.

Действительно, во всех системах отсчета положение точки задается тремя независимыми функциями времени, которые называют уравнениями движения точки.

Прямоугольная (декартова) система координат представлена на рис. 1.2.2.

Положение точки определяется тремя кинематическими уравнениями движения точки:

$x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

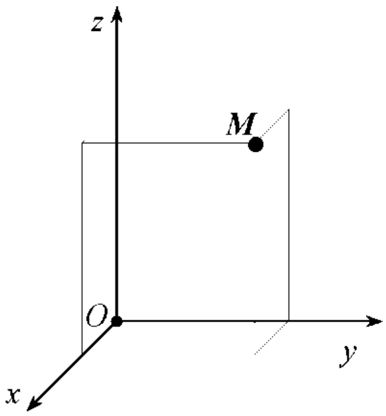


Рис. 1.2.2

Цилиндрическая (полярная) система координат. В отличии от декартовой системы, где положение точки определялось тремя линейными координатами x, y, z, в рассматриваемой цилиндрической системе вводится одна угловая координата $\varphi = \varphi(t)$, называемая азимутом, и две линейные: $p=p(t)$ – радиус; $z=z(t)$ – координата.

3. Естественный способ

При естественном способе указывается траектория движения точки и закон движения по этой траектории (см. рис. 1.2.3).

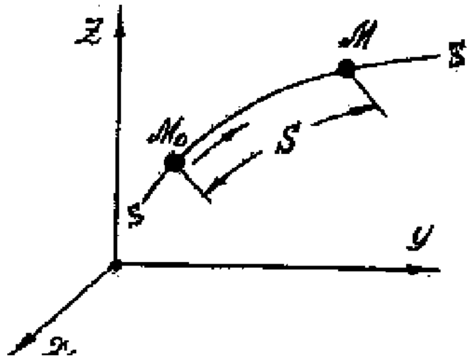


Рис. 1.2.3

Напомним, что *траекторией* называется непрерывная кривая, которую описывает точка при своем движении. Таким образом, должны быть заданы траектория *ss*, например системой из двух уравнений, связывающих координаты точки *x,y,z:*

$f_1(x,y,z)=0$; $f_2(x,y,z)=0$, начальное положение точки (M_0); направление движения (+, -); дуговая координата $S=S(t)$.

1.3. Простейшие виды движения

1. Поступательное движение твёрдого тела

Совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных точек, называется *механической системой.*

Механическая система материальных точек, в которой расстояние между любыми двумя точками остаются неизменными, называются неизменяемой системой.

Неизменяемая система точек, сплошным образом заполняющая некоторый объем, называется *абсолютно твёрдым телом.*

Число независимых параметров, единственным образом определяющих положение и движение системы в пространстве, называется *числом степеней свободы.*

Для определения числа степеней свободы твердого тела исследуем его модель, представляющую совокупность *n* точек (рис. 1.3.1).

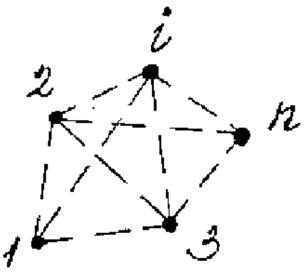


Рис. 1.3.1

Для n несвязанных точек число степеней свободы равно $3n$. Если точки взаимосвязаны, то для первых трех можно составить 3 условия, выражающих постоянство расстояний между ними, а для каждой из оставшихся $(n-3)$ точек еще по 3 аналогичных условия связи, выражающих постоянство расстояний между каждой k-ой точкой ($k=4, ..., n$) и первыми тремя.

Итого, накладывается следующее число условий (связей): $3+3(n-3)=3n-6$. Итак, неизменяемая система из n точек или, что то же самое, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы $i=3n-(3n-6)=6$ (рис. 1.3.2 а). Рассмотрим вопрос о числе степеней свободы твердого тела с различными опорными закреплениями.

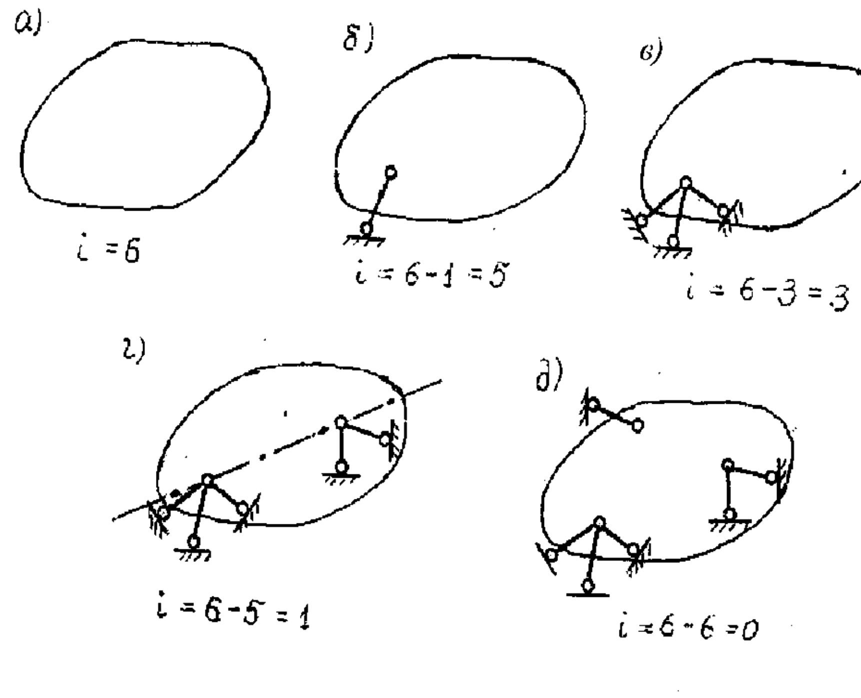


Рис. 1.3.2

При присоединении одного абсолютно жесткого стержня, один конец которого шарнирно прикреплен к основанию, а другой к рассматриваемому телу (рис. 1.3.2 б), теряется одна степень свободы $i=6-1=5$.

Если одна из точек тела закреплена неподвижно, как это показано на рис. 1.3.2 в), $i=6-3=3$; тело совершает сферическое движение.

В случае наличия неподвижной оси (рис. 1.3.2 г) i=6-5=1; тело совершает вращательное движение.

Схема закрепления тела с помощью шести стержней, представленная на рис. 1.3.2 д), $i=6-6=0$; соответствует неподвижной системе.

На настоящей лекции мы изучим простейшие виды движения твердого тела: поступательное, вращательное и плоское движение.

Поступательным движением называется такое движение, при котором любая прямая в теле остается параллельной самой себе.

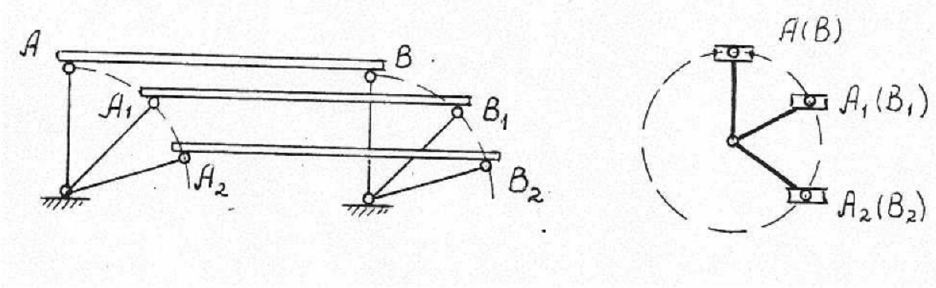


Рис. 1.3.3

Примером поступательного движения является движение стержня *AB* (рис. 1.3.3).

Рассмотрим три свойства поступательного движения.

На рис. 1.3.4 представлено твердое тело, совершающее поступательное движение, в двух положениях, из которых первое соответствует моменту времени t, а второе (1) - моменту времени $(t+\Delta t)$. Выделим внутри твердого тела точки A и B; соответственно в положении 1 точки A_1 и B_1 и соединим их прямыми линиями.

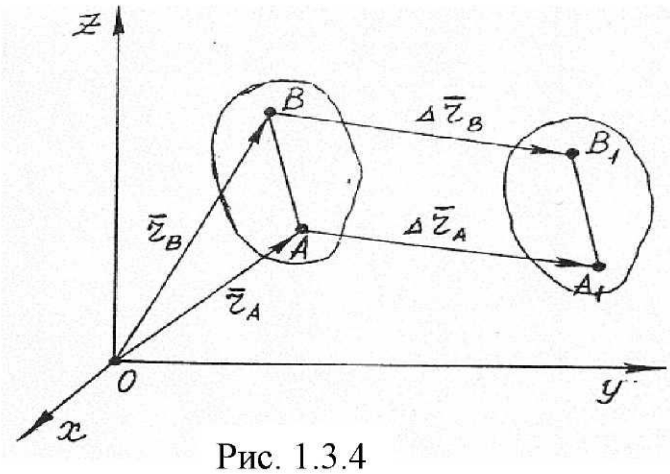


Рис. 1.3.4

Очевидно, что $AB = A_1B_1$ по определению твердого тела, $AB \parallel A_1B_1$ – по определению поступательного движения. следовательно ABA_1B_1 – параллелограмм и

1) $\Delta\bar{r}_A = \Delta\bar{r}_B$

2) $\bar{V}_A = \lim \Delta\bar{r}_A / \Delta t$, $\bar{V}_B = \lim \Delta\bar{r}_B / \Delta t$, при $\Delta t \to 0$; $\bar{V}_A = \bar{V}_B$.

3) $\bar{a}_A = d\bar{V}_A / dt$, $\bar{a}_B = d\bar{V}_B / dt$, $\bar{a}_A = \bar{a}_B$

Итак, при поступательном движении твердого тела векторы перемещения (Δr), скорости (v) и ускорения (a) всех его точек геометрически равны между собой.

Отсюда следует, что для определения поступательного движения твердого тела достаточно рассмотреть движение одной точки тела и задать координаты одной точки как функции времени.

2. Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом; остаются неподвижными.

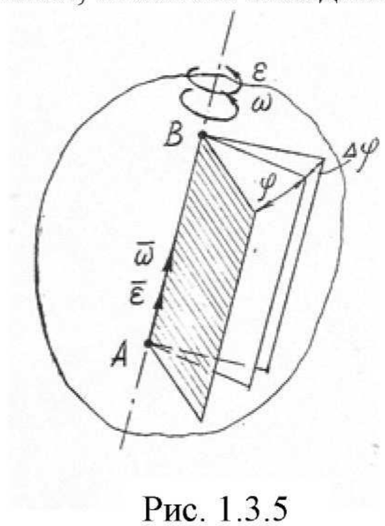


Рис. 1.3.5

Как было показано ранее, тело с неподвижной осью имеет одну степень свободы и совершает вращательное движение. В качестве независимого параметра, определяющего вращательное движение, принимается угол поворота $\varphi = \varphi(t)$ (см. рис. 1.3.5). Угловой скоростью называют величину, характеризующую быстроту изменения угла φ. Среднее значение угловой скорости за время Δt: $\omega_{cp} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Скорость в данный момент времени

$$\omega = lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad \text{при} \quad \Delta t \to 0, \qquad \text{или}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi .$$

Угловую скорость можно трактовать как вектор, проведенный по оси вращения в ту сторону, откуда направление вращения смотрится против часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения скорости. Среднее значение ускорения за Δt:

Угловое ускорение в данный момент времени:

$$\varepsilon_{cp} = \Delta\omega / \Delta t$$

$\varepsilon = \lim \Delta\omega / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, или $\varepsilon = d\omega / dt = \omega = \varphi$.

В векторной форме

$$\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega} / dt$$

Вектор углового ускорения откладывается по оси вращения и при ускоренном движении совпадает по направлению с вектором угловой скорости, а при замедленном - направлен в противоположную сторону.

2. ДИНАМИКА И ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИКИ

2.1. Предмет динамики и статики

В разделе "Динамика" исследуется движение материальных тел с учётом силовых взаимодействий между ними. При этом используют определения, способы и теоремы, рассмотренные нами в предыдущих разделах: "Статика" и "Кинематика". В разделе "Статика" рассматриваются вопросы о преобразовании системы сил к простейшему виду и их равновесии, а в разделе "Кинематика" разрабатываются приемы описания движения тел с чисто геометрической точки зрения без выяснения причин, вызывающих это движение. В разделе "Динамика" устанавливается связь между силами, действующими на тела, и кинематическими характеристиками движений этих тел.

В динамике решают два типа задач:

- определяют параметры движения по заданным силам;
- определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому при изучении динамики выделяют два основных раздела: "Динамика материальной точки" и "Динамика материальной системы", из которых первый предваряет второй.

Под материальной точкой понимают материальное тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь и положение которого можно определить координатами одной из его точек.

2. 2. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики

Основные положения динамики точки известны вам из курса физики. Напомним основные законы динамики материальной точки-законы Ньютона.

Первый закон. Если на материальную точку не действуют никакие силы или если действующие силы взаимно уравновешиваются, то материальная точка движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

Свойство материальной точки при отсутствии на нее действия сохранять равномерное и прямолинейное движения или состояние покоя называется инерцией. В связи с этим первый закон часто называют законом инерции.

Второй закон. Сила, действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, пропорциональное величине силы и имеющее направление силы.

$$ma=F \qquad (1)$$

Эта символическая запись второго закона Ньютона называется основным уравнением динамики.

Коэффициент пропорциональности в основном уравнении динамики $m=F/a$ называется массой и является мерой инертности материальной точки.

Известно, что вес тела и ускорение его свободного падения пустоте существенно зависят от места земной поверхности. В данной точке земли ускорение свободного падения всех тел одинаково и обозначается буквой g. Экспериментально установлено, что отношение веса P тела к ускорению его свободного падения g есть постоянная величина, не зависящая от места наблюдения. Это отношение $m = P/g$ также определяет массу тела. Таким образом, различают тяжелую массу $m_1 = P/g$ и инертную массу $m_2 = F/a$. В классической механике считается, что $m_1=m_2=m$.

Третий закон. Всякому действию всегда соответствует равное противоположно направленное противодействие.

Заметим, что действие и противодействие не уравновешиваются, так как приложены к разным материальным точкам.

Четвертым законом, является закон всемирного тяготения, открытый и сформулированный Ньютоном, рассмотрение которого выходит за рамки настоящего курса. Отметим, что первый и второй закон были известны еще Галилею, но их окончательная формулировка принадлежит Исааку Ньютону.

Закон независимости действия сил. Если на материальную точку действуют несколько сил, то ускорение точки оказывается равным геометрической сумме тех ускорений, которые она бы имела при действии этих сил по отдельности.

Это значит, что при действии на материальную точку сил F_1,F_2, ... , F_n каждая из которых сообщает точке соответственно ускорения a_1, a_2, ... , a_n, ускорение материальной точки будет

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \qquad (2)$$

На основании второго закона Ньютона можно записать

$$m\overline{a}_1 = \overline{F}_1, \qquad m\overline{a}_2 = \overline{F}_2, \qquad \ldots, \qquad m\overline{a}_n = \overline{F}_n, \qquad (3)$$

Складывается равенства (3) между собой, получим

$$m\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i .$$

В полученном равенстве справа стоит геометрическая сумма всех сил, действующих на материальную точку, являющаяся их равнодействующей F. С учетом соотношения (2) окончательно получим

$$m\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{F}_i . \qquad (4)$$

Таким образом, движение материальной точки под действием сил $F_1,F_2,\ldots,F_n$ будет таким же, как и при действии одной силы, ной их геометрической сумме (равнодействующей).

Рассмотрим две основные задачи динамики.

Запишем основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) ma = F в проекциях на оси прямоугольной системы координат

где x, y, z - проекции ускорения точки, а X, Y, Z - проекции сил. Эти

$$m\ddot{x} = X ,$$
$$m\ddot{y} = Y ,$$
$$m\ddot{z} = Z ,$$

уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки.

При заданной массе в уравнениях присутствуют 6 неизвестных величин, из которых только три независимы. Следовательно, три известные должны быть заданы. Можно задать либо проекции ускорения и искать проекции силы (первая задача динамики), либо, наоборот, при известных проекциях силы. Определять три проекции ускорения (вторая основная задача динамики)

2.3. Свободные прямолинейные колебания материальной точки. Относительное движение материальной точки

Часто возникает необходимость изучать движение точки; относительно подвижной системы отсчета (рис. 2.3.1). Прямоугольник ABCB вращается вокруг стороны AB; по диагонали CA начинает скользить без трения кольцо M. Материальная точка совершает сложное (составное) движение: относительное (прямолинейное) вдоль диагонали CA и переносное вращение прямоугольника вокруг неподвижной оси AB.

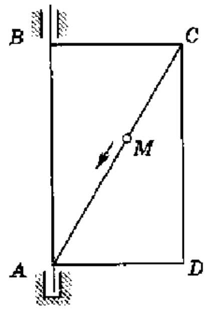


Рис. 2.3.1

Абсолютное движение — это движение материальной точки, неподвижной системы отсчета; *переносное движение* — движение неинерциальной системы отсчета относительно неподвижной системы; *относительное движение* — движение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.

Абсолютное ускорение материальной точки при сложном движении

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k,$$

где $\overline{a}_e, \overline{a}_r, \overline{a}_k$ — соответственно векторы переносного, относительного и Кориолисового ускорений.

Допустим, что переносное движение в общем случае — движение свободного твердого тела. Такое движение, как известно из кинематики, раскладывается: 1) на поступательное движение тела вместе с полюсом; 2) на сферическое движение вокруг этого подвижного полюса. Поэтому для ускорения произвольной точки такого тела в кинематике вывели формулу Ривальса:

$$\overline{a}_e = \overline{a}_O + [(\overline{\varepsilon}_e \times \overline{r}) + \omega_e \times (\omega_e \times \overline{r})]$$

Здесь $\overline{a}_e$ — переносное ускорение движущейся точки M; ω, ω_e— угловая скорость и угловое ускорение тела в его сферическом движении вокруг подвижного полюса O.

Вектор относительного ускорения $\overline{a}_r$— это ускорение точки M относительно подвижной среды: $\overline{a}_r = \dfrac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}$. Вектор Кориолисового ускорения $\overline{a}_k = 2(\overline{\omega}_e + \overline{\upsilon}_r)$зависит как от относительного, так и от переносного движения. Подставив выражение для абсолютного ускорения точки M в уравнение второго закона Ньютона, получим

$$m\overline{a}_a = \overline{F} \Rightarrow m(\overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k) = \overline{F},$$

$$m\overline{a}_r = \overline{F} - m\overline{a}_e - m\overline{a}_r - m\overline{a}_k.$$

Обозначив $\overline{F}_e = -m\overline{a}_e$ и $\overline{F}_k = -m\overline{a}_k$, последнее уравнение можно записать в виде

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{F}_e + \overline{F}_k,$$

где $\overline{F}_e$ и $\overline{F}_k$ — соответственно переносная и Кориолисова силы инерции. Это уравнение называется *основным уравнением динамики* относительного движения свободной материальной точки.

2. 4. Механическая система. Масса системы

Системой материальных точек называется такая совокупность материальных точек, между которыми существуют силы взаимодействия. При этом положение и движение каждой точки материальной системы зависит от положения и движения всех остальных точек.

Силы взаимодействия (см. рис. 2.4.1), с которыми точки и тела данной системы действуют друг на друга, называются внутренними силами системы.

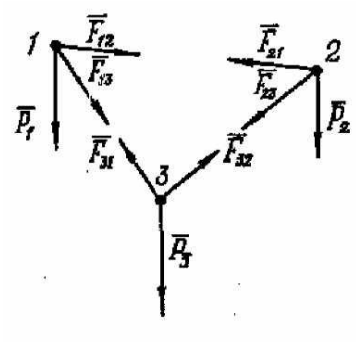


Рис. 2.4.1

В отличии от внутренних сил, внешними силами (силы P_1, P_2, P_3 на рис. 2.4.1) называют силы взаимодействия между материальными точками системы и материальными телами, не входящими в данную систему.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным и всецело определяется тем, что принято считать в данном конкретном случае материальной системой.

Например, для системы: "Земля - Луна", силы притяжения Солнца и других планет являются внешними силами, а для "Солнечной системы" эти же силы взаимного притяжения являются внутренними.

Внутренние силы обладают следующими свойствами.

1) силы взаимодействия двух точек системы по третьему закону

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}, \qquad \overline{F}_{23} = -\overline{F}_{32}, \qquad \overline{F}_{13} = -\overline{F}_{31}.$$

динамики равны по модулю и противоположно направлены

2) Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил

системы равняется нулю.

3) Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.

Второе и третье свойства вытекают из первого.

Следовательно, внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы в целом. Однако эти силы приложены к разным точкам или телам системы и могут вызывать их взаимные перемещения внутри системы.

Материальная система может быть свободной и не свободной. Материальная система называется свободной, если движение ее точек ничем не ограничено, и несвободной, если ограничено некоторыми условиями, связями.

При рассмотрении несвободной материальной системы применим принцип освобождаемости: система освобождается путем отбрасывания связей, действие которых заменяется силами реакций.

Напомним, что система материальных точек, в которой расстояния между любыми двумя точками остается неизменным, называется неизменяемой системой, а неизменяемая система точек, сплошным образом заполняются некоторый объем: называется абсолютно твердым телом.

Для абсолютно твердого тела вся совокупность внутренних сил также уравновешена.

Масса системы.

Движение системы кроме действующих сил, зависит также от ее

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (5)$$

суммарной массы и распределения масс. Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему. В случае если система сплошным образом занимает объем V.

$$M = \int_V dm .$$

Средней плотностью тела называют отношение $\rho_{cp} = M / V$. Плотностью тела в данной точке называют предел $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V} = \dfrac{dm}{dV}$

Отсюда, $M = \int \rho dV$.

Если плотность во всех точках тела одинакова, то такое тело называют однородным.

Распределение масс в системе определяется значениями масс m_i ее точек и их взаимными положениями, то есть координатами X_i, Y_i, Z_i. Однако при решении задач динамики системы и, в частности, динамики твердого тела достаточно знать некоторые суммарные характеристики распределения масс. Ими являются: координаты центра масс, осевые моменты инерции и центробежные моменты инерции.

3. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ СИСТЕМЫ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

Аналитическая механика построена на некоторых основных началах (принципах), которые предлагают свои (отличные от ранее рассмотренных) подходы и методы решения задач механики.

Классическая механика в основном оперирует векторными величинами, векторными равенствами, а алгебраические уравнения получаются в результате проецирования векторных равенств на координатные оси. В расчетных уравнениях аналитической механики широко применяются скалярные энергетические характеристики движения материальных объектов и скалярные меры действия на них систем сил.

Характерным для системы изложения аналитической механики является то, что ее основу составляют некоторые общие принципы, из которых аналитическим путем получаются дифференциальные уравнения движения.

Методы аналитической механики оказались плодотворными не только в теоретических исследованиях, но и в практических инженерных расчетах, так как они предоставили универсальный аналитический инструментарий для решения сложных задач.

3. 1. Связи и их уравнения

Связями называются любого вида ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, причем они должны выполняться при любых действующих на систему силах. Конструктивно связи осуществляются в виде нитей, стержней, шарниров, поверхностей и т. д. Аналитически наличие связей выражается уравнениями, связывающими у механической системы координаты точек, их скорости и время.

Связи, не изменяющиеся со временем, называются *стационарными*, а изменяющиеся со временем — *нестационарными* (они реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел).

Различают связи геометрические и кинематические (дифференциальные). Первые налагают ограничения только на положения (координаты) точек системы, вторые — налагают ограничения еще и на скорости точек. В соответствии с этим уравнения геометрических связей будут содержать только координаты элементов системы и, может быть, время, т. е. $f(x_k, y_k, z_k, t) = 0$, а уравнения кинематических связей — содержать первые производные от координат по времени, т. е. $f(x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0$.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называют *голономными.*

Рассмотрим некоторые примеры.

Связь между точками абсолютно твердого тела, которая не позволяет изменять расстояния между любыми двумя его точками, является геометрической стационарной связью. Ее уравнение будет $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0$, где $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — координаты точек *1* и 2, l — расстояние между этими точками. Таковыми же являются связи в виде неподвижных гладкой плоскости, подпятника.

В задаче (рис. 3.1.1) точка *M* движется внутри вращающейся трубки. По отношению к неподвижной системе координат внутренняя поверхность трубки будет для точки *M* являться нестационарной геометрической связью (координаты x_M и y_M будут зависеть от времени t).

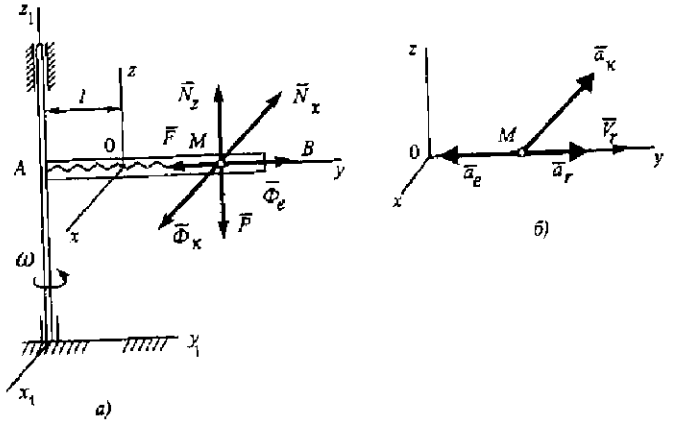
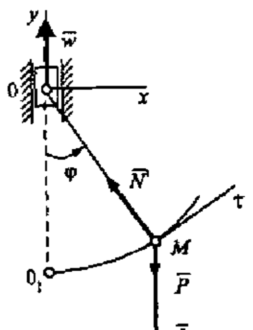
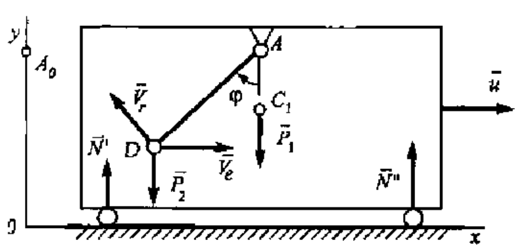


Рис. 3.1.1

Аналогичное можно сказать о связи точки *M* в

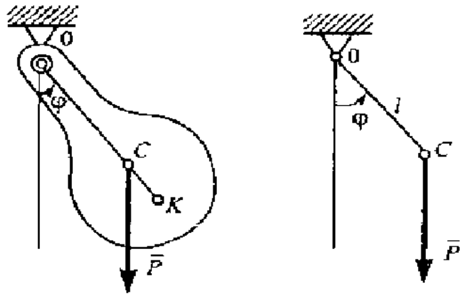


(рис. 3.1.2),



о связи точки *D* в (рис. 3.1.3).

Также различают связи удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние). Удерживающие связи налагают на систему (точку) ограничения, которые сохраняются при любом положении системы и любых действующих на нее силах.



а) б)

Рис. 3.1.4

Так, для точки С физического маятника (рис. 3.1.4, *а)*, жестко соединенной с неподвижным шарниром *О*, связь является геометрической удерживающей, ее уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$, где l — расстояние *ОС*; x, y, z — координаты точки *С* в системе отсчета *Oxyz*. А для точки С математического маятника (рис. 3.1.4, *б)*, в котором соединение точки *С* с шарниром *О* осуществляется в виде нити, связь является односторонней (нить не удерживает точку *С* от приближения к шарниру *О* и в этом случае точка С освобождается от связи); математически рассмотренная связь выражается неравенством $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \le 0$.

3. 2. Принцип возможных перемещений

Основные понятия аналитической механики

В статике и предыдущих разделах динамики эффект действия связей учитывался введением реакций связей, направление которых соответствовало направлениям тех перемещений, которые данная связь не позволяла осуществлять. Например, реакция гладкой поверхности направлена от нее (к телу), так как она препятствует перемещению тела за эту поверхность; стержень с шарнирами на концах препятствует изменению расстояний между его шарнирами (в результате чего в нем возникает продольное усилие), но он не препятствует тем перемещениям, при которых стержень поворачивается вокруг неподвижного шарнира.

В аналитической механике эффект действия связей на механическую систему определяется не только реакциями связей, но и влиянием связей на подвижность системы, что характеризуется картиной тех бесконечно малых перемещений, которые могут осуществляться при наличии связей.

Такие перемещения называют возможными (или виртуальными).

Так, для груза, расположенного на неподвижной плоскости (рис. 3.2.1, а), таким перемещением (допускаемым связью) будет перемещение δs вдоль неподвижной плоскости.

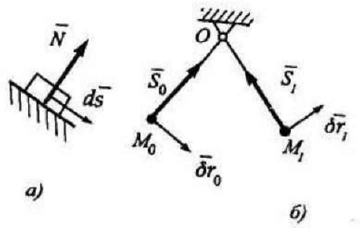


Рис. 3.2.1

Для точки M стержня OM, имеющего цилиндрический шарнир в точке O (рис. 3.2.1, *б)*, возможным перемещением в положении M_o будет $\delta\bar r_0$, а в положении M_1 — это будет $\delta\bar r_1$ (эти перемещения, как являющиеся бесконечно малыми, перпендикулярны оси стержня). В точке M_o реакция нити $\bar S_0$, а в точке M_1 — реакция $\bar S_1$.

Возможным перемещением точки называется такое бесконечно малое (элементарное) мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями.

Возможные перемещения должны удовлетворять трем условиям:

1) они рассматриваются из положения, которое точка занимает в какой-то определенный момент времени (так, в момент времени t_0 для точки M_o на рис. 3.2.1, б это будет $\delta\bar r_0$, а в момент времени t_1, в положении M_1 это будет $\delta\bar r_1$);

2) перемещения являются элементарными (бесконечно малыми);

3) все связи сохраняются.

Возможные перемещения точки отражают особенности наложенных на точку связей, их нельзя смешивать с ее действительным перемещением. Так, если точка лежит на плоскости, то ее возможными перемещениями являются бесконечно малые перемещения в любом направлении по этой плоскости. Действительным же перемещением точки может быть лишь одно из этих возможных, именно то, которое обусловлено не только характером связи, но и действующими на точку силами, ее массой, начальными условиями ее движения.

Возможные перемещения принято обозначать символом $\delta\bar r$ ($\delta\bar s$ и т. д.), в отличие от действительного элементарного перемещения $d\bar r$ ($d\bar s$ и т. д.). Вектор $\delta\bar r$ называют вариацией радиус-вектора точки.

Возможным перемещением механической системы называют любую совокупность возможных перемещений точек этой системы, допускаемую всеми наложенными на нее связями.

Так, для кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.2.2) возможным перемещением этой механической системы является поворот кривошипа OA на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. При этом повороте все точки механизма получат соответствующие бесконечно малые перемещения ($\delta s_A, \delta s_B, \delta s_D$ и т. д.), которые и будут образовывать совокупность элементарных перемещений точек системы.

В общем случае точка и механическая система могут иметь множество различных возможных перемещений. Однако обычно можно указать некоторое определенное число таких независимых между собой перемещений, через которые можно выразить любое другое возможное перемещение системы.

Так, возможные перемещения всех точек кривошипно-ползунного механизма (рис. 3.2.2) могут быть выражены через одно возможное перемещение, например через $\delta\varphi$, следующим образом: $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi, \delta s_D = OD \cdot \delta\varphi$; связь между δs_A и δs_B, устанавливается из условия равенства проекций векторов $\delta \bar{s}_A$ и $\delta \bar{s}_B$ на прямую AB.

Другой пример. Для точки, находящейся на какой-либо плоскости (рис. 3.2.3), любое из бесчисленного множества ее возможных перемещений в различных направлениях вдоль этой плоскости можно выразить через два взаимно перпендикулярных перемещения $\delta \bar{r}_1$ и $\delta \bar{r}_2$ в виде $\delta r = a \cdot \delta r_1 + b \cdot \delta r_2$, где a и b — любые числа.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называют *числом степеней свободы* этой системы.

Следовательно, в рассмотренных примерах кривошипно-ползунный механизм (рис. 3.2.2) имеет одну степень свободы; точка на плоскости (рис. 3.2.3) имеет две степени свободы.

Возможные перемещения точек механической системы ограничены наложенными на нее связями (внешними и внутренними), кроме того, положения одних точек системы зависят от положения других ее точек. Поэтому для определения положения всех точек системы достаточно знать положение в пространстве какого-то ограниченного количества элементов (точек, тел) механической системы, через которые однозначно определяется положение всех других элементов системы.

Так, положение всех точек кривошипно-ползунного механизма (рис.3.2.2), имеющего одну степень свободы, вполне определяется заданием только одного угла φ поворота кривошипа. Положение же точки на плоскости (рис.3.2.3) определяется двумя независимыми координатами, например, координатами x и y. Как видим, число этих координат соответствует числу степеней свободы данной точки.

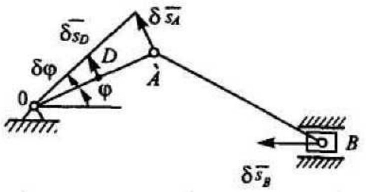


Рис. 3.2.2

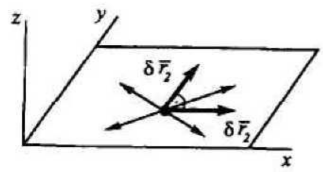


Рис. 3.2.3

Свободная в пространстве точка имеет три степени свободы (она обладает тремя независимыми перемещениями), и ее положение в пространстве можно определить тремя независимыми параметрами, например декартовыми координатами x, y, z.

Независимые между собой параметры (координаты), число которых равно числу степеней свободы системы и которые однозначно определяют ее положение, называют обобщенными координатами системы.

В качестве обобщенных координат (их в общем виде обозначают буквой q) можно выбирать параметры, имеющие любой геометрический (или физический) смысл, и соответственно этому они будут иметь разные размерности. Например, стержень OA, вращающийся в вертикальной плоскости (рис. 3.2.4, *а*), имеет одну степень свободы, и его положение может быть определено на выбор одной из следующих обобщенных координат: 1) $q = \varphi$ - A_0A угол поворота стержня OA от вертикали; 2) $q=s_A$ — длина дуги A_0A; 3) $q = \sigma$ - площадь сектора OA_0A и т. д. Система, изображенная на рис. 3.2.4, *б*, состоит из вращающейся в вертикальной плоскости трубки OA и ползуна D, прикрепленного к точке O пружиной и двигающегося вдоль трубки. Эта система имеет две степени свободы, ее положение определяется двумя обобщенными координатами, например, такими: $q_1 = \varphi$ — угол поворота трубки OA, $q_2= s$ — расстояние OD.

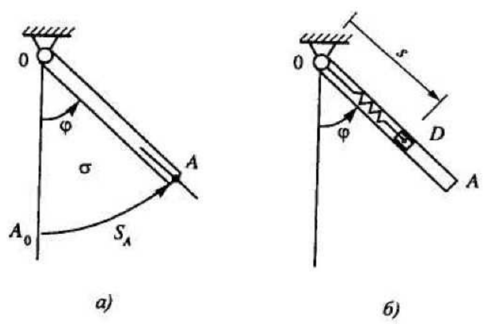


Рис. 3.2.4

У свободного твердого тела шесть степеней свободы (независимые перемещения: три поступательных вдоль координатных осей и три поворота вокруг этих осей), и его положение в пространстве определяется шестью параметрами: например, тремя координатами точки, принятой за полюс, и тремя угловыми координатами (углами Эйлера).

Обобщая изложенное выше, заметим, что *у механической системы с геометрическими связями число независимых возможных перемещений, число обобщенных координат и число степеней свободы является одним и тем же числом, характеризующим подвижность этой системы в пространстве.*

Введение понятия обобщенных координат позволяет положение даже сложных механических систем (с большим количеством тел и связей) определять лишь некоторым числом параметров. Поэтому количество дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах, как правило, меньше, чем в декартовых координатах. Многие механизмы и машины, состоящие из многих тел, представляют собой системы с одной степенью свободы, и для определения их положений достаточно задать одну обобщенную координату.

При движении механической системы, имеющей s степеней свободы, ее обобщенные координаты будут с течением времени изменяться, и закон этого движения определится уравнениями

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \ldots, q_s = f_s(t) \qquad (2.1)$$

Уравнения (2.1) представляют собой кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Производные от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями системы* (обозначаются символами $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$).

Введем понятие о *возможной работе,* как о работе, которую сила могла бы совершить, если бы точка ее приложения совершила возможное перемещение. Возможную работу будем обозначать δA, и вычислять ее следует по обычным формулам для элементарной работы силы. Например, $\delta A = \overline{F} \cdot \delta \overline{r} = F \delta s \cos\alpha$ и т. д.

Теперь введем понятие *обобщенной силы* Q_i соответствующей обобщенной координате q_i. Для определения обобщенной силы Q_i механической системе дается такое возможное перемещение, при котором координата q_i получает положительное приращение δq_i (его называют вариацией координаты q_i, а остальные координаты остаются без изменения. Далее вычисляется на этом перемещении сумма элементарных работ всех действующих на систему сил $(\sum \delta A_i)$. Обобщенную силу Q_i соответствующую координате q_i, находим по формуле

$$Q_i = \sum \delta A_i / \delta q_i \qquad (2.2)$$

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно изменяются все ее обобщенные координаты, то сумма элементарных работ всех действующих на систему сил при этом перемещении системы может быть представлена как сумма элементарных работ обобщенных сил

$$\sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s . \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) дает выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах. Из структуры равенства (2.3) видно, что каждая из обобщенных сил является коэффициентом при вариации соответствующей обобщенной координаты в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

Размерность обобщенной силы получаем как результат отношения размерности работы к размерности обобщенной координаты, т. е.

$$[Q] = [A]/[q].$$

Отсюда видно, что если q имеет размерность длины, Q имеет размерность силы; если q — угол (величина безразмерная), то Q будет иметь размерность момента силы и т. д.

Введенные в этом параграфе понятия будут использованы для формулировки некоторых принципов, применение которых позволит получить достаточно простые в употреблении, но очень эффективные методы решения сложных задач механики.

В основе аналитической статики лежит принцип возможных перемещений.

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положения, была равна нулю,* т. е.

$$\sum \delta A_k^a = 0 \qquad (2.4)$$

В обобщенных координатах для системы, имеющей s степеней свободы, это условие, согласно равенству (2.3), дает

$$Q_1^a\delta q_1 + Q_2^a\delta q_2 + \ldots + Q_s^a\delta q_s = 0 , \qquad (2.5)$$

Или

$$\sum Q_i^a\delta q_i = 0, (i = 1,2,\ldots,s) \qquad (2.6)$$

где Q_i^a — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i.

Так как вариации δq_i между собой независимы, то равенство (2.6) может выполняться только при условии, если каждый из коэффициентов при всех δq_i в отдельности равен нулю, т. е. если

$$Q_1^a = 0, Q_2^a = 0, ..., Q_s^a = 0. \qquad (2.7)$$

Следовательно, для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы, соответствующие выбранным для нее обобщенным координатам, были равны нулю. Отметим, что число уравнений равновесия (2.7) равно числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы.

В качестве важного достоинства отметим, что применение принципа возможных перемещений не требует рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) механической системы и позволяет исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции идеальных связей. Отметим еще, что при решении задач на равновесие механической системы с помощью принципа возможных перемещений ***число расчетных уравнений равно числу*** степеней ***свободы системы***.

Это преимущество особенно заметно, когда находящаяся в равновесии система состоит из большого числа связанных между собой тел. Решение задачи о равновесии такой системы методами геометрической статики предусматривает расчленение системы на отдельные тела и составление уравнений равновесия этих тел (в эти уравнения войдут и силы взаимодействия между телами, реакции внешних связей), что приводит к составлению большого числа уравнений со многими неизвестными. Применяя принцип возможных перемещений для системы с многими телами, но имеющей одну степень свободы (что часто бывает в практических задачах), получим условие равновесия в виде одного уравнения работ (2.4); причем реакции идеальных связей можно из рассмотрения исключить (и на чертеже не изображать). К системам с неидеальными связями в общем случае принцип возможных перемещений неприменим. Однако в некоторых случаях, например при движении тела по шероховатой поверхности эту неидеальную связь можно рассматривать как идеальную, включив силу трения в число активных сил.

Уравнение (2.4) называется *общим уравнением статики.*

3. 3. Уравнения Лагранжа второго рода

Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений, дающий общий метод решения задач статики, можно применить к решению задач динамики. Как известно, согласно принципу Даламбера, совокупность всех сил, действующих на механическую систему, и сил инерции образует в каждый момент времени уравновешенную систему сил. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, для механической системы получим уравнение

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{И} = 0 \qquad (3.1)$$

Это уравнение выражает следующий принцип Даламбера — Лагранжа: *при движении, механической системы в каждый момент времени сумма элементарных работ всех действующих на систему сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.* Уравнение (3.1) называют *общим уравнением динамики.*

В первое слагаемое уравнения (3.1) входит работа активных сил и работа реакций связей. Если на систему наложены идеальные связи, то для их реакций

$$\sum \delta A_k^r = 0$$

и общее уравнение динамики для системы с идеальными связями принимает вид

Так как в уравнения (3.1), (3.2) входит работа сил инерции, величина которых выражается через ускорения точек, то эти уравнения

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{И} = 0 . \qquad (3.2)$$

дают возможность составлять дифференциальные уравнения движения механической системы. Если система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то множество сил инерции всех точек каждого тела целесообразно заменить их силовыми эквивалентами: приложенной в каком-либо центре силой, равной главному вектору сил инерции тела, и парой сил инерции с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра.

Для системы, имеющей s степеней свободы, уравнение работ (3.2) может быть записано через обобщенные силы и обобщенные координаты в виде

$$\sum (Q_i + Q_i^{И})\delta q_i = 0, (i = 1,2,...,n), \qquad (3.3)$$

где Q_i — обобщенная активная сила, Q_i^u — обобщенная сила инерции, соответствующая обобщенной координате q_i.

Так как возможные перемещения δq_i, между собой независимы и каждое из них в общем случае не равно нулю, то условие (3.3) будет выполняться, если

$$Q_1 + Q_1^{И} = 0, Q_2 + Q_2^{И} = 0, \ldots, Q_s + Q_s^{И} = 0, \qquad (3.4)$$

где s — число обобщенных координат или число степеней свободы системы.

Уравнения (3.4) выражают *общее уравнение динамики в обобщенных силах.*

При непосредственном использовании уравнений (3.4) для решения задач могут возникать трудности, связанные с вычислением обобщенных сил инерции $Q_i^{и}$. Однако процесс составления уравнений значительно упростится, если выразить все входящие в них обобщенные силы через кинетическую энергию системы.

Лагранж получил формулу, выражающую обобщенную силу инерции, соответствующую какой-либо обобщенной координате q_i системы, в следующем виде:

$$Q_i^{И} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta q_i}\right] \qquad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) для $Q_i^{и}$ в равенства (3.4), получим следующую систему уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i}\right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} = Q_i, i = 1,2,\ldots,s, \qquad (3.6)$$

где T — кинетическая энергия механической системы; q_i — обобщенные координаты; Q_i, — обобщенные активные силы; s — число степеней свободы системы.

Равенства (3.6) и представляют собой *дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, или уравнения Лагранжа* второго рода. Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы.

Для составления уравнений Лагранжа надо кинетическую энергию системы выразить через обобщенные координаты и обобщенные скорости. При дифференцировании по времени первых членов в левых частях уравнений Лагранжа появятся вторые производные по времени от обобщенных координат $(\ddot{q}_i)$.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики как для простых, так и для сложных механических систем. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в систему, ни от того, как эти тела движутся. Если у механической системы связи идеальные, то в правые части уравнений (3.6) будут входить лишь обобщенные активные силы, что позволяет исключить из рассмотрения все реакции идеальных связей.

3. 4. Принцип Гамильтона – Остроградского

Общее уравнение динамики имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{P}_i - m_i\overline{a}_i\right)\cdot\delta\overline{r}_i = 0, \tag{4.1}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\cdot\delta\overline{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\overline{a}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) = 0.$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\cdot\delta\overline{r}_i = \delta A$$

- работа задаваемых сил на возможном перемещении системы, а вектор возможного перемещения $\delta\overline{r}_i$ представляет собой синхронную вариацию радиуса-вектора $\overline{r}_i$

Преобразуем скалярное произведение:

$$\left(-m_i\overline{a}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) = \left(-m_i\frac{d\overline{v}_i}{dt}\cdot\delta\overline{r}_i\right) = -\frac{d}{dt}\left(m_i\overline{v}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) + \left(m_i\overline{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\delta\overline{r}_i\right).$$

$$\frac{d}{dt}\delta\overline{r}_i = \delta\frac{d\overline{r}_i}{dt} = d\overline{v}_i.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-m_i\overline{a}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overline{v}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}m_i\left(\overline{v}_i\cdot\delta\overline{v}_i\right) =$$

$$= -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overline{v}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) + \delta\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overline{v}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right) + \delta T.$$

Таким образом, общему уравнению динамики можно придать вид

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\overline{v}_i\cdot\delta\overline{r}_i\right). \tag{4.2}$$

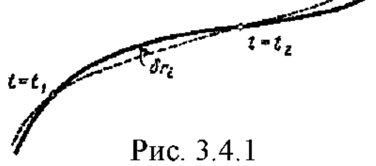


Рис. 3.4.1

Ограничим произвольность выбора путей сравнения условием пересечения действительной траектории и кривой сравнения в момент времени t и t_2, т. е. условием, чтобы при $t = t_1$, и $t = t_2$ (рис. 3.4.1)

$$\delta \overline{r_i}(t_1) = \delta \overline{r_i}(t_2) = 0 \qquad (4.3)$$

Кривые сравнения должны выбираться из класса дважды дифференцируемых функций.

Интегрируя равенство (4.2) в пределах (t_1, t_2), получаем криволинейный интеграл:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \overline{v}_i \cdot \delta \overline{r}_i \right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \overline{v}_i \cdot \delta \overline{r}_i \right) \right]_{t\ t_1}^{t\ t_2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{v}_i(t_2) \cdot \delta \overline{r}(t_2) - \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{v}_i(t_1) \cdot \delta \overline{r}(t_1)$$

Так как вариации радиуса-вектора $\overline{r_i}$, на границах равны нулю, то имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \delta A)dt = 0 . \qquad (4.4)$$

Это уравнение выражает принцип Гамильтона — Остроградского: *действительное движение механической системы с голономными двусторонними идеальными связями отличается от всех иных возможных ее движений, удовлетворяющих условию* (4.3), *тем, что только для действительного движения выполняется равенство* (4.4).

3. 5. Понятие об устойчивости равновесия

Принцип возможных перемещений позволяет найти положения равновесия механической системы, но он ничего не говорит о том, будет ли то или иное положение равновесия устойчивым (практически осуществимым, сохраняющимся при незначительных отклонениях) или неустойчивым (легко нарушаемым).

Поясним сказанное простым примером. Обычный физический маятник с горизонтальной осью вращения имеет два возможных положения равновесия — это положения, при которых центр масс маятника находится в крайних верхней или нижней точках своей траектории. Очевидно, что верхнее положение равновесия будет неустойчиво, а нижнее положение устойчиво и оно легко реализуемо.

Устойчивость или неустойчивость положения равновесия определяется поведением системы при воздействии на нее малых возмущений.

Предположим, что система находится в одном из своих положений равновесия и точкам системы дают малые начальные отклонения с небольшими начальными скоростями. Если при таких воздействиях отклонения системы от равновесного положения во все последующее время будут меньше любого сколь угодно малого заданного отклонения, то равновесие системы называется *устойчивым.*

Существенным признаком устойчивости равновесия является то, что при уменьшении до нуля начальных отклонений точек системы и их начальных скоростей в последующем движении отклонения и скорости точек системы также уменьшаются и стремятся к нулю.

Так, крайнее нижнее положение маятника является устойчивым, потому что если маятник вывести из него, то он совершает колебания около этого положения. Устойчивым будет и равновесие тяжелого цилиндра в цилиндрической впадине *A* (рис. 3.5.1) с горизонтальными образующими.

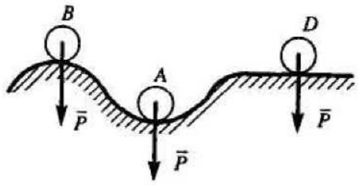


Рис. 3.5.1

При неустойчивом положении равновесия система при дальнейшем движении все больше и больше отклоняется от положения равновесия. Так, верхнее положение равновесия физического маятника является неустойчивым. Таково же и равновесие цилиндра в положении *B* (рис. 3.5.1).

Если система при указанных малых отклонениях остается в равновесии и в новом, отклоненном от первоначального, положении, то такое равновесие называется *безразличным.* Примером безразличного равновесия является равновесие цилиндра на горизонтальной плоскости (рис. 3.5.1, положение *D).*

Один общий критерий, устанавливающий **достаточное условие устойчивости равновесия консервативной системы,** дает теорема Лагранжа — Дирихле: *если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым.*

Раздел II. Теория механизмов и машин

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МЕХАНИЗМОВ. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

4.1. Понятие анализа и синтеза механизмов

Теория механизмов – это наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов в связи с их анализом и синтезом.

Анализ – исследование структурных, кинематических и динамических свойств механизмов.

Синтез – проектирование механизмов с заданными структурными, кинематическими и динамическими свойствами для осуществления требуемых движений.

Всякий механизм состоит из отдельных деталей: подвижных и неподвижных.

Каждая подвижная деталь или группа деталей, образующая одну жесткую подвижную систему тел, носит название ***подвижного звена механизма***. Все неподвижные детали образуют одну жесткую неподвижную систему тел, называемую ***неподвижным звеном*** или ***стойкой***. То есть в любом механизме имеется одно неподвижное и одно или несколько подвижных звеньев.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется ***кинематической парой***.

Система звеньев, связанных между собой кинематическими парами, называется ***кинематической цепью***.

4. 2. Кинематические пары и кинематические цепи

На относительное движение каждого звена кинематической пары накладываются ограничения, зависящие от способа соединения звеньев пары. Эти ограничения называются ***условиями связи***.

В общем случае всякое свободно движущееся в пространстве абсолютно твердое тело, положение которого определяется тремя произвольно выбранными точками *A, B, C,* обладает в пространстве *шестью степенями свободы*. В самом деле, положение твердого тела в пространстве фиксируется координатами трех его точек *A, B, C* (т.е. девятью координатами). Между собой эти координаты связаны тремя *условиями постоянства расстояний*: *AB, BC, CA*. (См. рис. 4.2.1).

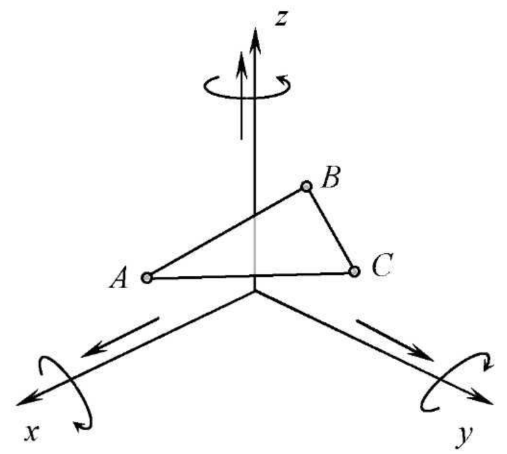


Рис. 4.2.1. К определению положения тела в пространстве

Таким образом, число независимых параметров, определяющих положение твердого тела в пространстве, т.е. число его степеней свободы, равно шести. Движение такого тела может быть всегда представлено тремя вращениями вокруг осей x, y, z и тремя поступательными движениями вдоль тех же осей, т.е. шестью видами независимых возможных движений.

Число условий связи S кинематической пары должно быть меньше шести, так как при $S=6$ звенья теряют относительную подвижность, и кинематическая пара переходит в жесткое соединение двух звеньев. Точно так же число условий связи не может быть меньше единицы, так как при $=0$ звенья не соприкасаются, то есть имеется два тела, движущиеся в пространстве одно независимо от другого.

Итак, число условий связи S, наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, находится в пределах:

$$1 \leq S \leq 5.$$

Следовательно, число степеней свободы H звена кинематической пары в относительном движении может быть выражено зависимостью

$$H = 6 - S. \qquad (1)$$

Все кинематические пары делятся на *классы* (I, II, III, IV, V) в зависимости от числа условий связи. Класс кинематической пары может быть определен из зависимости (1):

$$S = 6 - H. \qquad (2)$$

Пример 1.

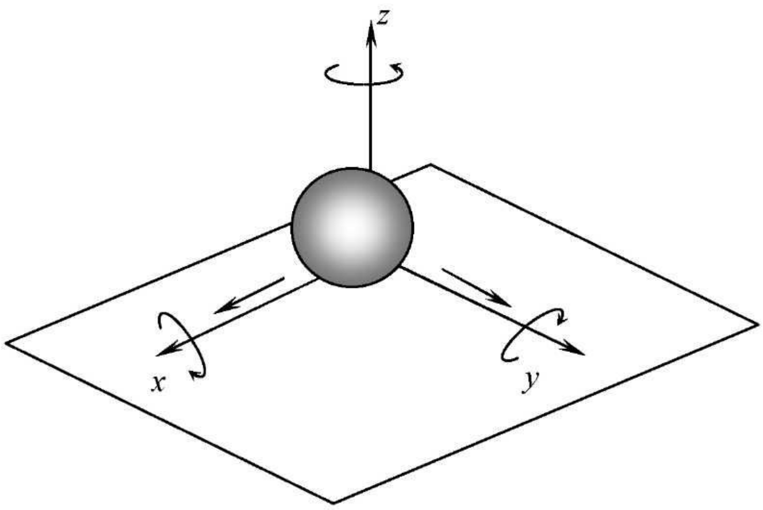


Рис. 4.2.2. Пятиподвижная кинематическая пара

Число степеней свободы звеньев данной кинематической пары $H = 5$. Действительно, движение шара вдоль оси z ограничено плоскостью, а в сторону, обратную плоскости, невозможно, так как нарушило бы соприкосновение звеньев. Таким образом, движение шара может быть представлено как вращение вокруг трех осей и движение вдоль двух осей: число простейших движений шара равно пяти. Следовательно, число степеней свободы звеньев данной кинематической цепи $H=5$. Тогда число условий связи равно

$$S = 6 - H = 6 - 5 = 1.$$

Поэтому пара, изображенная на рис. 2, относится к парам I класса (*пятиподвижная пара*).

Для решения вопроса, к какому классу относится та или иная кинематическая пара, целесообразно использовать следующий метод.

Одно из звеньев, входящих в кинематическую пару, представить неподвижным. Связать с ним систему координат $Oxyz$ и, ориентируясь по ней, проследить, какие движения другого звена пары невозможны из шести движений, которые оно имело бы возможность совершать, не входя в пару. Число этих невозможных движений (как равное числу связей в паре) представит собой номер класса пары.

Пример 2.

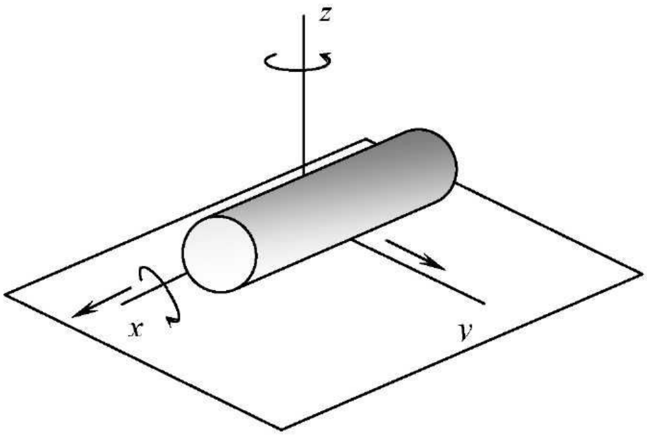


Рис. 4.2.3. Четырехподвижная кинематическая пара

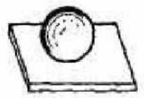
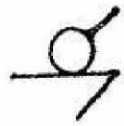
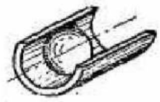
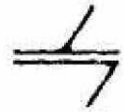
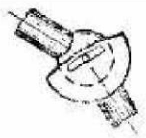
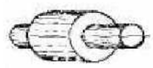
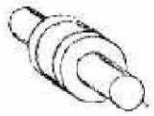
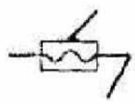
Свяжем систему координат *Oxyz* с плоскостью. Рассмотрим цилиндр. Находясь в кинематической паре с плоскостью, он лишен возможности совершать поступательное движение вдоль оси *Oz, а* также вращательное движение вокруг оси *Oy* Таким образом, число условий связи равно двум.

Поэтому данная кинематическая пара относится к парам II класса (*четырехподвижная пара*).

Таким образом, существует следующее соответствие между классом кинематической пары и числом степеней свободы ее звеньев:

Кинематическая пара *I класса – пятиподвижная* пара;
кинематическая пара *II класса – четырехподвижная* пара;
кинематическая пара *III класса – трехподвижная* пара;
кинематическая пара *IV класса – двухподвижная* пара;
кинематическая пара *V класса – одноподвижная* пара.

Таблица. **Условные обозначения кинематических пар**

Класс пары	Число условий связи	Число степеней свободы	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
I	1	5	Шар-плоскость		
II	2	4	Шар-цилиндр		
III	3	3	Сферическая		
III	3	3	Плоскостная		
IV	4	2	Цилиндрическая		
IV	4	2	Сферическая с пальцем		
V	5	1	Поступательная		
V	5	1	Вращательная		
V	5	1	Винтовая		

Кинематические пары делятся на низшие и высшие. Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением элементов ее звеньев по поверхности, называется ***низшей***. (Пример низшей кинематической пары: два цилиндра, находящиеся в постоянном соприкосновении, из которых один вращается внутри другого).

Кинематическая пара, которая может быть выполнена соприкосновением элементов ее звеньев только по линиям или точкам, называется ***высшей***. (Пример высшей кинематической пары: см. рис. 4.2.2).

4.3. Структура механизмов

Кинематической цепью называется система звеньев, связанных между собой кинематическими парами. Кинематические цепи делятся на *простые* (у которых каждое звено входит не более чем в две кинематические пары) и *сложные* (у которых хотя бы одно звено входит более чем в две кинематические пары).

Цепи также бывают *замкнутые* (звенья образуют замкнутый контур) и *незамкнутые* (без контура).

Механизм – это кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них все остальные звенья совершают однозначно определяемые движения.

Звено (звенья) механизма, которому сообщается движение, преобразуемое в требуемое движение других звеньев механизма, называется *входным звеном* (*входными звеньями*). Звено (звенья) механизма, совершающее требуемое движение, для которого предназначен механизм, называется *выходным звеном* (*выходными звеньями*). Для краткости используются термины *«вход»* и *«выход»*.

Остальные подвижные звенья называются *соединительными* или *промежуточными*.

Ведущим называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является положительной.

Ведомым называется звено, для которого сумма элементарных работ всех внешних сил, приложенных к нему, является отрицательной или равна нулю.

В *плоском механизме* все звенья движутся параллельно одной общей плоскости.

Структурная формула кинематической цепи общего типа

Если на движение звена в пространстве не наложено никаких условий связи, то оно обладает шестью степенями свободы. Тогда, если число звеньев кинематической цепи равно k, то общее число степеней свободы, которым обладают k звеньев до их соединения в кинематические пары, равно $6k$.

Соединение звеньев в кинематические пары накладывает различное число связей на относительное движение звеньев, зависящее от класса пар.

Пусть число пар I класса, в которые входят звенья рассматриваемой цепи, равно p_1, число пар II класса – p_2, число пар III класса – p_3, число пар IV класса – p_4, число пар V класса – p_5. Тогда из $6k$ степеней свободы, которыми обладали звенья до их вхождения в кинематические пары, необходимо исключить те *степени свободы*, которые отнимаются вхождением звеньев в кинематические пары. Следовательно, число степеней свободы H, которым обладает кинематическая цепь, равно:

$$H - 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (3)$$

Пояснение: одна пара V класса (одноподвижная) лишит кинематическую цепь пяти степеней свободы; p_5 таких пар лишит данную кинематическую цепь $5p_5$ степеней свободы. Все пары IV класса отнимут у кинематической цепи $4p_4$ степеней свободы и т. д.

Если одно из звеньев кинематической цепи неподвижно (является стойкой), то общее число степеней свободы цепи уменьшится на шесть, и число степеней свободы W относительно неподвижного звена будет равно

$$W - H \quad 6. \qquad (4)$$

Число W степеней свободы кинематической цепи относительно звена, принятого за неподвижное, называется *числом степеней свободы* кинематической цепи или, кратко, *степенью свободы*.

Подставляя в формулу (4) вместо H его выражение из соотношения (3), получаем

$$W - 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \qquad (5)$$

Если в равенстве (5) обозначить величину $k - 1$ через n, то получим

$$W - 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \qquad (6)$$

где n – число подвижных звеньев кинематической цепи.

Равенство (6) носит название ***формулы подвижности*** или ***структурной формулы кинематической цепи общего вида*** (формула Сомова-Малышева).

Частным случаем этой формулы является ***структурная формула для плоских механизмов общего вида:***

$$W - 3n - 2p_5 - p_4.$$

Примеры исследования кинематических цепей

Пример 1. Рассмотрим пример на определение числа степеней свободы замкнутой кинематической цепи. (Рис. 4.3.1)

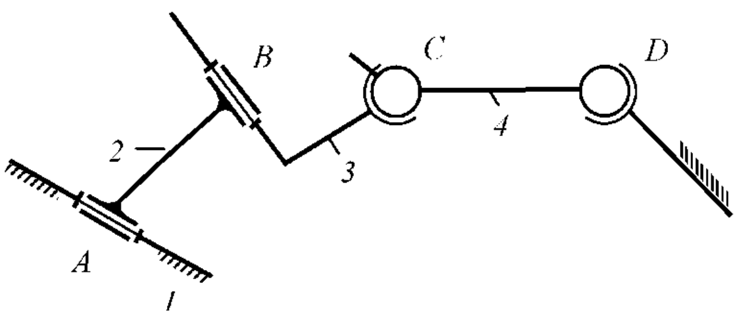


Рис. 4.3.1. Четырехзвенный пространственный механизм (к примеру 1)

Решение. Звенья 1 (стойка) и 2 входят в пару A (V класса), звенья 2 и 3 – в пару B (V класса), звенья 3 и 4 – в пару C (IV класса) и, наконец, звенья 4 и 1 (стойка) входят в пару D (III класса). Число подвижных звеньев: $n-3$;

число пар V класса p_5 равно двум;

число пар IV класса p_4 равно единице;

число пар III класса p_3 также равно единице.

Подставляя числа звеньев и пар в формулу (6), получаем

$W - 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6{\cdot}3 - 5{\cdot}2 - 4{\cdot}1 - 3{\cdot}1 - 1$,

т. е. рассматриваемая кинематическая цепь обладает одной степенью свободы.

Пример 2. Определить число степеней свободы незамкнутой кинематической цепи, показанной на рисунке 5.

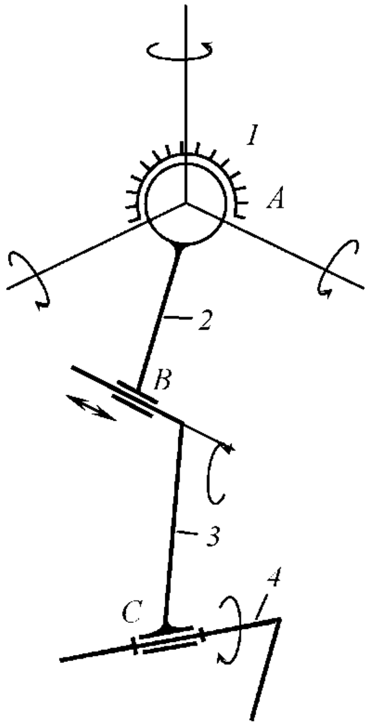


Рис. 4.3.2. Незамкнутая пространственная кинематическая цепь (к примеру 2)

Решение.

Звенья 1 (стойка) и 2 входят в пару A (III класса),

звенья 2 и 3 – в пару B (IV класса),

звенья 3 и 4 – в пару C (V класса).

Число подвижных звеньев: $n-3$.

Подставляя числа звеньев и пар в формулу (6), получаем

$W - 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 = 6{\cdot}3 - 5{\cdot}1 - 4{\cdot}1 - 3{\cdot}1 - 6$,

т. е. рассматриваемая кинематическая цепь обладает шестью степенями свободы.

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

5. 1. Центроиды в абсолютном и относительном движениях

Основной задачей кинематики механизмов является изучение движения звеньев механизмов вне зависимости от сил, действующих на эти звенья.

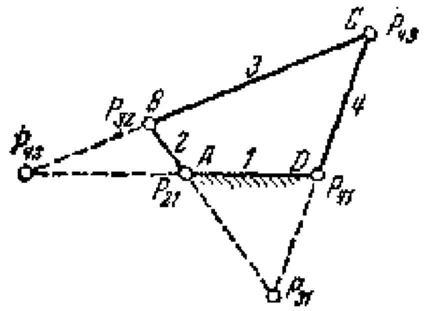


Рис. 5.1.1. Схема четырехзвенного шарнирного механизма с построенными на ней центрами мгновенного вращения

Из теоретической механики известно, что при плоскопараллельном движении твердого тела (звена механизма) это движение в каждый момент времени может быть представлено как вращение вокруг некоторой точки, называемой *мгновенным центром вращения.* В механизмах мы можем рассматривать движение звеньев относительно стойки и относительно любого из звеньев механизма. Если движение звена относительно стойки принять за абсолютное движение, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в абсолютном движении рассматриваемого звена.* Если же рассматривается движение звена относительно любого подвижного звена механизма, то соответствующий мгновенный центр вращения будем называть *мгновенным центром вращения в относительном движении рассматриваемых звеньев.*

На рис. 5.1.1 изображена схема механизма шарнирного четырехзвенника. Мгновенные центры вращения звеньев *2 и 4* относительно стойки *1* совпадают соответственно с точками *A* и *D*. Обозначим эти центры соответственно через P_{21} и P_{41}. Мгновенным центром вращения звена *3* относительно звена *2* является точка *B*, которую мы обозначим через P_{32}. Наконец, мгновенный центр вращения P_{43} звена *4* относительно звена 3 совпадает с точкой С.

Чтобы найти мгновенный центр вращения звена *3* относительно стойки *1*, следует продолжить линии *BA* и *CD*, точка пересечения которых P_{31} и оказывается *центром мгновенного вращения звена 3 относительно стойки 1.* Как известно из теоретической механики, мгновенный центр вращения располагается на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек звена. В изображенном на рис. 1 механизме линии *А В* и *DC* как раз и являются перпендикулярами к векторам скоростей точек *В* и С.

Мгновенные центры P_{32}, P_{21} и P_{31}, имеющие индексы, представляющие собой сочетания из цифр 1,2, 3 по два, лежат на одной прямой. Точно так же на одной прямой лежат мгновенные центры P_{43}, P_{41} и P_{31}, индексы которых представляют собой сочетания цифр 1, 3 и 4. Это следует из известной теоремы механики о сложении двух вращений вокруг параллельных осей. Результирующее вращение происходит вокруг оси, лежащей в их плоскости и параллельной первым двум. Этим свойством можно воспользоваться, например, для нахождения мгновенного центра вращения P_{42} в относительном движении звена *4* относительно звена *2*. Мгновенный центр вращения P_{42} должен одновременно лежать на прямой, соединяющей мгновенные центры P_{32} и P_{43}, и на прямой, соединяющей центры P_{21} и P_{41}, т.е. мгновенный центр вращения P_{42} лежит на пересечении прямых *CB* и *DA*. Это свойство мгновенных центров вращения в механизмах впервые было указано английским ученым Кеннеди.

Установленное свойство мгновенных центров вращения позволяет определить все мгновенные центры вращения заданного механизма.

Как известно из теоретической механики, геометрическое место мгновенных центров вращения образует так называемую ***центроиду***.

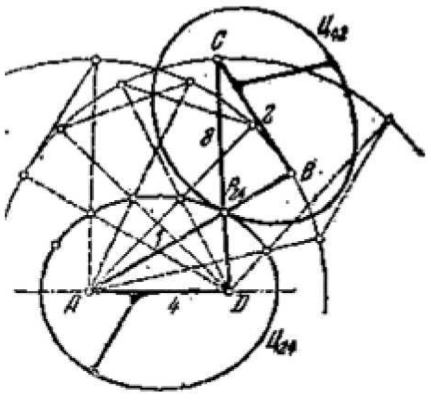


Рис. 5.1.2. Схема шарнирного антипараллелограмма с показанными на ней центроидами в относительном движении звеньев 2 и 4

На рис. 5.1.2 показан четырехзвенный шарнирный механизм антипараллелограмма, у которого противоположные звенья попарно равны. Пусть требуется построить центроиду в движении звена *2* относительно звена *4*. Останавливаем звено *4* (условно принимаем его за стойку). Мгновенный центр вращения P_{24} находится в пересечении прямых *AB* и *CD*. Поворачиваем звено *А В* на полный оборот. Геометрическое место точек P_{24} образует центроиду $Ц_{24}$, которая для данного механизма является эллипсом с фокусами в точках *А* и *D*. Так как за стойку мы приняли звено *4*, то центроида *Ц*$_{24}$ принадлежит этому звену и может быть с ним жестко соединена. Если требуется построить центроиду в движении звена *4* относительно звена *2*, то надо условно принять за стойку звено *2* и построить все положения мгновенного центра P_{42}. Кривая $Ц_{42}$, представляющая собой эллипс с фокусами в точках *C* и *B*, является центроидой в движении звена *4* относительно звена *2*. Центроиду $Ц_{42}$, принадлежащую звену *2*, мы можем жестко соединить с ним. Теперь движения звена *2* относительно звена *4*, или наоборот, звена *4* относительно звена *2*, могут быть осуществлены качением друг по другу без скольжения построенных центроид *Ц*$_{24}$ и $Ц_{42}$. В зависимости от того, какие из звеньев механизма *ABCD* будут приняты за стойку, центроиды *Ц*$_{24}$ и *Ц*$_{42}$ могут быть центроидами или в абсолютном движении звена, или в относительном. Так, останавливая звено *4* и жестко связанную с ним центроиду *Ц*$_{24}$ мы можем воспроизвести абсолютное движение звена *2* как качение без скольжения подвижной центроиды *Ц*$_{42}$ по неподвижной центроиде *Ц*$_{24}$.

Таким образом, в этом случае центроиды *Ц*$_{24}$ и *Ц*$_{42}$ оказываются соответственно подвижной и неподвижной центроидами в абсолютном движении звена *2*. Наоборот, если остановить звено *2*, то центроида *Ц*$_{42}$ будет неподвижной центроидой, а центроида *Ц*$_{24}$ будет подвижной центроидой в абсолютном движении звена *4*.

Если теперь остановить одно из звеньев *1* или *3*, то обе центроиды *Ц*$_{24}$ и *Ц*$_{42}$ станут подвижными и качение одной центроиды по другой будет воспроизводить относительное движение звеньев *2* и *4* и центроиды *Ц*$_{24}$ и *Ц*$_{42}$ будут *центроидами в относительном движении.*

Если остановить звено *1*, то центроида $Ц_{24}$ будет вращаться вокруг оси *A*, а центроида *Ц*$_{42}$ — вокруг оси *B*. Таким образом, вращение вокруг осей *A и B* звеньев *4* и *2* по закону шарнирного антипараллелограмма может быть воспроизведено также путем посадки на эти оси двух фрикционных эллиптических колес, профили которых представляют собой центроиды *Ц*$_{24}$ и *Ц*$_{42}$, т. е. механизм шарнирного антипараллелограмма заменяется механизмом фрикционных эллиптических колес. Такое движение окажется возможным, если между центроидами установлена связь, обеспечивающая их движение без скольжения.

Как было показано выше, для любого механизма в любом его положении могут быть определены все мгновенные центры вращения в абсолютном и в относительном движениях его звеньев. Следовательно, если имеется механизм, воспроизводящий то или иное движение, то такое же движение звеньев может быть осуществлено механизмом, представляющим собой две сопряженные центроиды.

Так, например, передача движения между кривошипами *AD* и *CB* шарнирного антипараллелограмма (рис. 2) может быть воспроизведена двумя эллиптическими фрикционными колесами. При этом законы движения звеньев остаются такими же, как и для механизма шарнирного антипараллелограмма. Механизмы, в которых передача движения осуществляется центроидами, носят название *центроидных механизмов.* Практически редко можно пользоваться центроидными механизмами на всем желательном интервале движения, так как в некоторых случаях центроидами служат кривые сложного вида (самопересекающиеся, с бесконечно удаленными точками и т. д.).

5. 2. Аналоги скоростей и ускорений

При кинематическом исследовании механизмов скорости и ускорения звеньев и точек, им принадлежащих, удобно выражать в функции поворота φ или перемещения s начального звена.

Так, если угол поворота φ_k какого-либо k-го звена задан в виде функции $\varphi_k = \varphi_k(\varphi)$, то угловая скорость ω_k этого звена может быть представлена так:

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\varphi_k}{d\varphi} = \omega\omega_\varphi = \omega\varphi_k^{\cdot}, \qquad (2.1)$$

где ω - угловая скорость начального звена, имеющая размерность c^{-1}, а $\omega_\varphi = \varphi_k^{\cdot} = \dfrac{d\varphi_k}{d\varphi}$ есть безразмерная угловая скорость звена *k*. Безразмерная угловая скорость $\varphi_k^{\cdot}$ называется *аналогом угловой скорости* звена *k*.

Таким образом, действительная угловая скорость ω_k равна произведению угловой скорости ω начального звена на аналог угловой скорости $\varphi_k^{\cdot}$ звена *k*.

Дифференцируя уравнение (2.1) по времени *t*, получим величину углового ускорения ε_k звена *k*. Имеем

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega\omega_\varphi\right) = \omega\frac{d\omega_\varphi}{dt} + \omega_\varphi\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \omega_\varphi\frac{d\omega}{dt} =$$
$$= \omega^2\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} + \varepsilon\omega_\varphi = \omega^2\varepsilon_\varphi + \varepsilon\omega_\varphi = \omega^2\varphi_k^{\cdot\cdot} + \varepsilon\varphi_k^{\cdot} \qquad (2.2)$$

где $\varphi_k^{\cdot\cdot}$ - аналог углового ускорения звена *k*.

Аналогично могут быть получены уравнения для скорости и ускорения какой-либо точки *m* звена *k*. Пусть r_m есть радиус-вектор, определяющий положение точки *m*. Из теоретической механики известно, что скорость v_m и ускорение a_m точки *m* могут быть получены последовательным двукратным дифференцированием радиуса-вектора r_m по времени *t*.

Имеем

$$v_m = \frac{dr_m}{dt} = \frac{dr_m}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{dr_m}{d\varphi} = \omega v_\varphi = \omega r_m' \qquad (2.3)$$

где ω — угловая скорость начального звена, имеющая размерность рад/с, а $v_\varphi = r_m' = \frac{dr_m}{d\varphi}$ - есть *аналог скорости точки m*, имеющий размерность длины. Таким образом, действительная скорость v_m точки *m* равна произведению угловой скорости ω начального звена на аналог скорости v_φточки *m*.

Дифференцируя выражение (2.3) по времени *t*, получим величину ускорения a_m точки *m*. Ускорение a_m в общем случае состоит из четырех составляющих: *нормального ускорения, направленного вдоль радиуса-вектора r_m к его началу, тангенциального ускорения, направленного перпендикулярно к радиусу-вектору r_m, относительного релятивного ускорения, направленного вдоль радиуса вектора r_m*, и, наконец, *кориолисова ускорения, направленного перпендикулярно к радиусу-вектору r_m*.

Пользуясь равенством (2.3), получаем

$$a_m = \frac{d\omega_m}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega v_\varphi) = \omega\frac{dv_\varphi}{dt} + v_\varphi\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{dv_\varphi}{d_\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + v_\varphi\frac{d\omega}{dt} =$$

$$= \omega^2\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + \varepsilon v_\varphi = \omega^2 a_\varphi + \varepsilon v_\varphi = \omega^3 r_m'' + \varepsilon r_m'. \qquad (2.4)$$

В уравнении (4) ω и ε — угловые скорость и ускорение начального звена. Величины ω^2 и ε, входящие в уравнение (2.4), имеют размерность $с^{-2}$. Величина аналога скорости v_φ имеет размерность длины. Величина $a_\varphi = r_m'' - \frac{d^2 r_m}{d\varphi^2}$ есть *аналог ускорения* точки *m*, имеющая также размерность длины.

При поступательном перемещении звена *k* аналог его скорости обозначается S_r', а аналог его ускорения S_r''.

Таким образом, скорости и ускорения звеньев и их точек могут быть всегда выражены через соответствующие аналоги скоростей и ускорений и угловые скорость и ускорение начального звена механизма. Если закон движения начального звена задан в виде функций *s* = *s* (φ), где s — линейное перемещение начального звена, то нахождение аналогов скоростей и ускорений может быть сделано аналогично.

5. 3. Мгновенный центр ускорений и радиус кривизны траектории

Ранее нами был рассмотрен вопрос об определении мгновенных центров вращения звеньев механизмов. Для многозвенных механизмов эта задача усложняется тем, что для определения мгновенного центра вращения одного из промежуточных звеньев механизма обычно приходится определять мгновенные центры и всех остальных звеньев. Поэтому в некоторых случаях удобно положение мгновенного центра вращения звена определять с помощью его плана скоростей, если таковой нами был построен.

Для этого можно воспользоваться условием, что точка звена, совпадающая в рассматриваемый момент времени с его мгновенным центром вращения, должна иметь скорость, равную нулю. Тогда задача определения мгновенного центра вращения звена сведется к отысканию точки звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

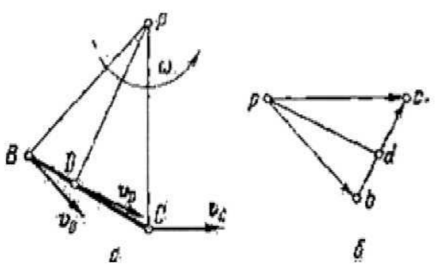


Рис. 5.3.1. Определение мгновенного центра вращения звена: а) схема звена с мгновенным центром вращения, б) план скоростей звена

Пусть задано звено BC и известны скорости v_B и v_C точек B и C этого звена (рис. 5.3.1, *а)*. Строим план скоростей звена (рис. 5.3.1, *б)*. Определяем далее точку звена, скорость которой в данный момент времени рана нулю.

Очевидно, что на плане скоростей скорость этой точки изобразится вектором, равным нулю, т. е. вектором, совпадающим с полюсом p плана скоростей. Как было показано выше, фигура, изображающая на плане скоростей скорости отдельных точек звена, подобна фигуре самого звена и повернута относительно нее на угол 90°. Тогда на звене BC можно отыскать такую точку P, вектор скорости которой на плане скоростей совмещается с точкой p. Для этого достаточно на звене (рис. 5.3.1, *а)* построить треугольник BCP, подобный треугольнику bcp плана (рис. 5.3.1, *б)*. Для этого из точки B проводим прямую, перпендикулярную к отрезку bp плана, а из точки C — прямую, перпендикулярную к отрезку плана cp. Точка P пересечения этих двух прямых и является той точкой звена, скорость которой в данный момент времени равна нулю, т. е. $v_P = 0$. Так как полученная точка P совпадает с мгновенным центром вращения звена BC, то скорости v_B и v_C точек B и C этого звена могут быть представлены следующим образом:

$$v_B = |\omega| l_{PB} \text{ и } v_C = |\omega| l_{PC}$$

где ω есть угловая скорость звена BC (рис. 5.3.1, *а)*. Величина скорости любой точки D звена BC может быть определена по формуле

$$v_D = |\omega| l_{PD}$$

направление же ее перпендикулярно к отрезку PD.

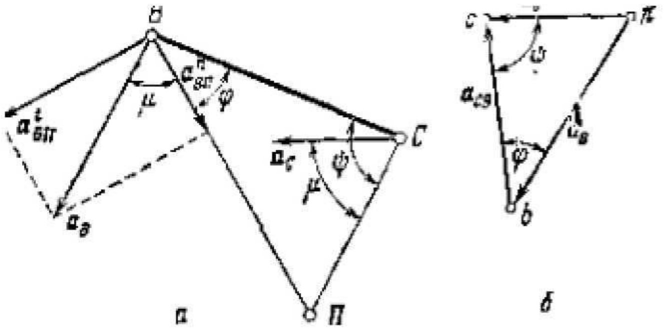


Рис. 5.3.2. К определению мгновенного центра ускорений звена: *а)* схема звена с мгновенным центром ускорений; *б)* план ускорений

Аналогично мгновенному центру вращения звена для общего случая его движения может быть найдена точка звена, абсолютное ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений.* Положение этой точки на звене может быть всегда определено, если известен план ускорений звена. Пусть, например, дано звено BC (рис. 5.3.2, *а*) и его план ускорений πbc (рис. 5.3.2, *б)*. Из свойств плана ускорений следует, что точка звена П, ускорение которой равно нулю, изображается на плане ускорений вектором, равным нулю и совпадающим с точкой π плана. Чтобы определить на звене BC точку, не имеющую ускорения, надо на нем построить фигуру ВСП, подобную фигуре $bc\pi$ плана. Полученная точка П (рис. 5.3.2, *а*) и является мгновенным центром ускорений, так как вследствие подобия треугольников ВСП и $bc\pi$ ускорение точки П равно нулю, т. е. $a_П = 0$.

Построение подобной фигуры $BCП$ можно сделать по углам φ и ψ, измеренным на плане ускорений (рис. 5.3.2, *б)*. Точка пересечения прямых ВП и СП является мгновенным центром ускорений. При обходе контуров треугольников ВСП и $bc\pi$ в одном и том же направлении порядок букв должен быть одинаковым. Вектор относительного ускорения a_{CB} повернут относительно звена BC на угол μ, определяемый по формуле

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (3.1)$$

где ε есть угловое ускорение звена *BC*, а ω — его угловая скорость. Таким образом, сторона *bc* треугольника *bcπ* образует со стороной *BC* треугольника ВСП угол μ. Вследствие подобия треугольников *bcπ* и ВСП стороны *πb* и *πc* образуют со сторонами ПВ и ПС тот же угол μ, и вектор a_c образует угол μ со стороной ВП, вектор a_c — угол μ со стороной СП. Векторы абсолютных ускорений любых других точек звена наклонены под тем же углом μ, к радиусам-векторам, соединяющим эти точки с точкой П.

Ускорение любой точки звена может быть всегда выражено через ускорение переносного поступательного движения с ускорением точки П и ускорение относительного движения вокруг этой точки. Например, вектор a_B ускорения точки В может быть доставлен в виде следующей геометрической суммы:

$$a_B = a_П + a^n_{ВП} + a^t_{ВП} = a^n_{ВП} + a^t_{ВП},$$

где $a_П = 0$.

Вектор ускорения $a^n_{ВП}$ направлен от точки *B* к точке П, а вектор ускорения $a^t_{ВП}$ перпендикулярен к отрезку *В*П (рис. 4, *а*).

Так как

$$a^n_{ВП} = \omega^2 l_{ВП} \text{ и } a^t_B = \varepsilon l_{ВП},$$

то величина полного ускорения точки В равна

$$a_B = \sqrt{\left(a^n_{ВП}\right)^2 + \left(a^t_{ВП}\right)^2} = l_{ВП}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \qquad (3.2)$$

Точно так же величина ускорения точки С равна

$$a_C = ml_{СП}, \qquad (3.3)$$

где постоянная *m* равна $m = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$.

Таким образом, полные ускорения всех точек звена пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

Очевидно, что движение точки звена, совпадающей с центром П, как не имеющей ускорения, может быть с точностью до бесконечно малых третьего порядка принято за равномерное прямолинейное.

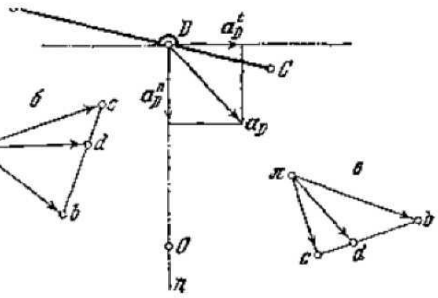


Рис. 5.3.3. К определению радиуса кривизны траектории точки D: а) схема звена; б) план скоростей звена; в) план ускорений звена

Покажем теперь, как определить центр кривизны *p* траектории какой-либо точки D звена *BC* (рис. 5.3.3, *а*), если построены его план скоростей (рис. 5.3.3, *б)* и план ускорений (рис. 5.3.3, *в*). Центр кривизны лежит на прямой *Dn,* проведенной через точку *D* (рис. 5.3.3, *а*) перпендикулярно к вектору скорости v_D, т. е. перпендикулярно к отрезку *(pd)* плана скоростей (рис. 5.3.3, *б).* Прямая *Dn* является нормалью к траектории описываемой точки *D* в рассматриваемом положении этой точки и проходит через центр мгновенного вращения Р звена *BC.* Вектор полного ускорения a_D точки *D* представлен на плане ускорений в виде отрезка *(π d)* (рис. 5.3.3, *в).* Разложим вектор a_D по направлениям *Dn* и перпендикулярному к нему. Составляющая, направленная по *Dn,* будет нормальным ускорением a^n_D точки *D.* Имеем

$$a_D^n = \frac{v_D^2}{p} \qquad (3.4)$$

откуда и определится величина радиуса кривизны *p*. Получаем

$$p = \frac{v_D^2}{a_D^n}. \qquad (3.5)$$

Зная *p*, можно найти положение центра кривизны *O* траектории точки *D.*

5. 4 Кинематические диаграммы

При кинематическом исследовании механизмов необходимо бывает проводить это исследование за полный цикл движения исследуемого механизма. Для этого аналитическое или графическое исследование перемещений, скоростей и ускорений ведется для ряда положений механизма, достаточно близко отстоящих друг от друга. Полученные значения кинематических величин могут быть сведены в таблицы или по полученным значениям этих величин могут быть построены графики, носящие название *кинематических диаграмм.*

В зависимости от характера движения исследуемых звеньев или отдельных точек механизма могут быть построены и различные кинематические диаграммы. В практических задачах теории механизмов каждая кинематическая диаграмма обычно представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров звена: перемещения, скорости или ускорения точки звена исследуемого механизма в функции времени или перемещения начального звена механизма, т. е. в функции обобщенной координаты.

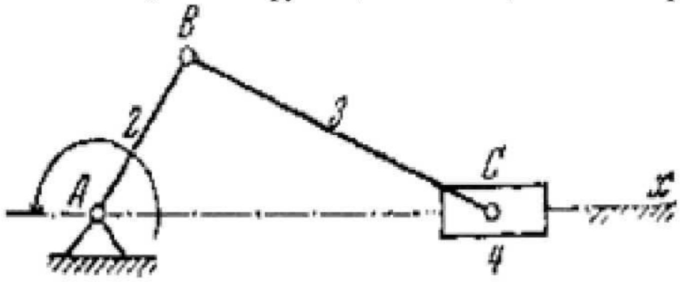


Рис. 5.4.1. Кинематическая схема кривошипно-ползучего механизма

Например, если мы имеем кривошипно-ползунный механизм (рис. 6), то для перемещений s_c, скоростей v_c и ускорений a_c точки С, как перемещающейся прямолинейно, удобно строить кинематические диаграммы в виде зависимостей этих величин от времени t или от обобщенной координаты φ_2, т. е. строить графическое изображение зависимостей

$$s_C = s_C(t), \quad v_C = v_C(t), \quad a_C = a_C(t), \qquad (4.1)$$

или

$$s_C = s_C(\varphi_2), \quad v_C = v_C(\varphi_2), \quad a_C = a_C(\varphi_2), \qquad (4.2)$$

если угол φ_2 поворота звена 2 выбран в качестве обобщенной координаты.

В некоторых случаях может потребоваться построение и других зависимостей, например

$$v_C = v_C(s_C), \quad \text{или} \quad a_c = a_c(s_c). \qquad (4.3)$$

Зависимости (4.3) могут быть получены из зависимостей (4.1) исключением из первой и второй зависимостей или из первой и третьей зависимостей параметра t.

Если исследованию подлежат угловые перемещения φ_3, угловые скорости ω_3 и угловые ускорения ε_3 шатуна *3* (рис. 6), то можно построить графическое изображение зависимостей

$$\varphi_3 = \varphi_3(t), \quad \omega_3 = \omega_3(t), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(t),$$

или

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2), \quad \omega_3 = \omega_3(\varphi_2), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_2),$$

а также зависимости

$$\omega_3 = \omega_3(\varphi_3) \quad \text{или} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_3)$$

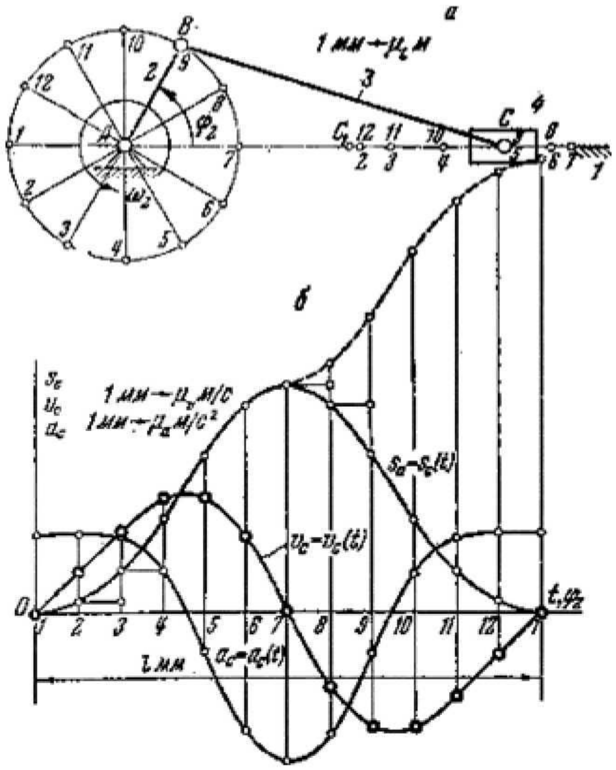


Рис. 5.4.2. Кривошипно-ползунный механизм: а) кинематическая схема; б) графики, изображающие зависимости

В качестве примера рассмотрим построение кинематических диаграмм $s_c = s_c\ (t)$, $v_c = v_c\ \{t)$ и $a_c = a_c\ (t)$ для перманентного движения точки С кривошипно-ползунного механизма *ABC*,

$s_C = s_C(t); v_C(t)$ и $a_C = a_C(t)$

т. е. когда кривошип вращается с *постоянной угловой скоростью* ω_2 (рис. 5.4.2, а).

Для этого производим разметку путей точек *B* и *C*. Отсчет перемещений точки С удобно вести от крайнего левого положения ползуна. Проводим две оси координат (рис. 5.4.2, *б)* и на оси абсцисс откладываем отрезок *l* мм, представляющий собой в масштабе μ_t время *T* одного полного оборота кривошипа, т. е.

$$T = \frac{60}{n} = \mu_t l\ , \tag{4.4}$$

где *n* — частота вращения кривошипа в оборотах в минуту. Из равенства (4) получаем масштаб μ_t времени. Имеем

$$\mu_t = \frac{60}{nl} \tag{4.5}$$

Отрезок *l* разбиваем на 12 равных частей и в соответствующих точках *1, 2, 3, ...* откладываем расстояния, пройденные точкой *C* (рис. 5.4.2, *а*) от крайнего левого положения C_1, ползуна. Так, в точке *2* (рис.

5.4.2, *б*) откладываем в направлении, параллельном оси ординат, отрезок C_1C_2, в точке *3* — отрезок C_1C_3 и т. д. Если отрезки C_1C_2, (C_1C_3), ... откладывать прямо со схемы (рис. 5.4.2, *а*), то масштаб диаграммы $s_c = s_c (t)$ по оси ординат будет равен μ_l, т. е. масштабу построения схемы. С положения C_7, когда точка С займет крайнее правое положение (рис. 5.4.2, *а*), расстояния C_7C_8, C_7C_9 вычитаются из ординаты C_1C_7 отложенной в положении C_7, и, таким образом, кривая $s_c - s_c (t)$ в положении, когда кривошип *2* придет в начальное положение, будет иметь ординату, равную нулю. Полученная кривая является *кривой расстояний точки С* от крайнего левого положения ползуна. Если надо построить *кривую путей*, пройденных точкой *С*, то от положения C_7 расстояния C_7C_8, C_7C_9 надо прибавлять к ранее отложенному отрезку C_1C_7. На рис. 5.4.2, *б* эта часть кривой путей показана штрихами. Так как кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 можно считать, что по оси абсцисс отложено не время *t*, а углы поворота φ_2 звена *2*, т. е. диаграммы $s_c = s_c (t)$, v_c $v_c (t)$ и $a_c = a_c (t)$ будут одновременно и диаграммами $s_C = s_C(\varphi_2), v_C = v_C(\varphi_2)$ и $a_C = a_C(\varphi_2)$ Масштаб μ_φ в этих диаграммах по оси абсцисс будет равен $\mu_\varphi = 2\pi / l$, где отрезок *l* должен быть взят с чертежа в миллиметрах.

Для построения диаграмм $v_c = v_c (t)$ и $a_c = a_c (t)$ отрезки, изображающие на плане скоростей и ускорений скорость v_c и ускорение a_c, откладывают на ординатах, проведенных в точках 1, 2, 3, ... (рис. 7, *б)*, учитывая при этом знак скорости v_c и ускорения a_c. Если отрезки откладываются непосредственно с планов скоростей и ускорений, то масштабы ординат кривых $v_c = v_c (t)$ и $a_c = a_c (t)$ будут равны масштабам р μ_v и μ_a планов скоростей и ускорений. Эти же диаграммы будут и диаграммами $v_C = v_C(\varphi_2)$ и $a_C = a_C(\varphi_2)$.

6. КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

6.1. Условия статической определимости кинематических цепей. Определение реакций в кинематических группах

Рассмотрим, как будут направлены реакции в различных кинематических парах плоских механизмов. Во вращательной паре V класса результирующая сила реакции F проходит через центр шарнира (рис. 6.1.1). Величина и направление этой реакции неизвестны, так как они зависят от величины и направления заданных сил, приложенных к звеньям пары. В поступательной паре V класса (рис. 6.1.2) реакция перпендикулярна к оси движения $x - x$ этой пары. Она известна по направлению, но неизвестны ее точка приложения и величина. Наконец, к высшей паре IV класса (рис. 6.1.3) реакция F приложена в точке C касания звеньев *1* и *2* и направлена по общей нормали $n - n$, проведенной к соприкасающимся профилям звеньев *1* и *2* в точке C, т. е. для высшей пары IV класса нам известны направление реакции и ее точка приложения.

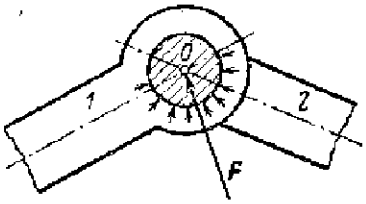


Рис. 6.1.1. Изображение вращательной кинематической пары со схематизированными конструктивными формами

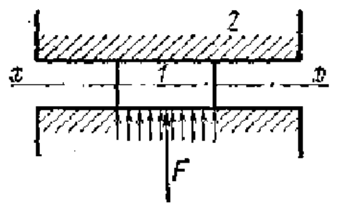


Рис. 6.1.2. Схема поступательной кинематической пары

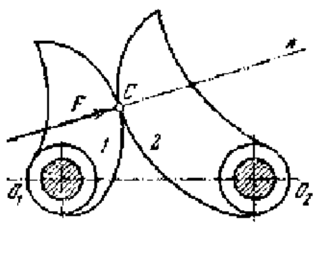


Рис. 6.1.3. Изображение высшей кинематической пары со схематизированными конструктивными формами

Таким образом, для определения реакции в каждой из низших пар V класса необходимо найти по две неизвестных, а для определения реакции в высшей паре IV класса – только одну неизвестную величину.

Обозначим число подвижных звеньев плоской кинематической цепи через n, число пар V класса — через p_5 и число пар IV класса – через p_4.

Составим теперь условие статической определимости плоских кинематических цепей. Так как для каждого звена, имеющего плоскопараллельное движение, можно написать три уравнения равновесия, то число уравнений, которое мы сможем составить при n звеньях, будет равно $3n$. Число неизвестных, которое необходимо определить, будет равно для пар V класса $2p_5$ и для пар IV класса p_4.

Следовательно, кинематическая цепь будет статически определима, если удовлетворяется условие

$$3n = 2p_5 + p_4. \qquad (1.1)$$

Любой механизм с парами IV и V классов может быть заменен механизмом с парами только V класса. Поэтому для рассмотрения общего случая достаточно ограничиться рассмотрением групп, звенья которых входят только в пары V класса.

Группы с парами IV класса могут быть приведены к группам с парами V класса и могут быть рассчитаны теми же методами. Тогда формула (1.1) может быть написана так:

$$3n = 2p_5 \qquad (1.2)$$

откуда

$$p_5 = \frac{3}{2}n .$$

Таким образом, числа звеньев и пар связаны между собой соотношением (1.2). Так как числа n и p_5 должны быть целыми, то этому соотношению удовлетворяют следующие ряды чисел звеньев и кинематических пар (таблица):

Таблица

№ п/п	n	p_5
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12

Как нам уже известно, первое сочетание звеньев и пар, т. е. два звена, входящих в три пары, представляет собой группу II класса; второе сочетание из четырех звеньев, входящих в шесть пар, представляет собой группу III класса третьего порядка или группу IV класса второго порядка и т. д. Таким образом, статически определимыми являются кинематические цепи, названные выше группами.

Определение реакций в кинематических парах групп.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении реакций в кинематических парах группы II класса *BCD* первого вида (рис. 6.1.4).

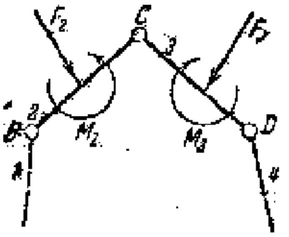


Рис. 6.1.4. Кинематическая схема двухповодковой группы первого вида

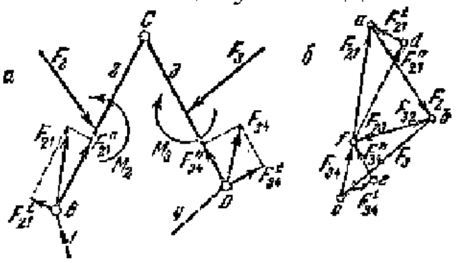


Рис. 6.1.5. Двухповодковая группа первого вида: *а)* кинематическая схема с показанными на ней силами и моментами пар сил; *б)* план сил

Введем следующие обозначения: звено, к которому присоединяется звено ВС, обозначим номером *1*, звено *BC* – номером *2*, звено *CD* – номером *3* и звено, к которому присоединяется звено *CD*, номером *4*. Силу, действующую на звено с номером *l* со стороны звена с номером *k*, будем обозначать через F_{lk}, момент силы F_h относительно точки *A* – через $M_A\ (F_k)$, расстояние между двумя какими-либо точками *A* и *B* звена *AB* – через l_{AB} и, наконец, момент пары, действующий на звено с номером *k*, - через M_k. Пусть рассматриваемая группа II класса (рис. 6.1.4) нагружена силами F_2 и F_3 и парами с моментами M_2 и M_3. Требуется определить реакции в кинематических парах. Эта задача может быть решена методом *планов сил*. В точках *B* и *D* прикладываем неизвестные пока реакции F_{21} и F_{34} и, составляя уравнение равновесия группы *BCD* (рис. 6.1.5, *а)*, приравниваем нулю сумму всех сил, действующих на группу. Имеем

$$F_{21} + F_2 + F_3 + F_{34} = 0. \qquad (1.3)$$

В этом уравнении нам известны силы F_2 и F_3 по величине, направлению и точкам приложения. Реакции же F_{21} и F_{34} нам известны только по точкам приложения. Для определения величин этих реакций раскладываем каждую из них на две составляющие: одну, действующую по оси звена, и другую, перпендикулярную к оси звена. Будем обозначать первую составляющую реакции индексом *n*, а вторую составляющую – индексом *t*. Тогда получаем

$$F_{21} = F_{21}^{n} + F_{21}^{t} \qquad F_{34} = F_{34}^{n} + F_{34}^{t} \qquad (1.4)$$

Величины F_{21}^{t} и F_{34}^{t} могут быть получены из уравнений равновесия, написанных для каждого из звеньев *2* и *3* в отдельности. Для этого рассмотрим сначала равновесие звена *2*. Звено *2* находится под действием следующих сил и пар: силы F_2, составляющих F_{21}^{n} и F_{21}^{t} реакции F_{21}, реакции F_{32} и пары с моментом M_2. Составим уравнение моментов всех сил относительно точки С. Так как знак силы F_{21}^{t}, нам неизвестен, то при составлении уравнения моментов задаемся произвольным знаком момента этой силы. Если после определения величины этой силы она окажется *отрицательной*, то ее истинное направление должно быть выбрано *противоположным*.

Имеем

$$M_C(F_2) + M_C(F_{21}^{t}) + M_2 = 0.$$

В это уравнение моменты от сил F_{21}^{n} и F_{23} не входят, так как линии действия этих сил проходят через точку С, т. е.

$$M_C(F_{21}^{n}) = 0 \quad \text{и} \quad M_C(F_{32}) = 0.$$

Далее, так как $M_C(F_{21}^{t}) = F_{21}^{t} l_{BC}$, то составленное уравнение моментов принимает вид

$$M_C(F_2) + F_{21}^{t} l_{BC} + M_2 = 0,$$

откуда и определяем величину силы F_{21}^{t}. Имеем

$$F_{21}^{t} = -\left[\frac{M_C(F_2)}{l_{BC}} + \frac{M_2}{l_{BC}}\right]. \qquad (1.5)$$

Знак силы F_{21}^{t}, как было указано выше, определяется знаком правой части формулы (1.5). Аналогично из условия равновесия звена *3* получаем уравнение моментов

$$M_C(F_3) + M_C(F_{34}^{t}) + M_3 = 0,$$

так как $M_C(F_{34}^{n}) = 0$ и $M_C(F_{32}) = 0$. Для величины силы F_{34}^{t} теперь получаем

$$F_{34}^{t} = -\left[\frac{M_C(F_3)}{l_{DC}} + \frac{M_3}{l_{DC}}\right]. \qquad (1.6)$$

Знак силы F_{34}^{t} определяется знаком правой части уравнения (1.6). Полученные выражения для F_{12}^{t} и F_{43}^{t}, подставляем в уравнение (1.3):

$$F_{21}^{n} + F_{21}^{t} + F_2 + F_3 + F_{34}^{t} + F_{34}^{n} = 0.$$

В этом уравнении нам неизвестны только величины составляющих F_{21}^{n} и F_{34}^{n} реакций F_{21} и F_{34}, направленных по осям звеньев *BC* и *DC*. Величины этих составляющих могут быть определены построением плана сил. Для этого из произвольной точки *a* (рис. 6, *б)* откладываем в произвольном масштабе μ_F силу F_2 и прибавляем к ней силу F_3. Прикладываем к ним в том же масштабе соответственно силы F_{21}^{t} и F_{34}^{t}, которые определены по формулам (1.5) и (1.6). Эти силы перпендикулярны к осям звеньев *BC* и CD. Далее из точки *d* проводим прямую, параллельную оси BC, а из точки e - прямую, параллельную оси звена DC. Точка f пересечения этих двух прямых и определяет величины составляющих F_{21}^{n} и F_{34}^{n}.

Полные реакции F_{21} и F_{34} могут быть получены как результирующие согласно уравнениям (1.4). Первая реакция на плане сил получается, если соединить точки f и a, вторая – если соединить точки c и f. Для определения реакции F_{32} звена 2 на звено 3 напишем уравнение равновесия сил, действующих на звено 3:

$$F_{34} + F_3 + F_{32} = 0.$$

Единственной неизвестной по величине и направлению силой в этом уравнении является сила F_{32}. Величина ее может быть получена построением по уравнению силового треугольника. Для этого на плане сил на рис. 5, *б* достаточно соединить точки f и b. Очевидно, что реакция F_{23}, равная по величине реакции F_{32}, но противоположная ей по знаку, может быть определена из уравнения равновесия звена 2

$$F_{21} + F_2 + F_{23} = 0.$$

На плане сил вектор F_{23} представлен тем же отрезком (bf), что и реакция F_{32}, но имеет противоположное направление.

6. 2. Кинетостатический расчет типовых механизмов

При решении задач силового расчета механизмов закон движения ведущего звена предполагается заданным; точно так же предполагаются известными массы и моменты инерции звеньев механизма. Таким образом, всегда могут быть определены те силы инерции, которые необходимы для решения задач силового расчета с помощью уравнений равновесия.

Вопрос о силовом расчете механизмов начнем с рассмотрения вопроса об определении реакций в кинематических парах.

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчет называется *статическим.* Если в число заданных сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой расчет называется *кинетостатическим.* Так как метод расчета для обоих случаев является общим, то в дальнейшем будем предполагать, что в число заданных сил входят и силы инерции, известные нам по величине, направлению и точкам приложения. Далее в первом приближении будем вести расчет без *учета сил трения.*

Рассмотрим вопрос о силосом расчете одного из типовых механизмов – кулисно-рычажного механизма с равномерно вращающимся начальным звеном *1*, показанного на рис. 6.2.1.

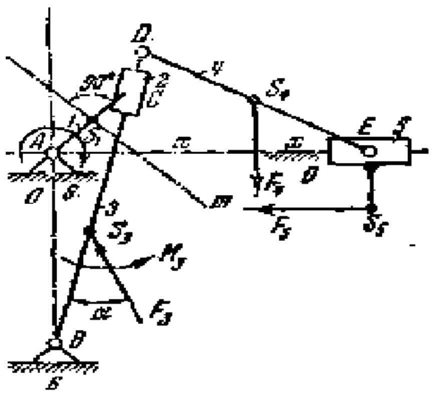
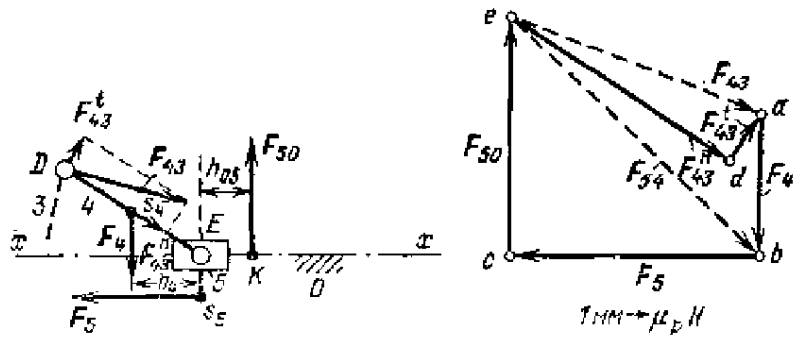


Рис. 6.2.1 Кинематическая схема кулисно-рычажного механизма с показанными на ней силами

Найти реакции в кинематических парах от силы F_5, приложенной в точке S_5 звена *5*, силы F_4 приложенной в точке S_4 звена *4*, силы F_3, приложенной в точке S_3 звена *3*, и пары сил с моментом M_3, приложенной к тому же звену. Сила F_3 образует с направлением *BD* угол α. Сила F_5 параллельна оси *x — x*, а сила F_4 перпендикулярна к ней. Линия действия *m — m* уравновешивающей силы F_y проходит через точку перпендикулярно к его оси.

Рассматриваемый кулисно-рычажный механизм – это механизм II класса и состоит из двух групп II класса: группы третьего вида (группа, состоящая из звеньев *2 и 3)* и группы второго вида (группа, состоящая из звеньев *4* и *5*).



а) б)

Рис. 6.2.2. Двухповодковая группа *4 - 5* механизма, изображенного на рис. 6: *а)* кинематическая схема группы *4* - 5; *б)* план сил

Определение реакций в кинематических парах начнем с последней в порядке присоединения группы, состоящей из звеньев *5* и *4*. Разлагаем реакцию F_{43} (рис. 6.2.2, *а)*, действующую в паре D, на составляющие F_{43}^n и F_{43}^t.

$$F_{43} = F_{43}^n + F_{43}^t .$$

Составляем далее уравнение моментов всех сил, действующих на звено *4*, относительно точки *E* (рис. 6.2.2, *а)*:

$$M_E\left(F_{43}^t\right) + M_E\left(F_4\right) = 0 ,$$

откуда получаем

$$F_{43}^{t}=\frac{F_4 h_4}{l_{DE}},$$

где h_4 – плечо силы F_4 относительно точки E и l_{DE} – расстояние между точками D и E звена 4.

Составляем далее общее уравнение равновесия всей группы, приравнивая нулю сумму всех сил, действующих на группу:

$$F_{43}^{n}+F_{43}^{t}+F_4+F_5+F_{50}=0.$$

Силы F_4, F_5 и F^t_{43} нам известны. Силы F^n_{43} и F_{50} известны по направлению. Сила F^n_{43} параллельна оси DE звена 4, сила F_{5o} перпендикулярна к оси x — x.

Для определения величин сил F^n_{43} и F_{50} строим в произвольно выбранном масштабе μ_F план сил (рис. 6.2.2, *б*). Для этого из точки d откладываем силу F^t_{43} в виде отрезка da. К силе F^t_{43} прикладываем силу F_4 в виде отрезка ab и к ней прикладываем силу F_5 в виде отрезка bc. Через точку c проводим прямую в направлении силы F_{50l}, т. е. перпендикулярно к оси x — x, а через точку d — в направлении силы F^n_{43}, т. е. параллельно направлению DE звена 4. Точка e пересечения этих прямых определяет начало вектора силы F^n_{43} и конец вектора силы F_{50}. Соединив точку e с точкой a, получим силу F_{43} в виде отрезка ea. Реакция F_{54} в виде отрезка eb определяется, если соединить точки e и b.

Точку K приложения силы F_{50} (рис. 6.2.2, *а*) найдем из уравнения моментов всех сил, действующих на звене 5, относительно точки E:

$$M_E(F_5)+M_E(F_{50})=0$$

откуда получаем величину плеча $h_{05}=EK$ (рис. 7, *а*) силы F_{50} относительно точки E

$$h_{05}=-\frac{M_E(F_5)}{F_{50}}$$

Если заданы конструктивные размеры ползуна 5, то необходимо силу привести к центру E ползуна.

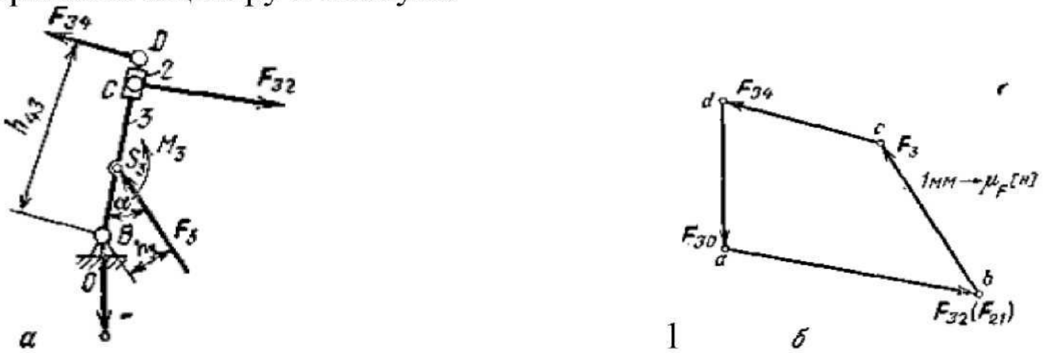


Рис. 6.2.3. Двухповодковая группа *2 — 3* механизма, изображенного на рис. 1: *а)* кинематическая схема группы *2— 3, б)* план сил

Переходим далее к рассмотрению группы, состоящей из звеньев *2* и *3* (рис. 6.2.3, *а)*. На эту группу действует внешняя сила F_{34}, приложенная в точке *D*, равная по величине и противоположная по направлению силе F_{43}, сила F_3, приложенная в точке S_3 и пара с моментом M_3.

Рассмотрим равновесие звена *3*. Так как звено *2* не нагружено, то реакция F_{32} оказывается приложенной в точке С и направлена перпендикулярно к направлению *BD* звена *3*.

Величина силы F_{32} определяется из уравнения моментов всех сил, действующих на звено *3*, относительно точки *B:*

$$M_B(F_{34}) + M_B(F_{32}) + M_B(F_3) - M_3 = 0.$$

Из этого уравнения определяем величину силы F_{32}. Имеем

$$F_{32} = -\left[\frac{F_{34}h_{43}}{l_{BC}} + \frac{F_3h_3}{l_{BC}} + \frac{M_3}{l_{BC}}\right],$$

где h_3 и h_{43} — плечи сил F_3 и F_{34} относительно точки *B*. После определения силы F_{32} можно найти силу F_{30}, приравнивая нулю сумму всех сил, действующих на звено *3:*

$$F_{32} + F_3 + F_{34} - F_{30} = 0.$$

Решаем графически это уравнение. Из точки *а* (рис. 6.2.3, б) откладываем в масштабе μ_F силу F_{32} в виде отрезка *ab* и к ней прикладываем силу F_3 в виде отрезка *bc*. Далее из точки *c* откладываем силу F_{34} в виде отрезка *cd*. Отрезок *da* представляет силу F_{30}.

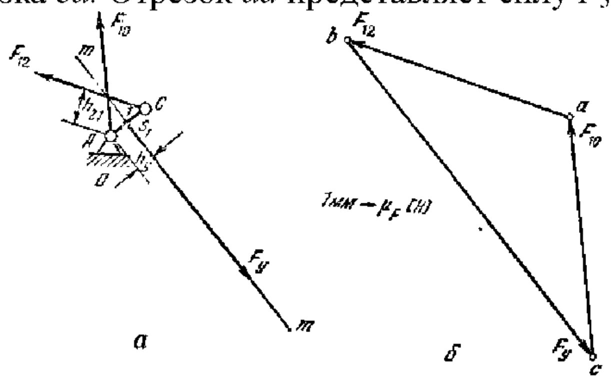


Рис. 6.2.4. Начальное звено *1* механизма, изображенного на рис. 1:
а) кинематическая схема звена; *б)* план сил

Далее рассматриваем равновесие начального звена ***1*** (рис. 6.2.4). На него действует сила F_{12}, равная по величине и противоположно направленная силе F_{21}. Линия действия уравновешивающей силы F_y задана прямой *m – m*, перпендикулярной к оси *AC* звена ***1*** (рис. 6.2.4, *а*). Величина уравновешивающей силы F_y при равномерном вращении звена ***1*** определяется из уравнения

$$M_A(F_y) - M_A(F_{21}) = 0$$

откуда

$$F_y = \frac{F_{12} h_{21}}{h_y}$$

где h_{21} и h_y — плечи сил F_{12} и F_y относительно точки A. Определение реакции F_{10} в паре A производим графически (рис. 6.2.4, *б)* при помощи векторного уравнения равновесия всех сил, действующих на начальное звено ***1***,

$$F_{12} + F_y + F_{10} = 0.$$

Из точки a откладываем в масштабе μ_F силу F_{12} в виде отрезка ab и к ней прикладываем силу F_y в виде отрезка bc. Отрезок ca представляет собой силу F_{10}.

6.3. Уравновешивание сил инерции звеньев механизма. Вибрационные машины

Для уравновешивания только главного вектора сил инерции плоского механизма (без уравновешивания моментов сил инерции), достаточно, чтобы общий центр S масс всех звеньев механизма оставался неподвижным и удовлетворялось условие

$$x_s = \text{const} \quad \text{и} \quad y_s = \text{const}. \tag{3.1}$$

Два равенства (3.1) могут быть заменены одним векторным

$$r_S = \text{const}, \tag{3.2}$$

где r_s — вектор, определяющий положение общего центра масо звеньев механизма.

Радиус-вектор r_s центра S масс звеньев механизма определяется как геометрическая сумма отрезков, представляющих векторы главных точек отдельных звеньев. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника $ABCD$ (рис. 6.3.1), если обозначить массы звеньев *1, 2* и *3* соответственно через m_1, m_2 и m_3, расстояния центров тяжести S_1, S_2 и S_3 этих звеньев от точек A, B и C — через a_1, a_2 и a_3, и длины звеньев — через l_1, l_2 и l_3, то радиус-вектор r_s центра S масс его звеньев будет равен геометрической сумме векторов главных точек

$$r_s = h_1 + h_2 + h_3,$$

где модули векторов h_1, h_2, h_3 определяются по формулам

$$h_1 = \frac{m_1 a_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m}, \tag{3.3}$$

$$h_2 = \frac{m_2 a_2 + m_3 l_2}{m}, \tag{3.4}$$

$$h_2 = \frac{m_3 a_3}{m}, \tag{3.5}$$

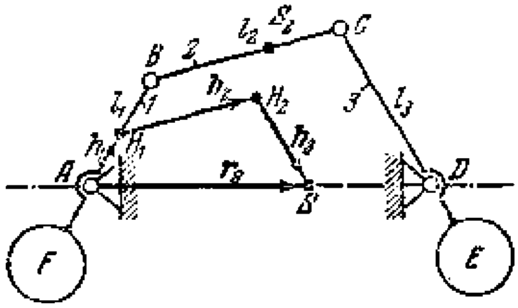


Рис. 6.3.1. Схема механизма шарнирного четырехзвенпика с противовесами на звеньях *1* и *3*

Для удовлетворения условия (3.2) необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$h_1 + h_2 + h_3 = \text{const}. \tag{3.6}$$

Это условие может быть удовлетворено, если модули векторов h_1, h_2 и h_3 подобрать так, что векторный многоугольник, образованный ими, будет подобен четырехугольнику *ABCD*, образуемому осями звеньев механизма (рис. 6.3.1). При таком подборе модули h_1, h_2 и h_3 должны удовлетворять пропорциям

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3}. \tag{3.7}$$

Вследствие параллельности векторов h_1, h_2 и h_3 соответственно сторонам *AB*, *BC* и *CD* их векторный многоугольник является как бы вторым шарнирным четырехзвенным механизмом AH_1H_2S, подобным основному механизму, и следовательно, все точки фигуры AH_1H_2S описывают траектории, подобные траекториям соответствующих точек звеньев данного механизма. Общий центр *S* масс звеньев механизма *ABCD* в этом случае находится на прямой *AD* и за все время движения механизма остается неподвижным, при этом удовлетворяется условие (3.1), или условие (3.2), и следовательно, силы инерции звеньев шарнирного четырехзвенника оказываются уравновешенными.

Механизм будет уравновешен при любом положении точки *S* на прямой *AD* как между точками *A* и *D*, так и вправо или влево от них.

Подставляя в пропорции (3.7) значения h_1, h_2 и h_3 из формул (3.3), (3.4), (3.5) получаем для заданных размеров l_1, l_2 и l_3 следующие два уравнения:

$$m_1 a_1 = -m_2 \frac{l_1}{l_2}\left(l_2 - a_2\right), \tag{3.8}$$

$$m_2 a_2 = -m_3 \frac{l_3}{l_2}\left(l_3 - a_3\right). \tag{3.9}$$

Из этих уравнений непосредственно следует, что при решении задачи о подборе масс механизмов, удовлетворяющих условию его уравновешенности, можно получить бесчисленное множество решений, так как в эти два уравнения входят шесть переменных m_1, m_2, m_3, a_1, a_2 и a_3, из которых четыре могут быть выбраны произвольно.

Из уравнений (3.8) и (3.9) также следует, что если задать одно из трех расстояний a_1, a_2 или a_3 на оси звена между шарнирами, остальные два расстояния до центров тяжести получаются за крайними шарнирами звена, и, считая, что расположение центра масс за шарнирами соответствует как бы установке *противовеса* (дополнительной массы), можно сказать, что уравновешивание результирующей силы инерции звеньев механизма шарнирного четырехзвенника может быть достигнуто путем установки противовесов на двух его звеньях. Например, при $a_3 > l_3$ и при установке противовеса E на звене CD за точкой D (рис. 10) из уравнения (3.9) следует, что $a_2 > 0$, т. е. центр масс S_2 звена BC должен быть расположен от точки B вправо. Если при этом $a_2 < l_2$, то из уравнения (3.8) имеем $a_1 < 0$ и центр масс звена AB должен быть расположен вне звена, за точкой A. Следовательно, противовесы F и E необходимо расположить на звеньях *1* и *3* так, как показано на рис. 10. Если $a_2 > l_2$, то $a_1 > 0$, и следовательно, звенья *2* и *3* имеют центры масс вне этих звеньев, то противовесы должны быть расположены на звеньях *2* и *3* так, как показано на рис. 6.3.2.

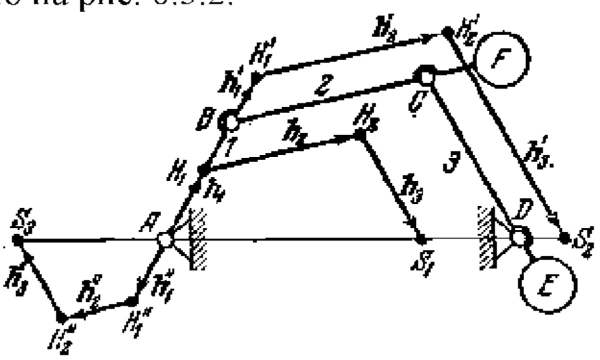


Рис. 6.3.2. Схема механизма шарнирного четырехзвенника с противовесами на звеньях *2* и 3

Вибрационные машины

Силы инерции не всегда являются вредными, с которыми надо бороться. В настоящее время имеется много машин, в которых, для выполнения того или иного технологического процесса намеренно возбуждаются колебания. Машины, в которых технологический процесс выполняется на основе возбужденных колебаний, называют вибрационными машинами. Возбудителями колебаний в этих машинах могут быть механические и электромагнитные вибраторы, гидравлические и пневматические пульсаторы. Рабочему органу машины, взаимодействующему с обрабатываемой средой, необходимо придать колебательное движение с желаемой частотой колебаний и амплитудой.

Вибрационные машины получили большое распространение в различных отраслях промышленности и в сельском хозяйстве. С помощью вибраций дробят, измельчают, транспортируют кусковой и сыпучий материал, разделяют смеси, уплотняют бетон, погружают сваи и шпунт в грунт, просеивают различные продукты. Используют вибрации и в быту (например, вибрационные бритвы). Обрабатываемые среды под действием вибраций становятся более «податливыми», что способствует интенсификации технологического процесса.

6. 4. Силы, действующие на звенья механизма

При работе механизма к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы производственных сопротивлений, силы тяжести и др. Кроме того, при движении механизмов в результате реакций связей в кинематических парах возникают силы трения, которые можно рассматривать как составляющие этих реакций. Реакции в кинематических парах, так же как и силы трения, по отношению ко всему механизму являются силами внутренними, но по отношению к каждому звену, входящему в кинематическую пару, оказываются силами внешними.

Реакции в кинематических парах возникают не только вследствие действия внешних задаваемых сил на звенья механизма, но и вследствие движения отдельных масс механизма с ускорениями. Составляющие реакции, возникающие от движения звеньев с ускорениями, можно считать *дополнительными динамическими давлениями* в кинематических парах. Эти дополнительные динамические давления могут быть определены из уравнений равновесия звеньев, если к задаваемым силам и реакциям связей добавить силы инерции.

Движущимися силами в механизме называются те силы, которые стремятся ускорить движение механизма. Иначе, движущими силами называются те силы, приложенные к звеньям механизма, которые совершают положительную работу. *Силами сопротивления* в механизме называются те силы, которые стремятся *замедлить* движение механизма, Иначе, силами сопротивления будем называть те силы, приложенные к звеньям механизма которые, *совершают отрицательную работу.*

Силами производственного сопротивления, или силами полезного сопротивления, будем считать те силы сопротивления, преодоление которых необходимо для выполнения требуемого технологического процесса.

Силами непроизводственных сопротивлений, или силами вредных сопротивлений, будем называть те силы сопротивления, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа сверх той, которая необходима для преодоления полезного сопротивления.

Например, у двигателя внутреннего сгорания движущей силой является давление расширяющегося газа на поршень. Силами сопротивления будут; сила трения в подшипниках и цилиндрах, сопротивление воздуха, сопротивление той рабочей машины, которая приводится в движение двигателем, и т. п. При этом сопротивление рабочей машины, которая приводится двигателем в движение, будет производственным сопротивлением, а силы трения, сопротивление воздуха и т. д. будут непроизводственными сопротивлениями.

Необходимо отметить некоторую условность в разделении сил на силы движущие и силы сопротивления. Например, силы тяжести звеньев при подъеме их центров тяжести оказываются силами сопротивления, а при опускании центров тяжести — силами движущими. Силы трения, возникающие в подшипниках, являются силами сопротивления, а силы трения, возникающие в точках контакта при обхвате ремнем шкива ременной передачи, являются силами движущими и т. д. Работа движущих сил называется иногда затрачиваемой работой, работа сил производственных сопротивлений — полезной работой и работа непроизводственных сопротивлений — вредной работой.

7. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИЗМАХ

7.1. Уравнение движения механизма, выраженное через работу сил

Полным временем движения механизма называется промежуток времени от момента начала движения механизма до момента конца его движения. Так как закон движения всех звеньев механизма определяется законом движения начального звена, то полным временем движения механизма является также промежуток времени от момента начала движения *начального звена* до момента конца его движения.

Полное время движения механизма состоит из трех частей:

а) *времени разбега;*

б) *времени установившегося движения;*

в) *времени выбега.*

Время разбега характеризуется возрастанием скорости начального звена от нулевого значения до некоторого среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости этого звена механизма. *Установившимся движением механизма* называется движение, при котором его кинетическая энергия является периодической функцией времени. Во время установившегося движения обычно скорость начального звена механизма колеблется около среднего значения, соответствующего нормальной рабочей скорости этого звена механизма. Промежуток времени, по истечении которого положение, скорость и ускорение начального звена механизма принимают первоначальные значения, является периодом изменения кинетической энергии механизма и называется *циклом установившегося движения механизма.*

Время выбега характеризуется убыванием скорости начального звена от среднего значения нормальной рабочей скорости механизма до нулевого ее значения.

Полное время T движения механизма состоит из времени $T_р$ разбега, времени $T_{у.д}$ установившегося движения и времени $T_в$ выбега. Время установившегося движения имеет четыре цикла. Каждому циклу соответствует время $T_ц$. Таким образом, общее время T равно

$$T = T_р + T_{у.д} + T_в$$

а время $T_{у\cdot д}$ равно

$$T_{у.д} = k\, T_ц$$

где k – число циклов.

Продолжительность времени $T_р$, времени $T_в$ и времени $T_ц$ зависит от соотношений между действующими силами, массами и метрическими параметрами механизма, и если эти соотношения известны и достаточны, то всегда можно определить время $T_р$ разбега, время $T_в$ выбега и время $T_ц$ одного цикла движения.

Полное время $T_{у.д}$ установившегося движения может состоять из любого числа циклов движения и зависит от того, сколь долго необходимо и возможно поддерживать рабочий режим движения механизма – режим со средней рабочей угловой скоростью $\omega_{ср}$. Необходимо отметить, что многие машины и механизмы могут и не иметь четко разграниченных стадий движения. Так, например, в грузоподъемных кранах, экскаваторах, некоторых транспортирующих машинах и др. полное время движения того или иного механизма может состоять из времени разгона и времени выбега, и в этих механизмах отсутствует время установившегося движения с характерными для него циклами движения.

Периодическим движением механизма называется такое движение, при котором в течение некоторого промежутка времени механизм обладает постоянными циклами движения, причем в течение каждого цикла движение происходит по одному и тому же закону.

Цикл может соответствовать одному или нескольким оборотам начального звена. Так, например, вал насоса с кривошипно-ползунным механизмом в течение цикла делает один оборот. У четырехтактного двигателя внутреннего сгорания в течение цикла коленчатый вал делает два оборота. В некоторых машинах один цикл соответствует и большему числу оборотов ведущего вала.

Рассмотрим теперь, чем характеризуются с точки зрения динамики разбег, установившееся движение и выбег. Для этого напишем уравнение кинетической энергии. Это уравнение применительно к механизму может быть написано так:

$$A_Д - A_C = \sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{mv_0^2}{2}, \qquad (1.1)$$

где $A_д$ есть работа всех движущих сил, A_c — работа всех сил, сопротивления, $\sum mv^2/2$ - кинетическая энергия механизма, а v_0 и v суть скорости в начале и в конце рассматриваемого перемещения. Для времени разбега механизма необходимым является условие, в соответствии с которым конечная скорость v была бы по величине больше начальной скорости v_0, а это влечет за собой требование, чтобы работа сил движущих за все это время была больше работы сил сопротивления:

$$A_д > A_c.$$

Для времени установившегося движения через каждый цикл движения величина скорости v становится равной величине скорости v_0, и, следовательно, за тот же цикл работа движущих сил должна быть равна работе сил сопротивления:

$$A_д = A_c.$$

Для времени выбега $v < v_0$ и потому должно быть

$$A_д < A_c.$$

Соответственно указанному, правая часть уравнения (1.1) принимает последовательно следующие значения:

для времени разбега

$$\sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{mv_0^2}{2} > 0; \qquad (1.2)$$

для целого числа циклов во время установившегося движения

$$\sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{mv_0^2}{2} = 0 \qquad (1.3)$$

для времени выбега

$$\sum\frac{mv^2}{2} - \sum\frac{mv_0^2}{2} < 0 \qquad (1.4)$$

Из полученных выражений видно, что за время разбега механизма происходит приращение его кинетической энергии.

Во время установившегося движения это приращение за целый цикл движения механизма равно нулю. За время выбега механизма происходит отдача кинетической энергии, накопленной им за время разбега.

7. 2. Уравнение движения механизма в форме интеграла энергии

Рассмотрим вопрос об энергии, потребляемой машиной на преодоление различных видов сопротивлений, и установим соотношения между работами, производимыми отдельными силами, действующими на машину.

Для этого уравнение кинетической энергии механизма (1.1) представим в следующем виде:

$$A_Д - A_С - \left(\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} \right) = 0 .$$

Величина, стоящая в скобках, может быть условно представлена как работа $А_и$ сил инерции. Тогда уравнение (14.5) будет иметь вид

$$А_Д - А_С \pm А_И = 0. \qquad (1.6)$$

Двойной знак у работы $А_и$ стоит в силу того, что кинетическая энергия в зависимости от значений величин v_0 и v может быть положительной и отрицательной. Далее в уравнении (1.6) выделим отдельно работу $A_{п.с}$ *производственных сопротивлений*, работу $А_т$ *сил трения и других непроизводственных сопротивлений* и работу $А_{с.т}$ *сил тяжести звеньев.*

Тогда уравнение (1.6) будет иметь следующий вид:

$$A_д - A_{п.с} - A_т = A_и \pm А_{с.т} = 0. \qquad (1.7)$$

Работа $А_{с.т}$ имеет двойной знак, так как при подъеме общего центра масс звеньев механизма работа $А_{с.т}$ получается отрицательной, а при его опускании – положительной.

Если кроме указанных в уравнении (1.7) работ имеются работы и других сил, то они также могут быть включены в уравнение (1.7) с соответствующими знаками. Например, в некоторых случаях в это уравнение необходимо включать работу сил упругости пружин в зависимости от конструкции механизма и характера его работы.

Уравнение. (1.7) справедливо и для элементарных работ:

$$dA_д - d\,A_{п.с} \quad d\,A_т + dA_и \pm dA_{с.т} = 0. \qquad (1.8)$$

Разделив все члены уравнения (1.8) на дифференциал времени *dt*, получим

$$\frac{dA_Д}{dt} - \frac{dA_{П.С}}{dt} - \frac{dA_Т}{dt} \pm \frac{dA_И}{dt} \pm \frac{dA_{С.Т}}{dt} = 0 ,$$

или

$$P_Д - P_{П.С} - P_Т \pm P_И = P_{С.Т} = 0, \qquad (1.9)$$

где $P_д$ — мощность, развиваемая движущими силами, $P_{П.С}$ — мощность, затрачиваемая на преодоление производственных сопротивлении, $P_Т$ — мощность, затрачиваемая на преодоление всех сил трения и других непроизводственных сопротивлений, $P_и$ — мощность, затрачиваемая на изменение кинетической энергии механизма или, наоборот (в зависимости от знака), получаемая за счет изменения кинетической энергии машины, $P_{с.т}$— мощность, затрачиваемая на преодоление сил тяжести или, наоборот (в зависимости от знака), развиваемая силами тяжести.

Уравнение (1.9) можно назвать *уравнением энергетического баланса машины.*

Из уравнения (1.9) следует, что в некоторые моменты времени мощности $P_и$ и $P_{с.т}$ могут быть положительными, в другие моменты времени — отрицательными. В случае знака плюс они увеличивают мощность $P_Д$, которую надо развить на ведущем звене механизма, в случае знака минус они ее уменьшают. Например, в течение времени разбега (см. уравнение (1.2)) мощность $P_И$ положительна, и, следовательно, при разбеге машины мощность $P_д$ должна быть больше, чем для времени выбега, когда мощность $P_и$ отрицательна.

7. 3. Регулирование движения машин

При периодических колебаниях скоростей начального звена машины (звена приведения механизма) во время установившегося и неустановившегося движений необходимо соединить начальное звено регулируемого объекта с особым механизмом, носящим название *скоростного регулятора.* Задача регулятора состоит в установлении устойчивого (стационарного) изменения скорости, режима движения начального звена регулируемого объекта, что может быть достигнуто выравниванием разницы между движущими силами и силами сопротивления. Если по каким-либо причинам уменьшается полезное сопротивление и регулируемый объект начинает ускорять свое движение, то регулятор автоматически уменьшает приток движущих сил. Наоборот, если силы сопротивления увеличиваются, и регулируемый объект начинает замедлять свое движение, то регулятор увеличивает движущие силы. Таким образом, как только нарушается равновесие между движущими силами и силами сопротивления, регулятор должен вновь их сбалансировать и заставить регулируемый объект работать с прежними или близкими к прежним скоростями.

Конструкции регуляторов и схемы регулирования разнообразны. Например, в практике применяются так называемые *центробежные регуляторы,* плоские и пространственные, в которых используется центробежная сила инерции. Имеются также *инерционные регуляторы,* использующие тангенциальные силы инерции. Применяются *регуляторы электрического типа* и др.

2. Хотя конструкции механизмов регуляторов и схемы регулирования различные, но в большинстве случаев автоматическое регулирование выполняется по схеме замкнутого контура. Принципиальная схема автоматического регулирования по замкнутому контуру представлена на рис. 3.1.

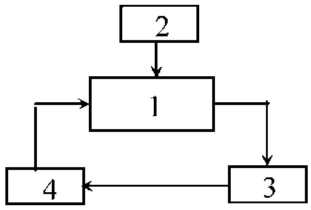


Рис. 7.3.1.Принципиальная схема системы регулирования: *1* – регулируемый объект; *2* – источник возмущений; *3* – чувствительный элемент; *4* – регулирующий орган

Регулируемый объект 1 находится под внешним воздействием *источника возмущения 2*. В результате этого воздействия происходит отклонение регулируемого параметра от заданного. Эти изменения воспринимаются *чувствительным элементом 3*, который передает необходимую информацию *регулирующему органу 4*, восстанавливающему заданный параметр у регулируемого объекта: *1* – *3* *4* *1* (обратная связь).

Регулируемый объект *1* посредством обратной связи воздействует на чувствительный элемент *3*, который в свою очередь действует на регулируемый объект *1*.

На рис. 7.3.1 дана простейшая схема системы автоматического регулирования. Обычно в состав системы автоматического регулирования входят различные дополнительные устройства, обеспечивающие надежность действия этой системы.

В машинном агрегате регулируемым объектом обычно бывает двигатель, а источником возмущения является рабочая машина, приводимая в движение двигателем. Чувствительный элемент может быть механическим устройством, чаще всего механизмом регулятора центробежного типа, или электрическим типа тахогенератора, представляющего собой электрический генератор, развивающий напряжение, пропорциональное угловой скорости. Этим напряжением можно пользоваться для воздействия на регулирующий орган. Регулирующие органы могут быть различными в зависимости от технологического назначения машины.

3. Рассмотрим некоторые схемы автоматического регулирования угловой скорости начального звена машинного агрегата. На рис. 7.3.2 показан машинный агрегат, состоящий из рабочей машины *2* и теплового двигателя *1*. Чувствительным элементом является центробежный регулятор *3*. Регулятор состоит из двух тяжелых шаров *K*, сидящих на звеньях *AC* и *BD*. Эти звенья входят во вращательные пары *C* и *D* со звеньями *CE* и *DF*, которые в свою очередь входят во вращательные пары *E* и *F* с муфтой *N*, имеющей возможность свободно скользить вдоль направляющей *z* – *z*. Звенья *AC* и *BD* связаны пружиной *L*, стремящейся сблизить шары.

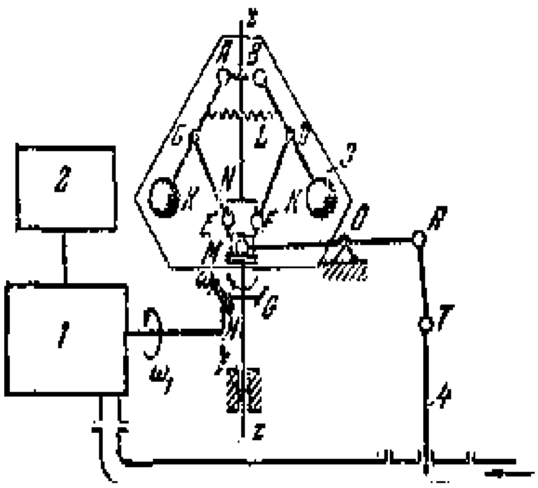


Рис. 7.3.2. Схема прямого регулирования машинного агрегата: *1* – двигатель; *2* – рабочая машина; *3* – регулятор; *4* – заслонка паропровода

Регулятор приводится в движение от начального звена двигателя посредством промежуточного механизма, например парой конических колес *H* и *G*. При вращении начального звена двигателя с угловой скоростью ω_1 регулятор вращается с угловой скоростью

$$\omega_p = \omega_1 \frac{1}{u_{1p}},$$

где u_{1p} есть передаточное отношение от начального звена к регулятору.

При различных угловых скоростях ω_1 начального звена муфта *N* занимает различные положения. С муфтой *N* соединен рычажный механизм, увеличивающий или уменьшающий подачу движущей энергии $P_д$ (например, пара или газа) в двигатель. Этот механизм состоит из звеньев *OR* и *RT* и заслонки *4*. Палец *M*, принадлежащий звену *OR*, скользит в направляющих, принадлежащих муфте *N*.

Предположим, что в результате уменьшения сил полезных сопротивлений в рабочей машине *2* угловая скорость ω_1 регулятора увеличилась. Тогда шары *K* под действием центробежных сил будут удаляться от оси вращения *z* — *z* и муфта *N* будет перемещаться вверх. При этом звено *RT* будет действовать на заслонку *4*, которая, опускаясь вниз, уменьшит сечение *канала*, по которому поступает в двигатель *1* рабочее вещество (пар, газ и т. д.). Тогда движущие силы уменьшатся, угловая скорость ω_p также уменьшится, муфта *N* начнет перемещаться вниз, и следовательно, заслонка *4* будет перемешаться вверх, увеличивая сечение канала. После увеличения подачи движущей энергии процесс может снова повторяться и т. д. Таким образом, работа регулятора представляет собой некоторый *колебательный процесс*. Регулятор отзывается автоматически на изменение величины угловой скорости начального звена двигателя и обеспечивает подачу необходимой энергии для передвижения регулирующего органа.

Следует отметить, что описанный способ регулирования обладает тем недостатком, что после сброса нагрузки угловая скорость оказывается несколько выше той, с которой двигатель вращался до сброса нагрузки, хотя движение машинного агрегата вновь получается установившимся, но скорости этого движения уже иные и несколько больше, чем в начале процесса регулирования. Чтобы избежать указанного изменения скорости, в технике применяются более сложные схемы регулирования.

Описанная система регулирования называется системой *прямого регулирования,* так как в ней регулятор *непосредственно соединен с механизмом,* увеличивающим или уменьшающим подачу движущей энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2004 – 768 с.
2. Куприянов Д.Ф., Метальников Г.Ф. Техническая механика. М., 1995г.
3. Цывильский В.Л. Теоретическая механика. М.: Высш.шк., 2004. – 343 с.
4. И.И.Артоболевский. Теория механизмов и машин. М.: Наука. 2001 – 640 с.
5. И.И.Артоболевский, Б.В. Эдельштейн. Сборник задач по теории механизмов и машин. М.: Наука. 2000 – 255 с.