ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КРАТКИЙ КУРС

Учебное пособие

Содержание

Введение

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Теоретическая механика относится к ряду естественных наук, т.е. наук о природе. Это наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между телами.

В отличие от физики теоретическая механика изучает количественную сторону связи механического движения с механическим взаимодействием, оставляя в стороне их физическую качественную природу.

Теоретическая механика – фундамент развития технических наук. На основных законах и принципах теоретической механики базируется большинство инженерных дисциплин – сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др. (рисунок 1).

Методы исследования, применяемые в теоретической механике, используют при изучении динамических систем, которые описывают явления, выходящие за рамки механических движений.

Разделы Теоретической механики

В теоретической механике можно выделить два раздела: кинематику, математически формулирующую характеристики движения материальных тел, и раздел, объединяющий динамику и элементы статики.

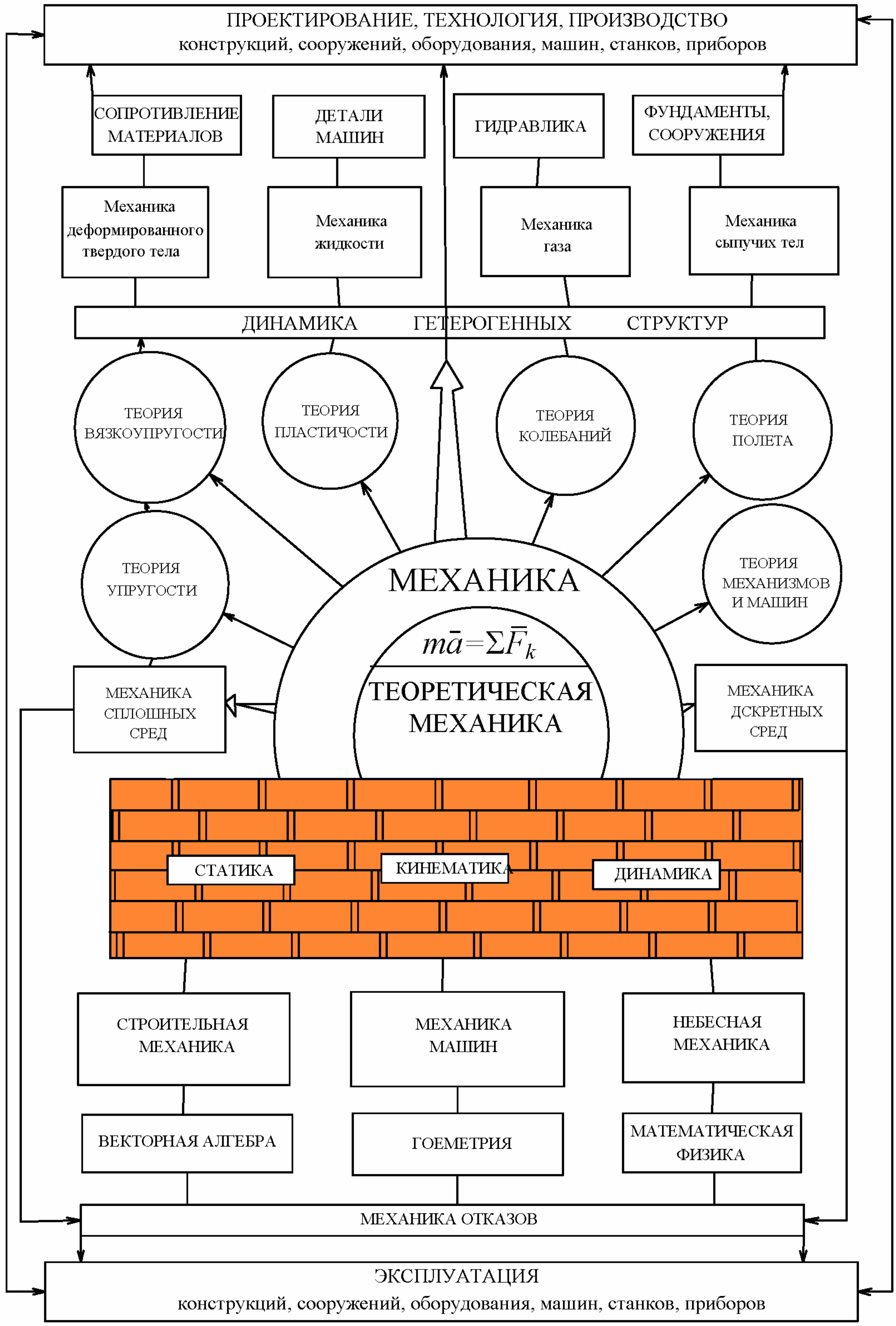

ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ТЕХНОЛОГИЯ, ПРОИЗВОДСТВО
конструкций, сооружений, оборудования, машин, станков, приборов
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ДЕТАЛИ МАШИН
ГИДРАВЛИКА
ФУНДАМЕНТЫ, СООРУЖЕНИЯ
Механика деформированного твердого тела
Механика жидкости
Механика газа
Механика сыпучих тел
ДИНАМИКА ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР
ТЕОРИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ
ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧОСТИ
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
ТЕОРИЯ ПОЛЕТА
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
$m\bar{a} = \Sigma \bar{F}_k$
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
МЕХАНИКА ДСКРЕТНЫХ СРЕД
СТАТИКА
КИНЕМАТИКА
ДИНАМИКА
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА МАШИН
НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
ГОЕМЕТРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
МЕХАНИКА ОТКАЗОВ
ЭКСПЛУАТАЦИЯ
конструкций, сооружений, оборудования, машин, станков, приборов

Рисунок 1

Кинематика – раздел Теоретической Механики, в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учета сил, вызвавших это движение.

Динамика – раздел Теоретической Механики, в котором изучается движение тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил (движение тел под действием сил).

Статика – раздел Теоретической Механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Равновесие материальных тел является частным случаем движения.

Модели теоретической механики

1. Материальная точка – тело, обладающее массой и не обладающее размерами (размерами материальной точки можно пренебречь).

2. Система материальных точек – совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

3. Абсолютно твердое тело – система материальных точек, в которой расстояния между любыми точками не изменяются при воздействии любых сил.

4. Механическая система – совокупность абсолютно твердых тел или абсолютно твердых тел и материальных точек.

5. Деформируемое тело (упругое тело).

6. Сплошная среда (идеальная и реальная жидкость, идеальный и реальный газ).

7. Дискретная среда.

1 Кинематика

Кинематика изучает движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учета сил, вызвавших это движение.

Пространство рассматривается как трехмерное евклидово пространство, не меняющее своих свойств – это пространство безгранично, однородно, изотропно. Обнаружить движение тела в пространстве можно только по отношению к какому-либо другому телу.

Система отсчета представляет собой систему координат, жестко связанную с каким-либо телом, по отношению к которому изучается движение других тел.

Время одинаково протекает во всех системах отсчета. Отсчет времени ведут от момента, с которого начинается изучение движения.

Все кинематические характеристики движения (перемещения, скорости и ускорения) рассматриваются как функции времени.

Скорость точки является одной из основных кинематических характеристик движения.

Скорость – векторная величина. Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории. Направление вектора скорости указывает в данный момент времени направление движения. Единица измерения скорости точки – м/с.

Ускорение характеризует изменение скорости точки во времени по величине и направлению. Ускорение изображают вектором. Единица измерения ускорения точки – м/с^2 (м/с за секунду).

1.1 Векторный способ задания движения точки

Положение точки задается радиус-вектором, проведенным из некоторого неподвижного центра в данную точку (рисунок 2).

Радиус-вектор изменяется с течением времени по величине и направлению

$\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Траектория точки представляет собой геометрическое место концов радиус-вектора движущейся точки – годограф радиус-вектора.

Скорость характеризует изменение радиус-вектора точки $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$ за некоторый промежуток времени. Средняя скорость за некоторый промежуток времени $\bar{v}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$. Направление вектора средней скорости $\bar{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\bar{r}$.

При $\Delta t \to 0$ $\bar{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ – мгновенная скорость точки, или скорость точки в данный момент времени.

Вектор мгновенной скорости точки в любой момент времени направлен по касательной к годографу радиус-вектора.

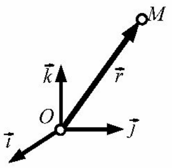
Ускорение определяют как первую производную от скорости или как вторую производную от радиус-вектора точки по времени

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}.$$

Если провести векторы скорости точки в разные моменты времени из одного центра, то огибающая концов векторов скорости будет годографом вектора скорости. Вектор ускорения в любой момент времени направлен по касательной к годографу вектора скорости.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Векторный способ задания движения



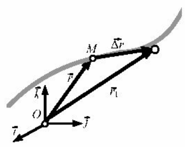
Радиус – вектор:

$$\overrightarrow{OM} = \vec r = \vec i\,x + \vec j\,y + \vec k\,z$$

$\vec i, \vec j, \vec k$ - орты

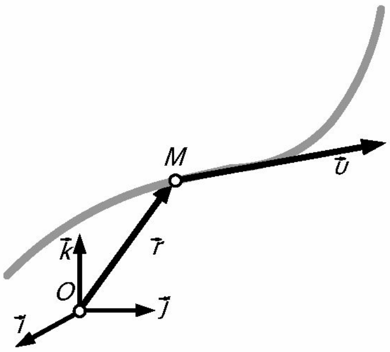
Закон движения:

$$\vec r = \vec r(t) = \vec i\,x(t) + \vec j\,y(t) + \vec k\,z(t)$$

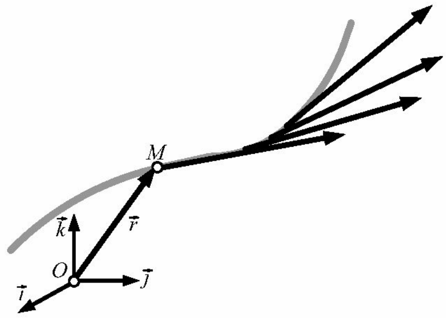


Годограф $\vec r$ траектория точки М конец радиуса – вектора $\vec r$ описывает траекторию точки М

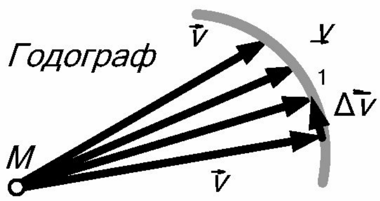
$\overrightarrow{\Delta r} = \vec r_1 - \vec r$ - перемещение точки М



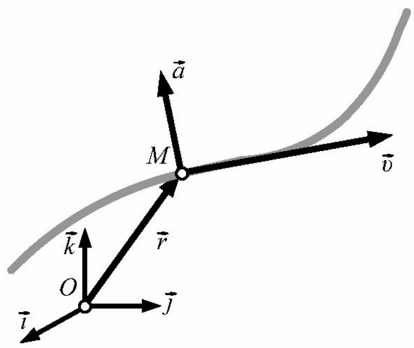
$$\vec\upsilon = \lim \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}$$



во всякое мгновение скорость точки направлена по касательной к траектории



Концы векторов скорости $\vec v(t)$, начала которых совмещены в одной точке, лежат на годографе скорости



Во всякое мгновение ускорение параллельно касательной к годографу $\vec v$

$$\vec a = \lim \frac{\Delta \vec v}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt};\ \vec a = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r}$$

Рисунок 2

1.2 Естественный способ задания движения точки

Название способа связано с системой координат, которая используется для определения кинематических характеристик движения – это оси естественного трехгранника: касательная $(\bar{\tau})$, нормаль $(\bar{n})$ и бинормаль $(\bar{b})$.

Положение точки на траектории определяют дуговой координатой (рисунок 3). При этом задаются началом отсчета и устанавливают направление отсчета дуговой координаты. Дуговая координата является функцией времени (законом движения)

$$s = s(t).$$

Таким образом, для задания движения точки естественным способом необходимо указать:

- траекторию точки;
- начало отсчета;
- закон движения точки по траектории.

Такой способ задания движения применяется обычно, если известна траектория.

Скорость характеризует изменение дуговой координаты с течением времени. Алгебраическая величина скорости точки

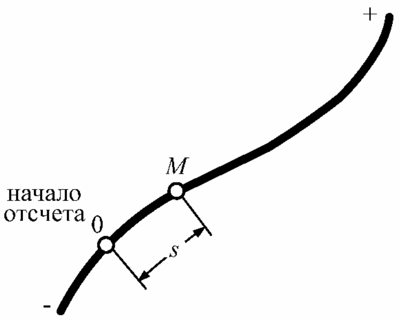
$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Направлен вектор мгновенной скорости по касательной к траектории с учетом знака результата дифференцирования, так как ось $\bar{\tau}$ направлена в сторону увеличения дуговой координаты.

Ускорение определяют в проекциях на оси естественного трехгранника

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Естественный способ задания движения



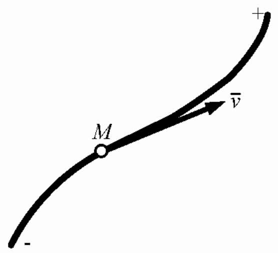
расстояние $s = OM$ (по траектории) положительно по одну сторону от O и отрицательно по другую

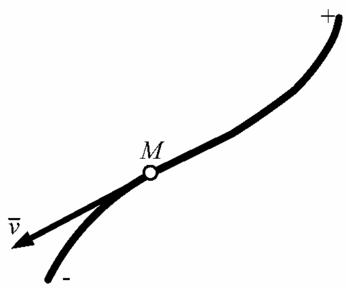
закон движения
$$s = s(t)$$

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА СКОРОСТИ ТОЧКИ M

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

если M движется в положительном направлении, то $v > 0$





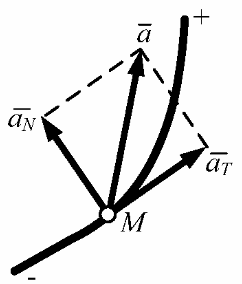
если M движется отрицательном направлении, то $v < 0$

УСКОРЕНИЕ

полное $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

Касательное $a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

Нормальное $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$



если v и a имеют одинаковые знаки, то движение ускоренное, а если разные, то – замедленное

Рисунок 3

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n .$$

Проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю, так как траектория в малых окрестностях точки лежит в соприкасающейся плоскости, перпендикулярной к бинормали.

Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} .$$

Касательное ускорение – это проекция вектора полного ускорения на касательную. Направлен вектор $\bar{a}_\tau$ по касательной к траектории с учетом знака результата дифференцирования.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} ,$$

где ρ – радиус кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение – это проекция вектора полного ускорения на нормаль. Нормальное ускорение всегда имеет положительное значение и направлено по нормали к центру кривизны траектории.

Модуль ускорения при естественном способе задания движения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

При движении точки по прямой радиус кривизны траектории равен бесконечности. В этом случае нормальное ускорение равно нулю, а полное ускорение совпадает с касательным.

При движении точки по прямой с постоянной скоростью (равномерное движение) ее ускорение равно нулю, так как вектор скорости не изменяется ни по величине, ни по направлению.

При равномерном движении точки по криволинейной траектории вектор скорости будет сохранять численное значение, но постоянно менять направление. Касательное ускорение в этом случае будет равно нулю, а полное ускорение будет совпадать с нормальным. Таким образом, криволинейное движение точки всегда происходит с ускорением.

При движении точки с ускорением по произвольной траектории движение будет ускоренным (при постоянном по модулю ускорении – равноускоренным), если направления векторов скорости и ускорения совпадают, в противном случае движение будет замедленным (при постоянном по модулю ускорении – равнозамедленным).

1.3 Понятие об абсолютно твердом теле

Абсолютно твердое тело – система материальных точек, в которой расстояния между любыми точками не изменяются при воздействии любых сил.

Задачи кинематики твердого тела:

1) задание движения и определение кинематических характеристик тела в целом;

2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Различают пять видов движения твердого тела:

1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоское;

4) сферическое;

5) свободное.

Поступательное и вращательное движения являются простейшими. Все остальные движения складываются из простейших в разных сочетаниях и в этом смысле являются сложными движениями.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

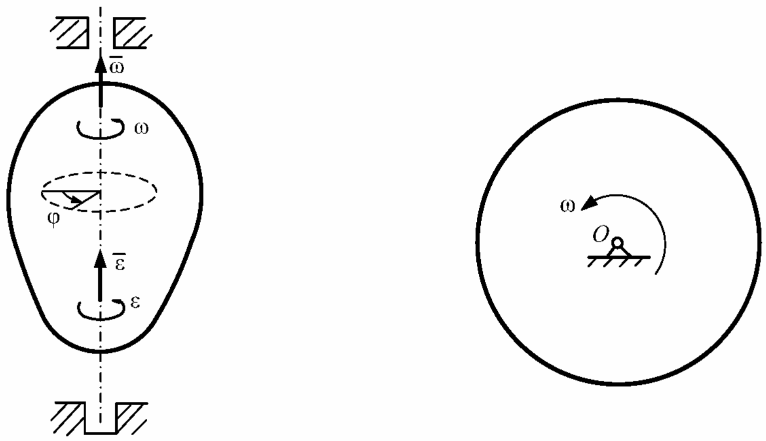
Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Поступательное движение твердого тела – это не обязательно прямолинейное движение. Это может быть движение тела по любой траектории. Траектории всех точек тела при поступательном движении совпадают при наложении. Изучение поступательного движения сводится, таким образом, к изучению движения одной его точки, например, центра тяжести. Часто при поступательном движении твердого тела его принимают за материальную точку.

1.4 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения. При этом все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности, центры которых лежат на оси вращения (рисунок 4, а).

В плоской задаче, когда ось вращения перпендикулярна плоскости чертежа, имеется одна точка, через которую проходит ось вращения – точка O (рисунок 4,б).



а) б)

Рисунок 4

Кинематические характеристики вращательного движения тела:

– угловое перемещение $\varphi = f(t)$, где φ – угол поворота [рад];

– угловая скорость $\overline{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\left[\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}\right]; \left[\text{с}^{-1}\right]$;

– угловое ускорение $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}\left[\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right]; \left[\text{с}^{-2}\right]$.

Направление угловой скорости и углового ускорения могут изображаться на схемах дуговыми стрелками (рисунок 4, а, б).

Угловая скорость – вектор, направленный вдоль оси вращения, определяющий плоскость и направление вращения, с конца вектора угловой скорости видно вращение против часовой стрелки (правило правого винта), угловое ускорение – вектор, направленный по касательной к годографу вектора угловой скорости, то есть тоже вдоль оси вращения (рисунок 4, а). Определение направление вектора углового ускорения – по правилу правого винта.

Траекторией любой точки тела, совершающего вращательное движение, является окружность (рисунок 5).

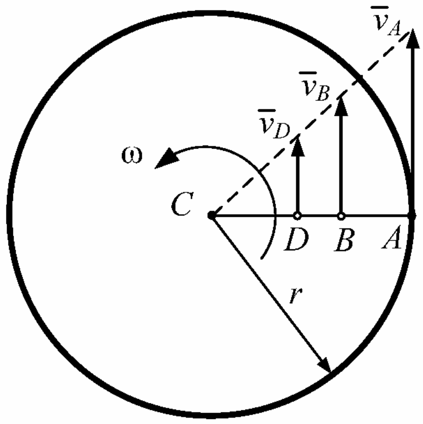


Рисунок 5

Линейная скорость точки может быть определена по формуле Эйлера

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \qquad (1.1)$$

где $\overline{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения тела; $\overline{r}$ – радиус-вектор точки, соединяющий центр вращения с точкой.

Модуль скорости $\overline{v}$ точки

$$v = \omega r \sin\left(\widehat{\overline{\omega}, \overline{r}}\right) = \omega r \sin\frac{\pi}{2} = \omega r.$$

Направлен вектор линейной скорости точки по касательной к траектории в направлении вращения.

Например, скорости точек A, B, D определяются следующим образом

$v_A = \omega CA$, $v_B = \omega CB$, $v_D = \omega CD$

Чем ближе точка находится к центру вращения, тем меньше ее скорость

Угловую скорость вращения твердого тела можно определить, зная скорость какой-либо точки тела и ее расстояние до оси вращения

$$\omega = \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB} = \frac{v_D}{CD}.$$

Учитывая, что траекторией движения точки во вращательном движении твердого тела является окружность (рисунок 6), ускорение точки может быть определено в соответствии с естественным способом задания движения точки: $\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}$.

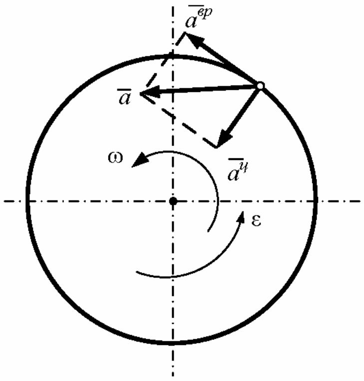


Рисунок 6

При вращательном движении твердого тела принято касательную составляющую ускорения точки называть вращательным ускорением, а нормальную составляющую – центростремительным: $\overline{a} = \overline{a}^{\text{вр}} + \overline{a}^{\text{ц}}$.

Ускорение точки вращающего тела может быть определено дифференцированием формулы Эйлера (1.1)

$$\overline{a} = \dot{\overline{\omega}} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \dot{\overline{r}} \quad \text{или} \quad \overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v},$$

где $\overline{a}^{\text{вр}} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ – вращательное ускорение; $\overline{a}^{\text{ц}} = \overline{\omega} \times \overline{v}$ – центростремительное ускорение.

Модуль вращательного ускорения определяется по формуле

$$a^{\text{вр}} = \varepsilon r.$$

Модуль центростремительного ускорения может быть определен по одной из следующих формул

$$a^{\text{ц}} = \omega v; \; a^{\text{ц}} = \omega^2 r; \; a^{\text{ц}} = \frac{v^2}{r}.$$

Здесь использованы подстановки $\omega = \dfrac{v}{r}$ или $v = \omega r$.

1.5 Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости

Определение 1. Плоскопараллельным (или плоским) движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости.

Определение 2. Плоскопараллельным (или плоским) движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле перпендикулярно неподвижной плоскости, будет оставаться перпендикулярной этой плоскости.

При этом движении расстояние от любой точки тела до неподвижной плоскости остается постоянным. Таким образом, чтобы изучать плоскопараллельное движение тела, достаточно знать, как движется любое сечение тела, параллельное неподвижной плоскости. Поэтому, говоря о плоскопараллельном движении, часто ограничиваются рассмотрением движения одного ее сечения, движущегося параллельно неподвижной плоскости, т.е. движения плоской фигуры.

Проведем в теле через точки A и B прямую и отметим положения этой прямой, которые соответствовали двум разным моментам движения (рисунок 7).

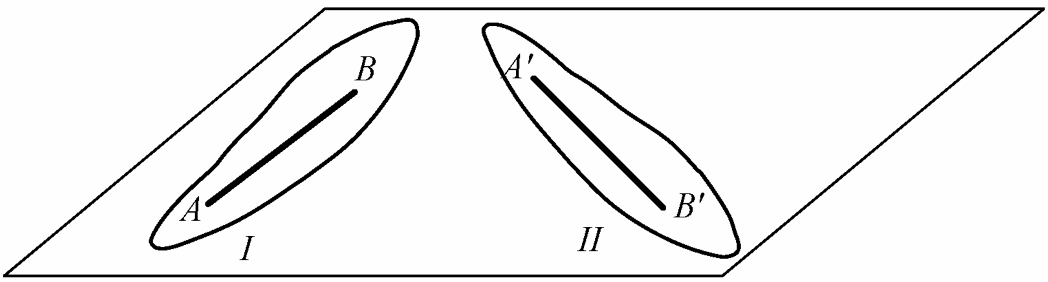
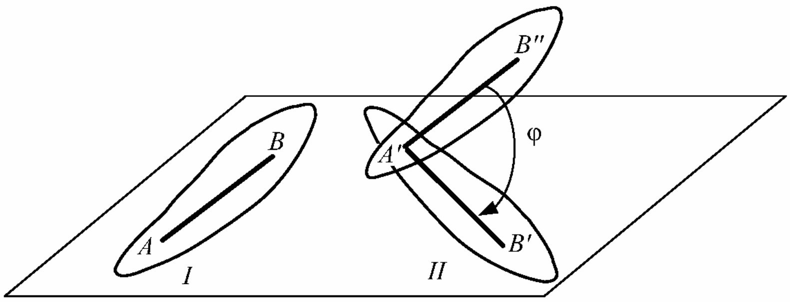


Рисунок 7

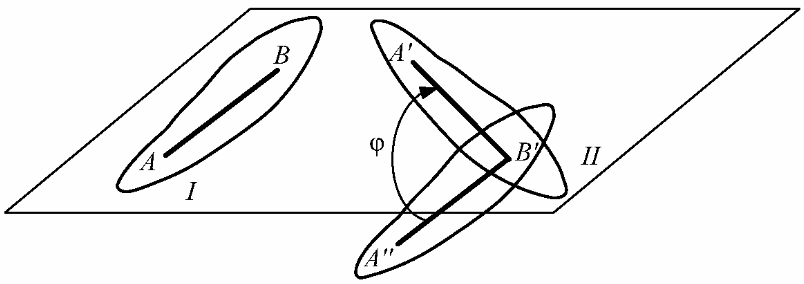
Переместить тело из положения *I* в положение *II* можно различными способами:

1) переместить прямую из положения AB в положение $A^{/}B^{//}$ поступательно, а затем повернуть на угол φ в плоскости фигуры (рис. 7.1, а) в положение $A^{/}B^{/}$;

2) переместить прямую из положения AB в положение $A^{//}B^{/}$ поступательно, а затем повернуть на угол φ в плоскости фигуры (рис. 7.1, б) в положение $A^{/}B^{/}$.



а)



б)

Рисунок 7.1

При этом поворот фигуры происходит на один и тот же угол в одном и том же направлении, в то время как поступательное движение происходит по разным законам.

Отсюда следует вывод, что плоское движение можно мысленно разложить на поступательное движение вместе с некоторой точкой, принятой за полюс, и вращательное вокруг полюса. При этом вращательная часть плоского движения от выбора полюса не зависит.

Уравнения плоского движения описывают закон движения полюса и закон вращения тела вокруг полюса.

Движение плоской фигуры, в которой проведена линия AM (рисунок 8), может быть задано следующими уравнениями движения:

$$\bar{r}_A = \bar{r}(t);\ \varphi = \varphi(t),$$

если точка A выбрана за полюс.

Положение точки M может быть определено в любой момент времени следующим образом:

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \overline{AM}\,. \qquad (1.2)$$

Таким образом, уравнение (1.2) задает закон движения точки M.

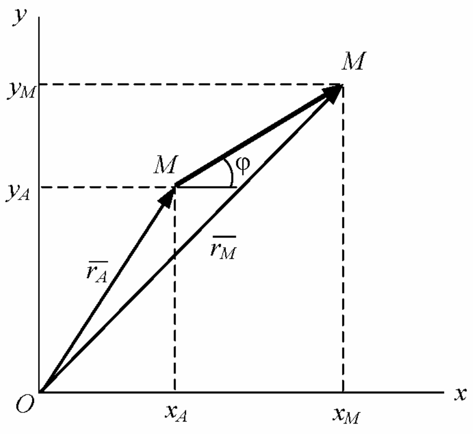


Рисунок 8

Выберем за полюс точку A. Продифференцируем по времени выражение (1.2), чтобы получить выражение для скорости точки M в векторной форме:

$$\frac{d\bar{r}_M}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AM}}{dt}.$$

Теорема. Скорость любой точки плоской фигуры складывается геометрически из скорости полюса и скорости за счет вращательного движения фигуры вокруг полюса

$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$, причем $\bar{v}_{MA} \perp AM$.

Поскольку центром вращения в данном случае является полюс *A*, а радиус кривизны траектории точки *M* в этом движении равен *AM*, то значение скорости $\bar{v}_{MA}$ (следует читать «Линейная скорость движения точки *M* вокруг точки *A*») можно определить как в простейшем вращательном движении:

$$v_{MA} = \omega R.$$

Возьмем вторую производную по времени от выражения (1.2), чтобы получить выражение для ускорения точки *M* в векторной форме:

$$\frac{d^2\bar{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\overline{AM}}{dt^2}.$$

<u>Теорема</u>. Ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорения полюса и ускорения за счет вращательного движения фигуры вокруг полюса

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}.$$

Поскольку центром вращения в данном случае является полюс *A*, а радиус кривизны траектории точки *M* в этом движении равен *AM*, то это ускорение $\bar{a}_{MA}$ (следует читать «Ускорение движения точки *M* вокруг точки *A*») можно определить как в простейшем вращательном движении:

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{вр} + \bar{a}_{MA}^{ц}.$$

Модули вращательного и центростремительного ускорений $a_{MA}^{вр} = \varepsilon R$ и $a_{MA}^{ц} = \omega^2 R$ соответственно, где $R = AM$.

Частные случаи:

Случай 1. Полюс движется поступательно. Векторное выражение для определения ускорения любой точки этого тела имеет вид

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^{вр} + \overline{a}_{MA}^{ц}.$$

Случай 2. Полюс движется по окружности. В этом случае ускорение полюса, учитывая известность траектории, определяется как при естественном способе задания движения точки

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n},$$

то есть представляет собой геометрическую сумму касательного и нормального ускорений. В этом случае ускорение любой точки тела определится следующим векторным выражением

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{MA}^{вр} + \overline{a}_{MA}^{ц}.$$

Другие способы определения скоростей и ускорений точек:

Способ 1. Следствие из теоремы о скоростях

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки (рисунок 9), равны и одинаково направлены (правило Жуковского)

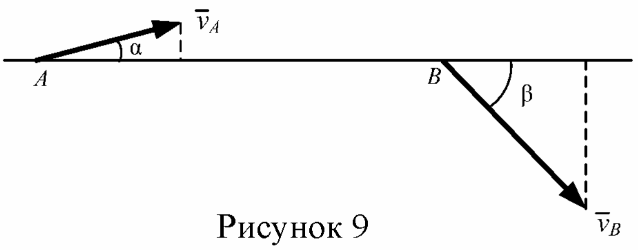


Рисунок 9

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$

Способ 2. Мгновенный центр скоростей

В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент времени равна нулю. Эта точка называется <u>мгновенным центром скоростей</u> (МЦС). Эта точка (точка P) не обязательно принадлежит телу, она может находиться и вне его.

Если выбрать МЦС за полюс, то скорость любой точки плоской фигуры равна

$$\bar{v}_M = \bar{v}_P + \bar{v}_{MP},$$

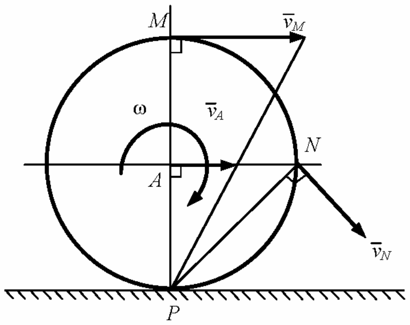
где $\bar{v}_P$ – скорость полюса, $\bar{v}_{MP}$ – скорость за счет вращения фигуры вокруг полюса.

Т.к. определению МЦС – неподвижная точка и ее скорость равна нулю $(\bar{v}_P = 0)$, то

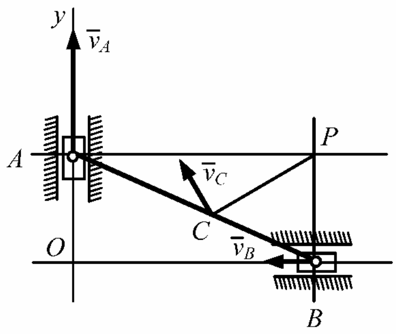
$\bar{v}_M = \bar{v}_{MP}$ и численно $v_M = \omega \cdot MP$, где MP – расстояние от точки M до МЦС.

Правило определения положения МЦС: МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям всех точек плоской фигуры в данный момент времени.

Примеры определения МЦС (рисунок 10, а, б):



а)



б)

Рисунок 10

Поле скоростей всех точек плоской фигуры должно соответствовать полю скоростей вращательного движения вокруг оси, проходящей через МЦС как при вращении вокруг неподвижной оси. Таким образом, МЦС является мгновенным центром вращения, через который в данный момент времени проходит мгновенная ось вращения, а расстояния от МЦС до точек плоской фигуры являются мгновенными радиусами вращения в данный момент времени.

Способ 3. Мгновенный центр ускорений

В каждый момент времени существует точка, неизменно связанная с плоской фигурой, ускорение которой в этот момент времени равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Геометрически МЦУ находится на пересечении линий, проведенных к ускорениям точек плоской фигуры под одним и тем же углом, а именно, под углом, равным углу, который образует вектор полного ускорения с нормалью

$$\alpha = arctg\frac{\overline{a}_{вр}}{\overline{a}_{ц}} = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2} = const .$$

1.6 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение

Сферическим движением твердого тела называется такое движение, при котором остается неподвижной одна точка, связанная с телом.

Положение тела, имеющего неподвижную точку в любой момент времени, задается необходимым и достаточным числом параметров. Так как тело в любой момент времени имеет одну и ту же неподвижную точку, его положение задают при помощи углов. Общее название этих углов – углы Эйлера.

Для иллюстрации сферического движения и углов Эйлера используют две системы координат: система координат $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная, связанная с наблюдателем; система координат $Oxyz$ – подвижная (прямоугольная правая), жестко связанная с вращающимся телом (рисунок 11). Плоскость I определяется системой координат x_1Oy_1, плоскость II – системой координат xOy. Плоскости I и II пересекаются по линии OK – линии узлов.

Углы Эйлера, задающие положение тела в любой момент времени:

φ – угол собственного вращения (угол поворота тела вокруг оси симметрии z в плоскости II – xOy);

ψ – угол прецессии (угол поворота оси собственного вращения z в плоскости I – x_1Oy_1 – вокруг неподвижной оси z_1);

θ – угол нутации (угол поворота оси собственного вращения z вокруг линии узлов – отклонение оси собственного вращения от неподвижной оси z_1).

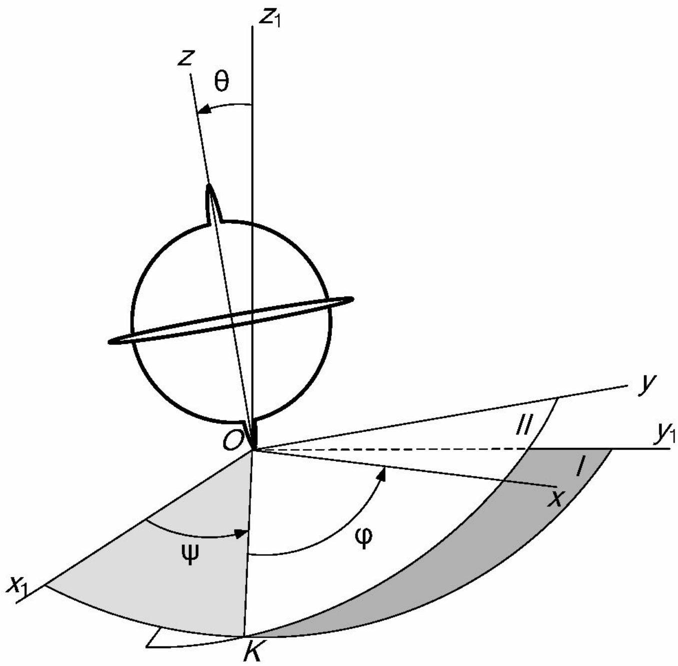


Рисунок 11

В любой момент времени положение тела по отношению к неподвижной системе координат $Ox_1y_1z_1$ (неподвижному наблюдателю) задается зависимостями (законами движения)

$$\varphi = f_1(t);\ \psi = f_2(t);\ \theta = f_3(t).$$

Кинематические характеристики сферического движения:

1) угловые перемещения;

2) угловые скорости;

3) угловые ускорения.

Угловые перемещения задаются законами движения.

Угловые скорости определяются как первые производные по времени от законов движения (собственного вращения, прецессии и нутации соответственно):

$$\omega_1 = \dot{\varphi};\ \omega_2 = \dot{\psi};\ \omega_3 = \dot{\theta}.$$

Векторы угловых скоростей направляются в соответствии с направлением вращения (по правилу правого винта) вдоль соответствующих осей (рисунок 12).

Вектор общей угловой скорости от всех трех вращений равен геометрической сумме слагаемых векторов

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3$$

и направлен в данный момент времени вдоль некоторой прямой OP, называемой мгновенной осью вращения. Угловая скорость $\overline{\omega}$ в данный момент времени – мгновенная угловая скорость.

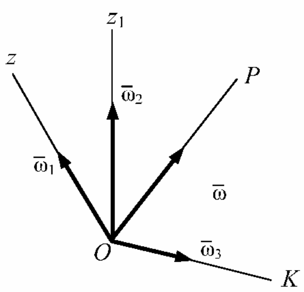


Рисунок 12

Угловое ускорение тела при сферическом движении характеризует изменение угловой скорости по величине и направлению. Угловое ускорение определяют как первую производную от вектора мгновенной угловой скорости

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}.$$

Направлен вектор углового ускорения по касательной к годографу вектора угловой скорости, поэтому направление вектора углового ускорения $\overline{\varepsilon}$ в общем случае не совпадает с направлением вектора мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ в отличие от простейшего вращательного движения, когда ось вращения неподвижна.

Таким образом, сферическое движение тела рассматривают слагающимся из серии последовательных элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, постоянно меняющих свое положение в неподвижной системе координат, но проходящих все время через одну и ту же неподвижную точку.

Вектор скорости точки в данный момент времени может быть определен по формуле Эйлера

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}, \tag{1.3}$$

где $\overline{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения тела; $\overline{r}$ – радиус-вектор точки.

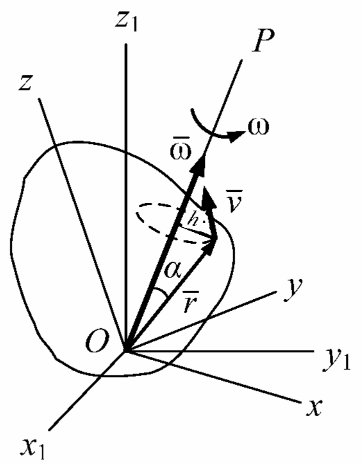


Рисунок 13

Модуль скорости точки $v = \omega r \sin\alpha$. Т.к $r\sin\alpha = h$, где h – расстояние от точки до мгновенной оси вращения, то $v = \omega h$. Направлен вектор скорости точки по касательной к траектории точки относительно мгновенной оси вращения (рисунок 13).

Аналитически скорость точки тела, совершающего сферическое движение можно определить по формулам Эйлера

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y;\; v_y = \omega_z x - \omega_x z;\; v_x = \omega_x y - \omega_y x,$$

где v_x, v_y, v_z – проекции искомого вектора; ω_x, ω_y, ω_z – проекции вектора мгновенной угловой скорости; x, y, z – проекции радиус-вектора точки на координатные оси, жестко связанные с вращающимся телом.

Ускорение точки тела, совершающего сферическое движение может быть определено дифференцированием уравнения Эйлера (1.3), что соответствует векторному способу задания движения точки

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \left(\dot{\overline{\omega}} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \dot{\overline{r}}\right).$$

Здесь учтено, что $\overline{\omega}$ и $\overline{r}$ могут меняться при движении, так как все кинематические характеристики движения в кинематике рассматриваются как функции времени.

По определению $\dot{\overline{\omega}} = \overline{\varepsilon}$ и $\dot{\overline{r}} = \overline{v}$. Следовательно

$\overline{a} = \left(\overline{\varepsilon} \times \overline{r}\right) + \left(\overline{\omega} \times \overline{v}\right)$ или $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$.

Поскольку в каждый момент времени тело при сферическом движении совершает элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения, то по аналогии с вращательным движением ускорение $\overline{a}_1 = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ называет вращательным, а $\overline{a}_2 = \overline{\omega} \times \overline{v}$ – осестремительным.

Численно, по модулю $a_1 = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon h_1$; $a_2 = \omega v \sin 90° = \omega v = \omega^2 h_2$.

Вектор вращательного ускорения направлен в соответствии с направлением вектора $\overline{\varepsilon}$, а вектор осестремительного ускорения – к мгновенной оси вращения.

1.7 Общий случай движения свободного твердого тела

В самом общем случае движение твердого тела может считаться свободным, если оно может перемещаться каким угодно образом по отношению к неподвижной системе отсчета. Свободное тело имеет 6 степеней свободы: 3 поступательных и 3 вращения. Рассматривают такое движение как поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса как вокруг неподвижной точки. Поскольку в кинематике за полюс может быть выбрана любая точка тела (или неизменно связанная с телом), то движение полюса может быть задано в виде

$$\bar{r}_A = \bar{r}(t).$$

Вращательная часть свободного движения тела от выбора полюса не зависит и определяется для случая сферического движения углами Эйлера

$$\varphi = f_4(t);\ \psi = f_5(t);\ \theta = f_6(t).$$

Эти уравнения позволяют определить положение твердого тела в любой момент времени относительно неподвижной системы координат.

Таким образом, движение свободного твердого тела складывается из поступательного движения вместе с полюсом, имеющим в данный момент времени скорость $\bar{v}_A$, и серии элементарных поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюс, с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Основными кинематическими характеристиками свободного движения, таким образом, будут скорость $\bar{v}_A$ и ускорение $\bar{a}_A$ полюса и угловая скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$ вращения вокруг полюса.

Поскольку скорости всех точек тела при поступательном движении вместе с полюсом A равны и одинаково направлены, то этой же скоростью $\bar{v}_A$ будут обладать все точки свободного тела.

Поскольку вращательная часть движения свободного твердого тела от выбора полюса не зависит и рассматривается как сферическое движение вокруг полюса, то скорость, которую получает точка M при вращении с телом вокруг полюса $\bar{v}_{MA}$, определяется по формуле Эйлера (1.3).

Тогда скорость любой точки M может быть вычислена следующим образом

$$\overline{v}_M = \overline{v}_A + \overline{v}_{MA}.$$

Аналогично определяется ускорение любой точки тела в любой момент времени

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA},$$

где $\overline{a}_A$ – ускорение полюса; $\overline{a}_{MA}$ – ускорение, которое приобретает точка, совершая вместе с телом мгновенный поворот вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через полюс.

1.8 Абсолютное и относительное движение точки

Точка совершает относительное движение в некоторой системе координат по некоторой траектории. Если эта система координат движется по отношению к неподвижной системе отсчета, то в любой момент времени точка вынуждена совершать движение вместе с некоторой точкой этой подвижной системы отсчета.

Сложным движением точки называется абсолютное движение, составленное из относительного и переносного движений. По отношению к подвижной системе координат движение точки будет относительным, движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной – переносным. Для обозначения относительного движения используются индексы «отн» или «r», для обозначения переносного движения – «пер» или «e».

Теорема. Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей

$$\overline{v}_a = \overline{v}_r + \overline{v}_e.$$

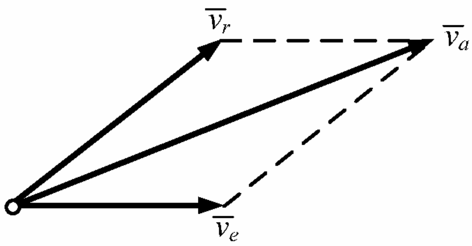


Рисунок 14

Модуль абсолютной скорости в общем случае (рисунок 14) может быть определен по теореме косинусов $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\left(\overline{v}_r, \hat{\ } \overline{v}_e\right)}$.

Если вектора относительной и переносной скоростей колинеарны, их модули складывают $v_a = v_r + v_e$ или вычитают $v_a = v_r - v_e$.

Если вектора относительной и переносной скоростей перпендикулярны, модуль абсолютной скорости определяют по теореме Пифагора $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}$.

<u>Теорема Кориолиса</u>. При сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений.

$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_{к}$.

Относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости в относительном движении. Переносное ускорение характеризует изменение переносной скорости в переносном движении.

Кориолисово ускорение учитывает взаимное влияние друг на друга переносной и относительной скоростей, то есть изменение относительной скорости в переносном движении и переносной скорости в относительном движении.

Вектор кориолисова ускорения

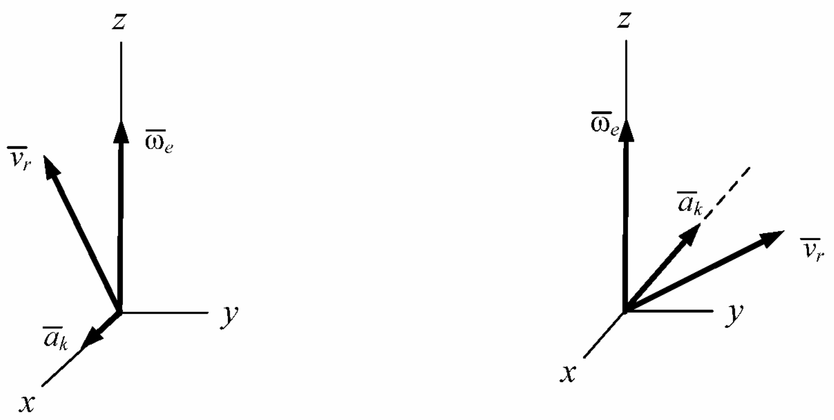
$\overline{a}_{к} = 2\left[\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r\right]$.

Модуль кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения двух векторов

$$a_{к} = 2\omega_e v_r \sin\left(\overline{\omega}_e \hat{,} \overline{v}_r\right),$$

где $\overline{\omega}_e$ – вектор переносной угловой скорости; $\overline{v}_r$ – вектор относительной скорости точки.

Вектор кориолисова ускорения лежит в плоскости, перпендикулярной перемножаемым векторам, и с конца вектора кориолисова ускорения виден поворот первого перемножаемого вектора ($\overline{\omega}_e$) в сторону второго ($\overline{v}_r$) на меньший угол против часовой стрелки (рисунок 15, а, б).



а) б)

Рисунок 15

Правило Жуковского: для определения направления кориолисова ускорения надо вектор относительной скорости спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси вращения, и повернуть проекцию в сторону вращения на 90° (рисунок 16).

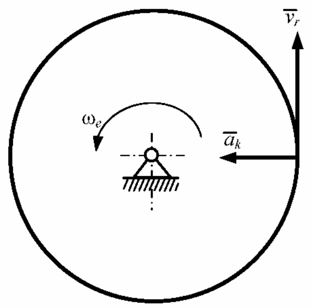


Рисунок 16

Кориолисово ускорение равно нулю, если переносное движение – поступательное.

Если переносное движение – вращательное, кориолисово ускорение может обращаться в нуль, если обратилась в нуль одна из скоростей, а также, если векторы перемножаемых скоростей оказались параллельны.

1.9 Сложное движение твердого тела

Если тело совершает относительное движение в некоторой системе координат, которая движется по отношению к неподвижной системе отсчета, то результирующее движение тела называют сложным.

Задачей кинематики в этом случае является нахождение зависимости между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений (рисунок 17).

1. Если переносное и относительное движения тела являются поступательными, то абсолютное движение тела тоже будет поступательным со скоростью $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$.

2. Если переносное и относительное движения тела являются вращательными вокруг параллельных осей, тогда результирующее движение тела будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

СЛОЖЕНИЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ

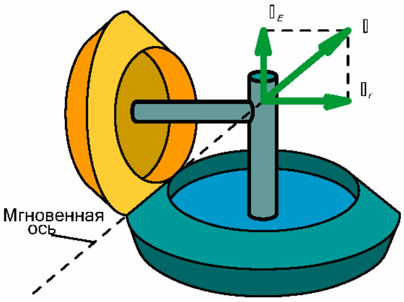
Производится по правилам сложения векторов

1. Вращение вокруг пересекающихся осей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$$

Мгновенная ось абсолютного вращения

лежит на диагонали параллелограмма, построенного на векторах относительной и переносной угловых скоростей.



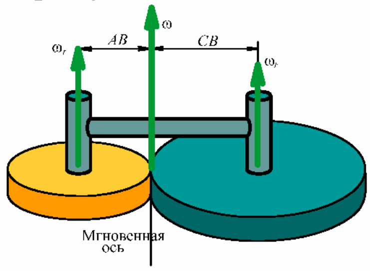
2. Вращение вокруг параллельных осей

А. В одну сторону

$$\omega = \omega_r + \omega_e$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_e}{\omega_r}$$

Точка C делит расстояние AB внутренним образом

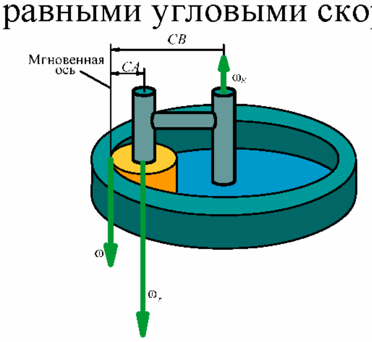


Б. В разные стороны с численно не равными угловыми скоростями

$$\omega = \omega_r - \omega_e$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_e}{\omega_r}$$

Точка C делит расстояние AB внешним образом



В. В разные стороны с численно равными угловыми скоростями (пара вращений)

$$\omega = \omega_r - \omega_e = 0$$

Все точки тела имеют одинаковые скорости, равные моменту пары угловых скоростей

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{AB}$$

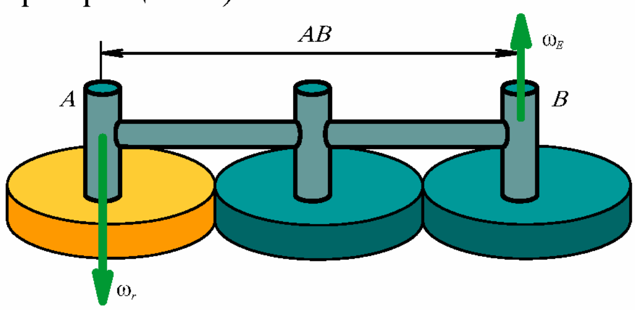


Рисунок 17

Если оба вращения направлены в одну сторону, то результирующее движение будет мгновенным вращением с абсолютной угловой скоростью $\omega = \omega_r + \omega_e$ вокруг мгновенной оси вращения. Положение этой оси с течением времени изменяется – мгновенная ось вращения описывает цилиндрическую поверхность.

Если вращения направлены в разные стороны и угловые скорости разные (например, $\omega_r > \omega_e$), результирующее движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью $\omega = \omega_r - \omega_e$ вокруг мгновенной оси вращения, которая также описывает цилиндрическую поверхность.

Если вращения происходят в разные стороны с одинаковыми скоростями $\omega_r = \omega_e$, то результирующее движение называется <u>парой вращений</u>, а векторы $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$ образуют пару угловых скоростей.

Пара скоростей не приводит к вращательному результирующему движению: $\omega_a = 0$. Результирующее движение будет поступательным движением со скоростью $v = \omega AB$, где AB – расстояние между осями вращения.

Если оси вращения пересекаются не под прямым углом, то результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через точку пересечения осей переносного и относительного движений, с угловой скоростью $\overline{\omega} = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e$. Этот случай можно отнести к сферическому движению.

3. Если относительное движение является вращательным, а переносное – поступательным, причем скорость поступательного движения перпендикулярна оси вращения $(\overline{v}_e \perp \overline{\omega}_r)$, то результирующее движение будет плоскопараллельным, слагающимся из поступательного со

скоростью $\overline{v}_e$ и вращательного со скоростью ω_r, т.к. вращательная часть плоского движения от выбора полюса не зависит.

Если $\overline{v}_e \| \overline{\omega}_r$, результирующее движение будет винтовым. Если векторы $\overline{v}_e$ и $\overline{\omega}_r$ направлены в одну сторону, винт будет правым, если в разные – левым. Расстояние, проходимое за время одного оборота тела точкой, лежащей на оси винта, называется шагом винта. Любая точка тела, не лежащая на оси винта, описывает винтовую линию. Абсолютная скорость такой точки будет $v = \sqrt{v_e^2 + \omega_r^2 r^2}$.

Если вектор скорости поступательного движения образует произвольный угол с осью вращения, то результирующее движение тоже будет винтовым. Ось винта будет мгновенной винтовой осью, постоянно меняющей свое положение. Это движение можно отнести к общему случаю движения твердого тела.

Пример 1. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s = 6t - 4t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\smile}{AM}$ (рисунок 18).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1=1 с.

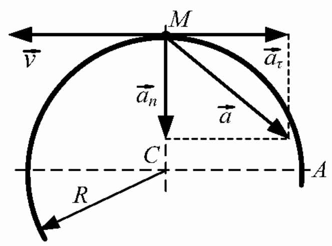


Рисунок 18

Решение. Движение точки задано естественным способом. Скорость точки определим как первую производную по времени от закона движения: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6 - 4t$. При t_1=1 с получим $v_1 = 6 - 4 \cdot 1 = 2$ м/с .

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим: $a_\tau = \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}t} = -4$ м/с, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

При t_1=1 с получим: $a_{1\tau} = -4\ \text{м}/\text{с}^2$, $a_{1n} = 2^2/2 = 2\ \text{м}/\text{с}^2$.

Тогда ускорение точки при t_1=1 с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 4{,}47\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Изображать векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{a}_\tau$ следует, учитывая знаки результатов дифференцирования, при этом направление касательной считать положительным в сторону возрастания дуговой координаты. Вектор $\overline{a}_n$ направлен к центру окружности. Направления векторов скорости $\overline{v}_1$ и ускорений $\overline{a}_\tau$, $\overline{a}_n$ и $\overline{a}_1$ показаны на рисунке 18.

Пример 2. Рейка *4*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2, ступенчатое колесо *1* с радиусами R_1 и r_1 и ступенчатое колесо *3* с радиусами R_3 и r_3 находятся в зацеплении, на шкив радиуса r_3 намотана нить с грузом *5* на конце (рисунок 19). Угловая скорость колеса *1* изменяется по закону $\omega_1 = f(t)$.

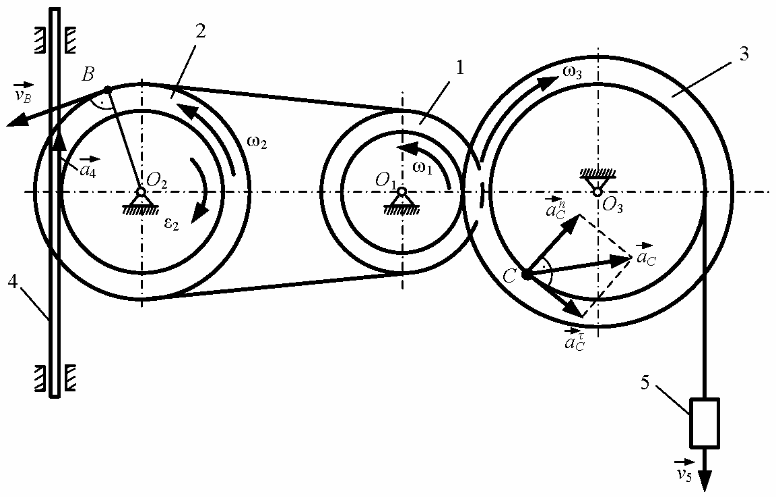


Рисунок 19

Дано: r_1=2 см, R_1=4 см, r_2=6 см, R_2=8 см, r_3=12 см, R_3=16 см, $\omega_1 = 5t - 2t^2$, t_1=2 с.

Определить: v_5, v_B, ε_2, a_C, a_4 в момент времени t=t_1.

Решение.

Определим скорость точки B ремня, передаваемую от колеса *1* колесу *2*: $v_B = \omega_1 R_1 = (5t - 2t^2)R_1$. При t_1=2 с $v_B = 8$ см/с.

Зная скорость точки B колеса *2*, можно определить угловую скорость вращения колеса $\omega_2 = \dfrac{v_B}{R_2} = (5t - 2t^2)\dfrac{R_1}{R_2}$ и угловое ускорение колеса $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = (5t - 4t)\dfrac{R_1}{R_2}$.

При t_1=2 с $\varepsilon_2 = -1{,}5$ с$^{-2}$.

Определим скорость точек соприкосновения колеса *2* и рейки *4* $v_4 = \omega_2 r_2 = (5t - 2t^2)\dfrac{R_1 r_2}{R_2}$. Зная закон изменения скорости рейки, можно сразу определить ее ускорение, т.к. рейка совершает поступательное движение $a_4 = \dot{v}_4 = (5 - 4t)\dfrac{R_1 r_2}{R_2}$. При t_1=2 с $a_4 = -9$ см/с^2.

Колеса *3* и *1* находятся во внешнем зацеплении, поэтому скорости точек их соприкосновения одинаковы в любой момент времени $\omega_3 R_3 = \omega_1 r_1$, откуда находим $\omega_3 = \omega_1 \dfrac{r_1}{R_3} = (5t - 2t^2)\dfrac{r_1}{R_3}$.

Груз *5* прикреплен к концу нерастяжимой нити, которая сходит с внутреннего обода колеса *3*, следовательно, $v_5 = \omega_3 r_3 = (5t - 2t^2)\dfrac{r_1 r_3}{R_3}$. При t_1=2 с $v_5 = 3$ см/с.

Определим вращательное ускорение точки C $a_C^{вр} = \varepsilon_3 r_3$, где $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = (5-4t)\dfrac{r_1}{R_3}$, тогда $a_C^{\tau} = (5-4t)\dfrac{r_1 r_3}{R_3}$. Центростремительное ускорение точки C $a_C^{ц} = r_3 \omega_3{}^2 = (5t-2t^2)^2 \dfrac{r_1^2}{R_3^2} r_3$. При t_1=2 с $a_C^{вр} = -4{,}5\,см/с^2$, $a_C^{ц} = 0{,}375\,см/с^2$.

Т.к. $\bar{a}_C^{\tau} \perp \bar{a}_C^{n}$, то $a_C = \sqrt{\left(a_C^{\tau}\right)^2 + \left(a_C^{n}\right)^2} = 4{,}52\,см/с^2$.

Векторы скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рисунке 19.

Ответ: $v_B = 8\,см/с$, $v_5 = 3$ см/с, $\varepsilon_2 = -1{,}5\ с^{-2}$, $a_4 = -9\,см/с^2$, $a_C = 4{,}52\,см/с^2$.

Пример 3. Механизм (рисунок 20, а) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, *AD*=*DB*, $l_1 = 0{,}4\,м$, $l_2 = 1{,}2\,м$, $l_3 = 1{,}4\,м$, $l_4 = 0{,}6\,м$, $\omega_1 = 5\,с^{-1}$, $\varepsilon_1 = 8\,с^{-2}$.

Определить: v_B, v_E, ω_{DE}, a_B, ε_{AB}.

Решение. Звенья *1* и *4* механизма совершают простейшее вращательное движение, звенья *2* и *3* – плоское, ползун *B* движется поступательно. Определим скорость точки *A* как скорость точки, принадлежащей звену *1*: $v_A = l_1\omega_1 = 0{,}4 \cdot 5 = 2$ м/с. Покажем $\bar{v}_A \perp O_1A$ с учетом направления угловой скорости ω_1. Точка *B* принадлежит одновременно звену *2* и ползуну и в силу наложенных связей может двигаться только вдоль направляющих, следовательно, вектор скорости точки B может быть направлен только горизонтально. Для определения скорости точки B найдем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена *2* на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B (точка C_2).

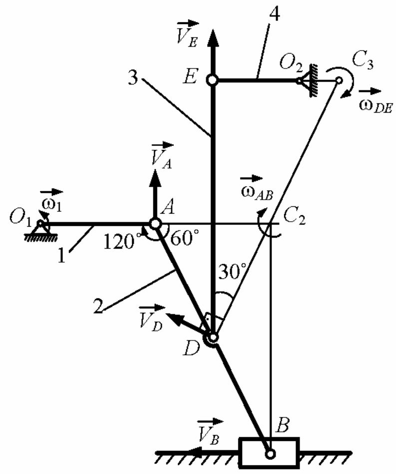


Рисунок 20, а

Определим угловую скорость вращения звена *2* относительно его МЦС, зная скорость точки A и вычислив расстояние C_2A от точки A до МЦС: $C_2A = AB \cdot \cos 60° = 1{,}2 \cos 60° = 0{,}6$ м; $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{C_2A} = \dfrac{2}{0{,}6} = 3{,}333 \text{ с}^{-1}$.

Направление ω_{AB} покажем с учетом направления вектора $\bar{v}_A$.

Определим скорость точки B, вычислив расстояние C_2B от точки B до МЦС: $C_2B = AB \sin 60° = 1{,}2 \sin 60° = 1{,}039$ м;

$V_B = \omega_{AB} \cdot C_2B = 3{,}333 \cdot 1{,}039 = 3{,}463$ м/с.

Направление вектора $\bar{v}_B$ покажем с учетом направления ω_{AB}.

Точка D также принадлежит звену *2*, следовательно, ее скорость можно определить относительно МЦС звена *2*, вычислив расстояние C_2D от точки D до МЦС: $C_2D = C_2A = 0{,}6$ м. Следовательно,

$v_D = 3{,}333 \cdot 0{,}6 = 2$ м/с. Покажем вектор скорости точки D ($\bar{v}_D \perp C_2D$) с учетом направления ω_{AB}.

Одновременно точка D принадлежит звену *3*, совершающему плоское движение. Точка E, также принадлежащая звену *3*, в силу наложенных на нее связей может двигаться только по окружности радиусом O_2E, следовательно, вектор скорости точки E обязательно будет перпендикулярен O_2E. МЦС звена *3* находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек D и E (точка C_3).Определяем угловую скорость звена *3* ω_{DE} относительно его МЦС, вычислив расстояние $C_3D = \dfrac{DE}{\cos 30°} = \dfrac{1{,}4}{\cos 30°} = 1{,}616$ м:

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{2}{1{,}616} = 1{,}238 \text{ с}^{-1}.$$

Направление ω_{DE} покажем с учетом направления вектора $\bar{v}_D$.

Скорость точки E определим относительно МЦС звена *3*, вычислив расстояние $C_3E = DE \cdot tg30° = 1{,}4tg30° = 0{,}808$ м:

$$v_E = \omega_{DE} \cdot C_3E = 1{,}238 \cdot 0{,}808 = 1 \text{ м/с}.$$

Определим ускорение точки B $\bar{a}_B$ (рисунок 20, б). Точка B принадлежит звену *2*, совершающему плоское движение. Выберем за полюс точку A. Тогда

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

где $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$ – ускорение полюса; $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$ – ускорение, получаемое точкой B при вращении плоской фигуры вокруг полюса;

$a_B^n = \omega_1 l_1 = 10$ м/с^2; $\quad a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 3{,}2$ м/с^2; $\quad a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 l_2 = 13{,}33$ м/с^2;

$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB$;

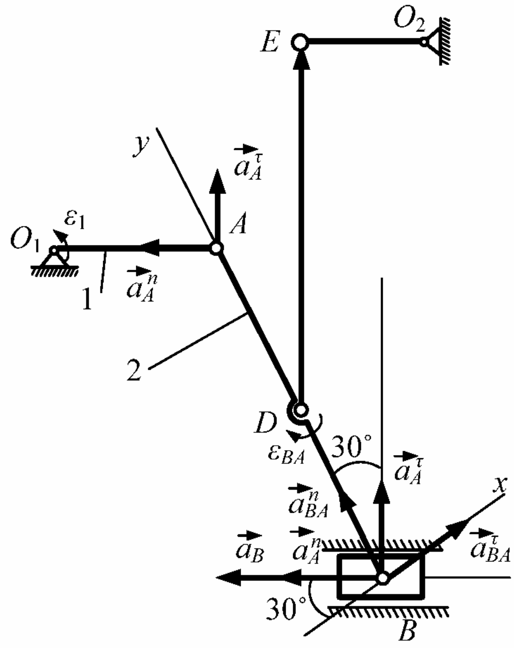


Рисунок 20, б

Проведем оси координат Bxy и спроецируем равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ на эти оси

$$-a_B \cos 30° = -a_A^n \cos 30° + a_A^\tau + a_{BA}^\tau;$$

$$a_B \sin 30° = a_A^n \sin 30° + a_A^\tau \cos 30° + a_{BA}^n;$$

Из первого равенства находим

$$a_B = \frac{a_B^n \sin 30° + a_A^\tau \cos 30° + a_{BA}^n}{\sin 30°} =$$
$$= \frac{10 \sin 30° + 3{,}2 \cos 30° + 13{,}33}{\sin 30°} = 42{,}202 \text{ м/с}^2.$$

Из второго равенства определяем ε_{AB}

$$a_{BA}^{\tau} = -a_B \cos 30^{\circ} + a_B^n \cos 30^{\circ} - a_a^{\tau} \sin 30^{\circ} =$$
$$= -42{,}202 \cos 30^{\circ} + 10 \cos 30^{\circ} - 3{,}2 \sin 30^{\circ};$$

$$a_{BA}^{\tau} = -29{,}487 \text{м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{AB} = \frac{29{,}487}{1{,}2} = 24{,}573 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 3{,}463$ м/с, $v_E = 1$ м/с,

$\omega_{DE} = 1{,}238 \text{с}^{-1}$,

$a_B = 42{,}202$ м/с^2,

$\varepsilon_{AB} = 24{,}573 \text{с}^{-2}$.

Пример 4. Стержень AD жестко скреплен с валом, вращающимся в опорах по закону $\varphi = f_1(t)$. Вдоль стержня скользит точка B по закону $s = AB = f_2(t)$ (рисунок 21). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки B в момент времени $t_1 = 2$ с.

Дано: $\varphi = 2t^3 - 10t^2$, $s = AB = b \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$; ($\varphi$ – в радианах , s – в сантиметрах, t – секундах), $AB = 2b = 20$ см, $b = 10$ см.

Определить: $v_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение вдоль стержня относительным, а вращение стержня – переносным. Тогда абсолютная скорость $\overline{v}_{\text{абс}}$ и абсолютное ускорение $\overline{a}_{\text{абс}}$ найдутся по формулам:

$\overline{v}_{\text{абс}} = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$, $\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}$, где $\overline{a}_{\text{пер}} = \overline{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{пер}}^{n}$.

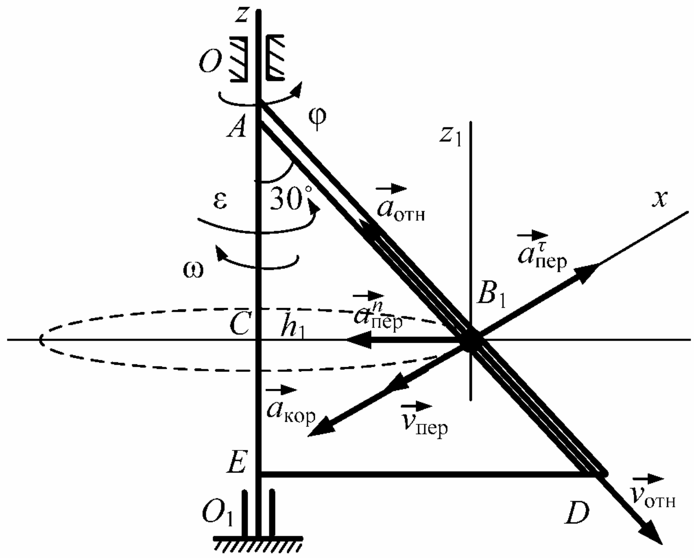


Рисунок 21

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону $s = AB = b\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$.

Поэтому $v_{\text{отн}} = \dot{s} = \frac{\pi b}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $a_{\text{отн}} = \dot{v}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^2 b}{18}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$.

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$s_1 = AB_1 = 8{,}66$ см, $v_{\text{отн}} = 2{,}5$ см/с, $a_{\text{отн}} = -4{,}33$ см/с^2.

Знаки указывают, что вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты s, а вектор $\bar{a}_{\text{отн}}$ – в противоположную сторону.

2. Переносное движение. Это движение вращательное и происходит по закону $\varphi = 4t^3 - 10t^2$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 20t$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 20$ и при t_1=2с $\omega = -16\ \text{с}^{-1}$, $\varepsilon = 4\ \text{с}^{-2}$.

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно.

Найдем расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z: $h_1 = AB_1 \sin 30° = 4{,}33$ см. Тогда в момент $t_1 = 2$ с получим:

$v_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 26$ см/с, $a^{\tau}_{\text{пер}} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 17{,}32\ \text{см}/\text{с}^2$,

$a^{n}_{\text{пер}} = \omega^2 h_1 = 1108{,}48\ \text{см}/\text{с}^2$.

Векторы $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}^{\tau}_{\text{пер}}$ направлены перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$ – по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{\text{отн}}$ и вектором $\bar{\omega}$ (совпадающим с осью вращения) равен 30^0, то численно в момент времени $t_1 = 2$ с $a_{\text{кор}} = 2 \cdot |v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30° = 80\ \text{см}/\text{с}^2$.

Направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Жуковского. Для этого вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ спроецируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}^{n}_{\text{пер}}$), и затем повернем эту проекцию на 90° в сторону вращения (по ходу часовой стрелки). Направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$ совпадает с направлением вектора $\bar{v}_{\text{пер}}$.

4. Определение $\overline{v}_{\text{абс}}$. Так как векторы $\overline{v}_{\text{отн}}$ и $\overline{v}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, то $v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2}$; в момент времени t_1 =2с $v_{\text{абс}} = 26{,}12$ см/с.

5. Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений $\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \overline{a}_{\text{пер}}^{n} + \overline{a}_{\text{кор}}$. Для определения $a_{\text{абс}}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции вектора $\overline{a}_{\text{абс}}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\overline{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ и $\overline{a}_{\text{кор}}$ лежат на оси x, а векторы $\overline{a}_{\text{пер}}^{n}$ и $\overline{a}_{\text{отн}}$ расположены в плоскости B_1yz_1, т.е. в плоскости пластины. Тогда, проецируя обе части векторного равенства на оси B_1xyz_1, получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{\text{абс}x} = \left|a_{\text{пер}}^{\tau}\right| - a_{\text{кор}} = -62{,}68 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}y} = a_{\text{пер}}^{n} + \left|a_{\text{отн}}\right| \sin 30° \approx 1108 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}z1} = \left|a_{\text{отн}}\right| \cos 30° \approx 2{,}17 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{\text{абс}}$

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}x}^2 + a_{\text{абс}y}^2 + a_{\text{абс}z1}^2} \approx 1108 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_{\text{абс}} = 26{,}12$ см/с, $a_{\text{абс}} \approx 1108$ см/с^2.

2 Динамика

Динамика изучает движение тел в пространстве под действием сил.

Модели механики, рассматриваемые в динамике – материальная точка, абсолютно твердое тело, механическая система.

Сила – векторная мера взаимодействия тел. В динамике силы – переменные. Силы могут зависеть от времени, положения тела, его скорости.

Масса – мера инертности тела. Она зависит от количества вещества и считается величиной постоянной. Это инертная масса. Существует понятие гравитационной массы, входящей в закон тяготения. С большой степенью точности установлена эквивалентность инертной и гравитационной масс.

Частными случаями движения являются прямолинейное равномерное движение и равновесие.

Статика изучает методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливает условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

2.1 Законы механики Галилея–Ньютона

В основе динамики лежат законы, впервые сформулированные Галилеем. Форму свода законов им придал Ньютон и назвал их аксиомами.

1. Закон инерции. Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока действие других тел не изменит этого состояния.

Точка, на которую не действуют никакие силы со стороны других тел, называется изолированной.

На точку может действовать уравновешенная система сил. Пока эта система сил уравновешена, точка не изменяет своего состояния.

Инерциальная система отсчета – это такая система отсчета, в которой выполняется закон инерции.

2. Основной закон динамики. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и имеет одинаковое с ней направление

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

В основном законе содержится часть утверждения аксиомы инерции: если $\bar{F} = 0$, то $\bar{a} = 0$.

3. Закон равенства действия и противодействия. Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2.$$

4. Закон независимости сил (Закон суперпозиции). Несколько одновременно действующих на точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы их равнодействующая

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k.$$

2.2 Задачи динамики

Все задачи динамики точки можно разделить на два класса: первая задача динамики точки и вторая задача динамики точки.

Первая задача динамики точки (прямая задача) формулируется следующим образом: по заданному закону движения определить силы, действующие на точку. Первая задача динамики точки решается дифференцированием закона движения точки.

Вторая задача динамики точки (обратная задача) формулируется следующим образом: по заданным силам, действующим на точку, определить закон ее движения.

В обратной задаче динамики, когда заданы силы и нужно определить координаты точки как функции времени, решение сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения.

Первый интеграл дает закон изменения скорости. Второй интеграл – закон движения.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что при интегрировании дифференциальных уравнений появляются постоянные интегрирования, которые позволяют из всего семейства первообразных выбрать одну, удовлетворяющую определенным условиям. Поэтому при решении второй задачи динамики надо задавать так называемые начальные условия.

Начальные условия содержат значения координат точки и ее скорости в определенный момент времени – обычно в начале отсчета времени: $t = 0$; $s = s_0$; $v = v_0$.

Эти значения подставляют в полученные уравнения, определяя значения постоянных интегрирования.

2.3 Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Многие технические задачи колебания изделий могут быть сведены к исследованию колебаний материальной точки.

Под колебательным движением материальной точки понимается такое ее движение относительно положения равновесия, при котором хотя бы одна из координат поочередно возрастает и убывает во времени.

Различают свободные колебания, происходящие без переменного внешнего воздействия, и вынужденные, вызванные и поддерживаемые переменным во времени воздействием.

Свободные колебания точки происходят под действием восстанавливающей силы, пропорциональной смещению точки от положения равновесия, стремящейся вернуть точку в положение равновесия (рисунок 22). Примером линейной восстанавливающей силы может служить сила упругости пружины $F = cx$, где c – коэффициент жесткости пружины.

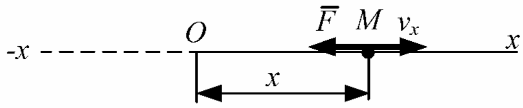


Рисунок 22

В начале координат $(x = 0)$ восстанавливающая сила F=0, – это положение равновесия.

Определим уравнение движения точки x=$f(t)$.

Начальные условия: при t=0 x=x_0; $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Покажем точку в произвольном положении, считая, что координата и скорость движения точки положительны.

Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \text{ или } m\ddot{x} = -F, \text{ или } m\ddot{x} = -cx.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \tag{2.1}$$

Разделим обе части уравнения (2.1) на m и введем обозначение $k^2 = \dfrac{c}{m}$:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2.2}$$

здесь $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – это круговая (или циклическая) частота колебаний. Единица изменения циклической частоты – 1/с.

Дифференциальное уравнение (2.2) – однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его решение (второй интеграл) следует искать:

–в тригонометрической форме:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{2.3}$$

– или в амплитудной:

$$x = A \sin(kt + \alpha), \tag{2.4}$$

где C_1, C_2, A, ε – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования в этих выражениях связаны следующими соотношениями:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad C_1 = A\sin\alpha; \quad C_2 = A\cos\alpha; \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}.$$

где A – амплитуда колебаний, α – начальная фаза.

Решение в амплитудной форме (2.4) удобно для общего анализа движения, а решение в тригонометрической форме (2.3) – для отыскания значений постоянных интегрирования.

Из выражения (2.4) следует, что прямолинейное движение точки под действием линейной восстанавливающей силы представляет собой гармоническое колебательное движение с циклической частотой k (рисунок 23).

Период колебания T, с – это промежуток времени, за который точка совершает одно полное колебание (проходит одно и то же положение в одном и том же направлении):

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Величина, обратная периоду, определяет число колебаний, совершаемых точкой за секунду и называется частотой колебаний (Гц).

Аргумент синуса $(kt + \alpha)$ называют фазой колебания, а α – начальной фазой.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 ищут из начальных условий.

Если решение уравнения представлено в тригонометрической форме (2.3), то первый интеграл (скорость точки)

$$v_x = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{2.5}$$

Подставляя начальные условия в уравнения (2.3) и (2.5), получим:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования уравнение (2.3) принимает вид

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения:

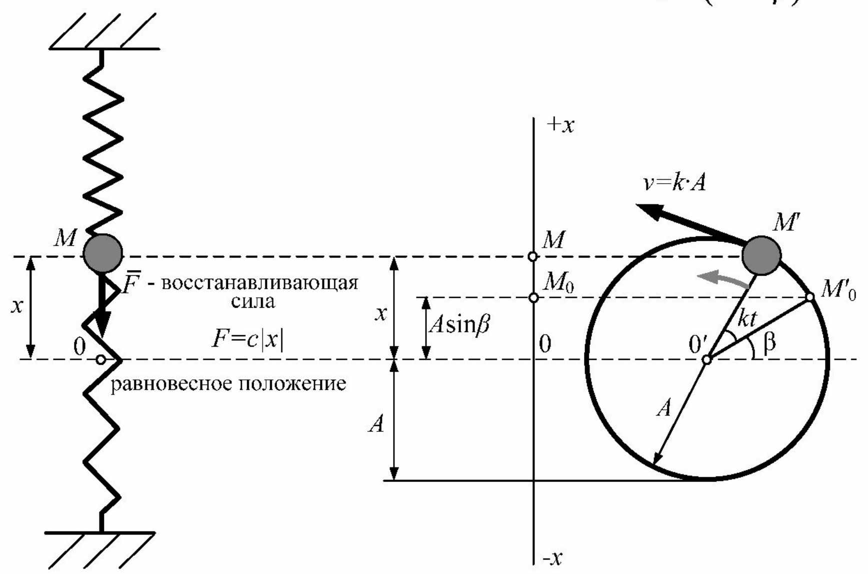
$$m\ddot{x} = F_x = -cx$$

Решение уравнения:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

или

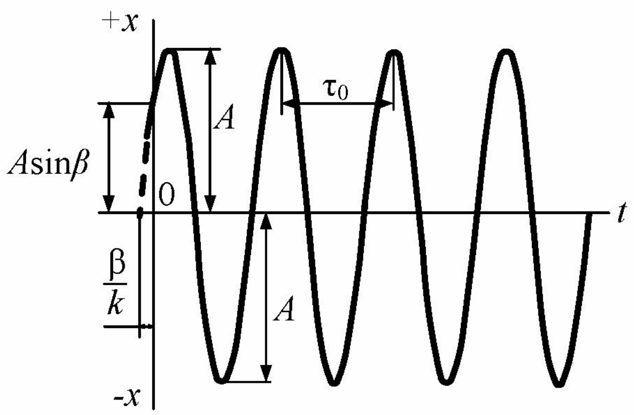
$$x = A\sin(kt + \beta)$$



Материальная точка, движущаяся по прямой, совершает под действием восстанавливающей силы гармоническое колебание

Проекция на любую ось точки, равномерно движущейся по окружности, совершает гармоническое колебание

График гармонического колебания



период: $\tau_0 = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$

круговая частота: $k = \dfrac{2\pi}{\tau_0} = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$

амплитуда: $A = +\sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}$

фаза колебания: $kt + \beta$

начальная фаза: $\beta \quad \mathrm{tg}\beta = k\dfrac{x_0}{\dot{x}_0}$

размерность: $[\tau_0] = T^1, \quad [k] = T^{-1}, \quad [A] = L^1$

Рисунок 23

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \tag{2.6}$$

Соответственно A и α для уравнения (2.4)

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k}}\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}.$$

Уравнение (2.4) принимает вид

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k}} \sin\left(kt + arctg\frac{kx_0}{\dot{x}_0}\right).$$

Свободные колебания точки характеризуются частотой k и периодом T, не зависящими от начальных условий, а также амплитудой A и начальной фазой колебаний α, которые зависят от начальных условий.

Изобразим точку в произвольном положении, когда ее координата и скорость положительны. Рассмотрим прямолинейное движение точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной скорости в первой степени $\overline{R} = -\mu\overline{v}$, где μ – коэффициент сопротивления. Знак минус указывает, что сила $\overline{R}$ направлена противоположно вектору скорости $\overline{v}$ ($R_x = -\mu\dot{x}$) (рисунок 24).

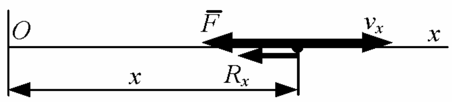


Рисунок 24

Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x следующее:

$$m\ddot{x} = \sum F_x\text{, или } m\ddot{x} = -F_x - R_x \tag{2.7}$$

Подставляя значения F_x и R_x, получим:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x} - cx.$$

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0. \quad (2.8)$$

Поделим левую и правую части уравнения на m и введем обозначения $k^2 = \frac{c}{M}$ и $2n = \frac{\mu}{M}$ (k – частота свободных колебаний, n – коэффициент затухания). Получим дифференциальное уравнение в приведенной форме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) может иметь возможные решения в следующих случаях:

1) $n<k$ – случай малого сопротивления.

2) $n>k$ – случай большого сопротивления.

В первом случае решение дифференциального уравнения (2.9) следует искать:

– или в тригонометрической форме:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t); \quad (2.10)$$

– или в амплитудной:

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha), \quad (2.11)$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний; $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$.

Здесь C_1, C_2, A, α – также постоянные интегрирования.

Движение, определяемое уравнением (2.11) имеет колебательный характер, т.к. координата x периодически изменяет свой знак (при изменении знака функции синуса), однако амплитуда колебаний уменьшается со временем (на что указывает сомножитель e^{-nt}) (рисунок 25).

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий.

Дифференцируя закон движения (2.10) по времени, получим закон изменения скорости (первый интеграл):

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-k_1 C_1 \sin k_1 t + k_1 \cos k_1 t).$$

Используя начальные условия, находим $C_1 = x_0$, $C_2 = \dfrac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$, и решение (2.10) примет вид

$$x = e^{-nt}\left(x_0 \cos k_1 t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{k_1} \sin k_1 t\right). \tag{2.12}$$

или (2.11), где $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k^2 - n^2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{nx_0 + \dot{x}_0}{x_0\sqrt{k^2 - n^2}}$.

Период затухающих колебаний равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}, \tag{2.13}$$

где k – частота свободных колебаний.

Из выражения (2.13) видно, что период затухающих колебаний несколько больше, чем период свободных колебаний.

Отношение абсолютных величин максимальных отклонений от положения равновесия

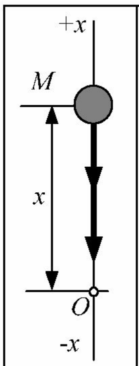
$$D = \frac{A_{i+1}}{A_i} = e^{-nT_1},$$

называется декрементом колебаний.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = F_x + R_x = -cx - \alpha\dot{x}$$



(возмущающая сила P=0)

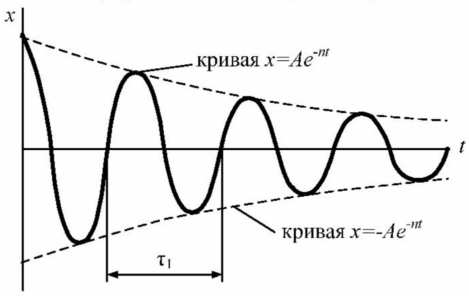
R – сила сопротивления

F – восстанавливающая сила

равновесное положение

График движения

(при n=0,05k β=90°)



Решение уравнения

(при n<k):

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n$$

или

$$x = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta)$$

частота колебаний: $\sqrt{k^2 - n^2}$

сопротивление R увеличивает период свободных колебаний:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

амплитуды колебаний ассимптотически приближаются к нулю;

декремент колебаний – отношение абсолютных значений двух смежных амплитудных отклонений:

$$\Psi = \frac{|A_k|}{|A_{k+1}|} = e^{\frac{\pi\tau_1}{2}}$$

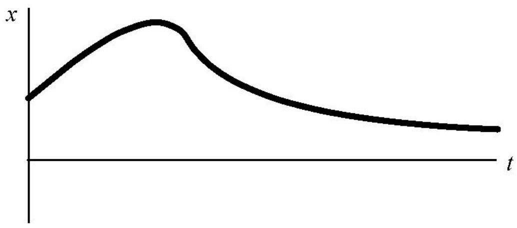
логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \ln\Psi = \frac{\pi\tau_1}{2}$$

Большое сопротивление полностью уничтожает свободные колебания

График движения

(при n=5/3k; β=0,2)



Движения, описанные решениями уравнения при $n \geq k$, являются апериодическими

(при n>k)

$$x = Ae^{-nt}\,\mathrm{sh}(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta)$$

(при n=k)

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

Рисунок 25

Натуральный логарифм отношения двух последующих амплитуд называется логарифмическим декрементом

$\Delta = \ln D = nT_1$.

Таким образом, малое сопротивление незначительно изменяет период, но существенно – амплитуду колебаний.

Во втором случае движение не является колебательным и с некоторого момента времени начинается так называемое апериодическое движение, при котором точка асимптотически приближается к положению равновесия.

Свободные и затухающие колебания являются собственными колебаниями материальной точки в отличие от вынужденных колебаний.

Если на материальную точку кроме восстанавливающей силы $F=cx$ и силы сопротивления $R = \mu\dot{x}$ действует возмущающая сила $P = H\sin pt$, где H – амплитуда возмущающей силы; p – частота возмущающей силы, то точка будет совершать вынужденные колебания (рисунок 26).

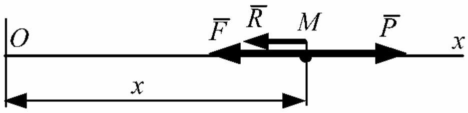


Рисунок 26

Составим уравнение движения точки в проекции на ось x:

$m\ddot{x} = -F_x - R_x + P_x$ или $m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin pt$.

Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = H\sin pt$.

Разделив обе части этого уравнения на массу m, получим дифференциальное уравнение движения в приведенной форме

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt, \tag{2.14}$$

где введены обозначения: $k^2 = \frac{c}{m}$; $2n = \frac{\mu}{m}$; $h = \frac{H}{m}$.

Уравнение (2.14) – неоднородное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения складывается из решения однородного уравнения (уравнение (2.14) без правой части) – x_1 и частного решения неоднородного уравнения (2.14) – x_2, т.е.

$$x = x_1 + x_2 . \tag{2.15}$$

В случае малого сопротивления ($n<k$) решение однородного уравнения x_1 должно иметь вид (2.10)

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$$

или (2.11)

$$x_1 = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) .$$

Частное решение x_2 удобно искать в таком виде, каким представлена правая часть уравнения (2.14)

$$x_2 = B \sin(pt - \varepsilon) .$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.15) может иметь вид

$$x = x_1 + x_2 = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + B \sin(pt - \varepsilon) , \tag{2.16}$$

если решение однородного уравнения (x_1) представлено в амплитудной форме.

Отыскание постоянных интегрирования начинают с частного решения. После ряда преобразований постоянные интегрирования B и ε определяются следующим образом:

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \qquad \mathrm{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} . \tag{2.17}$$

Как видно из выражений (2.17), амплитуда и начальная фаза частного решения вынужденных колебаний не зависят от начальных условий и определяются только параметрами колебательной системы (частотой и коэффициентом затухания, а, следовательно, массой, коэффициентом сопротивления, коэффициентом жесткости).

Затем используют начальные условия: при t=0, x=x_0; $\dot{x} = \dot{x}_0$. Именно движение, описываемое выражением (2.16), начинается при этих условиях.

Результирующее движение (общее решение) представляет собой сумму двух гармоник разной амплитуды, частоты и фазы – собственных затухающих (1-е слагаемое) с частотой собственных колебаний и вынужденных (2-е слагаемое) с частотой вынуждающей силы (рисунок 27).

В случае равенства частот собственных колебаний и вынуждающей силы возникает резонанс, проявляющийся в резком возрастании амплитуд за счет амплитуды колебаний, представляющих 2-е слагаемое в общем решении (2.16) (см. формулы (2.17)).

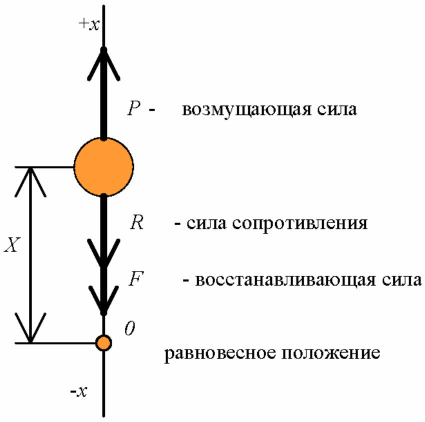
Положив в выражении (2.17) $k = p$ и допустив отсутствие сопротивления (n=0), видим, что значение амплитуды $B \to \infty$. Однако, при наличии коэффициента n, а тем более с его увеличением, значение амплитуды B уменьшается.

Графические зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы называются амплитудно-частотными характеристиками (АЧХ).

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЧКИ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x + P_x = -cx - \alpha\dot{x} + H\sin pt$$



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

(при $n < k$)

$x = x_{св.з} + x_{вын}$ где

$$x_{свз} = e^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right)$$

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

$$x_{вын} = \frac{h}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt - \delta)$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ОТ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕ ЗАТУХАЮТ)

ЧАСТОТА p КОЛЕБАНИЙ РАВНА ЧАСТОТЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

АМПЛИТУДА $A = \dfrac{h}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}$

ЗАВИСИТ ОТ ЧАСТОТЫ p И ДОСТИГАЕТ

$A_{макс} = \dfrac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}$ ПРИ $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$

УГОЛ СДВИГА ФАЗЫ $\delta = arc\,tg\,\dfrac{2np}{k^2 - p^2}$

ВОССТАНАВЛИВАЮЩАЯ СИЛА $F = |cx|$

НАПРАВЛЕНА К ТОЧКЕ O

$F_x = -cx \quad c > 0$; ЧАСТОТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ $k = +\sqrt{\dfrac{c}{m}}$

СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ $R = |\alpha\dot{x}|$

$R_x = -\alpha\dot{x}$; $\alpha > 0$; КОЭФФИЦИЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ $n = \dfrac{\alpha}{2m}$

ВОЗМУЩАЮЩАЯ СИЛА $P = |H\sin pt|$

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

$P_x = H\sin pt$; $H > 0$; $h = \dfrac{H}{m}$

pt - ФАЗА ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

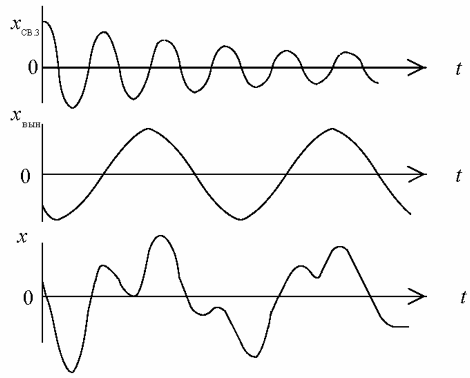


Рисунок 27

2.4 Относительное движение материальной точки

Второй закон динамики и полученные из него уравнения движения справедливы только для движения материальной точки в инерциальной системе отсчёта.

В случае сложного движения точки ее ускорение является абсолютным и складывается из относительного, переносного и кориолисова

$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_\text{к}$.

Основной закон динамики в форме второго закона Ньютона определяет абсолютное движение точки по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_\text{к}) = \sum \bar{F}_k ,$$

а относительное движение точки в системе отсчета, движущейся по отношению к неподвижной (в неинерциальной системе отсчета), определяется основным законом динамики, содержащим относительное ускорение точки $\bar{a}_r = \bar{a}_a - \bar{a}_e - \bar{a}_\text{к}$, и имеет вид

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_к) \text{ или } m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}_e^\text{и} + \sum \vec{F}_к^\text{и} ,$$

где $\vec{F}_e^\text{и} = -m\vec{a}_e$ – <u>переносная сила инерции</u>, $\bar{F}_к^\text{и} = -m\bar{a}_к$ – <u>кориолисова сила инерции</u>.

В неинерциальной системе отсчёта материальная точка может получить ускорение как в результате действия на неё сил, так и в результате ускоренного движения самой системы отсчёта, то есть имеется две причины возникновения относительного ускорения: динамическая и кинематическая соответственно (рисунок 28).

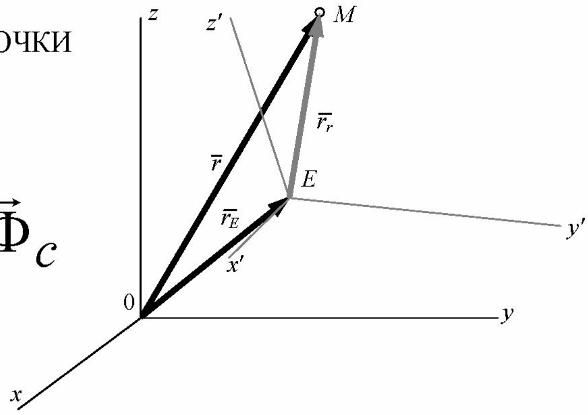
ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

ЧТОБЫ ОПРЕДЕЛИТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, НАДО КО ВСЕМ ПРИЛОЖЕННЫМ К НЕЙ СИЛАМ ДОБАВИТЬ ВСЕ (ЭЙЛЕРОВЫ) СИЛЫ ИНЕРЦИИ: ПЕРЕНОСНУЮ $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ И ПОВОРОТНУЮ $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c$, ГДЕ $\vec{a}_e$ – ПЕРЕНОСНОЕ УСКОРЕНИЕ И $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ – УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

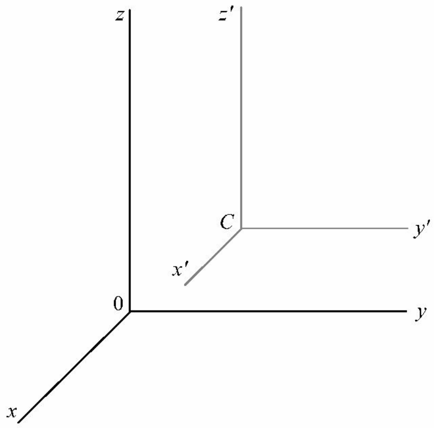
ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}^e + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c$$



ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

НАДО УЧИТЫВАТЬ КОРИОЛИСОВЫ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ВСЕХ ЕЕ ТОЧЕК



если подвижная система координат движется поступательно и оси проходят через центр масс, то закон моментов имеет такой же вид, как и при абсолютном движении:

$$\frac{d}{dt}\sum L_{z'} = \sum M^e_{z'}$$

КОРИОЛИСОВЫ СИЛЫ ИНЕРЦИИ ИМЕЮТ РАЗМЕРНОСТЬ СИЛЫ:

$$[\Phi_e]_\Phi = [\Phi_c]_\Phi = L^1 M^1 T^{-2}, \quad [\Phi_e]_T = [\Phi_c]_T = L^0 F^1 T^0$$

Рисунок 28

2.5 Механическая система

Механическая система – совокупность абсолютно твердых тел или абсолютно твердых тел и материальных точек.

Внешние силы $\left(\overline{F}_k^e\right)$ действуют на систему со стороны других тел, не входящих в эту систему.

Внутренние силы $\left(\overline{F}_k^i\right)$ – силы взаимодействия между точками одной и той же системы.

Свойства внутренних сил в неизменяемой механической системе:

1. Главный вектор внутренних сил в системе равен нулю – $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i=0$. Поскольку внутренние силы – это силы взаимодействия между каждыми двумя точками системы, то они попарно равны и противоположно направлены.

2. Главный момент внутренних сил равен нулю относительно любого центра и любой оси – $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{M}_A\left(\overline{F}_k^i\right)=0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}M_l\left(\overline{F}_k^i\right)=0$.

Масса системы

Движение системы зависит не только от действующих сил, но и от распределения масс системы. Масса системы равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M=\sum_{k=1}^{n}m_k .$$

Для правильного учета распределения масс в системе при ее движении используются следующие величины:

– координаты центра масс, которые определяются произведениями масс точек системы на их координаты;

– осевые моменты инерции, которые определяются произведениями масс точек системы на квадраты одноименных координат;

– центробежные моменты инерции, которые определяются произведениями масс точек системы на две разноименные координаты.

Каждая точка механической системы имеет определенную массу, а ее положение относительно выбранной системы отсчета определяется радиус-вектором $\bar{r}_i$.

Центром масс системы называется точка, радиус-вектор которой определяется выражением

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i} \text{ или } \bar{r}_C = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}, \text{ где } M \text{ – масса системы.}$$

Теорема: Центр масс системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все силы, действующие на систему (рисунок 29)

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i .$$

По свойству внутренних сил $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i = 0$, поэтому дифференциальное уравнение движения центра масс системы имеет вид:

$$M\bar{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e .$$

Закон сохранения движения центра масс (следствие из теоремы): Если главный вектор внешних сил равен нулю, то центр масс системы находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

ЦЕНТР МАСС

Точка, определяемая радиус - вектором

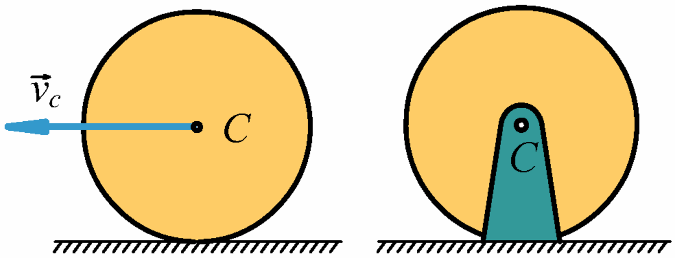
$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

координаты центра масс: $x_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k x_k}{m}$ $y_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k y_k}{m}$ $z_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k z_k}{m}$

количество движения системы равно произведению ее массы $m = \sum m_k$ на скорость $\vec{\upsilon}_C$ центра масс

$$\vec{K} = m\vec{\upsilon}_C$$

$\vec{K} = 0$ $v_c = 0$



Теорема о движении центра масс

Центр масс C движется как точка, в которой сосредоточена масса m всей системы и на которую действуют только внешние силы

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n} X_k^e$$

$$m\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k^e$$

$$m\frac{d^2z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n} Z_k^e$$

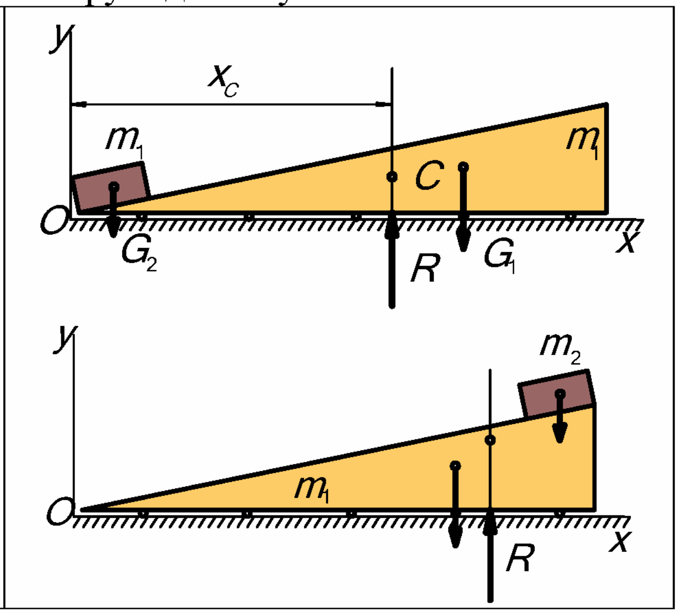


Рисунок 29

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Если система состоит из n материальных точек, то для полного описания ее движения должно быть составлено n дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_1\bar{a}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i; \\ \quad\quad\dots \\ m_n\bar{a}_n = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i. \end{cases}$$

2.8 Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

Если механическая система представляет собой твердое тело, то при поступательном движении скорости и ускорения всех точек в данный момент времени будут иметь одинаковые по модулю и направлению ускорения, поэтому дифференциальное уравнение движения твердого тела в векторной форме имеет вид:

$$M\bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e,$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса системы, $\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e$ – главный вектор внешних сил.

Главный вектор внутренних сил в неизменяемой механической системе равен нулю.

При исследовании движения механических систем применяют общие теоремы динамики, устанавливающие связь между мерами движения и мерами действия сил (таблица 1). Общие теоремы динамики представляют собой первые интегралы движения. Общие теоремы динамики справедливы для материальной точки и для механической системы.

Таблица 1

Меры движения	Меры действия сил
Количество движения	Импульс силы
Кинетический момент	Момент силы
Кинетическая энергия	Работа силы

2.9 Количество движения материальной точки и механической системы

Количество движения материальной точки – вектор, численно равный произведению массы точки на ее скорость: $\overline{q} = m\overline{v}\left[\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right]; [\text{Н}\cdot\text{с}]$.

Вектор количества движения имеет направление скорости и приложен к точке. Термин впервые введен И. Ньютоном.

Количество движения механической системы – вектор, численно равный главному вектору количеств движения всех точек системы $\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{v}_k$.

Вектор количества движения механической системы не имеет точки приложения (свободный вектор).

Импульс силы характеризует действие силы на точку в течение некоторого времени.

Элементарный импульс силы: $d\overline{s} = \overline{F}dt$.

Полный импульс силы определяют как интеграл за время действия силы: $\overline{S} = \int_0^{\tau} \overline{F} dt \; [H \cdot c]$.

Теорема об изменении количества движения механической системы может быть сформулирована в дифференциальной и интегральной форме.

1. Дифференциальная форма. Производная от количества движения механической системы по времени равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему

$$\frac{dQ}{dt} = \sum \overline{F}_k^e .$$

Главный вектор внутренних сил равен нулю по свойству внутренних сил.

2. Интегральная форма. Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему

$$\overline{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e .$$

Векторная сумма всех импульсов внутренних сил равна нулю, так как главный вектор внутренних сил равен нулю по свойству внутренних сил.

Законы сохранения являются следствиями из теоремы об изменении количества движения.

1. Если главный вектор внешних сил равен нулю, то количество движения системы постоянно по величине и направлению:

$$\sum \overline{F}_k^e = 0 \; \rightarrow \overline{Q} = const .$$

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось (например, на ось x) равна нулю, то проекция вектора количества движения системы на эту же ось постоянна:

$$\sum F_{kx}^{e} = 0 \ \rightarrow Q_x = const.$$

Таким образом, количество движения системы можно рассматривать как характеристику поступательного движения системы, а при сложном движении – как характеристику поступательной части движения вместе с центром масс.

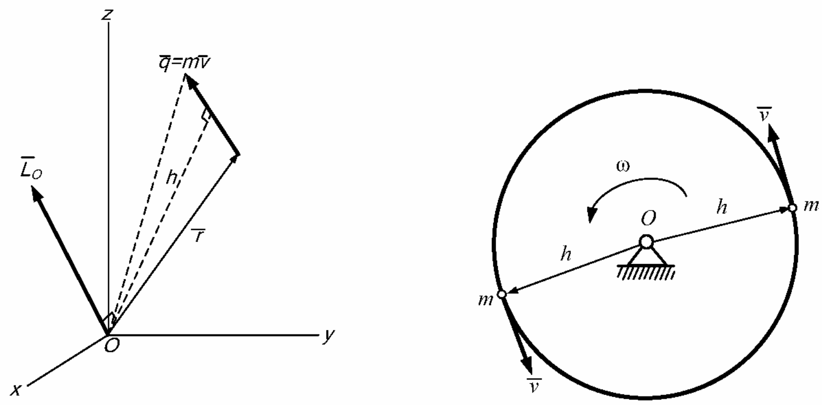
2.10 Момент количества движения точки относительно центра и оси

При вращении тела вокруг неподвижной оси главный вектор количеств движения всех точек тела равен нулю. Поэтому такая мера движения при исследовании вращательного движения не может быть использована. Моментом количества движения материальной точки массой m, движущейся со скоростью v, относительно какого-либо центра O называют момент вектора количества движения этой точки относительно этого центра (рисунок 30, а)

$$\overline{L}_O = \overline{M}_O(m\overline{v}) = \overline{r} \times \overline{q} \ \left[м \cdot кг \cdot \frac{м}{с} \right]; \left[\frac{кг \cdot м^2}{с} \right].$$

Вектор $\overline{L}_O$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора $\overline{r}$ и $\overline{q}$, и его направление определяется по правилу правого винта. Приложен вектор $\overline{L}_O$ в центре O.

Модуль вектора $\overline{L}_O$: $L_O = mvh$, где h – плечо (рисунок 30, б).



а) б)

Рисунок 30

Момент количества движения материальной точки относительно оси представляет собой проекцию вектора $\overline{L}_O$ на выбранную ось (рисунок 31):

$$L_z = L_0 \cos\left(\overline{L}_O \hat{,} z\right).$$

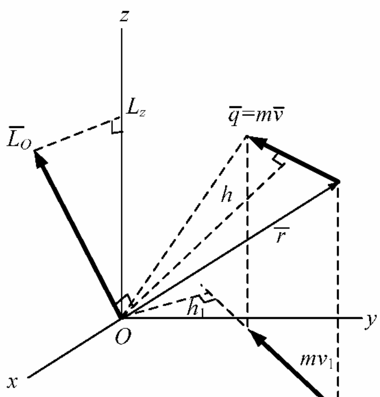


Рисунок 31

Алгебраическое значение момента количества движения материальной точки относительно оси определяется как момент проекции вектора $\overline{L}_O$ на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью:

$$L_z = \pm m v_1 h_1 .$$

Момент количества движения материальной точки относительно оси является скалярной величиной.

Кинетический момент системы, состоящей из n точек, относительно выбранного центра O равен геометрической сумме векторов моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\overline{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{L}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(m_k \overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k).$$

Кинетический момент системы, состоящей из n точек, относительно оси равен алгебраической сумме векторов кинетических моментов всех точек системы относительно этой оси: $L_z = \sum L_{zk}$.

Если система материальных точек представляет собой абсолютно твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, то скорость каждой точки тела может быть определена как $v = \omega h$, тогда кинетический момент тела относительно оси:

$$L_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2 = \omega \sum m_k h_k^2 .$$

Скалярная величина, представленная суммой в полученном выражении, называется осевым моментом инерции тела:

$$\sum m_k h_k^2 = I_z .$$

Значения осевых моментов инерции тел правильной геометрической формы приводятся в справочниках.

Тогда кинетический момент тела относительно оси может быть определен следующим образом:

$$L_z = I_z \omega .$$

<u>Теорема об изменении кинетического момента</u>. Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно

некоторого центра (оси) равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно этого же центра (этой же оси):

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_{Ok}^e \,; \left(\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{zk}^e \right).$$

Законы сохранения являются следствиями из теоремы об изменении кинетического момента:

1. Если главный момент всех внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра постоянен:

$$\overline{M}_O^e = 0 \rightarrow \overline{L}_O = const\,.$$

2. Если главный момент всех внешних сил системы относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси постоянен:

$$M_z^e = 0 \rightarrow L_z = const\,.$$

Таким образом, кинетический момент является динамической характеристикой механического движения, учитывающей положение материальной точки по отношению к данному центру.

Дифференциальное уравнение вращательного движения выводят из теоремы об изменении кинетического момента: $\left(\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\overline{F}_k^e\right) \right)$, где $L_z = I_z\omega$. Тогда это уравнение имеет вид:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z\left(\overline{F}_k^e\right).$$

При вращательном движении осевой момент инерции является мерой инертности (при поступательном движении мерой инертности является масса).

2.11 Кинетическая энергия материальной точки и механической системы

Кинетическая энергия материальной точки – скалярная положительная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2}\left[\frac{кг \cdot м^2}{c^2}\right]; [Н \cdot м]; [Дж].$$

Кинетическая энергия механической системы определяется как алгебраическая сумма кинетических энергий всех точек, образующих эту систему:

$$\mathrm{T} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия твердого тела определяется в зависимости от вида его движения следующим образом:

1. Поступательное движение – $\mathrm{T} = \dfrac{mv_C^2}{2}$.
2. Вращательное движение – $\mathrm{T} = \dfrac{I_z \omega^2}{2}$.
3. Плоское движение – $\mathrm{T} = \dfrac{mv_C^2}{2} + \dfrac{I_{zC}\omega^2}{2}$ – сумма кинетических энергий поступательного движения вместе с полюсом (центром масс) и вращательного движения вокруг полюса (центра масс).

Кинетическая энергия тела равна нулю, если тело покоится.

Элементарная работа силы – это работа на бесконечно малом перемещении точки приложения силы:

$$\delta A = F ds \cos\varphi.$$

Работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ на элементарных перемещениях:

$$A = \sum \delta A \ [\text{Н} \cdot \text{м}].$$

Работа постоянной силы – $A = Fs \cos\varphi$.

Работа переменной силы, зависящей от перемещения – $A = \int\limits_{s_0}^{s_1} F(s) ds$.

Работа силы тяжести – $A = \pm GH$, где H – величина вертикального перемещения. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории движения точки или тела.

Работа силы упругости – $A = -\frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right)$, где x_0 – начальная деформация пружины, x_1 – конечная деформация пружины.

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу – $A = M_O\left(\overline{F}\right)\varphi$.

Работа пары сил с моментом $M = const$ – $A = M\varphi$.

Работа пары сил с моментом, зависящим от угла поворота – $A = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} M(\varphi) d\varphi$.

Работа силы положительна, если направление действия силы совпадает с направлением перемещения.

Теорема об изменении кинетической энергии системы. Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему (дифференциальная форма):

$$dT = \sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^i .$$

Изменение кинетической энергии системы нВ некотором перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом перемещении (интегральная форма):

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i .$$

В неизменяемой механической системе сумма работ внутренних сил на любом перемещении равна нулю.

2.12 Понятие о силовом поле

Силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует определенная сила, зависящая от положения частицы. Примерами силового поля являются поле сил тяжести, поле сил упругости, поле всемирного тяготения.

Если некоторая функция дает возможность определить значение силы в каждой точке силового поля, то эта функция является силовой функцией $U = U(x, y, z)$, а само силовое поле – потенциальным.

Сила в потенциальном силовом поле направлена в сторону возрастания силовой функции. Так сила тяжести тел вблизи поверхности Земли всегда направлена вертикально вниз, а сила упругости стремится вернуть тело в положение равновесия.

Если в потенциальном силовом поле находится система материальных точек, то силовой функцией будет такая функция координат точек системы, для которой

$$dU = \sum dA_k ,$$

т.е. дифференциал силовой функции равен сумме элементарных работ всех сил поля, действующих на систему.

Проекции силы, действующей на частицу в каждой точке силового поля, на координатные оси выражаются через силовую функцию U следующим образом

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Элементарная работа силы в потенциальном силовом поле равна полному дифференциалу от силовой функции.

$$dA(\vec{F}) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$$

Полная работа силы в потенциальном силовом поле на каком-либо перемещении материальной точки равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках перемещения и не зависит от вида траектории, по которой оно совершалось:

$$A(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M_1} dA(\vec{F}) = \int_{M_0}^{M_1} dU = U_1 - U_0.$$

где $U_0 = U(x_0, y_0, z_0,)$ – начальное значение силовой функции, $U_1 = U(x_1, y_1, z_1,)$ – конечное значение силовой функции.

Работа силы в потенциальном силовом поле по замкнутому пути равна нулю.

Силы, действующие в потенциальном силовом поле, называются потенциальными.

Известными примерами потенциальных сил являются: сила тяжести, сила упругости пружины, сила всемирного тяготения. Для этих сил известны выражения для силовой функции:

– силовая функция силы тяжести $U=-Pz$, где P – модуль силы тяжести, z – разность координат ($z=z_1-z_0$), ось z направлена вверх;

– силовая функция для силы упругости $U=-0{,}5cx^2$;

– силовая функция для силы всемирного тяготения $U=mg\dfrac{R^2}{r}$, где R – радиус Земли, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

<u>Потенциальной энергией материальной точки</u> в называется скалярная величина Π, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из данного положения в нулевое, т.е

$$\Pi=-A(\vec{F}).$$

Потенциальная энергия в любой точке потенциального силового поля равна значению силовой функции в той же точке, взятому со знаком минус $\Pi=-U$.

Для известных потенциальных сил можно записать выражения для потенциальной энергии:

– потенциальная энергия силы тяжести $\Pi=Pz$, где P – модуль силы тяжести, z – разность координат ($z=z_1-z_0$), ось z направлена вверх;

– потенциальная энергия силы упругости $\Pi=0{,}5cx^2$;

– потенциальная энергия силы всемирного тяготения $\Pi=-mg\dfrac{R^2}{r}$, где R – радиус Земли, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Если система состоит из нескольких тел, то потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех тел системы, т.е.

$$\Pi=\sum\Pi_k .$$

При движении материальной частицы под действием силы потенциального поля сумма кинетической и потенциальной энергий в каждом ее положении остается величиной постоянной, т.е.

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = const .$$

Пример 5. Груз D массой m = 4,8 кг, получив в точке A начальную скорость v_0 = 10 м/с, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. Участок AB трубы наклонный, участок BC – горизонтальный (рисунок 32).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила Q = 10 Н и сила сопротивления среды $R = \mu v^2$ Н, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза. Трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f=0,2) и переменная сила $\vec{F}$ проекция которой на ось x равна F_x=4cos2t.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние AB=l=4 м, найти закон движения груза на участке BC, т.е. x=$f(t)$, где x=BD.

Дано: m = 4,8 кг, v_0 = 10 м/с, Q = 10 Н, $R = \mu v^2$ Н, μ=0,2 кг/м^3, l=4 м, F_x=4cos2t.

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изобразим груз в произвольном положении и покажем действующие на него силы $\vec{P} = m\vec{g}$, $\vec{R}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}$. Проведем ось Az и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекциях на эту ось:

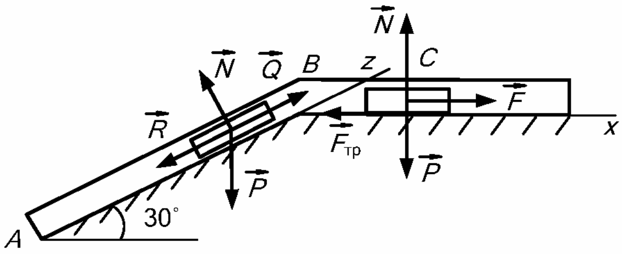


Рисунок 32

$$m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} = -P\sin 30 + Q - \mu v_z^2 \quad ,$$

или $m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin 30 + Q - \mu v^2$; $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu}{m}\left(\dfrac{-mg\sin 30 + Q}{\mu} - v^2\right)$.

Введем обозначения $k = \dfrac{\mu}{m} = \dfrac{0{,}2}{4{,}8} = 0{,}042$ м$^{-1}$,

$$n = \frac{-4{,}8 \cdot 9{,}81 sin 30 + 10}{0{,}2} = -67{,}72 \ \text{м}^2/\text{с}^2 .$$

Дифференциальное уравнение движения груза будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{dz} = k\left(n - v^2\right).$$

После разделения переменных $\dfrac{2vdv}{v^2 - n} = -2kdz$, $\ln\left(v^2 - n\right) = -2kz + C_1$.

Из начальных условий: при $t_0 = 0$, $z = z_0 = 0$, $v = v_0$, – получим $C_1 = \ln\left(v_0^2 - n\right) = -2kz + \ln\left(v_0^2 - n\right)$.

Следовательно $\ln\left(v^2 - n\right) = -2kz + \ln\left(v_0^2 - n\right)$;

$$\ln\frac{v^2-n}{v_0^2-n}=-2kz \quad \text{и} \quad \frac{v^2-n}{v_0^2-n}=\exp(-2kz).$$

Откуда находим

$$v^2=n-\left(v_0^2-n\right)\exp(-2kz).$$

При $z=l \quad v=v_B$

$$v_B=\sqrt{n-\left(v_0^2-n\right)\exp(-2kl)}=\sqrt{-67{,}72-\left(10^2-67{,}72\right)\exp(-2\cdot 0{,}042\cdot 4)}=$$
$$=7{,}22 \text{ м/с}.$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC. Начальные условия движения на этом участке: $t_0=0$, $x_0=0$. Найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0=v_B$). Изобразим груз в произвольном положении и покажем все действующие на него силы $\vec{P}=m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}$. Проведем оси Bxy и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{dv_x}{dt}=\sum F_{kx}=-F_{\text{тр}}-F_x=-fmg+4\cos 2t \ \text{ или } \ \frac{dv_x}{dt}=-fg+\frac{4}{m}\cos 2t.$$

Разделяем переменные и определяем первый интеграл

$$dv_x=-fgdt+\frac{4}{m}\cos 2tdt, \quad v_x=-fgt+\frac{2}{m}\sin 2t+C_2.$$

При $t=0$ $v_x=v_B$, следовательно, $C_2=v_B$, тогда

$$v_x=\frac{dx}{dt}-fgt+\frac{2}{m}\sin 2t+v_B.$$

Разделяем переменные и определяем второй интеграл

$$dx = -fgtdt + \frac{2}{m}\sin 2tdt + v_B dt.$$

Откуда $x = -fg\frac{t^2}{2} - \frac{1}{m}\cos 2t + v_B t + C_3$.

При $t = 0$ $x = 0$, следовательно, $C_3 = 0$.

Тогда $x = -0{,}2 \cdot 9{,}8\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4{,}8}cos\,2t + 7{,}22t$.

Ответ: $x = -0{,}98 \cdot t^2 + 7{,}22 \cdot t - 0{,}21\cos 2 \cdot t$

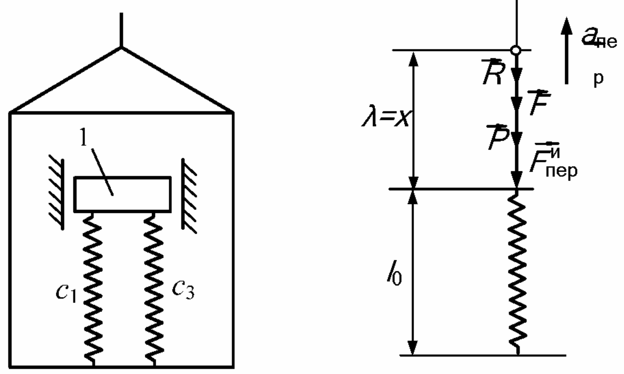
Пример 6. Груз *1* массой m = 1 кг укреплен на пружинной подвеске в корпусе (рисунок 33, а). Корпус движется вертикально по закону z = 0,5 $\alpha_1 t^2$ (ось z направлена по вертикали вверх; z выражено в метрах, t – в секундах). На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu v$, где v – скорость груза по отношению к лифту, μ = 20 Н·с.

Найти закон движения груза по отношению к корпусу, т.е. x=f(t); начало координат поместить в точке, где находится прикрепленный к грузу конец пружины, когда пружина не деформирована. При этом направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором x>0, т.е. пружина растянута. Удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент λ_0=0. Начальная скорость груза v_0 = 3 м/с.

При подсчетах принять $g = 10\,\text{м}/\text{с}^2$. Массой пружин пренебречь.

Дано: m = 1 кг, C_1 =200 Н/м, C_2 = 300 Н/м, α_1 = 1,5g, μ = 20 Н·с, λ_0=0, v_0 = 3 м/с, z = 0,5 $\alpha_1 t^2$.

Определить: x =f(t) – закон относительного движения груза.



а) б)

Рисунок 33

Решение. 1. Свяжем с корпусом подвижную систему отсчета, начало O которой поместим в конце недеформированной пружины (ее длина обозначена l_0), а ось x направим в сторону удлинения пружины (рисунок 33, б). Рассмотрим груз в положении, при котором пружина растянута. На груз действует сила тяжести $\vec{P}$ и сила упругости $\vec{F}$. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $\vec{F}^{и}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$, кориолисова сила инерции равна нулю, так как переносное движение (движение корпуса) является поступательным.

Т.к. $z = 0{,}5\alpha_1 t^2$, то $a_{пер} = \ddot{z} = \alpha_1$

Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}^{и}_{пер}.$$

Проецируя обе его части на ось x, получим $m\ddot{x} = -mg - \mu\dot{x} - cx - m\alpha_1$, где эквивалентная жесткость пружины $c = c_1 + c_3 = 200 + 300 = 500H$.

Таким образом, получим $\ddot{x} + 2n\dot{x} + kx^2 = a$, где $n=\dfrac{\mu}{2m}$, $k^2=\dfrac{c}{m}$, $a=-(g+\alpha_1)$; $n=\dfrac{20}{2\cdot 1}=10c^{-1}$, $k^2=\dfrac{500}{1}=500c^{-1}$, $k=22{,}36c^{-1}$, $a=2{,}5g$.

2. Для определения закона движения груза нужно проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение. Его общее решение будет равно сумме $x=x_1+x_2$, где x_1 – решение однородного дифференциального уравнения $\ddot{x}_1+2n\dot{x}_1+k^2x_1=0$ и это решение имеет вид $x_1=e^{-nt}(C_1\sin kt+C_2\cos kt)$; x_2 – частное решение уравнения.

Решение x_2 ищем в виде $x_2=A$. Тогда $\dot{x}_2=0$, $\ddot{x}_2=0$, откуда $k^2A=a$ и $A=\dfrac{a}{k^2}=-\dfrac{2{,}5\cdot 10}{500}=-0{,}05\text{м}$.

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид $x=e^{-nt}(C_1\sin kt+C_2\cos kt)+A$.

Первая производная по времени от закона движения будет представлять собой закон изменения скорости – первый интеграл

$$\dot{x}=-ne^{-nt}(C_1\sin kt+C_2\cos kt)+e^{-nt}(kC_1\cos k-kC_2\sin kt).$$

При $t=0$ $x_0=0$, $\dot{x}_0=3\,м/с$, таким образом

$x_0=0=C_2+A$, откуда $C_2=-A=0{,}05\ м$;

$\dot{x}_0=3=-nC_2+kC_1$, откуда $C_1=\dfrac{3+C_2}{k}=\dfrac{3+10\cdot 0{,}05}{22{,}36}=1{,}56$.

С учетом найденных постоянных интегрирования закон относительного движения точки примет вид

$$x=e^{-10t}(1{,}56\sin 22{,}36t+0{,}05\cos 22{,}36t)-0{,}05\ м.$$

Пример 7. Механическая система состоит из грузов D_1 массой $m_1 = 2$ кг и D_2 массой $m_2 = 6$ кг и прямоугольной вертикальной плиты массой $m_3 = 12$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рисунок 34). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r=0,4 м и R=0,8 м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_3D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\left(t^2 + 1\right)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ – по закону $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\left(t^2 + 1\right)$.

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон движения плиты $x_3 = f_3(t)$ и закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих $N = f(t)$.

Дано: m_1 = 2 кг, m_2 = 6 кг, m_3 =12 кг, r = 0,4 м, R = 0,8 м, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\left(t^2 + 1\right)$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\left(t^2 + 1\right)$.

Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2 , в произвольном положении (рис. 34). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ и реакцию направляющих $\vec{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени t_0=0.

а) Определение перемещения x_3. Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим

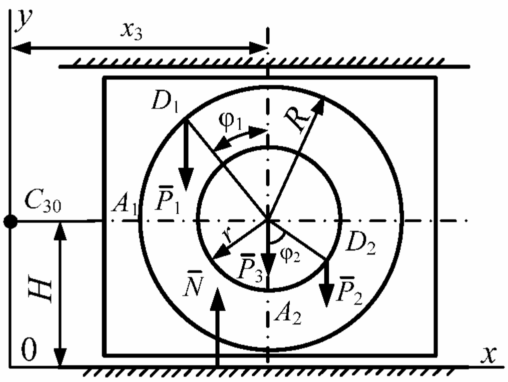


Рисунок 34

дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x.

Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0,$$

$\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение $M\dfrac{dv_{Cx}}{dt} = 0$ или $Mdv_{Cx} = 0$, найдем, что $Mv_{Cx} = M\dot{x}_C = C_1$, т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $v_{cx} = 0$, то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$ или $M\dfrac{dx_C}{dt} = 0$, $Mdx_C = 0$, получим

$Mx_C = const$,

т.е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Из рисунка 34 видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 + r\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 - R\sin\varphi_2$. Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы, $Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$, то

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\varphi_1 - m_2 R\sin\varphi_2 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\left(\frac{\pi}{3}\left(t^2+1\right)\right) - m_2 R\sin\left[\frac{\pi}{6}\left(t^2-2\right)\right].$$

В соответствии с равенством $Mx_C = const$ координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны. Учитывая, что при t_0=0, x_3=0 $Mx_{C_0} = m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2 R\sin\frac{\pi}{3}$, получим

$$(m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(t^2+1\right)\right] - m_2 R\sin\left[\frac{\pi}{6}\left(t^2-2\right)\right] =$$
$$= m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2 R\sin\frac{\pi}{3}.$$

Отсюда получаем зависимость координаты x_3 от времени

$$x_3 = \frac{m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2 R\sin\frac{\pi}{3} - m_1\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(t^2+1\right)\right] + m_2 R\sin\left[\frac{\pi}{6}\left(t^2-2\right)\right]}{(m_1+m_2+m_3)} =$$
$$= \frac{2\cdot 0{,}4\cos\frac{\pi}{3} + 6\cdot 0{,}8\sin\frac{\pi}{3} - 2\cdot 0{,}4\cos\left[\frac{\pi}{3}\left(t^2+1\right)\right] + 6\cdot 0{,}8\sin\left[\frac{\pi}{6}\left(t^2-2\right)\right]}{2+6+12}.$$

Ответ: $x_3 = 0{,}23 - 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}24\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)$ м.

б) Определение реакции N. Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рисунок 34):

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{kx}^e \quad \text{или} \quad M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3.$$

Отсюда получим:

$$N = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2 + P_3 = M\ddot{y} + (m_1 + m_2 + m_3)g,$$

где $P_1 = m_1 g$, и т.д.

По формуле, определяющей ординату y_C центра масс системы, $My_C = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$, где $y_1 = H + r\sin\varphi_1$, $y_2 = H + R\cos\varphi$, $y_3 = H = OC_{30} = const$, получим

$$\begin{aligned} My_C &= m_1(H + r\sin\varphi_1) + m_2(H + R\cos\varphi_2) + m_3 H = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 r\sin\varphi_1 + m_2 R\cos\varphi_2, \end{aligned}$$

или $$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 r\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) + m_2 R\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right).$$

Дважды продифференцировав по времени обе части этого равенства, найдем

$$\begin{aligned} M\dot{y}_C &= m_1 r\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\frac{2\pi t}{3} - m_2 R\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi t}{3} = \\ &= \frac{m_1 r\cdot 2\pi}{3}\left[t\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{m_2 R\pi}{3}\left[t\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{y}_C &= \frac{m_1 r\cdot 2\pi}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi t^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \\ &- \frac{m_2 R\pi}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi t^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Подставив это значение $M\ddot{y}_C$ в уравнение $N = M\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g$, определим искомую зависимость N от t.

$$\begin{aligned} N &= \frac{m_1 r\cdot 2\pi}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi t^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \\ &- \frac{m_2 R\pi}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2\pi t^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + (m_1 + m_2 + m_3)g\right]. \end{aligned}$$

Ответ:

$$N = 196{,}2 + 1{,}68\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cdot 0{,}4t^2\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right] -$$

$$5{,}03\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}05t^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right] \text{ Н.}$$

Пример 8. Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты массой m_1=18 кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D массой m_2=6 кг (рисунок 35). В момент времени t_0=0, когда скорость плиты v_0=2 м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по прямолинейному желобу плиты. При движении груза расстояние s=AD изменяется по закону $s = AD = 1{,}2\cos\frac{\pi t}{2}$, где s выражено в метрах, t – в секундах.

Определить закон изменения скорости плиты.

Дано: m_1=18 кг, m_2=6 кг, u_0=2 м/с, $s = AD = 1{,}2\cos\frac{\pi t}{2}$.

Определить: $u = f(t)$ – закон изменения скорости плиты.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и нормальную реакцию поверхности $\overline{N}$. Проведем координатные оси x и y так, чтобы ось x была горизонтальна.

Чтобы определить скорость плиты u , воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\overline{Q}$ в проекции на ось x

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e.$$

Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рисунок 35), то $\sum F_{kx}^e = 0$ и теорема дает $\frac{dQ_x}{dt} = 0$, тогда $dQ_x = 0dt$, откуда $Q_x = C_1$.

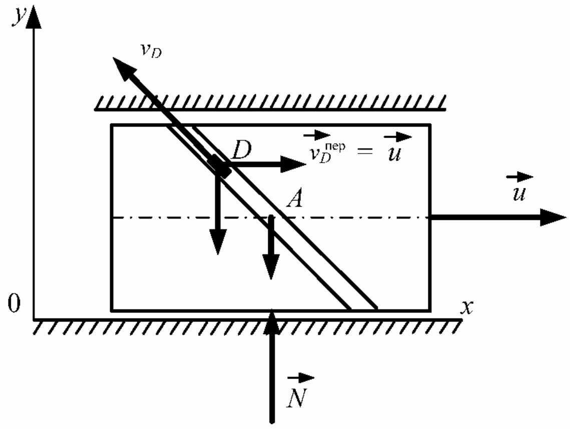


Рисунок 35

Для рассматриваемой механической системы $\overline{Q} = \overline{Q}^{\Pi} + \overline{Q}^{D}$, где $\overline{Q}^{\Pi} = m_1\overline{u}$ и $\overline{Q}^{D} = m_2\overline{v}_D$ – количества движения плиты и груза D соответственно ($\overline{u}$ – скорость плиты, $\overline{v}_D$ – скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда $Q_x^{\Pi} + Q_x^{D} = C_1$ или $m_1u_x + m_2v_{Dx} = C_1$.

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным (это движение, совершаемое вдоль желоба), а движение самой плиты – переносным. Тогда $\overline{v}_D = \overline{v}_D^{пер} + \overline{v}_D^{отн}$ и $v_{Dx} = v_{Dx}^{пер} + v_{Dx}^{отн}$.

Но $\bar{v}_D^{\text{пер}} = \bar{u}$ и, следовательно, $v_{Dx}^{\text{пер}} = u_x = u$. Вектор $\bar{v}_D^{\text{отн}}$ направлен вдоль желоба и численно $v_D^{\text{отн}} = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$, $v_{Dx}^{\text{отн}} = -\dot{s}\cos 60^\circ$, где $\dot{s} = -0{,}5\pi \sin\dfrac{\pi t}{2}$.

Окончательно получим

$$v_{Dx} = u + 0{,}5\pi \cos 60^\circ \sin\frac{\pi t}{2}.$$

При найденном значении v_{Dx} равенство $m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1$ примет вид

$$m_1 u + m_2 u + m_2 0{,}6\pi \cos 60^\circ \sin\frac{\pi t}{2} = C_1.$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при t=0 u=u_0. Подстановка этих величин в последнее уравнение дает $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ и тогда

$$(m_1 + m_2)u + 0{,}3\pi m_2 \sin\frac{\pi t}{2} = (m_1 + m_2)u_0.$$

Отсюда находим зависимость скорости u плиты от времени:

$$u = u_0 - \frac{0{,}3\pi m_2}{m_1 + m_2} \sin\frac{\pi t}{2}.$$

Подставив значения соответствующих величин, находим искомую зависимость u от t.

$$u = 2 - \frac{0{,}3\pi \cdot 6}{18 + 6} \sin\frac{\pi t}{2} = 2 - 0{,}236 \sin\frac{\pi t}{2}.$$

Ответ: $u = 2 - 0{,}236 \sin\dfrac{\pi t}{2}$ м/с.

Пример 9. Однородная горизонтальная круглая платформа радиуса R=1,2 м массой m_1=24 кг, вращается с угловой скоростью ω_0=10 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси z, отстоящей от центра масс C платформы на расстоянии $OC=b=R$ (рисунок 36).

В момент времени t_0=0 по желобу платформы начинает двигаться под действием внутренних сил груз D массой m_2=8 кг по закону $s = AD = -4t^2$, где s выражено в метрах, t – в секундах. Одновременно на платформу начинает действовать пара сил с моментом M=6 Н·м.

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость угловой скорости платформы от времени, т.е. $\omega = f(t)$.

Дано: m_1 = 24 кг, m_2 = 8 кг, ω_0 = 10 с$^{-1}$, M = 6 Н·м, $s = AD = -4t^2$, R = 1,2 м.

Определить: $\omega = f(t)$ – закон изменения угловой скорости платформы.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения угловой скорости платформы ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z (рисунок 36): $\dfrac{dK_z}{dt} = \sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right)$.

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, реакции опор $\overline{R}_B$ и $\overline{R}_H$ и вращающий момент M. Так как силы тяжести параллельны оси z , а реакции $\overline{R}_B$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Считая для момента положительным направление против хода часовой стрелки, получим $\sum M_z\left(\vec{F}_k^e\right) = M = 6$ и тогда:

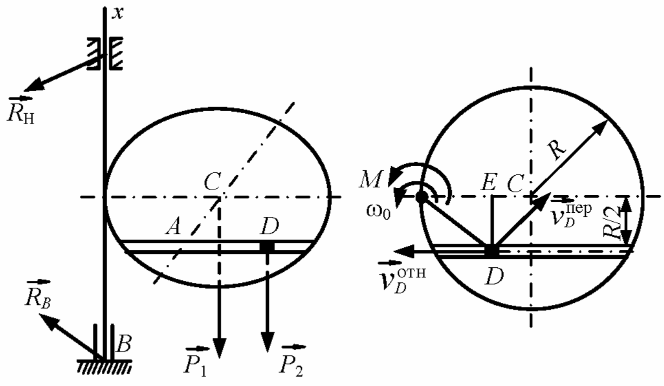


Рисунок 36

$$\frac{dK_z}{dt} = M .$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и разделяя переменные, получим $dK_z = Mdt$, откуда, интегрируя, получим $K_z = Mt + C_1$.

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D ,$$

где $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D – кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси z, то $K_z^{\text{пл}} = J_z \omega$. Значение J_z найдем по теореме Гюйгенса: $J_z = J_{Cz'} + m_1 (OC)^2 = J_{Cz'} + m_1 R^2$ ($J_{Cz'}$ – момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр масс C платформы).

Для круглой пластины $J_{Cz'} = \dfrac{m_1 R^2}{2}$.

Тогда $\quad J_z = \dfrac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 = \dfrac{3 m_1 R^2}{2}$.

Следовательно, $K_z^{\text{пл}} = \dfrac{3m_1R^2}{2}\omega$.

Для определения K_z^D рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{v}_D = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$. Так как груз D движется по закону $s = CD = -4t^2$, то $v_{\text{отн}} = \dot{s} = -8t$; вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ изображаем с учетом полученного знака результата дифференцирования. Учитывая направление ω, изображаем вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$, $(\bar{v}_{\text{пер}} \perp OD)$; численно $v_{\text{пер}} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = M_z(m_2\bar{v}_D) = M_z(m_2\bar{v}_{\text{отн}}) + M_z(m_2\bar{v}_{\text{пер}}) = -m_2v_{\text{отн}} \cdot OC +$$
$$+ m_2v_{\text{пер}} \cdot OD = -m_2 \cdot 4tR + m_2\omega(OD)^2.$$

На рис. 36, б видно, что

$$OD^2 = OE^2 + ED^2 = (R - s)^2 + (0{,}5R)^2 = \left(R - 0{,}4t^2\right)^2 + 0{,}25R^2 =$$
$$= 1{,}25R^2 - 0{,}8t^2 + 0{,}16Rt^4.$$

Подставляя эту величину в выражение для K_z^D, а затем значения K_z^D и $K_z^{\text{пл}}$ в равенство $K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D$, получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{3m_1R^2}{2}\omega - 0{,}4m_2Rt + m_2\left(1{,}25R^2 - 0{,}8Rt^2 + 0{,}16t^4\right)\omega.$$

Тогда уравнение $K_z = Mt + C_1$, где M=6, примет вид

$$\left[\frac{3m_1R^2}{2} + m_2\left(1{,}25R^2 - 0{,}8Rt^2 + 0{,}16t^2\right)\right]\omega - 0{,}4m_2Rt = Mt + C_1$$

или $\left(66{,}24 - 7{,}68t^2 + 0{,}16t^4\right)\omega - 3{,}84t = Mt + C_1$.

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при t=0, $\omega_0 = 10\,\text{с}^{-1}$. Получим $C_1 = 662{,}4$ кг·м^2/с. Находим искомую зависимость ω от t.

Ответ : $\omega = \dfrac{13{,}84 + 662{,}4}{66{,}24 - 7{,}68t^2 + 0{,}16t^4}$ с$^{-1}$.

Пример 10. Механическая система (рисунок 37) состоит из подвижного блока *5*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *2* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*. К центру C_5 блока *5* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: m_2 = 6кг, m_3 = 12 кг, m_4 = 0, m_5 = 5 кг, c = 200 Н·м, M = 1,2 Н·м, F = 80(4+5s) Н, r_3 = 0,1 м, R_3 = 0,3 м, ρ_3 = 0,2 м, f = 0,1, s_1=0,2 м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *2*, *3*, *5* и невесомого тела *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{\text{упр}}$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$, реакции $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, силу трения $\overline{F}_2^{\text{тр}}$ и момент M.

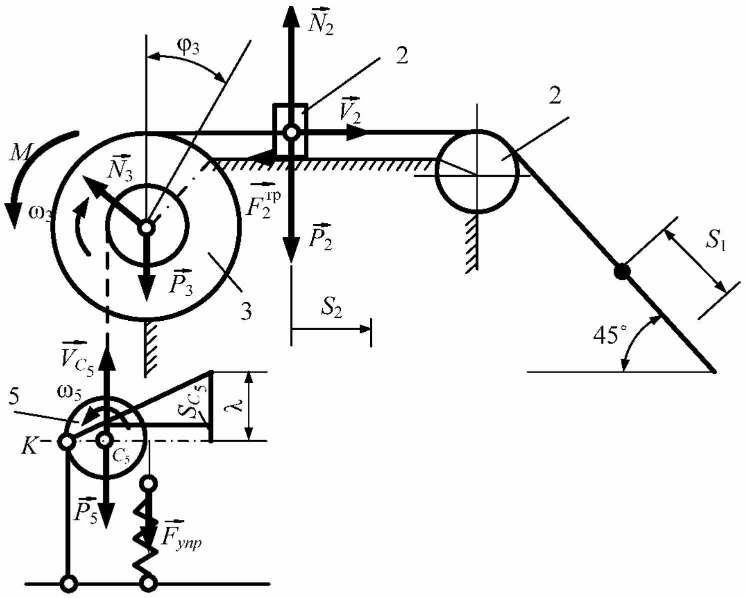


Рисунок 37

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i ,$$

где T_0 и T кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях, $\sum A_k^e$, $\sum A_k^i$ – суммы работ всех внешних и внутренних сил.

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$.

Величина T равна сумме энергий всех тел системы: $T = T_2 + T_3 + T_5$.

Учитывая, что тело *5* движется плоскопараллельно, тело *2* – поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 ,\ T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 ,\ T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{C5}^2 + \frac{1}{2} I_{C_5} \omega_5 .$$

Все входящие сюда скорости выразим через искомую скорость ω_3. Поскольку точка K – мгновенный центр скоростей тела *5* радиуса r_5 , то

$$v_2 = \omega_3 R_3, v_{C_5} = r_3\omega_3,\ \omega_5 = \frac{v_{C_5}}{R_5} = \omega_3 \frac{r_3}{R_5}.$$

Кроме того, моменты инерции имеют значения

$$I_{C_5} = 0{,}5 m_5 R_5^2,\ I_3 = m_3 \rho_3^2.$$

Подставив все найденные величины в выражение для кинетической энергии системы, получим

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(m_2 R_3^2 + m_3\rho_3^2 + m_5 r_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 0{,}39\omega_3^2.$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних и внутренних сил системы на перемещении, которое будет иметь система, когда тело *2* пройдет путь s_1.

Для неизменяемой механической системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю $\sum A_k^i = 0$.

Сумма работ внешних сил $\sum A_k^e = A(\overline{F}) + A(\overline{F}_{\text{тр}2}) + A(\overline{P}_5) + A(\overline{F}_{\text{упр}})$,

где $A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 80(4+5s)ds = 80(4s_1 + 2{,}5s_1^2)$, $A(\overline{F}_{\text{тр}2}) = -F_{mp2}s_2$, $A(\overline{P}_5) = -P_5 s_5$,

$$A(\vec{F}_{\text{упр}}) = -\frac{1}{2} - (\lambda^2 - \lambda_0^2),\ A(M) = -M\varphi_3.$$

Здесь s_5 – перемещение центра блока *5*, φ_3 – угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 – начальное и конечное удлинения пружины, $s_2 = s_1$ – перемещение тела *2*.

Работы остальных сил равны нулю, так как точки, где приложены силы $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ неподвижны; а силы $\vec{P}_2$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны перемещению груза.

Так как по условиям задачи, $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 2s_5$. Величины s_5 и φ_3 выразим через заданное перемещение s_1; учитывая, что зависимость между перемещениями такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $v_2 = \omega_3 R_3, v_{C_5} = r_3\omega_3$, $s_5 = \dfrac{r_3}{R_3} s_1$ и $\varphi_3 = s_1/R_3$.

При найденных значениях s_5, φ_3 и λ_1 работы внешних сил равны

$$A(\vec{F}_{\text{тр}2}) = -fm_2 g s_1 = -5{,}886 s_1,\ A(\vec{P}_5) = -m_5 g \frac{r_3}{R_3} s_1 = -16{,}35 s_1,$$

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{1}{2} - (2s_5)^2 = -\frac{1}{2} c\left(\frac{2r_3}{R_3} s_1^2\right) = -44{,}44 s_1^2,\ A(M) = -M\frac{s_1}{R_3} = -4s_1.$$

Сумма работ внешних сил $\sum A_k^e = 293{,}76 s_1 + 155{,}56 s_1^2$.

Подставляя выражения для кинетической энергии и выражение для суммы работ всех внешних сил в формулу теоремы и учитывая, что $T_0=0$ и $\sum A_k^i = 0$, придем к равенству

$$0{,}39\omega_3^2 = 293{,}76 s_1 + 155{,}56 s_1^2.$$

Откуда $\omega_3 = \sqrt{\dfrac{293{,}76 s_1 + 155{,}56 s_1^2}{0{,}39}} = 12{,}91\,\text{c}^{-1}$.

Ответ : $\omega_3 = 12{,}91\ \text{c}^{-1}$.

2.13 Элементы статики

Статика изучает методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливает условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Сила – это мера механического взаимодействия материальных тел, определяющая величину (или интенсивность) и направление этого взаимодействия. Единица измерения – Н (Ньютон).

Сила – векторная величина. Сила определяется тремя параметрами:

– модулем (числовым значением);

– направлением;

– точкой приложения.

Проекции силы на ось: $P_x = P\cos\alpha$ – во всех случаях.

Если $\alpha < 90^\circ$ $P_x = P\cos\alpha$ – проекция положительная.

Если $\alpha = 90^\circ$ $P_x = P\cos 90^\circ$ – проекция равна нулю.

Если $\alpha < 90^\circ$ $P_x = P\cos\alpha = -P\cos(180^\circ - \alpha)$ – проекция отрицательная.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы (рисунок 38).

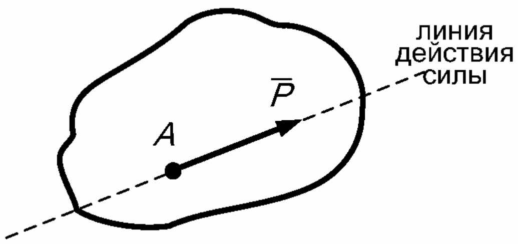


Рисунок 38

Система сил – совокупность нескольких сил, действующих на тело.

Эквивалентные системы сил – такие системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии. Эквивалентные системы сил могут заменять друг друга.

Аксиомы статики.

Аксиома равновесия двух сил. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю) тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют вдоль одной прямой и противоположно направлены (рисунок 39).

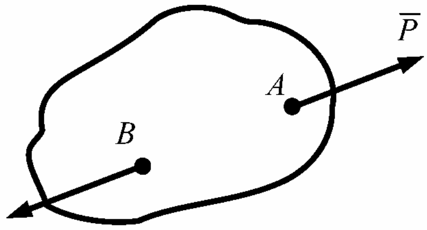


Рисунок 39

Аксиома присоединения (отбрасывания, исключения) системы уравновешенных сил. Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, к нему можно присоединять (или отбрасывать от него) силы тогда и только тогда, когда они составляют уравновешенную систему (рисунок 40).

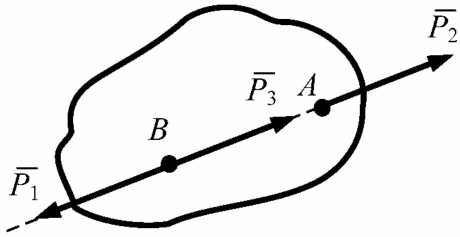


Рисунок 40

Следствие: не нарушая состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль ее линии действия, меняя точку приложения. Т.е. сила, приложенная к абсолютно твердому телу, представляет собой скользящий вектор.

Аксиома параллелограмма сил. Две силы, действующие на точку абсолютно твердого тела, можно заменить равнодействующей силой, равной их геометрической сумме, приложенной в этой же точке (рисунок 41)

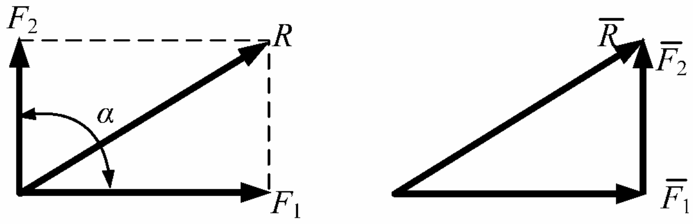


Рисунок 41

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$

где $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$ – модуль равнодействующей, α – угол между направлениями векторов слагаемых сил.

Аксиома равенства действия и противодействия. Силы взаимодействия двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой противоположно.

Это один из основных законов классической механики.

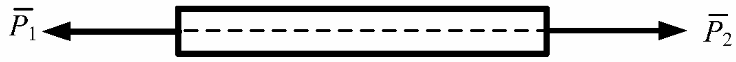
Аксиома затвердевания. Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, сохраняется при его затвердевании.

Равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать его точки и считать тело абсолютно твердым.

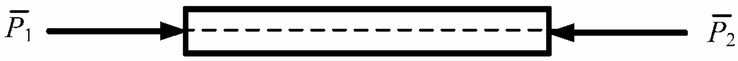
Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, должны выполняться и для сил, приложенных к деформируемому телу. Однако в случае деформируемого тела эти условия необходимы, но не достаточны.

Например, условия равновесия сил, приложенных к стержню, выполняются в обоих случаях (рисунок 42, а и б), а к нити – только в случае растяжения (рисунок 42, а).

Природа сил в теоретической механике значения не имеет: будь то мускульная сила, сила трения, сила всемирного тяготения и др. Поэтому классифицируют силы по другим признакам:



а)



б)

Рисунок 42

1. Силы внешние и силы внутренние. Внешние силы действуют на систему материальных точек со стороны других тел. Внутренние силы – силы взаимодействия между точками одной и той же системы.

Одни и те же силы можно считать внешними и внутренними в зависимости от решения поставленной задачи: силы давления газообразных продуктов сгорания на поршень двигателя внутреннего сгорания можно считать внешними, если рассматривать движение поршня, и внутренними – если рассматривать движение всего двигателя (вместе с транспортным средством).

2. Активные силы и реакции связей. Модули и направления активных сил не зависят от других сил, действующих на тело. Реакции связей возникают в точках закрепления тел. Реакции связей зависят от активных сил (рисунки 43 и 44).

3. Сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенные силы считаются приложенными в точке. Распределенные силы приложены на некотором участке тела. Сосредоточенную силу можно разложить на компоненты, параллельные координатным осям

$$\overline{P} = \overline{P}_x + \overline{P}_y + \overline{P}_z ,$$

где $\overline{P}_x$, $\overline{P}_y$ и $\overline{P}_z$ – компоненты вектора $\overline{P}$.

Распределенные силы характеризуются интенсивностью распределенной нагрузки [Н/м]. При решении задач распределенная сила заменяется сосредоточенной.

4. Статические и динамические. Статические силы действуют постоянно. Динамические силы меняются во времени.

Основной задачей статики является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

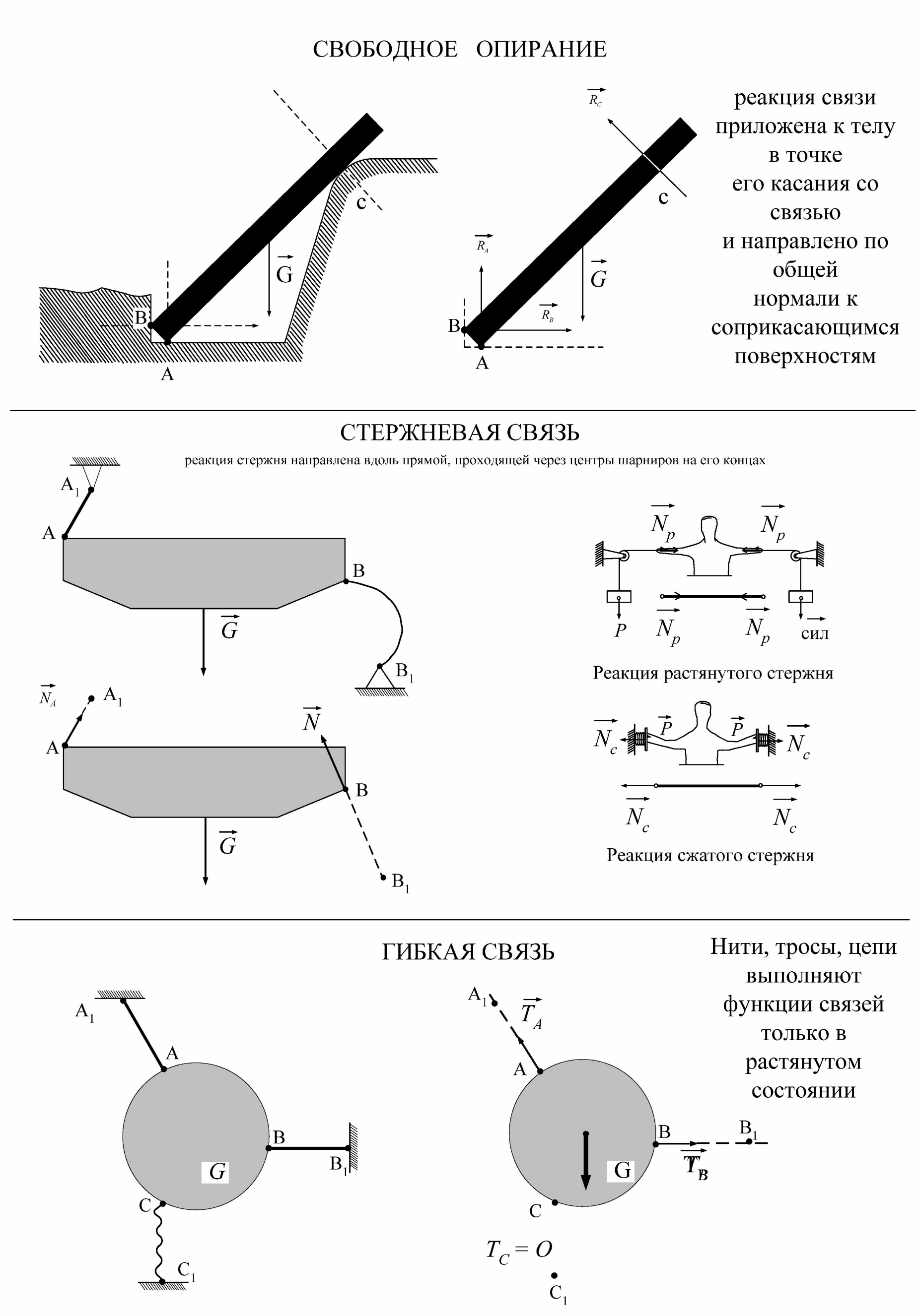
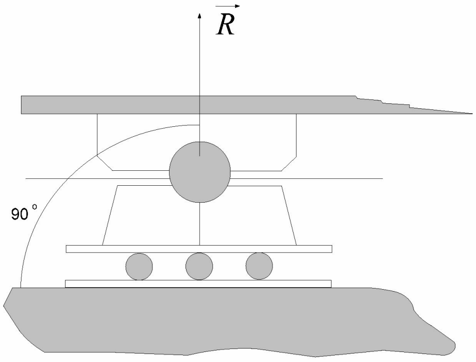


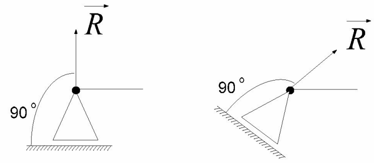
Рисунок 43

ШАРНИРНАЯ СВЯЗЬ

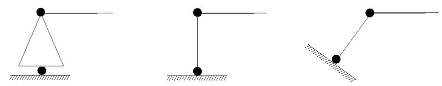
ШАРНИРНО-ПОДВИЖНАЯ ОПОРА - АНАЛОГИЧНА СВОБОДНОМУ ОПИРАНИЮ



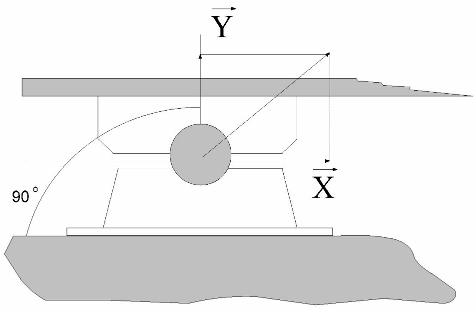
ОБОЗНАЧЕНИЕ ПО ГОСТ 2.770-68



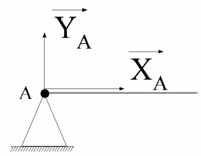
ДРУГИЕ ВОЗМОЖНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ НА РИСУНКАХ



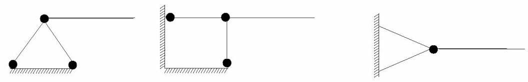
ШАРНИРНО-НЕПОДВИЖНАЯ ОПОРА



ОБОЗНАЧЕНИЕ ПО ГОСТ 2.770-68

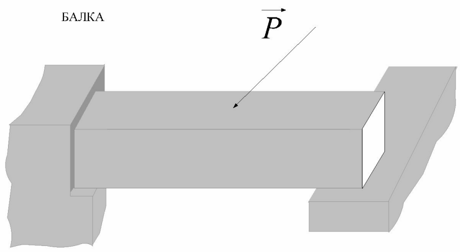


ДРУГИЕ ВОЗМОЖНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

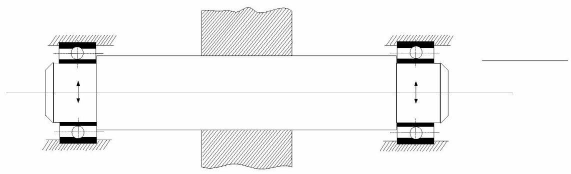


ДВУХОПОРНЫЕ

БАЛКА



ВАЛ



ИХ УСЛОВНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

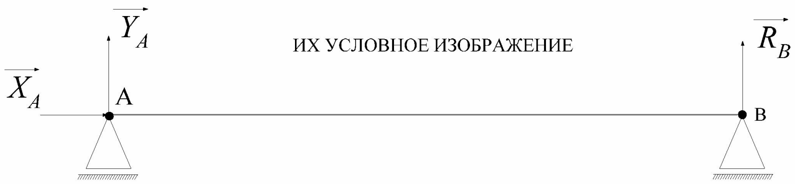


Рисунок 44

2.14 Система сил

Силы называются сходящимися, если их линии действия пересекаются в одной точке (рисунок 45).

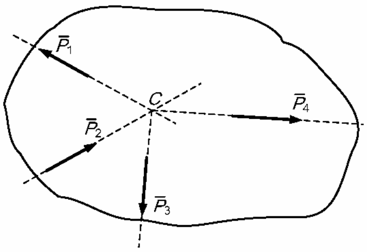


Рисунок 45

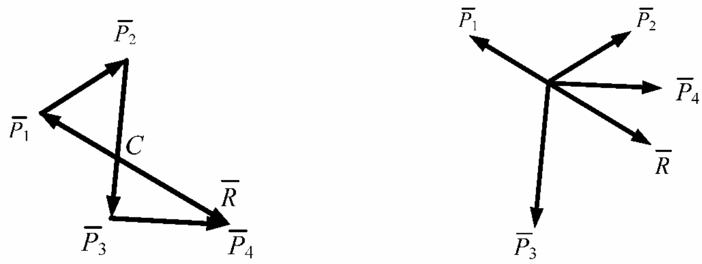
Сходящиеся системы сил могут быть пространственными и плоскими (т.е. расположенными в одной плоскости).

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе – равнодействующей, – которая равна их геометрической сумме, и линия действия которой проходит через точку пересечения их линий действия:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \, .$$

Способы нахождения равнодействующей.

Геометрический способ. К концу одного вектора приставить начало второго и т.д. Замыкающая силового многоугольника и будет равнодействующей (рисунок 46, а). Или складывают силы попарно по правилу параллелограмма (рисунок 46, б).



а) б)

Рисунок 46

Аналитический способ – проекции равнодействующей на оси координат равны сумме проекций слагаемых сил на соответствующие оси:

$$R_x = \sum F_{kx}\,;\; R_y = \sum F_{ky}\,;\; R_z = \sum F_{kz}\,.$$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ – модуль равнодействующей.

$\cos\left(x,\overline{R}\right) = \dfrac{R_x}{R}$; $\cos\left(y,\overline{R}\right) = \dfrac{R_y}{R}$; $\cos\left(z,\overline{R}\right) = \dfrac{R_z}{R}$ – направляющие косинусы.

Условия равновесия системы сходящихся сил.

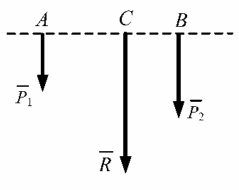
1. Геометрическое условие равновесия: силовой многоугольник должен быть замкнут (равнодействующая равна нулю).

$$\overline{R} = 0\,.$$

2. Аналитические условия равновесия: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы их проекций на все координатные оси (декартовы) были равны нулю

$$\sum F_{kx} = 0;\; \sum F_{ky} = 0\,;\; \sum F_{kz} = 0\,.$$

Равнодействующая двух параллельных сил, имеющих одинаковое направление, имеет то же направление, а ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил (рисунок 47).



$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2\,.$$

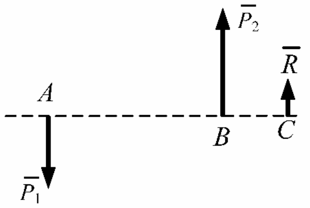
$$R = P_1 + P_2\,.$$

Рисунок 47

Точка приложения равнодействующей определяется из соотношения:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{BC}{AC}.$$

Равнодействующая двух параллельных сил, имеющих противоположное направление, имеет направление большей силы, а ее модуль равен разности модулей слагаемых сил (рисунок 48).



$$\overline{R}=\overline{P_1}+\overline{P_2}.$$

$$R=P_1-P_2.$$

Рисунок 48

Точка приложения равнодействующей лежит на продолжении отрезка AB за точкой приложения большей силы и определяется из соотношения:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{h_2}{h_1}=\frac{BC}{AC}.$$

Если две параллельные силы равны по модулю и направлены противоположно, то они образуют пару (рисунок 49). Плоскость, в которой расположены линии действия сил, образующих пару, называется плоскостью действия пары.

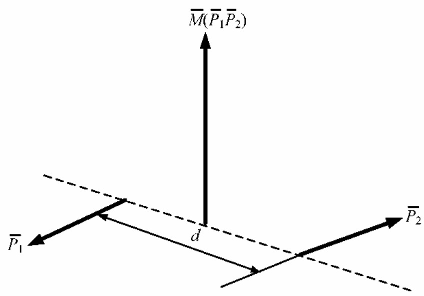


Рисунок 49

Пара сил не имеет равнодействующей ($R = P_1 - P_2 = 0$), однако силы не уравновешиваются. Пара сил стремится произвести вращение твердого тела, к которому она приложена. Пара сил может быть уравновешена только другой парой.

Действие пары сил на твердое тело характеризуется моментом пары. Момент пары сил – вектор, перпендикулярный плоскости действия пары. Единица измерения момента пары – Н·м.

Алгебраический момент пары – произведение (взятое со знаком «+» или «–») модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо:

$M = \pm P \cdot d$.

Плечо пары – расстояние между линиями действия пары. Модуль (числовое значение) векторного момента совпадает с модулем алгебраического момента.

Момент пары сил на плоскости обычно изображают дуговой стрелкой. Момент считают положительным, если пара сил стремится вызвать вращение против часовой стрелки, и отрицательным – если по часовой.

Теоремы об эквивалентности пар:

Теорема 1. Пару сил, действующую на абсолютно твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей такой же алгебраический момент.

Теорема 2. Действие пары сил на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести эту пару в параллельную ей плоскость.

Теорема 3. Две пары сил, действующие на одно и то же тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной парой сил, векторный момент которой равен геометрической сумме векторных моментов слагаемых пар (правило параллелограмма).

Последовательно применяя правило параллелограмма ко всем векторным моментам, действующим на твердое тело, можно любое количество пар сил в общем случае заменить одной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k .$$

Очевидно, что тело, находящееся под действием системы пар сил, будет находиться в состоянии равновесия, если равна нулю сумма моментов всех пар сил, действующих на тело: $\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k = 0$.

Так как момент – вектор, то он имеет проекции на оси координат (например, декартовых). В таком случае условия равновесия пар сил можно записать аналитически

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0 .$$

Сила, приложенная к твердому телу, имеющему закрепленную точку, также может вызвать его вращение. Вращательная способность силы оценивается моментом.

<u>Момент силы относительно центра</u> – вектор, численно равный векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы, проведенного из выбранного центра, на вектор силы $\overline{M}_O(\overline{P}) = \overline{r} \times \overline{P}$. Направление вектора момента силы относительно центра определяется по нормали к плоскости расположения радиус-вектора и вектора силы по правилу правого винта (рисунок 50).

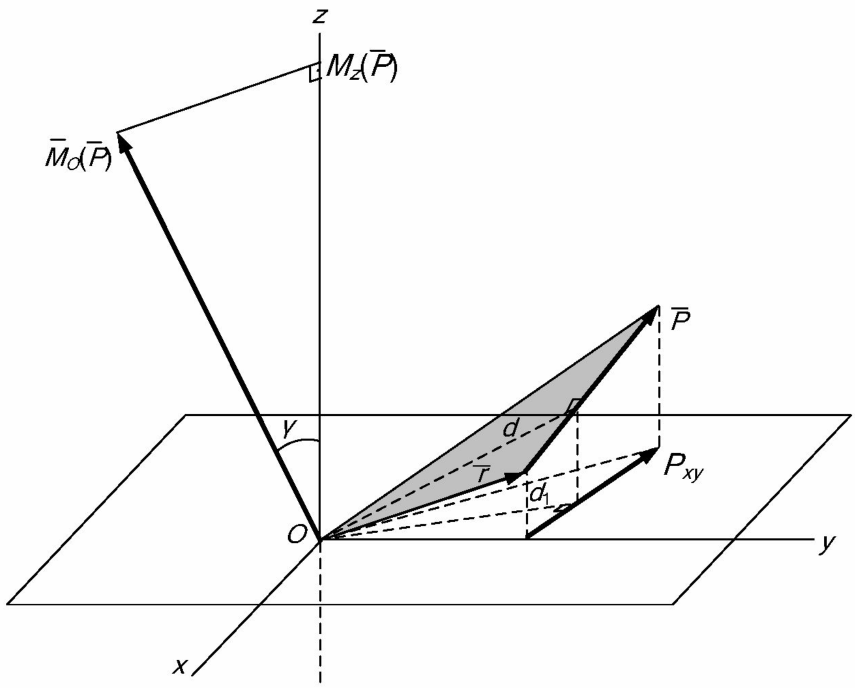


Рисунок 50

Алгебраическое значение момента силы относительно центра – скалярная величина, численно равная произведению (со знаком «+» или «–») модуля силы на плечо

$$M_O(\overline{P}) = \pm P \cdot d\,.$$

Плечом является расстояние от выбранного центра до линии действия силы. Знак «+» соответствует вращению тела вокруг выбранного центра под действием данной силы против часовой стрелки.

Момент силы относительно центра равен нулю, если линия действия силы проходит через выбранный центр.

Проекция вектора момента силы относительно центра на ось, проходящую через этот центр, представляет собой момент данной силы относительно данной оси (см. рисунок 50)

$$M_z(\overline{P}) = \overline{M}_O(\overline{P})\cos\gamma\,.$$

Момент силы относительно оси – скалярная величина, численно равная произведению (со знаком «+» или «–») проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо

$$M_z(\overline{P}) = \pm P_{xy} \cdot d_1 .$$

Плечом является расстояние от точки пересечения оси и плоскости до линии действия этой проекции.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

Теорема Вариньона: Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра (или любой оси) равен сумме моментов составляющих ее сил относительно этого центра (или этой оси)

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k); \quad M_x(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k).$$

Теорема о параллельном переносе силы. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить параллельно ей самой в любую точку, добавив пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно центра приведения (рисунок 51).

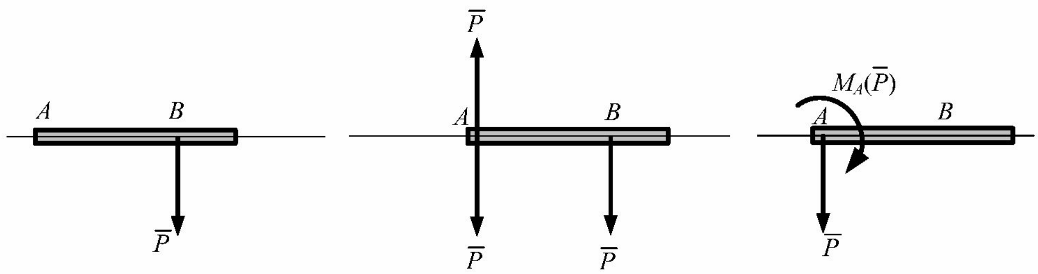


Рисунок 51

Основная теорема статики (теорема Пуансо). Любую систему сил, действующих на абсолютно твердое тело, можно заменить одной силой и одной парой сил. При этом сила будет главным вектором, а момент пары – главным моментом данной системы сил.

На основании теоремы Пуансо (основной теоремы статики) любая система сил сводится к главному вектору $\overline{R}$ и главному моменту $\overline{M}_O$. Приведение к простейшему виду производится для системы сил, не находящихся в равновесии, при этом возможны частные случаи.

Случай 1. $\overline{R}=0$; $\overline{M}_O \neq 0$ – на тело действует пара сил с моментом $\overline{M}_O$. Значение $\overline{M}_O$ не зависит от выбора центра приведения.

Случай 2. $\overline{R}\neq 0$; $\overline{M}_O = 0$ – на тело действует равнодействующая, линия действия которой проходит через центр приведения O.

Случай 3. $\overline{R}\neq 0$; $\overline{M}_O \neq 0$

а) $\overline{R}\perp\overline{M}_O$. Система сил приводится к равнодействующей, приложенной в другой точке.

б) $\overline{R}\parallel\overline{M}_O$ – динамический винт, ось винта проходит через центр приведения O.

в) Векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$ образуют угол α. Система сил приводится к динамическому винту, ось которого проходит через другую точку.

2.15 Аналитические условия равновесия произвольной системы сил

Для пространственной системы сил:

1. $\sum F_{kx}=0$; 4. $\sum M_x(\overline{F}_k)=0$;

2. $\sum F_{ky}=0$; 5. $\sum M_y(\overline{F}_k)=0$;

3. $\sum F_{kz}=0$; 6. $\sum M_z(\overline{F}_k)=0$.

Для плоской системы сил условия равновесия могут быть записаны в одной из трех форм:

1. $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$;

2. $\sum F_{kx} = 0$; $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_B(\overline{F}_k) = 0$;

3. $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_B(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_C(\overline{F}_k) = 0$.

Для системы параллельных сил:

1. $\sum F_{kx} = 0$; $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$.

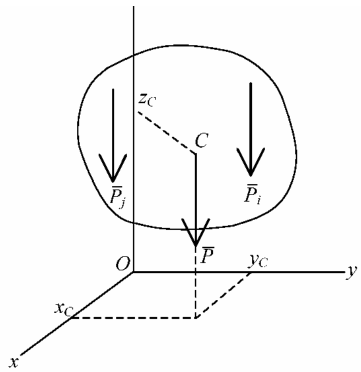
Геометрические условия равновесия произвольной системы сил: в состоянии равновесия главный вектор и главный момент системы сил равны нулю $\overline{R} = 0$; $\overline{M} = 0$.

2.16 Центр тяжести твердого тела и его координаты

Центр тяжести является центром параллельных сил. Направление сил тяжести в поле земного тяготения не зависит от положения тела в выбранной системе координат и от направления координатных осей, а полностью определяется полем тяготения. Величина сил тяжести зависит от расстояния тела до поверхности Земли, на больших высотах наблюдается явление невесомости.

Сила тяжести является равнодействующей системы параллельных сил тяжести точек, образующих абсолютно твердое тело (рисунок 52). Момент силы тяжести абсолютно твердого тела относительно координатных осей может быть определен по теореме Вариньона

$$M_x(\overline{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k);$$



$$M_y(\overline{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k);$$

$$M_z(\overline{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_z(\overline{F}_k).$$

Рисунок 52

Если $\overline{P} \parallel Oz$, то $-P \cdot y_C = -\sum P_k \cdot y_k$; $P \cdot x_C = \sum P_k \cdot x_k$.

Координаты центра тяжести определяются выражениями

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P}; \; y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P}; \; z_C = \frac{\sum P_k z_k}{P}.$$

Для однородного тела его вес пропорционален объему

$P = \rho V$, $P_k = \rho V_k$, где ρ – плотность материала.

Тогда $x_C = \dfrac{\sum \rho V_k x_k}{\rho V}$; $y_C = \dfrac{\sum \rho V_k y_k}{\rho V}$; $z_C = \dfrac{\sum \rho V_k z_k}{\rho V}$

или, сокращая на ρ:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V}; \; y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V}; \; z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}.$$

Для плоской фигуры вес тела пропорционален площади фигуры, поэтому положение центра тяжести определяется выражениями

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S}; \; y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S}; \; z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}.$$

Для линии (например, проволоки или тонкого стержня) вес пропорционален длине, положение центра тяжести определяется выражениями

$$x_C = \frac{\sum L_k x_k}{L};\ y_C = \frac{\sum L_k y_k}{L};\ z_C = \frac{\sum L_k z_k}{L}.$$

Способы определения центра тяжести.

а) Симметрия. Для симметричных тел центр тяжести может лежать в плоскости симметрии, на оси симметрии и в центре симметрии.

Центр тяжести кольца, круглой и прямоугольной пластины, параллелепипеда, шара лежит геометрическом центре этих тел.

б) Разбиение. Если удается разбить тело на насколько правильных частей, то вычисляют координаты центра тяжести каждой части, а потом определяют координаты центра тяжести тела по соответствующим формулам.

в) Дополнение. Применяется как частный случай разбиения к телам, имеющим вырезы. Площади вырезанных частей подставляются в соответствующие формулы со знаком минус.

г) Интегрирование. Если нет возможности разбить тело на геометрически правильные части, то координаты центра тяжести определяют следующим образом:

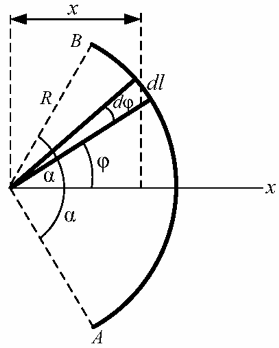
для тела – $x_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} x dv;\ y_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} y dv;\ z_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} z dv;$

для фигуры – $x_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} x ds;\ y_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} y ds;\ z_C = \frac{1}{S}\int\limits_{(S)} z ds;$

для линии – $x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl;\ y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl;\ z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl.$

д) Экспериментальные способы.

Центры тяжести однородных тел.



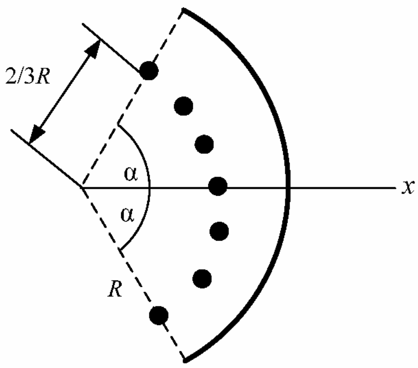
а) Дуга окружности (рисунок 53)

Центр тяжести лежит на оси симметрии и имеет координаты $x_C = \frac{R}{\alpha}\sin\alpha$; $y_C = 0$.

Рисунок 53

б) Треугольник. Разбиением треугольника на тонкие линии, параллельные каждой из его сторон, определяют, что поскольку центр тяжести каждой линии лежит на ее геометрическом центре (в центре симметрии), то центр тяжести треугольника лежит на пересечении его медиан. Точка пересечения медиан делит их в соотношении (2:1).

в) Круговой сектор (рисунок 54). Центр тяжести лежит на оси симметрии. Разбиением кругового сектора на элементарные треугольники определяют дугу, образованную центрами тяжести треугольников. Радиус дуги равен 2/3 радиуса сектора. Таким образом, координата центра тяжести кругового сектора определяется выражением $x_C = \frac{2}{3}\frac{R}{\alpha}\sin\alpha$.



г) Пирамида (конус) (рисунок 55). Центр тяжести лежит на линии, соединяющей вершину с центром тяжести основания на расстоянии ¾ от вершины.

Рисунок 54

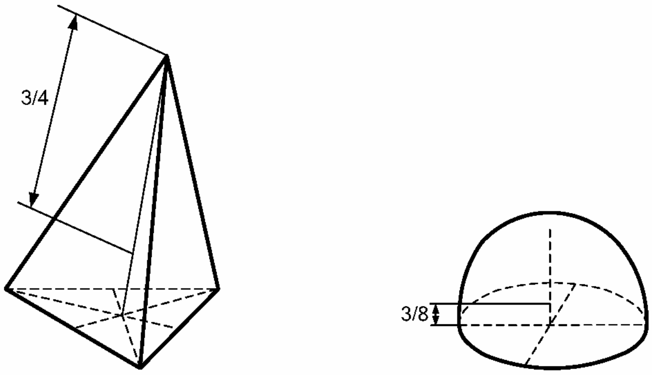


Рисунок 55

д) Полушар. Центр тяжести лежит на оси симметрии на расстоянии 3/8 от основания.

2.17 Трение

При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения возникает сила сопротивления перемещению – сила трения. Возникновение силы трения обусловлено: 1) шероховатостью поверхностей; 2) наличием сцепления у прижатых тел.

В инженерных расчетах исходят из законов трения:

1. При стремлении сдвинуть тело по шероховатой поверхности возникает сила сцепления, достигающая предельного значения ($F_{пр}$), называемого предельной силой трения (силой трения покоя) в момент начала движения. Сила трения покоя $F_{пр}$ направлена против сил, стремящихся произвести движение.

2. Предельная сила трения (сила трения покоя) равна произведению статического коэффициента трения на величину нормальной реакции

$$F_{пр} = f_0 N,$$

где f_0 – статический коэффициент трения – величина безразмерная, зависящая от материала соприкасающихся поверхностей и их состояния.

3. Значение предельной силы трения слабо зависит от размеров поверхностей соприкосновения.

В состоянии равновесия (покоя) значение силы трения может быть любым, но не большим $F_{\text{пр}}$, то есть $F_{тр} \le F_{\text{пр}}$ или $F_{тр} \le f_0 N$. Равновесие, имеющее место при $F_{тр} = F_{\text{пр}}$ – предельное равновесие. Любое малейшее увеличение сдвигающей силы приведет тело в движение (скольжение).

При движении тела по шероховатой поверхности также действует сила трения

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f – динамический коэффициент трения, тоже безразмерная величина $(f < f_0)$.

В условиях сухого (кулонова) трения динамический коэффициент трения в начале движения несколько уменьшается, а затем сохраняет постоянное значение, таким образом, сила трения скольжения в условиях сухого трения может считаться постоянной величиной. При движении в условиях вязкого трения сила трения зависит от скорости движения.

Тело, лежащее на гладкой поверхности может быть приведено в движение любой силой (рисунок 56, а). Нормальная реакции опоры равна силе тяжести.

$\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{пр}$; φ_0 – угол трения.

$$\text{tg}\varphi_0 = \frac{F_{\text{пр}}}{N} = f_0.$$

При приложении сдвигающей силы к телу, лежащему на шероховатой поверхности (рисунок 56, б), возникает сила трения покоя, поэтому реальная реакция опоры $\overline{R}$ равна геометрической сумме

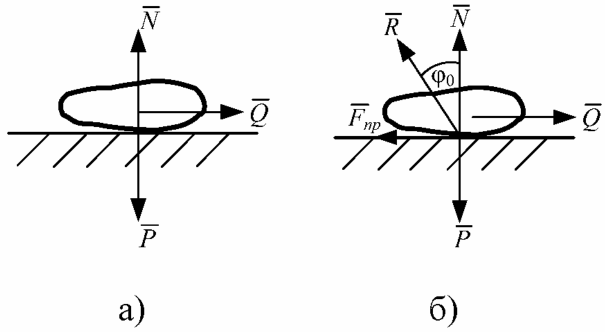


Рисунок 56

нормальной реакции $\overline{N}$ и силы трения $\overline{F}_{\text{пр}}$. Угол, образованный направлениями $\overline{R}$ и $\overline{N}$ – угол трения φ_0. Тангенс угла трения равен статическому коэффициент трения.

Если к телу, лежащему на шероховатой поверхности (рисунок 57), приложить силу под углом α с нормалью, то тело сдвинется только тогда, когда $Q\sin\alpha > F_{\text{пр}}$, т.е. $Q\sin\alpha > f_0 N$; $Q\sin\alpha > f_0 Q\cos\alpha$.

$$\frac{Q\sin\alpha}{Q\cos\alpha} > f_0 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi_0.$$

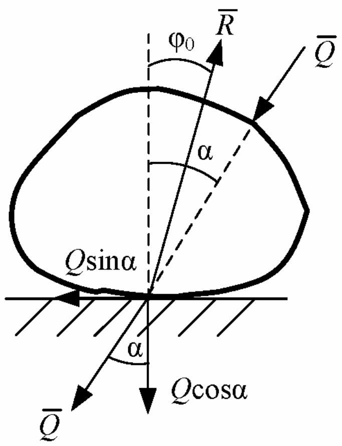
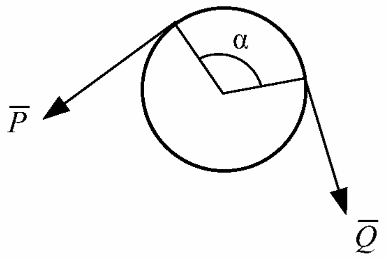


Рисунок 57

Никакая сила, приложенная внутри угла трения, не сможет произвести движения. На этом эффекте основаны явления заклинивания и самоторможения.

Через цилиндрический блок перекинута нить, к одному концу которой приложено усилие P (рисунок 58). Какую силу Q нужно приложить к другому концу нити, чтобы сохранить равновесие при



заданном угле обхвата α?

В случае отсутствия трения $Q = P$.

При наличии трения нити о блок

$Q = Pe^{-f_0 \alpha}$.

Рисунок 58

Величина приложенной силы не зависит от радиуса блока.

В ременных передачах силы натяжения ремней разные, так как передача фрикционная.

При рывках возможен обрыв ремней.

При качении тела по гладкой поверхности (рисунок 59, а) при $Q < F_{\text{пр}}$ возникает момент пары $M(\overline{FQ})$, обеспечивающий качение при любом усилии.

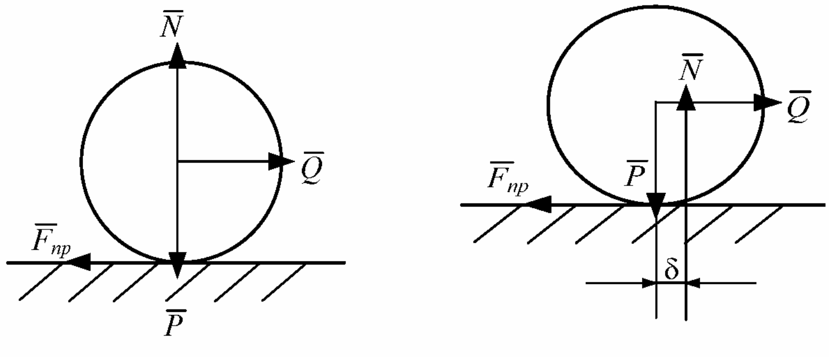


Рисунок 59

При качении тела по шероховатой поверхности (рисунок 59, б) имеется зона деформации и равнодействующая нормальных реакций точек в этой зоне проходит на расстоянии δ от нормали к поверхности. В предельном состоянии уравновешиваются пары $\overline{F}_{\text{пр}}\overline{Q}_{\text{пр}}$ и $\overline{P}\overline{N}$.

$$M(\overline{F}_{\text{пр}}\overline{Q}_{\text{пр}}) = -Q_{\text{пр}}R; \quad M(\overline{P}\overline{N}) = N\delta.$$

$$-Q_{\text{пр}}R + N\delta = 0 \;\rightarrow\; Q_{\text{пр}}R = N\delta;\; Q_{\text{пр}} = \left(\frac{\delta}{R}\right)N.$$

Величина δ – коэффициент трения качения – имеет размерность длины.

Так как $F_{\text{пр}} = f_0 N$, а $Q_{\text{пр}} = \left(\frac{\delta}{R}\right)N$, и учитывая, что $\frac{\delta}{R} << f_0$, везде, где можно, скольжение заменяют качением.

Пример 11. Жесткая рама (рисунок 60) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* закреплена невесомым стержнем. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: *F*=10 кН, *P*=25 кН, *M*=100 кНм, *a*=0,5 м.

Определить: реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на раму силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю *T*=*P*) и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакцию стержня изображаем вдоль оси стержня, полагая, что стержень находится под растягивающей нагрузкой) (рисунок 60, а).

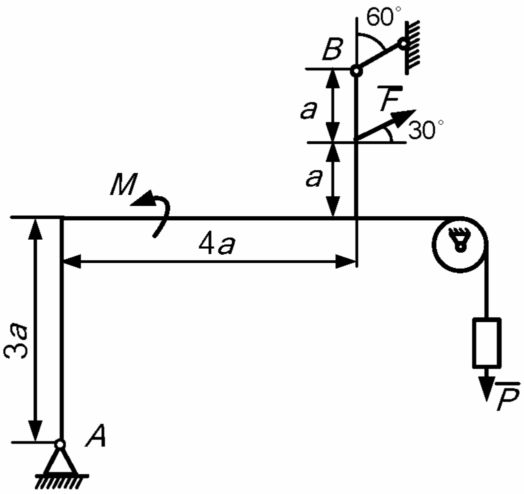


Рисунок 60

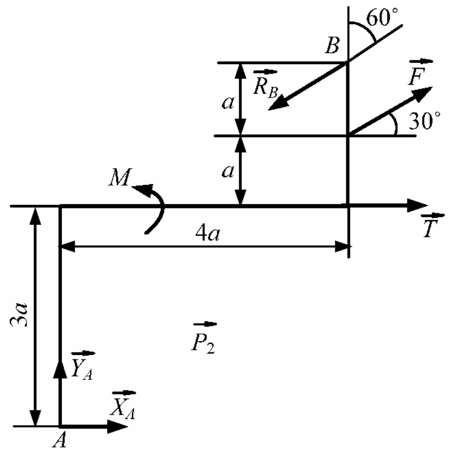


Рисунок 60, а

2. Для получения плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки A разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $F' = F\,cos(30°)$, $F'' = F\,sin(30°)$ и воспользуемся теоремой Вариньона $M_A(\overline{F}) = M_A(\overline{F}') + M_A(\overline{F}'')$.

Получим

$\sum F_{k_x} = 0$, $X_A - R_B \sin(60°) + F\cos(30°) + T = 0$;

$\sum F_{k_y} = 0$, $Y_A - R_B \cos(60^\circ) + F \sin(30^\circ) = 0$;

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \begin{array}{l} M - R_B \cos(60^\circ) \cdot 4a + R_B \sin(60^\circ) \cdot 5a - \\ - F \cos(30^\circ) \cdot 4a + F \sin(30^\circ) \cdot 4a - T \cdot 3a = 0 \end{array}.$$

Решая полученные уравнения, определим

$$R_B = \frac{-M + F \cos(30^\circ) \cdot 4a - F \sin(30^\circ) \cdot 4a + T \cdot 3a}{-\cos(60^\circ) \cdot 4a + \sin(60^\circ) \cdot 5a} = 144{,}855 \text{ кН};$$

$$Y_A = R_B \cos(60^\circ) - F \sin(30^\circ) = 67{,}428 \text{ кН};$$

$$X_A = -R_B \sin(60^\circ) - F \cos(30^\circ) - T = 91{,}784 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 91{,}784$ кН; $Y_A = 67{,}428$ кН; $R_B = 144{,}855$ кН.

Пример 12. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рисунок 61) закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xz, действует сила $\vec{F}$, а в плоскости, параллельной yz, – пара сил с моментом M.

Дано: P_1=5 кН, P_2=3 кН; $F_1 = 4$ кН, $F_3 = 10$ кН; M=4 кНм; $\alpha = 60^\circ$; a=0,6 м.

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие системы плит. На систему действуют заданные силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и пара с моментом M, а также реакции связей.

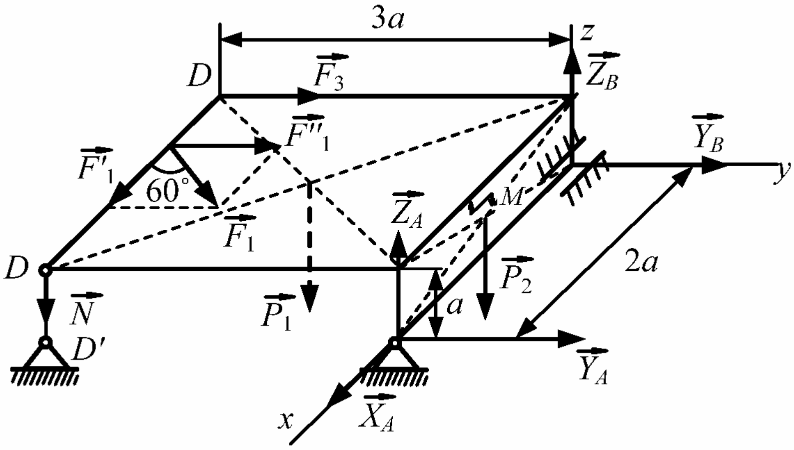


Рисунок 61

Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\overline{Z}_B$, $\overline{Y}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

Силу $\overline{F_1}$ разложим на составляющие $F_1' = F_1\cos(60°)$, $F_1'' = F_1\sin(60°)$ и для определения момента силы $\overline{F_1}$ относительно осей применяем теорему Вариньона.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{k_x} = 0,\ X_A + F_1 cos(60°) = 0; \qquad (2.18)$$

$$\sum F_{k_y} = 0,\ Y_A + Y_B + F_1 sin(60°) + F_3 = 0; \qquad (2.19)$$

$$\sum F_{k_z} = 0,\ Z_A + Z_B - N - P_1 - P_2 = 0; \qquad (2.20)$$

$$\sum M_x(\overline{F_k}) = 0,\ N \cdot 3a + P_1 \cdot \frac{3}{2}a - F_1 sin(60°) \cdot a + F_3 \cdot a = 0; \qquad (2.21)$$

$$\sum M_y(\overline{F}_k)=0,\ -M-Z_A\cdot 2a+N\cdot 2a+F_1\cos(60^\circ)\cdot a+(P_1+P_2)\cdot a=0;\quad(2.22)$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k)=0,\ Y_A\cdot 2a+F_1\sin(60^\circ)\cdot a=0.\qquad(2.23)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции:

из (2.18) $X_A=-F_1\cos(60^\circ)=-3$ кН, из (2.23) $Y_A=\dfrac{-F\sin(60^\circ)\cdot a}{2a}=-2.6$ кН,

из (2.21) $N=\dfrac{-P_1\cdot\frac{3}{2}a+F_1\sin(60^\circ)\cdot a-F_3\cdot a}{3a}=2.56$ кН,

из (2.19) $Y_B=-Y_A-F_1\sin(60^\circ)-F_3=-12.6$ кН,

из (2.22) $Z_A=\dfrac{N\cdot 2a+F_1\cos(60^\circ)\cdot a+(P_1+P_2)\cdot a-M}{2a}=4.73$ кН,

из (2.20) $Z_B=N+P_1+P_2-Z_A=5.83$ кН.

Ответ: X_A= –3 кН; Y_A= –2,6 кН; Z_A=4,73 кН; Y_B= –12,6 кН; Z_B=5,83 кН; N=2,56 кН. Знак минус указывает, что реакции $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Y}_B$ направлены противоположно показанным на рисунке 61.

2.18 Принцип Даламбера для материальной точки

Если в любой момент времени к фактически действующим на точку силам добавить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной

$$\overline{F}^a+\overline{N}+\overline{\Phi}=0,$$

где $\overline{F}^a$ – равнодействующая заданных (активных) сил; $\overline{N}$ – равнодействующая реакций связи; $\overline{\Phi}$ – равнодействующая сил инерции.

Инерция – это свойство тела сохранять движение без участия сил. При попытке изменить состояние тела под действием силы тело отвечает противодействием (III закон динамики), которое есть сила инерции. То есть сила инерции равна силе, приложенной к телу, действующая в противоположном направлении

$\overline{F}^{\text{и}} = -\overline{F}$ или $\overline{\Phi} = -\overline{F}$.

Поскольку по II закону динамики $\overline{F} = m\overline{a}$, то $\overline{F}^{\text{и}} = -m\overline{a}$.

Если точка совершает несвободное движение, то на нее действуют реакции связей

$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{N}$.

Если при движении точки возникают касательные и нормальные ускорения, то сила инерции будет складываться из двух компонентов – касательной $\overline{F}_{\tau}^{\text{и}} = -m\overline{a}_{\tau}$ и нормальной $\overline{F}_{n}^{\text{и}} = -m\overline{a}_{n}$ сил инерции, – направленных противоположно соответствующим ускорениям.

Модули сил инерции $F_{\tau}^{\text{и}} = m\dfrac{dv}{dt}$; $F_{\tau}^{\text{и}} = m\dfrac{v^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории движения свободной точки.

Если к каждой точке механической системы к фактически действующим на каждую точку активным силам и реакциям связей добавить силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной

$$\begin{cases} \overline{R} = 0; \\ \overline{M} = 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{R}_k + \sum \overline{\Phi}_k = 0; \\ \sum \overline{M}_O\left(\overline{F}_k^a\right) + \sum \overline{M}_O\left(\overline{R}_k\right) + \sum \overline{M}_O\left(\overline{\Phi}_k\right) = 0. \end{cases}$$

К такой системе сил можно применять методы решения задач статики, поэтому, метод решения, основанный на принципе Даламбера, называется методом кинетостатики.

Силы инерции абсолютно твердого тела приводятся к главному вектору и главному моменту по теореме Пуансо (основной теореме статики). В качестве центра приведения обычно выбирают центр масс тела.

Главный вектор сил инерции определяют в этом случае следующим образом

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}_C,$$

где m – масса тела; $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс тела.

Алгебраическое значение главного момента сил инерции

$$M^{\text{и}} = -\varepsilon J_z,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения; ε – угловое ускорение.

12.19 Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Принцип Даламбера применяют при нахождении динамических реакций – реакций в опорах, возникающих дополнительно к статическим, при движении системы с ускорением. Возникновение динамических реакций обусловлено силами инерции.

Если тело вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = const$ вокруг оси z, закрепленной в подшипниках, то динамическая составляющая реакций опор будет определяться только силами инерции.

Для определения динамических составляющих реакций присоединим к реакциям связей силы инерции и составим уравнения равновесия в проекциях на оси координат:

$$1)\ \sum R_{kx}^{D} + R_{x}^{\text{и}} = 0; \qquad 4)\ \sum M_x\left(\overline{R}_k^{D}\right) + M_x^{\text{и}} = 0;$$

$$2)\ \sum R_{ky}^{D} + R_{y}^{\text{и}} = 0; \qquad 5)\ \sum M_y\left(\overline{R}_k^{D}\right) + M_y^{\text{и}} = 0;$$

$$3)\ \sum R_{kz}^{D} + R_{z}^{\text{и}} = 0; \qquad 6)\ \sum M_z\left(\overline{R}_k^{D}\right) + M_z^{\text{и}} = 0,$$

где $\overline{R}_k^{D}$ – главный вектор динамических составляющих реакций опор; $\overline{R}_{kx}^{D}$, $\overline{R}_{ky}^{D}$, $\overline{R}_{kz}^{D}$ – проекции главного вектора на оси координат; $\sum M_x\left(\overline{R}_k^{D}\right)$, $\sum M_y\left(\overline{R}_k^{D}\right)$, $\sum M_z\left(\overline{R}_k^{D}\right)$ – моменты главного вектора динамических составляющих реакций опор относительно координатных осей.

Главный вектор сил инерции $\overline{R}^{\text{и}} = -M\overline{a}_C$, где M – масса тела, $\overline{a}_C$ – ускорение центра масс. При $\omega = const$ все точки тела, в том числе и центр масс, обладают только центростремительными ускорениями, перпендикулярными оси вращения z. Ускорение центра масс $\overline{a}_C = \overline{a}_C^{\text{ц}}$, модуль ускорения центра масс $a_C^{\text{ц}} = \omega^2 h_C$, где h_C – расстояние от оси вращения до центра масс.

Проекции $\overline{R}^{\text{и}}$ на оси координат: $R_x^{\text{и}} = M\omega^2 x_C$; $R_y^{\text{и}} = M\omega^2 y_C$; $R_z^{\text{и}} = 0$.

Моменты главного вектора сил инерции относительно координатных осей определяются выражениями

$$M_x^{\text{и}} = I_{yz}\omega^2;\ M_y^{\text{и}} = I_{xz}\omega^2;\ M_z^{\text{и}} = 0,$$

где I_{xz}, I_{yz} – центробежные моменты инерции, $I_{yz} = \sum m_k y_k z_k$, $I_{xz} = \sum m_k x_k z_k$.

Таким образом, динамические составляющие реакций опор определяются из системы уравнений

$$1)\ \sum R_{kx}^{D} = -Mx_C\omega^2; \quad 4)\ \sum M_x\left(\overline{R}_k^D\right) = -I_{yz}\omega^2;$$

$$2)\ \sum R_{ky}^{D} = -My_C\omega^2; \quad 5)\ \sum M_y\left(\overline{R}_k^D\right) = -I_{xz}\omega^2.$$

Полученные уравнения определяют динамические реакции опор равномерно вращающегося твердого тела, если осью вращения является ось z. Аналогичным образом можно определить динамические реакции, если осями вращения являются оси x или y.

Статические реакции определяются из уравнений статики, учитывающих активные силы и реакции связей.

Полные реакции опор будут равны сумме динамических и статических реакций.

2.20 Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Для составления дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, необходимо найти выражение главного момента количеств движения $\overline{K}_O$ (кинетического момента) и кинетической энергии T тела в этом случае движения.

Кинетический момент тела, движущегося вокруг неподвижной точки, можно определить по проекциям на координатные оси. Если в качестве осей выбрать главные оси инерции для неподвижной точки O, жестко связанные с вращающимся телом, то проекции вектора $\overline{K}_O$ будут определяться выражениями

$$K_x = I_x\omega_x;\ K_y = I_y\omega_y;\ K_z = I_z\omega_z,$$

где I_x, I_y, I_z – осевые моменты инерции, а кинетическая энергия тела будет определяться как в случае вращательного движения тела вокруг мгновенной оси вращения

$$\mathrm{T} = \frac{I_l \omega^2}{2},$$

где I_l – осевой момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

Если в качестве осей выбраны главные оси инерции для неподвижной точки O, то кинетическую энергию тела можно определить по формуле

$$\mathrm{T} = \frac{I_x \omega_x^2}{2} + \frac{I_y \omega_y^2}{2} + \frac{I_z \omega_z^2}{2}.$$

Для осей, жестко связанных с телом, значения I_x, I_y, I_z постоянны, поэтому дифференциальные уравнения движения тела будут представлены динамическими уравнениями Эйлера в проекциях на главные оси инерции для неподвижной точки O

$$\left.\begin{aligned}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_z - I_y\right)\omega_y \omega_z &= M_x, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \left(I_x - I_z\right)\omega_z \omega_x &= M_y, \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_y - I_x\right)\omega_x \omega_y &= M_z.
\end{aligned}\right\}$$

При составлении дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа используется выражение для кинетической энергии.

2.21 Элементарная теория гироскопа

В механике тела, осуществляющие сферическое движение, называют гироскопами. В гироскопических приборах ротор гироскопа закрепляется в кардановом подвесе, позволяющем ротору совершать любой поворот вокруг неподвижного центра подвеса, совпадающего с центром тяжести ротора. Ротор имеет ось симметрии и может вращаться вокруг нее с угловой скоростью Ω, т.е. совершать собственное вращение. Ось собственного вращения также может поворачиваться вокруг точки подвеса вместе с телом с угловой скоростью ω, т.е. совершать прецессию. У гироскопов, применяемых в технике, Ω больше ω в десятки и сотни тысяч раз, что позволяет использовать при расчетах элементарную теорию гироскопа.

В каждый момент времени абсолютная угловая скорость гироскопа $\overline{\omega}_a = \overline{\Omega} + \overline{\omega}$, и его движение складывается из серии элементарных поворотов вокруг мгновенной оси вращения с угловой скоростью $\overline{\omega}_a$. Так как $\Omega >> \omega$, можно принять, что $\overline{\omega}_a = \overline{\Omega}$, и считать, что мгновенная ось вращения в любой момент времени совпадает с осью собственного вращения гироскопа. Тогда кинетический момент гироскопа $\overline{K}_O$ относительно неподвижной точки O можно считать в любой момент времени направленным вдоль оси собственного вращения и численно равным

$$\overline{K}_O = I_z \overline{\Omega},$$

где I_z – момент инерции гироскопа относительно его оси собственного вращения, а саму ось и вектор $\overline{K}_O$ считать всегда направленными вдоль одной прямой.

Если на гироскоп не действуют внешние силы, то $\overline{K}_O = const$ и ось свободного (трехстепенного) гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной системе отсчета. Это важное свойство гироскопа используют при конструировании гироскопических приборов.

Если на ось гироскопа начинает действовать пара сил с моментом $\overline{M}_O$, то по теореме моментов

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O.$$

Численно кинетический момент можно считать постоянным, но тогда в результате действия пары сил будет меняться направление вектора кинетического момента. В результате вектор кинетического момента и совпадающая с ним ось собственного вращения начнут отклоняться в направлении вектора момента внешних сил, оставаясь проходящими через неподвижную точку.

По окончании действия пары сил $\overline{M}_O = 0$ и движение оси прекратится. Если пара сил действует кратковременно, то ось гироскопа практически не меняет своего направления. В этом проявляется свойство <u>устойчивости оси</u> быстровращающегося гироскопа.

Если пара сил действует на гироскоп длительное время, то ось собственного вращения гироскопа все время действия пары будет прецессировать с угловой скоростью ω. Если угол нутации при этом не меняется, то прецессия будет регулярной.

Угловая скорость прецессии определяется из выражения

$$\overline{\omega} \times \overline{K}_O = \overline{M}_O.$$

Это уравнение является исходным приближенным уравнением элементарной теории гироскопа.

Гироскоп с двумя степенями свободы не обладает способностью противодействовать изменению направления его оси вращения. При кратковременном действии пары сил на ось гироскопа она начинает вращаться вместе с ротором.

Опоры двухтепенного гироскопа препятствуют прецессии. Если же такому гироскопу сообщить вынужденную прецессию, то на подшипники, в которых закреплена ось гироскопа, начнет действовать гироскопическая пара сил с моментом $\overline{M}_{\text{гир}} = \overline{K}_O \times \overline{\varpi}$, стремящаяся кратчайшим путем установить ось ротора параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов $\overline{\Omega}$ и $\overline{\varpi}$ совпали (правило Н.Е. Жуковского). При этом угол нутации и гироскопический момент начнут убывать, и, как только угол нутации станет равен нулю, вращение оси прекратится.

2.22 Связи и их уравнения

Связями называются условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы. Эти условия могут записываться математически в виде уравнений или неравенств. Эти уравнения или неравенства могут содержать координаты, скорости (производные от координат), время. Они могут быть продифференцированы или проинтегрированы, хотя интегрирование иногда невозможно.

Для одной точки уравнение связи может быть представлено в виде

$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ldots, t) = 0$.

Для механической системы, состоящей из n точек, может быть составлено l уравнений связи

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, ..., t) = 0, \quad s = 1,2,...,l; \; k = 1,...,n \text{ или меньше.}$$

Классификация связей:

Геометрические и кинематические связи. Если в уравнения связей входят только координаты, такие связи называют геометрическими. Если кроме координат входят их первые производные по времени (проекции скоростей), то это кинематические связи.

Все геометрические связи можно продифференцировать, получив кинематические связи, но не все кинематические связи можно проинтегрировать.

Голономные и неголономные связи. Кинематические связи, которые можно интегрировать, и все геометрические связи – голономные связи. Неинтегрируемые кинематические связи – неголономные.

Стационарные и нестационарные связи. Связи, в которые время явно не входит – стационарные. Если время входит в уравнения связи – это нестационарные связи.

Неосвобождающие и освобождающие. Если связь выражается уравнением – это неосвобождающая или двухсторонняя связь. Если неравенством – освобождающая или односторонняя.

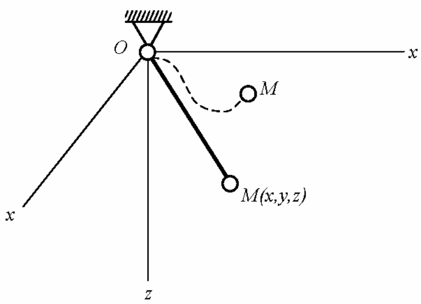


Рисунок 62

Если точка M (рисунок 62) удерживается стержнем OM длиной l, то она не может приблизиться к точке O на расстояние, меньшее l. Уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$.

Эта связь выражается уравнением – следовательно, это неосвобождающая связь. В уравнение связи время явно не входит – следовательно, это стационарная связь. Уравнение связи содержит координаты и не содержит производных от координат – следовательно, это геометрическая связь. Геометрические связи все голономные.

Если точка удерживается нитью, то она может при движении приближаться к точке подвеса, но не может удаляться от нее на расстояние, большее l. Уравнение связи $x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$.

Эта связь выражается неравенством – следовательно, это освобождающая или односторонняя связь. В остальном все признаки связи совпадают с приведенной выше – стационарная геометрическая голономная связь.

2.23 Принцип возможных перемещений

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении была бы равна нулю

$$\sum \delta A_k^a = 0.$$

Для материальной точки возможное перемещение – это бесконечно малое воображаемое перемещение, допускаемое наложенными на точку связями. Возможное перемещение точки δq определяют как величину первого порядка малости и изображают вектором (рисунок 63).

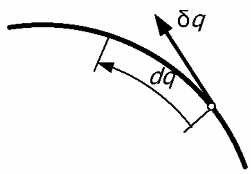


Рисунок 63

Для системы возможное перемещение – это совокупность возможных перемещений всех точек системы. Некоторые независимые перемещения в силу наложенных связей не являются независимыми. Число независимых возможных перемещений системы есть число степеней свободы.

Свободная точка имеет три степени свободы. Свободное тело имеет шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Связи, налагаемые на тело, сокращают число степеней свободы.

Все связи в механической системе могут быть разделены на идеальные и реальные.

К идеальным связям относятся: все связи в абсолютно твердом теле; гибкие нерастяжимые нити; закрепленные точки; абсолютно гладкая поверхность (линия); шероховатая поверхность, по которой тела катятся без скольжения.

Для идеальных связей выполняется условие: сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum \delta A_k^r = 0 .$$

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы, не требующее разбиения системы и рассмотрения равновесия отдельных частей, что позволяет исключить неизвестные реакции связей.

Общее уравнение динамики: при движении системы с любыми связями сумма элементарных работ всех приложенных активных сил, всех реакций связи и всех сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^{и} = 0 .$$

Принцип Даламбера–Лагранжа: при движении системы с идеальными связями $\sum \delta A_k^r = 0$, тогда сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\text{и} = 0.$$

2.24 Обобщенные координаты

Если механическая система состоит из n точек, то ее положение в любой момент времени можно определить при помощи $3n$ координат.

Если можно составить k уравнений связи:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n).$$

то положение системы в любой момент времени можно определить меньшим числом координат, количество которых равно <u>числу степеней свободы</u> s

$$s = 3n - k,$$

где n – число точек в системе, k – число уравнений связей.

Независимые переменные, которыми определяется положение системы, называются <u>обобщенными координатами</u> и обозначаются $q_1, q_2, \ldots, q_s$ [м], [рад].

<u>Число обобщенных координат</u> равно <u>числу степеней свободы</u>.

Поскольку обобщенные координаты системы меняются во времени, т.е. $q_i = q_i(t)$, то можно вычислить <u>обобщенные скорости</u>

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \text{ [м/с], [рад/с].}$$

Через обобщенные координаты можно выразить работу сил

$$\sum \delta A_i = \sum Q_i \delta q_i \ \text{[Н·м]}.$$

Величина Q_i имеет смысл силы и называется обобщенной силой.

2.25 Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода – это уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Уравнений составляется столько, сколько обобщенных координат определено для описания движения системы: для системы с одной степенью свободы составляется одно уравнение, для системы с двумя степенями свободы – два и т.д.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = Q_i .$$

где $i = 1,2,3,...,s$; $\mathrm{T} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, s – число степеней свободы.

Для консервативной системы, в которой действуют только потенциальные силы, обобщенные силы можно найти как производные от потенциальной энергии системы по обобщенным координатам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1};\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2};...;\ Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}.$$

Уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

или $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$

где $L = \mathrm{T} - \Pi$ – функция Лагранжа.

2.26 Принцип Гамильтона – Остроградского

Принцип Гамильтона – Остроградского включает в себя все аксиомы механики связанных систем, поэтому его рассматривают как единственную аксиому, описывающую движение голономных механических систем с идеальными связями и потенциальными силами. Принцип является вариационным интегральным, дающим критерий отличия истинного движения от других кинематически возможных при одинаковых исходных условиях для конечного интервала времени.

Из положения A в положение B механическая система под действием приложенных сил и при наложенных связях может перейти по некоторой траектории за некоторый промежуток времени. Эта траектория представляет собой *прямой путь* (но не обязательно прямолинейный). Все остальные траектории, близкие к истинной, – окольные пути системы. При движении по любому окольному пути (но по близкому к действительному закону движения) обобщенные координаты системы будут отличаться от истинных вследствие отличия функции окольного закона движения от истинного, т.е. появляются вариации обобщенных координат δq. Только в граничных точках, соответствующих началу и окончанию движения вариации отсутствуют

$$\delta t_0 = 0;\ \delta t_1 = 0;\ \delta q_{t=t_0} = 0;\ \delta q_{t=t_1} = 0.$$

Основные свойства движения в потенциальном силовом поле обусловлены функционалом

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = \int_{A}^{B} L(t, q, \dot{q}) dt,$$

называемом *действием по Гамильтону*.

Здесь L – функция Лагранжа, A, B – точки пространства, соответствующие началу и концу движения.

Функции Лагранжа, соответствующие отличающимся от истинного движениям вследствие вариации обобщенных координат тоже будут варьировать. Вследствие этого действие по Гамильтону для окольных путей также получит вариацию δS.

Принцип Гамильтона – Остроградского: действительное движение системы между ее двумя заданными положениями отличается от кинематически возможных движений, совершаемых за тот же промежуток времени, тем, что для действительного движения вариация действия по Гамильтону равна нулю.

Т.е. только для истинного движения $\delta S = 0$.

Принцип наименьшего действия: при движении по истинной траектории действие по Гамильтону $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ имеет наименьшее значение по сравнению с другими кинематически возможными.

Особенностью принципа Гамильтона–Остроградского является то, что он не связан с выбором координат. Это отличает его от уравнения Лагранжа, где координаты системы должны быть фиксированы.

Если применить принцип к твердому телу и воспользоваться законом равенства действия и противодействия, то внутренние силы будут относиться к классу реакций связей и выпадать из уравнений движения.

Кроме того, принцип Гамильтона–Остроградского допускает обобщение на случай сил, не принадлежащих потенциальному силовому полю.

2.27 Понятие об устойчивости равновесия

Отсчет обобщенных координат производится от положения равновесия системы. В положении равновесия системы значения обобщенных координат и обобщенных скоростей равны нулю ($q_1 = q_2 = ... = q_s = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = ... = \dot{q}_s = 0$).

Положение равновесия системы называется устойчивым, если при малых начальных отклонениях и начальных скоростях все точки системы в последующее время будут двигаться вблизи их положения равновесия. Если обобщенные координаты при последующем движении будут оставаться меньше наперед заданной величины $q_1 < \varepsilon_1$, $q_2 < \varepsilon_2, \ldots$, $q_s < \varepsilon_s$, то положение равновесия системы будет устойчивым.

Если после придания начальных возмущений обобщенные координаты будут увеличиваться, то система имеет неустойчивое равновесие.

Строгое определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце прошлого века в работах русского ученого А.М.Ляпунова.

Уравнения равновесия системы в обобщенных координатах выражаются равенствами:

$Q_1 = 0;\ Q_2 = 0; \ldots;\ Q_s = 0$.

Если силы потенциальные, то уравнения равновесия имеют вид

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0;\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0;...;\ Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

Следовательно, в положении равновесия системы под действием потенциальных сил приращение потенциальной энергии равно нулю ($\delta\Pi = 0$).

Это значит, что потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет экстремальное значение (минимум – min, максимум – max или точка перегиба).

Для консервативной системы общий критерий устойчивости равновесия дает теорема Лагранжа–Дирихле: если потенциальная система консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым. Условие минимума: $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0$.

Необходимые и достаточные условия равновесия системы дает принцип возможных перемещений $\delta A = \sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0$.

В обобщенных координатах $\delta A = \sum\limits_1^s Q_j \delta q_j = 0; \quad j = 1, 2, ..., s$, а так как обобщенные координаты независимы друг от друга ($\delta q_j \neq 0$), то равенство справедливо, если обобщенные силы равны нулю

$$Q_1 = Q_2 = ... = Q_s = 0.$$

Это и есть уравнение равновесия.

2.28 Малые свободные колебания механической системы с двумя (или *n*) степенями свободы и их свойства, собственные частоты, коэффициенты формы

Малые колебания системы около равновесного положения представляют собой такое движение системы, при котором значения обобщенных координат q_i, определяющих положение системы и отсчитываемых от положения устойчивого равновесия, и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ в любой момент времени настолько малы, что их можно рассматривать как величины первого порядка малости.

Для голономной механической системы со стационарными связями, имеющей s степеней свободы кинетическая энергия системы Т может быть представлена однородной квадратичной функцией обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$ с коэффициентами, являющимися функциями обобщенных координат:

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + ... + a_{ss}\dot{q}_s^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{s-1,s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s\right]$$

или в общем виде $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$.

Постоянные a_{ij} называют *коэффициентами инерции*.

Потенциальная энергия U системы с s степенями свободы является функцией обобщенных координат этой системы:

$$U = U(q_1, q_2, ..., q_s).$$

Для консервативной системы, т.е. системы материальных точек с голономными и стационарными связями, имеющей s степеней свободы и находящейся под действием сил, имеющих потенциал, получим приближенное выражение для потенциальной энергии системы

$$U(q_1, q_2, ..., q_s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j .$$

Потенциальная энергия системы является однородной квадратичной функцией обобщенных координат. Постоянные c_{ij} называют *коэффициентами жесткости*.

Дифференциальные уравнения движения системы с s степенями свободы можно получить из уравнений Лагранжа второго рода в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., s).$$

Функция Лагранжа системы, совершающей свободные малые колебания

$$L = \mathrm{T} - U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_i - c_{ij}q_i q_j\right).$$

Полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(a_{ij}\dot{q}_i d\dot{q}_j + a_{ij}\dot{q}_j d\dot{q}_i - c_{ij}q_i dq_j - c_{ij}q_j dq_i\right)$$

или после преобразований:

$$dL = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\left(a_{ij}\dot{q}_j d\dot{q}_i - c_{ij}q_j dq_i\right).$$

Производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_j\,; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j\,; \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_j\,.$$

Уравнения Лагранжа приводят к системе s линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

По общим правилам решения таких уравнений частные решения ищутся в форме

$$q_j(t) = A_j e^{i\omega t} \quad \text{или} \quad q_j(t) = A\sin(\omega t + \alpha).$$

Подставляя частные решения в исходную систему уравнений, получим систему однородных линейных относительно неизвестных постоянных A_j алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{s}\left(-\omega^2 a_{ij} + c_{ij}\right)A_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Система однородных линейных алгебраических уравнений может иметь отличные от нуля решения, если определитель этой системы равен нулю: $\left|c_{ij} - a_{ij}\omega^2\right| = 0$.

Полученное уравнение – *характеристическое уравнение* (или уравнение частот) – является уравнением s-й степени относительно ω^2. Оно имеет в общем случае s различных вещественных положительных корней ω_j^2 $(j=1,2,...,s)$. Определенные таким образом величины ω_i называются *собственными частотами* системы.

Подставляя последовательно все найденные значения ω_j^2 в уравнения исходной системы, можно найти соответствующие значения коэффициентов A_j.

Частоты ω_j называют *главными частотами* системы, а колебания системы с частотами ω_j называют *главными колебаниями* системы. Коэффициенты A_j определяют соответственно амплитуды главных колебаний. Отношения $\mu_j^{(r)} = \dfrac{A_j}{A_1}$ – *коэффициенты формы*.

Таким образом, изменение каждой обобщенной координаты системы представляет собой наложение s простых периодических колебаний с произвольными амплитудами и фазами и вполне определенными частотами

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{s} q_j^{(r)}(t) \qquad (j=1,2,...,s).$$

Значения амплитуд и фаз колебаний определяют из начальных условий.

2.29 Явление удара

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, под действием которых происходит удар, называют ударными силами, а промежуток времени, в течение которого они действуют – временем удара.

Ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, поэтому в качестве меры взаимодействия тел при ударе рассматривают не сами ударные силы, а ударные импульсы

$$\overline{S}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \overline{F}_{\text{уд}} dt .$$

Ударный импульс является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время удара будут величинами малыми и ими практически можно пренебречь.

Основное уравнение теории удара представляет собой теорему об изменении количества движения при ударе – изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов

$$m(\overline{u} - \overline{v}) = \sum \overline{S}_k ,$$

где $\overline{v}$ – скорость точки в начале удара, $\overline{u}$ – скорость точки в конце удара.

Это уравнение играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики при изучении движения тел под действием неударных сил.

Изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e .$$

Величина, равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется коэффициентом восстановления при ударе

$$k = \frac{u}{v} .$$

При абсолютно упругом ударе $(k=1)$ кинетическая энергия тела после удара полностью восстанавливается $(u=v)$, при абсолютно неупругом ударе $(k=0)$ удар заканчивается в первой стадии $(u=0)$, и вся кинетическая энергия тела теряется на его деформацию и нагревание.

Теорема Карно: кинетическая энергия, потерянная системой при абсолютно неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями

$$\mathrm{T}_0 - \mathrm{T}_1 = \frac{m_1 (v_1 - u)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - u)^2}{2},$$

где $(v_1 - u)$ и $(v_2 - u)$ – потерянные при ударе скорости каждого из соударяющихся тел.

2.30 Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе

Изменение за время удара кинетического момента системы относительно какого-либо центра равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, действующих на систему, относительно того же центра

$$\overline{K}_1 - \overline{K}_0 = \sum \overline{M}_O \left(\overline{S}_k^e \right).$$

Сумма моментов внутренних ударных импульсов равна нулю.

Пример 13. Вертикальный вал длиной $4a$ ($AB=BD=DE=EK=a$), закрепленный подпятником A и подшипником D (рисунок 64), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке D ломаный однородный стержень массой m и длиной $10b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке K прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $m_1 + m_2 = 10$ кг, $m_3 = 3$ кг, $\omega = 10$ с$^{-1}$, $DL = 7b$, $LT = 3b$, $KS = 4b$, $b = 0{,}1$ м.

Определить: реакции подпятника A и подшипника D, пренебрегая весом вала (X_A, Y_A, X_B).

Решение. 1. Изображаем вал и прикрепленные к нему в точках K и D стержни (рисунок 64). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0{,}7m$; $m_2 = 0{,}3m$;

$$m_1 = 7\,\text{кг},\ m_2 = 3\,\text{кг},\ P_1 = m_1 g,\ P_2 = m_2 g,\ P_3 = m_3 g.$$

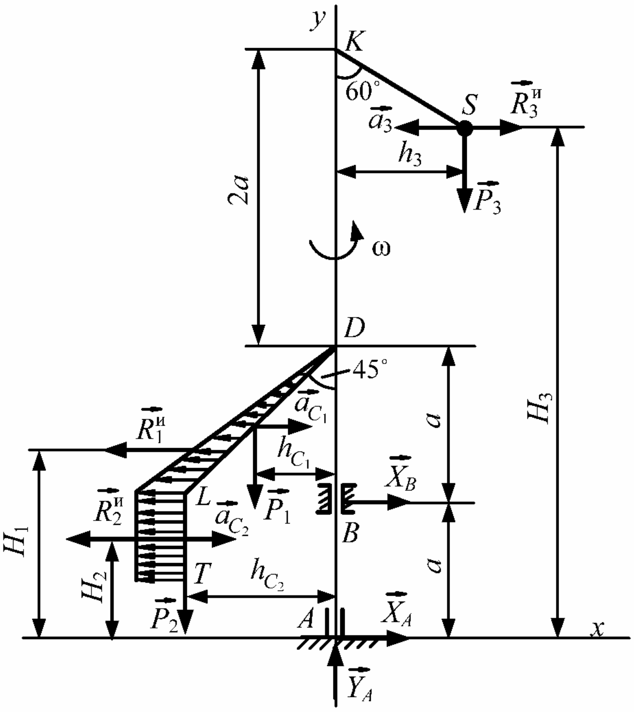


Рисунок 64

2. Для определения искомых реакций применим принцип Даламбера для механической системы. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и

изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{X}_B$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой

$$R_1^{И} = m_1 a_{C1},\ R_2^{И} = m_2 a_{C2},\ R_3^{И} = m_1 a_{C3},$$

где $a_{C1} = \omega^2 h_{C1} = \omega^2 \dfrac{7b}{2} \sin 45^\circ = 10^2 \dfrac{7 \cdot 0{,}1}{2} \sin 45^\circ = 0{,}27$ м/с^2,

$$a_{C2} = \omega^2 h_{C2} = \omega^2 7b \sin 45^\circ = 10^2 \cdot 7 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 45^\circ = 0{,}5 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{C3} = \omega^2 h_{C3} = \omega^2 4b \sin 60^\circ = 10^2 4 \cdot 0{,}1 \cdot \sin 60^\circ = 0{,}35 \text{ м/с}^2.$$

В свою очередь

$$H_1 = 2a - \frac{2}{3} 7b \cos 45^\circ = 0{,}87 \text{ м},$$

$$H_2 = 2a - 7b \cos 45^\circ - 1{,}5b = 0{,}55 \text{ м},$$

$$H_3 = 4a - 4b \cos 60^\circ = 0{,}22 \text{ м}.$$

С учетом найденных величин, получим $R_1^{И} = m_1 a_{C1} = 192{,}2$ Н, $R_2^{И} = m_2 a_{C2} = 148{,}5$ Н, $R_3^{И} = m_3 a_{C3} = 103{,}9$ Н.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную

систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B - R_1^{И} - R_2^{И} + R_3^{И} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = -x_B a + P_1 h_{C1} - P_3 h_3 + R_1^{И} H_1 + R_2^{И} H_2 + R_3^{И} H_3 = 0.$$

Из этих уравнений находим неизвестные реакции

$$Y_A = P_1 + P_2 + P_3 = g(m_1 + m_2 + m_3) = 127{,}5\,\text{Н};$$

$$X_B = \frac{P_1 h_{C1} + P_2 h_{C2} - P_3 h_{C3} + R_1^{И} H_1 + R_2^{И} H_2 - R_3^{И} H_3}{a} = 110{,}8\,\mathbf{Н};$$

$$X_A = -x_B + R_1^{И} + R_2^{И} + R_3^{И} = 126{,}0\,\text{Н}.$$

Ответ: X_A = 126,0 Н; Y_A = 127,5 Н; X_B = 110,8 Н.

Пример 14. Механизм (рисунок 65), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1*, *2*, *3* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, к кривошипам *1* и *4* приложены пары сил с моментами M_1 и M_2.

Дано: $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, c=18000 Н/м, $M_1 = 120$ Н·м, $M_2 = 460$ Н·м.

Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum \delta A_k^a = 0 .$$

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пары сил с моментами M_1 и M_2. Принимая, что $F=c\lambda$, определим λ.

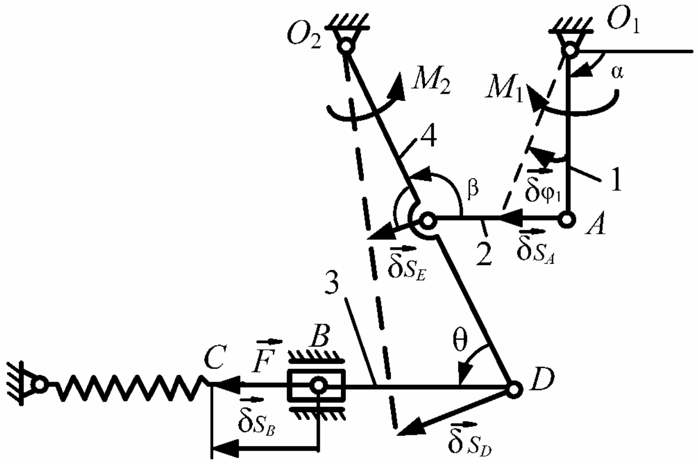


Рисунок 65

2. Сообщим механизму возможное перемещение и определим сумму работ всех активных сил. Введем следующие обозначения для возможных перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ – поворот стержня *1* вокруг оси O_1, $\delta\varphi_4$ – поворот стержня *4* вокруг оси O_2, возможные перемещения точек D, A, B и E обозначим δs_D, δs_A, δs_B и δs_E соответственно. Поскольку механизм обладает одной степенью свободы, из всех перемещений $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_4$, δs_D, δs_E, δs_A и δs_B только одно независимо от других. Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и выразим все остальные возможные перемещения через $\delta\varphi_1$. При расчетах учтем, что

связи в системе голономные, следовательно, зависимости между возможными перемещениями (геометрические связи) здесь такие же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении (кинематические связи). Для определения и изображения возможных перемещений воспользуемся известными из кинематики соотношениями. Направление возможного перемещения δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$ и численно равно

$$\delta s_A = l_1 \delta\varphi_1.$$

Величину и направление возможного перемещения δs_E определим из соотношения $\delta s_A = \delta s_E \cos(30°)$, учитывая, что проекции δs_E и δs_A на прямую AE должны быть одинаковы по модулю и направлению. Тогда

$$\delta s_E = \frac{\delta s_A}{\cos(30°)} = \frac{l_1 \delta\varphi_1}{\cos(30°)}.$$

Определим возможное перемещение δs_D

$$\delta s_D = 2\delta s_E = 2\frac{l_1 \delta\varphi_1}{\cos(30°)} \text{ или } \delta s_D = l_4 \delta\varphi_4.$$

Тогда возможное перемещение $\delta\varphi_4$ будет равно $\delta\varphi_4 = \dfrac{2 l_1 \delta\varphi_1}{l_4 \cos(30°)}$.

Из условия равенства проекций δs_D и δs_B на прямую BD определим возможное перемещение δs_B

$$\delta s_B = \delta s_D \cos(30°) = 2 l_1 \delta\varphi_1 = 0{,}8\delta\varphi_1.$$

3. Составим для механизма уравнение, выражающее принцип возможных перемещений:

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_4 + F\delta s_B = 0$$

или, заменяя $\delta\varphi_4$ и δs_B их значениями и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки:

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\frac{2l_1\delta\varphi_1}{l_4\cos(30°)} + c\lambda\cdot 0{,}8\delta\varphi_1 = 0 \text{ или } M_1 - 2M_2\frac{l_1}{l_4\cos(30°)} + 0{,}8c\lambda = 0.$$

Отсюда определим деформацию пружины

$$\lambda = \frac{-M_1 + 2M_2\dfrac{l_1}{l_4\cos(30°)}}{0{,}8c} = 0{,}04 \text{ м}$$

Ответ: $\lambda = 0{,}04$ м. Знак указывает, что пружина растянута.

Пример 15. Механическая система (рисунок 66) состоит из барабана *1* радиуса R_1 , к которому приложена пара сил с моментом M, и катка *5* радиуса R_5 (барабан и каток – однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно P_1, P_5. На барабан намотана нить, к концу K которой присоединена пружина KD. Другой конец пружины прикреплен к катку *5* в точке D. Коэффициент жесткости пружины равен c. Система начинает движение из состояния покоя, пружина в этот момент не деформирована.

Дано: $M = PR$, $P_1 = P$, $P_5 = 4P$, $R_1 = R_5 = R$.

Определить: $x = f(t)$, где x – удлинение пружины (или перемещение центра D катка по отношению к поверхности, по которой он катится), а также частоту k и период τ колебаний катка.

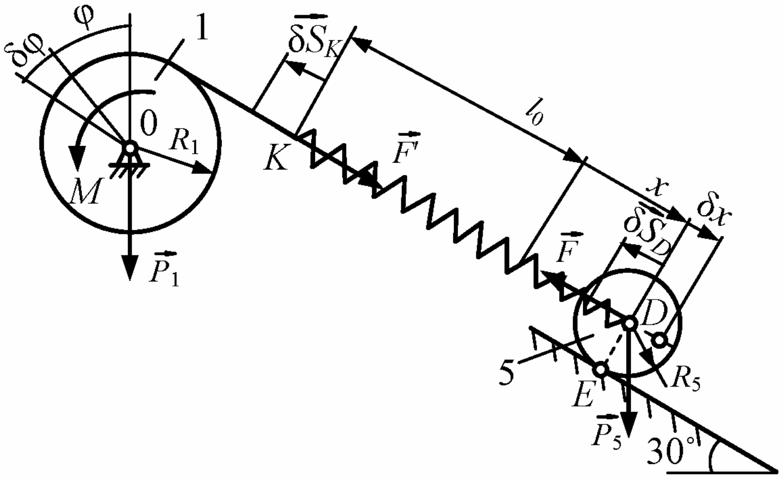


Рисунок 66

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x $(q_1 = \varphi,\ q_2 = x)$. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi} = Q_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = Q_2.$$

2. Определим кинетическую энергию Т системы, равную сумме энергий всех тел, входящих в систему: $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_5$.

Так как барабан вращается вокруг оси O, а каток движется плоскопараллельно, то

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2,\ \mathrm{T}_5 = \frac{1}{2} m_5 v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_5^2,$$

где $I_O = \dfrac{m_1 R_1^2}{2}$ – момент инерции барабана *1* относительно оси вращения,

$I_D = \dfrac{m_5 R_5^2}{2}$ – момент инерции катка *5* относительно оси вращения, проходящей через центр масс катка.

Поскольку $m_1 = \dfrac{P_1}{g} = \dfrac{P}{g}$ и $m_5 = \dfrac{P_5}{g} = \dfrac{4P}{g}$, то $I_O = \dfrac{PR^2}{2g}$ и $I_D = \dfrac{2PR^2}{g}$.

Все входящие в выражение для кинетической энергии системы скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$.

Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к концу недеформированной пружины, получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{от}} + \bar{v}_D^{\text{пер}}$, где численно $v_D^{\text{от}} = \dot{x}$, $v_D^{\text{пер}} = R\dot{\varphi}$. Тогда, принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $\bar{v}_D^{\text{от}}$ и $\bar{v}_D^{\text{пер}}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка – мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \; \omega_5 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R}.$$

Подставляя в выражение для кинетической энергии системы все найденные значения скоростей и значения моментов инерции I_O и I_D, получим окончательно следующее выражение для T:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\frac{PR^2}{2g}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{4P}{g}(\dot{x} - R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{2PR^2}{g}\left(\frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R}\right)^2$$

или $\quad \mathrm{T}=\frac{P}{g}\left(3{,}25R^2\dot{\varphi}^2-6R\dot{\varphi}\dot{x}+3\dot{x}^2\right).$

Определяем производные, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{P}{g}\left(6{,}5R^2\dot{\varphi}^2-6R\dot{x}\right), \ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi}=0, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{PR}{g}\left(6{,}5R\ddot{\varphi}-6\ddot{x}\right);\\ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}}=\frac{P}{g}\left(-6R\dot{\varphi}+6\dot{x}\right), \ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}=0, \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{P}{g}\left(-6R\ddot{\varphi}+6\ddot{x}\right).\end{cases}$$

3. Определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изобразим действующие на систему активные силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_5$, силы упругости $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, где численно $F'=F=cx$, и пару с моментом M.

а) Для определения обобщенной силы Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором обобщенная координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а обобщенная координата x не изменяется, т.е. $\delta x=0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда центр D катка получает возможное перемещение $\delta s_D = R\delta\varphi$ и элементарная работа действующих сил равна

$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_5\sin 30^\circ\delta s_D - F'\delta s_K + F\delta s_D$, $F'=F$ или

$\delta A_1 = \left(M - P_5\sin 30^\circ R\right)\delta\varphi = \left(PR-2PR\right)\delta\varphi = -PR\delta\varphi$.

Коэффициент при $\delta\varphi$ будет искомой обобщенной силой $Q_1=-PR$.

б) Для определения обобщенной силы Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а обобщенная координата $\delta\varphi$ не изменяется, т.е. $\delta\varphi=0$. В этом случае $\delta s_D = \delta x$, $\delta s_K = 0$. Элементарную работу совершают только силы $\overline{P}_5$ и $\overline{F}$. Учитывая, что $P_5 = 4P$ и $F = cx$, получим

$$\delta A_2 = P_5 \sin 30^\circ \delta x - F\delta x \text{ или } \delta A_2 = (2P - cx)\delta x.$$

Коэффициент δx будет искомой обобщенной силой $Q_2 = 2P - cx$.

С учетом найденных производных и обобщенных сил уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{PR}{g}(6{,}5R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x}) = -PR; \\ \dfrac{P}{g}(-6R\ddot{\varphi} + 6\ddot{x}) = 2P - cx; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6{,}5R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x} = -g; \\ -6R\ddot{\varphi} + 6\ddot{x} = 2g - \dfrac{cg}{P}x. \end{cases}$$

4. Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений $\ddot{\varphi}$: выразим $\ddot{\varphi}$ из первого уравнения $\ddot{\varphi} = \dfrac{6\ddot{x} - g}{6{,}5R}$ и подставим это значение во второе уравнение.

Второе уравнение примет вид: $-6R\left(\dfrac{6\ddot{x} - g}{6{,}5R} + 6\ddot{x}\right) = 2g - \dfrac{cg}{P}x$.

После ряда преобразований получим

$$3\ddot{x} + 6{,}5\frac{cg}{P}x = 7g \text{ или } \ddot{x} + \frac{6{,}5}{3}\frac{cg}{P}x = \frac{7}{3}g.$$

Введем обозначения $\dfrac{6{,}5}{3} \cdot \dfrac{cg}{P} = k^2$, $\dfrac{7}{3}g = a$.

Таким образом, уравнение приведено к виду $\ddot{x} + k^2 x = a$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения ищется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$ – общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, x_2 – частное решение дифференциального уравнения, которое следует искать в таком же виде, который имеет правая часть. Так как правая часть уравнения представляет собой константу, будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A$. Подставив значение функции $x_2 = A$ и ее второй производной $\ddot{x}_2 = 0$ в уравнение, получим $A = a/k^2$. Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{a}{k^2},$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Для их определения найдем еще производную $\dot{x}$:

$$\dot{x} = C_1 k \cos(kt) - C_2 k \sin(kt).$$

Поскольку движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована, начальными условиями этого движения будут: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Подставляя эти величины в уравнения закона движения и закона изменения скорости, найдем $C_1 = 0$, $C_2 = a/k^2$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = f(t)$ в виде

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - cos\, kt),$$

Таким образом, центр D катка совершает по отношению к поверхности колебания. Круговая частота k и период τ этих колебаний:

$$k = \sqrt{\frac{6,5}{3} \cdot \frac{cg}{P}}\,;\ \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{3P}{6.5cg}}.$$

Пример 16. Находящаяся в равновесии механическая система состоит из колеса *1* радиуса R_1, ступенчатого колеса *2* с радиусами R_2 и r_2 и груза *3*, подвешенного на нити, намотанной на колесо *2*; колеса соединены невесомым стержнем *AB* (рисунок 67). К колесу *1* прикреплена вертикальная пружина с коэффициентом жесткости c.

Дано: m_1 = 12 кг, m_2 = 6 кг, m_4 = 8 кг, c_1 = 1200 Н/м, r_1 = 0,2 м, R_2=0,5 м, r_2 = 0,3 м. Колеса считать сплошными однородными цилиндрами.

Определить: частоту k и период τ малых колебаний системы около положения равновесия и значение $\lambda_{ст}$.

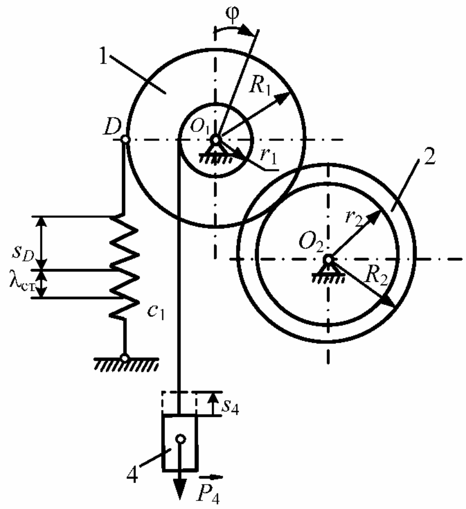


Рисунок 67

Решение. 1. Система имеет одну степень свободы. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ поворота колеса *1* от равновесного положения (при равновесии φ=0 и $s_D = 0$, $s_4 = 0$); при малых колебаниях системы считаем угол φ малым.

Поскольку все действующие на систему активные силы потенциальные (сила тяжести и сила упругости), выразим обобщенную силу Q через потенциальную энергию П системы. Тогда исходным уравнением будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

2. Определим кинетическую энергию системы, равную сумме энергий всех тел:

$$\text{T} = \text{T}_1 + \text{T}_2 + \text{T}_4.$$

Так как колеса *1* и *2* вращаются вокруг осей O_1 и O_2, а груз *4* движется поступательно, то $\text{T}_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$, $\text{T}_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$, $\text{T}_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2$, где $I_1 = \frac{m_1 R_1^2}{2}$, $I_2 = \frac{m_1 R_2^2}{2}$ – осевые моменты инерции.

Все скорости, входящие в выражения кинетических энергий выразим через обобщенную скорость $\dot{\varphi}$: $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $\omega_2 = \dot{\varphi}\frac{R_1}{r_2}$, $v_4 = r_1 \dot{\varphi}$.

Выражение для кинетической энергии системы примет вид

$$\text{T} = \frac{1}{2}\frac{m_1 R_1^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_4 r_1^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 R_1^2}{2 r_2^2} + m_4 r_1^2\right)\dot{\varphi}^2.$$

Учитывая, что r_1 = 0,2 м, R_2=0,5 м, r_2 = 0,3 м, получим

$$\text{T} = \frac{1}{2}(0{,}08 m_1 + 0{,}22 m_2 + 0{,}04 m_4)\dot{\varphi} \text{ или } \text{T} = \frac{1}{2} a_0 \dot{\varphi},$$

где $a_0 = 0{,}08 m_1 + 0{,}22 m_2 + 0{,}04 m_4$.

Определим производные, входящие в уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\varphi}} = a_0 \dot{\varphi}, \; \frac{\partial \text{T}}{\partial \varphi} = 0, \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \text{T}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = a_0 \ddot{\varphi}.$$

3. Определим потенциальную энергию системы $\Pi = \Pi_{\text{СТ}} + \Pi_{\text{СУ}}$, где $\Pi_{\text{СУ}}$, $\Pi_{\text{СТ}}$ – потенциальная энергия сил упругости и сил тяжести

соответственно. Потенциальная энергия сил упругости $\Pi_{\text{СУ}} = \frac{1}{2}c\lambda_{\text{К}}^2 - \frac{1}{2}c\lambda_{\text{Н}}^2$, где $\lambda_{\text{Н}}$ $\lambda_{\text{К}}$ – начальная и конечная деформации пружины соответственно, потенциальная энергия сил тяжести $\Pi_{\text{СТ}} = P_4 s_4 = P_4 r_1 \varphi$.

Определим начальную и конечную деформации пружины: $\lambda_{\text{Н}} = -\lambda_{\text{ст}}$, $\lambda_{\text{К}} = -\lambda_{\text{ст}} + s_4 = -\lambda_{\text{ст}} + R_1\varphi$.

В результате получим

$$\Pi_{\text{СУ}} = \frac{1}{2}c\left(-\lambda_{\text{ст}} + R_1\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}c\lambda^2{}_{\text{ст}} = -cR_1\lambda_{\text{ст}}\varphi + \frac{1}{2}cR_1^2\varphi^2.$$

Потенциальная энергия всей системы $\Pi = P_4 r_1\varphi - cR_1\lambda_{\text{ст}}\varphi + \frac{1}{2}cR_1^2\varphi^2$.

Частная производная от потенциальной энергии по обобщенной координате $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P_4 r_1 - cR_1\lambda_{\text{ст}} + cR_1^2\varphi$.

Статическую деформацию пружины найдем из условия $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = P_4 r_1 - cR_1\lambda_{\text{ст}} = 0$, откуда $\lambda_{\text{ст}} = \frac{P_4 r_1}{cR_1}$. Таким образом, потенциальная энергия системы равна $\Pi = \frac{1}{2}cR_1^2\varphi^2$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = cR_1^2\varphi$.

Тогда уравнение Лагранжа примет вид $a_0\ddot{\varphi} + cR_1^2\varphi = 0$ или $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $k^2 = \frac{cR_1^2}{a_0} = \frac{1200 \cdot 0{,}4^2}{0{,}08 \cdot 1{,}2 + 0{,}22 \cdot 16 + 0{,}04 \cdot 8} = 40\,\text{с}^{-2}$.

Таким образом, собственная частота колебаний системы равна $k = \sqrt{40} = 6{,}32$ с^{-1}, а период колебаний равен $\tau = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6{,}32} = 0{,}99\,\text{с}$.

Справочный материал

Тригонометрические функции углов

Функция	1-й квадрант					2-й квадрант			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	0,5	0,707	0,866	1	0,866	0,707	0,5	0
cos	1	0,866	0,707	0,5	0	–0,5	–0,707	–0,866	–1
tg	0	0,577	1	1,732	∞	–1,732	–1	–0,577	0
ctg	∞	1,732	1	0,577	0	–0,577	–1	–1,732	∞

Функция	3-й квадрант				4-й квадрант			
	210°	235°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	–0,5	–0,707	–0,866	–1	–0,866	–0,707	–0,5	0
cos	–0,866	–0,707	–0,5	0	0,5	0,707	0,866	1
tg	0,577	1	1,732	∞	–1,732	–1	–0,577	0
ctg	1,732	1	0,577	0	–0,577	–1	–1,732	∞

Синус: $\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$.

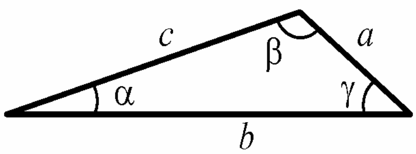
Косинус: $\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$.

Тангенс: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$.

Котангенс: $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$.

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$



Основные формулы преобразования

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

Формулы приведения

Для $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$; $\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha$;

$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Таблица производных от основных элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
const	0	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$	$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\mathrm{arcctg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^{ax}	$a \cdot e^{ax}$	$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$	$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}43}{x}$
a^{mx}	$ma^{mx}\ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathrm{ctg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Основные правила дифференцирования функций

Функция $y = f(x)$	Производная $y' = \frac{dy}{dx}$	Функция $y = f(x)$	Производная $y' = \frac{dy}{dx}$
$u \pm v$	$u' \pm v'$	$C \cdot u$	$C \cdot u'$
$u \cdot v$	$u \cdot v' + v \cdot u'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$f(u)$	$\frac{df(u)}{du} \cdot u$
u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^v	$v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln(u) \cdot v$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\sin(u)$	$\cos(u) \cdot u'$	$\cos(u)$	$-\sin(u) \cdot u'$
$\sin^2(u)$	$\sin(2u) \cdot u'$	$\cos^2(u)$	$-\sin(2u) \cdot u'$

Интегралы функций

$$\int dx = x + C\,; \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1);$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C\,; \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C\,;$$

$$\int \sin(kx)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C\,; \quad \int \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + C\,.$$

Литература

1. Смогунов В.В. Теоретическая механика для заочников / Под ред. Н.И. Гордиенко. – Пенза: изд-во ПензГУ, 1995.

2. Тарг С.М. Курс теоретической механики. – М.: Физматгиз, 1963 и последующие издания.

3. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1988.

4. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1989.