ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Учебное пособие

В сокращенном виде излагаются основные понятия и определения теоретической механики. Изложение теоретического материала осуществлено с упором на геометрическую наглядность и не требует специальных знаний высшей математики, кроме необходимых. Приводятся доказательства основных теорем, необходимых для дальнейшего понимания механических явлений.

Предлагаемое издание предназначено для студентов всех форм обучения на машиностроительных, горностроительных и других инженерных специальностей высших учебных заведений в качестве справочного пособия по теоретическому курсу дисциплины "Теоретическая механика".

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений, с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин и механизмов. Несмотря на разнообразие всех этих проблем, решение их в определенной части основывается на некоторых общих принципах и имеет общую научную базу. Это объясняется тем, что в указанных задачах значительное место занимают вопросы, требующие изучения законов движения или равновесия тех или иных материальных объектов. Наука о законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами называется общей механикой. Теоретической же механикой мы будем называть такой раздел общей механики, в котором исследуются наиболее общие законы механического движения без учета специальных физических свойств материальных объектов (электропроводность, теплопроводность и т.п.). На основе теоретической механики изучается механика деформируемых тел: сопротивление материалов, теория машин и механизмов, теория упругости, пластичности, механика жидкости и газа, аэродинамика и многие специальные дисциплины.

Математический аппарат механики широко применяется во многих областях науки. Многие разделы математики возникли и развивались под влиянием и в связи с соответствующими потребностями механики, поэтому при изучении механику можно получить наглядное, яркое и убедительное представление о многих разделах математики, так как при этом за формулами видны глубокие, содержательные связи, а математические величины наделяются ясным смыслом.

Данный курс базируется на классической (Ньютоновской) механике, которая в отличие от релятивистской механики основана на представлении об абстрактном геометрическом пространстве не связанном по своим свойствам с движением материи в нем. Т.е. в основе теоретической механики лежат представления о пространстве и времени не связанных друг с другом. Подобное допущение, как показывает теория относительности, вполне применимо для тел движущихся со скоростями много меньших скорости света.

КИНЕМАТИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ

Термин "кинематика" происходит от греческого слова, что означает движение. Кинематика изучает механическое движение тел с геометрической стороны, без учёта причин, вызывающих движение. От геометрии кинематика отличается по существу тем, что при рассмотрении движения тел в пространстве принимается во внимание ещё и время движения.

Механическим движением или механической формой движения называется процесс непрерывного изменения положения тел (или частей тела) в пространстве относительно друг друга. Всякая определённая часть вещества называется материальным телом. Частица вещества, заключённая внутри столь малой сферы, что положение этой сферы вполне определяется положением её центра, называется материальной точкой. В ряде задач механики понятие материальной точки обобщается. Если условия задачи таковы, что можно пренебречь размерами тела, то это тело можно рассматривать как материальную точку. Например, при — изучении движения Земли или других планет относительно Солнца, их можно рассматривать как материальные точки.

Из определения механического движения следует, что говорить об изменении положения тела можно лишь по отношению к какому- либо другому телу. Положение тела по отношению к другому определяется с помощью некоторой системы координат, неизменно связанной с твёрдым телом. Такую систему координат называют системой отсчёта, а твёрдое тело — телом отсчёта.

Система отсчёта называется основной или “абсолютной”, если в рассматриваемой задаче можно не учитывать движение этой системы.

Движение материальных тел совершается в пространстве и времени. В механике моделью реального пространства считается евклидово трёхмерное пространство. Геометрические свойства этого пространства одинаковы во всех направлениях, т. е. это пространство однородно и изотропно.

Отражением реального времени считается абсолютное время, т. е. время, протекающее одинаково во всех системах отсчёта. За единицу времени принимается одна секунда, определяемая как $1/24 \cdot 60 \cdot 60$ часть средних солнечных суток.

В классической механике метрические свойства пространства и времени считаются независимыми от движущейся материи, поэтому трёхмерное евклидово пространство и абсолютное время лишь приближённо отражают реальные свойства пространства и времени. Однако это приближение даёт достаточную для практики точность при изучении движений, рассматриваемых в механике Ньютона, т. е. движений со скоростями намного меньшими скорости распространения света.

В основании кинематики лежат аксиомы геометрии Евклида. Для обоснования кинематики не нужны какие-либо новые аксиомы, т. к. кинематика отличается от геометрии лишь тем, что движение в ней изучается во времени.

Изменение положения точки или тела вызывается физическими причинами. Зная эти причины, можно определить движение точки или тела. В кинематике не рассматривают физические причины движения. Поэтому для изучения движения объекта, нужно задать это движение. Принято задавать движение точки описанием её положения в каждый момент времени. Кинематически задать движение точки — это значит задать функции, определяющие положение точки в любой момент времени в выбранной системе отсчета. Существует две основных задачи кинематики:

Первая основная задача кинематики — установление способов задания движения.

Вторая задача кинематики — определение кинематических характеристик движения точки: траекторию, скорость, ускорение.

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Способы задания движения точки

Существуют три способа задания движения точки.

Векторный способ.

Положение точки определяется радиус-вектором (рис.1.1), проведённым в данную точку из неподвижного начала отсчёта.

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \equiv \overline{OM}(t).$$

С течением времени радиус-вектор будет изменяться, поэтому он является некоторой заданной векторной функцией времени $\overline{r} = \overline{r}(t)$. Это уравнение называется уравнением движения точки в векторной форме.

Непрерывная кривая, с точками которой в каждый момент времени совпадает движущаяся точка, называет траекторией. По отношению к различным системам отсчёта точка будет описывать разные кривые. Следовательно, траектория относительное понятие.

Геометрическое место концов переменного вектора называется годографом. Таким образом, траектория точки есть годограф радиус-вектора этой точки.

Координатный способ.

Положение движущейся точки относительно выбранной системы отсчёта определяется её координатами в каждый момент времени (рис. 1.1):

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

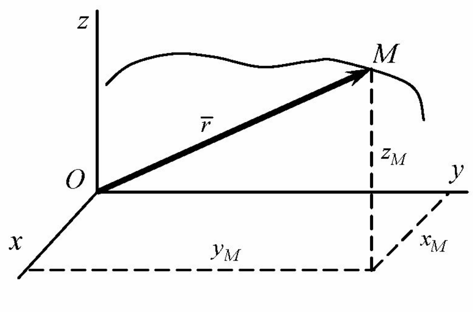


Рис. 1. 1. Движение материальной точки

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ должны быть однозначными, непрерывными и, по крайней мере, дважды дифференцируемыми.

Уравнения движения точки в координатной форме можно рассматривать и как уравнения траектории в параметрическом виде. Если исключить из этих уравнений параметр t, то получим уравнение траектории, как пересечение двух поверхностей

$$F_1(x,y)=0,\ F_2(y,z)=0.$$

Естественный способ.

Если известен вид траектории, то движение точки удобно задать естественным способом (рис. 1.2). Для этого на траектории назначают начало отсчёта (точка О), направление отсчёта и записывают зависимость дуговой координаты s от времени t

$$\overset{\frown}{OM}=s(t).$$

Функция $s=s(t)$ по самой природе механического движения должна быть непрерывной и однозначной.

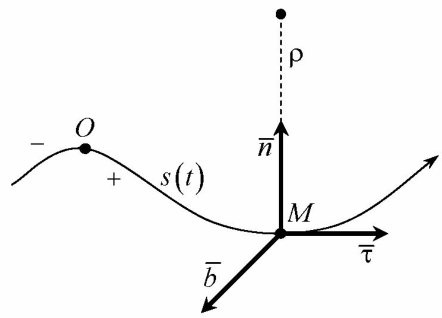


Рис. 1. 2. Естественный координатный базис

С траекторией точки можно связать естественный координатный базис: единичные векторы касательной — $\bar{\tau}=\dfrac{d\bar{r}}{ds}$, главной нормали — $\bar{n}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ и бинормали к траектории $\bar{b}=\bar{\tau}\times\bar{n}$. Здесь ρ — радиус кривизны траектории.

Эти три вектора образуют естественный репер, вдоль них идут естественные оси. Координатные плоскости образуют сопровождающий трёхгранник и носят названия: плоскость ($\overline{\tau}$, $\overline{n}$) — соприкасающаяся, плоскость ($\overline{n}$, $\overline{b}$) — нормальная, плоскость ($\overline{b}$, $\overline{\tau}$) — спрямляющая.

Скорость точки

Рассмотрим понятие скорости точки при различных способах задания движения.

Скорость точки при векторном задании движения.

Скорость — одна из кинематических характеристик движения точки. Это векторная величина, отражающая быстроту изменения положения точки в пространстве. Пусть в момент времени t точка занимала положение M и её радиус-вектор есть $\overline{r}$. По истечении промежутка времени Δt точка занимает новое положение M_1, определяемое радиус вектором $\overline{r}_1$. Изменение радиус-вектора за время Δt равно $\Delta\overline{r} = \overline{r}_1 - \overline{r}$ (рис. 1.3).

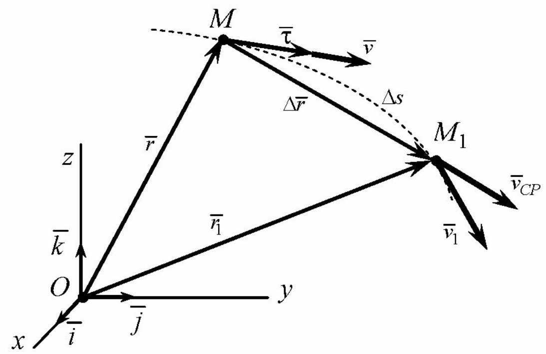


Рис. 1. 3. Скорость точки

Изменение радиуса-вектора за единицу времени численно равно так называемой средней скорости $\overline{v}_{CP} = \Delta\overline{r}/\Delta t$. Для характеристики быстроты движения в данный момент времени вводим понятие мгновенной скорости как предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_{CP} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\,\overline{r}}{d\,t}.$$

Таким образом, при векторном задании движения скорость определяется как производная от радиус вектора по времени.

Скорость точки при координатном задании движения.

Координаты точки М одновременно являются и координатами её радиус-вектора. Поэтому координатное задание движения точки эквивалентно заданию движения её векторным способом. Разложим вектор скорости точки и её радиус-вектор в направлении координатных осей:

$$\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}, \quad \overline{v} = v_x\,\overline{i} + v_y\,\overline{j} + v_z\,\overline{k}\ .$$

Согласно определению, данному выше, вектор скорости равен производной от радиус-вектора движущейся точки по времени

$$\dot{\overline{r}} = \dot{x}\,\overline{i} + \dot{y}\,\overline{j} + \dot{z}\,\overline{k}\ .$$

Сравнивая эту формулу с предыдущими соотношениями, убеждаемся, что проекция скорости на какую-либо ось равна производной от соответствующей координаты по времени

$$v_x = \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt}$$

В силу ортогональности составляющих вектора скорости, легко определить её модуль и направляющие косинусы

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{v},\overline{i}}\right) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{v},\overline{j}}\right) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{v},\overline{k}}\right) = \frac{v_z}{v}.$$

Скорость точки при естественном задании движения.

При использовании естественного способа задания движения точки её положение характеризуется дуговой координатой $s = s(t)$. Положение точки в этом случае представляется радиус вектором $\overline{r} = \overline{r}\left[s(t)\right]$. Тогда скорость точки можно определить следующим образом (рис. 1.3):

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\overline{\tau} = v_\tau\,\overline{\tau}\ ,$$

где $v_\tau = \overline{v} \cdot \overline{\tau} = \dfrac{ds}{dt}$ — проекция вектора скорости на единичный вектор касательной к траектории $|v_\tau| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.

Следовательно, вектор скорости направлен по касательной к траектории.

Ускорение точки.

При изучении движения необходимо знать, как быстро меняется скорость по величине и направлению. Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости, называется ускорением.

Ускорение точки при векторном задании движения.

Пусть за время Δt скорость изменилась на величину $\Delta\overline{v}$ (рис.1.4). Тогда средним за это время ускорением имеет смысл назвать величину $\overline{a}_{cp} = \Delta\overline{v}/\Delta t$. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ характеризует мгновенную скорость изменения скорости, т. е. ускорение

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{a}_{\text{СР}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt}.$$

Таким образом, ускорение равно производной по времени от вектора скорости.

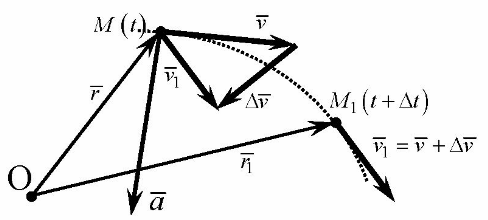


Рис. 1. 4. Ускорение точки

Ускорение точки при координатном способе задания движения

В том случае заданы координаты как функции от времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

Так как скорость можно разложить на составляющие вдоль координатных осей, то после дифференцирования по времени получим:

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \dot{v}_x\,\overline{i} + \dot{v}_y\,\overline{j} + \dot{v}_z\,\overline{k} = a_x\,\overline{i} + a_y\,\overline{j} + a_z\,\overline{k} = \ddot{x}\,\overline{i} + \ddot{y}\,\overline{j} + \ddot{z}\,\overline{k}$$

Модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы можно вычислить по формулам:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{i}}\right) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{j}}\right) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{k}}\right) = \frac{a_z}{a}.$$

Ускорение точки при естественном способе задания движения

Известна зависимость дуговой координаты S от времени $s = s(t)$. Скорость точки определяется формулой:

$$\overline{v} = \dot{s}\,\overline{\tau} = v_\tau\,\overline{\tau}\,.$$

Найдём ускорение, продифференцировав это соотношение по времени. Учтём при этом, что единичный вектор касательной $\overline{\tau}$ меняет направление при движении точки, и он может быть рассмотрен как сложная векторная функция $\overline{\tau} = \overline{\tau}\left[s(t)\right]$. Тогда

$$\overline{a} = \ddot{s}\,\overline{\tau} + \dot{s}\frac{d\,\overline{\tau}}{d\,t} = \ddot{s}\,\overline{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\,\overline{\tau}}{d\,s} = \dot{v}_\tau\,\overline{\tau} + \frac{v_\tau^{\;2}}{\rho}\overline{n} = a_\tau\overline{\tau} + a_n\overline{n}$$

где $a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}_\tau$ — называется касательным (тангенциальным) ускорением,

$a_n = \dfrac{v_\tau^{\;2}}{\rho}$ — называется нормальным ускорением.

Т. к. $\overline{a}_\tau \perp \overline{a}_n$, модуль ускорения можно найти по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_\tau^{\;2} + a_n^{\;2}}$$

Определение проекций ускорения на естественные оси при координатном способе задания движения

Из изложенного выше следует, что вектор ускорения располагается в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории. Проекции вектора ускорения на естественные оси равны:

$$a_\tau = \overline{a}\cdot\overline{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad a_\text{n} = \overline{a}\cdot\overline{n} = \frac{v_\tau^{\,2}}{\rho}, \quad a_b = \overline{a}\cdot\overline{b} = 0\,.$$

Касательное ускорение можно определить следующим образом. Представим единичный вектор касательной в виде $\overline{\tau} = \overline{v}/v$. Тогда

$$a_\tau = \overline{a}\cdot\overline{\tau} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{v}}{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}$$

Кроме того, касательное ускорение можно определить, продифференцировав по времени выражение $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}$, если движение задано координатным способом.

Полное ускорение определяется формулой: $a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$.

Нормальная составляющая найдётся из формулы: $a_\text{n} = \sqrt{a^2 - a_\tau^{\,2}}$, а радиус кривизны: $\rho = v^2/a_n$.

Классификация движений точки по ускорению

Анализируя вышесказанное, можно сделать следующие выводы:

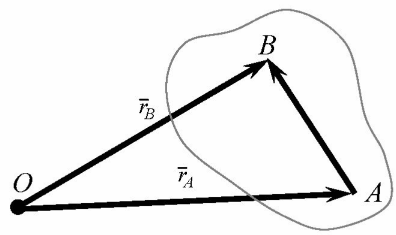
- если $a_\tau \neq 0, a_n = 0$, то точка движется прямолинейно;
- если $a_\tau = 0, a_n \neq 0$, то точка движется равномерно по криволинейной траектории;
- если $a_\tau > 0, v > 0$ или $a_\tau < 0, v < 0$, то точка движется ускоренно в сторону возрастания или убывания дуговой координаты соответственно;
- если $a_\tau < 0, v > 0$ или $a_\tau > 0, v < 0$, то точка движется замедленно;
- если $\rho = const$, то точка движется по окружности.

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движение тела

Поступательным относительно данной системы отсчёта движением называется такое движение, при котором любая прямая, взятая в этом теле, остаётся параллельной самой себе во все время движения. Примерами поступательного движения являются: движение кабины колеса обозрения, педали велосипеда, кузова автомобиля на прямолинейном участке пути.

При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения.



Возьмём в теле две произвольные точки А и В и соединим их прямолинейным отрезком. Согласно определению поступательного движения, отрезок АВ должен двигаться параллельно самому себе. Построим радиус-векторы точек А и В (см. рис.). Из рисунка видно, что $\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{AB}$. Т. к. $\overline{AB} = const$, то траектории точек А и В совпадут при наложении их друг на друга. Дифференцируя связь между радиусами-векторами точек А и В по времени, находим

$$\frac{d\overline{r}_B}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{d\overline{r}_A}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{v}_B = \overline{v}_A \quad \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \overline{a}_B = \overline{a}_A, \text{ т. к.}$$

$$\overline{AB} = const \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0 .$$

Отсюда следует, что поступательное движение тела определено, если известно движение хотя бы одной точки этого тела. Эту точку обычно называют полюсом. Взяв проекции векторных соотношений, получим скалярные уравнения поступательного движения.

Вращательное движение тела

Движение тела относительно данной системы отсчёта называется вращательным, если две его точки неподвижны относительно этой системы отсчёта. Прямая, соединяющая эти точки, называется осью вращения. Положение тела при вращении определяется углом поворота φ между неподвижной плоскостью (например xAz) и плоскостью x_1Az, жёстко связанной с телом (рис.1.5). Уравнение вращательного движения имеют вид зависимости угла поворота от времени

$$\varphi = \varphi(t).$$

Величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота, называется угловой скоростью, которая характеризуется не только величиной, но и направлением вращения. Угловая скорость равна производной от угла поворота по времени:

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi}\,\overline{k} = \omega\,\overline{k}\,.$$

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости и равно

$$\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \dot{\omega}\,\overline{k} = \ddot{\varphi}\,\overline{k}\,.$$

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Направления $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{\omega}$ совпадают, если совпадают знаки первой и второй производных от угла вращения по времени.

Все точки вращающегося тела описывают при движении окружности с радиусами h, равными расстояниям от соответствующих точек до оси вращения и движение точки можно считать заданным естественным способом: $s = s(t) = h\,\varphi(t)$.

Скорость точки может быть определена по формуле Эйлера (рис.1.5).

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,, v = \dot{s} = h\,\dot{\varphi} = h\,\omega = \omega\, r \sin\left(\widehat{\overline{r},\overline{\omega}}\right).$$

Ускорение точки тела при вращательном движении равно

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right) = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n,$$

где $\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$, $a_\tau = \varepsilon\, r \sin(\widehat{\overline{r},\overline{k}}) = \varepsilon\, h$ — касательное ускорение точки;

а $\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)$, $a_n = \omega\, v \sin\left(\pi/2\right) = \omega^2\, h$ — нормальное ускорение.

Часто составляющую $\overline{a}_\tau$ называют вращательным ускорением, составляющую $\overline{a}_n$ — центростремительным.

Модуль полного ускорения определится формулой $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Угол наклона полного ускорения к направлению главной нормали $\alpha = arctg\left({}^{a_\tau}\!\big/_{a_n}\right) = arctg\left({}^{\varepsilon}\!\big/_{\omega^2}\right)$ не зависит от выбора точки.

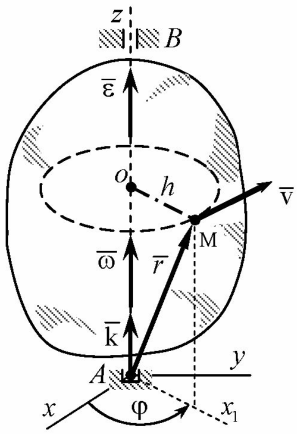


Рис. 1. 5. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Из приведённых формул видно, что:

- скорость и ускорение точки тела при вращательном движении пропорциональны расстояниям до оси вращения,
- скорость точки перпендикулярна к радиусу окружности;
- ускорение точки отклонено от радиуса окружности на угол α не зависящего от выбора самой точки.

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение сферического движения.

Сферическим движением называется движение твердого тела имеющего одну неподвижную точку (рис.1.6). Описание такого движения имеет первостепенное значение при анализе работы гироскопов, кораблей, самолётов, снарядов, ракет и небесных тел. Тело, совершающее сферическое движение имеет три степени свободы.

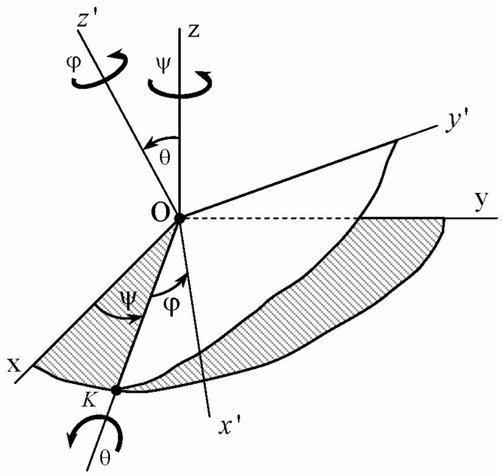


Рис. 1. 6. Сферическое движение твердого тела (Углы Эйлера)

Тело, совершающего сферическое движение, привести в заданное положение можно с помощью трех конечных поворотов, называемых углами Эйлера (рис.1.6). Первый поворот произведём вокруг оси Oz неподвижной системы координат $Oxyz$ угол прецессии ψ. Второй поворот произведём вокруг линии узлов OK на угол нутации θ. Третий поворот осуществляется вокруг оси Oz' на угол собственного вращения φ. После третьего поворота тело и оси подвижной системы координат $Ox'y'z'$ связанные с ним займут заданное положение. При движении тела в каждый момент времени углы Эйлера являются функциями времени:

$$\psi = \psi(t), \ \theta = \theta(t) \ , \varphi = \varphi(t) \ .$$

Эти зависимости называются кинематическими уравнениями сферического движения.

Вектор, определяющий положение точки M в неподвижной и подвижной системах отсчета, равен

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}',$$

а координаты точки связаны при помощи матрицы преобразования

$$r_i = m_{ij}\, r'_j, \quad r_1 \equiv x,\ r_2 \equiv y,\ r_3 \equiv z$$

где

$$m = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & \sin\theta\sin\psi \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

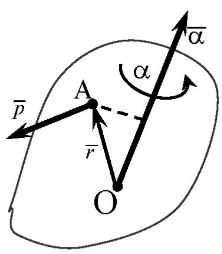
Теорема Эйлера-Даламбера о конечном повороте

Любое перемещение твёрдого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно осуществить одним конечным поворотом вокруг оси, проходящей через эту точку.

Для чего нам нужна эта теорема? Чтобы ответить на следующий вопрос: можно ли бесконечно, малые углы поворотов, произведённых последовательно друг за другом, складывать по правилу параллелограмма (как векторы)?

Угловая скорость, угловое ускорение

Введём "вектор" малого поворота $\overline{\alpha}$, равный по величине углу поворота α и направленный по оси вращения в такую сторону, чтобы, глядя с его острия видеть вращение происходящим против часовой стрелки. Вектор малого перемещения $(\cdot)A$ при таком бесконечно малом вращении может быть найден по формуле



$$\overline{p} = \overline{\alpha} \times \overline{r}.$$

Произведём два последовательных поворота. После первого поворота на угол $\overline{\alpha}_1$, вектор $\overline{r}$ переместится в положение $\overline{r}_1$

$$\overline{r}_1 = \overline{r} + \overline{p}_1 = \overline{r} + \overline{\alpha}_1 \times \overline{r} \ .$$

После второго поворота на угол $\overline{\alpha}_2$ вектор $\overline{r}_1$ переместится в положение $\overline{r}_2$

$$\begin{aligned}\overline{r}_2 = \overline{r}_1 + \overline{\alpha}_2 \times \overline{r}_1 &= \left(\overline{r} + \overline{\alpha}_2 \times \overline{r}\right) + \overline{\alpha}_2 \times \left(\overline{r} + \overline{\alpha}_1 \times \overline{r}\right) \\ &= \overline{r} + \left(\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2\right) \times \overline{r} + \underline{\overline{\alpha}_2 \times \left(\overline{\alpha}_1 \times \overline{r}\right)}\end{aligned}$$

В силу малости α_1 и α_2 подчёркнутым слагаемым можно пренебречь как величиной более малого порядка, чем остальные компоненты формулы.

$$\overline{r}_2 = \overline{r} + \left(\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2\right) \times \overline{r} \ .$$

Но по теореме Эйлера-Даламбера суммарное движение можно записать в виде формулы описывающей один поворот на угол α:

$$\overline{r}_2 = \overline{r} + \overline{\alpha} \times \overline{r} \ .$$

Сравнивая последние формулы между собой, получим

$$\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 = \overline{\alpha} \ .$$

Т. е. бесконечно малые углы поворота можно считать векторами и складывать по правилу параллелограмма.

Введём определение угловой скорости и углового ускорения:

$$\overline{\omega} = \frac{d\overline{\alpha}}{dt} \ , \ \overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \ .$$

Угловое ускорение равно линейной скорости конца вектора угловой скорости $\overline{\omega}$.

Т. к. вектор $d\,\overline{\alpha}$ может быть представлен в виде суммы двух или нескольких поворотов

$$d\,\overline{\alpha} = d\,\overline{\alpha}_1 + d\,\overline{\alpha}_2 + d\,\overline{\alpha}_3 \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_3 \ , \quad \overline{\omega}_i = \frac{d\overline{\alpha}_i}{dt}$$

Используя в качестве описанных углов α_i углы Эйлера, получим важную формулу:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_\psi + \overline{\omega}_\theta + \overline{\omega}_\varphi = \dot{\psi}\ \overline{k} + \dot{\theta}\ \overline{n} + \dot{\varphi}\ \overline{k}_1 .$$

Скорость точки тела, участвующего в сферическом движении

Найдем скорость точки тела, участвующего в сферическом движении. Эта формула носит имя Эйлера.

Вычислим предел отношения малого перемещения точки к малому промежутку времени, в течение которого он происходил при $\Delta t \to 0$:

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\alpha} \times \overline{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{\alpha}}{\Delta t} \right) \times \overline{r} .$$

Окончательно

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

где $\overline{\omega}$ угловая скорость тела относительно мгновенной оси вращения.

Используя формулы аналитической геометрии, векторное произведение представим в виде

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} .$$

Раскрыв определитель, получим формулы Эйлера в неподвижной системе координат

$$v_x = \omega_y\, z - \omega_z\, y , \quad v_y = -\omega_x\, z + \omega_z\, x , \quad v_z = \omega_x\, y - \omega_y\, x .$$

Аналогично можно получить формулы Эйлера в подвижной системе координат, для чего нужно формально произвести в предыдущих соотношениях замену v_x на v_{x1}, x на x_1, и т. д.

Мгновенная ось вращения

Мгновенная ось вращения — геометрическое место точек, скорость которых в данный момент времени равна нулю. Мгновенная ось вращения — ось бесконечно малого поворота тела, определяется из уравнения (рис.1.7):

$$\overline{v}_M = \overline{\omega} \times \overline{r}_м = 0,$$

где М — произвольная точка, лежащая на оси вращения.

Уравнения мгновенной оси в неподвижной системе координат можно записать в виде $\dfrac{z}{\omega_z} = \dfrac{y}{\omega_y} = \dfrac{x}{\omega_x}$, или в подвижной системе координат $\dfrac{z'}{\omega'_z} = \dfrac{y'}{\omega'_y} = \dfrac{x'}{\omega'_x}$

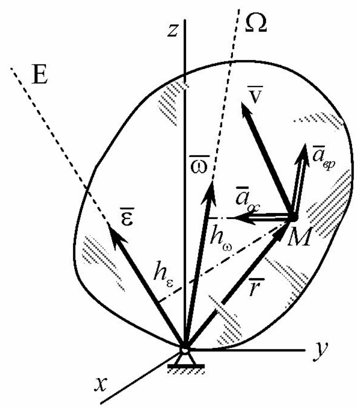


Рис. 1. 7. Скорость и ускорение точки при сферическом движении твердого тела

Перемещаясь в пространстве и внутри тела, Мгновенная ось опишет собой конические поверхности, которые называются соответственно неподвижным и подвижным аксоидами. Для получения уравнений этих поверхностей необходимо из уравнений мгновенной оси вращения исключить время.

Подвижный аксоид катится без проскальзывания по неподвижному. Данный вывод следует из равенства нулю скоростей точек мгновенной оси вращения, которая является в текущий момент общей для неподвижного и подвижного аксоидов.

Ускорение точки тела

Ускорение произвольной точки тела может быть определено по формуле Ривальса:

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \frac{d}{dt}\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right) = \dot{\overline{\omega}}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\dot{\overline{r}} = \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right) = \overline{a}^{вр} + \overline{a}^{ос}$$

где $\overline{a}^{вр} = \overline{\varepsilon}\times\overline{r}$ — вращательное ускорение, направленное перпендикулярно к векторам $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{r}$ (рис.1.7);

$\overline{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела, совершающего сферическое движение. Вектор углового ускорения направлен вдоль мгновенной оси ускорений, которая определяется из условия равенства нулю вращательного ускорения произвольной точки оси ускорений;

$\overline{a}^{ос} = \overline{\omega}\times\overline{v} = \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right) = \overline{\omega}\left(\overline{\omega}\cdot\overline{r}\right) - \overline{r}\left(\overline{\omega}\cdot\overline{\omega}\right)$— осестремительное ускорение, перпендикулярное векторам $\overline{\omega}$ и $\overline{v}$ (рис.1.7).

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Механические явления по–разному фиксируются в различных системах отсчёта. Наблюдатели, связанные с разными системами координат, по–разному воспринимают одно и то же объективное механическое явление. Главной задачей кинематики составного движения является установление связи между кинематическими характеристиками, полученными в различных системах отсчёта. Одна из этих систем условно называется неподвижной системой. Вторая — подвижной системой отсчета (рис.1.8).

Движение относительно условно неподвижной системы координат $O\,xyz$ называется абсолютным. Движение точки относительно системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$, движущейся, в свою очередь, относительно условно неподвижной (рис.1.8), называется относительным. Переносным движением называется движение подвижной системы $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$. Переносным движением точки М называется движение точки M', принадлежащей подвижной системе координат и совпадающей в данный момент времени с точкой M. Различаются абсолютные, относительные, переносные траектории, скорости и ускорения точки M.

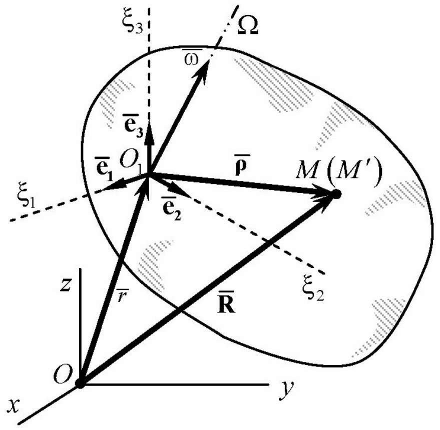


Рис. 1. 8. Составное движение точки

Абсолютной или относительной траекторией, скоростью и ускорением называется траектория, скорость и ускорение в абсолютном или относительном движении.

Переносной траекторией точки называют элементарный отрезок траектории точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает исследуемая точка. Переносной скоростью и ускорением точки называется скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент времени совпадает исследуемая точка.

Относительные скорость и ускорение будем обозначать $\overline{v}_r$ и $\overline{a}_r$. Индекс "r" — начальная буква французского слова relative (относительный).

Переносные скорость и ускорение будем обозначать $\overline{v}_e$ и $\overline{a}_e$. Индекс "e" — от французского слова d'entainement (переносный).

Дифференцирование вектора в подвижных координатах (Формула Бура)

Пусть вектор $\overline{\rho}$ представлен в подвижной системы координат в виде (рис.1.8):

$$\overline{\rho} = \rho_1 \overline{e}_1 + \rho_2 \overline{e}_2 + \rho_3 \overline{e}_3 .$$

Возьмём производную вектора $\overline{\rho}$ по времени, учитывая, что орты подвижной системы координат изменяются по направлению:

$$\frac{d\,\overline{\rho}}{d\,t} = \frac{d\,\rho_1}{d\,t}\overline{e}_1 + \frac{d\,\rho_2}{d\,t}\overline{e}_2 + \frac{d\,\rho_3}{d\,t}\overline{e}_3 + \rho_1 \frac{d\,\overline{e}_1}{d\,t} + \rho_2 \frac{d\,\overline{e}_2}{d\,t} + \rho_3 \frac{d\,\overline{e}_3}{d\,t} .$$

Первые три слагаемые этой формулы дают нам относительную производную, обозначаемую как:

$$\frac{d'\,\overline{\rho}}{d\,t} = \frac{d\,\rho_1}{d\,t}\overline{e}_1 + \frac{d\,\rho_2}{d\,t}\overline{e}_2 + \frac{d\,\rho_3}{d\,t}\overline{e}_3 .$$

Производная от единичного вектора — т. е. скорость конца этого вектора равна

$$\frac{d\,\overline{e}_i}{d\,t} = \overline{\omega}_e \times \overline{e}_i , \quad i = \overline{1,3} .$$

Учитывая данное равенство, последние три слагаемых можно преобразовать следующим образом

$$\rho_1 \frac{d\,\overline{e}_1}{d\,t} + \rho_2 \frac{d\,\overline{e}_2}{d\,t} + \rho_3 \frac{d\,\overline{e}_3}{d\,t} = \overline{\omega}_e \times \left(\rho_1 \overline{e}_1 + \rho_2 \overline{e}_2 + \rho_3 \overline{e}_3 \right) = \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} .$$

Окончательно производная вектора $\overline{\rho}$ по t будет записываться соотношением:

$$\frac{d\,\overline{\rho}}{d\,t} = \dot{\overline{\rho}} = \frac{d'\,\overline{\rho}}{d\,t} + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} ,$$

где: $\frac{d'}{dt}$ — относительная (локальная) производная, в которой дифференцируются только координаты; $\overline{\omega}_e$ — вектор угловой скорости подвижной системы координат.

Данная формула называется формулой Бура.

Теорема сложения скоростей

Абсолютная скорость точки при составном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Пусть тело, с которой связана подвижная система координат, совершает произвольное движение относительно неподвижной системы координат. Это движение может быть рассмотрено как поступательное движение вместе с началом подвижной системой координат и сферическое относительно этого начала. Из векторного треугольника O_1OM получаем

$$\overline{R} = \overline{r} + \overline{\rho}.$$

Вычислив проекции этого векторного равенства на оси неподвижной системы координат, получим уравнения движения точки М.

Относительное движение будет характеризоваться координатами точки в подвижной системе координат:

$$\overline{\rho} = \rho_1\,\overline{e}_1 + \rho_2\,\overline{e}_2 + \rho_3\,\overline{e}_3 = \rho_i\,\overline{e}_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Вычисляя производную вектора $\overline{R}$ по времени с помощью формулы Бура, получим:

$$\overline{v} = \dot{\overline{R}} = \dot{\overline{r}} + \dot{\overline{\rho}} = \left(\dot{\overline{r}} + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho}\right) + \frac{d'\,\overline{\rho}}{d\,t} = \overline{v}_e + \overline{v}_r.$$

Сумма слагаемых, стоящих в скобке, даёт скорость точки твёрдого тела, с которым "сцеплена" подвижная система координат, совпадающей с исследуемой точкой в данный момент времени. Эту скорость называют переносной

$$\bar{v}_e = \dot{\bar{r}} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} .$$

Относительная производная даёт относительную скорость

$$\bar{v}_r = \frac{d' \bar{\rho}}{d t} = \dot{\rho}_i \, \bar{e}_i , \quad i = \overline{1,3} .$$

Сложение ускорений в составном движении

Абсолютное ускорение точки при непоступательном переносном движении равно векторной сумме трех составляющих ускорений — переносного, относительного и ускорения Кориолиса.

По определению ускорение есть производная от скорости по времени

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \dot{\bar{v}}_e + \dot{\bar{v}}_r .$$

Для вычисления производной от относительной скорости $\bar{v}_r$ применим формулу Бура:

$$\dot{\bar{v}}_r = \frac{d' \bar{v}_r}{d t} + \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r .$$

Возьмём производную от переносной скорости по времени:

$$\dot{\bar{v}}_e = \frac{d}{d t}\left(\dot{\bar{r}} + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right) = \ddot{\bar{r}} + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right).$$

В результате имеем соотношение

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right) + \frac{d' \bar{v}_r}{d t} + 2 \bar{\omega}_e \times \bar{v}_r .$$

Обозначим сумму первых трёх слагаемых через $\bar{a}_e$. Это ускорение точки подвижной системы координат (переносного тела, участвующего в поступательном и сферическом движении), совпадающей в данный момент времени с исследуемой точкой, т. е. — переносное ускорение:

$$\bar{a}_{\text{е}} = \ddot{\bar{r}} + \bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{\rho} \right).$$

Ускорение в относительном движении находится как относительная производная от относительной скорости:

$$\overline{a}_r = \frac{d' \overline{v}_r}{d\,t} = \ddot{\rho}_i \, \overline{e}_i, \quad i = \overline{1,3}\,.$$

Последнее слагаемое основной формулы называется ускорением Кориолиса или поворотным ускорением:

$$\overline{a}_c = 2\,\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r\,.$$

Окончательно абсолютное ускорение можно определить как результат сложения переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c\,.$$

Ускорение Кориолиса появляется по следующим причинам:

- из-за изменения переносной скорости в относительном движении (рис.1.9 а),
- из-за изменения относительной скорости в переносном движении (рис.1.9 б).

$$\overline{a}_c \approx \frac{\Delta \overline{v}^*}{\Delta t} = \frac{\Delta \overline{v}_e^{\,*} + \Delta \overline{v}_r^{\,*}}{\Delta t}\,.$$

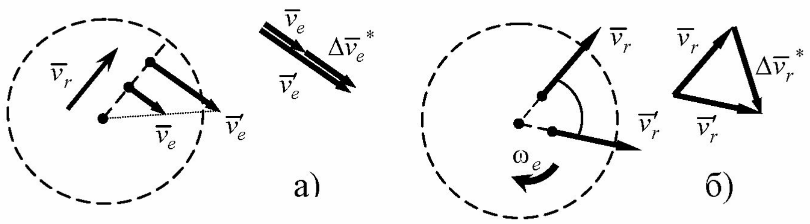


Рис. 1. 9. Причины возникновения ускорение Кориолиса

Рассмотрим подробней алгоритм вычисления кориолисова ускорения. Из определения векторного произведения следует, что вектор ускорения Кориолиса направлен перпендикулярно векторам — сомножителям $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$ причём вращение первого из них $\overline{\omega}_e$ производимое по кратчайшему пути ко второму сомножителю $\overline{v}_r$ должно наблюдаться с острия вектора-результата происходящим в направлении против часовой стрелки.

Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле:

$$a_c = 2\,\omega_e\, v_r\, \sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{v}_r})$$

и, следовательно, $\overline{a}_c = 0$ в следующих случаях:

$\overline{\omega}_e = 0$ при переносном поступательном движении;

$\overline{v}_r = 0$ при относительном покое;

$\sin(\widehat{\overline{\omega}_e, \overline{v}_r}) = 0$ в том случае, когда угол между векторами относительной скорости и переносной угловой скорости равен 0 или 180 градусов.

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоским или плоскопараллельным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных данной фиксированной плоскости, неизменно связанной с неподвижной системой отсчёта. Эту плоскость называют направляющей плоскостью. Примерами плоского движения могут служить: качение колеса по прямолинейному рельсу, движение звеньев кривошипно-шатунного механизма,… Частными случаями плоского движения являются вращательное, поступательное (при плоском характере траекторий точек тела). Изучение плоского движения сводится к анализу движения плоской фигуры, полученной сечением тела плоскостью, параллельной направляющей плоскости.

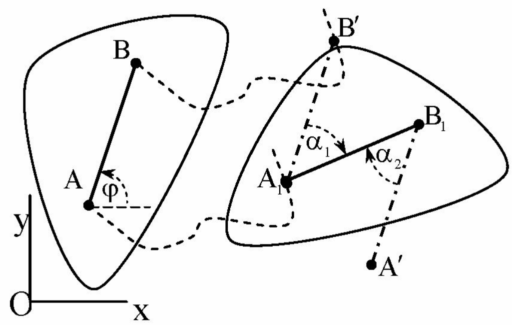


Рис. 1. 10. Плоское движение твердого тела

Положение плоской фигуры в её плоскости определяется двумя точками, например А и В (рис.1.10). Координаты этих точек связаны между собой условием постоянства длины отрезка АВ. Поэтому независимыми будут не четыре координаты x_A, y_A, x_B, y_B, а только три. Обычно, при аналитическом методе описания плоского движения вводят в рассмотрение следующие три параметра:

$$x_A = f_1(t), \qquad y_A = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t).$$

Зависимости этих параметров от времени называют кинематическими уравнениями плоского движения.

Разложение движения плоской фигуры на поступательное и вращательное

Движение плоской фигуры можно разложить на поступательное, вместе с полюсом, и вращательное вокруг полюса. Полюсом называем произвольную точку, выбранную из каких-либо соображений для описания плоского движения.

Для доказательства рассмотрим два положения плоской фигуры в моменты времени t и $t+\Delta t$ (рис.1.10). Переместим фигуру поступательно из положения AB в положение A_1B'. При этом точка B описывает такую же траекторию как и точка A. Затем повернём фигуру вокруг точки A_1 на угол α_1 так, чтобы точка B' заняла положение B_1. Перевод фигуры из начального положения в конечное можно произвести различными способами, выбирая за полюс вместо точки А любую другую, например, точку В. Заметим, что при этом поворот будет осуществляться на тот же угол и в том же направлении. Т. е. последнее из уравнений движения плоской фигуры является инвариантным (независимым) от выбора полюса. Значит и угловая скорость как производная от угла поворота не зависит от выбора полюса. Поступательное движение можно принять за переносное, а вращательное — за относительное.

Теорема о скоростях плоской фигуры

Скорость произвольной точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости точки во вращательном движении вокруг полюса.

Подвижную систему координат выберем так, чтобы начало её совпадало с точкой А, принятой за полюс (рис.1.11). Рассмотрим движение произвольной точки В. Эта точка совершает составное движение, — поступательное вместе с подвижной системой координат и вращательное вокруг полюса. Согласно теореме сложения скоростей точки в составном движении, абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_B^e + \overline{v}_B^r .$$

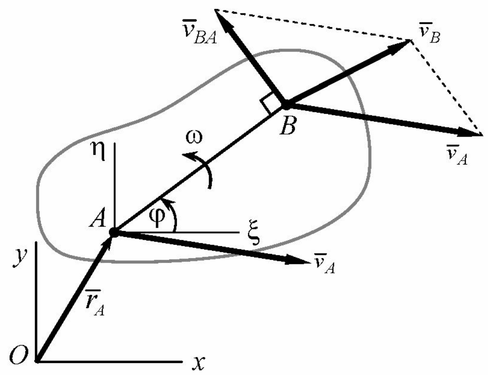


Рис. 1. 11. Скорости точек в плоском движении твердого тела

Но переносное движение является поступательным. Все точки, участвующие в нём, имеют одинаковые скорости, равные скорости полюса. Относительная скорость — это скорость во вращении точки В вокруг полюса.

$$\overline{v}_B^e = \overline{v}_A ; \quad \overline{v}_B^r = \overline{v}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{AB} .$$

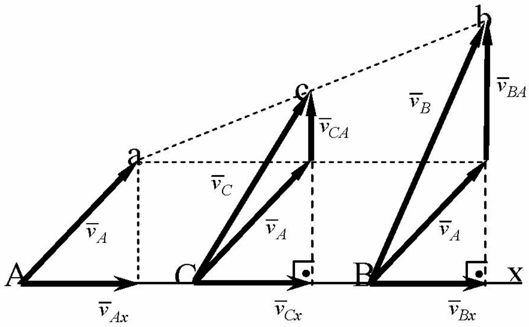
Поэтому абсолютная скорость точки "B" может быть представлена в виде суммы

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}.$$

Из доказанной теоремы вытекают два следствия:

- проекции скоростей точек плоской фигуры, расположенных на одной прямой, на направление этой прямой, равны друг другу;
- концы векторов скоростей точек прямолинейного отрезка на плоской фигуре располагаются на одной прямой и делят её на части, пропорциональные расстояниям между точками.

Эти следствия очевидны и иллюстрируются рис.1.12



$$\overline{v}_{BA} \perp \overline{AB},\ \overline{v}_{CA} \perp \overline{CA},$$
$$v_{Ax} = v_{Cx} = v_{Bx},$$
$$v_{BA} = \omega\, AB,$$
$$v_{CA} = \omega\, AC,$$
$$\frac{ac}{cb} = \frac{AC}{CB}$$

Рис. 1. 12. Теорема о сложении скоростей (следствия)

Мгновенный центр скоростей

В любой момент времени в плоскости фигуры при её непоступательном плоском движении существует одна единственная точка, скорость которой равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей (МЦС).

Пусть скорость точки А плоской фигуры известна и равна $\overline{v}_A$. Разложим движение на поступательное вместе с точкой А и вращение вокруг этой точки. Согласно теореме сложения скоростей (рис.1.13)

$$\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{v}_{PA}.$$

Будем искать положение такой точки, у которой скорость в данный момент времени равна нулю. Поэтому

$$\overline{v}_{PA} = \overline{\omega} \times \overline{AP} = -\overline{v}_A .$$

Из свойств векторного произведения следует, что вектор $\overline{AP}$ перпендикулярен векторам угловой скорости $\overline{\omega}$ и скорости $\overline{v}_A$. Расстояние от точки А до искомой точки определится формулой

$$AP = \frac{v_A}{\omega}$$

Найденная таким образом точка "Р" и является мгновенным центром скоростей.

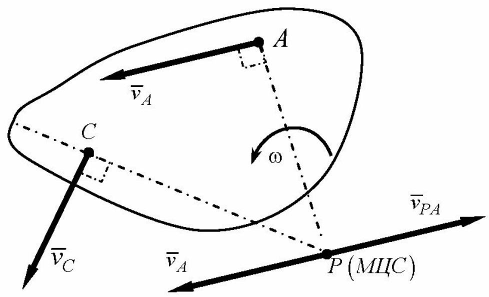


Рис. 1. 13. Мгновенный центр скоростей

Очевидно, если за полюс взять другую точку плоской фигуры, допустим точку С, то, согласно доказанному выше, МЦС. должен находиться на перпендикуляре, проведённом из точки С к скорости этой точки (рис.1.13). Таким образом, МЦС. есть точка пересечения перпендикуляров к скоростям точек плоской фигуры.

Если теперь за полюс принять точку Р, то переносная скорость любой другой точки будет равна нулю. Тогда абсолютная скорость произвольной точки плоской фигуры будет равна её скорости во вращательном движении около МЦС.

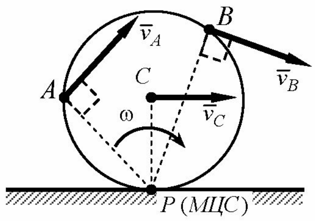
Зная положение МЦС и угловую скорость плоской фигуры, можно определить скорость любой точки в данный момент времени так же как определяется скорость точки вращающегося тела. Как уже было сказано, МЦС определяется для данного положения плоской фигуры. В соседнем положении мгновенным центром скоростей является другая точка.

Свойства мгновенного центра скоростей:

$$(\cdot)P - МЦС, \quad \bar{v}_P\big|_t = 0, \quad \omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_C}{PC} \qquad \begin{array}{l} \bar{v}_A \perp \overline{AP},\ v_A = \omega\ AP, \\ \bar{v}_C \perp \overline{CP},\ v_C = \omega\ CP, \end{array}$$

Примеры определения МЦС.

При качении колеса радиуса r по шероховатой поверхности без проскальзывания, МЦС находится в точке касания колеса с неподвижной поверхностью



$$\omega = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_C}{r}, \quad v_A = \omega AP, \quad v_B = \omega BP$$

Если скорости двух точек плоской фигуры параллельны, но не равны друг другу, то (см. рис.1.14 а, в)

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}$$

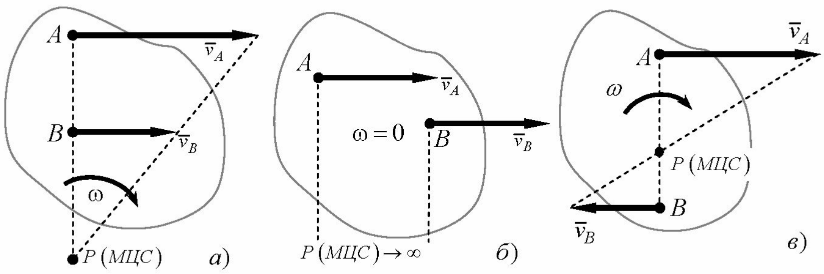


Рис. 1. 14. Скорости точек в плоском движении твердого тела

В случае равенства параллельных скоростей (см. рис.1.14 б) МЦС. находится в бесконечности.

Угловая скорость фигуры при этом равна нулю. Скорости всех точек равны. Говорят, что фигура совершает в рассматриваемый момент времени мгновенно поступательное движение, которое отличается от поступательного движения тем, что ускорения различных точек при этом не обязательно равны:

$$AP = BP \to \infty, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{\infty} = 0.$$

Если скорости двух точек антипараллельны, то (см. рис.1.14 в)

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Теорема об ускорениях точек плоской фигуры

Ускорение произвольной точки твёрдого тела, участвующего в плоском движении, можно найти как геометрическую сумму ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении вокруг полюса.

Для доказательства этого положения используем теорему сложения ускорений течки в составном движении. Примем за полюс точку A. Подвижную систему координат будем перемещать поступательно вместе с полюсом (рис.1.15 а). Тогда относительным движением будет вращение вокруг полюса. Известно, что кориолисово ускорение в случае переносного поступательного движения равно нулю, поэтому

$$\overline{a} = \overline{a}^e + \overline{a}^r.$$

Т.к. в поступательном движении ускорения всех точек одинаковы и равны ускорению полюса, имеем $\overline{a}_B^e = \overline{a}_A$.

Ускорение точки при движении по окружности удобно представить в виде суммы центростремительной и вращательной составляющих:

$$\overline{a}_B^r = \overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}.$$

Следовательно

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{ц} + \overline{a}_{BA}^{вр}.$$

Направления составляющих ускорения $(\cdot)B$ показаны на рис.1.15 а.

Нормальная (центростремительная) составляющая относительного ускорения определяется формулой

$$\overline{a}^{\text{n}}_{BA} = \overline{a}^{ц}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{v}_{BA} = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{AB} \right)$$

Величина его равна $a^{ц}_{BA} = \omega^2\, AB$ Вектор $\overline{a}^{ц}_{BA}$ направлен вдоль отрезка АВ к полюсу А (центром вращения $(\cdot)B$ вокруг $(\cdot)A$ является$(\cdot)A$).

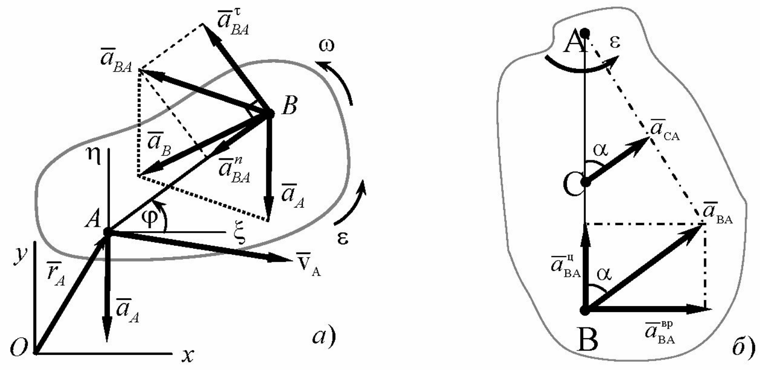


Рис. 1. 15. Теорема о сложении ускорений (а) ее следствия (б)

Касательная (вращательная) составляющая относительного ускорения определяется формулой

$$\overline{a}^{\tau}_{BA} = \overline{a}^{вр}_{BA} = \overline{\varepsilon} \times \overline{AB}\,.$$

Модуль этого ускорения находится через угловое ускорение $a^{вр}_{BA} = \varepsilon\, AB$.

Вектор $\overline{a}^{вр}_{BA}$ направлен перпендикулярно к АВ в сторону углового ускорения (в сторону угловой скорости, если движение ускоренное и в противоположную сторону вращения, если движение замедленное).

Величина полного относительного ускорения определяется по теореме Пифагора:

$$a_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Вектор относительного ускорения любой точки плоской фигуры отклонён от прямой, соединяющей рассматриваемую точку с полюсом на угол α, определяемый формулой

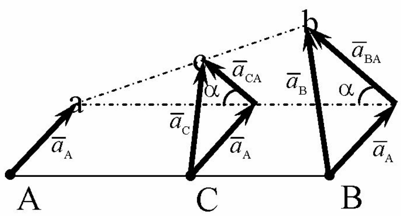
$$tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

На рис.1.15 б показано, что этот угол одинаков для всех точек тела.

Следствие из теоремы об ускорениях.

Концы векторов ускорений точек прямолинейного отрезка на плоской фигуре лежат на одной прямой и делят её на части, пропорциональные расстояниям между точками.

Доказательство этого утверждения следует из рисунка:



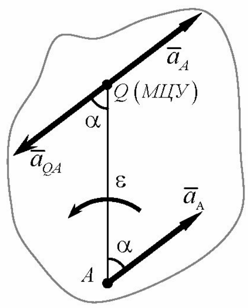
$$\frac{a_{BA}}{a_{CA}} = \frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}; \quad \overline{a}_{CA} \parallel \overline{a}_{BA}.$$

Методы определения ускорений точек тела при плоском его движении идентичны соответствующим методам определения скоростей.

Мгновенный центр ускорений

В любой момент времени в плоскости движущейся фигуры существует одна единственная точка, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).

Доказательство следует из способа определения положения этой точки. Примем за полюс точку А, предполагая известным её ускорение. Раскладываем движение плоской фигуры на поступательное и вращательное. Пользуясь теоремой сложения ускорений, записываем ускорение искомой точки и приравниваем его нулю.



$$\overline{a}_Q = \overline{a}_A + \overline{a}_{QA}$$

Отсюда следует, что $\overline{a}_A = -\overline{a}_{QA}$, т. е. относительное ускорение точки Q равно ускорению полюса А по величине и направлено в противоположную сторону. Это возможно только в том случае, если углы наклона относительного ускорения и ускорения полюса А к прямой, соединяющей точку Q, с полюсом А одинаковы.

$$tg\ \ \alpha = \frac{a_{QA}^{вр}}{a_{QA}^{ц}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},\ AQ = \frac{a_{QA}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \overline{a}_Q = 0\,.$$

Примеры нахождения МЦУ.

Рассмотрим способы нахождения положения МЦУ.

Пример №1: известны $\overline{a}_A,\ \varepsilon,\omega\ \ \overline{a}_B$ *(рис.1.16 а).*

Определяем угол $\alpha = arctg\left(\varepsilon/\omega^2\right)$. Откладываем угол α в направлении углового ускорения (т. е. в сторону вращения при ускоренном вращении и против — при замедленном), от направления известного ускорения точки и строим луч. На построенном луче откладываем отрезок длиной AQ.

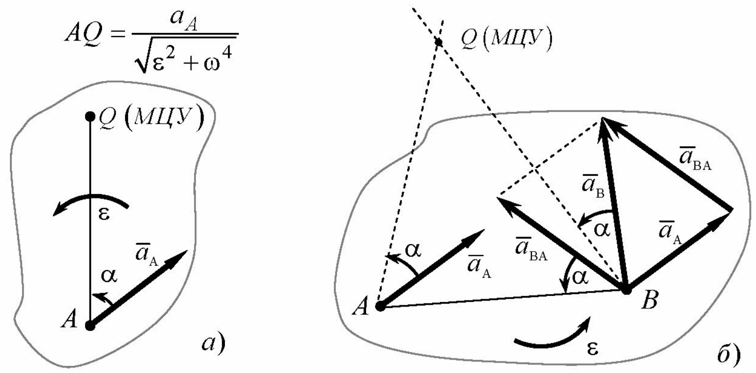


Рис. 1. 16. Примеры нахождения МЦУ: пример №1 (а), пример№2 (б)

Пример № 2. Известны ускорения двух точек А и В: $\overline{a}_A и \overline{a}_B$ *(рис.1.16 б).*

Одну из точек с известным ускорением принимаем за полюс и определяем относительное ускорение другой точки путём геометрических построений. Измерением находим угол α и под этим углом проводим лучи от известных ускорений. Точка пересечения этих лучей является МЦУ. Угол откладывается от векторов ускорений в ту же сторону, в какую идёт угол от вектора относительного ускорения к прямой ВА.

Следует отметить, что МЦУ и МЦС разные точки тела, причём ускорение МЦС не равно нулю и скорость МЦУ не равна нулю (рис 1.17).

$$\bar{v}_C = const \Rightarrow \bar{a}_C = 0,\ \varepsilon = 0,\ (\cdot)C \to МЦУ \Rightarrow$$

$$\alpha = 0, a_P = \omega^2 CP, \quad \bar{v}_P = 0, \quad (\cdot)P \to МЦС.$$

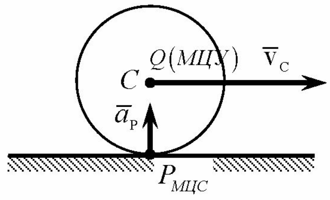


Рис. 1. 17. Положение МЦС и МЦУ в случае качения катка без скольжения

В тех случаях, когда ускорения точек параллельны друг другу возможны следующие частныйслучаи нахождения МЦУ (рис.1.17)

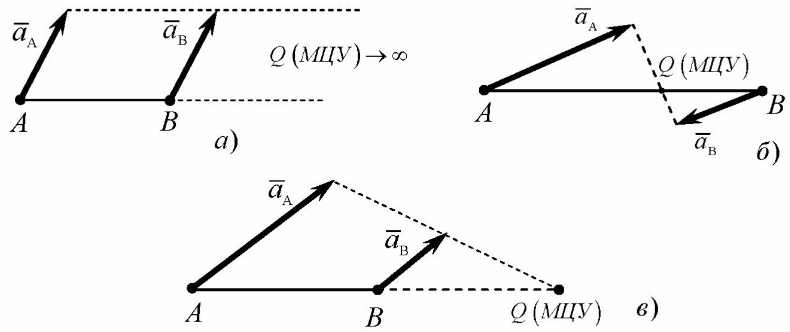


Рис. 1. 18. Частные случаи нахождения МЦУ:

а) ускорения двух точек параллельны и равны; б) ускорения двух точек антипараллельны; в) ускорения двух точек параллельны, но не равны

СТАТИКА

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

Основные понятия статики, область их применения

Статика — раздел механики, изучающий условия равновесия материальных тел и включающий в себя учение о силах.

Говоря о равновесии, надо помнить, что “всякий покой, всякое равновесие относительны, они имеют смысл только по отношению к той или иной определенной форме движения”. Например, тела, покоящиеся на Земле, движутся вместе с ней вокруг Солнца. Более точно и правильно следует говорить об относительном равновесии. Условия равновесия различны для твердых, жидких и газообразных, деформируемых тел.

Большинство инженерных сооружений можно считать малодеформируемыми или жесткими. Абстрагированием можно ввести понятие абсолютно твердого тела: расстояния, между точками которого не изменяются с течением времени.

В статике абсолютно твердого тела решатся две задачи:

- сложение сил и приведение системы сил к простейшему виду;
- определение условий равновесия.

Силы имеют различную физическую природу, часто неясную до конца и в настоящее время. Вслед за Ньютоном, будем понимать силу как количественную модель, меру взаимодействия материальных тел.

Модель силы по Ньютону определяется тремя главными характеристиками: величиной, направлением действия и точкой ее приложения. Опытным путем установлено, что введенная таким путем величина имеет векторные свойства. Более подробно они рассматриваются в аксиомах статики. В международной системе единиц СИ, используемой в соответствии с ГОСТом, единицей измерения силы является ньютон (Н). Изображение и обозначение сил показано на рис.2.1 а

Совокупность сил, действующих на какое-либо тело (или систему тел) называется системой сил.

Тело, не скрепленное с другими телами, которому можно сообщить движение в любом направлении, называется свободным.

Система сил, полностью заменяющая другую систему сил, действующую на свободное тело, не изменяя при этом состояния движения или покоя, называется эквивалентной.

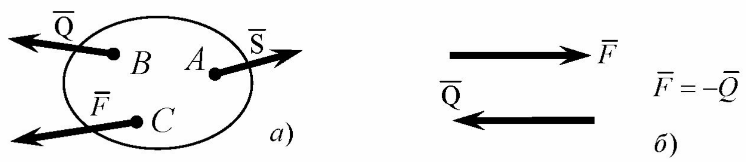


Рис. 2. 1. Основные понятия о силах

Система сил, под действием которой тело может находиться в состоянии покоя, называется эквивалентной нулю или уравновешенной.

Одна сила, эквивалентная системе сил, называется ее равнодействующей. Равнодействующая существует не всегда, например, в случае изображенном на рисунке ее не существует.

Одна сила, равная по величине равнодействующей, но противоположно ей направленная, называется уравновешивающей для исходной системы сил (рис.2.1 б).

Силы, действующие между частицами одного тела, называются внутренними, а действующие со стороны других тел — внешними.

Аксиомы статики

Аксиома о равновесии системы двух сил.

Свободное, абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил только в том случае, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной линии действия в противоположные стороны.

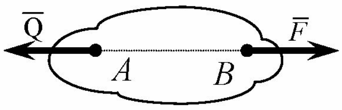


Рис. 2. 2. Аксиома о равновесии двух сил

Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы сил эквивалентной нулю.

Если к системе сил добавить (отбросить) другую систему, эквивалентную нулю, то полученная система будет эквивалентна первой (рис.2.3 а).

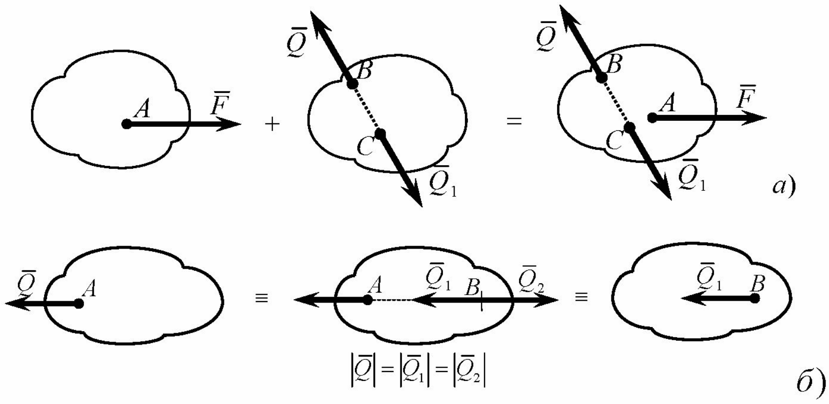


Рис. 2. 3. Аксиома одобавлении (отбрасывании) системы сил эквиваленной нулю

Основываясь на этой аксиоме, можно переносить силу вдоль линии ее действия в пределах абсолютно твердого тела. В этом случае векторы, обозначающие силы, теряют свое наименование “приложенных” к определенной точке и становятся "скользящими" (рис. 2.3 б)

Аксиома параллелограмма сил

Совокупность сил, приложенных к одной точке, может быть заменена одной силой в соответствии с правилом параллелограмма или треугольника. И наоборот, одна сила может быть разложена на совокупность нескольких сил, приложенных в той же точке.

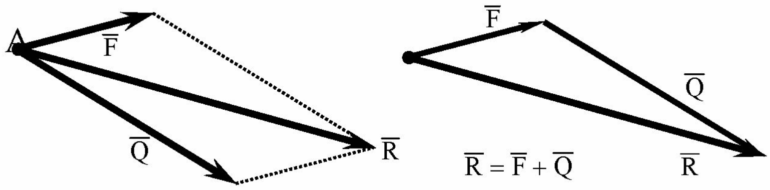


Рис. 2. 4. Сложение двух сил

Опытные данные, лежащие в основе этой аксиомы, дают основание считать силу векторной величиной. Вектор характеризуется величиной, направлением, точкой приложения, и складывается с другими векторами по закону параллелограмма.

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия.

Следующей аксиомой является то, что обычно называют третьим законом Ньютона: два тела взаимодействуют между собой с силами, равными по величине, противоположными по направлению и приложенными к различным взаимодействующим телам. На основе этой аксиомы строится метод решения задач, называемый методом сечений.

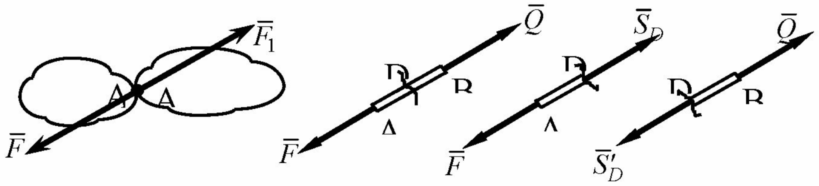


Рис. 2. 5. Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

Аксиома затвердевания.

Существенные сведения о равновесии деформируемых тел можно получить, воспользовавшись принципом отвердевания: если деформируемое тело находится в равновесии, то замена его или отдельных его частей соответствующими абсолютно твердыми телами не изменяет первоначального состояния равновесия. То есть условия равновесия абсолютно твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия деформируемого тела.

Аксиома связей

Тела, равновесие которых изучается, в большинстве случаев контактируют с другими окружающими телами, ограничивающими свободу данного тела. Тела, ограничивающие свободу данного тела, являются по отношению к нему связями. Воздействия связей на тело называются реакциями связей. Мысленно отбросив все связи и заменив их воздействие реакциями, получим свободное тело, на которое действуют как приложенные (активные) так и реактивные силы (реакции связей). Этот прием имеет название принципа освобождаемости от связей.

Ниже на рис.2.6 – 2.10 представлены примеры связей и их реакций

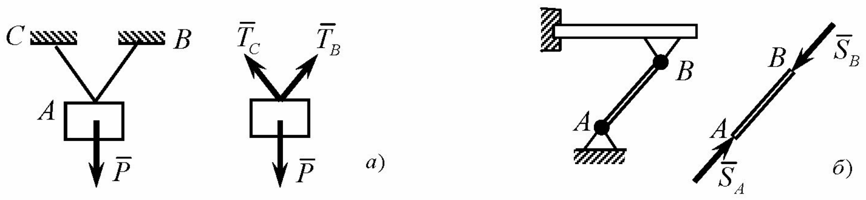


Рис.2.6. Натянутые гибкие нити (а) и стержни (б)

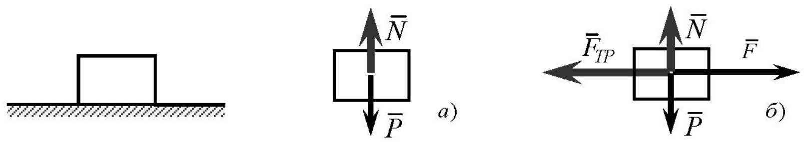


Рис. 2.7 Идеально гладкая (а) и шероховатая (б) поверхности (контакт по поверхности)

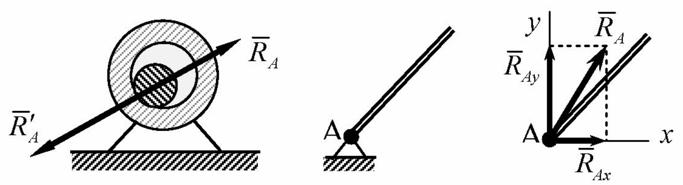


Рис. 2.8 Неподвижная цилиндрическая шарнирная опора

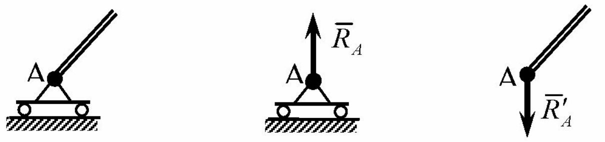


Рис. 2.9 Подвижная цилиндрическая шарнирная опора (опора на каток)

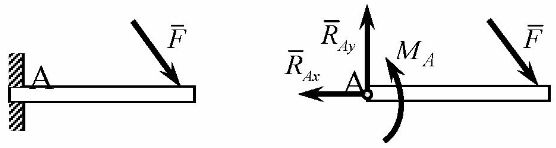


Рис. 2.10 Жесткая заделка

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Сложение и разложение сил. Проекция силы на ось и на плоскость.

В соответствии с аксиомой сложения сил, две силы, приложенные к одной точке можно заменить одной — равнодействующей, которая находится по правилу параллелограмма или по правилу треугольника. Легко обобщить это правило на тот случай, когда к одной точке приложено более двух сил. Для нахождения их равнодействующей необходимо из конца первого вектора провести второй вектор и т. д. Поясним это на рис.2.11.

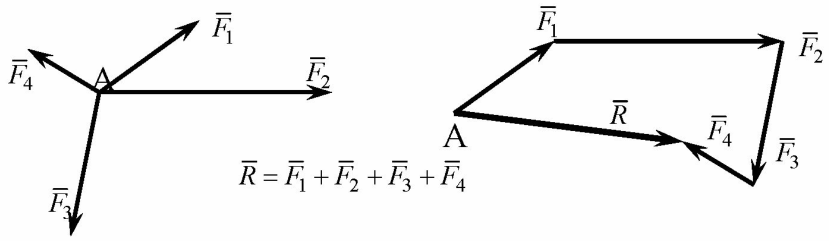


Рис.2.11 Равнодействующая сходящейсясистемы сил

Полученный многоугольник называется силовым, замыкающая сторона которого — вектор $\bar{R}$, определяет вектор равнодействующей, направлен из начала первого вектора силы в конец последнего вектора силы.

Решение задачи об определении суммы нескольких векторов (вектора $\bar{R}$) является единственным и не зависит от того, в каком порядке складываются слагаемые векторы.

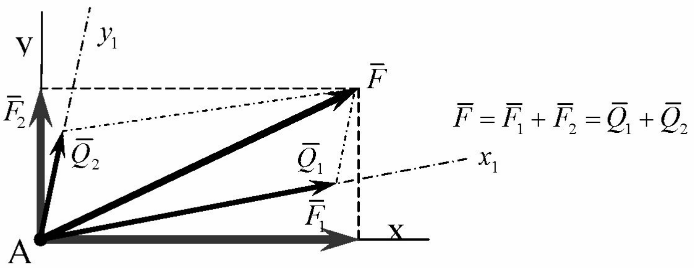


Рис.2.12 Разложение силы на составляющие

Противоположный по смыслу алгоритм — разложение векторов, не имеет единственного решения, до тех пор, пока не заданы сами направления разложения сил.

Например, силу $\overline{F}$, расположенную в плоскости (рис.2.12), можно разложить по взаимно перпендикулярным осям Ax и Ay, а можно и по любым другим Ax_1 и Ay_1, При этом на оси Ax_1 и Ay_1, наложено всего одно условие — они не должны быть параллельны друг другу. Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ или $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ называются составляющими силы $\overline{F}$.

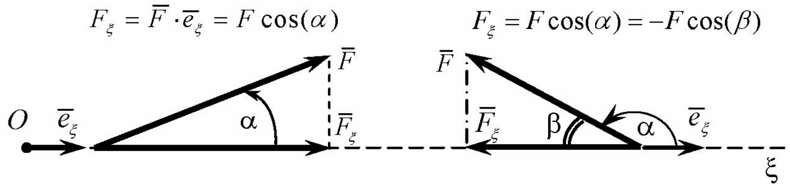


Рис.2.13 Проекции силы на плоскости

Рассмотрим понятие проекции силы на ось. Проекцией силы на заданную ось, например $O\,\xi$, называется скалярное произведение вектора силы $\overline{F}$ на единичный вектор $\overline{e}_\xi$, характеризующий положительное направление оси, т. е.

$$F_\xi = \overline{F} \cdot \overline{e}_\xi = F\cos(\alpha)$$

Угол α находится между положительным направлением оси $O\,\xi$ и направлением вектора силы $\overline{F}$. В том случае, когда $90^o < \alpha < 270^o$ проекция $F_\xi < 0$, т. к. $\cos(\alpha) < 0$. Модуль этой проекции удобно вычислять через угол $\beta = 180^o - \alpha$. В соответствии с определением проекции силы $\overline{F}$ и скалярного произведения векторов можно записать

$$\overline{F}_\xi = F_\xi\,\overline{e}_\xi = F\cos(\alpha)\,\overline{e}_\xi = -F\cos(\beta)\,\overline{e}_\xi$$

Вернемся к вопросу о разложении силы и рассмотрим эту процедуру в пространственном случае. Часто встречаются два варианта разложения: в первом случае (рис.2.13 а) ориентация вектора в пространстве задана двумя углами α — между осью Ox и направлением составляющей силы $\overline{F}$, лежащей в плоскости yOx. и углом γ — между вектором $\overline{F}$ и его составляющей вдоль оси Oz; во втором случае (рис.2.13 б) положение вектора $\overline{F}$ определяется тремя углами между направлением вектора $\overline{F}$ и положительными направлениями соответствующих осей: $\beta,\ \gamma,\ \varphi$.

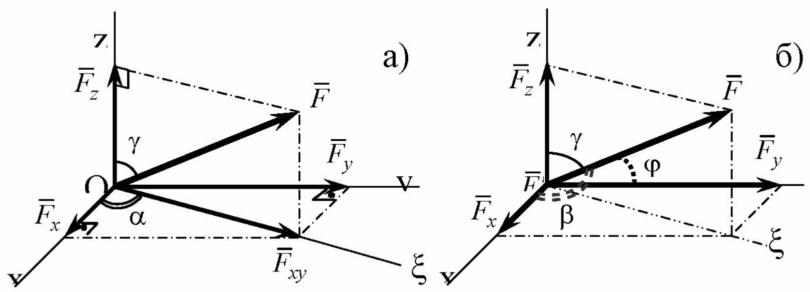


Рис.2.13 Проекции силы впространстве

Вначале разложим вектор $\overline{F}$ по двум направлениям Oz и $O\xi$. Ось $O\xi$ расположена в плоскости, проходящей через вектор силы $\overline{F}$ и ось Oz:

$$\overline{F} = \overline{F}_z + \overline{F}_{xy}; \qquad F_z = F\cos(\gamma), \qquad F_{xy} = F\sin(\gamma).$$

Вектор $\overline{F}_{xy}$ раскладывается по горизонтальным осям Ox и Oy.

$$\overline{F}_{xy} = \overline{F}_x + \overline{F}_y; \quad F_x = F_{xy}\cos(\alpha) = F\sin(\gamma)\cos(\alpha),$$
$$F_y = F_{xy}\sin(\alpha) = F\sin(\gamma)\sin(\alpha).$$

Окончательно: $$\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y + \overline{F}_z$$

Последняя формула будет справедлива и при втором способе задания ориентации вектора $\overline{F}$. В этом случае известны углы между вектором $\overline{F}$ и направлением осей Ox; Oy и Oz: $\beta,\ \gamma,\ \varphi$. По определению проекции силы на ось имеем

$$F_x = \overline{F}\cdot\overline{i} = \overline{F}_x\cdot\overline{i} = F\cos(\beta),$$

$$F_y = \overline{F}\cdot\overline{j} = \overline{F}_y\cdot\overline{j} = F\cos(\varphi),\quad F_z = \overline{F}\cdot\overline{k} = \overline{F}_z\cdot\overline{k} = F\cos(\gamma)$$

Введённые понятия позволяют перейти к условиям равновесия системы сходящихся сил.

Сходящаяся система сил. Условия равновесия систем сходящихся сил.

Сходящейся называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются (сходятся) в одной точке.

Перенося силы вдоль линий их действия можно собрать сходящуюся систему в одной точке — точке пересечения линий действия сил. Далее, находим равнодействующую такой системы сил. Она равна векторной сумме этих сил. Система сходящихся сил будет уравновешенной (эквивалентной нулю) в том случае, когда ее равнодействующая равна нулю, т. е. уравнение $\sum\limits_k \overline{F}_k = 0$ является необходимым и достаточным условием равновесия системы сходящихся сил.

В плоском случае векторное условие равновесия эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые мы получим, взяв проекции векторного равенства на оси, лежащие в плоскости действия сил:

$$\sum_k F_{k_X} = 0,\ \sum_k F_{k_Y} = 0$$

В трехмерном случае к этим уравнениям добавится еще одно независимое уравнение $\sum\limits_k F_{k_Z} = 0$

Следует подчеркнуть независимость этого числа (2 — в плоском и 3 — в пространственном случаях) уравнений. Можно составить сколько угодно подобных уравнений, выбрав в качестве осей какие угодно линии, но использовать можно только два (или три — в пространственном случае) любые из них.

ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ.

Момент силы относительно точки на плоскости

Если к телу, имеющему закрепленную точку, приложить силу, то она будет оказывать вращательное действие.

Меру вращательного действия силы называют моментом силы. Алгебраический момент силы относительно данной точки равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от данной точки до линии действия силы. Это расстояние называют плечом силы.

Вращательное действие силы принято считать положительным, если оно направлено против часовой стрелки. Момент силы зависит от: модуля силы; плеча силы; положения плоскости поворота; направления поворота в этой плоскости и выражается формулой (рис.2.14)

$$M_0\left(\bar{F}\right) = \pm F\,d = \pm F\,OA\sin\left(\alpha\right)$$

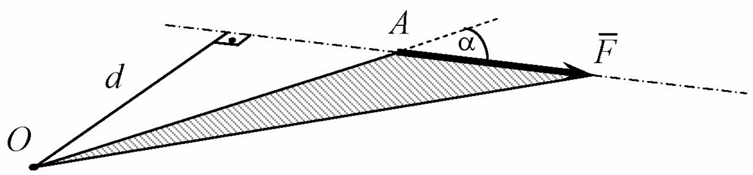


Рис.2.14 Алгебраический момент силы относительно точки на плоскости

Очевидно, что момент силы не меняется при переносе ее вдоль линии действия.

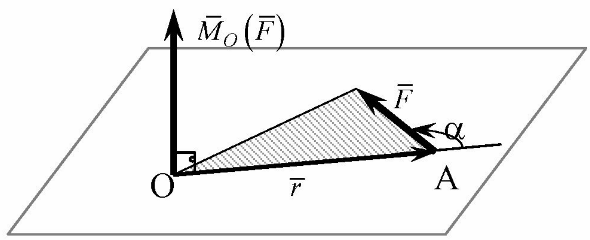


Рис.2.15 Векторное представление момента силы относительно точки

Алгебраический момент силы равен нулю только в том случае, когда равна нулю сила или линия ее действия проходит через точку, относительно которой определяется момент.

Векторное представление момента силы

Положение плоскости в пространстве определяется вектором, направленным перпендикулярно к ней (рис.2.15). Если модуль этого вектора принять равным модулю момента, и условиться направлять его в ту сторону, откуда вращательный эффект действия силы виден против движения стрелки часов, то такой вектор полностью определит все элементы, характеризующие момент силы относительно данного центра. Для момента силы относительно данного центра можно записать векторное соотношение

$$\bar{M}_O\left(\bar{F}\right)=\bar{r}\times\bar{F} \quad \Rightarrow \quad M_O\left(\bar{F}\right)=F\,r\sin\left(\widehat{\bar{r},\bar{F}}\right) \quad \Rightarrow \quad M_O\left(\bar{F}\right)=F\,r\sin\left(\alpha\right)$$

Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно данной оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

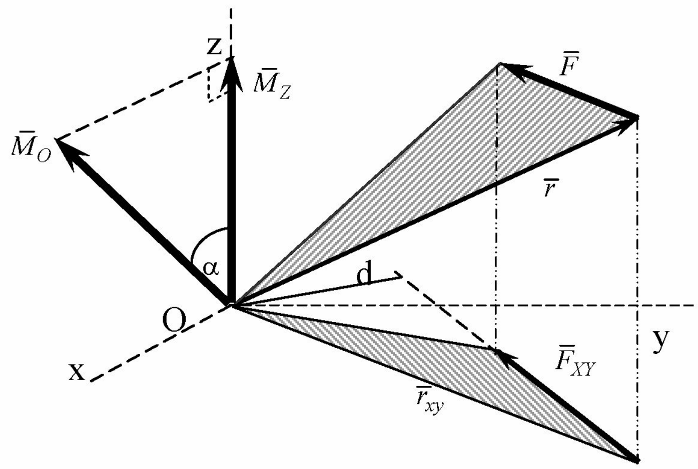


Рис.2.16 Момент силы относительно точки и оси

Момент силы относительно оси равен проекции вектора момента на эту ось. Примеры вычисления момента силы относительно центра и относительно оси приведены на рис.2.16

$$\bar{M}_z\left(\bar{F}\right)=M_z\left(\bar{F}\right)\bar{k}=\bar{r}_{xy}\times\bar{F}_{xy},\ \left|\bar{M}_z\left(\bar{F}\right)\right|=\left|\bar{F}_{xy}\right|\ d\ ,M_z\left(\bar{F}\right)=M_O\left(\bar{F}\right)\ \cos(\alpha).$$

Момент силы относительно оси равен нулю если:

- Вектор силы параллелен оси,
- Вектор силы пересекает ось (плечо силы равно нулю).

Пара сил. Момент пары

Две равные по величине и противоположно направленные силы образуют пару сил, если линии их действия не совпадают (рис.2.17).

Пара сил характеризуется плоскостью действия, направлением вращательного действия, величиной момента пары.

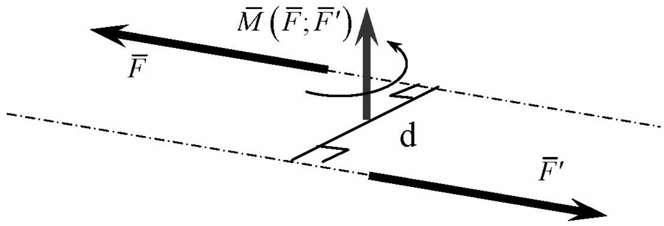


Рис.2.17 Пара сил, момент пары

Силы пары не образуют уравновешенную систему сил, хотя геометрическая сумма сил пары равна нулю.

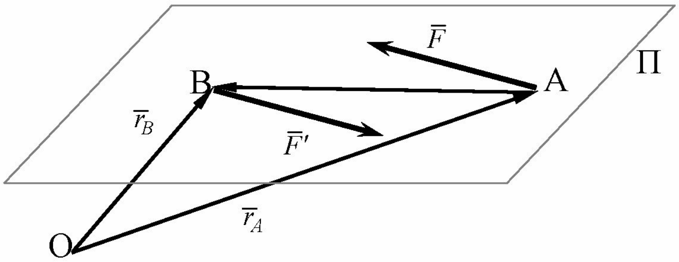
Сумма моментов сил, составляющих пару, не зависит от выбора центра и равна произведению силы пары на плечо пары.

Докажем эту теорему: пусть в плоскости "П" действует пара сил ($\bar{F}$; $\bar{F}'$).

Определим вектор-момент пары, как сумму моментов каждой из сил, относительно одного и того же центра О, выбранного произвольно. Учтем, что силы пары противоположны по направлению$\left(\bar{F}=-\bar{F}'\right)$. Радиусы- векторы точек приложения сил пары относительно центра O связаны очевидным соотношением

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB},$$
$$\bar{M}\left(\bar{F};\ \bar{F}'\right) = \bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times \bar{F}' = \left(\bar{r}_A - \bar{r}_B\right) \times \bar{F}' = -\overline{AB} \times \bar{F}$$

или $$\bar{M}\left(\bar{F};\ \bar{F}'\right) = \overline{BA} \times \bar{F} = \overline{AB} \times \bar{F}' = \bar{M}_B\left(\bar{F}\right) = \bar{M}_A\left(\bar{F}'\right)$$



Полученный вектор является моментом пары. Его модуль равен произведению силы пары на расстояние между линиями действия сил пары (см. рис.), называемое плечом пары

$$\left|\bar{M}\left(\bar{F};\ \bar{F}'\right)\right| = F\,d = F'\,d$$

Свойства пар сил. Сложение пар сил.

Свойства пар сил определяются рядом теорем, которые приводятся без доказательств:

- Две пары эквивалентны, если их векторные моменты равны по величине и одинаково направлены.
- Действие пары на тело не изменится, если ее перенести в плоскости действия на любое место.
- Действие пары на тело не изменится, если ее перенести из плоскости действия в параллельную ей плоскость.
- Действие пары на тело не изменится, если увеличить (уменьшить) величину силы пары, одновременно уменьшая (увеличивая) во столько же раз плечо пары.

Вывод: векторный момент пары сил, действующей на твердое тело, есть свободный вектор, т. е. его можно приложить в любой точке твердого тела.

Рассмотрим сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Докажем теорему:

Система пар, произвольно расположенных в пространстве, эквивалентна одной паре с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар.

Возьмем две пары ($\bar{F}_1; \bar{F}_1'$) и ($\bar{F}_2; \bar{F}_2'$), расположенные на пересекающихся под произвольным углом плоскостях. Плечи пар примем равными соответственно d_1 и d_2. На линии пересечения плоскостей отметим произвольный отрезок AB и приведем каждую из слагаемых пар к плечу AB. Произведя сложение соответствующих сил (см. рис.) $\bar{Q}_1$ с $\bar{Q}_2$ и $\bar{Q}_1'$ с $\bar{Q}_2'$, получим новую пару ($\bar{R}$; $\bar{R}'$), момент которой будет равен

$$\bar{M}\left(\bar{R};\bar{R}'\right)=\overline{AB}\times\bar{R}=\overline{AB}\times\bar{Q}_1+\overline{AB}\times\bar{Q}_2=\bar{M}\left(\bar{F}_1;\bar{F}_1'\right)+\bar{M}\left(\bar{F}_2;\bar{F}_2'\right)$$

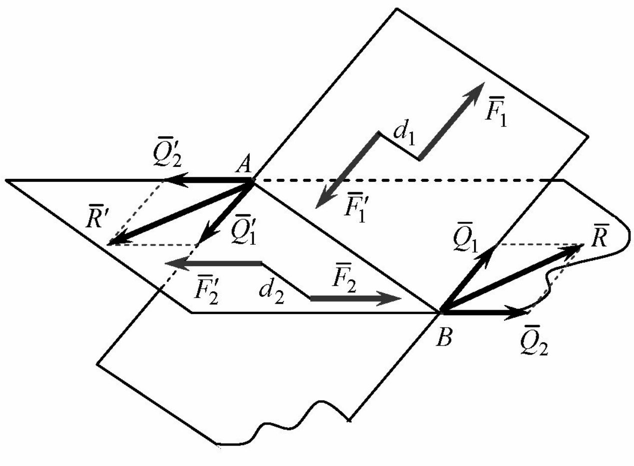


Рис.2.18 Равнодействующая пар сил

Систему пар сил, действующих на тело, можно, в соответствии с только что доказанной теоремой, заменить одной парой, равной сумме векторов моментов слагаемых пар. Следовательно, равновесие системы пар возможно только при выполнении условия

$$\sum_k \overline{M}\left(\overline{F}_K;\overline{F}'_K\right)=0$$

Проецируя приведенное векторное условие равновесия пар на любые три оси, не лежащие в одной плоскости и не параллельные друг другу, получим скалярные уравнения равновесия системы пар

$$\sum_k M_{kx}=0, \qquad \sum_k M_{ky}=0, \qquad \sum_k M_{kz}=0$$

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

Лемма о параллельном переносе силы

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твёрдого тела, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Доказательство: Пусть на тело действует сила $\overline{F}$, приложенная к некоторой точке А тела. В качестве центра приведения выберем произвольную точку 0 и приложим к ней уравновешенную систему двух сил $\{\overline{F}', \overline{F}''\}$, линии действия которых параллельны силе $\overline{F}$.

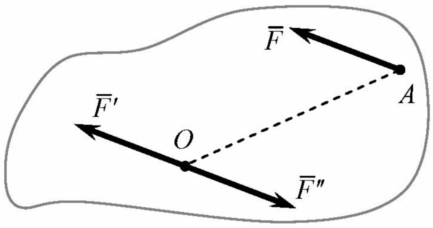


Рис.2.19 Лемма Пуансо

Каждую из этих сил возьмём равной по величине исходной силе $\overline{F}$. Очевидно, что полученная система сил эквивалентна исходной, причём силы $\overline{F}$ и $\overline{F}''$ образуют пару сил с моментом

$$\overline{M}\left(\overline{F};\ \overline{F}''\right)=\overline{OA}\times\overline{F}$$

Метод приведения силы, рассмотренный в лемме, был предложен французским математиком и механиком Луи Пуансо (1777 — 1859) и называется методом Пуансо.

Основная теорема статики

Произвольную систему сил, действующих на твёрдое тело, можно, в общем случае, привести к силе и паре сил.

Пусть на тело действуют n сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,… $\overline{F}_n$ произвольно расположенные в пространстве. Выберем произвольный центр приведения в теле. Пользуясь доказанной выше леммой, приведём каждую из сил к выбранному центру O. Получим систему сходящихся сил $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2'$,… $\overline{F}_n'$ и систему пар ($\overline{F}_1;\overline{F}_1''$), ($\overline{F}_2;\overline{F}_2''$),… ($\overline{F}_n;\overline{F}_n''$). Система сходящихся сил, как известно, эквивалентна векторной сумме

$$\overline{P} = \overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \ldots + \overline{F}_n',$$

а систему пар сил можно заменить эквивалентной парой с моментом, равным геометрической сумме моментов слагаемых пар

$$\overline{M} = \overline{M}_1\left(\overline{F}_1;\overline{F}_1''\right) + \overline{M}_2\left(\overline{F}_2;\overline{F}_2''\right) + \ldots + \overline{M}_n\left(\overline{F}_n;\overline{F}_n''\right) \text{ или}$$

$$\overline{M}_O = \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 + \ldots + \overline{r}_n \times \overline{F}_n = \overline{M}$$

Вектор $\overline{P}$ для исходной системы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, … $\overline{F}_n$ не является равнодействующей и называется главным вектором исходной системы. Вектор $\overline{M}_O$ называется главным моментом. Таким образом, исходная система заменена силой $\overline{P}$ и парой сил $\overline{M}_O$:

$$\overline{P} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k, \quad \overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k\right)$$

Сравнение понятий главного вектора и равнодействующей.

Разберем еще один вопрос — в чем состоит разница понятий главного вектора системы сил и равнодействующей? Главным вектором называют силу, равную векторной сумме всех действующих в системе сил:

$$\sum_k \overline{F}_k = 0$$

В отличие от равнодействующей, величину которой находят (когда она существует) по той же формуле, при определении главного вектора не конкретизируется точка приложения этой силы. Равнодействующая полностью заменяет собой систему сил, она эквивалентна ей. Равнодействующая не всегда существует. Простейший пример системы сил не имеющей равнодействующей — это пара сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, линии действия которых параллельны, величины равны, направления — противоположны.

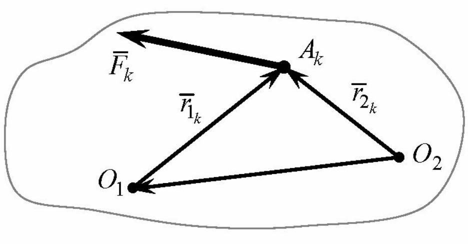
В случае неуравновешенной сходящейся системы сил равнодействующая существует. Она равна по величине главному вектору и приложена в точке пересечения линий их действия

Зависимость между главными моментами, вычисленными относительно различных центров приведения

Выберем в теле два центра приведения O_1 и O_2. Запишем выражения для главных моментов относительно этих центров

$$\overline{M}_{O_1} = \sum_k \overline{r}_{1_K} \times \overline{F}_K\ ,\ \overline{M}_{O_2} = \sum_k \overline{r}_{2_K} \times \overline{F}_K$$

Из рисунка видно, что радиус-векторы точек приложения произвольной силы $\overline{F}_k$ относительно этих центров связаны выражением



$$\overline{r}_{2_K} = \overline{O_2O_1} + \overline{r}_{1_K}$$

Подставляя его в выражение для второго главного момента, получим

$$\bar{M}_{O_2} = \sum_k \left(\overline{O_2O_1} + \bar{r}_{1_K} \right) \times \bar{F}_k = \sum_k \overline{O_2O_1} \times \bar{F}_k + \sum_k \bar{r}_{1_K} \times \bar{F}_k \Rightarrow$$

$$\bar{M}_{O_2} = \overline{O_2O_1} \times \sum_k \bar{F}_k + \sum_k \bar{r}_{1_K} \times \bar{F}_k = \overline{O_2O_1} \times \bar{P} + \bar{M}_{O_1}$$

Таким образом, главный момент системы сил относительно второго центра равен главному моменту относительно первого центра плюс момент главного вектора, приложенного к первому центру, относительно второго центра.

Инварианты системы сил

Инвариантами называются векторные или скалярные параметры, которые не зависят от преобразования координат. В системе сил, как мы видим, таким параметром является главный вектор. Его называют векторным инвариантом системы сил. Главный момент инвариантом не является, так как он различен для различных центров приведения. Однако инвариантом служит скалярное произведение главного вектора на главный момент. В самом деле

$$\bar{P} \cdot \bar{M}_{O_2} = \bar{P} \cdot \left(\overline{O_2O_1} \times \bar{R} \right) + \bar{P} \cdot \bar{M}_{O_1} = \bar{P} \cdot \bar{M}_{O_1}, \qquad \bar{P} \perp \left(\overline{O_2O_1} \times \bar{P} \right)$$

Отсюда также вытекает, что инвариантом является и проекция главного момента на направление главного вектора

$$\bar{P} \cdot \bar{M}_{O_2} = \bar{P} M_{O_2} \cos\left(\widehat{\bar{P};\bar{M}_{O_2}} \right), \qquad M_{O_2} \cos\left(\widehat{\bar{P};\bar{M}_{O_2}} \right) = M_{O_1} \cos\left(\widehat{\bar{P};\bar{M}_{O_2}} \right)$$

Частные случаи приведения системы сил к центру

Исходя из рассмотрения скалярного инварианта, все случаи приведения системы сил можно классифицировать следующим образом:

При равенстве нулю скалярного инварианта:

- Главный вектор не равен нулю ($\bar{P} \neq 0$), а главный момент равен нулю ($\bar{M}_O = 0$). Система приводится к равнодействующей, равной главному вектору;

- Главный вектор равен нулю ($\overline{P}=0$), а главный момент не равен нулю ($\overline{M}_O \neq 0$). Система приводится к паре сил с моментом, равным главному моменту системы;
- Главный вектор и главный момент не равны нулю ($\overline{P}\neq 0, \overline{M}_O \neq 0$), но угол между ними равен 90°. В этом случае возможно дальнейшее упрощение

$$\overline{M}\left(\overline{P}';\overline{P}''\right)\equiv \overline{M}_O, \quad \Rightarrow \quad \{\overline{P};\overline{P}''\}\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \{\overline{P};\overline{M}_O\}\equiv \overline{P}'$$

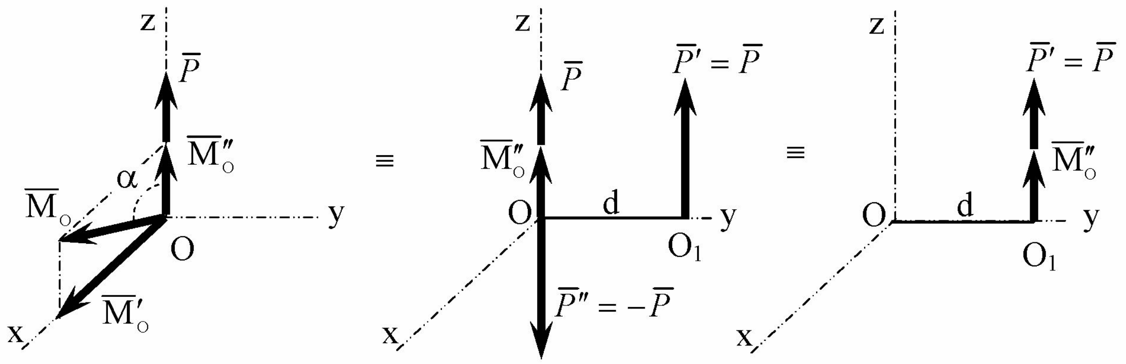
Система приводится к равнодействующей силе, но линия её действия отстоит от первоначального центра приведения на расстоянии $OO_1 = d = \dfrac{M_O}{P}$

- Главный вектор и главный момент равны нулю. Система уравновешена:

$$\overline{R}=\sum_k \overline{F}_k = 0, \ \overline{M}_O = \sum_k \overline{M}_O\left(\overline{F}_k\right)=0.$$

В случае, когда скалярный инвариант не равен нулю, полезно рассмотреть следующие варианты приведения сил:

Угол между главным вектором и главным моментом равен 0 или 180°. Такая комбинация главного вектора и главного момента называется динамой или динамическим винтом. Линия, вдоль которой действуют оба вектора называется осью динамы.



Угол между главным вектором и главным моментом произволен. В этом случае возможно упрощение

$$\bar{M}_O \equiv \{\bar{M}_O';\bar{M}_O''\} \Rightarrow \quad \bar{M}_O' \equiv \{\bar{P}';\bar{P}''\} \Rightarrow \quad \{\bar{P};\bar{P}''\} \equiv 0 \Rightarrow \quad \{\bar{P};\bar{M}_O\} \equiv \{\bar{P}';\bar{M}_O''\}$$

В этом случае система приводится к динаме, ось которой отстоит от первоначального центра приведения на расстоянии

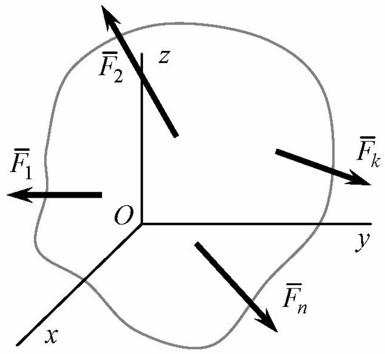
$$O_1O = d = \frac{M_O'}{P} = \frac{M_O \sin(\alpha)}{P}$$

Сведём все случаи, рассмотренные выше, в таблицу:

1	$\bar{P} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$	Равнодействующая
2	$\bar{P} = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$	Пара сил
3	$\bar{P} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, $\alpha = \pi/2$	Равнодействующая
4	$\bar{P} = 0$, $\bar{M}_O = 0$	Равновесие
5	$\bar{P} \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$, $\alpha \neq \pi/2$	Динама

Условия равновесия произвольной системы сил

Геометрические условия равновесия, как это видно из предыдущего пункта, соответствуют двум векторным уравнениям



$$\bar{P} = \sum_k \bar{F}_k = 0\,,\ \bar{M}_O = \sum_k \bar{M}_O\left(\bar{F}_k\right) = 0$$

Проектируя эти уравнения на оси декартовой системы координат, получим шесть независимых уравнений равновесия

$$\sum_k F_{k_x} = 0, \qquad \sum_k M_{Ox}\left(\bar{F}_k\right) = 0,$$
$$\sum_k F_{k_y} = 0, \qquad \sum_k M_{Oy}\left(\bar{F}_k\right) = 0,$$
$$\sum_k F_{k_z} = 0, \qquad \sum_k M_{Oz}\left(\bar{F}_k\right) = 0.$$

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на выбранные координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей.

Различные типы систем сил и условия их равновесия:

- пространственная система сходящихся сил. Выбираем начало координат совпадающее с точкой пересечения линий действия сил, входящих в рассматриваемую систему. Момент каждой из этих сил относительно любой оси, проходящей через начало отсчёта (пересекаемой линией действия силы), равен нулю. Поэтому три из шести уравнений равновесия выполнятся тождественно и условиями равновесия в этом случае будут:

$$\sum_k F_{k_x} = 0, \ \sum_k F_{k_y} = 0, \ \sum_k F_{k_z} = 0.$$

- пространственная система параллельных сил. Выбираем систему координат так, чтобы одна из осей (например, Oz) была направлена параллельно силам. Проекции сил на оси Ox и Oy равны нулю, момент любой из сил, параллельной оси, относительно этой оси равен нулю. Поэтому из шести уравнений равновесия получаем три условия:

$$\sum_k M_{Ox}\left(\overline{F}_k\right) = 0, \quad \sum_k M_{Oy}\left(\overline{F}_k\right) = 0, \quad \sum_k F_{k_z} = 0.$$

- произвольная плоская система сил. Совместим одну из координатных плоскостей (например xOy) с плоскостью действия сил, тогда, очевидно, будут тождественно равными нулю следующие параметры произвольной силы:

$$\sum_k F_{k_z} \equiv 0, \quad \sum_k M_{Ox}\left(\overline{F}_k\right) \equiv 0, \quad \sum_k M_{Oy}\left(\overline{F}_k\right) \equiv 0.$$

Поэтому условия равновесия запишутся в виде трёх уравнений:

$$\sum_k F_{k_x} = 0, \quad \sum_k F_{k_y} = 0, \quad \sum_k M_{Oz}\left(\overline{F}_k\right) = \sum_k M_O\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Теорема о моменте равнодействующей (теорема Вариньона)

Векторный момент равнодействующей рассматриваемой системы сил относительно любой точки равен сумме векторных моментов всех сил этой системы относительно той же точки.

Иными словами, если $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n\} \propto \{\bar{R}\}$, то

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_k \bar{M}_O(\bar{F}_k)$$

Для плоской системы сил данная теорема запишется в виде алгебраических моментов относительно произвольной точки на плоскости

$$M_O(\bar{R}) = \sum_k M_O(\bar{F}_k)$$

Эта теорема широко применяется в вычислениях моментов сил при решении практических задач.

ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ РАВНОВЕСИЯ

Различные формы условий равновесия

Условия равновесия произвольной плоской системы сил в виде

$$\sum_k F_{k_x} = 0, \quad \sum_k F_{k_y} = 0, \quad \sum_k M_O(\bar{F}_k) = 0.$$

называют основной формой условий.

Эта система уравнений равновесия не является единственной. Условия равновесия можно сформулировать в других, эквивалентных основной, формах.

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы алгебраических моментов всех сил системы относительно трёх любых точек в плоскости действия сил, не лежащих на одной прямой.

$$\sum_k M_A k\left(\overline{F}\right)=0,\quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right)=0,\quad \sum_k M_C\left(\overline{F}_k\right)=0.$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы моментов относительно двух точек, лежащих в плоскости действия сил, и сумма проекций всех сил на ось, не перпендикулярную линии АВ, соединяющей выбранные точки, равнялись нулю.

$$\sum_k F_{k_x}=0,\quad \sum_k M_A\left(\overline{F}_k\right)=0,\quad \sum_k M_B\left(\overline{F}_k\right)=0.$$

Статически определимые и статически неопределимые задачи

Число независимых условий равновесия определяется тем, к какому классу относится рассматриваемая система сил. Например, для произвольной плоской системы сил таких уравнений три, а для произвольной пространственной уже шесть.

Число неизвестных параметров определяется спецификой каждой задачи. В частности, оно зависит от количества и типов опор и неизвестных активных сил.

В том случае, когда число уравнений равновесия равно числу неизвестных задачи, она разрешима и называется статически определённой, в случае превышения числа неизвестных над количеством уравнений — статически неопределенной задачей. Если число неизвестных меньше числа уравнений, то либо часть уравнений тождественно удовлетворяется, либо задача переопределена (это, обычно, случаи, полученные при неправильно проведённом анализе сил) или система не находится в равновесии.

В статике абсолютно твёрдого тела рассматриваются только статически определённые задачи, т. к. для решения статически неопределённых задач нужно учитывать деформируемость тела.

Методика решения задач на равновесие пространственной системы сил

Любая задача статики изучаемого курса может быть решена по следующему плану:

- выделить тело (элемент) или систему тел, равновесие которых будем рассматривать (использование аксиомы освобождения от связей);
- расставить силы, действующие на выделенные элементы. Т. к. кроме активных сил на выделенные элементы действуют реакции отброшенных связей, то этот пункт существенно зависит от первого и, обычно, выполняется вместе с ним;
- дать анализ полученной системы сил, выяснить, является ли задача статически определённой;
- записать условия равновесия и произвести над ними действия с целью определения неизвестных;
- дать анализ полученного ответа.

РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СИЛЫ

До сих пор рассматривались силы, приложенные в одной точке, которые называются сосредоточенными. В действительности взаимодействие одного тела с другим осуществляется либо по некоторой площадке, либо по объёму тела. Пример поверхностных сил — давление воды на стенку плотины, объёмных — силы тяжести — они распределены по всему объёму тела, но часто, для удобства, мы заменяем эти силы их равнодействующей, приложенной к центру тяжести.

Распределённые силы характеризуются интенсивностью и направлением действия. Интенсивностью распределённой силы называется величина силы, приходящаяся на единицу объёма, площади или длины линии.

Силы принимаются распределёнными по линии в том случае, когда размерами тела в поперечном направлении можно пренебречь по сравнению с его длиной. Такие тела называются стержнями или балками. Распределёнными, обычно, бывают параллельные или сходящиеся силы, однако, распределёнными могут быть и пары сил.

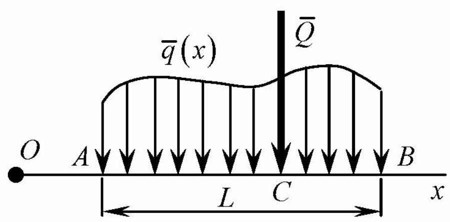
Рассмотрим вопросы замены распределённых сил сосредоточенными силами. Пусть силы распределены по отрезку AB, длиной L. Разобьём весь отрезок AB на элементарные участки Δx_k. На каждый из них действует сила равная $\overline{q}_k \ \Delta x_k$, т. к. из-за малости участка интенсивность в его пределах можно считать постоянной. Суммируя элементарные силы, найдём равнодействующую. Величина её равна главному вектору

$$\overline{Q} = \sum_k \overline{q}_k \ \Delta x_k$$

При устремлении к нулю элементарной длины Δx_k сумма сил перейдёт в интеграл

$$Q = \int_0^L q(x)\,dx\,.$$

Точка приложения равнодействующей силы определяется с помощью теоремы Вариньона:



$$-Q \cdot OC = -\sum_k \left(q_k \ \Delta x_k\right) x_k\,,$$

или при предельном переходе

$$Q \cdot OC = \int_0^L q(x)\,x\,dx$$

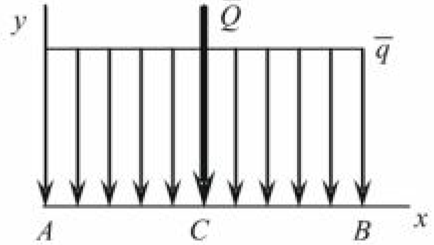
Откуда окончательно

$$OC = \frac{\int_0^L q(x)\,x\,dx}{Q}$$

Частные случаи распределенных нагрузок.

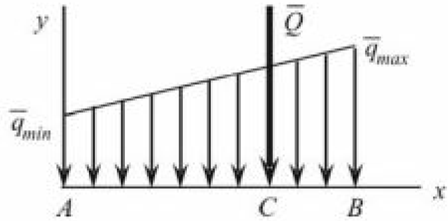
- Распределение с постоянной интенсивностью.

$$q(x) = q = const,$$
$$Q = q\ AB = q\,L,$$
$$AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}L$$



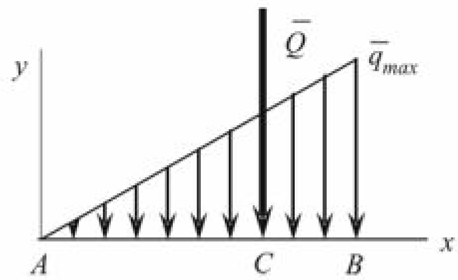
- Распределение с линейно изменяющейся интенсивностью.

$$q(x) = q_{\min} + \frac{q_{\max} - q_{\min}}{L}x,$$
$$Q = \frac{1}{2}\left(q_{\max} + q_{\min}\right)L,$$
$$AC = \frac{1}{3}\frac{2\,q_{\max} + q_{\min}}{q_{\max} + q_{\min}}L$$



- Если $\bar{q}_{\min} = 0$, то получаем треугольное распределение

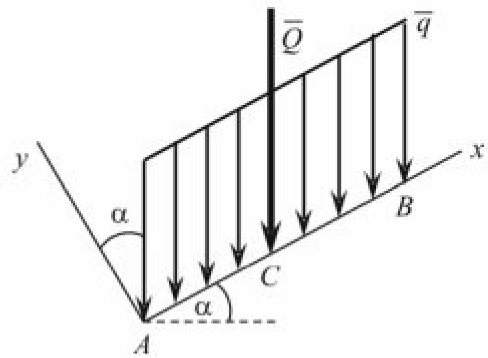
$$q(x) = q_{\max}\frac{x}{L},$$
$$Q = \frac{1}{2}q_{\max}L, \qquad AC = \frac{2}{3}L$$



Распределённая нагрузка, заданная под углом α

- Распределение с постоянной интенсивностью

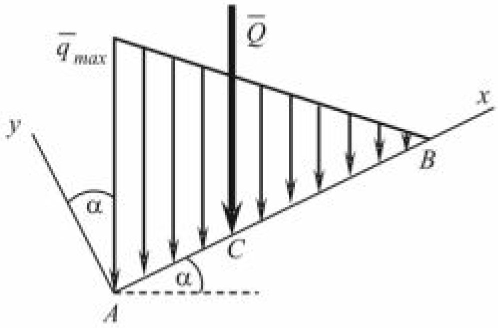
$$q(x) = q = const,$$
$$Q = q\,L,$$
$$AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}L$$



• Распределение с линейно изменяющейся интенсивностью.

$$q(x) = q_{\max}\frac{x}{L},$$

$$Q = \frac{1}{2}q_{\max}L, \quad AC = \frac{2}{3}L$$



В последних случаях равнодействующая не равна площади фигуры, образованной линией распределения интенсивности, и не зависит от угла наклона интенсивности к опорной линии.

СИЛЫ ТРЕНИЯ

Трение скольжения

Поверхности соприкасающихся тел не являются идеально гладкими. Их неровности, зацепляясь друг с другом, приводят к появлению силы трения, препятствующей проскальзыванию этих тел относительно друг друга. Это явление в одних случаях полезно, в других вредно. Например, без трения вообще невозможно движение автомобиля, пешехода,… (представьте себя на идеально гладком льду). Трение, существующее в различных узлах машин и механизмов, часто играет вредную роль и с ним борются, делая соответствующие поверхности более гладкими, смазывая их.

Трение — диссипативный процесс, сопровождающийся выделением тепла, электризацией тел, их разрушением и т. д.

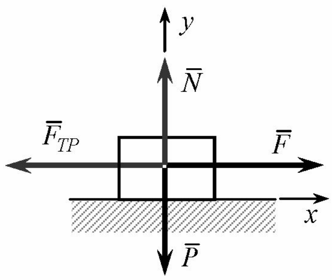
Рассмотрим основные свойства силы трения скольжения. Проведём простейший опыт. Попытаемся вывести тело из состояния покоя (см. рис.). Приложим к нему малую силу $\bar{F}$. Тело не сдвинется с места, т. е. система сил $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{F}$ и $\bar{F}_{TP}$ уравновешена.

Увеличивая силу $\bar{F}$ до некоторого предела, мы приходим к так называемому критическому состоянию: при увеличении $\bar{F}$ на бесконечно малую величину, тело выйдет из состояния покоя и начнёт двигаться. Сила трения становится меньшей силы $\overline{F}$.

$$\overline{P} + \overline{N} + \overline{F} + \overline{F}_{TP} = 0,$$

$$\sum F_{Ky} = 0 \quad N - P = 0,$$

$$\sum F_{Kx} = 0 \quad F - F_{TP} = 0. \quad \Rightarrow \qquad F_{TP} = F$$



Сила трения в состоянии покоя (неполная сила трения) вызвана малыми (~ 1 мкм) частично обратимыми перемещениями в зоне контакта, величина которых пропорциональна приложенной силе и изменяется с увеличением силы $\overline{F}$ от нуля до максимального значения, называемого силой трения.

Опыт показывает, что величина максимальной силы трения покоя не зависит от площади соприкасающихся тел. Закон трения скольжения был сформулирован Кулоном.(1736 — 1806):

$$F'_{TP} = f \ \left|\overline{N}\right|$$

Максимальное значение силы трения пропорционально давлению $\overline{N}$ тела на опорную поверхность. Коэффициент пропорциональности "f" называют коэффициентом трения скольжения.

Отметим ещё раз, что сила трения при отсутствии проскальзывания меньше, чем F'_{TP} и равна этой величине только в критический момент перехода от состояния покоя к состоянию движения:

- экспериментальные исследования позволили установить ряд свойств силы трения:
- силы трения зависят от материала и физического состояния поверхностей трущихся тел.
- трение скольжения почти не зависит от величины относительной скорости трущихся тел.

- сила трения покоя больше силы трения движения.
- трение возрастает при увеличении предварительного контакта между телами.
- предельная величина силы трения скольжения пропорциональна силе нормального давления и определяется законом Кулона

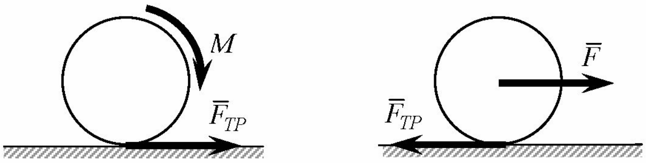
Приведём некоторые значения коэффициентов трения

Материал	**Коэфф. статического трения для поверхностей**			**Коэфф. трения движения. для поверхностей**		
	сухих	**со смазкой**	**смоченных водой**	**сухих**	**со смазкой**	**смоченных водой**
Сталь по железу	0,15	0,1	—	0,1	0,009	—
Литое железо по чугуну или бронзе	0,18	0,1	—	0,16	0,01	—
Дерево по де-	0,65	0,2	0,7	0,2—0,4	0,16-0,04	0,25

При наличии слоя смазки данная теория сухого трения не работает. В этом случае необходимо применять гидродинамику вязкой жидкости. Современные исследования показывают, что

- формулы для сил трения с постоянным коэффициентом справедливы лишь в сравнительно ограниченных областях изменения сил давления и относительных скоростей.
- в некоторых, аномальных случаях трение движения может и не быть меньшим, чем трение покоя. Примером являются материалы с высокой упругостью, например, резина.
- при увеличении скорости сила трения уменьшается, приближаясь к некоторому предельному значению.
- с увеличением удельного давления сила трения чаще всего растёт.

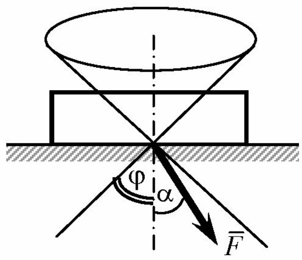
Направление силы трения при решении задач можно определить, например, так:



на соприкасающихся поверхностях выделяется точку их касания, и после определения направления скорости одной из точек касания по отношению к другой (реальное при проскальзывании или возможное при его отсутствии) сила трения направляется в противоположную сторону.

Угол и конус трения

Допустим, что силы, действующие на тело, опирающееся на плоскость, сводятся к силе трения, силе нормальной реакции и силе F. В предельном состоянии равновесия полная реакция, равная сумме сил трения и нормальной реакции, отклонена от вертикали на угол называемый углом трения. Вращая полную реакцию вокруг нормали к поверхности, получим коническую поверхность, называемую конусом трения.

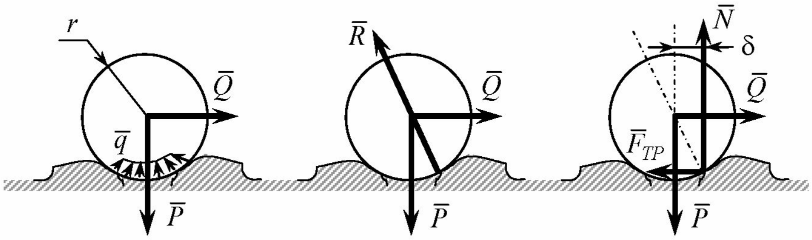


$$tg\varphi = \frac{F_{TP}}{N} = f$$

Если равнодействующая активных сил $\bar{F}$ проходит внутри конуса трения, то выполняется неравенство $\alpha < \varphi$ и тело находится в состоянии покоя. Знак равенства соответствует предельному равновесию. Если сила $\bar{F}$ располагается вне конуса трения, то тело движется.

Трение качения

При качении тела цилиндрической формы также возникает сопротивление движению, называемое трением второго рода или трением качения. Поверхность катка и опорная поверхность деформируются, и реакция опорной поверхности представляет собой систему распределённых сил, равнодействующая которых при равновесии проходит через центр катка.



При увеличении силы $\overline{Q}$ расстояние от центра катка до линии действия силы $\overline{N}$, чтобы уравновесить систему, должно увеличиваться. Но это смещение имеет известный предел, зависящий от материала соприкасающихся тел. Предельное значение силы

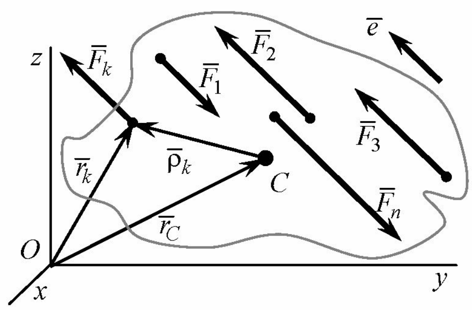
$$Q_{ПР} = \frac{\delta}{r} N$$

Если $Q < Q_{ПР}$, то каток находится в состоянии покоя, а при $Q > Q_{ПР}$ каток движется. Входящий в эту формулу размерный коэффициент δ называется коэффициентом трения качения. Он имеет размерность длины, Для шарикоподшипников $\delta = 0,001 \ см$. При качении вагонного колеса по рельсу $\delta = 0,005 \ см$. Отношение δ / r для большинства материалов меньше, чем коэффициент трения скольжения f. Поэтому в технике, где это возможно, трение скольжения заменяют трением качения.

Наибольший момент пары сил, препятствующих качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Пусть на тело действует система параллельных сил. Введём единичный вектор $\overline{e}$, параллельный линии действия сил системы. $\overline{F}_k = F_k \, \overline{e}$.



Приведём систему сил к центру С, пользуясь основной теоремой статики. Тогда главный вектор и главный момент системы можно записать в виде:

$$\overline{P} = \sum_k \overline{F}_k = \left(\sum_k F_k \right) \overline{e}, \quad \overline{M}_C = \sum_k \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k = \left(\sum_k \overline{\rho}_k F_k \right) \times \overline{e}$$

Рассмотрим случай, когда главный вектор $\overline{R} \neq 0$, а главный момент $\overline{M}_C = 0$. Система в этом случае приводится к равнодействующей. Точка приложения равнодействующей называется центром параллельных сил. Для определения положения этой точки применим теорему Вариньона о моменте равнодействующей

$$\overline{r}_C \times \sum_k \overline{F}_K = \overline{r}_C \times \overline{R} = \sum_k \overline{r}_k \times \overline{F}_k$$

Преобразуя это выражение, получим $\left(\overline{r}_C R - \sum_k \overline{r}_k F_k \right) \times \overline{e} = 0$.

Откуда

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_k \overline{r}_k F_k}{\sum_k F_k} = \frac{\sum_k \overline{r}_k F_k}{R} \text{ или } x_C = \frac{\sum_k x_k F_k}{R}, \quad y_C = \frac{\sum_k y_k F_k}{R}, \quad z_C = \frac{\sum_k z_k F_k}{R}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ОБЪЁМА, ПЛОЩАДИ, ЛИНИИ

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести. Точка приложения этой силы — центром тяжести. Поскольку силы тяжести действуют на каждую частицу тела, то её надо считать распределённой. При небольших (по сравнению с Землей) размерах тела силы тяжести с большой степенью точности можно считать параллельными. Для определения равнодействующей и точки приложения силы тяжести разобьём тело на "n" достаточно малых элементов. Предельным переходом, устремляя $n \to \infty$, получим точные формулы.

$$\overline{r}_C = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = \frac{1}{G} \int \overline{r} \, dG, \quad G = \int dG$$

Вес элементарного объема можно выразить через удельный вес γ формулой $d\,G = \gamma\, d\,V$. При вычислении центра тяжести пластинки постоянной толщины h его элементарный объём можно представить в виде $d\,V = h\, d\,S$. При вычислении элементарного объёма стержня можно воспользоваться соотношением $d\,V = S\, d\,\ell$, где S — площадь поперечного сечения стержня.

Тогда формулы для определения центра тяжести плоской фигуры

$$\overline{r}_C = \frac{\int \overline{r}\, d\,S}{\int d\,S} = \frac{1}{S}\int \overline{r}\, d\,S$$

криволинейного стержня (линии) $\overline{r}_C = \frac{\int \overline{r}\, d\ell}{\int d\ell} = \frac{1}{L}\int \overline{r}\, d\ell$

ДИНАМИКА

Динамика — раздел механики, в котором изучается движение материальных объектов в зависимости от действующих на них сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка. Это модель материального тела любой формы, размерами которого в рассматриваемых задачах можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу. Более сложные материальные объекты — механические системы и сплошные тела — считают состоящими из материальных точек.

Сила считается в механике основным, первичным понятием. Свойства сил, приложенных к твердому телу и точке, рассматривались в статике. В динамике силы оцениваются по их динамическому действию, т.е. по изменению ими характеристик движения материальных объектов.

Движение материальных объектов следует рассматривать относительно определенной системы отсчета. Оно совершается в пространстве с течением времени. В классической механике пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов. Время в классической механике инвариантно по отношению к выбору системы координат.

В основу классической механики положены законы или аксиомы Ньютона, которые были получены им путём обобщений целого ряда опытных данных и теоретических исследований.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи динамики материальной точки можно разделить на три раздела:

- Динамика свободной материальной точки;

- Динамика несвободной материальной точки;
- Динамика относительного движения материальной точки.

ДИНАМИКА СВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основные законы классической механики были сформулированы как законы движения по отношению к некоторой абсолютно неподвижной системе — "абсолютному пространству". Ньютон принимал "абсолютное время", не зависящее от движения тел и систем отсчёта.

Законы механики Галилея-Ньютона

1. Закон инерции

"Изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние".

Материальная точка, на которую не действуют силы или действует уравновешенная система сил, называется изолированной (свободной) материальной точкой.

Смысл закона инерции заключается в постулировании существования так называемых инерциальных систем отсчёта, которые движутся по отношению к "абсолютному пространству" поступательно, равномерно и прямолинейно. В этих системах отсчета выполняются законы классической механики.

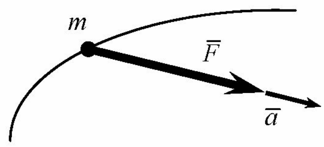
Закон инерции характеризует основное свойство материи постоянно находиться в состоянии равномерного прямолинейного движения (движения по инерции).

Свойство материальной точки сохранять при движении свою скорость называется инертностью. Количественная мера инертности материальной точки, пропорциональная количеству вещества, заключенного в ней, называется массой материальной точки.

Масса представляет собой основную динамическую характеристику точки, она является скалярной положительной величиной.

2. Основной закон динамики точки

Ускорение, сообщаемое материальной точке, пропорционально действующей на неё силе, направлено вдоль линии действия силы и обратно пропорционально массе точки



$$m\,\overline{a} = \overline{F}\,,$$

где $\overline{F}$ — сила, приложенная к точке; m — масса материальной точки; $\overline{a}$ — ускорение точки.

В дальнейшем предполагается, что силы, действующие на точки, могут зависеть от их положения в пространстве, скоростей и времени, но не зависят от ускорений точек, т.е.

$$\overline{F} = \overline{F}\left(t, \overline{r}, \overline{v}\right).$$

3. Закон о равенстве сил действия и противодействия.

Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии двух тел между ними возникают силы, равные по величине и противоположные по направлению

$$\overline{F} = -\overline{F}'\,.$$

Таким образом, в природе не существует одностороннего действия. Сила действия и сила противодействия приложены к различным телам и поэтому не могут компенсировать друг друга (не являются системой сил эквивалентной нулю).

4. Принцип суперпозиции (закон независимого действия сил)

При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета соответствует действию одной силы, величина которой равна сумме сил действующих на точку

Закон независимого действия сил следует понимать как закон суперпозиции сил, т.е. как закон сложения ускорений от действия отдельных сил. С учетом этого закона основное уравнение динамики материальной точки принимает вид

$$m\,\overline{a} = \sum_k \overline{F}_k \,.$$

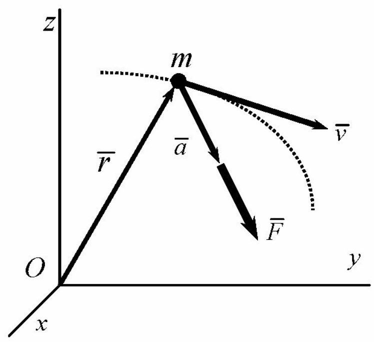
Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Пусть материальная точка движется под действием приложенных к ней сил. Подставив во второй закон Ньютона ускорение в виде второй производной по времени от радиус-вектора, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$m\,\ddot{\overline{r}} = \overline{F} \,.$$

Проектируя это векторное уравнение на координатные оси декартовой системы координат, получим дифференциальные уравнения движения точки

$$m\,\ddot{x} = F_x, \quad m\,\ddot{y} = F_y, \quad m\,\ddot{z} = F_z \,.$$



В случае прямолинейного движения точки имеем только одно уравнение

$$m\,\ddot{x} = F_x \,.$$

Уравнения движения в проекциях на оси естественных координат имеют вид

$$m\,\ddot{s} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b \,.$$

Основное уравнение динамики точки остается справедливым и для несвободной материальной точки, на которую наложены связи. В этом случае, в число действующих на точку сил, следует включить и силы реакций связей.

Классификация задач динамики.

В динамике решают две основные задачи:

Первая основная задача динамики

По известным кинематическим уравнениям и массе точки требуется определить силу, вызывающую заданное движение.

Задача решается двойным дифференцированием радиус-вектора материальной точки по времени, с последующим умножением результата на массу.

Вторая основная задача динамики.

По заданным силам и массе точки требуется определить закон движения.

Вторая основная задача связана с интегрированием. В соответствии с этим можно говорить и об относительной сложности этих задач. Обычно вторая основная задача значительно сложнее первой.

Второй закон Ньютона можно записать в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t,\ \bar{r},\ \bar{v}),$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \end{aligned}$$

Для нахождения уравнений движения точки нужно дважды проинтегрировать эти уравнения. Как известно, при интегрировании дифференциального уравнения второго порядка, решение содержит две константы интегрирования, т.е. для случая трех уравнений имеется шесть произвольных постоянных. Подставляя найденные значения констант интегрирования в общее решение дифференциальных уравнений движения, получим частные решения, справедливые для данных в задаче начальных условий:

$$x\big|_{t=0} = x_0, \quad y\big|_{t=0} = y_0, \quad z\big|_{t=0} = z_0,$$
$$\dot{x}\big|_{t=0} = v_{0x}, \quad \dot{y}\big|_{t=0} = v_{0y}, \quad \dot{z}\big|_{t=0} = v_{0z}.$$

С учетом принятых обозначений эти решения примут вид

$$x = x\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right),$$
$$y = y\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right),$$
$$z = z\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right).$$

Заметим, что под действием одной системы сил точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями.

Если каким-либо образом удалось сразу получить первые интегралы, то дальнейшее решение задачи сводится к однократному интегрированию трёх дифференциальных уравнений первого порядка.

ДИНАМИКА НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Как уже говорилось ранее, основной закон динамики для несвободной материальной точки, а следовательно, и ее дифференциальные уравнения движения имеют такой же вид, как и для свободной точки. В этом случае к действующим на точку силам необходимо добавить силы реакций связей.

Пусть материальная точка движется по заданной гладкой неподвижной поверхности, уравнение которой в декартовой системе координат задано выражением $f\left(x, y, z\right) = 0$. Применяя принцип освобождаемости от связей, и составляя основное уравнение динамики несвободной точки, получим:

$$m\overline{a} = \overline{F} + \overline{N},$$

где $\overline{F}$ — равнодействующая активных сил, действующих на точку, $\overline{N} = N\,\overline{\nu}$ — неизвестная реакция связи, действующая по внешней нормали к поверхности.

Проектируя это уравнение на оси декартовой системы координат, получаем дифференциальные уравнения движения точки по гладкой поверхности:

$$m\ddot{x} = F_x + N\cos\left(\overline{\nu},\overline{i}\right),\ m\ddot{y} = F_y + N\cos\left(\overline{\nu},\overline{j}\right),\ m\ddot{z} = F_z + N\cos\left(\overline{\nu},\overline{k}\right)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что выражение единичного вектора внешней нормали $\overline{\nu}$ к поверхности определяет вектор – градиент, задаваемый формулой

$$\overline{n} = \frac{1}{\Delta f} grad\, f = \frac{1}{\Delta f}\overline{\nabla} f = \frac{1}{\Delta f}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}\right),$$

где $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ — модуль вектор – градиента $\left|\overline{\nabla} f\right|$

Поэтому направляющие косинусы вектора $\overline{\nu}$ и, следовательно, нормальной реакции опоры $\overline{N}$ к поверхности $f\left(x,y,z\right) = 0$ определяются выражениями:

$$\cos\left(\overline{\nu},\overline{i}\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\quad \cos\left(\overline{\nu},\overline{j}\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\quad \cos\left(\overline{\nu},\overline{k}\right) = \frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

С учетом последних формул уравнения движения несвободной точки перепишутся в виде:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x};\quad m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y};\quad m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

где $\lambda = N/\Delta f$ — множитель Лагранжа.

Полученные дифференциальные уравнения — уравнения Лагранжа первого рода для несвободной материальной точки; вместе с уравнением связи $f(x,y,z)=0$ позволяют определить четыре неизвестные x,y,z,λ как функции времени t. Алгебраическое значение нормальной реакции находится затем по формуле $N=\lambda\,\Delta f$.

При движении материальной точки по негладкой поверхности, кроме нормальной реакции возникает сила трения $\overline{F}_{\text{тр}}$, направленная против вектора скорости точки, величину которой можно определить векторным выражением

$$\overline{F}_{\text{тр}}=-F_{\max}sign(v)\overline{\tau}=-F_{\max}\frac{\overline{v}}{|v|},$$

где $F_{\max}=\mu|N|$ — предельное значение силы трения, μ — коэффициент трения.

Дифференциальные уравнения движения точки в этом случае запишутся в виде

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}-\mu\,\lambda\,\Delta f\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}};$$

$$m\ddot{y}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}-\mu\,\lambda\,\Delta f\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}};$$

$$m\ddot{z}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}-\mu\,\lambda\,\Delta f\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}.$$

При движении точки по заданной гладкой пространственной кривой необходимо учесть, что кривую линию в пространстве можно рассматривать как геометрическое место пересечения двух поверхностей $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$.

Эти поверхности создадут для движущейся точки две нормальные реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, и поэтому полная нормальная реакция пространственной кривой $\overline{N}=\overline{N}_1+\overline{N}_2$. Дифференциальные уравнения Лагранжа первого рода в этом случае примут вид

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x};$$

$$m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y};$$

$$m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

где соответственно

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}, \quad \Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}, \quad \Delta f_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.$$

Совместно с двумя уравнениями поверхностей получаем пять уравнений для определения пяти неизвестных величин $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ как функции времени.

При движении точки по плоской кривой удобно использовать естественную систему координат. Проектируя векторное уравнение на оси $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ (касательную и главную нормаль к траектории), получим

$$m\,\ddot{s} = m\,\dot{v} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N.$$

Эти уравнения называются уравнениями движения несвободной точки в форме Эйлера. Уравнения движения несвободной точки в форме Эйлера с учётом трения запишутся в виде:

$$m\,\ddot{s} = F_\tau - F_{\text{тр}}, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + N.$$

Добавив к ним закон Кулона $F_{\text{тр}} = \mu N$, будем иметь систему уравнений, достаточную для определения закона движения $s(t)$ и сил N и $F_{\text{тр}}$.

ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим движение материальной точки под действием равнодействующей силы $\overline{F}$. Выберем две системы отсчета (рис. 3. 1): подвижную $O_1\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ и неподвижную $O\,x\,y\,z$. Известно, что основной закон динамики в абсолютном движении, т.е. относительно неподвижной системы имеет вид: $m\,\overline{a} = \overline{F}$.

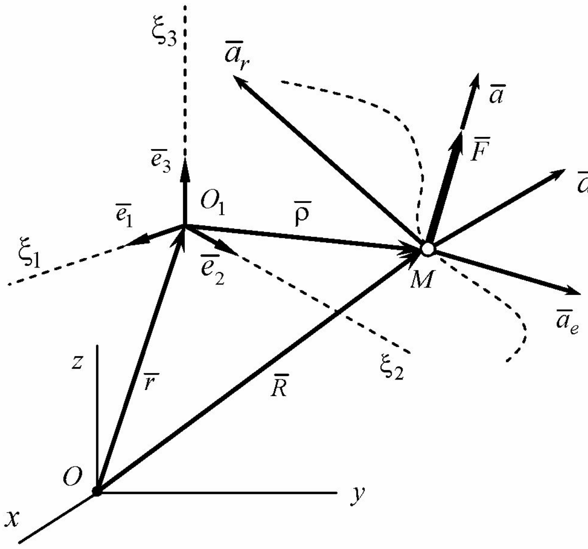


Рис. 3. 1 Сложное движение точки.

Из кинематики известно, что абсолютное ускорение можно вычислить по теореме Кориолиса:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k,$$

где $\overline{a}_e = \overline{a}_{O_1} + \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e \times \overline{\rho}) + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho}$ — переносное ускорение; $\overline{a}_k = 2\,\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r$ — ускорение Кориолиса; $\overline{v}_r, \overline{a}_r$ — относительная скорость и относительное ускорение.

Подставляя эти соотношения в основной закон динамики, получим

$$m(\overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k) = \overline{F} \text{ или } m\,\overline{a}_r = \overline{F} - m\,\overline{a}_e - m\,\overline{a}_k.$$

Назовём дополнительные слагаемые в правой части уравнения соответственно переносной $\overline{\Phi}_e = -m\,\overline{a}_e$ и кориолисовой $\overline{\Phi}_k = -m\,\overline{a}_k$ силами инерции. Основное уравнение динамики относительного движения материальной точки примет вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_k$$

Система отсчёта, в которой основной закон движения записывается в данной форме, называется неинерционной.

Принцип относительности Галилея. Относительный покой.

При переносном поступательном движении $\omega_e = 0$, $\varepsilon_e = 0$ и, следовательно $\bar{a}_k = 0$. В этом случае основное уравнение динамики в относительном движении будет иметь вид

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{\Phi}_e$$

Если подвижная система координат движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $\omega_e = 0$, $a_e = 0$, $a_k = 0$ и силы инерции равны нулю. Закон относительного движения по форме записи не будет отличаться от закона абсолютного движения точки

$$m\bar{a}_r = \bar{F}$$

Такая система отсчёта называется инерциальной.

Отсюда следует принцип относительности классической механики сформулированный Галилеем:

никакими механическими экспериментами нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчёта в покое или совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение.

Если точка находится в покое по отношению к подвижной системе отсчёта, то $\bar{v}_r = 0$ и $\bar{a}_r = 0$, следовательно $\bar{a}_k = 0$. Получаем уравнение относительного покоя

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e = 0.$$

Для относительного покоя необходимо и достаточно, чтобы силы, действующие на точку, уравновешивались переносной силой инерции.

Сила веса и сила тяжести.

Найдем условия относительного равновесия материальной точки на поверхности Земли, принимая во внимание ее вращение с постоянной угловой скоростью ω_e

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = \frac{\pi}{43200} \simeq 7.2722 \cdot 10^{-5}\ c^{-1}.$$

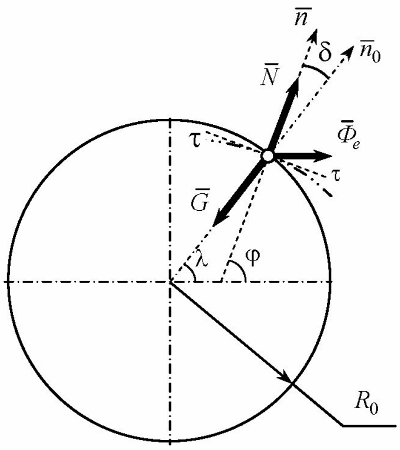


Рис. 3. 2 Относительное равновесие точки

На эту точку действуют: сила тяготения $\overline{G}$ (рис. 3. 2), перпендикулярная поверхности геоида, форма которого близка к сфере, поэтому можно считать силу $\overline{G}$ направленной к центру Земли; переносная сила инерции $\overline{\Phi}_e$, а также реакция опорной поверхности $\overline{N}$. В соответствие с условием относительного равновесия, получим

$$\overline{G} + \overline{\Phi}_e + \overline{N} = 0. \qquad (1)$$

где $\overline{\Phi}_e = m\,\omega_e^2\,R_0 \cos(\lambda)$ — центробежная сила инерции,

$G = mg_0$— сила тяжести.

Таким образом, вес точки равный $\overline{P} = -\overline{N}$ будет определяться выражением $\overline{P} = \overline{G} + \overline{\Phi}_e$, то есть он является равнодействующей двух сил: тяготения и центробежной силой инерции.

Оценим, насколько вес точки отличается от величины силы тяготения. Обозначим геоцентрическую широту, т.е. угол между осью $\overline{n}_0$ и плоскостью экватора через λ, а географическую широту, т.е. угол между осью $\overline{n}$ и той же плоскостью, через φ. Проектируя уравнение (1) на оси $\overline{n}$ и $\overline{\tau}$

$$\begin{aligned} \tau: &\quad -G\sin(\delta) + \Phi_e \sin(\varphi) = 0; \\ n: &\quad -G\cos(\delta) + \Phi_e \cos(\varphi) + N = 0, \end{aligned}$$

и учитывая, что $\varphi = \lambda + \delta$, получим систему двух уравнений относительно δ и $N = P = mg$

$$\begin{aligned} g_0 \sin(\delta) &= \omega_e^2 R_0 \cos(\lambda) \sin(\lambda + \delta), \\ g &= g_0 \cos(\delta) - \omega_e^2 R_0 \cos(\lambda) \cos(\lambda + \delta). \end{aligned}$$

Учитывая, что угол δ очень мал, решение первого уравнения данной системы можно представить в виде

$$\delta = \frac{\omega_e^2 R_0}{2 g_0} \sin(2\lambda),$$

а выражение для величины g будет иметь следующий вид

$$g = g_0 \left[1 - \frac{\omega_e^2 R_0}{g_0} \cos^2(\lambda + \delta) \right]. \tag{2}$$

Так как вес тела (материальной точки) должен быть направлен по нормали к поверхности, то угол δ, задающий ориентацию внешней нормали, определяет степень отклонения реальной поверхности Земли от идеальной сферы. Как уже отмечалось, Земля имеет форму геоида, который в первом приближении заменяется близким к нему однородным эллипсоидом вращения с полуосями: большой (экваториальный радиус) $R_э = 6.378 \cdot 10^6$ *м* и малой (полярный радиус) $R_п = 6.357 \cdot 10^6$ *м*. Поэтому при изучении высокоточных задач: движение искусственных спутников, баллистических ракет, приливных течений и т.д. необходимо учитывать несферичность Земли.

Поскольку отличие полярного радиуса Земли от экваториального незначительно, и составляет всего $\Delta = 21\cdot 10^3$ *м*, то Землю в достаточно близком приближении можно считать равновеликой по объему и массе $M = 5.98\cdot 10^{24}$ *кг* сферой радиуса $R_0 = 6.37\cdot 10^6$ *м*. Тогда, согласно всемирному закону тяготения Ньютона, сила тяжести G будет равна

$$G = m\,g_0 = \nu \frac{M\,m}{R_0^2},$$

где $\nu = 6.67\cdot 10^{-11}\, м^3/кг\,с^2$ — гравитационная постоянная.

Подставляя числовые значения констант, найдем величину ускорения свободного падения для не вращающейся сферической Земли, а также выражение для угла δ

$$g_0 = \nu \frac{M}{R_0^2} = 9.8265 \frac{м}{c^2}.\ \delta = \frac{\omega_e^2 R_0}{2\,g_0}\sin(2\lambda) = 1.724\cdot 10^{-3}\sin(2\lambda),$$

Пренебрегая величиной δ в выражении (2), задающем ускорение свободного падения g, с учетом вращения Земли, получим

$$g \equiv g(\varphi) = g_0\left(1 - \frac{\omega_e^2 R_0}{g_0}\cos^2\varphi\right) \approx g_0\left(1 - \frac{\omega_e^2 R_0}{g_0}\cos^2\lambda\right). \qquad (3)$$

При решении задач динамики составного движения обычно считают Землю сферой радиуса $R_0 = 6.37\cdot 10^6$ *м*, на которой ускорение свободного падения g определяется формулой (3).

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Связи и их классификация

Если на движение точки не наложено никаких ограничений, то такая материальная точка называется свободной. Материальная система, состоящая из таких точек, может совершать любые движения в пространстве. Если же на движение некоторых (или всех) точек системы наложены какие–либо ограничения (связи), то система может двигаться лишь в определённых направлениях и называется несвободной.

Ограничения, накладываемые на перемещения точек системы в пространстве, называются связями. От их вида зависит подход к изучению поведения механической системы. Конструктивно связи представляют собой различные элементы: подшипники, нити, стержни, направляющие рельсы и т. п.

Математически связи записываются в виде уравнений, которые называются уравнениями связей.

Связи, не меняющиеся с течением времени, называются стационарными или склерономными. В противном случае это нестационарные или реономные связи.

Голономные (геометрические) связи накладывают ограничения на положения точек системы. Уравнения этих связей содержат только координаты точек. Неголономные (кинематические) связи накладывают ограничения на скорости точек системы. В уравнения этих связей кроме производных от координат по времени могут входить и сами координаты. Это неинтегрируемые соотношения между координатами и их производными имеют вид

$$\varphi\left(\dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k,\ x_k,\ y_k,\ z_k,\ t\right)=0 .$$

Возможные (виртуальные) перемещения

Возможным перемещением точки называют всякое мыслимое, бесконечно малое перемещение, допускаемое связями, наложенными на точку в данный момент времени, без нарушения этих связей.

Возможное перемещение точки является вариацией радиус вектора и обозначается как $\delta\overline{r}$, а действительное — $d\,\overline{r}$ является дифференциалом векторной функции $\overline{r}(t)$, определяющей закон движения точки. Правила варьирования функций внешне подобны правилам дифференцирования.

$$\delta(x\cdot y)=\delta x\cdot y+x\cdot\delta y,\quad \delta(x+y)=\delta x+\delta y\,.$$

Обобщенные координаты. Число степеней свободы системы

Число степеней свободы материальной системы равно числу независимых вариаций переменных величин, однозначно определяющих положение механической системы в пространстве; эти величины, в свою очередь, называются обобщёнными координатами. При изучении голономных систем число обобщённых координат равно числу степеней свободы механической системы. В качестве независимых координат могут быть выбраны любые параметры: углы, перемещения каких-либо точек системы и т. д. Обобщённые координаты обозначаются символами $q_1,\ q_2,...,\ q_n$. В частности, все декартовые координаты точек можно выразить через обобщенные координаты q_k

$$\begin{aligned}
&x_k = x_k\left(q_1,\ q_2,...,\ q_n\right);\\
&y_k = y_k\left(q_1,\ q_2,...,\ q_n\right);\\
&z_k = z_k\left(q_1,\ q_2,...,\ q_n\right),\quad k=1,...,\ N.
\end{aligned}$$

Обобщёнными скоростями называются первые производные от обобщённых координат по времени $\dot{q}_k$. Обобщёнными ускорениями — $\ddot{q}_k$.

Центр масс

Центр масс механической системы — геометрическая точка, радиус вектор которой определяется по формуле

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_k m_k \overline{r}_k}{m},$$

где $m = \sum_k m_k$ — масса механической системы.

Для сплошного твердого тела центр масс определится заменой суммирования интегрированием

$$\overline{r}_C = \frac{\int_m \overline{r}\, dm}{m}.$$

Центр масс называют ещё центром инерции.

Моменты инерции твердых тел

Для исследования вращательного движения вводится понятие моментов инерции. Как масса является мерой поступательного движения механической системы, так моменты инерции — мерой вращательного движения. Момент инерции механической системы относительно оси ξ вычисляется по формуле

$$I_\xi = \sum_k m_k d_k^2,$$

где d_k — расстояние от точки массой m_k до оси ξ.

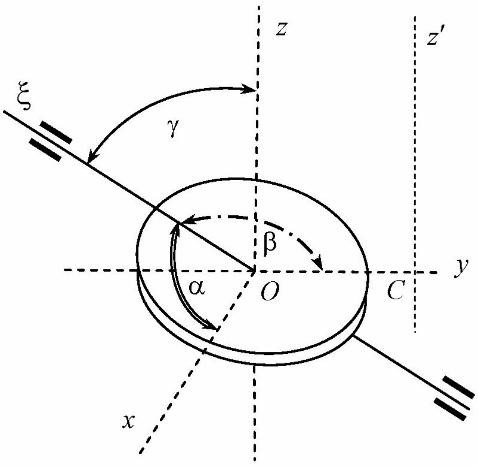
При вычислении моментов инерции сплошных твердых тел сумму заменяют интегралом

$$I_\xi = \int_m d^2\, dm.$$

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является радиус инерции i_ξ относительно оси $O\xi$. Момент инерции относительно оси в этом случае определяется по формуле

$$I_\xi = m\, i_\xi^2 .$$

При решении конкретных задач очень полезна бывает теорема Штейнера, позволяющая найти момент инерции тела относительно оси Oz', если известна величина момента инерции того же тела относительно оси проходящей через центр масс Cz и расстояние от новой оси до оси, идущей параллельно ей через центр масс



$$I_{Oz'} = I_{Cz} + m\, OC^2 .$$

Встречаются такие задачи, в которых момент инерции относительно оси вращения $O\xi$ неизвестен, но известны моменты инерции этого тела относительно других осей, которые можно связать с некоторой координатной системой (например: декартовых Ox, Oy, Oz в случае описания вращательного движения ротора с неточно установленной осью вращения). В этом случае момент инерции, относительно оси $O\xi$, составляющей с декартовой системой координат $Oxyz$ углы α, β, γ можно определить по формуле

$$I_\xi = \sum_k m_k \left(\overline{r}_k \times \overline{\xi}\right)^2 ,$$

где $\overline{\xi} = \cos(\alpha)\ \overline{i} + \cos(\beta)\ \overline{j} + \cos(\gamma)\overline{k}$ — единичный вектор, характеризующий направление оси $O\xi$ относительно декартовой системы координат;

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — углы между осью $O\xi$ и координатными осями $Ox,\ Oy,\ Oz$.

Количество движения

Количество движения — векторная мера механического движения, характеризующая переход механического движения одного материального объекта в механическое движение другого объекта. Количеством движения материальной точки называется вектор, равный произведений массы точки на ее скорость $\overline{q} = m\overline{v}$. Для механической системы геометрическая сумма количеств движения ее точек называется главным вектором количества движения

$$\overline{Q} = \sum_k \overline{q}_k = \sum_k m_k \overline{v}_k = \sum_k m_k \dot{\overline{r}}_k .$$

Главный вектор количества движения механической системы является свободным вектором, не имеющим определённой точки приложения. Величину и направление главного вектора количества движения механической системы можно определить через скорость центра масс $\overline{v}_C$ по формуле

$$\overline{Q} = m\,\overline{v}_C .$$

При сложном движении тела вектор$\overline{Q}$, характеризует только поступательное движение тела вместе с центром масс и не может характеризовать вращательное движение вокруг центра масс.

Кинетический момент

Вращательное движение системы вокруг ее центра масс характеризует другая мера механического движения — кинетический момент.

Кинетическим моментом системы относительно неподвижного центра O называется геометрическая сумма моментов количества движения всех точек этой системы, взятых относительно того же центра

$$\overline{K}_O = \sum_k \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k .$$

Если материальная система совершает произвольное движение в пространстве, то такое движение можно представить в виде суммы поступательного движения вместе с центром масс и относительного движения вокруг центра масс (рис. 3. 3). Кинетический момент механической системы в этом случае можно представить в виде

$$\overline{K}_O = \sum_k \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k = \overline{r}_C \times m\,\overline{v}_C + \overline{K}_C^r.$$

Вектор $\overline{K}_C^r = \sum_k \overline{\rho}_k \times m_k \overline{v}_k^r$ называется кинетическим моментом системы в относительном по отношению к центру масс движении.

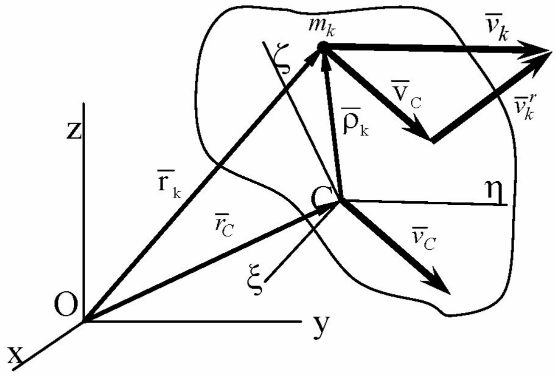


Рис. 3. 3. Разложение сложного движения на переносное и относительное.

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси (например Oz), кинетический момент тела будет равен произведению угловой скорости на момент инерции тела, вычисленный относительно той же оси

$$K_{Oz} = I_{Oz}\omega,$$

где I_{Oz} — момент инерции твердого тела относительно оси вращения.

Знак кинетического момента совпадает со знаком угловой скорости.

Кинетическая энергия

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергии всех точек системы

$$T = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Это основная скалярная мера механического движения.

Кинетическая энергия механической системы в общем случае произвольного движения (рис. 3. 3) равна сумме кинетической энергии в поступательном движении системы со скоростью центра масс и кинетической энергии этой системы в относительном движении, наблюдаемом из подвижной системы отсчёта (поступательно движущейся вместе с центром масс) — теорема Кенига

$$T = \frac{m\,v_C^2}{2} + \sum_k \frac{m_k v_k^{r\,2}}{2}.$$

- если тело движется поступательно, то скорости всех его точек одинаковы и равны скорости центра масс, поэтому

$$T = \frac{m\,v_C^2}{2}.$$

- при вращательном движении твёрдого тела вокруг неподвижной оси Oz, скорость точек определяется по формуле $v_k = \omega\, h_k$. Поэтому

$$T = \sum_k \frac{m_k\, v_k^2}{2} = \sum_k \frac{m_k\, h_k^{\,2}}{2}\omega^2 = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega^2.$$

Здесь I_{Oz} — момент инерции твёрдого тела относительно оси Oz

- если тело участвует в плоскопараллельном движении, то его кинетическую энергию можно определить по теореме Кёнига

$$T = \sum_k \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2} m\; v_C^{\,2} + \frac{1}{2} I_{Cz}\omega^2,$$

где ω — угловая скорость при вращении тела вокруг центра масс.

Элементарный и полный импульс силы

Действие силы $\overline{F}$ на материальную точку в течение промежутка времени dt можно охарактеризовать элементарным импульсом силы

$$d\,\overline{S} = \overline{F}\,dt.$$

Полный импульс силы $\overline{F}$ за промежуток времени $t - t_0$ равен

$$\overline{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{F}\, dt\,.$$

Работа силы

Элементарной работой силы $\overline{F}$ называется скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы $\overline{F}$ на элементарное перемещение точки приложения силы

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} \Rightarrow \delta A = F\cos(\varphi)\, d\, r = F_\tau\, d\, r\,,$$

где φ — угол между векторами $\overline{F}$ и $d\overline{r}$, F_τ — проекция вектора силы на направление единичного вектора касательной к траектории.

Производя скалярное умножение, получим ещё одно представление для величины элементарной работы

$$\delta A = F_x\, d\, x + F_y\, d\, y + F_z\, d\, z\,.$$

По внешнему виду эта формула напоминает полный дифференциал функции координат точки, но, тем не менее, в общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом.

Элементарная работа силы, действующей на механическую систему, на возможном перемещении

$$\delta A = \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k\,.$$

Полную работу силы на конечном перемещении можно найти по формуле

$$A = \int_{M_O}^{M} F\cos(\varphi)\, d\, r = \int F_\tau\, d\, r = \int \left(F_x\, d\, x + F_y\, d\, y + F_z\, d\, z\right).$$

Введём ещё одно понятие — мощность силы, величина которой характеризует изменение работы в единицу времени

$$N = \frac{d\,A}{d\,t} \text{ или } N = \frac{\overline{F} \cdot \overline{v}\, d\, t}{d\, t} = \overline{F} \cdot \overline{v} = F\, v\cos\left(\widehat{\overline{F},\overline{v}}\right) = F_\tau\, v\,.$$

При вращательном движении твердого тела элементарная работа силы вычисляется по формуле

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\,\overline{r} = F_\tau h\, d\varphi = M_{Oz}\, d\varphi,$$

где h — расстояние от точки приложения силы до оси вращения (плечо силы), $d\varphi$ — угол элементарного поворота, M_{Oz} — момент силы относительно оси вращения твердого тела.

Полная работа силы при вращательном движении

$$A = \int_0^{\varphi} M_{Oz} d\varphi.$$

Мощность силы при вращательном движении

$$N = \frac{dA}{dt} = M_{Oz}\frac{d\varphi}{dt} = M_{Oz}\,\omega.$$

Силовое поле, силовая функция, потенциальная энергия.

Среди разнообразных сил природы особое место занимает класс сил, величина и направление которых зависит только от положения точки в пространстве. Если точка или механическая система движется под действием такого рода сил, то говорят, что она находится в силовом поле. Силовое поле может быть одинаковым в разные моменты времени или изменяться с течением времени. В первом случае оно называется стационарным, во втором — нестационарным. В стационарном силовом поле вектор силы является векторной функцией координат точки $\overline{F} = \overline{F}(\overline{r})$. Для стационарного потенциального силового поля

$$dA = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

В потенциальном поле проекции сил находятся как производные по координатам от силовой функции

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Элементарная работа силы в потенциальном поле равна полному дифференциалу от силовой функции. Полная работа силы на перемещении M_0M_1 равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках. Она не зависит от вида траектории движения точки

$$A = \int_{M_0}^{M_1} d\,A = \int_{M_0}^{M_1} d\,U = U_1 - U_0.$$

Наряду с силовой функцией, используется другая функция, характеризующая запас энергии точки при нахождении её в данном месте силового потенциального поля. Это потенциальная энергия

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

Для потенциального поля справедливы соотношения

$$d\,A = d\,U = -d\,\Pi, \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Силы инерции. Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы

Векторная величина $\overline{\Phi} = -m\,\overline{a}$ имеет размерность силы. Она названа силой инерции. Главный вектор сил инерции системы находится как геометрическая сумма сил инерции точек, входящих в систему

$$\overline{\Phi} = \sum_k \overline{\Phi}_k = -\sum_k m_k \overline{a}_k = -m_k \overline{a}_C.$$

Не смотря на то, что главный вектор находится через ускорение центра масс, точкой приложения этого вектора, в общем случае, центр масс не является.

При приведении сил инерции к произвольному центру O главный момент сил инерции равен

$$\overline{M}_O^{\Phi} = -\frac{d\left(\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k\right)}{dt} = -\frac{d\,\overline{K}_O}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\overline{r}_C \times m\,\overline{v}_C + \overline{K}_C\right),$$

где $\overline{K}_O$ — кинетический момент системы относительно центра О.

Обобщенные силы

Наряду с понятием обобщенной координаты q_i в механике вводится величина обобщенной силы Q_i, основанное на понятии элементарной работы силы на возможном перемещении $\delta\,\overline{r}$.

Сумма элементарных работ активных сил

$$\delta\,A = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \delta\,\overline{r}_k = \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \frac{\partial\,\overline{r}_k}{\partial\,q_m}\right)\delta\,q_m = \sum_{m=1}^{n} Q_m\,\delta\,q_m,$$

где $Q_m = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^{\,a} \cdot \frac{\partial\,\overline{r}_k}{\partial\,q_m}$ — обобщённые силы.

Каждая обобщённая сила Q_m соответствует своей обобщённой координате q_m (число обобщённых сил равно числу степеней свободы), и определяется выражением

$$Q_m = \frac{\sum_{k=1}^{N} \delta\,A_k^{(m)}}{\delta\,q_m}, \delta\,q_m \neq 0, \quad \delta\,q_1 = 0,\ \ldots,\quad \delta\,q_n = 0\,.$$

Если все активные силы являются потенциальными, то обобщённые силы для консервативной системы вычисляются по формулам

$$Q_m = -\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,q_m}.$$

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механической системой называют совокупность материальных точек, взаимодействующих между собой..

Все силы, действующие на механическую систему можно условно разделить на активные и реактивные (силы реакции), или на внешние и внутренние силы. Если это силы взаимодействия между точками механической системы, то это внутренние силы, в противном случае — это внешние силы. Примером внутренних сил могут служить силы упругости, возникающие между частицами упругого тела. Разделение сил на внутренние и внешние является условным. Одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней в зависимости от того, какая механическая система рассматривается. Заметим, что внутренние и внешние силы могут включать в себя как активные силы, так и силы реакций связей.

Дифференциальные уравнения движения механической системы

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек (рис. 3. 4). Обозначим через $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_k^i$ равнодействующие всех внешних и внутренних сил, приложенных к точке m_k. Составим для каждой точки системы дифференциальные уравнения движения:

$$m_k\ddot{\overline{r}}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \text{ где } k = 1,\dots,N$$

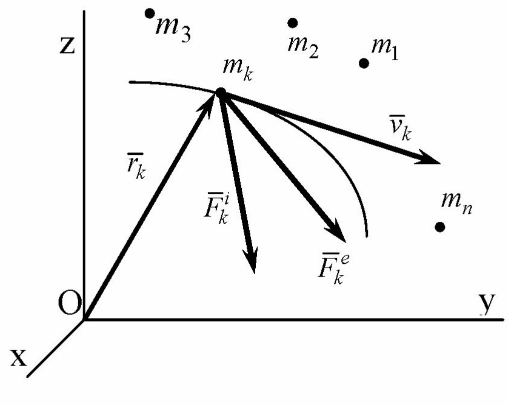


Рис. 3. 4. Движение произвольной точки механической системы

Полученные уравнения называются дифференциальными уравнениями движения системы материальных точек. Внутренние силы, входящие в эти уравнения, как правило, являются неизвестными. Интегрирование этих уравнений при известных внешних силах и начальном состоянии механической системы возможно в конечном виде лишь в исключительных случаях.

Основная роль уравнений движения системы состоит в том, что они являются исходными для вывода общих теорем динамики системы.

Общие теоремы динамики

При решении многих инженерных задач нет необходимости в подробном описании поведения всей механической системы. Достаточно знать, как меняются лишь некоторые, основные для данной задачи параметры. Законы изменения таких величин представляют собой общие теоремы динамики.

Теорема о движении центра масс

Центр масс механической системы движется так же, как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

$$m\ddot{\bar{r}}_C = \bar{R}^e \text{ или } m\bar{a}_C = \sum_k \bar{F}_k^e .$$

Из формулировки теоремы следует, что внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс системы.

Теорема об изменении количества движения

Производная по времени от главного вектора количества движения механической системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \bar{v}_k\right) = \sum_k \bar{F}_k^e \text{ или } d\bar{Q} = \sum_k \bar{F}_k^e \, dt .$$

После интегрирования последнего выражения по времени в пределах от 0 до t получим теорему в конечной форме.

Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за то же время

$$\overline{Q} - \overline{Q}_O = \sum_k \overline{S}_k^e .$$

Внутренние силы не входят явно в формулировку теоремы и, поэтому, не могут непосредственно изменять количества движения системы.

Теорема об изменении главного вектора кинетического момента

Первая производная по времени от кинетического момента системы, вычисленного относительно центра O, равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, взятых относительно того же центра

$$\frac{d}{dt}\overline{K}_O = \sum \overline{M}_O\left(\overline{F}_k^e\right).$$

Теорема о кинетическом моменте в относительном движении по отношению к центру масс

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс в относительном движении сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра в абсолютном движении

$$\frac{d\overline{K}_C^r}{dt} = \sum_k \overline{\rho}_k \times \overline{F}_k^e = \sum_k \overline{M}_C\left(\overline{F}_k^e\right).$$

Теорема об изменении кинетической энергии

Дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внутренних и внешних сил, действующих на систему

$$dT = \sum_k \delta A_k^e + \sum_k \delta A_k^i .$$

Проинтегрировав это соотношение, получим конечную формулировку данной теоремы

$$T - T_0 = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i .$$

Её можно записать и в форме мощностей внешних и внутренних сил

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k N_k^e + \sum_k N_k^i .$$

Отличительной особенностью теоремы об изменении кинетической энергии системы состоит в том, что только в одной этой теореме из всех общих теорем динамики системы внутренние силы явным образом фигурируют в формулировке теоремы.

Закон сохранения механической энергии для точки и системы

Величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий (механической энергии), не меняется в процессе движения механической системы в потенциальном поле

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = E = const .$$

Это соотношение является одним из первых интегралов движения — интеграл энергии. Из него следует, что увеличению кинетической энергии соответствует уменьшение потенциальной энергии и наоборот.

Механические системы, в которых выполняется этот закон, называются консервативными.

Принцип Даламбера

Если в произвольный момент времени к каждой из точек, входящих в систему, приложить кроме фактически действующих на неё внутренних и внешних сил силы инерции, то система будет находиться в состоянии покоя. Главный вектор внешних сил уравновешивается главным вектором сил инерции

$$\sum_k \overline{F}_k^e + \sum_k \overline{\Phi}_\kappa = 0 .$$

Главный момент внешних сил и главный момент сил инерции, вычисленные относительно произвольного центра O, взаимно уравновешиваются

$$\sum_k \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e + \sum_k \overline{r}_k \times \overline{\varPhi}_\kappa = 0 .$$

Принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений)

Для равновесия механической системы с удерживающими идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю

$$\sum_k \overline{F}_k \cdot \delta \overline{r}_k = \sum_m Q_m \, \delta q_m = 0 .$$

Простота выражения элементарной работы через обобщённые силы и независимость вариаций обобщённых координат друг от друга позволяет записать принцип Лагранжа в виде

$$Q_m = 0 \text{, где } m = 1, \ \ldots, n .$$

Т.е. для равновесия механической системы с идеальными, удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы все обобщённые силы равнялись нулю.

Для консервативной механической системы условия равновесия примут вид

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q_m} = 0 \text{, где } m = 1, \ \ldots, \ n .$$

Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики системы получается при последовательном применении к ней вначале принципа Даламбера, а затем принципа Лагранжа

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{F}_k^a + \overline{J}_k \right) \cdot \delta \overline{r}_k = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{F}_k^a - m_k \overline{a}_k \right) \cdot \delta \overline{r}_k = 0 .$$

При любых движениях системы с идеальными связями в каждый момент времени выполняется условие равенства нулю суммы элементарных работ всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении.

Уравнения Лагранжа II рода

Уравнения Лагранжа II рода имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_m}=Q_m, \quad m=1, \ \ldots, \ n .$$

Число уравнений Лагранжа II рода равно числу степеней свободы голономной системы. Сами уравнения с точки зрения математика представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно неизвестных обобщённых координат, рассматриваемых как функции времени.

Для консервативных голономных систем уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_m}=0, \ m=1, \ \ldots, \ n ,$$

где $L=T-\Pi$ — функция Лагранжа.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дифференциальные уравнения различных типов движений твердого тела можно получить, применяя соответствующие теоремы динамики.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Из теоремы о движении центра масс получаются дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела. Из кинематики известно, что при поступательном движении все точки имеют одинаковые характеристики (скорость, ускорение), следовательно, движение тела определяется движением одной точки, За такую точку целесообразно принять центр масс системы. Тогда на основании теоремы получим

$$m\,\overline{a}_C = m\,\ddot{\overline{r}}_C = \sum_k \overline{F}_k^e ,$$

где m — масса твердого тела.

Проектируя на оси системы координат, получаем дифференциальные уравнения поступательного движения

$$m\,\ddot{x}_C = \sum_k F_{k_X}^e, \quad m\,\ddot{y}_C = \sum_k F_{k_Y}^e, \quad m\,\ddot{z}_C = \sum_k F_{k_Z}^e .$$

Таким образом, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения одной точки.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz. Угловую скорость его вращения в произвольный момент времени обозначим ω. Тогда кинетический момент этого тела относительно оси Oz равен

$$K_{Oz} = I_{Oz}\omega .$$

Учитывая постоянство момента инерции для твёрдого тела, согласно теореме об изменении кинетического момента имеем

$$I_{Oz}\frac{d\omega}{dt} = I_{Oz}\ddot{\varphi} = \sum_k M_{Oz}\left(\overline{F}_k^e\right).$$

Это и есть дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Частные случаи:

- если $\sum_k M_{Oz}\left(\overline{F}_k^e\right) = 0$, то $\omega = const$, т.е. вращение равномерное;
- если $\sum_k M_{Oz}\left(\overline{F}_k^e\right) = const$, то $\varepsilon = const$, т.е. вращение равнопеременное.

Следует отметить, что дифференциальное уравнение вращательного движения аналогично по структуре дифференциальному уравнению поступательного движения твёрдого тела, откуда следует, что момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном движении, т.е. он характеризует инерционные свойства тела во вращательном движении. В этом смысле момент внешних сил аналогичен силам в поступательном движении.

Нахождение реакций в подшипниках

Дифференциальное уравнение вращательного движения не позволяет определить реакции опор, удерживающих тело на оси вращения. Для их нахождения необходимо применить теорему о движении центра масс и теорему об изменении кинетического момента, записанных в проекциях на оси координат или воспользоваться принципом Даламбера. Например, для декартовой системы координат $xAyz$ (рис. 3. 5) получим

$$
\begin{aligned}
&\sum_k F_{k_X} + X_A + X_B + m\,x_C\omega^2 + m\,y_C\varepsilon = 0,\\
&\sum_k F_{k_Y} + Y_A + Y_B + m\,y_C\omega^2 - m\,x_C\varepsilon = 0,\\
&\sum_k F_{k_Z} + Z_A = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_k M_X\left(\overline{F}_k\right) - Y_B\,AB - I_{yz}\omega^2 + I_{zx}\varepsilon = 0,\\
&\sum_k M_Y\left(\overline{F}_k\right) + X_B\,AB + I_{zx}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon = 0,\\
&\sum_k M_Z\left(\overline{F}_k\right) - I_z\,\varepsilon = 0.
\end{aligned}
$$

Последнее уравнение данной системы полностью совпадает с дифференциальным уравнением вращательного движения, полученного ранее.

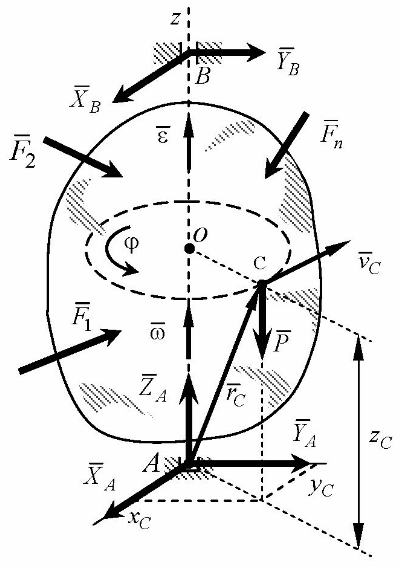


Рис. 3. 5 Динамические реакции подшипников.

Для нахождения неизвестных реакций в подшипниках остается пять алгебраических уравнений. Обычно полные реакции в подшипниках раскладывают на статические и динамические составляющие

$$
\overline{R}_A = \overline{R}_A^{CT} + \overline{R}_A^{Д}, \quad \overline{R}_B = \overline{R}_B^{CT} + \overline{R}_B^{Д}.
$$

Статическими реакциями $\overline{R}_A^{CT}, \overline{R}_B^{CT}$ называют части полных реакций, которые статически уравновешивают приложенные внешние силы. Уравнения для их определения получают из первых пяти уравнений, положив в них $\varepsilon = 0$ и $\omega = 0$.

$$\sum_k F_{k_X} + X_A^{CT} + X_B^{CT} = 0, \quad \sum_k M_X\left(\overline{F}_k\right) - Y_B^{CT}\, AB = 0,$$
$$\sum_k F_{k_Y} + Y_A^{CT} + Y_B^{CT} = 0, \quad \sum_k M_Y\left(\overline{F}_k\right) + X_B^{CT}\, AB = 0.$$
$$\sum_k F_{k_Z} + Z_A^{CT} = 0.$$

Части полных реакций $\overline{R}_A^{Д}, \overline{R}_B^{Д}$, которые возникают при движении твердого тела, называют динамическими реакциями. Уравнения для их определения получаем с учетом того, что приложенные внешние силы уравновешиваются статическими реакциями

$$X_A^{Д} + X_B^{Д} + m\, x_C \omega^2 + m\, y_C \varepsilon = 0, \quad -Y_B^{Д}\, AB - I_{yz}\omega^2 + I_{zx}\varepsilon = 0,$$
$$Y_A^{Д} + Y_B^{Д} + m\, y_C \omega^2 - m\, x_C \varepsilon = 0, \quad X_B^{Д}\, AB + I_{zx}\omega^2 + I_{yz}\varepsilon = 0.$$

Когда центр масс твердого тела расположен на оси вращения, твердое тело называют статически уравновешенным. Динамические реакции в этом случае образуют пару сил.

Когда ось вращения является главной центральной осью инерции $\left(I_{zx} = I_{yz} = 0\right)$ и центр масс расположен на ней, имеем случай динамической уравновешенности. Динамические реакции равны нулю и в подшипниках возникают только статические реакции.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Из кинематики известно, что плоское движение твёрдого тела можно разложить на два простейших: поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Примем за полюс центр масс тела. Тогда кинематические уравнения плоского движения запишутся в виде:

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

Для изучения плоского движения твёрдого тела достаточно составить три дифференциальных уравнения, связывающие величины x_C, y_C, φ с действующими на тело внешними силами.

Поступательная часть движения определяется дифференциальным уравнением поступательного движения (теоремой о движении центра масс)

$$m\,\ddot{x}_C = \sum_k F^e_{k_X}, \quad m\,\ddot{y}_C = \sum_k F^e_{k_Y}.$$

Третье уравнение плоского движения получим, применив теорему об изменении кинетического момента относительно подвижной оси, проходящей через центр масс

$$\frac{d\,K_{Cz}}{d\,t} = \sum_k M_{Oz}\left(\overline{F}^e_k\right).$$

Так как кинетический момент твёрдого тела относительно оси Cz можно определить по формуле $K_{Cz} = I_{Cz}\omega$ то, подставляя его в теорему, получим

$$I_{Cz}\frac{d\,\omega}{d\,t} = I_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_k M_{Cz}\left(\overline{F}^e_k\right).$$

Таким образом, дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела имеют вид

$$m\,\ddot{x}_C = \sum_k F^e_{k_X}, \quad m\,\ddot{y}_C = \sum_k F^e_{k_Y}, \quad I_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_k M_{Cz}\left(\overline{F}^e_k\right).$$

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы. Классическими параметрами, определяющими положение этого тела в пространстве, являются три угла Эйлера: φ, ψ, θ. Если φ, ψ, θ известны как функции времени, то известно и движение твердого тела с одной неподвижной точкой (сферическое движение) (рис. 3.6).

Для составления дифференциальных уравнений сферического движения запишем теорему об изменении кинетического момента в дифференциальной форме

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}_O^e,$$

где $\overline{L}_O = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k$ — кинетический момент твердого тела, совершающего сферическое движение относительно неподвижной точки O;

$\overline{M}_O^e = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{F}_k^e$ — главный момент внешних сил относительно неподвижного центра O.

Чтобы записать соответствующие формулы в наиболее простом виде возьмем в качестве координатных – подвижные главные оси инерции $O\zeta\eta\xi$ жестко связанные с телом. Тогда проекции кинетического момента на оси координат можно записать в виде

$$L_\xi = I_\xi \omega_\xi, \quad L_\eta = I_\eta \omega_\eta, \quad L_\zeta = I_\zeta \omega_\zeta.$$

Уравнения движения (динамические уравнения Эйлера) в этом случае примут вид:

$$I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta \left(I_\xi - I_\eta\right) = M_\zeta^e,$$
$$I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi \left(I_\xi - I_\zeta\right) = M_\eta^e,$$
$$I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta \left(I_\eta - I_\zeta\right) = M_\xi^e.$$

где $I_\zeta,\ I_\eta,\ I_\xi$ – моменты инерции тела относительно его осей инерции в точке О;

$M_\zeta^e,\ M_\eta^e,\ M_\xi^e$ – главные моменты внешних сил, приложенных к телу, относительно этих же осей.

К динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера:

$$\omega_x = \dot{\psi}\, \sin\theta\, \sin\varphi + \dot{\theta}\, \cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\, \sin\theta\, \cos\varphi - \dot{\theta}\, \sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\, \cos\theta + \dot{\varphi},$$

которые выражают проекции вектора угловой скорости вращения твердого тела на оси подвижной системы координат, скрепленные с телом через углы Эйлера и их производные по времени.

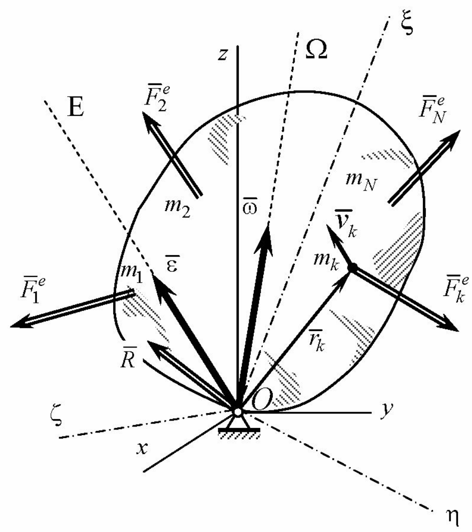


Рис. 3. 6 Сферическое движение твердого тела.

Динамические и кинематические уравнения Эйлера образуют систему шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка; интегрирование этой системы представляет сложную математическую задачу. Для интегрирования этих уравнений при решении конкретных задач обычно используют те или иные приближенные математические методы.

Условия интегрируемости уравнений движения

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в трех случаях существует система дифференциальных уравнений, из которых углы Эйлера определяются в квадратурах, т. е. путем вычисления интегралов. Эти частные случаи называют условиями интегрируемости.

Случай Эйлера

Тело имеет произвольную форму, но закреплено в его центре масс, т. е. $M_\zeta^e = 0,\ M_\eta^e = 0,\ M_\xi^e = 0$. Углы Эйлера выражаются в этом случае через специальные эллиптические функции.

Случай Лагранжа

Тело имеет ось симметрии, например $O\xi$. В силу симметрии $I_\eta = I_\zeta$ и эллипсоид инерции для закрепленной точки будет эллипсоидом вращения. Закрепленная точка O и центр масс C расположены на оси симметрии. В этом случае могут быть указаны шесть независимых первых интегралов, из которых углы Эйлера вычисляются в квадратурах.

Случай Ковалевской

В этом случае $I_\eta = I_\zeta = 2I_\xi$. Закрепленная точка располагается на оси симметрии $O\xi$, а центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки тела.

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Движение этого тела можно разложить на переносное поступательное вместе с полюсом, в качестве которого обычно выбирают центр масс C, и относительное движение вокруг центра масс C (рис. 3.7).

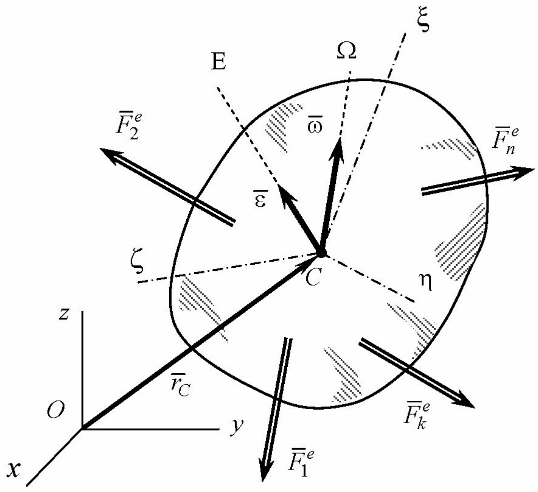


Рис. 3. 7 Свободное движение твердого тела.

Для составления дифференциальных уравнений свободного движения применим теорему о движения центра масс

$$m\ddot{\bar{r}}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

и теорему об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс

$$\frac{d\bar{L}_C}{dt} = \bar{M}_C^e.$$

Совмещая оси подвижной системы координат с главными осями инерции $C\zeta\eta\xi$ и записывая данные теоремы в проекциях на оси подвижной и неподвижной системы, получим шесть дифференциальных уравнений движения свободного твердого тела:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_c &= \sum F_{k_x}^e, & I_\zeta \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\eta\omega_\zeta\left(I_\xi - I_\eta\right) &= \sum M_\zeta\left(\bar{F}_k^e\right),\\
m\ddot{y}_c &= \sum F_{k_y}^e, & I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta\omega_\xi\left(I_\xi - I_\zeta\right) &= \sum M_\eta\left(\bar{F}_k^e\right),\\
m\ddot{z}_c &= \sum F_{k_z}^e, & I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\xi\omega_\eta\left(I_\eta - I_\zeta\right) &= \sum M_\xi\left(\bar{F}_k^e\right).
\end{aligned}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Развитие современной техники ставит перед инженерами самые разнообразные задачи, связанные с расчетом различных сооружений, с проектированием, производством и эксплуатацией всевозможных машин и механизмов.

Исследование поведения любой механической системы всегда начинается с выбора физической модели. Переходя от реальной системы к ее физической модели обычно упрощают систему, пренебрегая несущественными для данной задачи факторами. Так, исследуя систему, состоящую из груза, подвешенного на нити, пренебрегают размерами груза, массой и податливостью нити, сопротивлением среды, трением в точке подвеса и т.д.; при этом получается известная физическая модель — математический маятник.

Ограниченность физических моделей играет существенную роль при исследовании колебательных явлений в механических системах.

Физические модели, которые описываются системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами принято называть линейными.

Выделение линейных моделей в особый класс вызывается рядом причин:

- С помощью линейных моделей исследуется широкий круг явлений, происходящих в различных механических системах;
- Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является, с математической точки зрения, элементарной задачей и поэтому инженер–исследователь стремится по возможности описать поведение системы с помощью линейной модели.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Колебания системы считаются малыми, если отклонения и скорости можно рассматривать как величины первого порядка малости по сравнению с характерными размерами и скоростями точек системы.

Механическая система может совершать малые колебания только вблизи устойчивого положения равновесия. Равновесие системы может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным (рис. 3. 8).

Рис. 3. 8 Различные виды равновесия

Равновесное положение системы является устойчивым, если система, равновесие которой нарушено весьма малым начальным отклонением q_{0_i} и (или) малой начальной скоростью q_{0_i}, совершает движение около этого положения.

Критерий устойчивости положения равновесия консервативных систем с голономными и стационарными связями устанавливается по виду зависимости потенциальной энергии системы от обобщённых координат. Для консервативной системы с N степенями свободы, уравнения равновесия имеют вид

$$Q_i = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \text{ где } i = 1, \; ..., N .$$

Сами уравнения равновесия не дают возможности оценить характер устойчивости или неустойчивости положения равновесия. Из них лишь следует, что положению равновесия соответствует экстремальное значение потенциальной энергии.

Условие устойчивости положения равновесия (достаточное) устанавливается теоремой Лагранжа – Дирихле:

если в положении равновесия системы потенциальная энергия имеет минимум, то это положение устойчиво.

Условием минимума любой функции является положительность второй производной от неё, при равенстве первой производной нулю. Поэтому

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i^{\,2}}\right|_{q_i = q_{покоя}} > 0 .$$

Если же вторая производная тоже равна нулю, то для оценки устойчивости необходимо вычислить последовательные производные

$$\left.\frac{\partial^k \Pi}{\partial q_i^{\,k}}\right|_{q_i = q_{покоя}} ,$$

и если первая не равная нулю производная имеет чётный порядок и при этом положительна, то потенциальная энергия при $q_i = q_{покоя}$ имеет минимум, а следовательно, это положение равновесия системы устойчиво. Если же эта производная имеет нечётный порядок, то при $q_i = q_{покоя}$ нет ни максимума, ни минимума. Оценка состояния равновесия системы в положении, когда она не имеет минимума потенциальной энергии, приводится в специальных теоремах А. М. Ляпунова.

Потенциальная энергия системы

Потенциальная энергия системы с N степенями свободы в общем случае является функцией обобщённых координат

$$\Pi = \Pi\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_N\right) = \Pi\left(q\right).$$

Рассмотрим только малые смещения системы из положения равновесия. В этом случае обобщённые координаты q_i, отсчитываемые от равновесного положения, можно рассматривать как величины первого порядка малости.

В положении равновесия системы $\left(q_i = 0,\ i = \overline{1,\ N}\right)$ потенциальную энергию можно принять равной нулю $\Pi(0) = 0$. Удерживая в разложении потенциальной энергии Π в ряд Маклорена только члены второго порядка малости, получаем

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_{\substack{q_i=0\\ q_j=0}} q_i q_j\,.$$

Обозначим

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i\,\partial q_j}\right|_{\substack{q_i=0\\ q_j=0}} = c_{ij} = c_{ji}, i = \overline{1,\ N}\,; j = \overline{1,\ N}\,,$$

где постоянные c_{ij} имеют название коэффициентов жёсткости. Таким образом, приближённое выражение для потенциальной энергии системы окончательно принимает вид квадратичной функции от обобщенных координат q_i:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\, q_i\, q_j\,.$$

Для систем с одной степенью свободы потенциальная энергия вычисляется, следовательно, по формуле:

$$\Pi = \frac{1}{2} c\, q^2\,.$$

Кинетическая энергия системы

Кинетическая энергия — однородная квадратичная функция обобщённых скоростей с коэффициентами, являющимися функциями обобщённых координат

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\bar{r}}_k \cdot \dot{\bar{r}}_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,,$$

где $M_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \cdot \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}$ — симметричная матрица коэффициентов M_{ij}.

Так как рассматриваются малые колебания системы, то ограничимся в разложении коэффициентов в ряд Маклорена только первыми постоянными членами, которые обозначим так: $M_{ij}\Big|_{q_m=0} = \tilde{m}_{ij}$.

Кинетическая энергия системы приближённо представится в форме:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{m}_{ij} \, \dot{q}_i \, \dot{q}_j ,$$

где $\tilde{m}_{ij}$ — симметричные коэффициенты инерции.

Отсюда для системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{1}{2} \tilde{m} \, \dot{q}^2 .$$

Диссипативная функция Рэлея

Пусть на любую точку системы, имеющую N степеней свободы, действует сила сопротивления пропорциональная первой степени скорости

$$\overline{R}_k = -\mu_k \, \overline{v}_k = -\mu_k \, \dot{\overline{r}}_k ,$$

где μ_k — коэффициент сопротивления.

Силе сопротивления $\overline{R}$ сопоставляется диссипативная функция Рэлея $\Re$, характеризующая быстроту рассеивания (диссипации) энергии системы

$$\Re = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \overline{v}_k^{\,2}}{2} ,$$

которую при стационарных связях $\dot{\overline{r}}_k = \sum_{m=1}^{N} \dfrac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_m} \dot{q}_m$ можно представить следующим образом:

$$\Re = \frac{1}{2} \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \beta_{ij} \left(q \right) \, \dot{q}_i \, \dot{q}_j ,$$

где $\beta_{ij}(q) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}$.

Для системы с конечным числом степеней свободы, ограничиваясь в разложении коэффициентов в ряд Маклорена только первыми членами, получим выражение функции рассеивания Рэлея в виде однородной положительной квадратичной функции обобщённых скоростей

$$\Re = \frac{1}{2} \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \tilde{\beta}_{ij} \, \dot{q}_i \, \dot{q}_j ,$$

где $\tilde{\beta}_{ij}$ — постоянные, называемые коэффициентами диссипации или приведёнными коэффициентами сопротивления.

Отсюда для системы с одной степенью свободы

$$\Re = \frac{1}{2} \tilde{\beta} \, \dot{q}^2 .$$

Уравнение Лагранжа II рода

Уравнение Лагранжа II рода для механической системы со стационарными голономными связями в общем случае неконсервативных (не потенциальных) сил запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m^{\Pi} + Q_m^{R} + Q_m^{\text{H}}, \; m = 1, \; \ldots, \; n ,$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} \tilde{m}_{ij} \, \dot{q}_i \, \dot{q}_j$ — кинетическая энергия системы,

$Q_m^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_m}$, $Q_m^{R} = -\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}_m}$, $Q_m^{H} = \frac{\delta A}{\delta q_m}$ — обобщенные потенциальные силы, обобщенные силы сопротивления и обобщенные неконсервативные силы соответственно.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Рассмотрим движение голономной механической системы с одной степенью свободы под действием упругой силы $\overline{F}$, обладающей потенциалом. Положение системы определяется одной обобщённой координатой q, которую будем отсчитывать от равновесного состояния. Тогда движение системы будет описываться одним уравнением Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$

Подставляя значения кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний системы.

$$\ddot{q}+k^2 q=0,$$

где $k=\sqrt{c/\tilde{m}}$ — частота свободных колебаний механической системы.

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$q(t)=A_1\sin(kt)+A_2\cos(kt) \text{ или } q(t)=A_0\sin(kt+\alpha_0),$$

где A_0, A_1, A_2, α_0 — константы, определяемые из начальных условий:

$$A_1=q_0,\ A_2=\frac{\dot{q}_0}{k} \text{ или } A_0=\sqrt{q_0^{\,2}+\left(\frac{\dot{q}}{k}\right)^2},\alpha_0=arctg\left(\frac{k\,q_0}{\dot{q}_0}\right).$$

q_0, $\dot{q}_0$ — начальное положение и начальная скорость.

Типичный график движения механической системы, определяемый данным уравнением, изображен на рис. 3. 9. Коэффициенты интегрирования A_0, α_0 имеют вполне определенный механический смысл (см. рис. 3. 9):

- A_0 — амплитуда свободных колебаний,
- α_0 — начальнаяфаза колебаний.

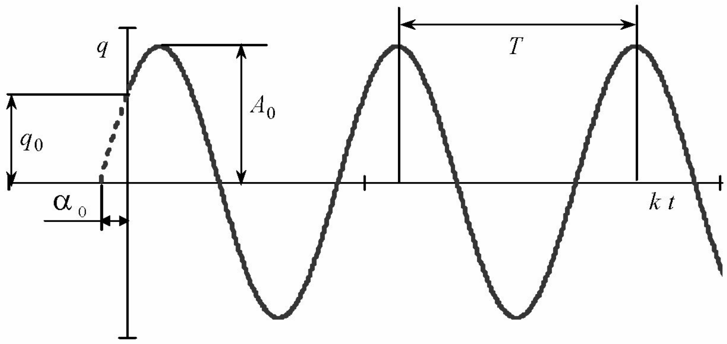


Рис. 3. 9 График свободных колебаний без учета сопротивления

Величина обратная частоте свободных колебаний называется периодом колебаний и определяется выражением $T = 2\pi/k$.

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Если на любую точку механической системы с наложенными стационарными голономными связями, кроме упругой силы, действует сила сопротивления пропорциональная первой степени скорости $\overline{R}_k = -\mu_k\,\overline{v}_k$, то уравнение Лагранжа II рода можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}.$$

Подставляя выражения для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции в уравнение Лагранжа II рода, получим

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0$$

где $n = \tilde{\beta}/2\tilde{m}$ — коэффициент демпфирования (затухания).

Т.к. корни характеристического уравнения соответствующие данному дифференциальному уравнению определяются выражениями

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i k_1, \text{ где } k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

то его решение зависит от соотношений между коэффициентами n и k:

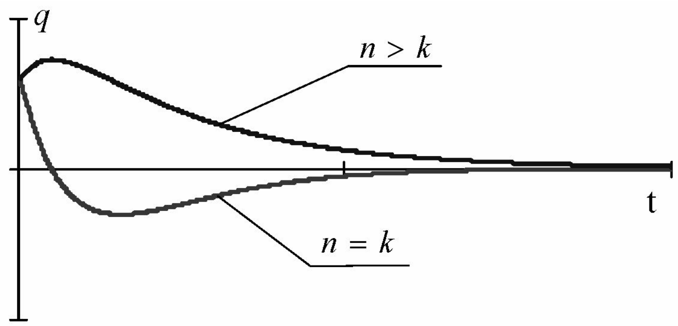


Рис. 3. 10 Апериодическое движение при большом сопротивлении

- $n = k$ — решение имеет вид (рис. 3. 10):

$$q(t) = e^{-nt}\left[A_1 t + A_2\right];$$

- $n > k$ — решение имеет вид (рис. 3. 10):

$$q(t) = A_0 e^{-nt} sh\left(k_1 t + \alpha_0\right),$$

где A_0, A_1, A_2, α_0 — также как и в случае колебательного движения без сопротивления, константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

При $n > k$ движение механической системы имеет апериодический характер, типичный график которого, изображен на рис. 3. 10.

- $n < k$ — (случай малого сопротивления) решение имеет вид (рис. 3. 11):

$$q(t) = e^{-nt}\left[A_1 \sin(k't) + A_2 \cos(k't)\right] \text{или}\, q(t) = A_0\, e^{-nt} \sin(k't + \alpha_0).$$

Здесь $k' = k\sqrt{1-\nu^2}$ — называется частотой свободных затухающих колебаний, $\nu = n/k$ — относительный коэффициент затухания, константы интегрирования A_0, A_1, A_2, α_0 определяются из начальных условий q_0, $\dot{q}_0$:

$$A_1 = q_0,\ A_2 = \frac{\dot{q}_0/k + \nu q_0}{\sqrt{1-\nu^2}}, A_0 = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2}},\ \alpha_0 = arctg\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Величина α_0 — как и в случае колебаний без учета сопротивления, называется начальной фазой колебаний. Коэффициент A_0 определяет координату пересечения образующей графика $q(t)$ — A_0e^{-nt} с осью q.(см. Рис. 3. 11)

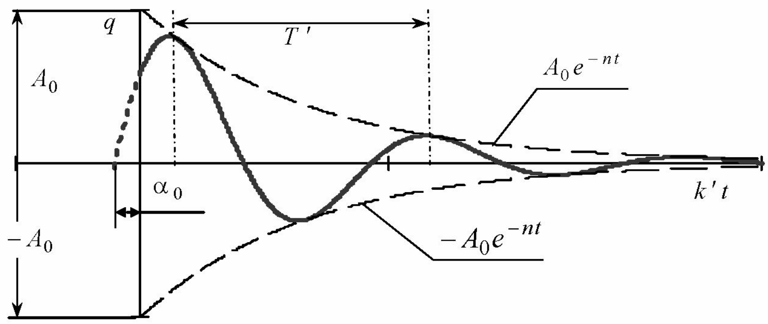


Рис. 3. 11 Свободные затухающие колебания.

Период затухающих колебаний определяется соотношением

$$T' = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\nu^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\nu^2}}.$$

Степень затухания колебательного движения определяется декрементом колебаний D, который определяется отношением двух последовательных максимумов кривой $q(t)$ или логарифмическим декрементом η:

$$\eta = \ln(D) = \ln\left(\frac{A_0e^{-nt}}{A_0\, e^{-n(t+T')}}\right) = \ln\left(e^{nT'}\right) = n\,T' = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}.$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть на некоторую точку механической системы с наложенными стационарными голономными связями, кроме упругой силы и силы сопротивления пропорциональной первой степени скорости, действует периодическое возмущение. Характер такого возмущения может иметь разные причины. Наиболее часто встречаются случаи силового и кинематического возмущения. В качестве примера рассмотрим динамическую модель машины, установленной на фундаменте (рис. 3. 12). Машина массой m является амортизируемым объектом, а фундамент – основанием. Амортизатор, помещенный между объектом и основанием, имеет приведённый коэффициент жёсткости c и приведённый коэффициент демпфирования μ. На рис. 3. 12 (а) представлен случай силового возмущения, а на рис. 3. 12 (б) — случай кинематического возмущения.

При силовом возмущении уравнение Лагранжа II рода для такой системы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}+Q^{\text{Н}},$$

где обобщенная неконсервативная сила Q^{H} определяется выражением

$$Q^{H}=F_0 \sin\left(pt+\varphi\right),$$

а F_0, p, φ — амплитуда, частота и фаза возмущающей силы.

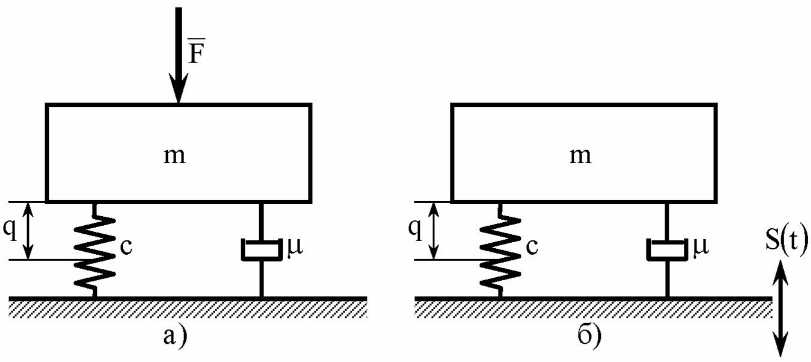


Рис. 3. 12 Динамическая модель амортизируемой машины

При кинематическом возмущении $s(t)$, где $s(t)=S_0 \sin\left(pt+\varphi\right)$ — закон обобщенного перемещения основания, S_0, p, φ — амплитуда, частота и фаза кинематического возбуждения, уравнение Лагранжа II рода примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}-\frac{\partial \Re}{\partial \dot{q}}+Q^{\Phi},$$

где обобщенная сила инерции Q^{Φ} определяется выражением, аналогичным выражению для неконсервативной силы

$$Q^{\Phi}=F_0 \sin\left(pt+\varphi\right),$$

а F_0 — амплитуда обобщенной силы инерции, определяемая выражением

$$F_0 = \tilde{m}\, S_0\, p^2 .$$

Подставляя выражения для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции в уравнение Лагранжа, окончательно получим дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы с учётом сил сопротивления и возмущающей силы

$$\ddot{q} + 2n\,\dot{q} + k^2\, q = h_0 \sin\left(p\,t + \varphi\right),$$

где $h_0 = F_0 / \tilde{m}$, $h_0 = S_0\, p^2 / \tilde{m}$ — относительная амплитуда возмущения при силовом или кинематическом возбуждении соответственно.

Данное уравнение описывает колебательный процесс механической системы с одной степенью свободы как в случае силового, так и кинематического возбуждения. Однако механический смысл коэффициентов правой части различен. Существенное различие этих случаев состоит в том, что при силовом возбуждении h_0 не зависит от частоты возмущения, а при кинематическом возбуждении величина h_0 пропорционально квадрату частоты возмущения.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения для случая малого сопротивления $n < k$, имеет вид

$$q = A_0\, e^{-nt} \sin\left(k' t + \alpha_0\right) + B_0 \sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right),$$

где $B_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний;

$\beta_0 = arctg\left(-B_2 / B_1\right)$ — сдвиг фазы вынужденных колебаний по сравнению с фазой возмущающей силы, а выражения для коэффициентов B_1, B_2, B_0 и β_0 имеют вид:

$$B_1 = B \frac{\left(1 - z^2\right)}{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\nu^2 z^2}; \quad B_2 = -B \frac{2\nu z}{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\nu^2 z^2};$$

$$B_0 = B \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\nu^2 z^2}}; \quad \beta_0 = arctg\left(\frac{2\nu z}{1 - z^2}\right).$$

Здесь $z = p/k$ — коэффициент расстройки или относительная частота возмущающей силы; $\nu = n/k$ — относительный коэффициент затухания (демпфирования); $B = \dfrac{F_0}{\tilde{m} k^2}$ — при силовом возмущении (B в данном случае — величина равная статическому отклонению системы под действием постоянной возмущающей силы, модуль которой равен F_0), $B = S_0 z^2$ — при кинематическом возмущении. Константы A_0 и α_0 определяются из начальных условий:

$$A_0 = \sqrt{(q_0 - B_2)^2 + \frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{\dot{q}_0}{k} - zB_1 + \nu\left(q_0 - B_2\right)\right]^2},$$

$$\alpha_0 = arctg\frac{\left(q_0 - B_2\right)\sqrt{1-\nu^2}}{\dfrac{\dot{q}_0}{k} - zB_1 + \nu\left(q_0 - B_2\right)}.$$

Таким образом, вынужденные колебания представляют собой сложение двух колебательных процессов: собственных колебаний и колебаний от действия возмущающей силы. Типичный график вынужденных колебаний при наличии сопротивления изображен на рис. 3. 13.

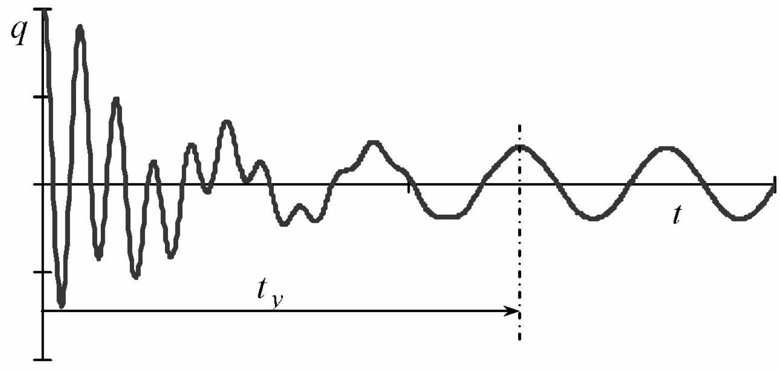


Рис. 3. 13 Вынужденные колебания при наличии сопротивления

Следует отметить, что учет сопротивления движению приводит к тому что, начиная с некоторого момента времени t_y, называемого временем установления, колебательное движение определяется только действием возмущающей силы и движение называется установившимися колебаниями.

При отсутствии сопротивления $\nu = 0$ закон колебательного движения, при выполнении условия $k \neq p$, будет иметь вид (рис. 3. 14)

$$q = A_0 \sin\left(k\,t + \alpha_0\right) + B_0 \sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right),$$

где $B_0 = B\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-z^2\right)^2}} = B\dfrac{1}{\left|1-z^2\right|}$, $\beta_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } z<1 \\ \pi & \text{при } z>1 \end{cases}$, а константы A_0 и α_0 определяются из начальных условий:

$$A_0 = \sqrt{{q_0}^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{b\,z}{1-z^2}\right)^2},\ \alpha_0 = arctg\left(\frac{q_0}{\dfrac{\dot{q}_0}{k} - \dfrac{b\,z}{1-z^2}}\right).$$

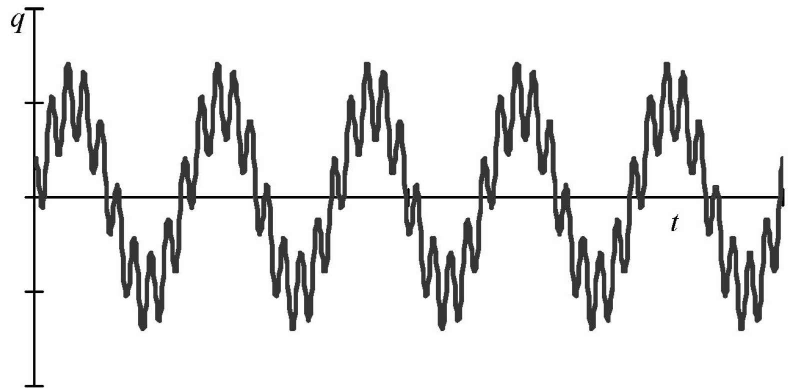


Рис. 3. 14 Вынужденные незатухающие колебания.

Типичный график вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления изображен на рис. 3. 14.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для дальнейшего исследования вынужденных колебаний, с целью упрощения преобразований, можно, не нарушая общности, принять нулевые начальные условия:

$$q\big|_{t=0} = q_0 \equiv 0,\ \dot{q}\big|_{t=0} = \dot{q}_0 \equiv 0\,.$$

Уравнение вынужденных колебаний в этом случае примет вид

$$q = A_0\, e^{-nt} \sin\left(k' t + \alpha_0\right) + B_0 \sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right),$$

где

$$B_0 = B\frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\nu^2 z^2}};\ \beta_0 = arctg\left(\frac{2\nu z}{1 - z^2}\right),$$

$$A_0 = \sqrt{B_2{}^2 + \frac{1}{1-\nu^2}\left(\nu B_2 + z B_1\right)^2},\ \alpha_0 = arctg\frac{B_2\sqrt{1-\nu^2}}{\nu B_2 + z B_1}.$$

Резонанс

Явление, возникающее при совпадении частот вынужденных и свободных колебаний механической системы, называется резонансом. В этом случае значение коэффициента расстройки $z = 1$. Уравнение движения, сдвиг фазы и амплитуда вынужденных колебаний определяются равенством

$$q = A_0\, e^{-nt} \sin\left(k' t + \alpha_0\right) + B_0 \sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right),$$

где $B_0 = B\dfrac{1}{2\nu}$, $\beta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $A_0 = \dfrac{B}{2}\dfrac{1}{\nu\sqrt{1-\nu^2}}$, $\alpha_0 = arctg\dfrac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu}$.

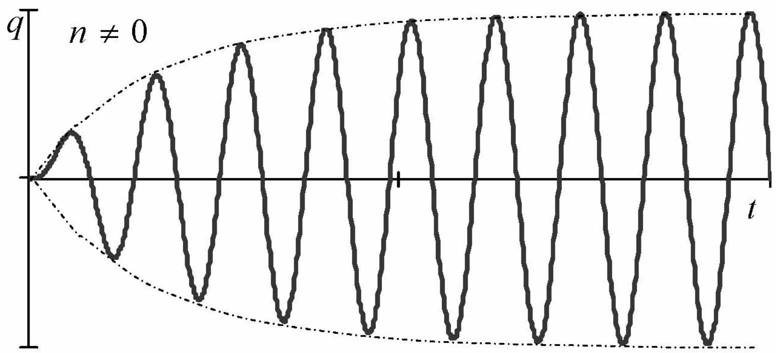


Рис. 3. 15 Резонансные колебания при наличии сопротивления.

Здесь, при наличии сопротивления движению и любом значении коэффициента демпфирования $\nu \neq 0$, амплитуда вынужденных колебаний остается конечной величиной. График такого движения представлен на рис. 3. 15.

При отсутствии сопротивления $\nu = 0$ уравнение колебаний теряет физический смысл, т.к. амплитуда вынужденных колебаний становится равной бесконечности. Для получения уравнения, описывающего явление резонанса при отсутствии сопротивления, разложим величину e^{-nt} в ряд по степеням n и перейдем к пределу при $n \to 0, z \to 1$.

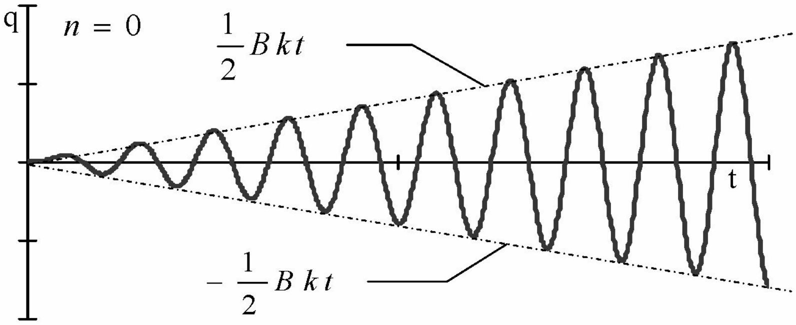


Рис. 3. 16 Резонансные колебания при отсутствии сопротивления.

Уравнение движения примет вид:

$$q(t) = \frac{Bk}{2} t \sin\left(kt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Данное выражение показывает, что амплитуда вынужденных колебаний возрастает пропорционально времени. Частота и период вынужденных колебаний при резонансе и отсутствии сопротивления равны частоте и периоду свободных колебаний механической системы (см. рис. 3. 16).

Биения.

При частоте возмущающей силы, близкой к частоте свободных колебаний, наступает явление, называемое биениями.

Особенно ярко это явление проявляется при отсутствии сопротивления движению (см. рис. 3. 17), т. е. при $n = 0$ и $z \approx 1$. В этом случае получим

$$q(t) = B(t) \cos(pt + \varphi),$$

где $B(t) = \dfrac{2B}{1-z^2} \sin\left(\dfrac{p-k}{2}t\right)$.

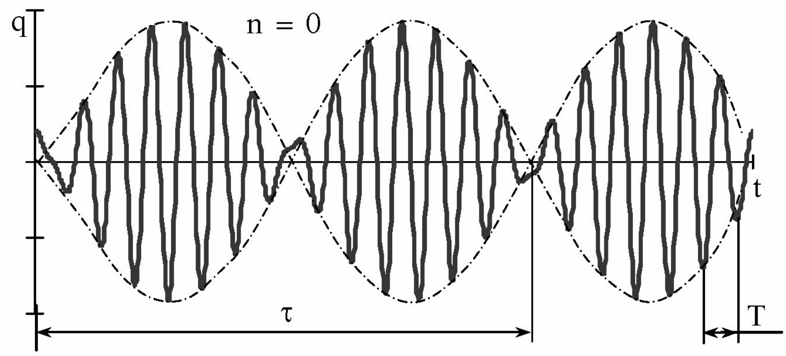


Рис. 3. 17 Биения при отсутствие сопротивления.

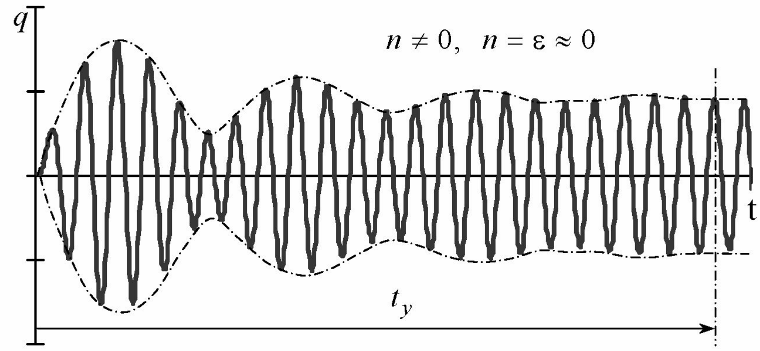


Рис. 3. 18 Биения при наличии сопротивления.

Движение, определяемые данным уравнением, можно рассматривать как колебания частоты p и периода $T = 2\pi/p$, амплитуда которых $B(t)$ является периодической функцией с периодом $\tau = \dfrac{4\pi}{p-k}$. Так как $p \approx k$, то период τ велик по сравнению с периодом вынужденных колебаний T.

Аналогичное явление можно получить и при наличии сопротивления движению (см. рис. 3. 18), в том случае, если коэффициент сопротивления n достаточно мал.

КРИТЕРИИ И УСЛОВИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Теория вынужденных колебаний имеет много важных приложений в различных областях науки и техники. При проектировании конструкции, подверженной воздействиям возмущающих сил, чаще всего стараются подобрать соотношения размеров и масс конструкции, чтобы по возможности отодвинуть условия нормального режима работы ее от резонансных условий. При этом используется важное свойство колебательного процесса, позволяющее при больших значениях возмущающей силы сделать амплитуду вынужденных колебаний очень малой за счет подбора соотношений между частотами p и k.

Из анализа уравнения вынужденных колебаний можно сделать следующие выводы:

- вынужденные колебания при наличии сопротивления с течением времени, величина которого зависит от степени сопротивления, происходят с частотой возмущающей силы, поскольку $A_0 = const$, $\left|\sin\left(k't+\alpha_0\right)\right| \le 1$ при любом значении t, а e^{-nt} — быстро убывающая функция.
- амплитуда вынужденных колебаний от начальных условий и времени не зависит. При резонансе $p = k$, амплитуда вынужденных колебаний остается конечной и притом не самой большой из возможных значений для данной системы.
- в вынужденных колебаниях при наличии сопротивления всегда имеет место сдвиг фазы колебаний по сравнению с фазой возмущающей силы. При резонансе, когда $p = k$, сдвиг фазы принимает значение равное $\pi / 2$. В случае малого сопротивления в области достаточно удаленной от резонанса когда $p >> k$, значения фазового смещения стремятся к величине π, а при $p << k$ стремится к нулю.

При исследовании колебательных процессов механических систем используются два основных критерия: коэффициент динамичности и коэффициент передачи силы.

Коэффициент динамичности.

Амплитудой вынужденных колебаний определяются максимальные динамические напряжения, возникающие в упругих системах от воздействия на них гармонических возмущений. При одном и том же значении амплитуды возмущения, возникающие в системе напряжения, могут значительно изменяться в зависимости от изменения частот p или k, а также коэффициента сопротивления n. Для исследования зависимости амплитуды установившегося режима от частоты p возмущения и коэффициента сопротивления n, построим амплитудно-частотную характеристику системы. Для оценки изменений амплитуды B_0 вводится в рассмотрение величина λ, называемая коэффициентом динамичности:

$$\lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\,\nu^2\, z^2}}$$ — при силовом возмущении;

$$\lambda = \frac{B}{B_0} = \frac{z^2}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\,\nu^2\, z^2}}$$ — при кинематическом возмущении.

При силовом возмущении коэффициент динамичности является отношением амплитуды вынужденных колебаний B_0 к величине статического отклонения системы под действием постоянной возмущающей силы, модуль которой равен F_0.

При кинематическом возмущении коэффициент динамичности является отношением амплитуды вынужденных колебаний B_0 к амплитуде кинематического возбуждения S_0.

Коэффициент динамичности является функцией двух переменных и, следовательно, его можно отобразить поверхностью $f(\lambda,\ z,\ \nu)=0$ в пространстве λ, z, ν (рис. 3. 19 — 3. 22).

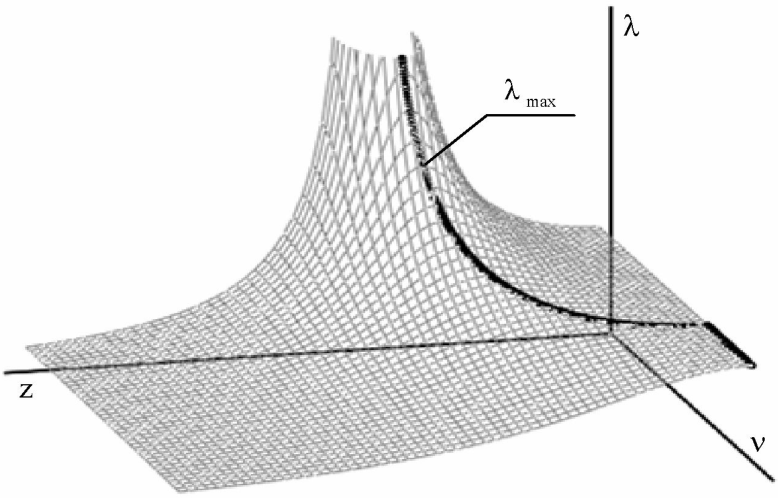


Рис. 3. 19 Коэффициент динамичности $\lambda(z,\ \nu)$ при силовом возмущении.

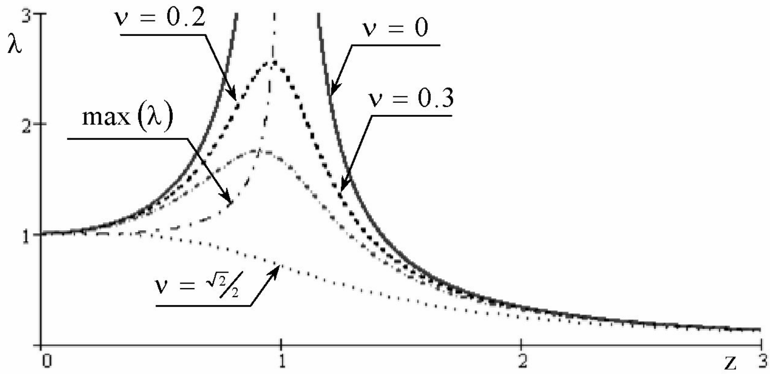


Рис. 3. 20 Сечения поверхности $\lambda(z,\ \nu)$ при фиксированных значениях ν для силового возмущения

Анализ данной поверхности показывает (см. рис. 3. 19 — рис. 3. 22), что

- Максимальные значения коэффициента динамичности, а, следовательно, и амплитуд вынужденных колебаний достигаются при следующих значениях z (рис. 3. 20, рис. 3. 22):

$$z=\begin{cases}\sqrt{1-2\nu^2} & при \quad \nu\le \sqrt{2}/2\\ 0 & при \quad \nu>\sqrt{2}/2\end{cases}$$ — для силового возмущения,

$$z=\begin{cases}\sqrt{1-2\nu^2} & при \quad \nu\le \sqrt{2}/2\\ \infty & при \quad \nu>\sqrt{2}/2\end{cases}$$ — для кинематического возмущения.

- Максимальные значения коэффициента динамичности определяются выражением

$$\max(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\ \nu\sqrt{1-\nu^2}} & при \quad \nu\le \sqrt{2}/2\\ 1 & при \quad \nu>\sqrt{2}/2\end{cases}$$

- В областях близких к резонансу $z\approx 1$, реализуемых при $p\approx k$, максимальное значение коэффициента динамичности определяется величиной $\lambda=1/2\nu$.

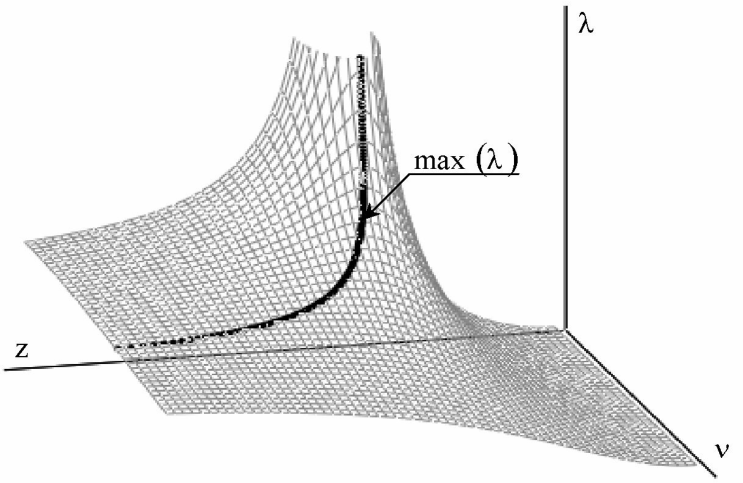


Рис. 3. 21 Коэффициент динамичности $\lambda(z,\ \nu)$ *при кинематическом возмущении.*

- В областях, достаточно далеких от резонанса $z>>1$ или $z\approx 0$, реализуемых при $p>>k$ и $p<<k$ соответственно, амплитуда почти не отличается от соответствующих амплитуд вынужденных колебаний без сопротивления и ее можно вычислять по формулам

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2}} \text{ — при силовом возмущении,}$$

$$\lambda = \frac{z^2}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2}} \text{ — при кинематическом возмущении.}$$

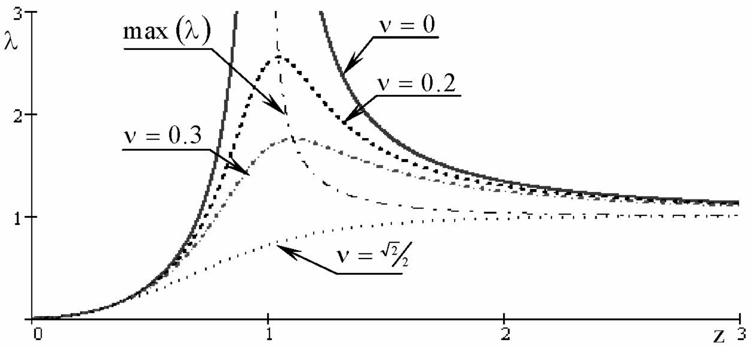


Рис. 3. 22 Сечения поверхности $\lambda(z,\ \nu)$ при фиксированных значениях ν для кинематического возмущения.

Коэффициент передачи силы

Согласно принципу Даламбера, записанного в обобщенных координатах, уравнение движения механической системы с одной степенью свободы имеет вид

$$Q^{\Phi} + Q + Q^{H} = 0,$$

где Q^{Φ} — обобщенная сила инерции, $Q = -c\,q - \tilde{\beta}\,\dot{q}$ — обобщенная сила реактивных сил, Q^{H} — обобщенная неконсервативная сила.

Уравнение движения амортизируемого объекта для случая установившегося движения приводится к виду

$$q = B_0 \sin\left(p\,t + \varphi - \beta_0\right),$$

Дифференцирование этого уравнения даёт

$$\dot{q} = B_0\, p \cos\left(p\,t + \varphi - \beta_0\right).$$

Подставляя значения q и $\dot{q}$ нетрудно найти силу, передаваемую амортизатором на основание:

$$Q = -\lambda F_0 \left[\sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right) + \frac{2np}{k^2} \cos\left(pt + \varphi - \beta_0\right) \right],$$

где λ — коэффициент динамичности.

Данное выражение может быть преобразовано к виду

$$Q = -\lambda F_0 \sqrt{1 + 4\nu^2 z^2} \sin\left(pt + \varphi - \beta_0\right), \text{где} tg\left(\delta\right) = 2\nu z.$$

Максимальное значение Q равно

$$Q_{\max} = \lambda F_0 \sqrt{1 + 4\nu^2 z^2}.$$

Отношение наибольшей силы, передаваемой основанию, к амплитуде возмущающей силы называется коэффициентом передачи силы K (см. рис. 3. 23)

$$K\left(z,\ \nu\right) = \frac{\sqrt{1 + 4\nu^2 z^2}}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4\nu^2 z^2}}.$$

Коэффициент передачи силы для амортизатора совпадает с коэффициентом динамически только при отсутствии демпфирования$\left(n = 0\right)$.

Максимальные значения коэффициента передачи силы достигаются при следующих значениях z

$$z = \frac{1}{2\nu} \sqrt{\sqrt{1 + 8\nu^2} - 1}.$$

Коэффициент передачи сил характеризует качество виброзащиты. При жёстком соединении $\left(c = 0,\ \tilde{\beta} = 0\right)$ амортизируемого объекта и основания —$K = 1$. При $K < 1$ виброзащита эффективна. Амплитуда силы$Q_{\max}$, действующей на основание, уменьшается. При $K > 1$ применение амортизатора нецелесообразно. На рис. 3. 24 изображён графики сечений поверхности $K(z,\ \nu)$ (рис. 3. 23) при различных значенияхν. Все кривые, независимо от демпфирования, пересекаются в точке с координатами $\left(\sqrt{2};\, 1\right)$ (рис. 3. 24).

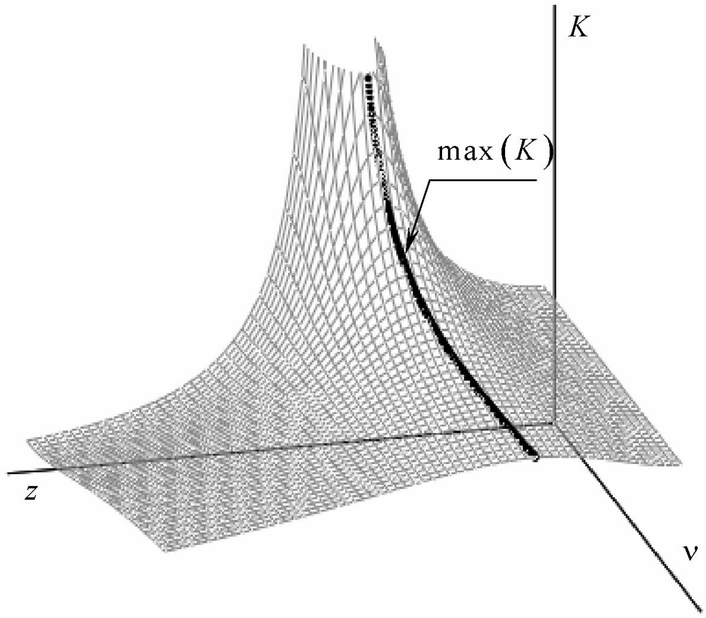


Рис. 3. 23 Коэффициент передачи силы $K(z,\ \nu)$

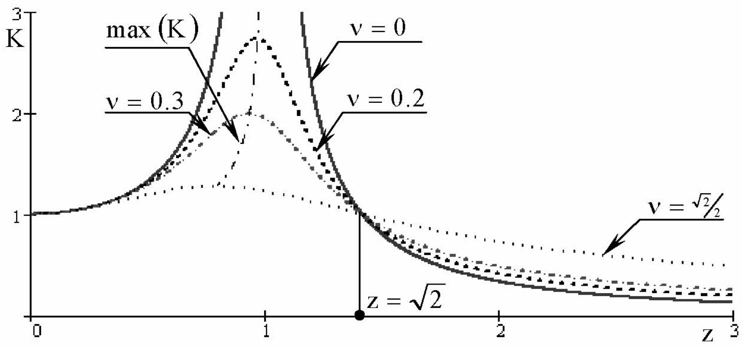


Рис. 3. 24 Сечения поверхности $K\left(z,\ \nu\right)$ *при фиксированных значениях* ν

Следовательно, чтобы $Q_{\max}$ была меньше амплитуды F_0, должно быть выполнено условие $z > \sqrt{2}$. Обычно принимают $z > 4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. т. 1, 2; М., 1985 и предыдущие издания.
2. Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. М., 1983.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, ч. 1 – М.: 1954 и последующие издания, 342 с.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, ч. 2. – М.: 1955 и последующие издания, 598 с.
5. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., 1986 и предыдущие издания.
6. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. т. 1, 2; М., 1984 и предыдущие издания.
7. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1986 и предыдущие издания.
8. Сборник задач по теоретической механике // Под ред. К. С. Колесникова. М., 1983.

Дополнительный

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие в 3-х т. Т. 1. Статика и кинематика – М.: Наука, 1990, 672 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие в 3-х т. Т. 2. Динамика — М.: Наука, 1991, 640 с.
3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: Учеб. пособие в 3-х т. Т. 3. Специальные главы теоретической механики. – М.: Наука, 1973 488 с.

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике // Под ред. А.А. Яблонского. М., 1985 и предыдущие издания (содержит примеры решения задач).
5. Бертяев В.Д., Баранов А.А., Булатов Л.А., Кутепов В.С. Исследование колебаний механических систем и основы виброзащиты: Учебное пособие. – Тула: ТулГУ, 2002, 140 с
6. Бертяев В.Д., Булатов Л.А., Митяев А.Г., Каплун А.Б. Исследование колебаний механической системы с гибкой упругой связью: Учебное пособие. – Тула: ТулГУ, 2002, 108 с.