ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Конспект лекций

Данная книга представляет собой конспект лекций по курсу «Теоретическая механика». Представленный материал содержит ответы на все основные вопросы по данному предмету. Пособие предназначено в помощь студентам средних и высших учебных заведений при сдаче зачетов и экзаменов по теоретической механике.

ЛЕКЦИЯ № 1. Основные понятия и аксиомы статики

Статика — это раздел теоретической механики, в котором устанавливаются методы преобразования одних систем сил в другие, им эквивалентные, а также условия равновесия различных систем сил, действующих на твердое тело.

Материальная точка — это простейшая модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механическая система — это любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердое тело — это механическая система, расстояние между точками которой не изменяется при любых взаимодействиях.

Сила — это одна из векторных мер действия одного материального объекта на другой рассматриваемый объект. Сила характеризуется числовым значением, а также точкой приложения и направлением действия. Это векторная величина и обозначается она, например, $\overline{F}$.

Система сил — это совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело.

Система сил, эквивалентная нулю (равновесная система сил), — это такая система сил, действие которой на твердое тело или точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению его состояния.

Существуют следующие аксиомы, при формулировке которых предполагается, что на твердое тело или материальную точку действуют силы, которые указаны в соответствующей аксиоме.

1. **О равновесии системы двух сил.** Для равновесия системы 2-х сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях (рис. 1а).

2. **О добавлении системы сил, эквивалентной нулю.** Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить систему

сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления новая система сил является эквивалентной первоначальной системе.

3. **Аксиома параллелограмма сил.** Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 1б):

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1^2 F_2^2 \cos\left(\overline{F}_1, \hat{}\, \overline{F}_2\right)}.$$

4. **Аксиома о равенстве сил действия и противодействия.** Всякой силе действия есть равная противоположная сила противодействия.

5. **Аксиома связей.** Всякую связь можно отбросить и заменить силой, реакцией связей или системой сил.

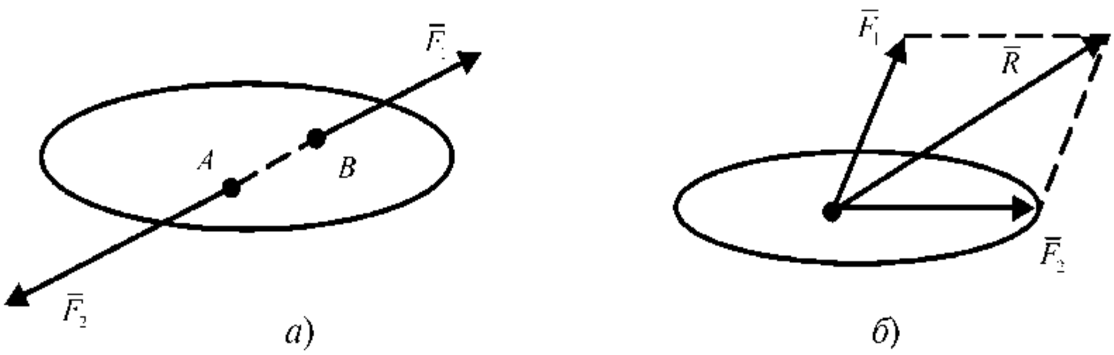


Рис. 1. Равновесие двух сил (а), равнодействующая сил (б)

Несвободное твердое тело — это тело, не имеющее возможность совершать в рассматриваемый момент любые перемещения в пространстве.

Под связью для твердого тела или материальной точки понимают материальные объекты, которые ограничивают свободу перемещения рассматриваемого твердого тела или материальной точки. Аксиома связи: **всякую связь можно отбросить или заменить силой, реакцией связей** (в простейшем случае) или **системой сил** (в общем случае). **Реакция связи** — это сила, с которой связь действует на систему материальных точек или твердое тело. Сила реакции связи направлена в сторону, противоположную направлению, в котором связь препятствует перемещению рассматриваемого тела.

ЛЕКЦИЯ № 2. Сходящиеся силы на плоскости

Система сходящихся сил — это такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Пусть задана произвольная система сходящихся сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, приложенных к твердому телу. Перенесем эти силы как скользящие векторы в точку пересечения линий их действия, а потом, воспользовавшись аксиомой о параллелограмме сил, определим равнодействующую этих сил. Равнодействующую такой системы можно определить графически и аналитически. **Сложение двух сходящихся сил** графически осуществляется по правилу параллелограмма, причем

$$\overline{R}_{12} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

По правилу параллелограмма складываем силы $\overline{R}_{12}$ и $\overline{F}_3$, и получаем их равнодействующую

$$\overline{R}_{123} = \overline{R}_{12} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3.$$

Далее получим

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

(рис. 2а). Для аналитического определения равнодействующей силы выбирают систему прямоугольных осей координат. Нужно воспользоваться теоремой из геометрии о том, что проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на ту же ось. Для плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей (обычно OZ) выбирают перпендикулярной силам. Таким образом, каждая из сил пучка даст проекцию на эту ось, равную нулю, а значит, будет равна нулю и проекция равнодействующей силы на ось OZ. После этого проецируют векторы векторного равешства на прямоугольные оси координат. Тогда в соответствии с теоремой о проекции замыкающей получится

$$\overline{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix}, \quad \overline{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy}.$$

По проекциям определяют модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$\overline{R} = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix})^2 + (\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy})^2}$$

и

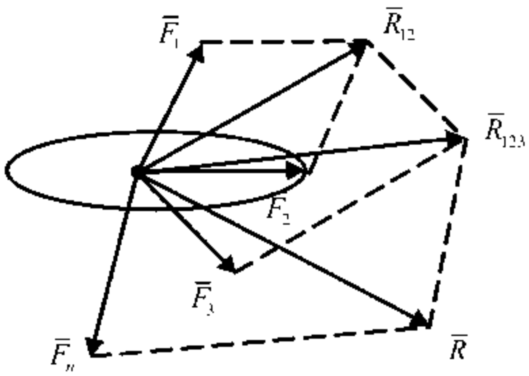
$$\cos\left(R_x,^\wedge x\right) = R_x / R, \quad \cos\left(R_y,^\wedge y\right) = R_y / R.$$

Следовательно, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\overline{R}$, которая и является равнодействующей этой системы сил. Процесс последовательного применения правила параллелограмма означает по сути построение **многоугольника из заданных сил**. В силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой. Равнодействующая сила $\overline{R}$ в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, т. е. изображается замыкающей силового многоугольника (рис. 2б). Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является пространственной фигурой, а для плоской — плоской фигурой. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, замыкающая силового многоугольника, изображающая равнодействующую силу, должна обратиться в точку. Другими словами, конец последней силы в многоугольнике должен совпадать с началом первой силы. Этот силовой многоугольник называют **замкнутым**.

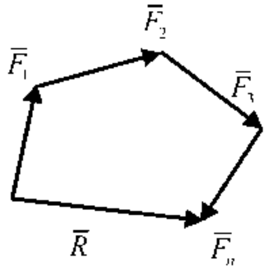
Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила равнялась нулю $\overline{R} = 0$.

Аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекции этих сил на взаимно перпендикулярные оси равнялись нулю.

Теорема о трех силах. Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пересекаются в одной точке. Для случая трех сходящихся сил при равновесии силовой треугольник, построенный из трех сил, должен быть замкнутым.



а)



б)

Рис. 2. Сложение двух сходящихся сил (а), равнодействующая сила $\bar{R}$ в силовом многоугольнике (б)

ЛЕКЦИЯ № 3. Равнодействующая сходящихся сил на плоскости. Леммы о нулевых стержнях

В общем случае система сходящихся сил приводится к одной — равнодействующей этой системы сил. Для аналитического определения равнодействующей силы нужно выбрать систему прямоугольных осей координат, а потом воспользоваться теоремой из геометрии. Эта теорема гласит: проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на ту же ось. Равнодействующая сила при равновесии системы $\overline{R}=0$ представляет собой замыкающую силового многоугольника, или векторную сумму сил, однако, с другой стороны,

$$\overline{R}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i.$$

Сначала необходимо спроецировать векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат. Тогда в соответствии с теоремой о проекции замыкающей получится:

$$\overline{R}_x=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_{ix},\ \overline{R}_y=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_{iy}.$$

Следовательно, условия равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме будут

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_{ix}=0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_{iy}=0.$$

Иными словами, для равновесия системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекции этих сил на каждую из двух прямоугольных координат осей, лежащих в плоскости, были равны нулю. Здесь уравнение равновесия сил выражается формулой $\overline{R}=0$.

Фермы — это конструкции, которые состоят из прямолинейных стержней, соединенных между собой шарнирами и образующих неизменяемую геометрическую фигуру. Рассчитывая фермы, весом стержней пренебрегают и считают, что шарниры расположены только на концах стержней. Обычно фермы делят на мостовые, стропильные и крановые.

Существует определенная зависимость между количеством стержней (n) и количеством шарниров (k). В основном треугольнике имеются 3 стержня и 3 узла. При этом для образования одного узла требуются 2 стержня. Значит, для образования ($k - 3$) узлов нужно $2(k - 3)$. Общее число стержней

$$n = 2\,(k - 3) + 3,$$

тогда

$$n = 2k - 3.$$

Нулевыми называются стержни, ненагруженные силой, на концах которых находятся точечные шарниры и весом которых можно пренебречь.

Способ вырезания узлов заключается в том, что каждый узел вырезается из фермы и рассматривается отдельно, как находящийся в равновесии под действием приложенных к нему внешних сил и усилий разрезанных стержней. Система сил, действующих на стержень, — это плоская система сходящихся сил, которая находится в равновесии. В соответствии с этим силовой многоугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнутым. Построение силовых многоугольников всегда начинают с узла, в котором сходятся 2 стержня. Отсюда уже можно будет найти усилия в этих двух стержнях, а затем переходить к следующему узлу и т. д. Каждый последующий узел следует выбирать так, чтобы в нем сходилось не более двух стержней с неизвестными усилиями. Если усилия разрезанных стержней направлены по стержням в сторону узла, то их называют сжимающими, а если наоборот — **растягивающими**.

Леммы о нулевых стержнях.

1. Если в узле, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, и которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, т. е. он является нулевым.

2. Стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных в шарнирах, где силы равны по величине и противоположны по направлению, т. е. его реакция также будет направлена по оси стержня.

ЛЕКЦИЯ № 4. Теория пар сил, лежащих в одной плоскости. Момент силы относительно точки на плоскости

Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется **парой сил**. Под действием пары сил свободное твердое тело выходит из состояния равновесия. Пара сил, как правило, прилагается к телу ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$), которое должно вращаться. В связи с этим пару сил нельзя заменить одной силой, а значит, у нее нет равнодействующей. Подобные силы имеют свойства обычных сил. Плоскость, в которой расположены пары сил, называется **плоскостью действия пары сил *N***. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется **плечом пары *h***. **Алгебраический момент пары сил** — это взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары сил:

$$M = M(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2) = \pm Fd.$$

Алгебраический момент пары сил имеет знак плюс, если пара сил стремится вращать тело против часовой стрелки, и знак минус, если пара сил стремится вращать тело по часовой стрелке. Алгебраический момент пары сил не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, если линии действия пары сил совпадают. Произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки

$$M_0(\overline{F}) = \pm Fh$$

называют **алгебраическим моментом пары относительно точки. Плечо пары h относительно точки** — это кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т. е. длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы. Две пары сил называются **эквивалентными**, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях, а также если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты.

Теорема об эквивалентности пары сил. Пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент.

По-другому, две пары сил, которые расположены в одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты.

Пару сил как жесткую фигуру можно поворачивать и переносить в плоскости ее действия как угодно. У пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом алгебраический момент пары и плоскость действия. Эти операции над парами сил не изменяют их действия на твердое тело.

Теорема о сумме алгебраических моментов пары сил. Пары сил, действующие на твердое тело и расположенные в одной плоскости, можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Пары сил, расположенные в параллельных плоскостях, также складываются, поскольку их предварительно можно перенести в одну плоскость. Если сложение выполнять графически, когда векторные моменты пары сил находятся в одной плоскости, то векторный момент эквивалентной пары сил будет иметь вид замыкающей векторного многоугольника, построенного из векторных моментов заданных пар сил.

ЛЕКЦИЯ № 5. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

Приведение силы к заданному центру. Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Приведение силы к силе и паре.

Теорема Пуансо: любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил. Эта замена системы сил одной силой и парой сил называется приведением системы сил к заданному центру.

Главный вектор системы сил — это вектор, который равен векторной сумме этих сил. Главный вектор системы сил изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник, построенный на силах:

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i.$$

Главный момент системы сил относительно точки тела — это сумма векторных моментов всех сил системы относительно этой точки. Он является вектором, который замыкает векторный многоугольник, образованный при сложении векторных моментов сил системы относительно выбранного центра. Главный **момент** $\overline{L}_0$ равняется сумме векторных моментов присоединения пар:

$$\overline{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i).$$

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется **плоской системой сил**, приложенных к твердому телу.

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости. Пусть каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат OX, OY, и потому ее моменты относительно этих осей равны нулю (рис. 3а). Значит, условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i) = 0$$

будут тождествами. Моменты силы относительно *OZ*, которая перпендикулярна силам, равны алгебраическим моментам этих сил относительно точки *O*. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} M_z(\overline{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_0(\overline{F}_i).$$

Отсюда получатся три условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_0(\overline{F}_i) = 0.$$

Значит, для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия этих сил, были равны нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил, также была равна нулю.

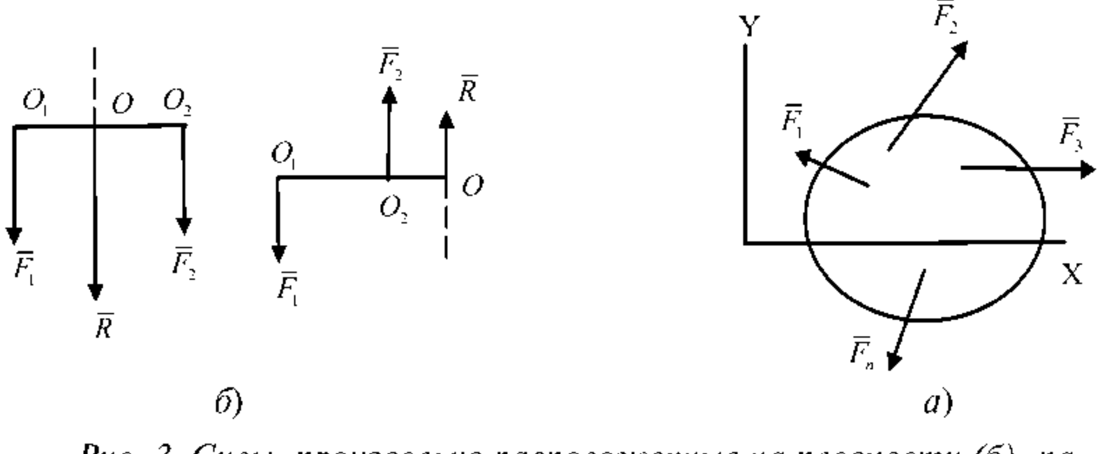


Рис. 3. Силы, произвольно расположенные на плоскости (б), параллельные силы на плоскости (а)

Сложение параллельных сил на плоскости. Пусть заданы две параллельные силы ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$), они направлены в одну (или разные) стороны. Если $\overline{F}_1 \neq - \overline{F}_2$, т. е. они не образуют пару сил, то они приводятся к равнодействующей с некоторым центром приведения O. Положение точки O можно найти, подсчитав относительно нее момент равнодействующей, он равен нулю в каждом из приведенных случаев (рис. 3б)

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i.$$

Из формул

$$M_0(\overline{R}) = F_1 \times O_1O - F_2 \times OO_2,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{O_1O}$$

следует, что система двух параллельных сил, не образующих пару, имеет равнодействующую, параллельную этим силам. При этом ее модуль равен сумме модулей этих сил, когда силы направлены в одну сторону, и разности модулей составляющих сил, когда они направлены в разные стороны. Линия действия равнодействующей делит расстояние между точками O_1, O_2 приложения сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ на части, которые обратно пропорциональны модулям этих сил внутренним образом, если силы направлены в одну сторону, и внешним образом, если они направлены в разные стороны.

ЛЕКЦИЯ № 6. Условия равновесия сил, приложенных к рычагу. Сцепление и трение скольжения

Рычагом называется форма действия плоской системы сил на объект, при которой соблюдаются те же условия равновесия сил, что и для точки, на которую действует сила. Чтобы определить устойчивость равновесия сил, приложенных к рычагу, нужно составить уравнение моментов относительно точки.

Алгебраический момент относительно точки — это произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки

$$M_0(\bar{F}) = \pm Fh.$$

Плечо пары *h* относительно точки — это кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т. е. длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы. Алгебраический момент относительно точки численно равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе.

Векторное условие равновесия: для равновесия системы сил, приложенных к точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительно точки также был равен нулю.

Три условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{iy} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

В случае опрокидывания на устойчивое положение тела или системы тел действует возбуждающая сила, которая стремится опрокинуть (вывести из равновесия) объект. Положение равновесия q_0 называется **устойчивым**, если в каждой паре сколь угодно малых положительных фиксированных чисел e для моментов времени $t > t_0$ выполняется неравенство:

$$/q(t) - q(t_0)/ < e.$$

Потенциальная энергия тела будет иметь минимум или равняться нулю, т. е.

$$П = 1/2\sum C_i q_i = 0,$$

где C_i — коэффициент устойчивости.

Приближенные законы, препятствующие качению.

1. Наибольший момент пары сил, препятствующий качению, не зависит от радиуса катка.

2. Предельное значение момента пропорционально нормальному давлению, а значит, и равной ему нормальной реакции, т. е. $M_{\max} = \delta N$ Коэффициент трения качения δ при покое называется коэффициентом трения второго рода.

3. Этот коэффициент устойчивости (**сцепления**) зависит от материала катка, плоскости и физического состояния поверхности.

При движении или стремлении двигать одно тело по поверхности другого в касательной плоскости поверхности соприкосновения возникает **сила трения**. На тело действует система сил, и тело находится в равновесии, соприкасаясь с поверхностью другого тела. Если поверхности абсолютно гладкие, то реакция поверхности связи направлена по нормали к общей касательной в точке соприкосновения. Если силу реакции R шероховатой поверхности разложить на составляющие, одна из которых N направлена по общей нормали к поверхности соприкосновения, а другая F находится в касательной плоскости к этим поверхностям, то будет иметь место реакция **силы трения скольжения**. Как правило, рассматривают сухое трение между поверхностями, когда между ними нет смазывающего вещества. При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения находится по формуле:

$$F = \sum F_i,$$

а уже отсюда выражают реакцию:

$$-N = \sum F_i.$$

ЛЕКЦИЯ № 7. Графическая статика. Диаграмма Максвелла-Кремона

Пусть дана произвольная система сходящихся сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$, приложенных к твердому телу. Эти силы как скользящие векторы перенесем в точку пересечения линий их действия, тогда, пользуясь аксиомой о параллелограмме сил, можно найти равнодействующую этих сил, которая может быть определена графически и аналитически. Графически сложение двух сходящихся сил осуществляется по правилу параллелограмма, при этом

$$\overline{R}_{12} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2.$$

После этого по правилу параллелограмма складывают силы $\overline{R}_{12}$ и $\overline{F}_3$ и получают их равнодействующую

$$\overline{R}_{123} = \overline{R}_{12} + \overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3.$$

В результате можно получить

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

(рис. 4 а).

Процесс последовательного применения правила параллелограмма приводит к построению **многоугольника из заданных сил**. В таком силовом многоугольнике конец одной из сил служит началом другой. Равнодействующая сила $\overline{R}$ в силовом многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, иначе говоря, изображается замыкающей силового многоугольника. Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник является пространственной фигурой, для плоской — плоской. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, замыкающая силового многоугольника (равнодействующая сила) должна обратиться в точку. Другими словами, конец последней силы в многоугольнике должен совпадать с началом первой силы. Этот силовой многоугольник называется

замкнутым. Условие (геометрическое) равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила равнялась нулю $\overline{R} = 0$.Для случая трех сходящихся сил при равновесии должен быть замкнутым силовой треугольник, построенный из трех сил.

В основе построения веревочного многоугольника лежит представление о многоугольнике, образованном осью, закрепленной по концам невесомой нити (веревки), натянутой действующими на нее силами (рис. 4б). Его построение совместно с силовым многоугольником применяется и для определения геометрических характеристик плоских сечений, решения некоторых задач инженерной гидравлики, экономики и др.

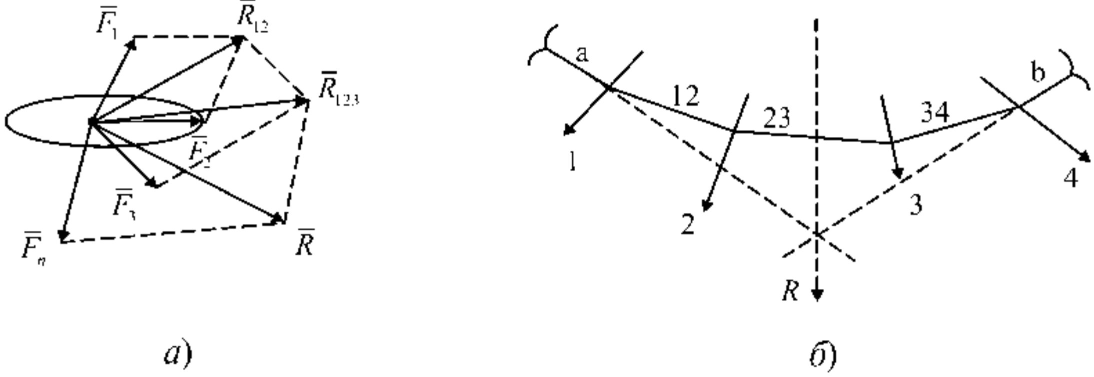


Рис. 4. Построение многоугольника из заданных сил (а), построение веревочного многоугольника (б)

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости.

Пусть каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат *OX*, *OY*, и потому ее моменты относительно этих осей равны нулю. Следовательно, условия равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i) = 0$$

становятся тождествами. Моменты силы относительно *OZ*, перпендикулярной силам, равны алгебраическим моментам этих сил относительно точки *O*.

Диаграмма Максвелла-Кремона. Построение диаграммы Максвелла-Кремона заключается в соединении силовых многоугольников, построенных для всех узлов фермы, в один чертеж таким образом, чтобы ни одно из усилий не повторялось дважды. Существуют определенные правила и последовательность действий:

1) определяют из условий равновесия всей фермы как твердого тела опорные реакции. Осуществляется это аналитически, при помощи уравнений равновесия;
2) отбрасывают опоры и изображают все приложенные к ферме силы;
3) части плоскости, ограниченные контуром фермы и линиями действия внешних сил, обозначают буквами; обозначают буквами также части плоскости, ограниченные стержнями фермы; узлы фермы обозначают римскими цифрами; стержни нумеруют арабскими цифрами;
4) строят замкнутый многоугольник внешних сил, откладывая силы в том порядке, в котором они встречаются при обходе фермы;
5) последовательно строят на этом же рисунке замкнутые силовые многоугольники для каждого узла; при этом узлы выбираются в таком порядке, чтобы каждый раз число неизвестных усилий в стержнях равнялось двум; обход каждого узла производится в том же направлении, которое было избрано для внешних сил;
6) для определения того, сжат или растянут стержень, в каждом замкнутом многоугольнике мысленно представляют стрелки в одном направлении, указанном известными силами, и переносят найденное усилие на стержень; стержень сжат, если усилие направлено к узлу, и растянут, если усилие идет от узла;
7) измеряют на диаграмме отрезки, изображающие искомые усилия в стержнях фермы, и находят усилия.

ЛЕКЦИЯ № 8. Система сходящихся сил в пространстве. Уравнение равновесия сил

Система сходящихся сил — это такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке — центре пучка. Если задана произвольная система сходящихся сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, .., \overline{F}_n$, приложенных к твердому телу, то обычно переносят эти силы как скользящие векторы в точку пересечения линий их действия. После этого, пользуясь аксиомой о параллелограмме сил, находят равнодействующую этих сил. Ее можно найти как графически, так и аналитически. Для **аналитического** определения равнодействующей силы выбирают систему прямоугольных осей координат и ссылаются на теорему из геометрии о том, что проекция замыкающей любого многоугольника на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих его сторон на ту же ось. Проецируя векторы векторного равенства на прямоугольные оси координат, в соответствии с теоремой о проекции замыкающей получают

$$\overline{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix},\ \ \overline{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy},\ \ \overline{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iz}.$$

По проекциям определяют модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$\overline{R} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iz}\right)^2}$$

и

$$\cos\left(R_x,^\wedge x\right) = R_x / R,\ \cos\left(R_y,^\wedge y\right) = R_y / R,\ \cos\left(R_z,^\wedge z\right) = R_z / R$$

Следовательно, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\overline{R}$, которая и является равнодействующей этой системы сил. Процесс последовательного применения правила параллелограмма приводит к построению **многоугольника из заданных сил**. В силовом многоугольнике конец одной из сил является началом другой, а равнодействующая сила $\overline{R}$ соединяет начало первой силы с концом последней, т. е. изображается замыкающей силового многоугольника. Для пространственной системы сходящихся сил силовой многоугольник — пространственная фигура. Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, равнодействующая сила должна обратиться в точку. Этот силовой многоугольник называют замкнутым; например, для пространственной системы сил многоугольник строят из стержней.

Проецирование силы на оси координат. Пусть дана сила *F*, тогда ее проекции на прямоугольные оси координат вычисляются по формулам:

$$F_x = \overline{F}i = F\cos(\overline{F},\hat{}\,x),$$
$$F_y = \overline{F}j = F\cos(\overline{F},\hat{}\,y),$$
$$F_z = \overline{F}k = F\cos(\overline{F},\hat{}\,z).$$

где $i, j, к$ — единичные векторы, направленные по осям координат.

Косинусы углов силы с осями координат удовлетворяют условию

$$\cos^2(\overline{F},\hat{}\,x) + \cos^2(\overline{F},\hat{}\,y) + \cos^2(\overline{F},\hat{}\,z) = 1.$$

Из трех углов независимыми будут только два. При проецировании силы на прямоугольные оси координат лучше использовать два угла. Для этого силу нужно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие. При этом одна из них параллельна какой-либо оси координат, например *OZ*, а другая находится в координатной плоскости двух других осей, в нашем случае — координатной плоскости *OXY*. Тогда получается

$$F_x = F\sin\alpha\cos\beta,$$
$$F_y = F\sin\alpha\cos\beta,$$
$$F_z = F\cos\alpha.$$

Условие равновесия системы сходящихся сил: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила равнялась нулю $\overline{R} = 0$.

ЛЕКЦИЯ № 9. Теория пары сил в пространстве

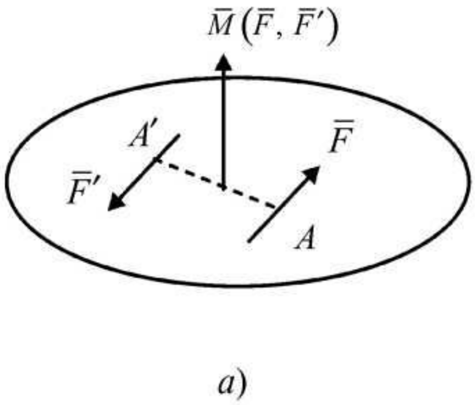
Пусть к твердому телу приложена пара сил ($\bar{F}$, $\bar{F}'$) так, что $\bar{F} = -\bar{F}'$. Такая совокупность двух сил является неупрощаемой (самостоятельным элементом статики). Момент пары сил — это векторная величина, обозначаемая $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$ и определяемая формулой

$$\bar{M}\left(\bar{F},\ \bar{F}'\right) = \overline{A'A} \times \bar{F} = \overline{AA'} \times \bar{F}'.$$

Данный вектор, перпендикулярный плоскости действия пары сил, является свободным, иными словами, он может быть перенесен параллельно сам себе и приложен в любой точке тела (рис. 5а). Этот вектор направлен в ту сторону, откуда вращение, производимое парой сил, происходит против хода часовой стрелки.

Плечо пары сил h — это расстояние между линиями действия сил, т. е.

$$|\bar{M}\left(\bar{F},\ \bar{F}'\right)| = hF.$$



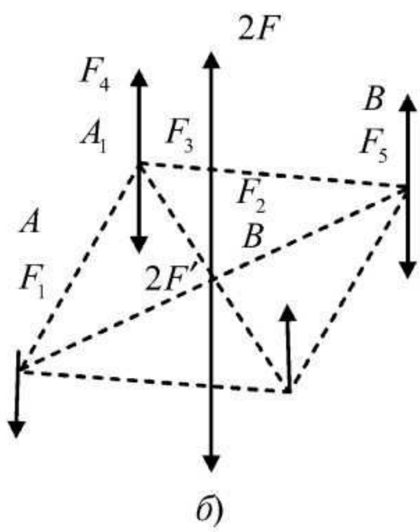


Рис. 5. Совокупность двух сил (а), пара сил (б)

Теорема об эквивалентности пар сил.

1. Пару сил можно переносить, не меняя ее действия на тело, как единое целое в плоскости действия пары сил.

2. Не изменяя действий пары, плоскость действия можно переносить параллельно самой себе.

Доказательство. Пусть дана пара ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$) с плечом AB (рис. 5б). Если перенести плечо AB в положение A_1B_1 и к точкам A_1 и B_1 приложить направленные в противоположные стороны силы $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ и $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$, равные по напряжению силам пары ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$) и параллельные им, то

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \approx (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6).$$

Сложив силы $\overline{F}_2$, и $\overline{F}_4$, получим равнодействующую, равную $2\overline{F}$, которая будет приложена в середине параллелограмма и направлена вверх. Если сложить силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_5$, можно получить их равнодействующую, равную $2\overline{F}'$ и направленную вниз. Тогда $\overline{F}_1$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_4 \approx 0$, поэтому система

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6) \approx (\overline{F}_3, \overline{F}_6)$$

и пара ($\overline{F}_3$, $\overline{F}_6$) эквивалентна паре ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$).

Значит, плоскость пары можно переносить параллельно ей самой, не изменяя при этом оказываемого на тело действия.

Сложение пар в пространстве. Пусть на твердое тело действует система пар сил

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_1'\right), \left(\overline{F}_2, \overline{F}_2'\right) \ldots \left(\overline{F}_n, \overline{F}_n'\right).$$

Момент k-ой пары сил обозначим через

$$\overline{M}\left(\overline{F}_k, \overline{F}_k'\right) \text{ при } k = \overline{1, n}.$$

Данную систему пар сил можно заменить одной парой сил, такой, ($\overline{F}, \overline{F}'$) , тогда момент $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}')$ равен геометрической сумме моментов данных пар сил

$$\overline{M}\left(\overline{F}, \overline{F}'\right) = \sum_{k=1}^{n} M\left(\overline{F}_k, \overline{F}_k'\right)$$

ЛЕКЦИЯ № 10. Главные моменты системы сил

Пусть в точке А твердого тела приложена сила $\overline{F}$. Момент силы $\overline{F}$ относительно некоторого выбранного центра O — это векторная величина $\overline{M}_0(\overline{F})$, определяемая формулой

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F},$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор точки A, причем $\overline{r} = \overline{OA}$. Тогда

$$|\overline{M}_0(\overline{F})| = hF, \ F = |F|$$

где h — кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы, называемое плечом силы.

Вектор

$$\overline{M}_0(\overline{F}) \perp \overline{r}, \overline{F}$$

и направлен в ту сторону, откуда вращение производимой силой осуществляется против часовой стрелки. Сила измеряется в [H], а момент силы — в [$H{\cdot}м$].

Пусть в точке O будет начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат XYZ. Спроектируем векторную формулу на координатные оси, получим:

$$\overline{M}_0\left(\overline{F}\right) = \overline{M}_{0x}\left(\overline{F}\right)\overline{i} + \overline{M}_{0y}\left(\overline{F}\right)\overline{j} + \overline{M}_{0\overline{k}} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

$$\begin{cases} M_{0x}\left(\overline{F}\right) = yF_z - zF_y \\ M_{0y}\left(\overline{F}\right) = zF_x - xF_z, \\ M_{0z}\left(\overline{F}\right) = xF_y - yF_z \end{cases}$$

где x, y, z — координаты точки приложения силы.

Эта формула позволяет найти момент силы относительно центра, если известны координаты точки приложения силы и известны проекции вектора силы, так как

$$\left|\bar{M}_0\left(\bar{F}\right)\right| = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2},$$

а направляющие косинусы этого вектора в этой системе координат определяются формулами:

$$\cos\left(\bar{M}_0^{\wedge}, x\right) = M_{0x}/M_0,$$
$$\cos\left(\bar{M}_0^{\wedge}, y\right) = M_{0y}/M_0,$$
$$\cos\left(\bar{M}_0^{\wedge}, z\right) = M_{0z}/M_0.$$

Момент силы относительно оси. Момент силы $\bar{F}$ относительно некоторой оси, например *OZ*, — это проекция вектора момента силы относительно некоторого центра, взятого на этой оси, на эту же ось, т. е.

$$M_{0я}\left(\bar{F}\right) = \left(\bar{z} \times \bar{F}\right)_z -$$

моменты силы $\bar{F}$ относительно координатных осей *X*, *Y*, *Z*. При решении задач для вычисления момента сил относительно оси часто пользуются следующим правилом. Выбирают на оси Z произвольную точку *O* и проводят через нее плоскость, перпендикулярную оси *Z*. Затем проектируют силу $\bar{F}$ на эту плоскость и проводят перпендикуляр из точки *O* на линию действия $\bar{F}'$. При этом момент силы $\bar{F}$ относительно *Z* будет равен

$$M_{0z} = \pm hF',\ F' = \left|\bar{F}'\right|,$$

где *h* — кратчайшее расстояние от точки *O* до линии действия $\bar{F}'$. Знак «+» берется, если вращение $\bar{F}'$ относительно точки *O* происходит против часовой стрелки, а знак «–» — в противном случае.

Главный момент системы сил. Если на твердое тело действует система сил ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... $\bar{F}_n$), то можно выбрать произвольную точку *O*. Тогда главным моментом системы сил относительно выбранного центра O будет называться вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно выбранного центра:

$$\overline{M}_0 = \sum_{i-1}^{n} \overline{M}_0 \left(F_i \right) = \sum_{i-1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i .$$

Этот вектор обычно изображается приложенным в точке O. Если все силы системы приложены в одной точке, то все $\overline{r}_i = \overline{r}$, тогда

$$\overline{M} \; = \overline{r} + \sum_{i-1}^{n} \overline{F}_i = \overline{z} \times F ,$$

где

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$$

называется главным вектором системы сил.

ЛЕКЦИЯ № 11. Приведение пространственной системы сил к главному вектору и к главному моменту

Лемма о параллельном переносе сил. Пусть к абсолютно твердому телу в точке A приложена сила $\overline{F}_A$. Состояние твердого тела не изменится, если эту силу перенести параллельно самой себе в любую другую точку тела B и приложить к телу пару сил, момент которой равен

$$\overline{BA} \times \overline{F}_A.$$

Иначе говоря,

$$\overline{F}_A \approx \overline{F}_B, \ \left(\overline{F}', \overline{F}_A\right),$$

где

$$\overline{F}' = -\overline{F}_A, \ \overline{F}_B = \overline{F}_A.$$

$$\overline{M}\left(\overline{F}', \overline{F}_A\right) = \overline{BA} \times \overline{F}_A.$$

Доказательство очевидно, так как

$$\overline{F}_B, \left(\overline{F}', \overline{F}_A\right) \approx \overline{F}_B, \ \overline{F}', \ \overline{F}_A,$$

а две силы $\overline{F}_B$ и $\overline{F}'$ взаимно уравновешиваются. Эта лемма используется при упрощении пространственных систем сил.

Приведение пространственной системы сил к главному вектору и к главному моменту. Пусть на абсолютно твердое тело действует произвольная пространственная система сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$). Эта система сил может быть заменена одной силой $\overline{F}$ и парой сил, момент которой $\overline{M}_0$, причем сила $\overline{F}$ — главный вектор пространственной системы сил

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Момент $\overline{M}_0$ — главный момент пространственной системы сил, равный

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k ,$$

т. е. момент равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Доказательство этого утверждения основывается на лемме о параллельном переносе сил. Все силы исходной системы переносят параллельно самим себе в выбранную точку приведения O, тогда получится система исходящих сил. Данная система может быть заменена равнодействующей $\overline{F}$, приложенной в точке O. Чтобы состояние тела не изменилось при выполненном переносе сил, необходимо к телу приложить n пар сил, моменты которых относительно центра O определяются соотношениями:

$$\overline{M}_0 \left(\overline{F}\right)_k = \overline{r}_k \times \overline{F}_k ,\ k = \overline{1,n}.$$

Эта система пар сил может быть заменена одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов указанных пар сил. Главный момент $\overline{M}_0$ этой результирующей пары обычно изображают приложенным в центре O, хотя он является свободным вектором и может переноситься параллельно самому себе в пространстве.

Теорема Вариньона. Для системы сходящихся сил момент равнодействующей силы относительно выбранного центра равен геометрической сумме моментов всех сил системы.

ЛЕКЦИЯ № 12. Инварианты системы сил

Пусть вместо центра приведения O взята другая точка O_1, тогда при приведении к ней исходной системы сил главный вектор, приложенный в точке O_1,

$$\overline{F}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{F},$$

а также главный момент

$$\overline{M}_{01} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k' + \overline{F}_k.$$

Пусть $\overline{r}_k' = \overline{r}_k - \overline{OO_1}$, тогда

$$\overline{M}_{01} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k' + \overline{F}_k - \overline{OO_1} + \sum_{k=1}^{n} F_k = \overline{M}_0 + \overline{O_1O} + \overline{F}.$$

Следовательно, при перемене центра приведения главный вектор системы сил остается неизменным, а главный момент изменяется на величину

$$\overline{O_1O} + \overline{F}.$$

Эта величина равна моменту главного вектора, приложенного в прежнем центре O относительно нового центра O_1.

Инварианты приведения (статические инварианты). При приведении пространственной системы сил к тому или иному выбранному центру имеют место величины, которые не зависят от выбранного центра приведения. Первая величина — первый статический инвариант, он является главным вектором системы сил, так как он не меняется при перемене центра приведения. Другими словами, это векторный статический инвариант. Второй статический инвариант — скалярная величина, равная проекции главного момента на направление главного вектора,

$$\bar{M} = \frac{\bar{F}\bar{M}_0}{F} = \frac{\bar{M}_{01}\bar{F}}{F}.$$

Действительно, из равенства

$$\bar{M}_{01} = \sum_{k-1}^{n} \bar{r}_k' + \bar{F}_k - \overline{OO_1} + \sum_{k-1}^{n} \bar{F}_k = \bar{M}_0 + \overline{O_1O} + \bar{F}$$

после его скалярного умножения на вектор F, будет

$$\bar{M}_{01}\bar{F} = \bar{M}_0\bar{F} + \left(\bar{O}_1\bar{O} + \bar{F}\right)\bar{F},$$

где

$$(\bar{O}_1\bar{O} + \bar{F})\bar{F} = 0$$

как скалярное произведение двух ортогональных векторов.

Уравнение центральной оси. Уравнение прямой, которая называется центральной осью системы, имеет вид

$$\frac{\bar{M}_0 - \overline{OO^*} + \bar{F}}{F} = p.$$

Это равенство выражает уравнение центральной оси в векторной форме, при этом текущей координатой является вектор $\overline{OO^*}$.

Если координаты векторов $\bar{M}_0$, $\bar{F}$, $\overline{OO^*}$ обозначить

$$\bar{M}_0(M_x,\ M_y,\ M_z),\ \bar{F}(F_x,\ F_y,\ F_z),\ \overline{OO^*}(x^*,\ y^*,\ z^*),$$

то в проекции на оси координат уравнение центральной оси примет вид:

$$\frac{M_x - (y^*F_z - z^*F_y)}{F_x} = \frac{M_y - (z^*F_x - x^*F_z)}{F_y} = \frac{M_z - (x^*F_y - y^*F_x)}{F_z} = p.$$

Для всех центров приведения, лежащих на центральной оси, главный момент направлен по главному вектору. Значит, для этих центров главный момент имеет наименьшую числовую величину

$$M^* = \frac{\overline{FM}}{F}.$$

Следовательно, всякая система сил, для которой второй инвариант не равен нулю, приводится к вектору. Этот винт образуют сила F, направленная по центральной оси системы, и пара с моментом $\overline{M}^*$.

Система параллельных сил. Пусть задана система параллельных сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$), направление которых характеризуется единичным вектором $\overline{p}$:

$$\overline{F}_i = F_i \overline{p}.$$

Тогда главный вектор и главный момент равны

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_i = \sum \overline{p} F_i = \overline{p} R,$$

т. е. $\overline{R} = \overline{p} R$, где $R = \sum R_i$.

Главный момент системы относительно любого центра O равен:

$$\overline{M}_0 = \sum \left(\overline{r}_i \overline{F}_i\right) \text{или } \overline{M}_0 = \left(\sum \overline{r}_i F_i\right) \overline{p}.$$

Для системы параллельных сил второй инвариант $\overline{R}\overline{M}$ равен нулю. Значит, система параллельных сил может также приводиться или к равнодействующей, или к паре.

Если $R \neq 0$,то система параллельных сил приводится к одной силе

$$\overline{R}^* = \overline{p} \sum_{i-1}^{n} F_i.$$

Пусть $R = 0$, тогда

$$\overline{M} = \sum \left(\overline{r}_i \times F_i \overline{p}\right) = \left(\sum F_i \overline{r}_i\right) p = \mathrm{const}$$

для всех центров приведения. В этом случае система параллельных сил приводится к паре, момент которой постоянен.

ЛЕКЦИЯ № 13. Условия равновесия пространственных систем сил

Для равновесия пространственных систем сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$), приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) $\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0;$

2) $\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \overline{F}_k = 0,$

которые говорят, что для любого центра приведения главный вектор и главный момент пространственных систем сил должны быть равны нулю.

Если ввести координатные оси с началом в центре приведения и спроектировать предыдущие векторные равенства на эти оси, то получатся скалярные условия равновесия пространственной системы сил:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\ F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\ F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0,$$

$$r_k \overline{F}_k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_k & y_k & z_k \\ F_{kx} & F_{ky} & F_{kz} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k F_{kx} - z_k F_{ky} \right) = 0,$$

$$M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k F_{kz} - x_k F_{kz} \right) = 0,$$

$$M_{oz} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx} \right) = 0.$$

Следовательно, для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на координатные оси были равны нулю и чтобы сумма моментов всех сил системы относительно координатных осей тоже была равна нулю.

Если рассматривать условия равновесия несвободного твердого тела, находящегося под действием сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$), то связи, наложенные на тело, мысленно отбрасываются, а к телу прикладываются реакции связей ($\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, ..., $\overline{R}_l$), после чего условия равновесия записываются для системы сил, объединяющей активные силы и реакции связей:

$$(\overline{R}_1, \overline{R}_2, ..., \overline{R}_l), (\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n).$$

ЛЕКЦИЯ № 14. Сложение параллельных сил в пространстве. Центр тяжести тела

Сложение параллельных сил в пространстве. Пусть дана система параллельных сил ($\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... $\overline{P}_n$), приложенных в точках A_1, A_2, ... A_n и направленных в одну сторону. Сначала найдем точку C_2, через которую проходит равнодействующая $\overline{F}_2$ двух сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$, потом — точку C_3, через которую проходит равнодействующая $\overline{F}_3$сил $\overline{F}_2$и $\overline{P}_3$, и т. д. В результате получится

$$\overline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i \times \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$ — центр параллельных сил.

Величина равнодействующей численно равна сумме величины заданных сил:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Проецируя обе части равенства на оси координат, получим выражение для координат x_0, y_0, z_0 центра параллельных сил:

$$x_0 = \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i p_i},\ y_0 = \frac{\sum_i p_i y_i}{\sum_i p_i},\ z_0 = \frac{\sum_i p_i z_i}{\sum_i p_i},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты приложения силы $\overline{P}_i$.

Если дана система параллельных сил, направленных в разные стороны, то можно разделить силы этой системы на две группы, из которых каждая включает силы, направленные только в одну сторону. Вычисляя равнодействующую каждой группы, приводят данную систему к системе двух антипараллельных сил, а эта система приводится или к равнодействующей, или к паре сил.

Центр тяжести тела. Равнодействующая всех сил тяжести, действующая на частицы тела, численно равна весу тела, а ее линия действия проходит через точку, совпадающую с центром параллельных сил тяжести частиц тела. При изменении тела в пространстве, что соответствует изменению направлений сил относительно тела, эта точка не изменяет своего положения по отношению к телу. Точка, которая является центром параллельных сил тяжести частиц тела, называется центром тяжести данного тела.

Пусть дано некоторое тело; разобьем его на отдельные частицы. Тогда V— объем всего тела, ΔV — объем какой-нибудь частицы, ΔP — вес этой частицы, а ρ — плотность тела. Радиус-вектор или координаты центра масс тела:

$$\overline{r}_0 = \frac{\sum \rho \Delta V \overline{r}}{\sum \rho \Delta V},\ x_0 = \frac{\sum \rho \Delta V_x}{\sum \rho \Delta V},\ y_0 = \frac{\sum \rho \Delta V_y}{\sum \rho \Delta V},\ z_0 = \frac{\sum \rho \Delta V_z}{\sum \rho \Delta V}.$$

Бывает необходимо найти центр тяжести пластинок. Толщина пластинки по сравнению с двумя другими ее измерениями очень мала и всюду одинакова, вследствие этого можем находить центр тяжести не объема, а площади. Радиус-вектор и координаты центра тяжести пластинки, расположенной в плоскости xy, будут определяться формулами:

$$\overline{r}_0 = \frac{\sum \gamma \Delta S \overline{r}}{\sum \gamma \Delta S},\ x_0 = \frac{\sum \gamma \Delta S_x}{\sum \gamma \Delta S},\ y_0 = \frac{\sum \gamma \Delta S y}{\sum \gamma \Delta S},$$

где

$$\gamma = \frac{\Delta P}{\Delta S}.$$

Иногда необходимо найти центр тяжести материальной линии, т. е. тела, у которого площадь поперечного сечения всюду одинакова и очень мала по сравнению с длиной. В этом случае определение центра тяжести тела сводится к определению центра тяжести линии, положение которой равно:

$$\overline{r}_0 = \frac{\sum \gamma'' \Delta l \times \overline{r}}{\sum \gamma'' \Delta l}.$$

ЛЕКЦИЯ № 15. Вспомогательные теоремы для определения положения центра тяжести

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но не пересекающей, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Теорема 2. Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.

Метод группировки. При нахождении центра тяжести тела легче определить центры тяжести отдельных его частей, на которые можно разбить тело. Пусть тело разбили на несколько частей и определили центр тяжести каждой такой части тела, тогда будут иметь место равенства:

$$\overline{r}_1 = \frac{(\sum P_i r_i)_1}{(\sum P_i)_1},\ \overline{r}_2 = \frac{(\sum P_i r_i)_2}{(\sum P_i)_2} \text{ и т. д.}$$

Если сгруппировать слагаемые, то получится:

$$\overline{r}_0 = \frac{P_1 \overline{r}_1 + P_2 \overline{r}_2 + \ldots}{\sum P_i}.$$

Метод отрицательных масс является частным случаем метода разбиения и применяется к телам, имеющим разрывы.

Используя метод разбиения и свойства центров тяжести симметричных однородных тел, можно найти центр тяжести сложных тел, разбивая на такие части, центры которых легче определяются.

Пример. Можно рассматривать отверстие как площадь с отрицательной массой. Фигура имеет ось симметрии, значит, будем определять только одну координату x, взяв начало координат в центре большого круга, тогда получится:

$$x_0 = \frac{\pi R^2 \times O - \pi r^2 \times c}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{r^2 \times c}{R^2 - r^2}.$$

Метод веревочного многоугольника. Пусть задана некоторая сила $\overline{F}$. Возьмем произвольный полюс O, не лежащий на линии действия силы $\overline{F}$, и соединим его с концами силы $\overline{F}$. Тогда можно рассматривать силу $\overline{F}$ как равнодействующую двух сил, приложенных в той же точке, в которой будет приложена сила $\overline{F}$. Возьмем нить ACB так, что AC и CB будут соответственно параллельны заданным силам. Закрепим концы A и B неподвижно, а к точке C приложим ту же силу $\overline{F}$. Тогда эта сила может быть представлена как равнодействующая заданных сил, приложенных к точке C. Первой фигурой будет план заданных сил, а второй — веревочный многоугольник.

ЛЕКЦИЯ № 16. Центр тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел

Пусть имеется дуга $\overline{AB}$ окружности R. Радиус OC будет осью симметрии, значит, центр тяжести будет лежать на оси x. Нужно найти только одну координату центра тяжести x_0.

Для этого разобьем дугу на элементарные длины dl; тогда координата центра тяжести дуги будет:

$$x_0 = \frac{\int_x dl}{l}.$$

Поскольку

$$\int l = Rd\varphi, \text{ а } x = R\cos\varphi \text{ и } l = R\times 2\alpha,$$

тогда:

$$x_0 = \frac{R^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha},$$

где $\left(\frac{R\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$ — координаты центра тяжести дуги .

Центр тяжести площади кругового сектора. Разобьем данный сектор на элементарные секторы, которые можно принять за очень малые равнобедренные треугольники. Их центры тяжести будут находиться на расстоянии $2/3R$ от центра круга. Сосредоточивая массы элементарных секторов в их центрах тяжести, сведем нахождение центра тяжести площади кругового сектора к нахождению центра тяжести дуги окружности радиуса $2/3R$ с центральным углом 2α.

Для дуги радиуса r имеем:

$$x_0 = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

В этом случае $r = 2/3R$, значит, абсцисса центра тяжести площади кругового сектора будет равна:

$$x_0 = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Центр тяжести тетраэдра. Разделим тетраэдр на элементарные пластинки плоскостями, параллельными основанию *ACB*. Центры тяжести этих пластинок будут лежать на прямой *SF*, где *F* — центр тяжести площади основания, который лежит на пересечении медиан, т. е.

$$EF = \frac{1}{3} EC.$$

Теперь проделаем то же самое по отношению к грани *ASB*:

$$EK = \frac{1}{3} ES.$$

Тогда $\Delta KOF \approx \Delta OSC$, значит, из подобия:

$$\frac{FO}{OS} = \frac{KF}{SC}, \text{ но } \frac{KF}{SC} = \frac{EK}{ES} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{3},$$

значит, $FO = \frac{1}{3} OS = \frac{1}{4} SF.$

Окончательно будет:

$$FO = \frac{1}{4} SF, \; SO = \frac{3}{4} SF.$$

Другими словами, центр тяжести объема пирамиды лежит на прямой, соединяющей центр тяжести площади ее основания с вершиной на расстоянии 1/4 длины этой прямой, считая от основания.

ЛЕКЦИЯ № 17. Основные понятия кинематики

Кинематика — это раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения вне связи с силами, определяющими это движение. Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию, которая представляет собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета и называется **траекторией** точки. В зависимости от траектории движения точки бывают прямолинейными и криволинейными. Изучая движение точки, определяют основные характеристики движения: положение точки в выбранной системе отсчета, ее скорость и ускорение в любой момент времени.

Естественный способ движения точки применяется в том случае, когда траектория точки заранее известна. При движении точки M расстояние s от неподвижной точки O меняется с течением времени, иначе выражаясь, дуговая координата s является функцией времени: $s = f(t)$. Если в начальный момент времени t_0 точка занимала положение M_0, а в момент времени t занимает положение M, то пройденный ею путь за промежуток времени $[0, t]$ при движении точки в одном направлении можно записать:

$$\sigma = \left|M_0\,M\right| = \left|OM - OM_0\right| = \left|s - s_0\right|.$$

Изменение дуговой координаты равно $ds = f'(t)dt$.

Приращение пути:

$$d\sigma = \left|d\,s\right| = \left|f'(t)\right|dt.$$

Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени,

$$\sigma_{0t} = \int_0^t \left|f'(t)\right|dt.$$

Векторный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве определяется заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M.

Чтобы определить движение точки, необходимо знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор $\vec{r}$. Другими словами, должна быть задана вектор-функция $\vec{r}$ аргумента t: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Траектория точки — это геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}$ движущейся точки.

Координатный способ задания движения точки. Положение точки M в системе отсчета $Oxyz$ определяется декартовыми координатами точки x, y, z. При движении точки M ее координаты со временем меняются: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Это **уравнения движения точки в декартовых координатах**. Уравнения движения, определяющие координаты точки в любой момент времени, можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Например, уравнения движения точки M имеют вид $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Решив 1-е уравнение, получаем

$$t = \varphi(x),$$

после чего можно вычислить уравнение траектории точки в координатной форме:

$$y = f_2\left[\varphi(x)\right];\ z = f_3\left[\varphi(x)\right].$$

Линии в пространстве соответствуют два уравнения с тремя координатами.

Пусть движение точки M в плоскости задано уравнениями $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; тогда, исключив параметр t, получим уравнение точки в координатной форме:

$$y = f_2\left[\varphi(x)\right].$$

Кроме декартовых координат, для определения положения точки на плоскости и в пространстве используют и другие системы координат (полярные, цилиндрические, сферические и др.).

Способы задания движения точки. Задать движение точки в выбранной системе отсчета означает указать метод или способ, с помощью которого можно однозначно определить положение точки в пространстве в любой момент времени. Различают три способа задания движения точки:

1) векторный;

2) координатный;

3) естественный.

ЛЕКЦИЯ № 18. Скорость точки

Скорость — это векторная величина, которая характеризует быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета.

Векторный способ задания движения. Положение движущейся точки в каждый момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}$, который является функцией времени $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$. Допустим, в момент времени t точка занимает положение M, определяемое радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ — положение M_1, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1$, причем O — центр отсчета. Из треугольника OMM_1 следует:

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1},$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r},\ \vec{v}_{cp} = \Delta\vec{r}/\Delta t.$$

Вектор точки в момент времени t:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t,\quad \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta t = d\vec{r}/dt.$$

Таким образом,

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt,$$

а это значит, что вектор скорости точки в данный момент равен производной от радиус-вектора точки во времени.

Естественный способ задания движения. Пусть известны траектория AB, начало и направление отсчета дуговой координаты, а также уравнение движения точки $s = f(t)$. Дуговые координаты точек M и M_1 имеют следующие значения:

$$s = OM,\ s_1 = OM_1 = OM + MM_1 = s + \Delta s.$$

Приращение дуговой координаты

$$\Delta s = \cup MM_1.$$

Из произвольного центра O' проведем в точку M радиус-вектор $\vec{r}$ и определим скорость в момент времени t:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt.$$

Дуговая координата — s, от нее зависит радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки. Каждому ее значению соответствует определенное значение $\vec{r}$.

Пусть

$$\vec{r} = \vec{r}(s),$$

тогда

$$\vec{v} = (d\vec{r}/ds)(ds/dt).$$

В конкретном случае

$$d\vec{r}/ds = \lim_{\Delta s \to 0} \Delta\vec{r}/\Delta s,$$

тогда вектор $\Delta\vec{r}/\Delta s$ направлен так же, как вектор $\vec{r}$. При $\Delta s \to 0$ его направление стремится к направлению касательной, проведенной из точки M в сторону увеличения дуговой координаты s. Модуль этого вектора стремится к единице:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{M_1 \to M}\frac{MM_1}{\cup MM_1} = 1.$$

Следовательно, вектор $d\vec{r}/ds$ направлен по касательной к кривой в сторону увеличения дуговой координаты.

Вектор dr/ds — от этого направления $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = d\vec{r}/ds.$$

Вектор скорости:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\,ds/dt.$$

Значит,

$$v = \left|\vec{v}\right| = \left|{}^{ds}\!/_{dt}\right| \text{ —}$$

модуль скорости равен абсолютному значению производной от дуговой координаты точки по времени.

Координатный способ определения модуля и направления скорости точки по уравнениям ее движения. Пусть заданы уравнения движения точки: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$.

Так как

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BM}$$

и

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z,$$

то можно найти производную скорости, учитывая, что орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеют неизвестные модули и направления, т. е. постоянны и могут быть вынесены за знак производной:

$$\vec{v} = d\,\vec{r}/dt = \vec{i}\,dx/dt + \vec{j}\,dy/dt + \vec{k}\,dz/dt.$$

Разложение скорости на компоненты по осям координат будет иметь вид:

$$\vec{v} = \vec{i}\,v_x + \vec{j}\,v_y + \vec{k}\,v_z.$$

Отсюда найдем:

$$v_x = dx/dt,\ v_y = dy/dt,\ v_z = dz/dt.$$

Подсчитав проекции скорости на оси декартовых координат, можем определить модуль и направление скорости точки по следующим формулам:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = v_x/v,\ \ \cos(\vec{v}, \vec{j}) = v_y/v,\ \ \cos(\vec{v}, \vec{k}) = v_z/v.$$

Проекции скорости точки на неподвижные оси декартовых координат равны первым производным от соответствующих координат точки по времени. Годограф скорости — это геометрическое место концов векторов скорости движущейся точки, отложенных от одной и той же произвольной точки пространства. Параметрические уравнения годографа скорости:

$$X = v_x = \dot{x},\ Y = v_y = \dot{y},\ Z = v_z = \dot{z}.$$

ЛЕКЦИЯ № 19. Ускорение точки

Ускорение точки характеризует быстроту изменения модуля и направления скорости точки. Пусть в момент времени t точка занимает положение M и имеет скорость $\vec{v}$, а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ она занимает положение M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$, $\vec{v} = \vec{v} + \Delta \vec{v}$. Разделив приращение вектора $\Delta \vec{v}$ на промежуток времени Δt, можем получить вектор среднего ускорения точки за этот промежуток:

$$\vec{a}_{cp} = \Delta \vec{v} \big/ \Delta t,\ \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{v} \big/ \Delta t.$$

Поскольку скорость является векторной функцией от времени,

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \text{ и } \vec{v} = d\vec{r} \big/ dt, \text{ то } \vec{a} = d\vec{v} \big/ dt = d^2 \vec{r} \big/ dt^2.$$

Вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.

Определение модуля и направления ускорения точки по уравнениям ее движения в **декартовых координатах**: $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$. Радиус-вектор $\vec{r}$ движущейся точки M имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{i}\, x + \vec{j}\, y + \vec{k}\, z,$$

тогда

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{i} \cdot d^2 x \big/ dt^2 + \vec{j} \cdot d^2 y \big/ dt^2 + \vec{k}\, d^2 z \big/ dt^2,$$

$$\vec{a} = \vec{i}\, a_x + \vec{j}\, a_y + \vec{k}\, a_z.$$

Отсюда получим

$$a_x = d^2 x \big/ dt^2 = \ddot{x},\ a_y = d^2 y \big/ dt^2 = \ddot{y},\ a_z = d^2 z \big/ dt^2 = \ddot{z}.$$

Проекции ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат равны вторым производным от соответствующих координат точки по времени или первым производным по времени от проекции скорости на соответствующие оси.

Естественные координатные оси. Проведем в точке M кривой AB соприкасающуюся плоскость, нормальную плоскость, перпендикулярную касательной, и спрямляющую плоскость, перпендикулярную соприкасающейся и нормальной плоскостям, образующую с этими плоскостями естественный трехгранник. Естественные координатные оси — это три взаимно перпендикулярные оси: **касательная**, направленная в сторону возрастания дуговой координаты; **главная нормаль**, направленная в сторону вогнутости кривой; **бинормаль**, направленная по отношению к касательной и главной нормали. Вектор средней кривизны кривой на определенном участке равен

$$\vec{K}_{ср} = \Delta \vec{\tau} / \Delta s.$$

Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси:

$$\vec{v} = \vec{\tau}\, ds/dt,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

После преобразований получим:

$$\vec{a} = \vec{n} v^2 / \rho + \vec{\tau}\, d^2 s / dt^2.$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется нормальным ускорением, а другой направлен по касательной и называется касательным ускорением точки. Проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке:

$$a_n = v^2 / R.$$

Проекция ускорения точки на касательную равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени:

$$a_\tau = d^2s/dt^2 = d\,\dot{v}/dt.$$

Проекция ускорения точки на естественные оси:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Нормальное ускорение существует лишь при криволинейном движении точки и характеризует изменение направления скорости:

$$a_n = v^2/R = 0.$$

Касательное ускорение точки существует лишь при неравномерном движении точки и характеризует изменение модуля скорости:

$$a_\tau = \left|dv^2/dt\right| = 0.$$

Модуль ускорения определяется следующей формулой:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

ЛЕКЦИЯ № 20. Классификация движений точки по ускорениям ее движения

Проекция ускорения точки на главную нормаль:

$$a_n = v^2/R, \quad \text{или} \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Проекция ускорения точки на касательную:

$$a_\tau = d^2s/dt^2 = dv/dt,$$

или

$$a_\tau = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}\right|.$$

Определим зависимость характера движений точки от значений ее нормального и касательного ускорений. Ниже представлена следующая классификация.

Случай 1.

$$\vec{a}_n = 0, \ \vec{a}_\tau = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное и касательное ускорения точки равны нулю, то в течение этого промежутка не изменяются ни направление, ни модуль скорости. Это означает, что точка движется равномерно прямолинейно и ее ускорение $\vec{a} = 0$.

Случай 2.

$$\vec{a}_n \neq 0, \ \vec{a}_\tau = 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное ускорение не равно нулю и касательное ускорение равно нулю, то происходит изменение направления скорости без изменения ее модуля. Это означает, что точка движется равномерно криволинейно и модуль ее ускорения

$$a = a_n = v^2/R.$$

Если

$$a_\tau = |dv/dt| = 0$$

в определенный момент времени, то точка не движется равномерно, а в этот момент времени модуль ее скорости имеет максимум, минимум или наименьшую быстроту монотонного изменения.

Случай 3.

$$\vec{a}_n = 0, \ \vec{a}_\tau \neq 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени нормальное ускорение точки равно нулю и касательное ускорение не равно нулю, то не изменяется направление скорости, а изменяется ее модуль, т. е. точка движется по прямой неравномерно. В этом случае модуль ускорения точки

$$a = a_\tau = \left|d^2s/dt^2\right|,$$

при этом, если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_x$ совпадают, то движение точки ускоренное. Если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a} = \vec{a}_x$ противоположны, то движение точки замедленное. Если

$$a_n = v^2/R = 0$$

в некоторый момент времени, то точка не движется прямолинейно, а проходит точку перегиба траектории $R = \infty$ или модуль ее скорости обращается в нуль. Например, это может наблюдаться при изменении направления движения точки $v = 0$.

Случай 4.

$$\vec{a}_n \neq 0, \ \vec{a}_\tau \neq 0.$$

Если в течение некоторого промежутка времени ни нормальное, ни касательное ускорение точки не равны нулю, то изменяются как направление, так и модуль ее скорости. Это означает, что точка совершает неравномерно криволинейное движение. Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

При этом, если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}_x$ совпадают, то движение **ускоренное**, а если они противоположны, то движение **замедленное**. Если модуль касательного ускорения постоянен $a_x = \mathrm{const}$, то модуль скорости точки изменяется пропорционально времени, т. е. точка совершает **равнопеременное движение**.

В начальный момент времени $t_0 = 0$ начальная скорость точки равна $\vec{v}_0$, а начальное значение дуговой координаты $OM_0 = s_0$, тогда

$$dv/dt = a_\tau = \mathrm{const}, \quad dv = a_\tau dt.$$

Проинтегрируем уравнение в пределах, соответствующих точкам M и M_0:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_\tau \int_0^t dt,$$

$$v - v_0 = a_\tau t, \quad v = v_0 + a_\tau t.$$

Это выражение — формула скорости равнопеременного движения точки. Тогда получится

$$ds/dt = v = v_0 + a_\tau t, \quad ds = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

После интегрирования уравнения в пределах, соответствующих точкам M_0 и M, получим:

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_0^t dt + a_\tau \int_0^t dt,$$

$$s - s_0 = v_0 t + a_\tau t^2/2, \quad s = s_0 + v_0 t + a_\tau t^2/2.$$

Последнее выражение — это уравнение равнопеременного движения точки. Если $v_0 > 0$, то при ускоренном движении $a_x > 0$, а при замедленном движении $a_x < 0$.

ЛЕКЦИЯ № 21. Движение, путь, скорость и касательное ускорение точки

При движении точки по заданной траектории ее дуговая координата $s = OM$, пройденный ею путь σ, а также скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ изменяются со временем, другими словами, они являются функциями времени. Наглядное представление о характере движения точки дают графики зависимости этих величин от времени. График движения точки — это график зависимости ее дуговой координаты s от времени t. График пути можно построить по графику движения. Путь, пройденный точкой за некоторый промежуток времени, — это сумма абсолютных значений элементарных перемещений точки за данный промежуток времени. Линия этого графика поднимается вверх независимо от направления движения точки и только при остановках точки превращается в прямую, которая параллельна оси времени t. На графике пути расстояния, пройденные точкой в промежуток времени $[t_1, t_2]$, суммируются с путем $\sigma_1 = s_1$, пройденным к моменту времени t_1. Путь, пройденный точкой к моменту времени t_2: $\sigma_2 = 2s_1$. Графики движения и пути изображаются одной и той же линией только при условии движения точки из начала отсчета в положительном направлении, т. е. в промежутке времени $[0, t_1]$. Алгебраическая величина средней скорости движущейся точки за промежуток времени $[t_1, t_2]$ — это отношение приращения дуговой координаты к промежутку времени:

$$v_{cp} = (s_2 - s_1)/(t_2 - t_1),$$
$$(s_2 - s_1)/(t_2 - t_1) = \operatorname{tg}\alpha_1.$$

Следовательно,

$$v_{cp} = \operatorname{tg}\alpha_1,$$

т. е. средняя скорость точки за этот промежуток времени равна тангенсу угла наклона секущей графика движения к оси времени t. Алгебраическая величина скорости точки в некоторый момент времени t:

$$v = ds/dt = \mathrm{tg}\alpha.$$

Следовательно, для определения скорости точки в любой момент времени следует провести касательную к графику движения в соответствующей точке A и определить угол α наклона этой касательной к оси t. Тангенс угла α равен алгебраической величине скорости точки в этот момент времени. График скорости показывает зависимость алгебраического значения скорости точки v от времени t. По графику скорости определяется алгебраическая величина касательного ускорения точки:

$$a_\tau = dv/dt = \mathrm{tg}\beta.$$

Для определения касательного ускорения точки проводят касательную к графику скорости в соответствующей точке B и находят угол β наклона этой касательной к оси t. Тангенс угла β обуславливает алгебраическое значение касательного ускорения точки в этот момент. График касательного ускорения изображает зависимость алгебраической величины касательного ускорения величины касательного ускорения a_x от времени. Если движение точки неравномерно криволинейное, то для построения графиков нормального и полного ускорений точки числовые значения a_n и a для различных моментов времени определяют с помощью расчета по соответствующим формулам, пользуясь значениями v и a_x, определенными по соответствующим графикам. Кроме того, значения радиуса кривизны R определяются по заданной траектории точки.

ЛЕКЦИЯ № 22. Простейшие движения твердого тела

Существует 5 видов движения твердого тела:

1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоское или плоскопараллельное;
4) сферическое;
5) общий случай движения твердого тела.

Простейшими движениями твердого тела являются поступательное и вращательное движения. **Поступательное** — это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения тела параллельной своему начальному положению.

Теорема. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A.$$

Общие для всех точек твердого тела, движущегося поступательно, скорость $\vec{v}$ и ускорение $\bar{a}$ называются **скоростью** и **ускорением поступательного движения твердого тела**.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными. Эта прямая называется **осью вращения тела**. Определим положение вращающегося тела следующим образом: зададимся направлением оси вращения z, проведем через эту ось две полуплоскости: неподвижную полуплоскость P и подвижную полуплоскость Q, связанную с твердым телом и вращающуюся вместе с ним. Двугранный угол φ между этими полуплоскостями, отсчитываемый от неподвижной полуплоскости P к подвижной полуплоскости Q, называется **углом поворота тела**. При вращении тела угол поворота φ изменяется в зависимости от времени: $\varphi = f(t)$ — уравнение вращательного движения тела.

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, называется **угловой скоростью тела**:

$$\varpi_{cp} = \Delta\varphi / \Delta t,$$

$$\varpi = \lim_{\Delta t \to 0} \varpi_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi / \Delta t = d\varpi / dt.$$

Числовая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, называется **угловым ускорением тела**:

$$\varepsilon_{cp} = \Delta\varpi / \Delta t,$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varpi / \Delta t = d\varpi / dt = \varpi.$$

Пусть дана окружность, представляющая собой траекторию произвольной точки M тела. При этом R — расстояние точки от оси вращения, равное радиусу этой окружности. Если OC — радиус, лежащий в неподвижной полуплоскости P, а NC — радиус, лежащий в подвижной полуплоскости Q и вращающийся вместе с ней, то

$$\angle OCN = \varphi = f(t).$$

Угол $NCM = \alpha$ при вращении его сторон NC и MC вместе с телом не изменяется, т. е. $\alpha = \text{const}$. Положение точки M можно определить дуговой координатой s, отсчитанной от неподвижной точки O в направлении отсчета угла поворота φ. Тогда

$$s = \cup\, OM = R(\varphi + \alpha),$$

где углы φ и α выражены в радианах. Модуль скорости точки M:

$$v = |ds/dt| = R|d\varphi/dt| = R\varpi.$$

Модуль вращательной скорости точки твердого тела равен произведению расстояния от точки до оси вращения на угловую скорость тела. Значит, модули вращательных скоростей различных точек вращающегося тела пропорциональны расстояниям от этих точек до оси вращения.

ЛЕКЦИЯ № 23. Векторные выражения вращательной скорости, вращательного и центростремительного ускорений

Отложим вектор угловой скорости тела ϖ от любой точки оси вращения, направляя его по оси так, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть вращение часовой стрелки. Модуль данного вектора равен абсолютному значению угловой скорости:

$$\varpi = \left| d\varphi / dt \right|.$$

Здесь мы применяем правую систему осей координат, которой соответствует положительное направление вращения в сторону, обратную вращению часовой стрелки. При использовании левой системы вектор ϖ следует направить так, чтобы, смотря ему навстречу, видеть вращение тела происходящим в сторону вращения часовой стрелки. **Псевдовекторы** — это векторы, направления которых не зависят от принятой в каждом конкретном случае системы координат. При сложении псевдовекторов действительны правила параллелограмма и многоугольника. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ характеризует изменение вектора угловой скорости ϖ в зависимости от времени, иначе говоря, он равен производной от вектора угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\varpi} / dt.$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора ϖ при ускоренном вращении и противоположно ему при замедленном. Вращательное ускорение точки твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки относительно любой точки оси вращения:

$$\vec{a}_{\varepsilon} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Центростремительное ускорение точки твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, равно векторному произвелению вектора угловой скорости тела на вращательную скорость этой точки:

$$\vec{a}_\varpi = \vec{\varpi} \times \vec{v}.$$

Передаточные механизмы служат для передачи вращения от одного вала, который называется **ведущим**, к другому, называемому **ведомым**. Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать с помощью фрикционной или зубчатой передачи. Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы сцепления на поверхности соприкасающихся колес, в зубчатой передаче — от зацепления зубьев. Вращательная скорость $\vec{v}$ в точке соприкасания колес относится к точкам обоих колес:

$$v = r_1\varpi_1 = r_2\varpi_2.$$

Тогда

$$\varpi_1/\varpi_2 = r_2/r_1,$$

т. е. угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес. Отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого колеса называется **передаточным числом**: $i = \varpi_1/\varpi_2$.

Применяются также серии колес с неподвижными осями вращения в виде последовательного ряда с паразитными колесами и последовательного ряда с кратным зацеплением, называемые **рядовыми соединениями колес**. Передаточное число рядового соединения с паразитными колесами равно отношению радиусов (чисел зубьев) ведомого и ведущего колес и не зависит от радиусов (чисел зубьев) паразитных колес: $i = z_3/z_1$.

Общее передаточное число рядового соединения колес с кратным зацеплением равно произведению чисел зубьев ведомых колес, деленному на произведение чисел зубьев ведущих колес: $i = z_2z_4/(z_1z_3)$.

ЛЕКЦИЯ № 24. Плоское движение твердого тела

Плоское или **плоскопараллельное движение твердого тела** — это такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Плоская фигура, которая образована сечением тела этой неподвижной плоскостью, все время движения остается в этой плоскости.

Пусть дана система точек тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости Q, точка C_1 движется в плоскости Q_1, а точка C_2 — в плоскости Q_2. Обе эти плоскости параллельны неподвижной плоскости Q. При движении тела отрезок C_1C_2 остается перпендикулярным плоскости Q, т. е. остается параллельным своему начальному положению, следовательно, траектории A_1B_1, A_2B_2, AB точек тела C_1, C_2, C тождественны и параллельны, а их скорости и ускорения равны: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$. Значит, движение каждой точки плоской фигуры в неподвижной плоскости Q определяет движение всех точек твердого тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости Q, восстановленном в этой точке. Изучение плоского движения твердого тела можно свести к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости. Движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости. Движение плоской фигуры в ее плоскости, а значит, и движение всего тела, определяют **уравнениями плоского движения твердого тела**:

$$x_0 = f_1(t),\ y_0 = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры устанавливается по следующей теореме: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Пусть точка O — полюс, а скорость в этой точке равна $\vec{v}_0$. Для нахождения скорости любой точки плоской фигуры, к примеру точки A, нужно провести из неподвижной плоскости O_1 в точки O и A радиус-векторы $\vec{R}_0$ и $\vec{R}_A$. Кроме того, проведем радиус-вектор $\vec{r}_{0A}$ из полюса *O* в точку *A*. За все время движения между радиус-векторами сохраняется следующая зависимость:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_0 + \vec{r}_{0A},$$

где модуль $\vec{r}_{0A} = \text{const}$. Тогда скорость точки *A*:

$$\vec{v} = d\vec{R}_A / dt = \vec{v}_0 \text{ —}$$

скорость полюса *O*. При движении плоской фигуры модуль радиус-вектора $\vec{r}_{0A}$ остается неизменным, а направление его при повороте фигуры изменяется. Следовательно:

$$d\vec{r}_{0A} / dt = \vec{v}_{0A},\; v_{0A} = OA \times \varpi.$$

После подстановки получим

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \varpi \times \vec{r}_{0A}.$$

Следствие 1. Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, алгебраически равны.

Следствие 2. Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.

ЛЕКЦИЯ № 25. План скоростей. Мгновенный центр скоростей

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры дает возможность определять скорости точек этой фигуры наглядным построением — **планом скоростей**. Пусть известны скорости точек *A*, *B*, *C* и *D* плоской фигуры. Откладываем из произвольной точки *O* по направлению скоростей точек *A*, *B*, *C* и *D* отрезки *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od*, равные скоростям этих точек. Затем соединим точки *a*, *b*, *c* и *d* отрезками прямых. Такое построение называется планом скоростей. Отрезки $\vec{O}a$, $\vec{O}b$, $\vec{O}c$, $\vec{O}d$, — лучи, а точки *a*, *b*, *c*, *d* — вершины плана скоростей. В треугольнике *aOb*:

$$\vec{O}b = \vec{O}a + a\vec{b},\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB},$$

тогда

$$\vec{ab} = \vec{v}_{AB}.$$

Подобным образом составляем

$$\vec{bc} = \vec{v}_{BC},\ \vec{cd} = \vec{v}_{CD}.$$

Каждый из отрезков, соединяющих вершины плана скоростей, геометрически равен вращательной скорости соответствующей точки фигуры вокруг другой точки как вокруг полюса, следовательно, $ab = AB \cdot \varpi$ и $ab \perp AB$, $bc = BC$ и $bc \perp BC$, $cd = CD$ и $cd \perp CD$. Таким образом, многоугольник *abcd* подобен многоугольнику *ABCD* и повернут относительно последнего на 90° в сторону вращения движущейся плоской фигуры. Докажем, что в каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент времени равна нулю. Данная точка называется **мгновенным центром скоростей**. Пусть известны скорость некоторой точки *O* плоской фигуры $\vec{v}_0$ и угловая скорость фигуры ϖ в некоторый момент времени. Точка *O* является полюсом, тогда скорость любой точки фигуры равна геометрической сумме скорости полюса $\vec{v}_0$ и вращательной скорости вокруг этого полюса. Проведем в точке O перпендикуляр к направлению скорости $\vec{v}_0$ так, чтобы направление поворота скорости $\vec{v}_0$ к этому перпендикуляру совпадало с направлением вращения фигуры. Затем найдем конкретную точку P, вращательная скорость которой равна по модулю скорости полюса $\vec{v}_0$ или $\vec{v}_{0P} = \vec{v}_0$. Направления данных скоростей противоположны, т. е. $\vec{v}_{0P} = -\vec{v}_0$. Скорость точки P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{v}_{0P} = 0.$$

Следовательно, точка P в рассматриваемый момент времени является мгновенным центром скоростей. Для определения положения точки P нужно вычислить вращательную скорость точки P вокруг полюса O и приравнять ее к скорости полюса:

$$v_{0P} = OP \cdot \varpi = v_0,\ OP = v_0 / \varpi.$$

Таким образом, мгновенный центр скоростей плоской фигуры находится на перпендикуляре к направлению скорости полюса на расстоянии от полюса $\vec{v}_0 / \varpi$. Скорость любой плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, который равен произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направлена перпендикулярно этому отрезку в сторону вращения фигуры:

$$v_A = PA \cdot \varpi,\ \vec{v}_A \perp PA;$$

$$v_B = PB \cdot \varpi,\ \vec{v}_B \perp PB;$$

$$v_K = PK \cdot \varpi,\ \vec{v}_K \perp PK.$$

Модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей. Для определения скорости точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей нужно знать положение мгновенного центра скоростей и угловую скорость фигуры.

ЛЕКЦИЯ № 26. Уравнения неподвижной и подвижной центроиды

Мгновенный центр скоростей характеризует распределение скоростей точек плоской фигуры в определенный момент времени.

Теорема Шаля: плоскую фигуру можно переместить из одного положения в любое другое положение на плоскости одним поворотом некоторого неподвижного центра.

Пусть дан отрезок, который соединяет точки A и B плоской фигуры. Он занимает на плоскости в два различных момента времени положения AB и A_1B_1. Соединим A и A_1, B и B_1 и разделим пополам. Из середин этих отрезков D и E проведем перпендикуляры к отрезкам и продолжим их до пересечения в некоторой точке C. Докажем, что данная точка неподвижной плоскости есть центр поворота для данного конечного перемещения плоской фигуры. Если соединить точку C с концами отрезков AB и A_1B_1, получатся треугольники ACB и A_1CB_1. Тогда эти треугольники равны согласно равенству трех их сторон: $A_1B_1 = AB$, $A_1C = AC$, $B_1C = BC$. Поскольку треугольники равны, получим

$$\angle ACB = \angle A_1CB_1 \text{ или } \angle ACA_1 = \angle BCB_1 = \varphi,$$

где φ — абсолютная величина рассматриваемого угла.

Перемещения двух точек фигуры, а значит, и всей плоской фигуры из первого положения во второе можно сделать, поворачивая C на угол φ вокруг центра.

В случае поступательного движения плоской фигуры перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 параллельны, и центр поворота находится в бесконечности. Каждым двум положениям плоской фигуры на плоскости соответствует собственный центр поворота. Предельным положением центра поворота при стремлении времени перемещения плоской фигуры Δt к нулю является точка неподвижной плоскости, с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр скоростей плоской фигуры. Модуль скорости v точки A:

$$v = C^* A \cdot \varpi,$$

где точка C^* — мгновенный центр вращения фигуры.

На неподвижной плоскости имеются положения A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...отрезка AB, который определяет положение плоской фигуры в моменты времени t, $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ... Предельные положения центров поворота C_1, C_2, C_3, ... — это мгновенные центры вращения плоской фигуры, поэтому в пределе ломаная линия $C_1C_2C_3C_4$... преобразуется в кривую, которая представляет собой геометрическое место мгновенных центров вращения на неподвижной плоскости и называется **неподвижной центроидой**. Линия $C_1'C_2'C_3'C_4'$ обращается в кривую, которая является геометрическим местом точек мгновенных центров скоростей на движущейся фигуре. Данная кривая неизменно связана с плоской фигурой (с отрезком AB) и движется вместе с ней. Она называется **подвижной центроидой**.

Теорема Пуансо о качении подвижной центроиды по неподвижной: при действительном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде.

Уравнения неподвижной центроиды в параметрической форме в неподвижной системе координат имеют вид:

$$\xi_P = \xi_0 - \frac{1}{\varpi}\frac{d\eta_0}{dt},$$
$$\eta_P = \eta_0 + \frac{1}{\varpi}\frac{d\xi_0}{dt}.$$

Уравнения подвижной центроиды в параметрической форме в подвижной системе осей имеют вид:

$$x_P = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{d\xi_0}{dt}\sin\varphi - \frac{d\eta_0}{dt}\cos\varphi\right),$$
$$y_P = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{d\xi_0}{dt}\cos\varphi + \frac{d\eta_0}{dt}\sin\varphi\right).$$

ЛЕКЦИЯ № 27. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия. Положение мгновенного центра ускорений

Ускорение точек плоской фигуры определяется следующей **теоремой**: ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения этой точки в ее вращении вместе с плоской фигурой вокруг полюса.

Следствие 1. Проекция ускорения любой точки плоской фигуры на ось, проведенную из произвольного полюса через эту точку, не может быть больше проекции ускорения полюса на эту же ось.

Следствие 2. Концы ускорений точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между этими точками.

В каждый момент времени существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю. В определенный момент времени ускорение некоторой точки O плоской фигуры равно $\vec{a}_0$, фигура вращается ускоренно в направлении, противоположном направлению вращения часовой стрелки, а модули угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры равны ϖ и ε. Угол $\alpha = \operatorname{arctg} \varepsilon / \varpi^2$, причем ε — модуль вектора ε. Если $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon / \varpi^2 > 0$, то соответствующий этому тангенсу угол находится в пределах от 0 до 90°. Затем нужно отложить угол α от ускорения $\vec{a}_0$ по направлению углового коэффициента ε. В данном случае это нужно сделать в сторону, обратную вращению часовой стрелки, значит, отложим отрезок на проведенной полупрямой:

$$OQ = a_0 \Big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4}.$$

Если точка O — полюс, то ускорение построенной точки Q:

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_O + \vec{a}_{OQ}.$$

Ускорение точки Q во вращательном движении вокруг полюса O состоит из центростремительного ускорения и вращательного.

Причем вращательное направлено по отношению к полюсу в сторону, соответствующую направлению углового ускорения $\vec{\varepsilon}$:

$$a_{OQ} = \sqrt{\left(a_{OQ}^{\varepsilon}\right)^2 + \left(a_{OQ}^{\varpi}\right)^2} = OQ\sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} = a_O\sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \varpi^4} = a_O.$$

Ускорение $\bar{a}_{0Q}$ образует с отрезком угол β, причем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_{OQ}^{\varepsilon}}{a_{OQ}^{\varpi}} = OQ\frac{\varepsilon a^2}{OQ} = \frac{\varepsilon}{\varpi^2} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Углы α и β лежат в пределах от 0 до 90°, а значит, $\beta = \alpha$. Таким образом, ускорения $\bar{a}_{0Q}$ и $\bar{a}_0$ равны по абсолютной величине, но противоположны по направлению: $\vec{a}_{0Q} = -\vec{a}_0$, $\vec{a}_Q = 0$. Точка Q, ускорение которой в определенный момент времени равно нулю, называется **мгновенным центром ускорений**. При этом модули ускорений точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра ускорений, а векторы ускорений составляют с отрезками, соединяющими данные точки с мгновенным центром ускорений, один и тот же угол:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \beta / \varpi^2.$$

Мгновенный центр скоростей P и мгновенный центр ускорений Q являются различными точками плоской фигуры.

Существует несколько способов определения положения мгновенного центра ускорений.

1. Известна точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

2. Известны модель и направление ускорения какой-либо точки А плоской фигуры $\vec{a}$А, а также угловая скорость $\vec{\varpi}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ фигуры.

3. Известны модули и направления ускорений двух точек плоской фигуры.

ЛЕКЦИЯ № 28. Определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма

Для определения ускорений точек и угловых ускорений звеньев плоского механизма целесообразно применять теорему об ускорениях точек плоской фигуры и ее следствия.

Пусть нужно найти ускорение ползунка *B* кривошипно-шатунного механизма и угловое ускорение шатуна *AB* этого механизма, если известно, что кривошип *OA* вращается равномерно с угловой скоростью ω в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки.

Чтобы решить эту задачу, следует использовать следующие данные:

1) модуль и направление ускорения w_A пальца кривошипа *A* $w_A = w_A{}^ц = OA \cdot \omega^2$;

2) прямую, по которой направлено ускорение ползунка *B*, движущегося прямолинейно;

3) угловую скорость w_{AB} шатуна *AB*, которую легко определить по плану скоростей или применением мгновенного центра скоростей.

Зная скорость пальца *A* кривошипа v_A, модуль которой равен $v_A = OA \cdot \omega$, можно определить скорость v_B ползунка *B* по плану скоростей или при помощи мгновенного центра скоростей. Затем вычисляют модуль угловой скорости шатуна *AB*:

$$w_{AB} = ab \;/\; AB$$

или

$$w_{AB} = v_A/(P_{AB}A) = OA \cdot \omega \;/(P_{AB}A).$$

Приняв точку *A* шатуна за полюс, можно вычислить ускорение точки *B* по формуле:

$$w_B = w_A + w_{AB}{}^ц + w_{AB}{}^B.$$

Центростремительное ускорение точки B в ее вращательном движении вокруг полюса A, направлено по оси шатуна от точки B к точке A, а его модуль равен:

$$w_{AB}^{ц} = OA \cdot \omega^2_{AB}$$

или

$$w_{AB}^{ц} = AB(ab / AB)^2 = (ab)^2 / AB.$$

Отложив в точке B (в соответствующем масштабе) ускорение полюса w_A и приложив к его концу центростремительное ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A, направленное параллельно BA от B к A, проводят из конца $w_{AB}^{ц}$ прямую, перпендикулярную BA, т. е. прямую, параллельную вращательному ускорению w_{AB}^{B}.

Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлено ускорение ползунка B, определит недостающую вершину многоугольника ускорений, благодаря чему можно будет найти графически модули ускорений w_B и w_{AB}^{B}.

Так как $w_{AB}^{B} = AB \times \varepsilon_{AB}$, то, определив w_{AB}^{B}, найдем модуль углового ускорения звена AB по формуле:

$$\varepsilon_{AB} = w_{AB}^{B} / AB.$$

Отложив найденное ускорение w_{AB}^{B} из точки B, можно установить, что его направление по отношению к полюсу A укажет направление углового ускорения шатуна ε_{AB}. Если направления ε_{AB} и w_{AB} противоположны, то шатун в данный момент вращается замедленно. Зная ускорения концов шатуна AB, можно определить графически ускорение любой точки шатуна.

Когда кривошип и шатун находятся на одной прямой, то мгновенный центр скоростей шатуна P_{AB} совпадает с точкой B, план скоростей шатуна AB получает вид отрезка прямой, поскольку направления ускорений w_A и $w_{AB}^{ц}$ совпадают. При этом

$$w_{AB}^{B} = 0,$$
$$\varepsilon_{AB} = 0,$$
$$w_B = w_A + w_{AB}^{ц}.$$

ЛЕКЦИЯ № 29. Сферическое движение твердого тела

При движении твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. Такое движение называют **сферическим движением твердого тела**. Примером является движение волчка.

Воспользуемся двумя системами осей координат: неподвижной системой $OXYZ$ с началом в неподвижной точке O и подвижной системой $O\xi\eta\zeta$, неизменно связанной с твердым телом, с началом в той же неподвижной точке O; здесь OJ — линия пересечения неподвижной плоскости XOY и подвижной плоскости $\xi O\eta$, называемая линией узлов. Пусть

$$\angle(\mathrm{x,J}) = \psi,\ \angle(\mathrm{z}, \zeta) = \theta,\ \angle(\mathrm{J},\ \xi) = \varphi.$$

Углы φ, ψ, θ будут положительными, если при наблюдении навстречу осям z, J, ζ, перпендикулярным плоскостям этих углов, можно видеть эти углы, отложенные от осей x, z, J в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Углы φ, θ, ψ называют **эйлеровыми углами**: ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения.

При движении твердого тела углы меняются во времени, иначе говоря, они являются функциями от времени:

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

Их называются уравнениями сферического движения твердого тела.

Теорема Эйлера-Даламбера. Твердое тело, которое имеет одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в любое другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.

Проведем сферическую поверхность с центром в неподвижной точке O и отметим положения двух точек тела A_1 и B_1 на этой поверхности, которые после перемещения тела займут положения A_2 и B_2 на той же поверхности.

Затем проведем через эти точки дуги больших кругов A_1B_1 и A_2B_2, тогда положение тела в некоторый момент t_1 определится точками A_1 и B_1, т. е. дугой A_1B_1, а его положение в момент t_2 — той же дугой в новом положении A_2B_2. После этого проведем дуги больших кругов A_1A_2 и B_1B_2. Разделим эти дуги точками D и E пополам и проведем из этих точек дуги больших кругов, перпендикулярные дугам A_1A_2 и B_1B_2, продолжив их до пересечения в точке C. Затем соединим точку C поверхности с ее центром O и покажем, что тело можно переместить из первого положения во второе поворотом вокруг этой прямой. Соединим точку C с точками A_1, B_1, A_2, B_2 дугами больших кругов A_1C, B_1C, A_2C, B_2C. Получившиеся сферические треугольники A_1CA_2 и B_1CB_2 равны по равенству трех сторон $A_1C = A_2C$ и $B_1C = B_2C$, как стороны равнобедренных сферических треугольников A_1CA_2 и B_1CB_2, а $A_1B_1 = A_2B_2$, как два положения одной и той же дуги. Из равенства треугольников вытекает $\angle A_2CB_2 = \angle A_1CB_1$. При этом угол сферического треугольника определяется углом между касательными, проведенными в вершине угла к дугам, образующим этот угол. Прибавляя к обеим частям равенства $\angle A_1CB_2$, получим $\angle A_1CA_2 = \angle B_1CB_2 = \alpha$. Это означает, что сферический отрезок A_1B_1 можно переместить в положение A_2B_2 поворотом вокруг неподвижной оси OC, т. е. перемещение тела из первого положения во второе можно осуществить одним поворотом вокруг этой оси.

ЛЕКЦИЯ № 30. Ускорения точек твердого тела при сферическом движении

Процесс сферического движения тела представляет собой непрерывный ряд вращений тела вокруг перемещающейся мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку *O*. Эта ось, перемещаясь в неподвижном пространстве, описывает коническую поверхность с вершиной в точке *O*. Коническая поверхность в виде геометрического места мгновенных осей в неподвижном пространстве называется **неподвижным аксоидом**. Коническая поверхность в виде геометрического места мгновенных осей в движущемся теле называется **подвижным аксоидом**. Подвижный и неподвижный аксоиды касаются друг друга по прямой, являющейся мгновенной осью вращения тела. При сферическом движении тела подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному аксоиду.

Для определения ускорения какой-либо точки при сферическом движении используется формула $v = \omega \times r$. Тогда

$$w = dv / dt = d\omega / dt \times r + \omega\, dr / dt,$$

однако

$$d\omega / dt = \varepsilon, \text{ а } dr / dt = v = \omega \times r.$$

Подставляя эти значения, получим:

$$w = \varepsilon \times r + \omega \times v \text{ или } w = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r),$$

где $\varepsilon \times r = w_E^{B}$ — вращательное ускорение точки;

$\omega \times v = \omega_{\Omega}^{oc}$ — центростремительное ускорение точ ки.

Следовательно,

$$w = w_E^{B} + w_{\Omega}^{oc}.$$

Это равенство обусловливает теорему Ривальса об ускорении точки тела, совершающего сферическое движение: ускорение любой точки твердого тела при сферическом движении определяется как геометрическая сумма ее вращательного и осестремительного ускорений. Вектор $w_E^B = \varepsilon \times r$ имеет направление, перпендикулярное плоскости, проходящей через вектор углового ускорения ε. Радиус-вектор точки r направлен в ту сторону, откуда поворот вектора ε к вектору r на наименьший угол виден происходящим против движения часовой стрелки.

Модуль вращательного ускорения:

$$W_E^B = \varepsilon r \sin(\varepsilon,\ r) = h_E \varepsilon,$$

где $h_E = MK_1$ — расстояние от точки M до оси углового ускорения E.

Вектор центростремительного ускорения

$$\omega_\Omega^{\infty} = \omega \times v$$

имеет направление, перпендикулярное векторам угловой скорости ω и линейной скорости точки v. Иначе говоря, он направлен по перпендикуляру, опущенному из точки M на мгновенную ось Ω в ту сторону, откуда поворот вектора ω, условно отложенного в точке M к вектору v на наименьший угол, виден проходящим против движения часовой стрелки.

Модуль осестремительного ускорения:

$$\omega_\Omega^{oc} = wv\sin(w,\ v) = wv = h_\Omega \varepsilon,$$

где $h_\Omega = MK_2$ — расстояние от точки M до мгновенной оси Ω.

Модуль ускорения точки как диагонали параллелограмма ускорений можно определить по формуле:

$$\mathrm{w} = \sqrt{(w_E^B)^2 + (w_\Omega^{\infty})^2 + 2w_E^B w_\Omega^{\infty} \cos(w_E^B, w_\Omega^{\infty})}$$

или

$$\sqrt{\varepsilon^2 h_E^2 + h_\Omega^2 \omega^4 + 2h_E h_\Omega \varepsilon \omega^2 \cos(w_E^B, w_\Omega^{\infty})}.$$

Из этого выражения можно получить формулу ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$w = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

где $R = h_E = h_\Omega$.

Вращательное и осестремительное ускорения точек w_E^{B} и w_Ω^{∞} при сферическом движении не следует путать с ее касательным и нормальным ускорениями w_τ и w_n.

ЛЕКЦИЯ № 31. Теорема о скоростях точек свободного твердого тела и ее следствия. Теорема об ускорениях точек свободного твердого тела

Рассмотрим случай движения свободного твердого тела, которое имеет 6 степеней свободы. Положение тела относительно какой-либо системы координат полностью определяется заданием 3-х точек, не лежащих на одной прямой, или заданием треугольника, скрепленного с телом. При этом треугольник можно переместить поступательным перемещением вместе с какой-либо точкой и поворотом относительно оси, которая проходит через эту точку. Любое движение свободного тела можно заменить совокупностью поступательных движений вместе с какой-либо точкой тела и вращений вокруг этой точки, совершаемых за то же время, что и истинное движение. Другим словами движение тела можно составить из поступательного движения и сферического относительно системы координат. Для относительного сферического движения: $\overline{\omega}$ — угловая скорость, $\overline{\varepsilon}$ — угловое ускорение. Эти величины не зависят от выбора точки тела.

Пусть O_aXYZ — неподвижная система координат, O — произвольно выбранный полюс. При этом система координат $OXYZ$ получается из O_aXYZ поступательным перемещением, которое определяется вектором R_0. Пусть P — некоторая точка тела, ρ и r — вектор OP, заданный своими компонентами в системах координат.

Теорема. Существует единственный вектор ω, называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость v точки P тела может быть представлена в виде:

$$v = v_0 + \omega \times r,$$

где v_0 — скорость полюса O; при этом вектор ω от выбора полюса не зависит.

Следствие 1. В каждый момент времени проекции скоростей любых 2-х точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Следствие 2. Скорости 3-х точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, полностью определяют скорость любой точки тела.

Следствие 3. Если векторы скоростей 3-х точек твердого тела, не лежащих на одной прямой, в некоторый момент времени равны, то тело совершает мгновенно поступательное движение.

Следствие 4. Если в данный момент времени скорости 2-х точек тела равны нулю, то тело либо находится в мгновенном покое, либо совершает мгновенное вращение вокруг прямой, проходящей через эти точки.

Следствие 5. Если скорость некоторой точки тела в данный момент времени равна нулю, то тело находится либо в мгновенном покое, либо в мгновенном вращении вокруг оси, проходящей через эту точку.

Следствие 6. Мгновенное движение твердого тела в самом общем случае разлагается на два движения: поступательное со скоростью, равной скорости произвольного полюса, и вращательное вокруг оси, проходящей через этот полюс.

Теорема. Ускорение точки твердого тела в общем случае его движения складывается из трех составляющих:

1) поступательного ускорения;

2) вращательного ускорения вокруг полюса;

3) осестремительного ускорения.

ЛЕКЦИЯ № 32. Составное движение точки

В кинематике точки рассматривается движение точки относительно неподвижной системы координат. Пусть $OXYZ$ неизменно связана с некоторым телом и движется относительно системы координат $A\xi\eta\zeta$, которая условно принята неподвижной. Движение точки M относительно неподвижной системы координат называется **абсолютным**, а по отношению к подвижной системе координат — **относительным**. Скорости и ускорения точки, рассматриваемые по отношению к указанным системам, соответственно называются **абсолютными и относительными**. Движение подвижной системы координат $OXYZ$ по отношению к неподвижной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$ является для движущейся точки переносным движением, т. е. это движение точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M. Соответственно скорости и ускорения называются **переносными**. Движение подвижной системы координат можно охарактеризовать скоростью ее поступательного движения v_0, например вместе с точкой M, и вектором угловой скорости w ее вращения вокруг M.

Теорема о сложении скоростей. Абсолютная скорость v_a точки при сложном движении равна векторной сумме относительной v_r и переносной v_e скоростей. Пусть положение точки M в подвижной системе координат определяется радиус-вектором ρ, в неподвижной — радиус-вектором r, а положение начала подвижной системы координат относительно неподвижной — радиус-вектором r_0, тогда $r = r_0 + \rho$. Продифференцировав это выражение, получим:

$$dr/dt = dr_0/dt + w_e \times \rho + d'\rho/dt,$$

где e — переносное движение. На основании определения абсолютной, относительной и переносной скоростей имеем:

$$v_a = dr/dt,\ v_r = d'\rho dt,\ v_e = v_0 + w_e \times \rho.$$

Формула примет окончательный векторный вид:

$$v_a = v_r + v_e.$$

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса): абсолютное ускорение точки при составном движении равно векторной сумме относительного, переносного ускорений и ускорения Кориолиса:

$$a = dv/dt = d/dt(v_0 + w_e \times \rho + v_r).$$

Поскольку $dv_0/dt = a_0$, $dw/dt = \varepsilon$, то получим для абсолютного ускорения:

$$a = a_0 + \varepsilon \times r + w \times (w \times r) + a_r + 2(w \times v_r).$$

В этой формуле первые три слагаемых составляют ускорение точки свободного твердого тела в общем случае его движения вместе с подвижной системой координат, $\varepsilon \times r$ и $w \times (w \times r)$ — вращательное и осестремительное ускорения точки. Это уравнение примет вид:

$$a = a_e + a_r + a_k,$$

где a_k — ускорение Кориолиса, $a_k = 2(w \times v_r)$.

При поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений, а значит, эта формула отражает правило параллелограмма для сложения ускорений в этом случае.

Справедливо правило: модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения; чтобы получить направление ускорения Кориолиса, следует вектор проекции относительной скорости v_r повернуть на 90° вокруг оси, параллельной оси переносного вращения, в направлении этого вращения.

ЛЕКЦИЯ № 33. Составное движение твердого тела

Для определения вектора $\bar{\omega}$ найдем его проекции на подвижные оси $OXYZ$ (рис. 6 а). Этот вектор можно представить в виде:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3,$$

где численно

$$\omega_1 = \dot{\varphi},\ \omega_2 = \dot{\psi},\ \omega_3 = \dot{\theta}.$$

Проектируя обе части равенства

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3$$

на оси x, y, z, получим:

$$\omega_x = \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x}, \omega_y = \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y}, \omega_z = \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z}.$$

Проекции векторов $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_3$:

$$\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0,\ \omega_{1z} = \dot{\varphi},\ \omega_{3x} = \theta\cos\varphi,\ \omega_{3y} = -\dot{\theta}\sin\varphi,\ \omega_{3z} = 0.$$

Чтобы определить проекции вектора $\bar{\omega}_2$, проведем через оси OZ_1 и OZ плоскость, которая пересечется с плоскостью OXY вдоль линии OL. Поскольку линия OK перпендикулярна плоскости ZOZ_1, то она перпендикулярна и линии OL ($\angle KOL = 90°$, а $OL_y = \varphi$). Таким образом, проектируя вектор $\bar{\omega}_2$ на линию OL, а эту проекцию в свою очередь на оси OX и OY, получим:

$$\omega_{2x} = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi,\ \omega_{2y} = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi,\ \omega_{2z} = \dot{\psi}\cos\theta.$$

Подставляя все вычисленные проекции в правые части равенств

$$\omega_x = \omega_{1x} + \omega_{2x} + \omega_{3x},\ \omega_y = \omega_{1y} + \omega_{2y} + \omega_{3y},\ \omega_z = \omega_{1z} + \omega_{2z} + \omega_{3z},$$

найдем окончательно:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} zin\theta \sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} zin\theta \cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi, \\ \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \end{cases}$$

Эти уравнения называются **кинематическими уравнениями Эйлера**, определяющими проекции вектора угловой скорости тела $\bar{\omega}$ на подвижные оси $OXYZ$ через углы Эйлера; тем самым определяется и вектор $\bar{\omega}$.

Таким же образом можно найти проекции вектора $\bar{\omega}$ на неподвижные оси $OX_1Y_1Z_1$. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{cases}$$

Используя эти равенства, можно найти проекции на неподвижные оси $OX_1Y_1Z_1$ вектора $\bar{\varepsilon}$. Поскольку значение $\bar{\varepsilon}$ дается формулой $\bar{\varepsilon} = d\bar{\omega}/dt$, то

$$\varepsilon_{x1} = \dot{\omega}_x, \varepsilon_{y1} = \dot{\omega}_y, \varepsilon_{z1} = \dot{\omega}_z.$$

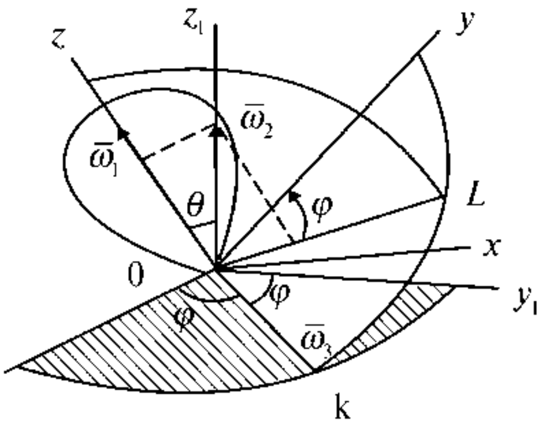
Эти проекции определяют вектор $\bar{\varepsilon}$, следовательно, зная уравнения движения, можно по полученным формулам найти $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$. Вектор угла $\bar{\varepsilon}$ равен

$$\bar{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$

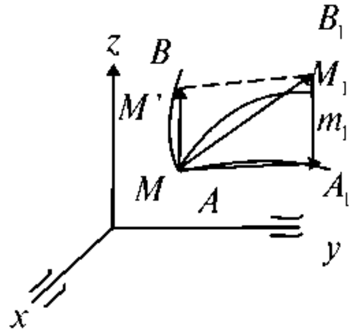
где

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\bar{\omega}_0, \vec{\varepsilon}_2 = \omega\frac{d\bar{\omega}_0}{dt}, \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_1$ направлен по мгновенной оси и характеризует скорость изменения вектора $\bar{\omega}$ только по модулю. Вектор $\vec{\varepsilon}_2$ характеризует скорость изменения вектора $\bar{\omega}$ только по направлению.



а)



б)

Рис. 6. Определение вектора $\overline{\omega}$ путем нахождения его проекции на подвижные оси (а), составное движение точки М (б)

Многоугольник угловых скоростей. Рассмотрим составное движение точки M (рис. 6 б). За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ она совершает относительное перемещение, определяемое вектором MM'. Сама AB, двигаясь вместе с подвижными осями $OXYZ$, перейдет за тот же период времени в новое положение A_1B_1. Точка m кривой AB, с которой в момент времени t совпадает точка M, совершает переносное перемещение $mm_1 = Mm_1$. В результате точка N перейдет в положение M_1 и совершит за время Δt абсолютное перемещение MM'. Из векторного треугольника Mm_1M_1: $MM_1 = Mm_1 + m_1M_1$.

Разделив равенство на промежуток времени Δt, при $\Delta t \to 0$ получим:

$$\lim(MM_1/\Delta t) = \lim(Mm_1/\Delta t) + \lim(m_1M_1/\Delta t).$$

Однако по определению,

$$\lim(MM_1/\Delta t) = v_{абс}, \text{ а } \lim(Mm_1/\Delta t) = v_{пер},$$

тогда при $\Delta t \to 0$ $A_1B_1 \to AB$:

$$\lim(m_1M_1/\Delta t) = \lim(MM'/\Delta t) = v_{от}.$$

Таким образом, $v_{абс} = v_{пер} + v_{от}$. Следовательно, при составном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переменной скоростей. Построенная при этом на плоскости фигура будет называться многоугольником угловых скоростей.

ЛЕКЦИЯ № 34. Основные понятия динамики. Основные законы механики

В динамике силы рассматриваются по их динамическому действию, т. е. по изменению ими характеристик движения материальных объектов. В классической механике, в основу которой положены законы Ньютона, пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем тел. Положение точки в этом пространстве относительно какой-либо системы отсчета обуславливается тремя независимыми параметрами или координатами точки. В классической механике время универсально и не связано с пространством и движением материальных точек; во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга, оно протекает одинаково.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твердого тела с учетом сил, которые действуют на эти движущиеся объекты. Сила в динамике характеризуется ускорением, которое она вызывает.

Первая задача динамики: по заданному механическому движению тела определяют силы, под действием которых совершается это движение.

Вторая задача динамики: по заданным силам, приложенным к телу, и начальным условиям определяют движение, которое они вызывают.

В основе динамики лежат законы Ньютона и Галилея. Системы координат, в которых справедливы законы Ньютона, называются **инерциальными (галилеевыми)**, т. е. движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд.

Закон инерции (закон Галилея): изолированная материальная точка движется равномерно и прямолинейно или находится в покое до тех пор, пока действие других тел на эту материальную точку не изменит ее состояние.

Изолированной называется материальная точка, взаимодействием которой с окружающими телами пренебрегают. **Свойством инертности** называется свойство изолированной материальной точки сохранять состояние прямолинейного движения.

Основной закон динамики (второй закон Ньютона). Скорость изменения количества движения материальной точки равна силе, которая действует на эту точку. Также справедливо, что ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление. Математически этот закон выражается равенством:

$$d(mv)/dt = F,$$

где mv — количество движения материальной точки;

m — масса точки.

Массой материальной точки называется физическая величина, являющаяся мерой ее инертных и гравитационных свойств.

Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона). Силы взаимодействия двух материальных точек или двух тел (действие и противодействие) равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия:

$$F_1 = -F_2.$$

Закон независимости действия сил (принцип суперпозиции). Ускорение материальной точки, которое возникает при одновременном действии на нее нескольких сил, равно векторной сумме ускорений, сообщаемых точке отдельными силами.

ЛЕКЦИЯ № 35. Динамика свободной материальной точки

Из основного закона динамики можно вывести дифференциальные уравнения движения материальной точки в различных системах координат. Поскольку равнодействующая всех заданных сил и сил реакций связей — F, а масса точки m, то получается:

$$ma = F.$$

Ускорение a выражается через радиус-вектор r:

$$a = d^2r/dt^2.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид:

$$md^2r/dt^2 = F.$$

Если спроецировать обе части уравнений на координатные оси, то можно получить дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на эти оси. В декартовой системе координат в общем случае:

$$ma_x = F_x,$$
$$ma_y = F_y,$$
$$ma_z = F_z.$$

Проекции ускорения на координатные оси выражаются через вторые производные по времени от координат движущейся точки:

$$a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2,$$
$$a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2,$$
$$a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат:

$$md^2x/dt^2 = F_x,$$
$$md^2y/dt^2 = F_y,$$
$$md^2z/dt^2 = F_z.$$

Применяя дифференциальные уравнения движения материальной точки в той или другой системе координат, можно решать две основные задачи динамики точки.

Первая задача. Зная массу точки и ее закон движения, можно вычислить действующую на точку силу. Таким образом, если заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциальных уравнений движения точки, т. е.

$$F_x = md^2f_1/dt^2,$$
$$F_y = md^2f_2/dt^2,$$
$$F_z = md^2f_3/dt^2.$$

Теперь, зная проекции силы на координатные оси, определяют модуль силы и косинусы углов силы с осями координат.

Вторая задача. По заданной массе и действующей на точку силе необходимо определить движение этой точки. Решение этой задачи будем рассматривать в прямоугольной декартовой системе координат. В общем случае сила F, а значит, и ее проекции на координатные оси могут зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости, ускорения и т. д. Упростим, ограничиваясь случаем зависимости силы и ее проекции на оси координат от времени, координат и скорости.

Дифференциальные уравнения движения точки:

$$md^2x/dt^2 = F_x(t;\ x;\ y;\ z;\ x';\ y';\ z'),$$
$$md^2y/dt^2 = F_y(t;\ x;\ y;\ z;\ x';\ y';\ z'),$$
$$md^2z/dt^2 = F_z(t;\ x;\ y;\ z;\ x';\ y';\ z').$$

Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6.

Каждая координата x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени t и всех шести произвольных постоянных:

$$\begin{cases} x = f_1(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6), \\ y = f_2(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6), \\ z = f_3(t; C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6). \end{cases}$$

Для выделения конкретного вида движения материальной точки надо дополнительно задать условия, которые дают возможность определить произвольные постоянные, а их в общем случае будет шесть. Такими условиями могут быть **начальные условия**. В какой-то определенный момент времени, например при $t = 0$, задают координаты движущейся точки x_0, y_0, z_0 и проекции ее скорости v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}:

$$\begin{cases} x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0, \\ \dot{x} = v_{0x};\ \dot{y} = v_{0y};\ \dot{z} = v_{0z}. \end{cases}$$

ЛЕКЦИЯ № 36. Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха. Движение тела, брошенного под углом к горизонту без учета сопротивления воздуха

Если рассматривается случай зависимости силы только от времени, координаты и скорости, то дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси OX имеет вид:

$$md^2x/dt^2 = F_x(t; x; v),$$

при этом начальные условия $t = 0$, $x = x_0$. Наиболее важные случаи прямолинейного движения материальной точки получаются тогда, когда сила F_x постоянна или она зависит только от времени, или от координаты x, или от скорости v. Если сила постоянна, значит, имеет место случай равнопеременного движения, т. е. движения с постоянным ускорением. Силу, которая зависит от координаты x, могут обусловить сжатая или растянутая пружина и другие упругие тела при их деформации. В этих случаях интегрирование дифференциального уравнения выполняется наиболее просто и его можно довести до конца в квадратурах. В общем случае если сила одновременно зависит от времени t, координаты x и скорости v, то в большинстве случаев дифференциальное уравнение можно проинтегрировать лишь приближенно. Ниже приведены примеры на составление и интегрирование дифференциального уравнения прямолинейного движения точки, в частности, когда сила зависит только от времени или от скорости, или от координаты.

Свободное падение тела без учета сопротивления воздуха. Материальную точку массой m бросили вертикально вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Она движется под действием силы тяжести по закону тяготения Ньютона. Требуется найти зависимость скорости точки от ее расстояния до центра Земли, не учитывая сопротивления воздуха.

Решение. Направим ось OX по прямолинейной траектории точки и выберем начало координат в центре Земли. В соответствии с законом Ньютона для силы тяготения имеем: $F = k/x^2$.

В данном случае k удобнее выразить из условия, что на поверхности Земли сила тяготения F равна силе тяжести $P = mg$. Приравнивая F и P при $x = R$, получим:

$$mg = k/R^2;\ k = mgR^2,$$

где g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли;

R — радиус Земли.

Подставляя полученное значение k в выражение для силы тяготения, придем к следующей формуле:

$$F = mgR^2/x^2.$$

Получили дифференциальное уравнение:

$$md^2x/dt^2 = -mgR^2/x^2.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -gR^2 \int_{R}^{x} dx/x^2,$$

а уже отсюда

$$v = (v_0{}^2 + 2gR^2(1/x - 1/R))^{1/2}.$$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту без учета сопротивления воздуха. Пусть в точке M в начальный момент времени t тело находится в начале координат и имеет скорость v_0, лежащую в плоскости OXZ и направленную под углом $\angle\alpha$ к горизонту. При этом начальные условия $t_0 = 0$, тогда:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$
$$x_0 = v_0 \cos\alpha,$$
$$y_0 = 0,$$
$$z_0 = v_0 \sin\alpha.$$

Подставим равенства в выражения

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1,\ y = C_2,\ z = -gt + C_3, \\ x = C_1 t + C_4,\ y = C_2 t + C_3,\ z = -\dfrac{gt^2}{2} + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

и получим

$$C_1 = v_0 \cos\alpha,$$
$$C_2 = 0,$$
$$C_3 = v_0 \sin\alpha,$$
$$C_4 = C_5 = C_6 = 0.$$

Закон движения точки:

$$x = t v_0 \cos\alpha,$$
$$y = 0,$$
$$z = t v_0 \sin\alpha - g t^2/2.$$

Таким образом, траекторией движения точки M является плоская кривая, лежащая в плоскости OXZ.

ЛЕКЦИЯ № 37. Движение падающего тела с учетом сопротивления воздуха

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси OX:

$$md^2x/dt^2 = F_x(t;\ x;\ v),$$

если рассматривается случай зависимости силы лишь от времени, координаты и скорости. Начальные условия $t = 0$, $x = x_0$. Рассмотрим пример на составление и интегрирование дифференциального уравнения падающего тела.

Пример. Точка массой m падает вертикально вниз без начальной скорости под действием силы тяжести. При этом она испытывает силу сопротивления воздуха R, которая в свою очередь пропорциональна квадрату скорости и массе точки:

$$R = kmv^2,$$

где k — постоянная положительная величина.

Требуется найти уравнение движения точки.

Решение. Направим ось OX вертикально вниз, положив за начало координат положение точки в момент начала движения. В этот же момент примем $t = 0$. В произвольный момент времени прикладываем к точке действующие на нее силы P и R и составляем дифференциальное уравнение ее движения. Имеем:

$$md^2x/dt^2 = mg - kmv.$$

При этом скорость можно определить зависимостью:

$$md^2x/dt^2 = mvdv/dx.$$

Последняя подстановка позволяет исключить из дифференциального уравнения время при определении скорости. Дифференциальное уравнение движения точки будет выглядеть так:

$$dv/dt = k(g/k - v^2).$$

Разделяя переменные и интегрируя обе части, получаем:

$$\int_0^v \frac{dv}{g/k - v^2} = k\int_0^t dt.$$

Для того чтобы не искать дополнительно произвольную постоянную интегрирования, интегралы будем брать определенные, сохраняя верхний предел переменным для последующего интегрирования, а для нижних пределов будем использовать условие: при $t = 0$ и $v = 0$. После интегрирования и подстановки пределов, получаем:

$$\int_0^v \left[\frac{d\left(\sqrt{g/k} - v\right)}{\sqrt{g/k} - v} + \frac{d\left(\sqrt{g/k} + v\right)}{\sqrt{g/k} + v}\right] = 2\sqrt{g/k}k\int_0^t dt,$$

или $\ln((g/k)^{1/2} - v)/((g/k)^{1/2} + v))) - \ln 1 = -\,2(g/k)^{1/2}t.$

Потенцируя и решая относительно v, получаем:

$$v = \sqrt{g/k}\,\frac{1 - e^{2\sqrt{g/k}t}}{1 + e^{2\sqrt{g/k}t}} = \sqrt{g/k}\,\frac{e^{\sqrt{g/k}t} - e^{\sqrt{g/k}t}}{e^{\sqrt{g/k}t} + e^{\sqrt{g/k}t}} = \sqrt{g/k}th\left(\sqrt{g/k}t\right)$$

Переходя в уравнении к пределу при $t \to \infty$, получаем:

$$v_{\text{пр}} = v_{t=0} = \sqrt{g/k}\lim_{t\to 0}\frac{1 - e^{2\sqrt{g/k}t}}{1 + e^{2\sqrt{g/k}t}} = \sqrt{g/k}.$$

Следовательно, для достижения предельной скорости требуется бесконечно большое время.

Для отыскания закона движения точки нужно подставить в уравнение вместо скорости v ее значение dx/dt, тогда

$$dx/dt = \sqrt{g/k}th\left(\sqrt{g/k}t\right).$$

Интегрируя это уравнение после разделения переменных, в результате получаем:

$$\int_0^x dx = \sqrt{g/k}\int_0^t th\left(\sqrt{g/k}t\right).$$

ЛЕКЦИЯ № 38. Колебательное движение точки. Свободные колебания

Пусть точка M движется прямолинейно под действием одной только **восстанавливающей силы** F, направленной к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы F на ось OX: $F_x = -cx$.

Сила F стремится вернуть точку в равновесное положение O, где $F = 0$, поэтому она называется «восстанавливающая сила». Будем искать закон движения точки M. Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось OX, тогда получим: $mx'' = F_x$ или $mx'' = cx$. Разделим обе части равенства на m и введем обозначение $cm = k^2$, тогда приведем уравнение к виду:

$$x'' + k^2 x = 0,$$

которое представляет собой **дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления**. Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка находят в виде $x = e^{nt}$.

Колебания, совершаемые точкой по этому закону, называются **гармоническими колебаниями**.

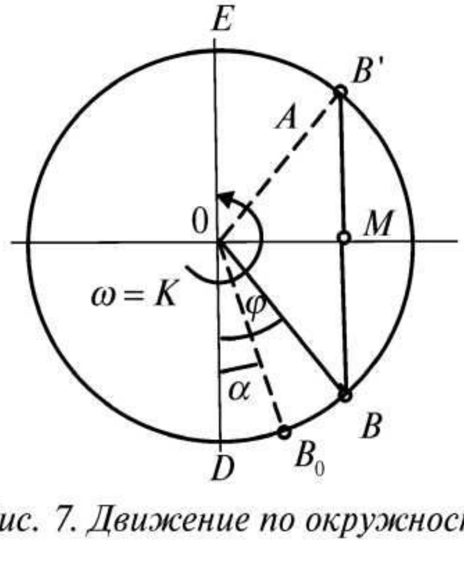


Рис. 7. Движение по окружности

Пусть точка B движется равномерно по окружности радиуса A из положения B_0, определяемого углом $\angle DOB_0 = \alpha$ (рис. 7). Обозначим постоянную угловую скорость вращения радиуса OB через k. Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$, а проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный DE, движется по закону $x = A\sin(kt + \alpha)$, где $x = OM_x$. Другими словами, она совершает гармонические колебания. Амплитуда колебаний — величина A, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний O. Величина $\varphi = \alpha + kt$ называется фазой колебаний, она в отличие от координаты x определяет не только положение точки в данный момент времени, но и направление ее последующего движения. Например, из положения M при фазе, равной φ, точка движется вправо, а при фазе $(\pi - \varphi)$ — влево. Фазы, отличающиеся на 2π, считаются одинаковыми. Величина k, совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB, называется **круговой частотой колебаний**. Промежуток времени T, в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется **периодом колебаний**. По истечении периода фаза изменяется на 2π. Таким образом, $kT = 2\pi$, тогда период $T = 2\pi/k$. Величина ν, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за 1 сек, называется **частотой колебаний**: $\nu = 1/T$.

Свойства свободных колебаний:

1) амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных (или краевых) условий;

2) частота k, а следовательно, и период T колебаний, от начальных (или краевых) условий не зависят и являются неизменными характеристиками данной колеблющейся системы.

Рассмотренные колебания называются **линейными**, поскольку они описываются линейными дифференциальными уравнениями. Период этих колебаний не зависит от начальных (или краевых) условий, а, значит, и от амплитуды. Колебания, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, называют **нелинейными**, они не обладают такими свойствами.

ЛЕКЦИЯ № 39. Затухающие колебания материальной точки, апериодическое движение точки. Явление биений, явление резонанса

Пусть на материальную точку M с массой т, кроме восстанавливающей силы F, проекция которой на ось OX равна cx, действует также сила сопротивления R, проекция которой на ту же ось равна ax. Разделим обе части этого уравнения на m и получим:

$$k^2 + 2hx + x = 0,$$

линейное однородное дифференциальное уравнение. Ему соответствует характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm (h^2 + k^2)^{1/2}.$$

Окончательный вид общего решения уравнения существенно зависит от соотношения величин h и k. Если $h < k$, то корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные; если $h > k$ — корни вещественные; если $h = k$ — корни вещественные и кратные. Движение точки M, описываемое таким уравнением, не будет периодическим, поскольку не существует такой постоянной, прибавляя которую к аргументу t, получили бы равенство $x(t + T) = x(t)$, справедливое при любых значениях t. Однако функция x периодически меняет знак, т. е. движение точки M имеет **колебательный характер**. Коэффициент h, характеризующий быстроту затухания колебаний во времени, называется **коэффициентом затухания**. Он определяется отношением коэффициента сопротивления к величине удвоенной массы колеблющейся материальной точки.

Условный период затухающих колебаний (апериодический) — это промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки M через положение статического равновесия в фиксированном направлении.

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2+h^2}} = \frac{2\pi}{k^*},\ k^* = \sqrt{k^2+h^2}.$$

Условный период T^* можно связать с периодом колебаний точки в среде без сопротивления, полагая, что коэффициент k остается неизменным. В этом случае

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1-(h/k)^2}},$$

где T — **период свободных незатухающих колебаний материальной точки**.

Условный период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний при отсутствии сил сопротивления, и это увеличение периода в основном зависит от квадрата малой величины (h/k).

Вынужденными называются колебания материальной точки, если на точку, кроме восстанавливающей силы F, действует некоторая изменяющаяся во времени возмущающая сила Q. Рассмотрим случай, когда зависимость возмущающей силы

$$\ddot{x} + k^2 x = H\sin(\omega t + \sigma)$$

есть **неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами**.

Колебание точки M состоит из следующих трех типов:

1) свободных колебаний, которые зависят от начальных условий и имеют частоту собственных колебаний k;

2) вынужденных колебаний, которые имеют частоту собственных колебаний k;

3) вынужденных колебаний, которые имеют частоту ω возмущающей силы Q и амплитуду. Выражения для вынужденных колебаний не зависят от начальных условий движения; вынужденные колебания существенно зависят от разности частот собственных колебаний и возмущающей силы. Так, при частоте возмущающей силы, близкой к частоте собственных колебаний точки, возникает явление, называемое **биением**; при совпадении указанных частот наступает явление **резонанса**.

ЛЕКЦИЯ № 40. Динамика несвободной материальной точки

Основной закон динамики для несвободной материальной точки, а следовательно, и ее дифференциальные уравнения движения имеют такой же вид, как и для свободной точки, только к действующим на точку силам добавляются все силы реакций связей. Обычно полную силу реакции точки при ее движении делят на две составляющие. Первая — составляющая силы реакции связей, уравновешивающая заданные силы, приложенные к точке; она называется **статической реакцией**. Вторая — составляющая полной силы реакции, зависящая только от движения точки под действием заданных сил; она называется **динамической реакцией** и уравновешивает силу инерции движущейся точки.

Движение точки по поверхности. Пусть гладкая неподвижная поверхность, по которой движется точка массой т под действием данной силы P, задана уравнением $f(x, y, z) = 0$, где x, y, z — координаты движущейся точки. Так как рассматриваемая поверхность является гладкой, то сила трения отсутствует. Обозначив N неизвестную нормальную силу реакции поверхности, получим следующие дифференциальные уравнения движения точки по поверхности:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + N_x;\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + N_y;\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + N_z.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что косинусы углов внешней нормали к поверхности с осями координат, а значит, и силы N, параллельной главной нормали, можно вычислить по формулам:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= N\cos\left(\overline{N},\hat{}\ x\right) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\\
N_y &= N\cos\left(\overline{N},\hat{}\ y\right) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\\
N_z &= N\cos\left(\overline{N},\hat{}\ z\right) = \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}\right\}$$

Значит,

$$\cos\left(\overline{N},\hat{}\ x\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\ \cos\left(\overline{N},\hat{}\ y\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\ \cos\left(\overline{N},\hat{}\ z\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Такие дифференциальные уравнения называются **дифференциальными уравнениями Лагранжа первого рода** для движения несвободной материальной точки. Из этих трех дифференциальных уравнений и одного конечного уравнения — уравнения поверхности $f(x, y, z) = 0$ — можно вычислить четыре неизвестные координаты точки x, y, z и **неопределенный множитель Лагранжа** X как функции времени и произвольных постоянных интегрирования. Произвольные постоянные находятся из начальных условий. По найденному неопределенному множителю Лагранжа X легко определить силу реакции поверхности $N = \lambda\Delta f$, которая в общем случае зависит от времени.

Если поверхность не гладкая, то кроме нормальной силы реакции возникает предельная сила трения $F_{\max}$, проекции которой надо добавить в правые части дифференциальных уравнений движения точки. Это добавление усложнит решение задачи. Однако и в этом случае задача принципиально разрешима, поскольку наряду с добавлением неизвестной силы добавляется и конечное уравнение, которое связывает эту силу с нормальной реакцией:

$$F_{\max} = kN,$$

где k — коэффициент трения.

Поскольку сила трения скольжения всегда направлена против скорости, то проекции этой силы на оси координат можно представить в виде:

$$F_{\max}^{x} = -F_{\max}\cos\left(\bar{v},^\wedge x\right) = -F_{\max}\frac{v_x}{v} = -F_{\max}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},$$

$$F_{\max}^{y} = -F_{\max}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},$$

$$F_{\max}^{z} = -F_{\max}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

Учет силы трения усложняет задачу интегрирования дифференциальных уравнений движения несвободной материальной точки.

ЛЕКЦИЯ № 41. Математический маятник и его малые колебания

Математический маятник — тяжелая материальная точка, которая двигается либо по вертикальной окружности (плоский математический маятник), либо по сфере (сферический маятник). В первом приближении математическим маятником можно считать груз малых размеров, который подвешен на нерастяжимой гибкой нити.

Будем рассматривать движение плоского математического маятника по окружности радиуса l с центром в точке O. Определим положение точки M (маятника) углом отклонения φ радиуса OM от вертикали. Направляя касательную $M\tau$ в сторону положительного отсчета угла φ, можно составить естественное уравнение движения, которое образуется из уравнения движения $m = F + N$, где F — действующая на точку активная сила, а N — реакция связи. Это уравнение мы получили из второго закона Ньютона, который является основным законом динамики: производная по времени от импульса материальной точки равна действующей на нее силе, т. е.

$$\frac{d}{dt}(mv) = F.$$

Если масса постоянна, то можно представить предыдущее уравнение в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F \text{ или } mW = F,$$

где W — ускорение точки.

Проекции на ось τ даст нам одно из естественных уравнений движения точки по заданной неподвижной гладкой кривой:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau \text{ или } m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau.$$

Тогда имеем:

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\sin\varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2\sin\varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega\sin\varphi = 0.$$

При малых колебаниях допустим, что в начальный момент маятник отклонен от вертикали на угол φ и опущен без начальной скорости, тогда начальные условия будут: при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Энергия:

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h,$$

где V — потенциальная энергия,

h — постоянная интегрирования. Тогда при этих условиях в любой момент времени угол $\varphi \leq \varphi_0$. Значение постоянной h определяется по начальным данным. Допустим, что угол φ_0 мал ($\varphi_0 \leq 1$), тогда угол φ будет также мал и можно приближенно допустить, что $\sin\varphi \approx \varphi$. При этом уравнение примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \text{ —}$$

дифференциальное уравнение простого гармонического колебания. Его общее решение имеет вид:

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t = a\sin(\omega t + \varepsilon),$$

где A и B, или a и ε, — суть постоянные интегрирования.

Период T колебания маятника равен

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right).$$

Пример (задача о сферическом маятнике). Пусть материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по внутренней части поверхности сферы радиуса R вблизи устойчивого положения равновесия. В начальный момент времени $t = 0$, $x = x_0$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_0$. Ось OZ направлена по вертикали вниз, а OX и OY расположены в горизонтальной плоскости. Начало координат есть центр сферы. Требуется определить движение точки и силу реакции абсолютно гладкой сферы на точку.

Решение. Дифференциальные уравнения движения точки по поверхности сферы:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x},\ m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y},\ m\ddot{z} = mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z},\ \lambda = N / \Delta f.$$

К этим дифференциальным уравнениям добавляется уравнение связи — уравнение поверхности сферы

$$f(x, y, z) = R^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x;\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2z;$$

$$\Delta f = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R,$$

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

Подставляя значения производных, получим:

$$m\ddot{x} = -2\lambda x,\ m\ddot{y} = -2\lambda y,\ m\ddot{z} = -mg - 2\lambda z.$$

Интегрируем эту систему и получаем:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R}x,\ \ddot{y} = -\frac{g}{R}y.$$

Тогда решения этих дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\dot{x} = C_1\sqrt{g / R}\cos\left(\sqrt{g / r}t + C_2\right),$$

$$\dot{y} = C_3\sqrt{g / R}\cos\left(\sqrt{g / r}t + C_4\right).$$

ЛЕКЦИЯ № 42. Динамика относительного движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно подвижных (в общем случае неинерциальных) систем отсчета получают из уравнений движения точки относительно инерциальной системы отсчета и кинематической теоремы Кориолиса о сложении ускорений.

Пусть есть инерциальная система отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ и материальная точка массой т, на которую действуют приложенные силы F и N, где F — равнодействующая заданных активных сил; N — равнодействующая сил реакций связей. Если a — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета (абсолютное ускорение), то согласно уравнению движения точки в векторной форме:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{N}.$$

Если ввести другую, неинерциальную, систему отсчета $OXYZ$, которая в общем случае может двигаться относительно инерциальной как свободное твердое тело, то по теореме сложения ускорений имеем:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_к,$$

где a_i — соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения.

После преобразований получим:

$$m\overline{a}_r = \overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_к,$$

где $\Phi_e = -ma_e$, $\Phi_к = -ma_к$ — соответственно переносная и кориолисова силы инерции.

Динамическая теорема Кориолиса, или уравнение относительного движения точки в векторной форме: **материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же,**

как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и реакциям связей следует добавить переносную и кориолисову силы инерции.

Если координаты движущейся точки относительно подвижной системы координат $OXYZ$ в момент времени t есть x, y, z, то в проекциях на подвижные оси координат уравнение примет форму:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x + \Phi_{ex} + \Phi_{kx} \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + \Phi_{ey} + \Phi_{ky} \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + \Phi_{ez} + \Phi_{kz} \end{aligned}\right\}.$$

Относительное движение по инерции. Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение называют **относительным движением по инерции.** При этом относительная скорость v_r постоянна по модулю и направлению, а значит, относительное ускорение $a = 0$.

Относительный покой. При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость, ускорение и ускорение Кориолиса равны нулю. При абсолютном движении по инерции или абсолютном равновесии относительно инерциальной системы отсчета имеем для сил одно и то же условие $F + N = 0$.

Инерциальные системы отсчета. Переносное ускорение в общем случае находится по формуле:

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}),$$

где a_0 — ускорение точки, принятой за полюс, например начало координат подвижной системы координат;

ω — угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса;

ε — угловое ускорение этого вращения;

r — радиус-вектор движущейся точки относительно выбранного полюса.

Допустим, подвижная система отсчета постоянно движется относительно основной инерциальной системы поступательно, равномерно и прямолинейно. Тогда переносная и кориолисова силы инерции равны нулю.

Принцип относительности Эйнштейна: все физические явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

ЛЕКЦИЯ № 43. Система материальных точек

Система материальных точек — это совокупность материальных точек, положения и движения которых взаимосвязаны. Бывают **свободные** и **несвободные** системы. Если на движение точек системы не наложены заранее заданные ограничения, не зависящие от закона движения, то система называется **свободной**. Пример — Солнечная система, причем Солнце и планеты рассматриваются как материальные точки. **Несвободной** называется такая система материальных точек, на движение которых наложены связи. Бывают **геометрические** и **кинематические** системы. Геометрические связи накладывают ограничения на координаты точек системы, а **кинематические** — на скорости точек системы. Условия, ограничивающие свободу движения материальных точек системы, выражаются некоторыми уравнениями — **уравнениями связей**. В общем случае эти уравнения устанавливают связи между координатами материальных точек, проекциями скоростей этих точек и временем. Если на систему материальных точек одновременно наложены геометрические и кинематические связи, то общее число связей будет равно:

$$k = k_1 + k_2,$$

где k_1 — число геометрических связей, k_2 — число кинематических связей.

Связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы, называются **голономными**. Связи, в дифференциальные уравнения которых явно входят скорости таким образом, что для этих уравнений не существует интегрирующего множителя, называются **неголономными** или **неинтегрируемыми**. Различают связи **неудерживающие** и **удерживающие**. Связь называется **удерживающей**, если она ограничивает движение как в данном направлении, так и в противоположном. Такая связь выражается уравнениями. Связь называется **неудерживающей**, если она ограничивает движение в данном направлении, но не ограничивает в противоположном. Различают также связи **стационарные** и **нестационарные**. Если в уравнение связи время явно не входит, то связь называется **стационарной**, в противном же случае связь называется **нестационарной**. Как и в статике, в динамике используют две классификации сил, приложенных к системе материальных точек: **силы внутренние** и **внешние; активные силы** и **реакции связей. Внутренними** называются силы взаимодействия между материальными точками одной и той же системы и обозначаются F_i^i. **Внешними** называются силы взаимодействия между материальными точками данной системы и другими физическими телами, не входящими в систему. **Массой системы,** которая состоит из n материальных точек, называется сумма масс точек системы

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Пусть все точки системы двигаются с одинаковыми ускорениями w, которые согласно второму закону Ньютона можно считать вызванными действием приложенной к ним системы параллельных сил $F_i = m_i w$.

Центр масс системы материальных точек — это центр параллельных сил $F_i = m_i w$, сообщающих движение точкам системы с одинаковым ускорением или поступательное движение неизменяемой системе. Координаты центра масс:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \; z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m},$$

где m_i — масса i-й точки системы;

x_i, y_i, z_i — координаты i-й точки системы, поскольку x_C, y_C, z_C одновременно являются проекциями радиуса-вектора.

ЛЕКЦИЯ № 44. Твердое тело. Моменты инерции твердого тела

Твердое тело — тело, имеющее равенство нулю главного вектора и главного момента поверхностных сил.

Момент инерции твердого тела — интеграл, распространенный по всей массе:

$$I_x = \int_m r^2 dm.$$

Абсолютно твердое тело — это тело, состоящее из системы материальных точек, непрерывно заполняющих некоторую часть пространства так, что расстояние между любыми двумя его точками остается неизменным.

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разного материала, отличаются друг от друга. Независящей от массы материала характеристикой является радиус инерции. Он определяется относительно оси:

$$\rho_l = (J_l / M)^{1/2},$$

где M — масса тела.

Момент инерции:

$$J_1 = M \times \rho_1^2.$$

Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей. Существует зависимость между моментами инерции системы относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Имеются две системы прямоугольных, взаимно параллельных осей координат $OXYZ$ и $CX'Y'Z'$. Начало системы координат $CX'Y'Z'$ находится в центре масс системы. Из определения момента инерции относительно оси имеем:

$$J_{Oz} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_{Oz'} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k'^2 + y_k'^2),$$

где $m_к$ — масса точки $Мк$, а $x_к$, $y_к$, z_k и $x'_к$, $y'_к$, z'_k — координаты этой точки относительно систем координат $OXYZ$ и $CX'Y'Z'$ соответственно.

Если x_c, y_c, z_c — координаты центра масс относительно системы координат $OXYZ$, то для взаимно параллельных осей координаты одной и той же точки $Мк$ связаны соотношениями параллельного переноса $x_к = x'_к + x_c$; $y_к = y'_к + y_c$; $z_k = z'_k + z_c$. Подставим эти значения координат в выражение момента инерции; после преобразований получим:

$$J_{Oz} = \sum_{k-1}^{N} m_k (x_k^2 + y_k^2) + 2x \sum_{k-1}^{N} m_k x_k' + 2y_C \sum_{k-1}^{N} m_k y_k' + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k-1}^{N} m_k$$

и

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + Md^2.$$

Центр масс находится в начале этой системы координат.

Величина $x^2 + y^2 = d^2$, где d — расстояние между осями OZ и OZ'.

Мы получили связь моментов инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Теорема Штейнера или Гюйгенса—Штейнера: **момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями**.

Вычисление моментов инерции однородных тел относительно осей, проходящих через их центры тяжести.

Однородный стержень. Пусть дан однородный стержень длиной l и массой M. Направим по стержню ось OX. Вычислим момент инерции стержня относительно оси OZ, проходящей перпендикулярно стержню через его конец. Из определения момента инерции сплошного тела относительно оси имеем:

$$J_{OZ} = \int_L x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx,$$

так как $dm = \rho\, dx$, где $\rho = M/l$.

Вычисляя интеграл, получаем:

$$J_{oz} = \frac{M}{l}\int_0^l x^2 dx = \frac{Ml^3}{l3} = M\frac{l^2}{3}.$$

Момент инерции стержня относительно оси CZ', проходящей через центр масс и параллельной оси OZ, находится по теореме Штейнера:

$$J_{Oz} = J_{cZ'} + Md^2, \text{ где } d^2 = (l/2)^2 = l^2/4.$$

Следовательно, $J_{cz'} = Ml^2/12$.

ЛЕКЦИЯ № 45. Центробежные моменты инерции

Различаются моменты инерции **осевые**, или **аксиальные, полярные**, **планарные** и **центробежные**. Центробежные моменты инерции тела

$$I_{xy} = \int_m xydm,\ I_{xz} = \int_m xzdm,\ I_{yz} = \int_m yzdm.$$

Центробежные моменты инерции зависят от направления координатных осей и от выбора начала координат. Поэтому, говоря о центробежном моменте инерции в данной точке, понимают, что начало координат совпадает с данной точкой. Центробежные моменты инерции могут равняться нулю и иметь любой знак (плюс или минус). Если центробежные моменты инерции равны нулю, то оси называют **главными осями инерции тела в данной точке**. Если эта точка находится в центре масс, то оси являются **главными** и **центральными осями инерции**.

Эллипсоид инерции. Выберем (рис. 8) точку N, расположенную от начала координат на расстоянии

$$ON = d = 1/(I_{и}).$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dxy - 2Eyz - 2Fzx = 1.$$

Таким образом, геометрическое место точек N (x, y, z) представляет собой поверхность второго порядка, выраженную уравнением. Так как $I_{и} > 0$ и расстояния всех точек N от начала координат конечны, то уравнение определяет эллипсоид с центром в начале координат. Этот эллипсоид называется **эллипсоидом инерции**, его оси симметрии OX', OY', OZ' — главные оси инерции в точке O. Если начало координат находится в центре инерции системы (тела), то эллипсоид инерции называется центральным, его оси симметрии — **главными центральными осями инерции**, а соответствующие моменты инерции — **главными центральными моментами инерции**.

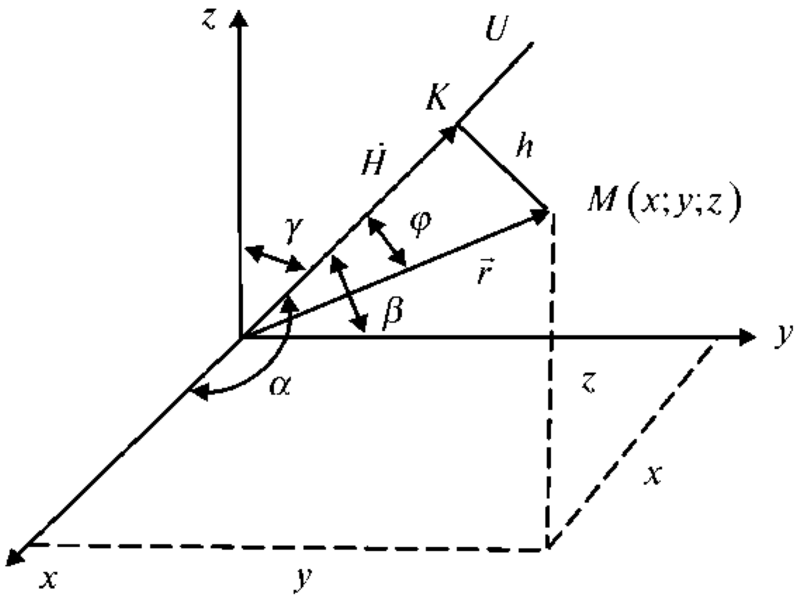


Рис. 8. Построение эллипсоида инерции

Если в качестве координатных осей взять главные оси инерции, то уравнение эллипсоида примет вид:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 = 1,$$

в котором отсутствуют члены, содержащие произведения координат. Главные моменты инерции системы (тела) соответственно равны A', B', C', а центробежные моменты инерции равны нулю:

$$I_{x'} = A',\ I_{y'} = B',\ I_{z'} = C',$$

$$I_{y'z'} = I_{z'x'} = I_{x'y'} = 0.$$

Каждой точке O системы (тела) соответствует определенный эллипсоид инерции. Знание главных осей инерции позволяет упростить уравнения движения твердого тела. Если оси координат являются главными осями инерции, то формула примет вид:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

Для определения момента инерции относительно какой-либо оси, проходящей через любую точку, для рассматриваемого тела необходимо иметь :

$$I + I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma,$$

тензор инерции в этой точке и углы, определяющие направление оси с осями координат. Матрица, составленная из осевых и центробежных моментов инерции относительно осей координат, называется тензором инерции в заданной точке, например т. *O*. В тензоре инерции условились центробежные моменты инерции брать со знаком минус. Компоненты тензора инерции зависят не только от выбора точки, но и от ориентации осей координат в этой точке.

ЛЕКЦИЯ № 46. Теорема о движении центра масс механической системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы

По теореме об изменении количества движения системы:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e,$$

однако количество движения системы можно вычислить по формуле: $Q = Mv_c$, где V_c — скорость центра масс; M — масса системы.

Так как масса системы постоянна, получаем теорему о движении центра масс в векторной форме:

$$M\frac{d\overline{v}_c}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \text{ или } M\overline{a}_c = \sum \overline{F}_k^e,$$

где a_c — ускорение центра масс.

Теорема о движении центра масс формулируется так: центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе. Проецируя на прямоугольные декартовы оси координат, получаем дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e \\ M\dfrac{d^2y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e \\ M\dfrac{d^2z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e \end{cases},$$

где x_c, y_c, z_c — координаты центра масс.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т. е.

$$\overline{F}_k^e = 0,$$

то из уравнения следует, что ускорение центра масс a_c равно нулю, а значит, скорость центра масс v_c является постоянной по модулю и направлению, т. е. центр масс движется прямолинейно и равномерно по инерции или находится в покое. Если, в частности, в начальный момент он находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

2. Если проекция, например на ось OX главного вектора внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\overline{F}_{kx}^e = 0,$$

то проекция ускорения x_c центра масс на эту ось равна нулю, а значит, проекция скорости центра масс является постоянной величиной, т. е. $v_{cx} = x_c = \text{const}$. Пусть даны внешние и внутренние силы, действующие на систему, состоящую из N точек. Если к каждой точке системы приложить равнодействующую силу внешних сил $\overline{F}^e{}_k$, равнодействующую силу всех внутренних сил $\overline{F}^i{}_k$, то для любой k-ой точки системы можно составить дифференциальное уравнение движения:

$$m_k \frac{d^2\overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i.$$

Пример 1. Пусть два груза с силами тяжести P_1 и P_2 соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через блок. Они скользят по боковым граням равнобедренного клина. Клин стороной BC опирается на гладкую горизонтальную плоскость. В начальный момент система находится в покое. Найти перемещение клина по плоскости при опускании груза P_1 на высоту h. Сила тяжести клина $P = 2P_1$ и $P_1 = 2P_2$. Массой блока и нити пренебречь.

Решение. Внешними силами, действующими на клин вместе с грузами, являются силы тяжести P_1, P_2, P и нормальная реакция горизонтальной гладкой поверхности N. Таким образом,

$$\overline{F}_k^e = 0.$$

Учитывая, что в начальный момент система находится в покое, на основании второго следствия из теоремы о движении центра масс имеем x_c = const. Вычислим x_c при $t = 0$ и x_c^* в момент, когда груз опустится на высоту h. Для момента $t = 0$

$$x_c = \frac{(P_1/g)x_1 + (P_2/g)x_2 + (P/g)x}{P_1/g + P_2/g + P/g} = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + Px}{P_1 + P_2 + P},$$

где x_x, x_2 и x — соответственно координаты центра масс по оси OX грузов P_1 P_2 и клина.

Пусть вся система вместе с клином переместилась в положительном направлении оси OX на величину l при опускании груза P_1 на h. Тогда

$$x_c = \frac{P_1(x_1 + l - h) + P_2(x_2 + l - h) + P(x + l - h)}{P_1 + P_2 + P}.$$

Так как $x_c^* - x_c = 0$, то получим:

$$l = \frac{(P_1 + P_2)h}{P_1 + P_2 + P} = \frac{3}{7}h.$$

Поскольку величина l оказалась положительной, то клин действительно перемещается вправо в положительном направлении OX.

ЛЕКЦИЯ № 47. Импульс силы и его проекции на координатные оси

Действие силы F на материальную точку в течение времени dt можно охарактеризовать элементарным импульсом силы Fdt. Полный импульс силы F за время t, или импульс силы S, равен

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt.$$

Проекции импульса силы на прямоугольные оси координат выражаются формулами:

$$S_x = \int_0^t F_x dt,\ S_y = \int_0^t F_y dt,\ S_z = \int_0^t F_z dt.$$

Количество движения материальной точки q — это вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость v, т. е. $q = mv$; в физике его часто называют импульсом материальной точки. Проекции количества движения материальной точки на прямоугольной оси координат:

$$q_x = mv_x = m\dot{x};\ q_y = mv_y = m\dot{y};\ q_z = mv_z = m\dot{z}.$$

Теорема об изменении количества движения точки. Дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы F можно представить в следующей векторной форме:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}.$$

Так как масса точки т принята постоянной, то ее можно внести под знак производной. Тогда

$$\frac{d}{dt}(m\overline{v}) = \overline{F}.$$

Формула выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: **первая производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе**.

В проекциях на координатные оси теорему можно представить в виде:

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = F_x, \ \frac{d}{dt}(mv_y) = F_y, \ \frac{d}{dt}(mv_z) = F_z.$$

Если обе части умножить на t, то получим другую форму этой же теоремы — теорему импульсов в дифференциальной форме:

$$d(m\overline{v}) = \overline{F}dt,$$

т. е. дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку. Проецируя обе части на координатные оси, получаем:

$$\begin{cases} d(mv_x) = F_x dt \\ d(mv_y) = F_y dt \\ d(mv_z) = F_z dt \ . \end{cases}$$

Интегрируя обе части в пределах от нуля до t, имеем $mv - mv_0 = S$, где v — скорость точки в момент t; v_0 — скорость при $t = 0$; S — импульс силы за время t.

Это выражение часто называют теоремой импульсов в конечной (или интегральной) форме: изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за тот же промежуток времени. В проекциях на координатные оси эту теорему можно представить в следующем виде:

$$mv_x - mv_{Ox} = S_x; \ mv_y - mv_{Oy} = S_y; \ mv_z - mv_{Oz} = S_z.$$

Для материальной точки теорема об изменении количества движения в любой из форм, по существу, не отличается от дифференциальных уравнений движения точки.

При движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус-вектор r описывает площадь, которая изменяется пропорционально площади (центральной называется сила, линия действия которой проходит через некоторый неподвижный центр O).

ЛЕКЦИЯ № 48. Изменение количества движения механической системы

Пусть к точкам системы приложены внешняя и внутренняя силы. Тогда для каждой точки можно применить теорему об изменении количества движения, например в форме:

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = F_k^{(e)} + F_k^{(j)},\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ N.$$

Суммируя по всем точкам системы правые и левые части этих соотношений и учитывая, что сумма производных равна производной от суммы, получаем:

$$\frac{d}{dt}\sum m_k \bar{v}_k = \sum F_k^e + \sum F_k^i.$$

Выражение является теоремой об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: **производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему**. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат: **производная по времени от проекции количества движения системы на какую-либо координатную ось равна сумме проекций всех внешних сил системы на ту же ось**. Умножая обе части на *dt*, получаем теорему импульсов для системы в дифференциальной форме:

$$d\bar{Q} / dt = \sum F_k^e.$$

Теорема импульсов для системы в конечной форме формулируется следующим образом: **изменение количества движения системы за какое-либо время равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему за то же время**.

Пример. Через изогнутую под прямым углом трубу постоянного сечения за 1 сек стекает жидкость массой *m*. Скорость течения жидкости постоянна, т. е. одна и та же у всех частиц жидкости.

Определить силу, с которой жидкость давит на участок трубы вследствие поворота потока на прямой угол.

Решение. Применим к объекту жидкости, заключенному между стенками трубы и поперечными сечениями, теорему об изменении количества движения в форме теоремы импульсов за промежуток времени, равный 1 сек. За секунду точки жидкости в начальный момент l сместятся на расстояние v_1 и займут положение перед поворотом l'; а точки жидкости из сечения 2 займут положение 2'. По теореме импульсов для выделенного объема жидкости имеем:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \bar{F}dt; \int_0^t \bar{F}dt = Fl.$$

Так как в общей части объема жидкости количества движения, входящие в Q и g_0, взаимно уничтожаются при их вычитании, то получаем $F = Q - Q_0$; $F = mv - mv_0$. Сила давления жидкости F на стенки трубы по закону о равенстве действия и противодействия выразится в виде $F' = - F = mvQ - mv$. Проецируя на оси координат, получаем $F'_x = mv$; $F'_y = mv_0 = mv$, так как $v = v_0$. После этого $F' = (F'^2_x + F'^2_y)^{1/2} = mv * (2)^{1/2}$. Если бы через сечение l жидкость не поступала, а образовывалась внутри трубы, как в реактивном двигателе образуются газы после сгорания топлива, а через сечение 2 она выходила, то сила F, имела бы значение $F' = - mv$. Эта сила F является частью реактивной силы двигателя вследствие выброса продуктов сгорания из двигателя, являющегося источником газа. Другая часть реактивной силы двигателя, равная $(p - p_a)S_f$ получается за счет разности давлений p, в струе выходящего из сопла газа и давления в среде p_a, куда выходит из двигателя газ. Здесь S — площадь выходного сечения сопла. Полная реактивная сила двигателя $R = mv + (p - p_a)S$. По направлению реактивная сила R всегда противоположна скорости v выходящего из двигателя газа.

ЛЕКЦИЯ № 49. Понятие о теле переменной массы

Имеем точку переменной массы M. От действия силы F скорость точки постоянной массы изменяется за время dt в соответствии с основным законом динамики точки постоянной массы на $dv_1 = (F/M)dt$. Изменение скорости точки dv_2 за время dt, вызванное изменением ее массы в отсутствие действия силы F, определяют по теореме об изменении количества движения системы постоянной массы. Внутренние силы взаимодействия точки с отделяющимися частицами не изменяют количества движения рассматриваемой системы. Применяя закон сохранения количества движения за промежуток времени от t до $t + dt$, имеем:

$$Qt = Qt + dt.$$

Учитываем только взаимодействие точки переменной массы с отделившейся от нее частицей массы $d'M$ за время dt и пренебрегаем действием на точку и эту частицу ранее отделившихся частиц. Получаем $Q_t = Mv$, так как в момент t имеется одна точка массой M, движущаяся со скоростью v относительно системы координат OXYZ. В момент $t + dt$ имеются точка массой $M - d'M$, скорость которой $v + dv_2$, и отделившаяся частица массой $d'M$, скорость которой u относительно той же системы координат OXYZ. Количество движения их в момент $t + dt$:

$$\mathrm{Q}_{t+dt} = (M - d'M)(v + dv_2) + ud'M.$$

Имеем

$$dv = (F/M)dt + (u - v)dM/M.$$

После умножения обеих частей этого уравнения на массу точки M и деления на dt получаем следующее дифференциальное уравнение движения точки переменной массы в векторной форме: $Mdv/dt = F + (u - v)dM/dt$. Выражение называют **дифференциальным уравнением Мещерского** (получено впервые в 1897 г.).

Из него следует, что **дифференциальные уравнения движения точки переменной массы имеют такой же вид, как и для точки постоянной массы, только кроме приложенных к точке сил действует дополнительно реактивная сила, обусловленная изменением массы точки.**

Первая задача Циолковского. Пусть точка переменной массы или ракета движется прямолинейно в так называемом, по терминологии Циолковского, свободном пространстве под действием только одной реактивной силы. Считаем, что относительная скорость v_r отделения частиц постоянна и направлена в сторону, противоположную скорости v движения точки переменной массы. Тогда, проецируясь на ось OX, направленную по скорости движения точки, дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки переменной массы принимает вид:

$$Mdv/dt = -\,dMv_r/dt.$$

Разделяя переменные и беря интегралы от обеих частей, имеем

$$\frac{1}{v_r}\int_{v0}^{v} dv = -\int_{M0}^{M} \frac{dM}{M},$$

где v_0 — начальная скорость, направленная по реактивной силе;

M_0 — начальная масса точки.

Выполняя интегрирование, получаем $v = v_0 + v_r \ln(M/M_0)$. Вводя число Циолковского $Z = -\,m/M_p$, получаем формулу Циолковского: $v = v_0 + v_r \ln(1 + Z)$. Из формулы Циолковского следует, что **скорость в конце горения не зависит от закона горения, т. е закона изменения массы.** Скорость в конце горения можно увеличить двумя путями. Одним из этих путей является увеличение относительной скорости отделения частиц v_r или увеличение скорости истечения газа из сопла реактивного двигателя ракеты.

ЛЕКЦИЯ № 50. Моменты количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси

Если первая мера механического движения mv характеризует поступательное движение тела, то для характеристики вращательного движения применяется другая мера движения — момент количества движения (или кинетический момент). **Моментом количества движения** точки относительно центра O называется величина, равная векторному произведению радиуса-вектора r материальной точки, проведенного из этого центра, на количество ее движения:

$$k_0 = r \times q = r \times x\, mv.$$

Соотношение между моментом количества движения (кинетическим моментом) и моментом силы устанавливается на основании теоремы об изменении момента количества движения (кинетического момента).

Теорема. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно неподвижного центра O (или оси) равняется моменту M_0 силы F, приложенной к точке, относительно того же центра O (или оси).

Как следствие приведенной теоремы, назовем законы сохранения момента количества движения материальной точки, аналогичные законам сохранения количества движения точки.

1. Если момент силы относительно неподвижного центра равен нулю, то момент количества движения точки сохраняется постоянным.

2. Если момент силы относительно некоторой оси равен нулю, то момент количества движения точки относительно оси будет постоянным. При движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус-вектор r описывает площадь, которая изменяется пропорционально площади (центральной называется сила, линия действия которой проходит через некоторый неподвижный центр O).

Кинетическим моментом K_0 материальной точки, или **главным моментом** количества движения точек системы относительно центра, называется векторная сумма моментов количеств движения точек системы относительно того же центра:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1} \vec{k}_{0i} = \sum_{i=1} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i .$$

где k_{0i} — момент количества движения i-й точки системы;

$m_i v_i$ — количество движения i-й точки;

r_i — радиус-вектор, соединяющий неподвижный центр O с i-й точкой системы.

Проектируя вектор на координатные оси x, y, z, найдем выражение для определения кинетических моментов относительно координатных осей в виде:

$$K_x = \sum m_i (y_i z_i - z_i y_i),$$
$$K_y = \sum m_i (z_i x_i - x_i z_i),$$
$$K_z = \sum m_i (x_i y_i - y_i x_i),$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i-й точки системы;

m_i — момент количества движения относительно оси вращения:

$$K_x = \omega \int r^2 dm,$$

где интегрирование распространено на массу всего тела.

ЛЕКЦИЯ № 51. Кинетический момент механической системы относительно центра и оси

Рассмотрим систему n материальных точек, находящихся в движении. В любой момент времени количество движения каждой точки системы с массой $m\upsilon$ будет изображаться вектором $m\upsilon v\upsilon$ ($\upsilon = 1, 2, ..., n$), приложенным к этой точке. Если привести систему векторов $\mathrm{m}\upsilon\mathrm{v}\upsilon$ к какому-нибудь центру O, получим:

1) главный вектор

$$Q = \sum m\upsilon v\upsilon,$$

который равен геометрической сумме количеств движения всех точек системы и называется количеством движения системы;

2) главный момент

$$G_0 = \sum (r\upsilon x m\upsilon v\upsilon),$$

который равен геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно центра O и носит название кинетического момента системы относительно центра O.

Найдем кинетический момент относительно оси OX для механической системы, вращающейся вокруг этой оси с угловой скоростью ω. Кинетический момент механической системы относительно оси OX есть сумма моментов количеств движения всех точек тела относительно этой оси. Так как скорости точек тела перпендикулярны к оси вращения, то момент количества движения точки с массой m относительно оси OX равен $m\upsilon v\upsilon h\upsilon$, где $\mathrm{h}\upsilon$ — расстояние точки от оси вращения, поэтому

$$G_x = \sum \mathrm{m}\upsilon v\upsilon h\upsilon.$$

Но так как $v\upsilon = h\upsilon\ \omega$, то

$$G_x = \sum m\upsilon\omega h^2\upsilon = \omega \sum m\upsilon h^2\upsilon.$$

Величина

$$\sum m\upsilon h^2\upsilon,$$

равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния ее до некоторой оси, называется моментом инерции тела. Обозначаем:

$$\sum m\upsilon h^2\upsilon = J_x,$$

получим:

$$G_x = J_x\omega.$$

Пусть на механическую систему действуют как внешние, так и внутренние силы. Так как внутренние силы попарно равны и противоположны, то сумма моментов этих сил относительно любого центра равна нулю. Возьмем дифференциальные уравнения движения этой системы $m\upsilon d^2r\upsilon/dt^2 = F\upsilon_{\text{вн}}$ и умножим обе части этих уравнений векторно на $r\upsilon$, т. е. на соответствующий радиус-вектор; сложив полученные таким образом равенства, будем иметь:

$$\sum\left(r\upsilon_x m\upsilon d^2r\upsilon/dt^2\right) = \sum\left(r\upsilon_x F\upsilon_{\text{вн}}\right).$$

Принимая во внимание, что $r\upsilon_x d^2r\upsilon/dt^2 = d/dt(r\upsilon_x dr\upsilon/dt)$, можно записать:

$$d/dt\sum\left(r\upsilon_x m\upsilon dr\upsilon/dt\right) = \sum\left(r\upsilon_x F\upsilon_{\text{вн}}\right).$$

Выражение, стоящее под знаком производной, есть кинетический момент системы относительно центра O; обозначая его через G_0, окончательно получим уравнение:

$$dG_0/dt = \sum\left(r\upsilon_x F\upsilon_{\text{вн}}\right).$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента механической системы, которая формулируется так: производная по времени от кинетического момента механической системы относительно какого-либо неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

Если воспользоваться понятием секторной скорости, то можно записать:

$$d/dt^2 \sum \left(mvdv/dt \right) = \sum mom_o F v_{вн},$$

где $d/dt(dvdt) = dv/dt$ — секторное ускорение точки.

Уравнение представляет собой так называемую теорему площадей: удвоенная сумма произведений масс материальных точек на их секторные ускорения относительно какого-либо центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

ЛЕКЦИЯ № 52. Работа. Теоремы о работе силы

Для характеристики действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути вводится мера этого действия, называемая работой силы. Работа A силы F, имеющей постоянную величину и направление на прямолинейном направлении u, определяется как скалярное произведение векторов силы и перемещения $A = Fu$.

Из вышеприведенного определения следует, что работа является мерой действия силы, которая является причиной движения. Еще одной мерой движения является кинетическая энергия, определяемая формулой $\mathrm{T} = 1/2mv^2$, где через m и v обозначены соответственно масса и величина скорости.

Пусть материальная точка M, находящаяся под действием силы F, совершает элементарное перемещение dr. Тогда элементарной работой силы на этом перемещении называется скалярное произведение силы на перемещение, т. е. величина $d'A = Fdr$. Здесь символ d' употребляется с целью отличить его от d, так как работа вообще не является полным дифференциалом какой-нибудь функции координат.

Работа силы на конечном пути M_1M_2 определяется как сумма элементарных работ на отдельных бесконечно малых перемещениях, т. е. интегралом

$$A_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} Fdr.$$

Так как работа силы на конечном пути выражается интегралом, то из геометрических соображений ее можно представить как площадь под графиком кривой M_1M_2. Интеграл работы определяет циркуляцию вектора силы F по дуге M_1M_2, т. е. работа силы на криволинейном пути равна циркуляции силы по этому пути.

Отметим некоторые свойства, непосредственно следующие из определения работы как скалярного произведения силы и перемещения:

1) работа силы F, имеющей проекции F_x, F_y, F_z на оси $OXYZ$, на перемещении u с проекциями u_x, u_y, u_z на те же оси равна:

$$A = F_xu_x + F_yu_y + F_zu_z;$$

2) работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к движущейся точке, равна сумме работ слагаемых сил на общем для них перемещении точки приложения сил. Если к точке, совершающей перемещение u, приложены силы F_1, F_2, F_3, ... с равнодействующей R, то работа равнодействующей равна:

$$A = Ru = (F_1 + F_2 + F_3 + ...)u =$$
$$= F_1u + F_2u + F_3u + ... = A_1 + A_2 + A_3 + ...;$$

3) работа силы на совокупности последовательных перемещений равна работе силы на результирующем перемещении. Доказательство аналогично предыдущему.

ЛЕКЦИЯ № 53. Работа сил тяжести, упругости, тяготения

Вычислим работу силы тяжести отдельной материальной точки. Пусть точка M веса G переместилась по некоторой траектории L из точки M_1 в точку M_2. Элементарная работа на перемещении dr будет равна $dA = Gxdx + Gydy + Gzdz$, но при выбранном направлении осей $Gx = 0$, $Gy = 0$, $Gz = -G$. Полная работа силы тяжести на конечном участке траектории M_1M_2 будет равна $A = G(z_1 - z_2)$. **Работа силы тяжести материальной точки равна произведению веса на разность высот начального и конечного положений точки, причем она положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна, если наоборот**. Работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой точка переместилась из начального положения в конечное. Это свойство силы тяжести оказывается характерным для широкого класса других сил, которые именуются потенциальными или консервативными. Отметим так же, что работа силы тяжести выражается полным дифференциалом некоторой функции координат и именно поэтому не зависит от формы траектории.

Рассмотрим работу силы упругой пружины, коэффициент жесткости обозначим через c. Вычислим, какую работу произведут упругие силы при растяжении конца пружины на длину f из нерастянутого состояния.

При удлинении пружины на f проекция силы упругости на ось x равна $(-cx)$, получим $dA = Fxdx = -cxdx = d(-cx^2/2)$. Полная работа сил упругости при удлинении пружины на f будет равна $A = -cf^2/2$. Работа упругой силы оказалась пропорциональной квадрату перемещения. Как и в случае силы тяжести, работа сил упругости не зависит от траектории, а только от начального и конечного положений точки.

Теорема об изменении кинетической энергии связывает изменение кинетической энергии с работой сил, вызывающих это изменение. Для вывода этой теоремы умножим обе части основного дифференциального уравнения динамики точки скалярно на элементарное приращение точки dr, получим $(mdv/dt)dr = Fdr$. Замечая, что $dr = vdt$, получим соотношение интересующей нас теоремы $dT = d'A$: приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном участке пути равно элементарной работе приложенных к точке сил на этом участке пути.

ЛЕКЦИЯ № 54. Применение теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки

Пусть силы F_1, F_2, F_3, ..., F_n приложены к твердому телу в точках M_1, M_2, M_3, ... M_n; выбирая произвольную точку тела O за полюс и обозначая радиус-вектор i-й точки тела за $OM_i = r_i'$ получим $dr_i = dr_0 + \theta x r_i'$, т. е. элементарное перемещение dr_i точки M_i равно геометрической сумме перемещения полюса dr_0 и перемещения поворота $\theta x r_i'$ вокруг полюса (θ — бесконечно малый вектор поворота). Элементарная работа силы F_i будет:

$$d'A_i = F_i dr_i = F_i dr_0 + F_i(\theta x r_i').$$

Второе слагаемое согласно свойству скалярно-векторного произведения может быть написано в виде:

$$F_i(\theta x r_i') = \theta (r_i' x F_i) = \theta \, \mathrm{mom}_O F_i.$$

Но так как проекция момента силы относительно точки на какую-либо ось, проходящую через точку, равна моменту силы относительно этой оси, то предыдущее выражение представляет собой произведение бесконечно малого угла поворота $d\varphi$ на момент силы относительно оси L, параллельной мгновенной оси поворота и проходящей через полюс O. Находим $d'A_i = F_i dr_0 + \mathrm{mom} L \, F_i d\varphi$.

Элементарная работа всех сил будет:

$$d'A = dr_0 \sum F_i + \theta \sum \mathrm{mom}_O F_i = dr_0 \sum F_i + d\varphi \sum \mathrm{mom}_L F_i.$$

Работа сил, приложенных к твердому телу, выражается через главный вектор и главный момент этих сил. Работа внутренних сил равна нулю, так как их главный вектор и главный момент равны нулю.

Мера движения материальной точки, называемая кинетической энергией, определяется формулой $T = 1/2mv^2$, где через m и v

обозначены соответственно масса и величина скорости рассматриваемой точки.

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех входящих в систему точек:

$$T = 1/2\sum m_i v_i^2.$$

Кинетическая энергия согласно этому определению является существенно положительной величиной, обращающейся в ноль лишь в том случае, когда скорости всех входящих в систему точек обращаются в нуль, т. е. в случае покоя системы.

При вычислении кинетической энергии оказывается полезным прием разложения движения системы на поступательное движение ее вместе с центром инерции и относительное движение вокруг центра инерции.

Теорема. Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре инерции и движущейся со скоростью центра инерции, и кинетической энергии системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе отсчета с началом в центре инерции:

$$T = 1/2Mv_C^2 + T'.$$

В этой формуле через M обозначена масса всей системы, через v_C — скорость центра ее инерции; кинетическая энергия системы в ее относительном движении равна:

$$T = 1/2\sum m_i v_i(r)^2,$$

где величина $v_i(r)$ — величина скорости массы m_i по отношению к системе, поступательно движущейся с центром инерции.

ЛЕКЦИЯ № 55. Кинетическая энергия твердого тела

Ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев движения твердого тела. В случае поступательного движения твердого тела, обозначая скорость через v, одинаковую для всех точек тела, найдем:

$$T = 1/2\sum m_i v_i^{\,2} = 1/2v^2\sum \text{т}_i = 1/2Mv^2,$$

где M — масса тела.

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси OZ, обозначая угловую скорость через ω и расстояние элементарной массы т_i от оси вращения через h_i имеем $v_i = \omega h_i$,и выражение для кинетической энергии будет:

$$T = 1/2\sum \text{т}_i(\omega h_i)^2 = 1/2J_x\omega^2.$$

Выражение для кинетической энергии будет:

$$T = 1/2Mv^2 + \ 1/2J_z^{(C)}\omega^2,$$

где $J_z^{(C)}$ — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через центр инерции.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки легко распространяется на случай системы материальных точек: $dT_i = d'A_i$ — суммируя эти уравнения для всех точек, включенных в систему, и зная, что кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий всех ее точек, получим:

$$dT = d\sum m_i v_i^{\,2}/2 = \sum d'A_i.$$

Здесь

$$\sum d'A_i$$

представляет сумму элементарных работ сил, действующих на рассматриваемом элементарном перемещении на каждую точку системы. На данную точку действуют внешние по отношению к системе силы — воздействия на нее со стороны тел, не принадлежащих системе, и внутренние силы — воздействия на ту же точку со стороны точек, принадлежащих к этой системе. Поэтому величина

$$\sum d'A_i$$

может быть представлена как сумма двух слагаемых: элементарной работы внешних — обозначим ее через $d'A$, и элементарной работы $d'A'$ внутренних сил.

Итак:

$$dT = d'A + d'A',$$

т. е. приращение кинетической энергии системы материальных точек на элементарном перемещении равно сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом участке пути.

Интегрируя между пределами, соответствующими двум положениям системы — начальному 1 и конечному 2, — и обозначая через T_1 и T_2 кинетические энергии в этих положениях, получим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 d'A + \int_1^2 d'A' = d'A_{1,2} + d'A'_{1,2},$$

т. е. приращение кинетической энергии системы на конечном участке пути равно сумме работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом участке.

Коэффициент полезного действия определяется как отношение полезной работы к совершенной, т. е. учитывает потерю работы сил трения. Также можно сказать, что коэффициент полезного действия — это отношение потерянной кинетической энергии к той, которая была в начале движения (до взаимодействия).

ЛЕКЦИЯ № 56. Силовое поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Потенциальная энергия

Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется **стационарным**. **Силовым полем** называется физическое пространство, удовлетворяющее условию, при котором на точки механической системы, находящейся в этом пространстве, действуют силы, зависящие от положения этих точек или от положения точек и времени (но не от их скоростей). Примерами силового поля могут служить поле силы тяжести, электростатическое поле, поле силы упругости. Стационарное силовое поле называют потенциальным в том случае, если существует такая функция, которая однозначно зависит от координат точек системы, через которую проекции силы на координатные оси в каждой точке поля выражаются следующим образом:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\ Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\ Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле численно равняется полному дифференциалу силовой функции. Работа сил, которые действуют на точки механической системы в потенциальном поле, равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях системы и не зависит от формы траектории точек этой системы. Работа сил, которые действуют на точки системы в потенциальном поле на всяком замкнутом перемещении (на перемещении, при котором начальные и конечные положения для всех точек совмещены), равна нулю, так как в рассматриваемом случае можно записать $U_2 = U_1$. Потенциальная энергия системы в любом данном ее положении равна сумме работ сил потенциального поля, приложенных к ее точкам на перемещении системы из данного положения в нулевое. Рассматриваемая сумма работ зависит только от того, из какого положения система перемещается в выбранное нулевое положение; потенциальная энергия зависит только от положения системы. Работа сил поля, которые приложены к точкам системы, на ее перемещении из первого положения в нулевое равна потенциальной энергии системы в первом положении. Аналогично работа сил поля на перемещении системы из второго положения в нулевое равна потенциальной энергии системы во втором положении. Работа сил, приложенных к точкам механической системы, на любом ее перемещении равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях системы.

Проекции на координатные оси силы, действующей в потенциальном поле на каждую точку M_i механической системы, равны взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии системы по соответствующим координатам этой точки. В выражение потенциальной энергии можно добавить любую дополнительную постоянную величину, в результате от этого частные производные от потенциальной энергии не изменятся.

ЛЕКЦИЯ № 57. Закон сохранения механической энергии

При движении механической системы под действием сил, имеющих потенциал, изменения кинетической энергии системы определяются следующими формулами:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2,\ T + П = \text{const}.$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий системы называют полной механической энергией системы. При движении механической системы в стационарном потенциальном поле полная механическая энергия системы при движении остается неизменной. В реальном времени на механическую систему могут действовать не только потенциальные силы и полная механическая энергия системы может изменяться. Это происходит в том случае, когда часть энергии механической системы расходуется на преодоление различных сопротивлений или в том случае, если наблюдается приток энергии от других систем. Расход механической энергии движущейся механической системы обычно означает превращение ее в теплоту, электричество, звук или свет, а приток механической энергии связан с обратным процессом превращения различных видов энергии в механическую энергию. Ранее было установлено, что если на материальную точку действует центральная сила P, то момент количества движения этой точки L_0 относительно центра силы O является постоянным и точка движется в плоскости l, которая перпендикулярна L_0. В этом случае L_0 является постоянной величиной или L_0 = const. Запишем в виде следующей формулы:

$$L_0 = \vec{r} \times \overrightarrow{mv} = m\left(r \times \vec{d}r\ / dt\ \right) = \text{const}.$$

Рассмотрим следующее векторное произведение: $r \times d\vec{r}$. Площадь треугольника OMM', который построен на векторах $\vec{r}$ и $d\vec{r}$, равна половине модуля этого векторного произведения:

$$dF = 1/2\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|.$$

Площадь треугольника OMM' представляет собой площадь, описанную радиус-вектором $\vec{r}$ движущейся точки в течение некоторого промежутка времени dt. Чтобы охарактеризовать быстроту изменения этой площади с течением времени, введем новую величину, численно равную dF/dt, называемую **секторной скоростью**: $dF/dt = C =$ const.Теперь мы можем определить с точностью до величины первого порядка малости площадь треугольника OMM'как площадь кругового сектора, или другими словами:

$$dF = 1/2r^2d\varphi.$$

В рассматриваемом случае секторная скорость определяется следующим выражением:

$$dF/dt = \text{const}.$$

Из выше полученных равенств имеем:

$$F = Ct + F_0.$$

Такая зависимость называется законом площадей, который формулируется так: при движении точки под действием центральной силы площадь, описываемая радиус-вектором точки, изменяется пропорционально времени. Чтобы получить дифференциальное уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием центральной силы, воспользуемся полярными координатами в плоскости l. Для этого сделаем дополнительные построения: проведем полярную ось x через центр силы O и начальное положение точки M_0. В результате начальные значения координат будут $OM_0 = r_0$ и $\varphi_0 = 0$. Проекции скорости точки на оси полярных координат r и φ можем определить по формулам, взятым из кинематики.

ЛЕКЦИЯ № 58. Поле силы притяжения. Законы Кеплера

В поле силы тяготения тело рассматривается в качестве материальной точки. Пусть тело движется под действием силы притяжения P. Проекция рассматриваемой силы на ось r будет выглядеть следующим образом:

$$P = -fmm_0 / r^2,$$

где m_0 — масса тела, вокруг которого движется изучаемое тело;

m — масса рассматриваемого тела;

r — расстояние между центрами тяжести этих тел.

Нужно определить по вышеполученному уравнению вид траектории тела, которое движется в поле ньютоновой силы тяготения в зависимости от начальных условий движения. Для этого необходимо ввести новые обозначения. Пусть $P = 4C^2/(fm_0)$. Теперь рассматриваемое уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}.$$

Следующим шагом подставим значение C в полученную формулу:

$$p=\frac{r_0^2 v_0^2}{fm_0}\sin^2\alpha.$$

Если изучить подробнее полученное уравнение, то получим, что угол φ является аргументом, величина $1/r$ — неизвестной функцией. Заметим, что общий интеграл уравнения складывается из общего интеграла однородного уравнения и частного решения этого же уравнения. Характеристическое уравнение такого вида $z^2 + 1 = 0$ имеет корни $z_{1,2} = \pm i$.

Точка P на эллиптической орбите планеты, которая расположена на наименьшем расстоянии от центра притяжения O (Солнца), называется **перигелием**, а точка A, самая удаленная от центра, —

афелием. Перигелию F в рассматриваемом случае соответствуют следующие значения: $\varphi = \varepsilon$, следовательно $\varphi = 0$, а также $r_{min} = a - c = p/(1 + e)$. Афелию в рассматриваемом случае соответствуют следующие значения: $\varphi = \varepsilon + \pi$, следовательно $\psi = \pi$, а также $r_{max} = a + c = p/(1 - e)$.

Следующим шагом можем определить продолжительность обращения тела по эллиптической орбите. Площадь F, которую описывает радиус-вектор точки M за период обращения T, представляет собой площадь эллипса с полуосями a и b. Выразим это в виде математической формулы: $F = \pi ab$.

С другой стороны, согласно ранее полученным выражениям для площади: $F = CT$.

Сравнивая полученные значения, можем их теперь приравнять:

$$CT = \pi ab.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение конического сечения в каноническом виде. Величины p и e являются основными параметрами, которые определяют форму конического сечения. В зависимости от величины эксцентриситета ε, имеем следующие виды конического сечения:

1) $\varepsilon = 0$ — окружность;

2) $\varepsilon < 1$ — эллипс;

3) $\varepsilon = 1$ — парабола;

4) $\varepsilon > 0$ — гипербола.

Отсюда следует, что под действием ньютоновой силы тяготения тело описывает траекторию в виде конического сечения, форма которого зависит от величины эксцентриситета ε. Квадрат периода обращении тела по эллиптической орбите пропорционален кубу большой полуоси орбиты. Движение планет вокруг Солнца представляет собой рассмотренное выше движение тел по эллиптическим орбитам под действием ньютоновой силы притяжения. Закон всемирного тяготения дал математическое обоснование законам Кеплера, которые формулируются так: под действием ньютоновой силы тяготения все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Площади, описываемые радиусами-векторами планет относительно Солнца, пропорциональны времени.

Квадраты времени обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

ЛЕКЦИЯ № 59. Динамика поступательного и вращательного движения твердого тела

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. В результате дифференциальные уравнения движения центра масс тела являются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела. Запишем в виде формулы:

$$m\ddot{x}_c = \sum X_i^E = X^E,$$
$$m\ddot{y}_c = \sum Y_i^E = Y^E,$$
$$m\ddot{z}_c = \sum Z_i^E = Z^E,$$

где m — масса тела;

x_c, y_c, z_c — координаты центра масс тела.

Заметим, что по дифференциальным уравнениям поступательного движения можно решать два основных типа задач на поступательное движение твердого тела:

1) по заданному движению твердого тела определять главный вектор приложенных к нему внешних сил;
2) по заданным внешним силам, действующим на тело, и начальным условиям движения находить кинематические уравнения движения тела, если известно, что оно движется поступательно.

Изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения отдельной материальной точки, которая имеет массу данного тела. Введем в рассмотрение твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω.

Требуется определить кинетический момент этого тела относительно оси его вращения. Момент количества движения точки M_i тела относительно оси Z:

$$L_{iz} = mir_i^2\omega.$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси его вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость тела. Уравнение

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum M_{iz}^E$$

представляет собой дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Проведем сравнительную характеристику уравнения с дифференциальным уравнением поступательного прямолинейного движения твердого тела:

$$m\ddot{x}_c = \sum X_i^E.$$

В результате получаем, что момент инерции твердого тела при вращательном движении имеет то же значение, что и масса тела при его поступательном движении: момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении. Если вращение тела происходит в одном направлении, то это направление считают положительным. В этом случае моменты движущих сил положительны, моменты сил сопротивления отрицательны, а главный момент внешних сил может иметь тот или другой знак. Условие $\omega_1/\omega_2 = J_{2z}/J_{1z}$ наглядно демонстрируется на приборе, называемом «скамейкой Жуковского». Этот прибор представляет собой круглую горизонтальную платформу на шариковых подшипниках, которая может вращаться вокруг вертикальной оси при очень малом трении. Если на платформе находится человек и систему приводят во вращение, то внешними силами, действующими на вращающуюся систему скамейка — человек, являются силы тяжести скамейки и человека и положение его рук, и тем самым изменяя момент инерции, человек изменяет угловую скорость системы.

ЛЕКЦИЯ № 60. Физический маятник и его малые колебания

Физическим маятником называется твердое тело, которое имеет неподвижную горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести. **Ось вращения физического маятника** называется осью привеса маятника. Примем ось привеса маятника за ось X. Координатную плоскость YOZ проведем через центр тяжести C маятника и совместим эту плоскость с плоскостью чертежа.

На маятник, который отклонен от положения покоя, действуют внешние силы: сила тяжести G и составляющие реакции цилиндрического шарнира Y_0 и Z_0. Трением в шарнире в рассматриваемом случае можно пренебречь. Реактивные силы не имеют моментов относительно оси привеса. При повороте маятника на угол φ в положительном направлении или, другими словами, против вращения часовой стрелки, сила G стремится вращать плоскость ZOY по вращению часовой стрелки и противоположно. Следовательно, знак момента силы G относительно оси X противоположен знаку угла поворота маятника φ и знаку $\sin\varphi$.

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси для маятника можно записать в виде следующего выражения:

$$J_x\ddot{\varphi} = -Gd\sin\varphi,$$

где J_x — момент инерции маятника относительно оси привеса;

G — вес маятника;

d — расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса.

Уравнение такого вида

$$\ddot{\varphi} + (Gd / J_x)\sin\varphi = 0$$

представляет собой дифференциальное уравнение качаний физического маятника. Рассматриваемое уравнение отличается от дифференциального уравнения качаний математического маятника только значением постоянного коэффициента при $\sin\varphi$. Требуется определить длину математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Формула следующего вида

$$l = J_x g(Gd) = J_x / (md)$$

определяет приведенную длину физического маятника, т. е. длину такого математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника. Следующим шагом, отложив по прямой OC отрезок $OO_1 = l$, получим точку O_1, называемую **центром качания маятника. Ось, проходящая через центр качания параллельно оси привеса, будем называть осью качаний маятника.** Для этого воспользуемся формулой для установления особых свойств оси привеса и оси качаний физического маятника. В связи с этим предположим, что маятник качается вокруг оси привеса OX.

Если ось качаний физического маятника сделать осью привеса, то прежняя ось привеса станет его осью качаний. Это положение составляет содержание теоремы Гюйгенса о свойстве взаимности оси привеса и оси качаний физического маятника. Вычисление моментов инерции неоднородных и однородных тел неправильной геометрической формулы в некоторых случаях бывает сложной задачей, т. е. моменты инерции таких тел определяют обычно опытным путем. Опытное определение моментов инерции основывается на наблюдении того или иного вида вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, так как момент инерции тела — это характеристика его инертности во вращательном движении.

ЛЕКЦИЯ № 61. Динамика плоского движения твердого тела

При плоскопараллельном движении точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Всякое движение твердого тела кинематически и динамически можно рассматривать состоящим из движения центра масс и движения тела относительно центра масс. Проведем через центр масс *C* тела плоскость, параллельную неподвижной, и возьмем в этой плоскости неподвижные оси *OXY*. Проведем через центр масс *C* оси *CX'Y'*, параллельные осям *OXY*, и подвижные оси *CX''Y''*, скрепленные с телом. Тогда положение тела будет определятся положением центром масс *C*, т. е. радиус-вектором *rc* и углом φ между осями *CX'* и *CX''*.

Кинетический момент определяется равенством

$$G_0 = \sum(m\upsilon x m\upsilon v\upsilon),$$

так как $r\upsilon = rc + r'\upsilon$, где r' — радиус-вектор любой точки системы по отношению к осям *CX'Y'*, то

$$G_0 = \sum\left[(rc + r'\upsilon)xm\upsilon(drc/dt + dr'\upsilon/dt)\right].$$

На основании этого равенства получим выражение для момента G_0 в виде

$$G_0 = rcxMvc + \sum(r'\upsilon xm\upsilon v'\upsilon),$$

где $v\upsilon$ и $v'\upsilon$ — скорости центра масс по отношению к осям *OXY* и *CX'Y'* соответственно.

Из этого равенства следует, что кинетический момент системы относительно какого-нибудь неподвижного центра равен моменту относительно этого центра количества движения центра масс в предположении, что в нем сосредоточена масса всей системы, сложенному с кинетическим моментом системы относительно центра масс в ее движении по отношению к подвижной системе отсчета, перемещающейся вместе с центром масс поступательно.

По теореме о движении центра масс имеем:

$$Md^2rc/dt^2 = \sum F_i.$$

Теорема моментов относительно центра масс дает уравнение:

$$Jcd^2\varphi/dt^2 = \sum \mathrm{momc} F_i.$$

Применим теорему моментов относительно оси OZ основной неподвижной системы, таким образом:

$$G_{oz} = M(xc(dyc/dt) - yc(dxc/dt)) + Jcd\,\varphi/dt.$$

В результате теорема моментов дает:

$$d/dt[M(xc(dyc/dt) - c(dxc/dt)) + Jcd\,\varphi/dt] = \sum (xiFiy - yiFix).$$

Свободное твердое тело может совершать плоскопараллельное движение только по отношению к плоскости OXY, перпендикулярной к одной из главных центральных осей инерции тела; при этом необходимо, чтобы для действующих на тело внешних сил выполнялось условие

$$\sum F_i = 0,\ \sum \mathrm{mom}\,x' F_i = 0,\ \sum \mathrm{mom}\,y' F_i = 0,$$

а начальные скорости всех точек должны быть равны нулю или параллельны плоскости OXY.

В случае нескольких твердых тел для каждого из них можно составить какие-нибудь три уравнения движения, а затем исключить взаимные реакции или составлять уравнения движения сразу для системы этих тел.

ЛЕКЦИЯ № 62. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс

Рассмотрим применение теоремы о кинетическом моменте к движению системы относительно центра масс. Теорема об изменении кинетического момента при движении по отношению к основной системе отсчета имеет вид:

$$dG_0 / dt = \sum \left(r\upsilon xF\upsilon_{\text{вн}} \right).$$

Так как $r\upsilon = rc + r'\,\upsilon$ и учитывая, что

$$G_0 = rcxMvc + \sum \left(r'\upsilon xm\upsilon v'\upsilon \right),$$

имеем:

$$d / dt \sum \left(r'\upsilon xm\upsilon v'\upsilon \right) = \sum \left(r'\upsilon xF\upsilon_{\text{вн}} \right),$$

или, обозначая

$$\sum \left(r'\upsilon xm\upsilon v'\upsilon \right) = G'c,$$

получим:

$$dG'c / dt = \sum \left(r'\upsilon xF\upsilon_{\text{вн}} \right),$$

т. е. при движении системы относительно центра масс производная по времени от суммы моментов, количеств движения всех точек системы относительно центра масс равна сумме моментов всех действующих внешних сил относительно того же центра. Таким образом, для движения относительно центра масс теорема об изменении кинетического момента выражается совершенно так же, как если бы центр масс был неподвижной точкой.

Возьмем за центр моментов точку O', которая движется относительно основной системы отсчета. Количество движения системы Q и кинетический момент G_0 относительно центра O являются главным вектором и главным моментом относительно того же центра. Если взять другой центр приведения O', то, очевидно, главный вектор не изменится, а главный момент станет иным. В самом деле

$$G_o = \sum \left(r'\upsilon x m\upsilon v'\upsilon \right)$$

и $r'\upsilon = r\upsilon - OO'$, принимая во внимание, что

$$\sum \left(m\upsilon v\upsilon \right) = Q,$$

получим:

$$G_0' = G_0 - OO'xQ.$$

Дифференцируя это равенство по времени и принимая во внимание, что $dOO'/dt = v'$ есть скорость центра O' относительно основной системы отсчета и что

$$dQ/dt = \sum F\upsilon_{\text{вн}},$$

получим следующую теорему об изменении кинетического момента системы по отношению к центру O', движущемуся со скоростью v' относительно основной системы отсчета:

$$dG'/dt + \upsilon' xQ = \sum \left(r'\upsilon x F\upsilon_{\text{вн}} \right).$$

При этом следует иметь в виду, что при вычислении G' скорости точек системы берутся относительно основной системы отсчета, а моменты векторов берутся относительно подвижного центра O'; в правой части уравнения стоит сумма моментов внешних сил также относительно подвижного центра O'.

Рассмотрим твердое тело, состоящее из n материальных точек, находящееся в движении. В общем случае на каждую точку действуют внешние и внутренние силы. Обозначим равнодействующую вех внешних сил через $F\upsilon_{\text{вн}}$, а равнодействующую всех внутренних сил — через $Fv_{внут}$. Уравнения движения этого тела будут:

$$mvd^2rv/dt^2 = Fv_{вн} + Fv_{внут} \ (v = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n).$$

Если к этому уравнению добавить реакции связи, то получим систему уравнений, полностью описывающую поступательное движение твердого тела.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием системы активных сил. Для вывода уравнения движения применим теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси, которую примем за ось *Z*. Имеем:

$$dG_z/dt = \sum \mathrm{mom}_z Fv.$$

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, $Z\ G_z = J_z z\omega$. Получим уравнение движения твердого тела, вращающегося около неподвижной оси:

$$J_z zd^2\varphi/dt^2 = \sum \mathrm{mom}_z F_i.$$

ЛЕКЦИЯ № 63. Плоское движение твердого тела

Так как скорость точки твердого тела есть $v = rx\omega$, то кинетический момент G_0 твердого тела относительно неподвижной точки O будет:

$$G = \sum\left[r_i x m_i\left(\omega x r_i\right)\right] = \omega\sum m_i r_i^{\,2} - \sum m_i r_i\left(r_i\omega\right).$$

Спроектируем обе части этого равенства на подвижные оси. Проекция на ось X будет

$$G_x = p\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) - q\sum m_i x_i y_i - r\sum m_i x_i z_i,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат.

Вводя компоненты симметричного тензора инерции относительно неподвижной точки и повторяя вывод для осей Y и Z, получим окончательно:

$$\begin{aligned} G_x &= pJ_{xx} - qJ_{xy} - rJ_{xz}, \\ G_y &= -pJ_{yx} + qJ_{yy} - rJ_{yz}, \\ G_z &= -pJ_{zx} - qJ_{zy} + rJ_{zz}. \end{aligned}$$

Формулы показывают, что проекции G являются линейными функциями проекций ω, коэффициентами которых являются компоненты тензора инерции. Обозначая тензор инерции символом J, можно записать $G = \omega(J)$. Последнее равенство показывает, что вектор кинетического момента G есть вектор-функция угловой скорости ω.

Пусть твердое тело движется около неподвижной точки O. Кроме основной системы осей $O\xi\eta\zeta$ (неподвижной), возьмем систему подвижных осей $OXYZ$, связанных с телом и движущихся вместе с ним относительно неподвижной системы. Теорема об изменении кинетического момента относительно неподвижной системы дает уравнение $dG/dt = M_0$.

Если da/dt есть производная какого-либо вектора a относительно основной системы, а $d\overline{a}/dt$ — изменение a относительно подвижной системой, то $da/dt = d\overline{a}/dt + \omega x a$.

Получим: $d\widehat{G}/dt + \omega x G = M_0$.

Спроектируем обе части равенства на оси подвижной системы, получим:

$$
\begin{aligned}
dG_x/dt + qG_z - rG_y &= M_x,\\
dG_y/dt + rG_x - pG_z &= M_y,\\
dG_z/dt + pG_y - qG_x &= M_z.
\end{aligned}
$$

Второе упрощение Эйлера — выбор за оси подвижной системы ориентировки главных осей инерции тела относительно неподвижной точки. При этом выборе формулы упростятся и запишутся:

$$G_x = pJ_{xx},\ G_y = qJ_{yy},\ G_z = rJ_{zz}.$$

В результате уравнения примут вид:

$$
\begin{aligned}
J_{xx}dp/dt + (J_{zz} - J_{yy})qr &= M_x,\\
J_{yy}dq/dt + (J_{xx} - J_{zz})rp &= M_y,\\
J_{zz}dr/dt + (J_{yy} - J_{xx})pq &= M_z.
\end{aligned}
$$

Система представляет дифференциальные уравнения движения твердого тела около неподвижной точки; эти уравнения называют динамическими уравнения Эйлера. Присоединяя к последним уравнениям три кинематических уравнения Эйлера

$$
\begin{aligned}
p &= d\psi/dt\sin\theta\sin\varphi + d\theta/dt\cos\varphi,\\
q &= d\psi/dt\sin\theta\cos\varphi - d\theta/dt\sin\varphi,\\
r &= d\psi/dt\cos\theta + d\varphi/dt,
\end{aligned}
$$

получим систему шести обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций времени p, q, r, φ, ψ, θ. Общие интегралы должны содержать шесть произвольных постоянных, которые определятся, если задать начальное положение и начальную угловую скорость тела.

Исключая из уравнений p, q, r, можно получить три дифференциальных уравнения второго порядка относительно трех эйлеровых углов φ, ψ, θ.

ЛЕКЦИЯ № 64. Понятие о гироскопе

Гироскопом (или волчком) обычно называют быстро вращающееся вокруг оси симметрии однородное тело вращения, ось которого может изменять свое положение в пространстве. У гироскопа обнаруживается целый ряд на первый взгляд парадоксальных явлений, называемых гироскопическими, обусловленных его быстрым вращением.

Всякое движение свободного твердого тела можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного и движения (вращательного) около неподвижной точки (теорема Шаля). Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет 3 степени свободы. Классическими параметрами являются три эйлеровых угла: φ, ψ, θ. Если они заданы для данного момента, то задано и положение тела. Если же φ, ψ, θ известны в функции времени t, то известно будет положение тела в каждый момент времени, а следовательно, будет известно движение твердого тела.

Рассмотрим с кинематической точки зрения одно из движений твердого тела с неподвижной точкой O, так называемую **регулярную прецессию**, т. е. такое сложное движение тела, когда тело вращается с постоянной по численной величине угловой скоростью ω_1 вокруг оси Z, связанной с телом, а эта ось поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг другой неподвижной оси ζ, составляя с неподвижной осью ζ один и тот же угол. Ось Z называют осью собственного вращения, а ось ζ — осью прецессии.

Прецессия называется прямой, если угол между угловой скоростью собственного вращения ω_1 и угловой скоростью прецессии ω_2 острый, и обратной, если угол между ω_1 и ω_2 тупой.

Так как скорость точки твердого тела есть $v = rx\omega$, то кинетический момент G_0 твердого тела относительно неподвижной точки O будет:

$$G = \sum\left[r_i x m_i\left(\omega x r_i\right)\right] = \omega\sum m_i r_i^2 - \sum m_i r_i\left(r_i\omega\right).$$

Спроектируем обе части этого равенства на подвижные оси. Проекция на ось X будет:

$$G_x = p\sum m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) - q\sum m_i x_i y_i - r\sum m_i x_i z_i,$$

где p, q, r — проекции угловой скорости на оси подвижной системы координат.

Вводя компоненты симметричного тензора инерции относительно неподвижной точки и повторяя вывод для осей Y и Z, получим окончательно:

$$G_x = pJ_{xx} - qJ_{xy} - rJ_{xz},$$
$$G_y = -pJ_{yx} + qJ_{yy} - rJ_{yz},$$
$$G_z = -pJ_{zx} - qJ_{zy} + rJ_{zz}.$$

Формулы показывают, что проекции G являются линейными функциями проекций ω, коэффициентами которых являются компоненты тензора инерции.

ЛЕКЦИЯ № 65. Теория удара

Сущность явления удара заключается в том, что при ударе происходит конечное приращение скорости за весьма малый промежуток времени. Обозначая среднее значение ударной силы F в интервале τ через F^*, получим (по теореме о среднем значении) $mv - mv_0 = F^* \tau$. Поскольку приращение количества движения остается величиной конечной, то удобней оперировать не с ударными силами, а с их импульсами S, так что

$$S = \int F dt.$$

Следовательно, $mv - mv_0 = S$, причем время удара τ считается величиной бесконечно малой. Также перемещение точки за время удара будет бесконечно мало.

Обозначим приращение количества движения $mv - mv_0$, которое может быть названо «приобретенным количеством движения», через Δmv; тогда $\Delta mv = S$.

Результат можно сформулировать так: количество движения, приобретенное во время удара, равно ударному импульсу. Это соотношение, эквивалентное уравнению Ньютона, является основным уравнением теории удара.

Рассмотрим систему n материальных точек. Для каждой точки будет справедливо равенство $\Delta(m\upsilon v\upsilon) = S\upsilon_{\text{вн}}$, так как для любого внутреннего ударного импульса найдется противоположный по третьему закону Ньютона. Просуммируем это равенство по индексу υ (1, 2, ..., n); получим:

$$\sum \Delta(m\upsilon v\upsilon) = \sum S\upsilon_{\text{вн}} \text{ или } \Delta Q \equiv \Delta \sum m\upsilon v\upsilon,$$

где Q — количество движения системы.

Количество движения, приобретенное системой за время удара, равно сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

Рассмотрим точку массы m, на которую наложены связи, когда она движется со скоростью v и встречает на своем пути неподвижную поверхность. Благодаря мгновенному наложению связи точка испытывает удар и мгновенно изменяет свою скорость. Обозначим скорость точки в конце удара через v'. Получим:

$$mv' - mv = S,$$

где S — ударный импульс ударных реакций связей.

Разложим скорости v и v' по направлениям нормали и касательной к поверхности в точке удара A. Тогда

$$v = vn + v\tau,\; v' = v'n + v'\tau.$$

Будем предполагать связь идеальной, следовательно, ударный импульс реакции будет направлен по нормали, и поэтому тангенциальная составляющая скорости не изменится: $v\tau = v'\tau$. Есть три возможных случая:

1) $v' = 0$. Этот случай называют **абсолютно неупругим ударом** точки о связь, и саму связь называют абсолютно неупругой;

2) $v' = -v$. Этот случай называют **абсолютно упругим ударом**, а связь абсолютно упругой;

3) $v' = -kv$, где $0 < k < 1$ (коэффициент упругости). Этот случай называют **несовершенно упругим ударом**.

Рассмотрим удар двух движущихся поступательно твердых тел при следующих условиях:

1) центры масс C_1 и C_2 тел лежат на общей нормали n (центральный удар);

2) скорости центров масс тел в начале удара направлены параллельно общей нормали n (прямой удар), M_1 и M_2 — массы тел; имеем систему:

$$M_1v'_1 + M_2v'_2 = M_2v_2 + M_1v_1,$$

и

$$k = -(v'_1 - v'_2)/(v_1 - v_2).$$

Решая эту систему, найдем искомые v'_1 и v'_2 в конце удара. Ударный импульс можно найти только для одного из тел (т. к. $S_1 = -S_2$):

$$S_1 = M_1(v'_1 - v_1).$$

ЛЕКЦИЯ № 66. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел

Рассмотрим систему n материальных точек. Для каждой точки будет справедливо равенство $\Delta(m\upsilon v\upsilon) = S\upsilon_{\text{вн}}$, так как для любого внутреннего ударного импульса найдется противоположный по третьему закону Ньютона. Умножим обе части равенства векторно на радиус-вектор $r\upsilon$ точки с массой $m\upsilon$, проведенный из некоторого центра O, и просуммируем это равенство по индексу υ (1, 2, ..., n); получим

$$\sum\left(r\upsilon x\Delta\left(m\upsilon v\upsilon\right)\right) = \sum\left(r\upsilon xS\upsilon_{\text{вн}}\right).$$

Таким образом, **изменение за время удара кинетического момента системы, взятого относительно некоторого центра, равно сумме моментов, взятых относительно того же центра, всех внешних ударных импульсов**.

Докажем теорему Карно, позволяющую определить изменение кинетической энергии в тех случаях, когда система испытывает удар благодаря тому, что на нее мгновенно накладывается или мгновенно снимается абсолютно неупругая идеальная связь. Это значит, что связь, наложенная во время удара, будет продолжать существовать и после удара, а связь, снятая во время удара, будет отсутствовать и после удара. В обоих случаях каждой точке системы с массой $m\upsilon$ будет справедлива формула:

$$m\upsilon v'\upsilon - m\upsilon v\upsilon = S\upsilon,$$

где $v\upsilon$ и $v'\upsilon$ — скорости соответствующей точки начале и в конце удара;

$S\upsilon$ — ударный импульс реакций, приложенных к этой же точке.

Найдем изменение кинетической энергии в для каждого случая.

1. Связи мгновенно **налагаются**.

Умножая обе части равенства на $v'\upsilon$ и произведя суммирование по индексу υ (1, 2, ... n) для всех точек системы, получим:

$$\sum m\upsilon v'^2\upsilon - \sum m\upsilon v'\upsilon v\upsilon = 0,$$

поскольку $\sum v'\upsilon S\upsilon = 0$,

перемещение точек согласно во время удара, и связи — идеальные. Изменение кинетической энергии за время удара будет:

$$T' - T \equiv 1/2\sum m\upsilon v'^2\upsilon - 1/2\sum m\upsilon v^2\upsilon.$$

Приведя подобные члены, найдем:

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2.$$

Так как правая часть в равенстве отрицательна, то T' после удара меньше, чем до удара T. В результате находим

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2,$$

т. е. **кинетическая энергия, потерянная системой при мгновенном наложении на нее абсолютно неупругих связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.**

2. **Мгновенное снятие связей.** В этом случае умножим обе части равенства скалярно не на вектор $v'\upsilon$, а на вектор $v\upsilon$, так как теперь со связями согласно перемещение точек не после удара, когда связи оказываются снятыми, а перемещение до удара:

$$\sum v\upsilon S\upsilon = 0.$$

Проведя в этом случае те же рассуждения, что и раньше, получим следующее выражение для изменения кинетической энергии системы при ударе:

$$T' - T = 1/2\sum m\upsilon\left(v\upsilon - v'\upsilon\right)^2.$$

Правая часть равенства положительна, следовательно, $T' > T$, и мы приходим к такому выводу: **кинетическая энергия, приобретенная системой при внезапном снятии связей, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.** В качестве иллюстрации последнего случая можно привести явление взрыва гранаты; можно утверждать, что этому явлению сопутствует увеличение кинетической энергии системы.

ЛЕКЦИЯ № 67. Общее уравнение динамики. Принцип возможных перемещений в случае движения системы. Примеры применения общего уравнения динамики

Рассмотрим движение по отношению к основной инерциальной системе отсчета механической системы, состоящей из N материальных точек. Положение системы можно однозначно определить n соответствующим образом выбранными независимыми между собой параметрами любой размерности $q_1, q_2, \ldots, q_n$, которые называются обобщенными (или лагранжевыми) координатами системы.

Уравнение Даламбера—Лагранжа в обобщенных координатах имеет вид:

$$\sum \left(Q_i - \left(d/dt\left(\partial T\left(\partial q_i/\partial t\right)\right) - \partial T/\partial q_i\right)\right)$$

В этом уравнении все вариации обобщенных координат δq_i произвольны, а потому, полагая все, кроме одной, равными нулю, получим, что выражение во внешних скобках равно нулю. Рассуждая так же по отношению к оставшимся теперь $n - 1$ слагаемым, найдем следующую систему n уравнений:

$$\left(d/dt\left(\partial T/\left(\partial q_i/\partial t\right)\right) - \partial T/\partial q_i\right) = Q_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта система есть система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрируя ее, находим координаты системы q как функции времени и $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из начальных условий. Такого рода уравнения называют уравнением Лагранжа второго рода.

Составим, пользуясь уравнениями Лагранжа, дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z. В данном случае тело имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ ($q_1 = \varphi$). Тогда уравнение Лагранжа примет вид:

$$\left(d/dt\left(\partial T/\left(\partial \varphi/\partial t\right)\right) - \partial T/\partial \varphi\right) = Q_1.$$

Кинетическая энергия тела

$$T = 1/2Jz\left(d\varphi/dt\right)^2,$$

и следовательно,

$$\left(\partial T/\left(\partial\varphi/\partial t\right)\right) = Jzd\varphi/dt,\ \partial T/\partial\varphi = 0,$$

где Jz — момент инерции тела относительно оси вращения.

Сообщая телу виртуальное перемещение — поворот на угол $\delta\varphi$, найдем, что

$$\delta A = \left(\sum \mathrm{momz}F_i\right)\delta\varphi = Mz\delta\varphi.$$

Подставляя найденные величины, получим:

$$Jz\left(d^2\varphi/dt^2\right) = Mz.$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Из этого уравнения непосредственно видно, что осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Принцип виртуальных перемещений можно сформулировать так: положение равновесия системы отличается от смежных положений, совместимых со связями, тем, что только для положения равновесия сумма элементарных работ активных сил, действующих на систему, для всяких виртуальных перемещений равна нулю, т. е. для положения равновесия мы имеем:

$$\sum F_i\delta r_i = 0.$$

Соединяя принцип виртуальных перемещений с принципом Даламбера, мы получаем принцип Даламбера—Лагранжа, дающий критерий. По этому критерию истинное движение в каждый момент отличается от кинематически возможного, т. е. совместимого со связями. Формулируется это таким образом: во всякий момент времени истинное движение отличается от кинематически возможного тем, что только для истинного движения сумма элементарных работ сил активных и сил инерции при всяких виртуальных перемещениях системы равна нулю.

Содержание