

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ**  
Учебное пособие

Краткий курс лекций по теории колебаний содержит краткое изложение основных понятий теории колебаний, основных видов и форм колебаний. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы. Приведены примеры с подробными решениями. Изложены некоторые динамические процессы, возникающие при движении автотранспорта и определены критические скорости движения. Пособие предназначено для студентов специальностей 2910, 2911.

## Предисловие

В отечественном и зарубежном мостостроении, в строительстве вообще, широко внедряются новые высокопрочные материалы, совершенствуются конструктивные формы и методы расчетов. Вызванное этим облегчение конструкций приводит к уменьшению жесткости и к резкому повышению чувствительности их различным по своей природе динамическим воздействиям. В связи с этим резко возрастает и роль динамических расчетов.

Теория малых колебаний механических систем и является частью общей теории колебаний и широко используется при динамических расчетах, исследованиях динамического поведения мостовых сооружений, особенно новых конструктивных форм, кроме того и при изучении безопасности движения автотранспорта.

Именно поэтому, настоящий курс лекций предназначен в основном для студентов специальностей 2910, 2904 и его целью является ознакомление студентов этих специальностей с основными положениями теории малых колебаний механической системы.

В кратком курсе лекций приведены основные понятия теории колебаний, рассмотрены вопросы о выборе динамической расчетной схемы механической системы. Кроме того, уделено внимание на различные виды и формы колебаний, которые могут возникать в различных по своей форме и структуре мостовых сооружениях.

Более подробно изложены свободные и вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы. Приведены примеры с подробными решениями, имеющие конкретные отношения для студентов специальностей 2910, 29.

Во втором разделе курса лекций в необходимой степени изложены динамические процессы, возникающие при движении автотранспорта. При этом особое внимание отведено решению задач по определению и исследованию критических скоростей движения автотранспорта.

## Теория колебаний

---

### Глава 1

#### Основы теории колебаний механических систем

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для современной техники. В чем заключается важность теории колебаний? Известно, что развитие техники, в частности мостостроение, с одной стороны связано с непрерывным ростом скоростей движений, давлений, с резким возрастанием мощности и быстроходности машин, а с другой стороны наблюдается стремление к эффективному использованию несущей способности конструкций и уменьшению их веса. Вот эти факторы в совокупности и приводят к резкому увеличению воздействия динамических нагрузок на элементы конструкций и различных сооружений. Таким образом, в инженерных расчетах становится все более и более важным решение задач колебаний. Только на основе теории колебаний могут быть полностью выяснены такие практически важные проблемы как колебания рельсового пути и мостов, колебания фундаментов и т.д. Лишь на базе глубокого изучения различных видов колебаний можно установить наиболее удачные пропорции элементов конструкций, в том числе и мостов. Это и позволяет отодвигать эксплуатационные условия конструкций возможно дальше от условий возникновения больших колебаний.

При изучении колебательных процессов, которые происходят в различных конструкциях и сооружениях, исследуемые объекты всегда заменяются некоторыми моделями. Такая замена изучаемого объекта моделью позволяет инженеру эффективно использовать хорошо разработанный математический аппарат. Поэтому инженеру приходится выбирать одну из возможных моделей механической системы.

Он должен, например, решить рассматривать ли ему систему с сосредоточенными или распределенными параметрами, линейную или нелинейную. Он должен выбирать интересующие его возмущения и динамические характеристики.

## §1. О выборе одной из возможных динамических расчетных схем механической системы

Наиболее простой (не всегда достаточно точной) является схематизация механической системы в виде системы с одной степенью свободы. Как известно, числом степеней свободы механической колебательной системы называют число независимых параметров (обобщенных координат), однозначно определяющих положение всех материальных точек системы в любой момент времени. Для реальных механических систем это число всегда бесконечно велико. Но в некоторых задачах практически достаточен учет конечного числа существенных степеней свободы. При такой схематизации системы наиболее легкие элементы полагают лишенными массы, сравнительно жесткие части и конструкции считают недеформируемыми, а отдельные малые тела системы представляют в виде материальных точек и т.д. Следует также отметить, что иногда число степеней свободы конструкции ограничивают путем некоторых заранее формулируемых предположений о конфигурации системы при колебаниях. Приведение конкретных объектов к виду систем с одной и несколькими степенями свободы показано рис. 1.

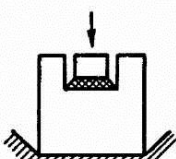

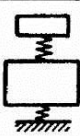

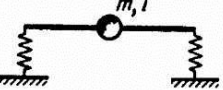
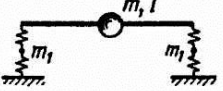
Заданная механическая система	Динамическая расчетная схема	Число степеней свободы
 Ковочный молот (продольные колебания)	 Простейшая	1
	 Уточненная	2
 Автомобиль (плоские колебания)	 Простейшая	2
	 Уточненная	4

Рис. 1



В качестве примера выбора расчетной схемы механической системы рассмотрим следующие объекты.

1. Пусть через водосток переброшен временный двухпролетный мост, имеющий понтонную среднюю опору. Левая опора моста шарнирно-неподвижная, правая шарнирно-подвижная. Пусть пролетные строения – одинаковы. По мосту со скоростью  $v$  следует колонна одинаковых тяжелых гусеничных машин по направлению от неподвижной опоры к подвижной (рис.2). Скажем, интервал между машинами мал. То для определения критической скорости движения колонн можно рассматривать следующую упрощенную динамическую систему с одной степенью свободы: пролеты моста абсолютно жесткие тела; колонна машин – непрерывно движущаяся сплошная масса; действие воды на понтон – как сила упругости пружины с некоторой жесткостью.

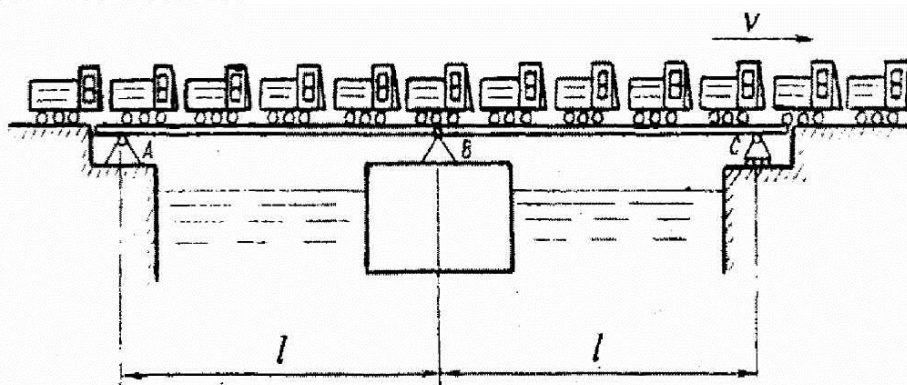


Рис. 2

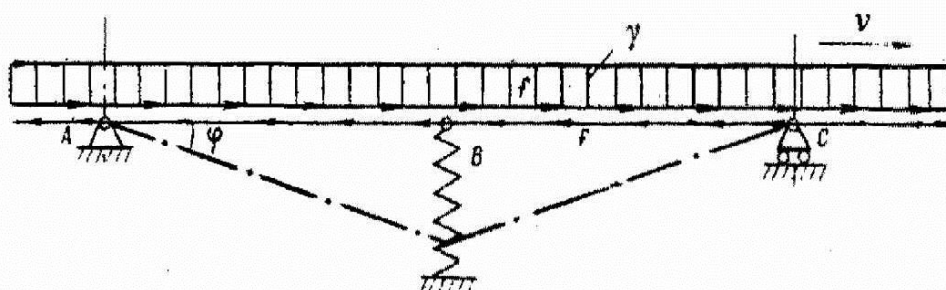


Рис.3.

Колонна машин заменяется полосой равномерно распределенной нагрузки с погонной массой  $\gamma$  и погонной силой тяги  $f$  (рис.3).

2. При проектировании мостов в сейсмических районах инженеры встречаются весьма сложными явлениями и процессами. Например, такими, как сейсмические волны в неоднородных средах, тектонические и сейсмогравитационные деформации в грунтах, динамические взаимодействие фундаментов с основанием, пространственные колебания и

пластические деформации конструкций. До настоящего времени закономерности этих явлений и процессов изучены далеко не полностью. Точное описание работы моста при землетрясении настолько сложно, что для получения практического результата приходится прибегать к упрощенным моделям.

Как известно, фактические значения коэффициента трения в подвижных опорных частях (катки, валки любого типа) составляют 0,01-0,02. Сопоставление сил трения в подвижных опорных частях с сейсмическими усилиями, смещающими подвижный конец пролетного строения относительно опоры, показывает, что силы трения в опорных частях преодолеваются уже при 7-ми балльных землетрясениях. Поскольку подвижные опорные части с малым трением не создают достаточной связи между подвижными концами пролетных строений и опорами, отдельные секции моста, разделенные опорными частями каткового, валкового, и секторного типов, можно рассматривать как самостоятельные колебательные системы.

И динамическую расчетную схему секции моста, рассматриваемой как независимая колебательная система, принимают в виде некоторого упругого невесомого стержня переменного сечения, несущего конечное число материальных точек (грузов), массы которых обозначим  $m_k$  (рис.4-5). Сейсмические силы, действующие на грузы, удобно выразить через веса грузов  $Q_k = m_k g$ .

Таким образом, для вычисления сейсмических сил нужно знать веса грузов и их координаты.

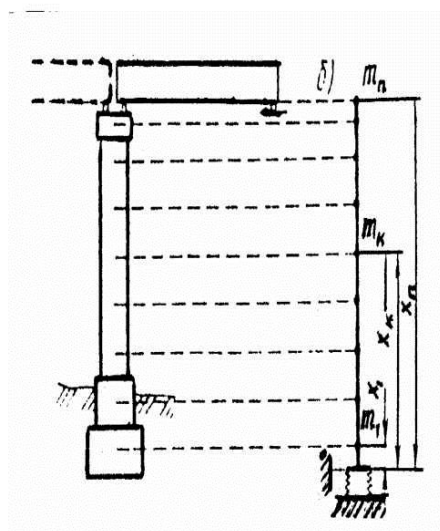


Рис. 4

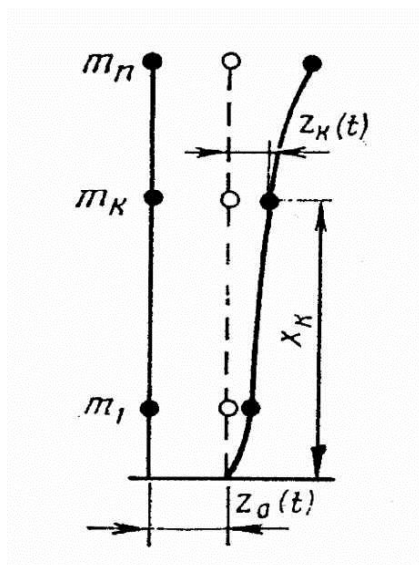


Рис. 5

Устои при землетрясениях находятся в особенно сложных условиях. Кроме сил инерции, возникающих при колебаниях устоя, на него действует сейсмическое давление грунта. Эти нагрузки связаны между собой,

поскольку грунт насыпи препятствует колебаниям устоя. Вместе с тем известно, что при землетрясениях способность грунта воспринимать боковое давление уменьшается, а при 10-и балльных воздействиях насыпи на подходах к мостам частично разрушаются. Так что исследование совместных колебаний насыпи и устоя в точной постановке сопряжено с большими трудностями. Обычно силы инерции устоя определяют без учета влияния грунта насыпи как для «свободно» стоящей опоры, а давление грунта на устой при землетрясении вычисляют, пренебрегая колебаниями устоя.

Таким образом, при проектировании балочных пролетных строений используются различные расчетные модели, начиная от простейших одномерных до довольно сложных трехмерных (пространственных), в деталях отражающие реальные геометрические формы конструкций и взаимодействие главных балок, плиты проезжей части и связей.

Из приведенных примеров видно, что при проектировании любой конструкции, в том числе и при проектировании мостов большое значение имеет принцип простоты расчетной модели, поскольку использование простой модели экономит время и уменьшает вероятность погрешности расчета. Но при этом, разумеется, что принимаемая расчетная схема должна достаточно полно и правильно отражать работу реального сооружения. Кроме того расчетные схемы должны допускать и использование ЭВМ.

## § 2. Основные понятия

**Закон колебания.** Законом колебаний какой-либо координаты называют функцию  $q = q(t)$ , описывающую изменения этой координаты

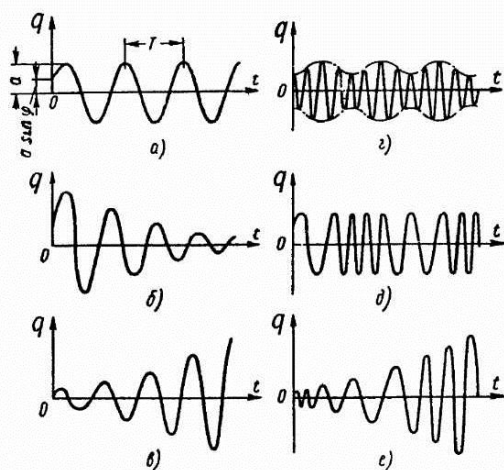


Рис.6

во времени. Можно говорить и о колебаниях других кинематических величин (скорости, ускорения) или динамических величин (внешние силы, внутренние усилия, опорные реакции, напряжения и т.д.) Различные виды колебания показаны на рис.6

Простейшими являются гармонические колебания (рис.6 а). Гармонические колебания описываются уравнением:

$$q = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  амплитуда колебания;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - круговая частота колебаний,  $T$  - период колебаний,  $\varphi$  - начальная фаза.

**Амплитуда колебаний** – это величина, характеризующая наибольшее отклонение от нулевого значения величины, колеблющейся по определенному закону.

Период колебаний – наименьший промежуток времени, через который колеблющаяся система возвращается к исходному состоянию. Период колебаний – величина, обратная частоте колебаний.

Круговая частота – число колебаний, совершаемых за  $2\pi$  сек.  
 $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$      $\nu$  - число колебаний в сек.

$\Omega = \frac{1}{T}$  - величина обратная периоду колебаний, называют частотой колебания.

Частота колебаний измеряется в герцах. 1 *гц.* соответствует одному циклу изменения величины за 1 сек.

Кроме гармонических колебаний существует другие виды колебаний, например:

1. Затухающие и возрастающие (рис.6.б,в) колебания, когда происходит монотонное изменение амплитуды с постоянной частотой.

2. Биения, когда колебания происходят с периодическим изменением амплитуды при постоянной частоте (рис.6 г.).

3. Колебания с переменной частотой и постоянной амплитудой (рис.6.д.).

4. Колебания с переменной частотой и амплитудой (рис.6 е). Часто встречаются периодические, но не гармонические колебания (рис.7).

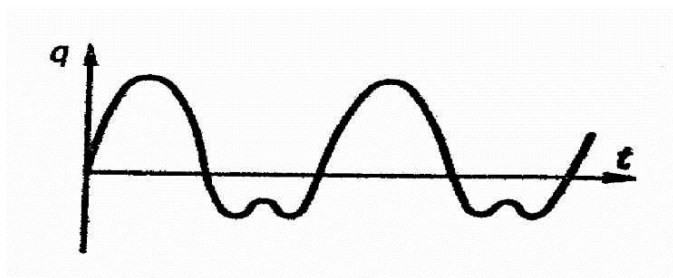


Рис.7

**Действующие силы при колебаниях.** Действующие силы весьма разнообразны по своей природе и по той роли, которые они играют в колебательных процессах. Их можно разделить на следующие категории:

**Возмущающие силы.** Они являются заданными функциями времени и вызывают колебания механических систем, на которые эти силы действуют. Источники возникновения возмущающих сил довольно разнообразны. Ими

могут быть различные инерционные эффекты, сгорания газовой смеси, переменное контактное давление при соударениях и т.д. Изменения возмущающих сил во времени могут быть самыми различными.

Например, некоторые источники возмущающих сил показаны на рис.8.

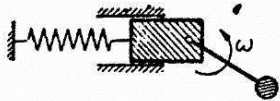
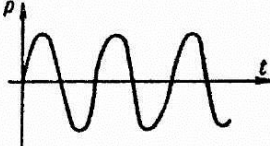
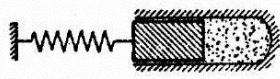
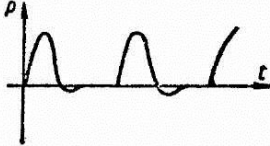

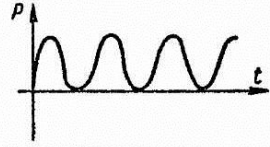

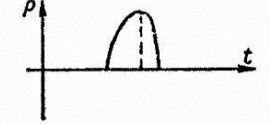
Источник	Закон изменения
<p>Переменные силы инерции</p> 	
<p>Переменное давление газа</p> 	
<p>Переменное притяжение электромагнита *</p> 	
<p>Кратковременный импульс (удар)</p> 	

Рис.8

Следует отметить, что в некоторых случаях возмущающие силы не являются детерминированными функциями.

Например, сейсмические нагрузки; действие неровности дороги на автомобиль; волнение, в условиях которого происходит качка корабля. В этих случаях возмущающие силы представляют случайный процесс. Характеристики таких случайных процессов получают путем обработки экспериментальных данных.

**Восстанавливающие силы.** В механических системах с упругими связями восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих связей в процессах колебаний. В других случаях роль восстанавливающей силы может играть вес (маятник), сила поддержания жидкости (корабль), или сила упругости газа (пневмосистемы).

**Силы трения.** Различают два типа трения: *сухое* и *вязкое*. *Сухое трение* - это трение, возникающее между соприкасающимися твердыми телами. В случае соприкосновения твердых тел, при любой скорости их относительного



движения, силы трения всегда имеют конечную величину и сохраняют конечную величину, когда относительная скорость падает до нуля. Зависимость между вектором силы сухого трения  $\vec{F}$  и вектором относительной скорости  $\vec{v}$  будет

$$\vec{F} = -fN \frac{\vec{v}}{v},$$

где  $f$  - коэффициент трения;  $N$  - нормальная реакция;  $v$  - модуль вектора скорости.

*Вязкое трение* - это сопротивление, возникающее движущимся твердом телом и соприкасающейся с ним жидкостью или газом. В случае взаимодействия твердого тела с жидкостью или газом силы трения с уменьшением скорости также уменьшаются и падают до нуля, когда скорость тела относительно среды падает до нуля. Зависимость между вектором силы вязкого трения  $\vec{F}$  и вектором относительной скорости  $\vec{v}$  будет

$$\vec{F} = -k\varphi(v) \frac{\vec{v}}{v},$$

где  $k$  - коэффициент трения;  $\varphi(v) = v$  - при малых относительных скоростях;  $\varphi(v) = v^2$  и т.д. при больших относительных скоростях.

**Коэффициент динамичности.** Для удобства учета динамических нагрузок в расчетной практике вводится коэффициент динамичности  $\mu$ . В разных областях техники могут быть вложены в это понятие разные определения. Поэтому при использовании этого коэффициента необходимо выяснить какого его определение. Обычно в ракетостроении под коэффициентом динамичности понимают отношение силы (статической плюс динамической), действующей на рассматриваемый элемент в данном расчетном случае, к статической силе:

$$\eta_D = \frac{F^D + F^{CT}}{F^{CT}}.$$

А в строительстве под коэффициентом динамичности понимают отношение максимальной динамической величины усилия, напряжения или перемещения к соответствующей статической величине, т.е.

$$\mu_D = \frac{F_D}{F_{CT}}.$$

Тогда связь между  $\eta_D$  и  $\mu_D$  будет

$$\eta_D = 1 + \mu_D.$$

Значение динамического коэффициента обычно определяется на основе анализа экспериментальных данных. Его значение существенно зависит от типа подвижного состава, а также конструкции и материала пролетных строений мостов.

Например, раньше динамический коэффициент для балочных разрезных пролетных строений железнодорожных металлических мостов рассчитывали по формуле (рис.9 кривая 1)

$$1 + \mu = 1 + \frac{27}{30 + \lambda} \geq 1,2,$$

а теперь определяется так (рис.9, кривая 2):

$$1 + \mu = 1 + \frac{18}{30 + \lambda} \geq 1,2.$$

В этих формулах  $\lambda = \ell$  длина расчетного пролета для основных элементов главных ферм (балок) или длина некоторого участка для элементов, работающих на местную нагрузку (стойки и подвески, элементы проезжей части).

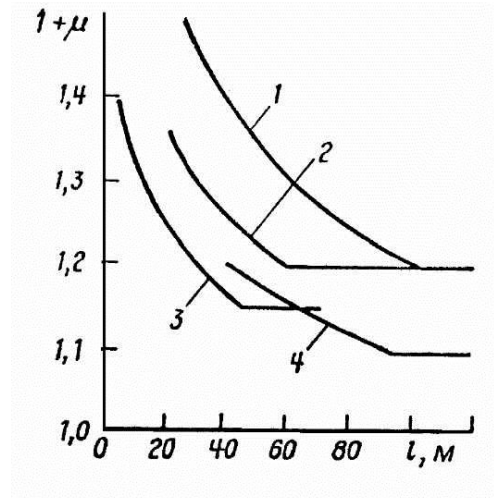


Рис. 9

### § 3. Основные виды колебаний

Остановимся на основных видах колебаний, встречающихся при анализе динамических явлений в различных конструкциях, сооружениях и мостах. Эти определения в теории колебаний установились в первую очередь на основании вида дифференциальных уравнений. Они характеризуют особенности движений и причины, их вызывающие.

**1. Собственные колебания.** Собственными (свободными) называются колебания, происходящие без воздействия внешних сил. Или колебания, происходящие после некоторого начального нарушения состояния равновесия механической системы, которая затем остается представленной самой себе и движется под действием восстанавливающих сил и, возможно, сил трения. В системах с одной степенью свободы это нарушение состояния равновесия характеризуется начальным смещением  $q_0$  и начальной скоростью  $\dot{q}_0$  ( $q$  - обобщенная координата, определяющая положение систем).

Независимо от конструкции для системы с одной степенью свободы дифференциальные уравнения собственных колебаниях однородны, т.е без правой части:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0,$$

$$q = Ae^{-nt} \sin(k^*t + \varphi), \quad k^* = \sqrt{k^2 - n^2},$$

где  $n$  - коэффициент затухания собственных колебаний. Амплитуду  $A$  колебаний и начальную фазу  $\varphi$  определяют из начальных условий;

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad m - \text{инерционный коэффициент (обобщенная масса);}$$

$c$  – коэффициент жесткости, представляющий собой статическую силу, способную вызвать перемещение равное единице.

**2. Вынужденные колебания.** Вынужденные колебания – это колебания, происходящие под действием вынуждающей силы. Или колебания, происходящие под действием заданных внешних сил (силовое возмущение) или заданных движений отдельных точек системы (кинематическое возмущение).

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний неоднородно, т.е. с правой частью:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = Q(t).$$

Если принять  $Q(t) = Q_0 \sin \Omega t$ , то будем иметь:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k^*t + \varphi) + B \sin(\Omega t + \psi_0).$$

**3. Автоколебания.** Автоколебания, незатухающие колебания, которые могут существовать в колебательной системе при отсутствии периодических внешних воздействий (в отличие от вынужденных колебаний) за счет наличия в системе активного элемента, восполняющего неизбежные в реальной системе потери энергии. Амплитуда и период автоколебаний определяются свойствами самой системы. Примеры автоколебаний – колебания маятника часов, электрические колебания в ламповом генераторе.

И так автоколебаниями называются установившиеся периодические колебания, происходящие в замкнутых системах за счет источника энергии, не обладающего колебательными свойствами. Автоколебания это самовозбуждающиеся колебания, нелинейные, тогда как в период самовозбуждения (неустановившийся режим) колебания могут быть линейными.

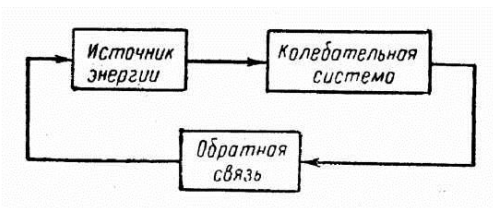


Рис. 10

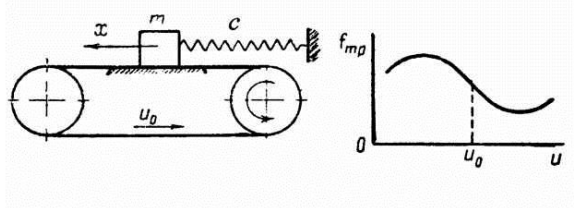


Рис. 11

Принципиальная замкнутая схема автоколебательной системы показана на рис.10. Она состоит из колебательной системы, источника энергии и обратной связи. Простейшим примером автоколебательной системы может служить маятник с «падающей» характеристикой трения рис.11. Колебательной системой является масса на пружине, источником энергии служит электродвигатель, приводящий в движение с постоянной скоростью



$u_0$  непрерывную ленту. Обратную связь осуществляет сила трения  $F_{Tp}(u)$ , где  $u$  - скорость скольжения между грузом и лентой.

Уравнение малых колебаний массы  $m$  имеет вид

$$m\ddot{q} + (h + b)\dot{q} + kq = 0, \quad (3.1)$$

где  $h$  - коэффициент внешнего сопротивления,

$$b = \left( \frac{\partial F_{Tp}}{\partial u} \right) u_0, \quad (3.2)$$

$u_0$  - скорость скольжения при  $\dot{q} = const = 0$ .

Если скорость движения ленты  $u_0$  выбрана так, что  $b < 0$ , и, кроме того,  $|b| > h$ , то из уравнения (3.1) следует, что движение массы  $m$  будет неустойчивым, а колебания нарастающими. В этом можно убедиться и без анализа уравнений. Действительно, за один полупериод, когда масса и лента движутся в одном направлении,  $u < u_0$ ,  $F_{Tp}(u) > F_{Tp}(u_0)$ , сила трения «помогает» колебаниям. За следующий полупериод, когда масса и лента движутся в разные стороны,  $u > u_0$ ,  $F_{Tp}(u) < F_{Tp}(u_0)$ , работа силы трения, отнимающая энергию у маятника, будет меньше, чем в первый полупериод. Следовательно, за целый период лента передает энергию от электродвигателя маятнику и увеличивает амплитуду колебаний. От источников энергии, не обладающими колебательными свойствами, обратная связь отбирает энергию отдельными порциями. Вследствие этого и происходит нарастание амплитуд колебаний.

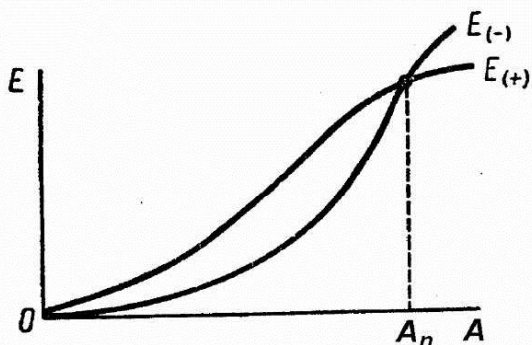


Рис.12

энергии  $E^{(-)}$  будут равны (рис.12), возрастание колебаний прекратится и в системе установятся устойчивые периодические колебания, с амплитудой  $A_n$  (автоколебания).

Наиболее популярно и подробно автоколебания изложены в [15], [23].

**4. Параметрические колебания.** Параметрическими называются колебания, которые обусловлены зависимостью параметров системы от времени. Например, если каким-либо внешним устройством периодически изменять длину маятника, то можно возбудить параметрические колебания.

По линейным уравнениям типа (3.1) можно установить лишь возможность нарастания колебаний. Но как только колебания достигнут таких значений, что сила трения будет выходить за пределы линейного участка, колебания будут определяться нелинейным уравнением. При некотором значении амплитуды приток

энергии в систему  $E^{(+)}$  и рассеяние

Наиболее благоприятные условия для возбуждения параметрических колебаний при частоте изменения параметра в два раза больше собственной частоты системы. Уравнения параметрических колебаний имеют вид

$$\ddot{q} + \alpha(t)q = 0.$$

Сейчас смысл параметрических колебаний поясним на простой маятниковой модели (рис.13), в которой стержень будем считать жестким и невесомым.

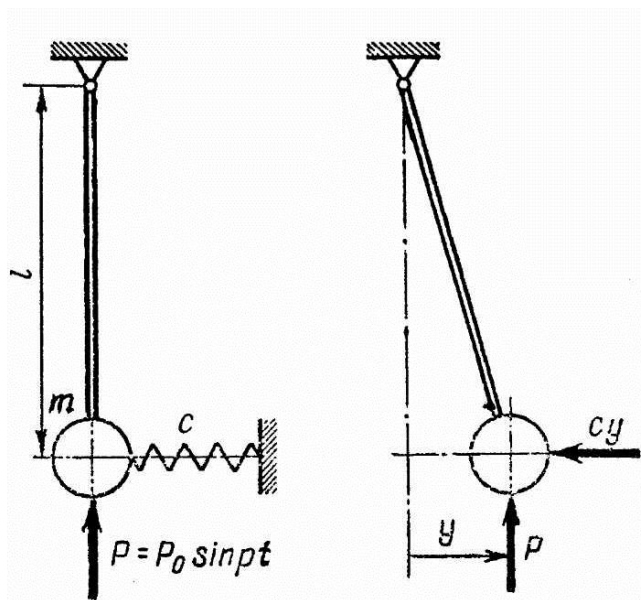


Рис. 13

Уравнение поперечных движений массы  $m$  будет

$$m\ddot{y}\ell = P_0 y \sin pt - c y \ell - mgy$$

или

$$\ddot{y} + \omega^2 (1 - \varepsilon \sin pt) y = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\varepsilon = \frac{P_0}{m\ell\omega^2}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{\ell}. \quad (3.4)$$

Это уравнение параметрических колебаний, поскольку коэффициент при координате  $y$  зависит от времени. Уравнение (3.3) называется уравнением Матье и хорошо изучено.

Действие внешней силы  $P(t)$  здесь сводится к периодическому изменению параметра колебательной системы, в данном случае собственной частоты. Для такой системы характерно, что внешняя сила совершает работу не на основных, а на вторичных (меньших по порядку) перемещениях. Существенно, что в отличие от обычных вынужденных колебаний внешняя сила не способна сама по себе вызвать отклонение системы от равновесного положения. Необходимо некоторое внешнее воздействие, которое сообщит

хотя бы малое отклонение, после чего уже может сказаться роль внешней периодической силы  $P(t)$ .

Так как за один период поперечных колебаний масса  $m$  дважды достигает наибольшего отклонения в вертикальном направлении, то положительная работа силы  $P(t)$  будет наибольшей в том случае, когда  $P_{\max}$  будет совпадать с  $y_{\max}$  и  $p = 2\omega$ .

Таким образом, для возникновения параметрического резонанса наиболее благоприятная частота изменения внешней силы вдвое больше частоты собственных колебаний.

Вместе с тем раскачка системы возможна и в том случае, когда соотношение частот будет удовлетворять равенствам  $\omega = p$ ,  $\omega = 1,5p$ ,  $\omega = 2p$  ....

Наступление резонансного состояния зависит и от амплитуды силы  $P(t)$ .

О параметрических колебаниях можно прочитать в [13], [15].

**5. Нелинейные колебания.** Нелинейные колебания описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для упругих систем нелинейной может быть зависимость упругих сил от смещения, сил трения от скорости. Нелинейные колебания могут быть как собственные, так и вынужденные. Уравнение собственных колебаний имеет вид

$$m\ddot{q} + \varphi_1(\dot{q}) + \varphi_2(q) = 0.$$

Характерной особенностью собственных нелинейных колебаний является зависимость собственной частоты от амплитуды. Теория нелинейных колебаний изложена в [1].

## О динамической работе мостов

### § 4. Почему колеблются мосты

Как известно, современные тенденции отечественного и зарубежного мостостроения связаны с широким внедрением новых высокопрочных материалов, совершенствованием конструктивных форм и методов расчета. Вызванное этим облегчение конструкций привело к уменьшению жесткости, повышению чувствительности их к динамическим воздействиям. В связи с этим (а также с ростом нагрузок) резко возросла роль динамических расчетов, исследований динамического поведения мостовых конструкций, особенно новых конструктивных форм.

В процессе эксплуатации мосты испытывают помимо статических и динамические нагрузки. Ими являются силы инерции, которые возникают благодаря колебательным процессам, возникающим в элементах конструкций моста.

Колебания мостовых сооружений, как известно, вызываются различными нагрузками и воздействиями. К ним относятся подвижная нагрузка, порывы ветра, удары плывущих льдин и навал судов на опоры мостов, землетрясения, приводящие к появлению так называемых сейсмических сил, взрывная волна и др. Силы инерции увеличивают напряжения в элементах мостовых сооружений и могут создать затруднения для нормальной эксплуатации мостов. При определенных условиях они могут привести даже к аварии сооружения.

Регулярным (постоянным) фактором возбуждения колебаний мостов является подвижная нагрузка (поезда, автомобили, поезда метро, трамваи, пешеходы). Все остальные перечисленные выше воздействия носят случайный характер (иногда приводящие к аварийной ситуации) и поэтому они не должны допускаться или учитываться в особых условиях.

Существует много факторов динамического воздействия подвижной нагрузки на мосты. К главным относятся следующие:

*1. Скорость движения нагрузки (эффект скорости).*

Этот фактор определяет силы инерции, возникающие по причине движения нагрузки по криволинейной или ломанной траектории.

*2. Неуравновешенность локомотивов.*

Этот фактор возникает в железнодорожных мостах и определяет силы инерции, возникающие из-за периодического движения движущихся элементов (противовесы, кривошипно-шатунные механизмы, поршни и т.п.)

*3. Удары колес в неровностях пути и проезжей части на мостах. Их*

можно разделить на закономерные и случайные. К первым относятся стыки рельсов и переломы профиля пути на опорах мостов, ко вторым- всякого рода неровности и выбоины на проезжей части, рельсах и колесах подвижного состава, возникающие в результате неравномерного износа и угона.

4. *Колебания наддресорной части подвижного состава*, которые приводят к периодическому изменению давления на ось. Они вызываются ударом колес в неровностях пути на мостах, а также движением по извилистой траектории, возникающей из-за того, что поскольку продольные балки опираются на поперечные, то статические перемещения их под нагрузкой будут различными. Последнее обстоятельство получило название балочного эффекта.

5. *Влияние подвижного состава на железнодорожных мостах*. Этот фактор определяет горизонтальные силы воздействия подвижной нагрузки, возникающие по причине извилистого в плане движения вагонов и локомотивов из-за коничности бандажей.

6. *Пульсация статистических прогибов пролетных строений при движении нагрузки*, составленной из однотипных вагонов или автомобилей. Она определяется тем обстоятельством, что поскольку нагрузка сосредоточена в местах расположения осей, то всегда можно найти два положения ее, дающие наибольший и наименьший статические прогибы пролетного строения. Этот фактор называется кинематическим возбуждением.

Для менее жестких систем (висячих и некоторых видов вантовых мостов) определяющим типом динамического воздействия служит взаимодействие конструкции с потоком воздуха при сильном ветре.

Оценивая влияния приведенных факторов динамического воздействия следует отметить, что,

- во – первых, влияние эффекта скорости незначительно и им можно пренебрегать;
- во – вторых, влияние неуравновешенности локомотивов существенно при паровой тяге и незначительно при электровозной и тепловозной тяге;
- в - третьих, влияние подвижного состава в основном вызывает пространственные колебания пролетных строений и при рассмотрении плоских вертикальных колебаний их можно не принимать во внимание;
- в - четвертых, колебания наддресорного строения проявляются при достаточно больших скоростях движения (более 60-70 км/ч);
- в - пятых, с введением бесстыкового пути на мостах роль ударов колес подвижного состава заметно уменьшается.

Следует отметить, что изучение динамических процессов, вызываемых подвижной нагрузкой, может проводиться в двух аспектах:

- исследование поведения сооружения под действием заданной нагрузки;

-исследование комплексной системы пролетное строение -подвижная нагрузка, т.е. изучение взаимодействия пролетного строения с подвижной нагрузкой.

Пока скорости движения были не велики рессоры не работали как упругие элементы, допустим был первый аспект.

В современных условиях высокоскоростного движения становится актуальным второй аспект.

Актуальность этой проблемы обосновывается тем, что при высоких скоростях движения колебания подвижной нагрузки на мосту могут проходить значительно более неблагоприятно, чем на подходах. Это при определенных условиях может угрожать безопасности движения поездов и автомобилей на мосту.

## **§ 5. Динамическое воздействие подвижной нагрузки на мосты**

В практике влияние динамического воздействия подвижной нагрузки на железнодорожные мосты учитывается путем умножения значения нормативной нагрузки на динамический коэффициент. Значение динамического коэффициента существенно зависит от типа подвижного состава, а также конструкции и материала пролетных строений мостов. Например, для железобетонных балочных пролетных строений и рамных конструкции (в том числе сквозных надарочных строений, а также железобетонных сквозных опор), динамический коэффициент вычисляется по формуле

$$1 + \mu = 1 + \frac{10}{20 + \lambda} \geq 1,15,$$

где  $\lambda = \ell$  - для основных элементов пролетных строений. Из формулы видно, что с увеличением пролета значение динамического коэффициента уменьшается. Это происходит по двум причинам:

-во-первых, с увеличением пролета уменьшается соотношение между массами нагрузки и пролетного строения;

-во-вторых, при этом возрастает взаимное погашение динамического воздействия от различных факторов. Динамическое воздействие на массивные арочные пролетные строения (бетонные и каменные) со сплошным над сводными строением, а также на мостовые опоры невелико. Поэтому динамический коэффициент для них принимается равным единице ( $\mu = 1$ ).

## **§ 6. Об особенностях колебаний на мостах**

Колебания пролетных строений при движении по ним поезда вызывают соответствующие колебания вагонов. При определенных условиях может

сложиться такая ситуация, что рессоры вагонов обезгрузятся, т.е. окажутся растянутыми. В этом случае при ударе колеса в стыке рельсов оно может сойти с рельса, что, соответственно, приведет к аварии. Это, разумеется недопустимо. Кроме того, большие колебания пассажирских вагонов плохо отражаются на самочувствии пассажиров, т.е. делает пребывание пассажиров в поезде некомфортабельным. Большие колебания вагонов приводят также к значительному износу колес и рельсов. Вот почему по условиям нормальной эксплуатации требуется, чтобы динамические перемещения рессор не превышали некоторой части статического прогиба.

Перемещения рессор при колебаниях вагонов существенно зависят от упругих прогибов пролетных строений под нагрузкой, поэтому последние ограничиваются.

Раньше считалось, что упругий прогиб  $f$  не должен превышать одной тысячной части расчетного пролета  $\ell$ , т.е.

$$f \leq \frac{\ell}{1000}. \quad (6.1)$$

В настоящее время это норма облегчена, и допустимый прогиб определяется по формуле

$$f \leq \frac{\ell}{800 - 1,25\ell} \leq \frac{\ell}{600}. \quad (6.2)$$

Последние исследования показывают, что можно не связывать норму прогиба с пролетом и ограничиться оценкой сверху в формуле (6.2), т.е.

$$f \leq \frac{\ell}{600}. \quad (6.3)$$

Формулы (6.1.)-(6.3), как говорят, нормируют вертикальную жесткость металлических пролетных строений железнодорожных мостов. Что касается горизонтальной жесткости пролетных строений, то она нормируется косвенно не по прогибу, а по периоду горизонтальных колебаний, т.е. времени одного полного колебания

$$T_2 \leq 0,01\ell \leq 1,5c.$$

Нормы жесткости приобретают большое практическое значение в связи применением в мостостроении высокопрочных сталей и алюминиевых сплавов. Пролетные строения из этих материалов обладают пониженной жесткостью, т.е. большим прогибом, который не соответствует условиям (6.1) и (6.2). В этом случае пролетные строения приходится рассчитывать не на прочность, а на жесткость, что сводит на нет преимущества от применения современных прогрессивных материалов. Норма (6.3) снимает эти ограничения.

Пониженная жесткость пролетных строений из высокопрочных сталей объясняется тем, что из-за высокой прочности размеры сечений элементов уменьшаются, что приводит к увеличению прогиба. А при использовании

алюминиевых сплавов низкая жесткость их объясняется повышенной деформативностью.

Как выйти из положения? Для уменьшения неблагоприятного влияния прогибов профилю пути на мостах придается некоторый начальный (строительный) подъем по плавной кривой. Чем больше стрела  $f_0$  начального подъема, тем меньше будут конечные значения прогибов и углов перелома профиля над опорами под расчетной (грузовые поезда) подвижной нагрузкой. Следовательно, тем более плавной будет траектория движения.

Однако большая величина начального подъема пути и может ухудшить динамику движения вагонов пассажирских поездов. Дело в том, что прогибы пролетных строений под легкой нагрузкой весьма малы и пассажирский поезд движется фактически по траекторий, близкой к кривой начального подъема пути. Возникающие при этом на многопролетных мостах возмущающие силы увеличивают размах вертикальных колебаний вагонов и ухудшают плавность хода поезда.

В связи с этим установлены некоторые предельные значения стрелы  $f_0$  начального подъема пути на мостах: для линий с пассажирским скоростным движением  $f_0 \leq \ell / 2000$  при скорости  $v \leq 160$  км/ч и для линий с грузовым движением  $f_0 \leq \ell / 1000$  при  $v \leq 120$  км/ч.

Соответственно ограничиваются предельные значения тангенса углов перелома профиля пути над опорами в размере 0.005 и 0.007.

## **§ 7. О некоторых особенностях динамической работы автодорожных, городских и пешеходных мостов**

Основной фактор динамического воздействия автомобилей на автодорожные и городские мосты - это неровности проезжей части мостов и на ближних подходах к ним. Они вызываются торможением и колебанием кузовов автомобилей, что приводит к неравномерному износу и утону мягких покрытий. Для городских мостов важный фактор динамического воздействия – это удары колес трамваем в стыках рельсов и на переломах профиля над опорами. Для мостов под метро помимо ударов колес вагонов в стыках рельсов имеет значение также кинематическое возбуждение.

Динамическое действие подвижной нагрузки на автодорожные и городские мосты учитывается так же, как и для железнодорожных мостов, т.е. при помощи динамического коэффициента.

Накопленные опытные данные свидетельствуют о том, что для пешеходных и городских мостов, на проезжей части которых возможно стесненное движение большой толпы людей ( в связи с демонстрациями, шествиями, гуляниями и др.), могут возникнуть колебания с большими амплитудами (размахом), которые не только вызывают неприятное



психологическое действие на идущих, но и опасны для прочности конструкции.

Вот почему существует ограничение, состоящее в том, что период свободных вертикальных колебаний (время одного полного колебания) не должен находиться в интервале 0,45-0,6 с. Соответствующий запрещенный интервал для периода горизонтальных колебаний составляет 0,9-1,2 с, т.е. границы интервала два раза больше.

Но опыты показывают, что на пролетных строениях, имеющих периоды свободных колебаний в интервале 0,3 – 0,6 с. одиночные тяжелые грузовые машины могут вызвать повышенное динамическое действие (рис.14).

Его надо учитывать только при расчете тех элементов, для которых статическая нагрузка имеет существенное значение, т.е для пролетных строений малой длины и ширины, а также для (некоторых) элементов больших пролетных строений, работающих на местную нагрузку (продольные балки, плиты проезжей части и др.).

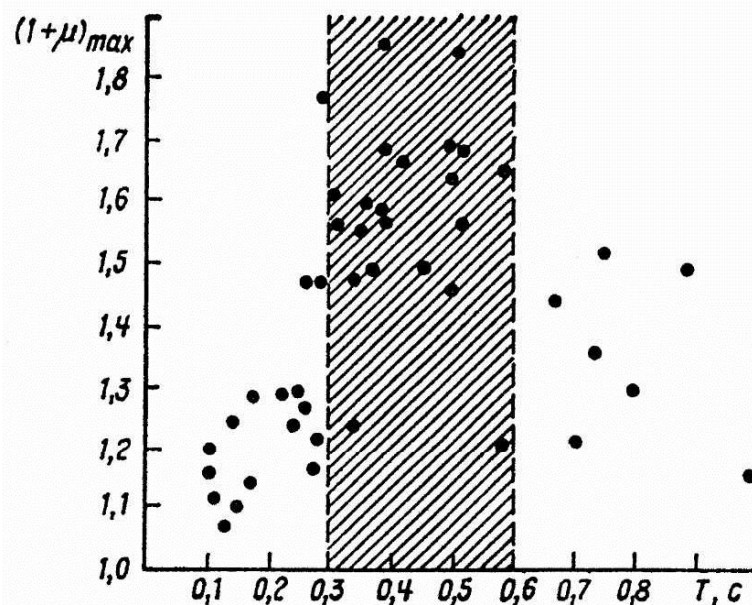


Рис. 14

Однако при испытаниях тех же мостов группой (колонной) автомобилей максимальные динамические коэффициенты оказываются существенно более низкими, чем при одиночных машинах. Наиболее резкое снижение динамического воздействия наблюдается именно для пролетных строений, периоды которых попадают в интервал 0,3 -0,6с. (рис.14 заштрихованная часть). Вот почему в настоящее время для автодорожных мостов нет ограничений по периодам свободных колебаний.

## § 8. Аэродинамика висячих и вантовых мостов

Висячие мосты появились очень давно. Для перехода через реку люди выбирали на обоих берегах по дереву. Между ними натягивали веревки из растений, на которых укладывали настил из тростника и бамбука. Так возникал с первобытных времен висячий мост.

Висячие мосты (рис.15) состоят из следующих основных элементов: цепей или кабелей (1), балки жесткости (2), опорной части (3), пилонов (4), оттяжек (5), подвесок (6) и анкерных устоев (7). Висячие системы позволяют перекрывать без устройства промежуточных опор очень большие пролеты. Наибольший пролет висячих мостов может измениться от 1410 до 3000 метров.

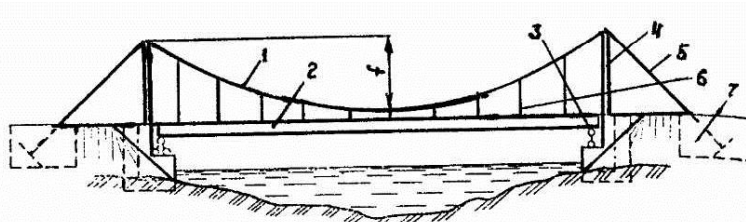


Рис. 15

Аэродинамика мостов в общей проблеме обеспечения их аэродинамической устойчивости как одно из направлений динамики сооружений своим рождением обязана висячему мосту Такома в США, катастрофа которого в 1940 г. привлекла внимание не только инженеров-мостостроителей, но и многих выдающихся ученых в области теоретической механики, аэрогидромеханики. Эта крупнейшая в истории мостостроения катастрофа. Висячий мост Такома-Нарроуз у города Такома с пролетом 855 м 7 ноября 1940 года был разрушен от ветра. Имели место случаи опрокидывания пролетных строений ветром. Так, 29 июля 1944г. двухпролетная стальная неразрезная ферма моста через р. Миссисипи была сброшена с опор, в чем проявили себя также и аэродинамические силы.

Такомская катастрофа положила начало систематическому изучению ветровых воздействий на висячие и вантовые мосты. Последняя четверть XX века была отмечена систематическими и интенсивными теоретическими и экспериментальными исследованиями в области аэродинамики строительных конструкций, в том числе и мостов.

К настоящему времени накоплен большой опыт в практике проектирования отдельных классов сооружений.

Остановимся кратко на этапах проектирования и сооружения мостовых конструкций, чувствительных к действию ветра. Исторически прослеживаются три этапа.

Первый этап - это доминирующий этап. На этом этапе считалось обеспечение статической прочности мостов путем повышения изгибной жесткости сооружений. Аэродинамическая устойчивость обеспечивалась совершенно случайно.

Второй этап - начало второго этапа связано с аварией Такомоского моста. С этой поры вопросу аэродинамической устойчивости уделяется особое внимание. На этом этапе стали широко применять испытания моделей в аэродинамических трубах с целью повышения аэродинамической устойчивости сооружений.

Третий этап - это научно обоснованный подход к выбору конструктивных форм мостов с точки зрения обеспечения их аэродинамической устойчивости. Здесь под аэродинамической устойчивостью понимается способность конструкций противостоять воздействиям ветра.

Аэродинамика мостов, как, впрочем, и любых других тел, охватывает аэродинамику и аэроупругость. Аэродинамика изучает аэродинамические силы, действующие на конструкции при обтекании их ветровым потоком.

Аэроупругость рассматривает физико-технические процессы и явления, возникающие при взаимодействии конструкции с потоком, т.е. поведение конструкции в потоке, реакцию сооружений и их отдельных элементов на действие ветрового потока.

Влияние ветра на прочность и надежность гибких конструкций весьма велико. Нагрузки, действующие на конструкции, как известно, подразделяются на статические и динамические. Такое же деление справедливо и для ветровой нагрузки. На рис.16 схематически показано ее воздействие и возникающие при этом различные физические явления.

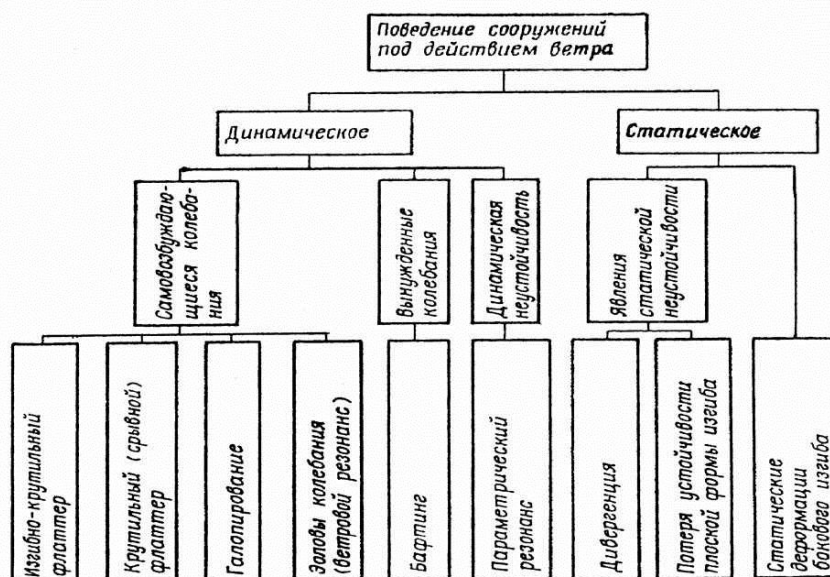


Рис. 16

Аэроупругие явления, как известно, обусловлены формой поперечного сечения тела, его конфигурацией и ориентацией относительно направления потока, упругими, инерционными и демпфирующими свойствами, структурой ветра и другими обстоятельствами.

Причины аэроупругих колебаний мостовых сооружений в ветровом потоке следующие:

- порывы ветра;
- периодические аэродинамические силы, обусловленные срывом вихрей Кармана;
- отрицательное аэродинамическое демпфирование, приводящее к автоколебаниям;
- аэродинамическая связь между изгибной и крутильной формами деформацией;
- периодические изменения параметров системы.

Установлено, что при поперечном обтекании ветровым потоком различных элементов образуются вихри правого и левого вращения, попеременно отрывающиеся от поверхности элементов, которые затем уносятся основным потоком. Совокупность отрывающихся вихрей образует вихревую дорожку Кармана. Эти вихри создают периодическую силу в направлении, перпендикулярном потоку.

Задачи аэромеханики ограничиваются определением стационарных аэродинамических сил лобового сопротивления, характеризующих основной вид статической ветровой нагрузки на мостовые конструкции на основе соответствующих нормативных документов.

Но следует отметить, что характер обтекания элементов мостовых сооружений изучен столь недостаточно, что вопрос о достоверности назначения аэродинамических коэффициентов для определения ветровых нагрузок (в особенности для уникальных мостов) необходимо связать со специальными экспериментальными исследованиями в аэродинамических трубах.

Сейчас кратко остановимся на тех явлениях, которые могут возникнуть при воздействии аэродинамических сил.

**Дивергенция.** Дивергенция является другим типом статической аэроупругой неустойчивости. Она возникает в результате действия аэродинамического момента  $M_{\text{аэр}}$ , скручивающего конструкцию, который в общем случае уравновешен упругим сопротивлением конструкции моста кручению  $M_{\text{аэр}} = M_{\text{упр}}$ . Однако при достижении ветровым потоком некоторой критической скорости  $v_{\text{кр}}$  возрастающий аэродинамический момент не уравновешивается упругим сопротивлением сооружения кручению  $M_{\text{аэр}} > M_{\text{упр}}$ , что может привести его к разрушению.

**Автоколебания элементов мостовых конструкций.** Автоколебания наблюдаются при совпадении частоты  $\omega_{cp}$  срыва вихрей Кармана с одной из собственных частот  $\omega$ . Амплитуды этих колебаний зависят от формы поперечного сечения элементов, жесткостных и диссипативных свойств элементов конструкций в плоскости колебаний.

**Параметрические колебания.** Параметрические колебания, или резонансы, висячих мостов возникают в тех случаях, когда некоторые параметры сооружения, например динамический распор в висячей системе, периодически изменяются во времени. Известно, что при кратности собственных частот вертикальных и горизонтальных (угловых) колебаний висячих мостов возникают параметрические колебания, аналогичные связанным колебаниям пружинного маятника (эффект качелей). Взаимное влияние этих колебаний, очевидно, и состоит в том, что в процессе вертикальных колебаний периодически изменяется расстояние от центра изгиба поперечного сечения балки жесткости до точки крепления канатов на пилоне. При этом между свободными вертикальными и горизонтальными колебаниями устанавливается параметрическая связь, которая управляет перекачкой энергии одного вида колебаний в другой.

**Явление галопирования.** Галопирование – аэроупругие автоколебания элементов конструкций поперек потока, вызванные отрицательным аэродинамическим демпфированием. Возникновение отрицательного аэродинамического демпфирования обусловлено нестационарной аэродинамической подъемной (поперечной) силой при определенной ориентации элементов конструкций относительно направления потока.

Галопированию подвержены гибкие элементы вантовых мостов, например, канатов, в случае их покрытия льдом в процессе эксплуатации, также плохо обтекаемые гибкие элементы с аэродинамически неустойчивыми поперечными сечениями – квадратным, прямоугольным, угловым и т.д.

С увеличением скорости потока выше критического значения амплитуды таких колебаний нарастают в отличие от колебаний ветрового резонанса. По этой причине галопирование представляет для элементов конструкции висячих мостов большую опасность, чем ветровой резонанс.

Расчет на галопирование сводится к определению аэродинамических сил, вызывающих поперечные колебания. Если критическая скорость ветра, при которой начинаются колебания, больше, чем скорость в данном районе с вероятностью превышения 1 раз в 5 лет, то на аэродинамические силы, возникающие при галопировании, конструкцию можно не рассчитывать.

В виду сложности явления рекомендуются испытания моделей в аэродинамической труде.

**Изгибно-крутильной флаттер.** Изгибно-крутильный флаттер-связанные изгибно-крутильные нарастающие во времени самовозбуждающиеся колебания, вызванные несовпадением

аэродинамического центра (точки приложения аэродинамических сил) с центром изгиба поперечного сечения балки жесткости моста. Нарастающие в течение нескольких секунд амплитуды колебаний при изгибно-крутильном флаттере достигают столь больших значений, что могут разрушить конструкцию.

**Крутильный (срывной) флаттер.** Срывной флаттер характеризует аэроупругие автоколебания преимущественно крутильного вида. Этот тип флаттера связан с нелинейными аэродинамическими силами, срывом потока и образованием вихрей Кармана. Амплитуда срывного флаттера ограничена. Она зависит от скорости потока, крутильной собственной частоты и демпфирующих свойств конструкций при крутильных деформациях. Частота срывного флаттера близка к одной из собственных частот крутильных колебаний. Критическая скорость срывного флаттера ниже, как правило, критической скорости изгибно-крутильного флаттера.

**Бафтинг** - это явление аэроупругой неустойчивости и наблюдается у элементов конструкций в неравномерном потоке или в следе за другими элементами вследствие наложения аэродинамических сил различной природы. Колебания бафтинга наблюдались, например, в арочных мостах с ездой поверху, когда одна стойка надарочного строения находилась в следе другой.

И так методологическая основа аэродинамического расчета гибких мостовых конструкций состоит в проверке возможности возникновения одного из типов аэроупругой неустойчивости с помощью приближенных критериев, позволяющих определить соответствующее значение критической скорости ветра. Условием обеспечения аэродинамической устойчивости конструкций является соблюдение неравенства  $v_{kp} > v_p$ ,

где  $v_p$  - расчетная скорость ветра для заданного района строительства.

При этом такие аэродинамические явления, как изгибно-крутильный флаттер; галопирование; бафтинг или дивергенция считаются не допустимыми, поскольку увеличение скорости потока и времени его действия приводят к неограниченному нарастанию колебаний.

#### **О сейсмических воздействиях на мосты.**

При землетрясениях на мосты действуют сейсмические нагрузки. Первопричиной землетрясений могут быть различные явления: деятельность вулканов, взрывы, обрушение сводов над карстовыми пещерами и т.д.

С инженерной точки зрения наибольший интерес представляют землетрясения тектонического происхождения. При этом в результате нарушения сплошности земной коры в очаге возникают колебания, которые переносятся на поверхность земли сейсмическими волнами. При разрывах генерируется два типа волн: продольные (первичные) и поперечные, или волны сдвига (вторичные). На рис.17 показано распределение интенсивности землетрясений по поверхности Земли. На этом же рисунке приведена схема



очаговой зоны (1-3- замкнутые кривые вокруг эпицентра, соединяющие точки с одинаковой интенсивностью землетрясения, т.е. изосейсты).

На рис.18 показано изменение составляющих движения грунта в зависимости от удаления их от эпицентра  $\Delta$  (ОК- гипоцентрального расстояние).

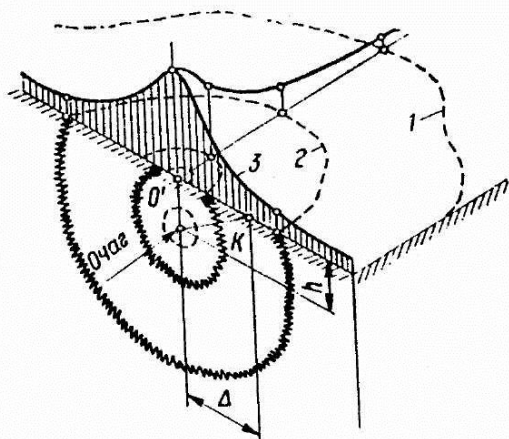


Рис. 17

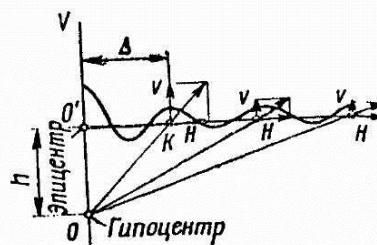


Рис. 18

Кроме того, возникают поверхностные волны, образующиеся вследствие взаимодействия глубинных волн с поверхностью земли, и встречные, обусловленные отражением и преломлением глубинных. Поскольку тектонические процессы сопровождаются образованием большого числа трещин земной коры различных размеров и каждая из них в момент образования излучает свои волны, очаг землетрясения характеризуется широким диапазоном (спектром) колебаний с периодом от сотых долей до десятка секунд.

В зависимости от ориентации мостового перехода по отношению к направлению распространения сейсмических волн их воздействие, передающееся мосту через фундаменты и опоры, может быть продольным (вдоль его продольной оси) или поперечным. Любое иное направление может быть представлено в векторной форме по этим направлениям. При землетрясении возникают сейсмическое давление воды и боковое давление грунта на опоры мостового перехода, а также сейсмические инерционные нагрузки от собственной массы пролетных строений, опор и подвижного состава.

Для определения сейсмических нагрузок необходимо располагать количественными характеристиками землетрясения: силой и интенсивностью.

**Сила землетрясения** – это энергетическая характеристика его очага, а интенсивность – степень вызванных землетрясением локальных разрушений. Интенсивность оценивается в баллах.

В соответствии с нормами проектирование мостов осуществляется для условий 7-8-и-9-балльной интенсивности. Расчет их следует производить на прочность и устойчивость конструкций и на несущую способность грунтовых оснований фундаментов.

Существующие методы расчета на сейсмостойкость могут быть разделены на следующие группы:

1. Основанные на статической теории сейсмостойкости;
2. По фактическим акселерограммам (диаграммам ускорений) прошлых землетрясений;
3. По спектральным кривым;
4. Стохастические (статистические).

Для определения сейсмических сил конструкции моста заменяются динамической эквивалентной расчетной схемой в виде невесомой стержневой системы с закрепленными на ней массами (Рис.4-5) . Применяются дискретные схемы с конечным числом сосредоточенных масс, и континуальные, несущие распределенные массы, которые характеризуют инерционные свойства сооружения. Количество масс определяет число степеней свободы.

Определив необходимые расчетные параметры пролетных строений и опор моста (жесткости элементов, величины и координаты дискретных масс и т.д.), определяют периоды и соответствующие им формы собственных колебаний элементов моста, так как величины сейсмических сил, согласно действующим нормам, зависят от динамических свойств сооружения.

Нормы предусматривают определение максимальных сейсмических сил при проектировании мостов с учетом не менее трех форм собственных колебаний, если период первой (низшей) формы колебаний более 0,4 с. Если период меньше или равен 0,4 с., рекомендуется учитывать только первую форму колебаний.

Возникающие при землетрясении силы инерции способны отбросить или опрокинуть пролетное строение (рис.19), а в зоне 9-10 балльных воздействиях наблюдаются образования крупных трещин и разрывов в опорах мостов (рис.20).

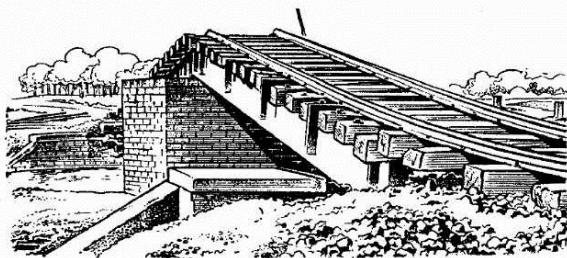


Рис. 19

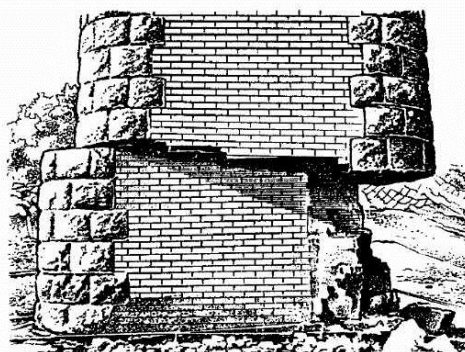


Рис. 20



Во избежание этого прибегают к различным конструктивным мероприятиям, в том числе к установке демпферов различного типа. В то же время опыт учит тому, что опирание фундаментов на плотные пески избавляет от появления существенных деформаций опор, по крайней мере при землетрясениях силой 7-8 баллов. Поэтому при проектировании мостов следует предусматривать опирание фундаментов преимущественно на скальные или крупнообломочные грунты, гравелистые плотные пески, а также глинистые грунты твердой и полутвердой консистенции.

## **§ 9. О некоторых методах и способах гашения колебаний мостов**

Демпфирующие свойства мостовых конструкций наряду с частотами и соответствующими им формами собственных колебаний характеризуют динамическую «индивидуальность» сооружения. Исследование природы, условий проявления и факторов, влияющих на рассеяние (диссипацию) энергии колебаний мостовых сооружений, в настоящее время приобретают актуальность в связи с целым рядом обстоятельств.

Широкое применение в мостостроении высокопрочных сталей позволяет снизить металлоемкость и стоимость мостовых конструкций. Однако из-за уменьшения жесткости таких конструкций заметно увеличиваются амплитуды колебаний. В то же время, как известно, рост прочности сталей не сопровождается повышением выносливости. Поэтому для увеличения долговечности мостовых конструкций из высокопрочных сталей крайне необходимо гасить колебания.

Повсеместно создаются гибкие мосты различных конструктивных форм и назначения, такие как, висячие и вантовые, комбинированные, трубопроводные, которые весьма чувствительны к ветровому воздействию.

Современные городские и пешеходные мосты отличаются повышенной чувствительностью к временным нагрузкам от толпы (праздничные массовые шествия, людские потоки, и т.д.).

Учитывая выше изложенное, а также вредное влияние вибрации на человека, можно сказать, что гашение колебаний конструкций представляет важную инженерную проблему. Приведенные факторы свидетельствуют о возросшем уровне динамических напряжений, что не может не отразиться на прочности, надежности и долговечности мостовых конструкций. Известно достаточно много случаев выхода из строя элементов мостовых конструкций и сооружений в целом или нежелательных явлений, связанных с динамическим поведением сооружений, в особенности при действии ветровых и сейсмических нагрузок.

Величины амплитуды колебаний и соответственно динамических напряжений в элементах мостовых конструкций определяются параметрами нагрузки и динамическими свойствами сооружения (частотами свободных колебаний и диссипативными характеристиками).

В основе различных методов и средств гашения колебаний (кроме аэродинамических) лежит снижение амплитуды колебаний путем изменения частоты свободных (собственных) колебаний сооружений (повышением жесткости, изменением конструктивной формы и иным образом) и увеличения демпфирующих свойств сооружений в целом, а также путем присоединения дополнительной массы с помощью упругой связи при надлежащим образом подобранных их параметрах. В тех случаях, когда вибрации конструкции вызваны воздействием ветра, весьма эффективными могут оказаться аэродинамические средства гашения колебаний, которые определенным образом влияют на параметры ветровой нагрузки, устраняя в некоторых случаях саму причину возникновения колебания.

Разнообразные способы гашения колебаний можно классифицировать по схеме рис.21. Мы рассмотрим только динамическое, аэродинамическое и конструкционное гашение колебаний мостовых сооружений.

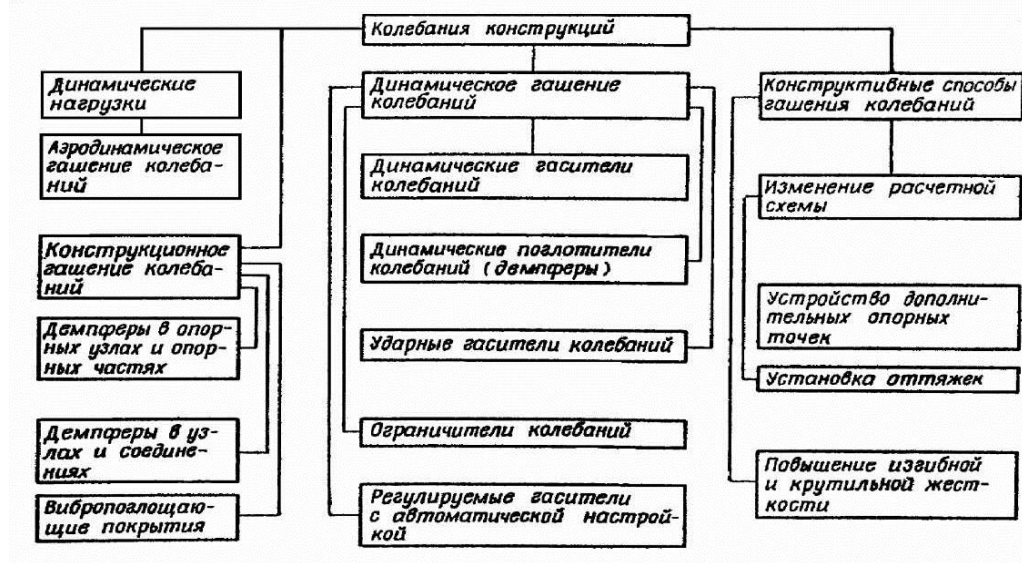


Рис. 21

**Динамическое гашение колебаний.** Оно осуществляется присоединением к основной колеблющейся системе дополнительной массы с помощью элементов связей.

В зависимости от свойств этих связей различают:

- динамические гасители;
- динамические поглотители;
- динамические гасители с вязким и сухим трением.

Следует отметить, что динамические гасители широкого распространения не получили в силу того, что они эффективны лишь при внешних динамических воздействиях со строго фиксированной частотой или при достаточно узкополосном спектре воздействия.

Кроме того, установка динамического гасителя колебаний снижает грузоподъемность сооружения и вызывает значительные трудности его

компоновки, поскольку масса гасителя, как правило, составляет 5-10 % массы основной конструкции.

Однако в практике содержания мостов известны случаи высокой эффективности динамических гасителей с настройкой в процессе эксплуатации путем изменения их параметров, относительная масса которых составляла меньше 1% массы демпфируемых пролетных строений. При этом обеспечивалось снижение амплитуды их колебаний в 2-6 раз. Такой разброс объясняется разными диссипативными свойствами пролетных строений. Таким образом, эффективность динамических гасителей с настройкой тем выше, чем ниже диссипативные свойства пролетного строения.

*Аэродинамическое гашение колебаний.* Оно эффективно только при виброзащите гибких мостовых конструкций или отдельных элементов конструкций мостов, которые чувствительны к ветровым нагрузкам.

В чем суть аэродинамического гашения колебаний. Идея заключается в изменении характера обтекания сооружения или отдельных элементов конструкций ветровым потоком, что позволяет существенно снизить (в отдельных случаях устранить) аэродинамические нагрузки, обуславливающие возникновения аэроупругой неустойчивости. Управление аэродинамическими свойствами конструкций осуществляется как на стадии проектирования, так и в процессе строительства и эксплуатации.

На стадии проектирования это достигается путем совершенствования конструктивной формы сооружений: его поперечному сечению придают благоприятную обтекаемую форму, а также устраивают специальный настил.

Во втором случае это достигается чаще всего установкой аэродинамических обтекателей, устройством перфорации в сплошностенчатых главных балках и настиле, устройством прорезей и щелей в проезжей части, а также зазоров между настилом проезжей части и балкой (фермой) жесткости.

Известны случаи установки обтекателей на конструкциях мостов через реки Ямато (Япония), Св. Джона (США), через бухту Лонг (Канада), Львиные ворота (Канада), Кавасаки-Баси (Япония), эффективность таких обтекателей предварительно была оценена при экспериментальных исследованиях в аэродинамических трубах, а затем подтверждена в натуральных условиях в процессе эксплуатации.

Примером обеспечения аэродинамической устойчивости сооружения путем устройства перфорации в настиле является висячий трубопроводный мост через Днепр на трассе аммиакопровода Тольятти-Одесса.

Можно привести следующий пример. Как известно, пилоны висячих и вантовых мостов при сооружении иногда подвергаются опасным колебаниям в направлении ветра. Интересен с этой точки зрения случай, который имел место при сооружении пилон висячего моста.

Строительство пилон до высоты 120 м проходило без происшествий. На этой стадии строительства пилон, ранее сдерживавший действие ветра со

скоростями до 130 км/ч, начал раскачиваться при умеренном ветре (30-50 км/ч). Эти колебания затрудняли дальнейшее проведение работ. Когда была достигнута полная высота пилона 150 м, амплитуда колебаний его вершины превосходила 1м при частоте около 0,25 Гц. Эти колебания вызвали образование горизонтальных трещин между нижними сварными секциями.

Путем установки демпфирующих растяжек удалось существенно (до 15см) снизить амплитуду колебаний и тем самым обеспечить возможность нормального ведения дальнейших строительных работ. Затем к верхней части пилона были подвешены вспомогательные лестницы, необходимые для монтажа несущих кабелей моста. Установка этих лестниц оказала демпфирующее воздействие, причем настолько сильное, что пилон уже не раскачивался даже при снятии растяжек. Чем же был обусловлен столь неожиданный демпфирующий эффект. Подвешенные вспомогательные лестницы нарушили правильное вихреобразование при обтекании пилона ветровым потоком.

**Конструкционное демпфирование.** Для большинства мостовых конструкций предпочтение следует отдать конструкционному демпфированию, т.е. влиянию энергетических потерь, возникающих вследствие действия сил сухого трения на контактных поверхностях в различных узлах, соединениях, швах, опорных частях и других элементах мостовых конструкций при их колебаниях. Следует отметить, что конструкционное демпфирование значительно превосходит демпфирование, обусловленное действием внутреннего трения в материале элементов конструкций. Его интенсивность в значительной степени зависит от состояния дорожного покрытия (или верхнего строения пути) на мостах и подходах к ним; типа, конструкции и состояния опорных частей, состояния узлов, соединений и т.д.

Конструкционное демпфирование в мостах можно увеличить искусственным путем:

- 1) установкой демпферных устройств в опорных частях и сочленениях пролетных строений;
- 2) созданием деформационных швов и узлов с дополнительными источниками трения;
- 3) использованием новых сплавов с высокими диссипативными свойствами для изготовления отдельных элементов и узлов;
- 4) применением специальных вибропоглощающих покрытий, наносимых на поверхность колеблющихся элементов пролетных строений;
- 5) специальными дорожными покрытиями (автодорожные мосты).

Немаловажным фактором снижения уровня колебаний пролетных строений является уменьшение динамического воздействия нагрузки на мост. Этого можно достичь рядом эксплуатационных и конструктивных мероприятий, это:

- надлежащее содержание проезжей части мостов и подходов к ним;

- сопряжение пролетных строений с подходами;
- улучшение демпфирования подрессорных масс автомобилей или экипажной части подвижного состава железных дорог и метро;
- устройство бесстыкового пути на подходах и на пролетных строениях мостов;
- укладка под верхнее строение пути упругих прокладок, выполненных из резины или искусственного упругого материала.

Наряду с устранением ударного воздействия подвижной нагрузки на пролетное строение эти мероприятия выполняют и экологическую функцию, поскольку значительно снижают уровень шума.

Рассмотренные способы борьбы с вредными колебаниями и вибрациями могут применяться как отдельно, так и в сочетании в зависимости от конкретных обстоятельств (причин возникновения нежелательных колебаний, конструкции, состояния, материала элементов моста, геологии мостового перехода и т.п.).

## Устойчивость равновесия системы в консервативном силовом поле

Таким образом, теория колебаний механических систем один из самых обширных и развитых разделов теоретической механики, имеющее прикладное значение.

Как уже говорили колебательные движения встречаются во многих отраслях современной науки и техники и требуют для рассмотрения широкого использования различных математических методов.

Сейчас остановимся на основных свойствах малых колебаний механических систем на основе применения уравнений Лагранжа второго рода.

Вибрации возникают, как уже было отмечено, в результате динамического воздействия разнообразных факторов: колебания могут быть вызваны ударами и подвижными нагрузками, неуравновешенными частями машин, переменным давлением пара, газа, воды и ветра.

Колебания системы могут происходить как около положения равновесия, так и относительно некоторого определенного движения системы, например, относительно стационарного движения.

Колебания около положения равновесия системы возникают в случае устойчивого равновесия. В случае неустойчивого равновесия системы при малейшем отклонении она удаляется от положения равновесия и колебания около этого положения не возникают. Поэтому при изучении малых колебаний систем следует дать определение устойчивости положения равновесия системы и установить условия, при выполнении которых положение равновесия является устойчивым.

Для систем с голономными и стационарными связями, находящихся в консервативном силовом поле, эти условия устанавливаются специальными теоремами о потенциальной энергии системы.

### § 10. Потенциальная энергия системы с конечным числом степеней свободы

Известно, что потенциальная энергия  $\Pi$  системы с  $s$  степенями свободы является функцией обобщенных координат системы [22]:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (10.1)$$

Рассмотрим только малые смещения системы из положения равновесия. В этом случае обобщенные координаты  $q_j$ , отсчитываемые от равновесного положения, можно рассматривать как величины первого порядка малости.

Разлагая выражение потенциальной энергии  $\Pi$  в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат, имеем

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \Pi(0) + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots \quad (10.2)$$

Потенциальную энергию системы в положении равновесия можно принять равной нулю:

$$\Pi(0) = \Pi(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

В случае консервативных сил обобщенная сила определяется формулой

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Так как в случае равновесия консервативной системы сил

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

то условия равновесия консервативной системы сил имеют вид [20]

$$\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j = 0.$$

Следовательно, пренебрегая в равенстве (10.2) всеми членами порядка выше второго, получаем

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j. \quad (10.3)$$

Введем обозначения

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда приближенное выражение для потенциальной энергии системы имеет вид:

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} q_i q_j. \quad (10.4)$$

Выражение (10.4) показывает, что потенциальная энергия системы является однородной квадратичной функцией обобщенных координат. Постоянные  $c_{ij}$  называют коэффициентами жесткости системы. Так как  $q_j$  - величины первого порядка малости, то потенциальная энергия системы определяется по (10.4) с точностью до величин второго порядка малости

включительно. Это значительно упрощает решение технических задач и в тоже время обеспечивает точность, достаточную для практических целей.

## **§ 11. Теорема Лагранжа – Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы**

Рассмотрим систему материальных точек с голономными и стационарными связями, имеющую  $s$  степеней свободы и находящуюся под действием сил, имеющих потенциал. Такую систему называют консервативной.

Как известно, уравнения равновесия консервативной системы имеют вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (11.1)$$

Из этих уравнений следует, что положениями равновесия рассматриваемой системы в случае консервативных сил являются те положения, при которых потенциальная энергия этой системы принимает экстремальные значения.

Однако уравнения равновесия (11.1) не устанавливают, являются ли рассматриваемые равновесные положения устойчивыми или неустойчивыми.

Условия устойчивости равновесия системы с конечным числом степеней свободы устанавливаются следующей теоремой Лагранжа – Дирихле: *равновесные положения консервативной системы, в которых ее потенциальная энергия достигает минимума, устойчивы.*

Равновесное положение консервативной системы является устойчивым, если система, равновесие которой нарушено малым начальным отклонением  $q_{j0}$  и малой начальной скоростью  $\dot{q}_{j0}$ , совершает малые колебания около этого равновесного положения. Иначе, равновесное положение системы считается устойчивым, если при начальных отклонениях

$$|q_{j0}| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - сколь угодно малое число, можно найти такие значения начальных скоростей  $|\dot{q}_{j0}|$ , при которых выполняются условия:  $|q_j| \leq \varepsilon$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), т.е. движение системы около рассматриваемого равновесного положения ограничено сколь угодно малой областью.

По теореме Лагранжа – Дирихле для выполнения этих условий достаточно (но не необходимо), чтобы потенциальная энергия системы в положении равновесия достигла минимума.

Отметим, что потенциальная энергия системы в положении равновесия всегда может быть принята равной нулю, т.к. ее значение определяется с точностью до произвольной постоянной. Следовательно,

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0.$$



Если потенциальная энергия системы в положении равновесия равно нулю и достигает минимума, то функция

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_s) > 0,$$

где

$$|q_j| \leq \varepsilon.$$

Обозначим через  $A$  наименьшее значение потенциальной энергии, когда одна из ее координат (любая)  $|q_j| = \varepsilon$ , а все остальные меньше или равны  $\varepsilon$ , т.е.

$$P = P(\pm \varepsilon, q_2, \dots, q_s),$$

$$P = P(q_1, \pm \varepsilon, \dots, q_s),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P = P(q_1, q_2, \dots, \pm \varepsilon),$$

Очевидно, что  $A > 0$ .

Условие  $|q_{j0}| < \varepsilon$  выполняется, если

$$P_0 = P(q_{10}, q_{20}, \dots, q_{s0}) \leq A.$$

Докажем, что в этом случае можно подобрать такие начальные скорости  $|\dot{q}_{j0}|$ , при которых потенциальная энергия системы

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_s) \leq A,$$

т.е.

$$|q_j| \leq \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, s),$$

а следовательно, ни одна из точек системы при движении около рассматриваемого положения равновесия не выходит за пределы сколь угодно малой области.

В случае движения системы в консервативном силовом поле действует закон сохранения энергии, т.е.

$$T + P = T_0 + P_0,$$

где  $T_0$  и  $P_0$  - кинетическая и потенциальная энергии системы в начальный момент времени, определяемые начальными скоростями  $\dot{q}_{j0}$  и начальными отклонениями  $q_{j0}$ .

Поскольку кинетическая энергия системы  $T \geq 0$ , получаем

$$P \leq P_0 + T_0.$$

Так как  $A > 0$ ,  $P_0 < A$ ,  $A - P_0 > 0$ , то начальные скорости  $\dot{q}_{j0}$  можно выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$T_0 \leq A - P_0, \text{ т.е. } T_0 + P_0 \leq A.$$

Учитывая, что  $P \leq T_0 + P_0$ , имеем

$$P = P(q_1, q_2, \dots, q_s) \leq A.$$

Так как  $A$  представляет собой наименьшее значение функции  $\Pi$ , то

$$|q_i| \leq \varepsilon,$$

т.е. положение равновесия системы устойчиво.

Это условие получено в предположении, что потенциальная энергия системы, находящейся в равновесии, имеет минимум. Следовательно, теорема Лагранжа – Дирихле доказана.

## § 12. Устойчивость равновесия консервативной системы с одной степенью свободы

Для того, чтобы определить устойчиво ли состояние равновесия консервативной системы с одной степенью свободы в рассматриваемом положении, необходимо выяснить, имеет ли потенциальная энергия системы в этом положении минимум.

В этом случае, если

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} > 0, \quad (12.1)$$

то условие минимума будет выполнено.

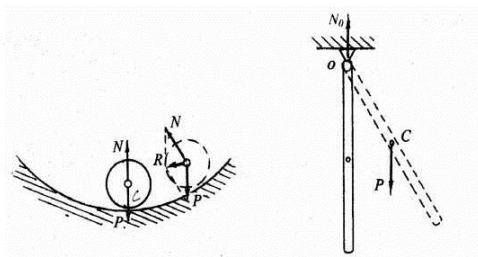


Рис. 22

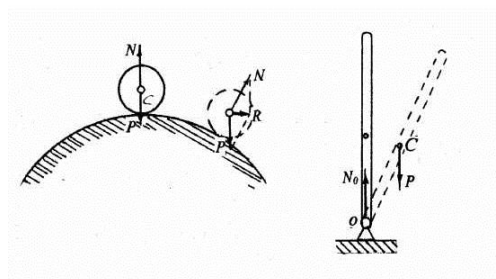


Рис. 23

На рис. 22 изображены положения равновесия физического маятника и шарика, при которых их центры тяжести занимают наинизшие положения по отношению к точке  $O$ . В этих положениях потенциальная энергия тел имеет минимум и равновесие является устойчивым.

На рис. 23 центры тяжести физического маятника и шарика занимают наивысшие положения. При этом потенциальная энергия тел имеет максимум и равновесие является неустойчивым.

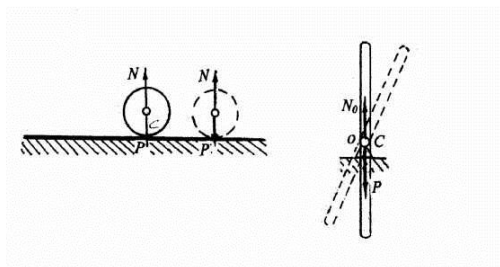


Рис. 24

В положениях, изображенного на рис. 24, физический маятник и шарик находятся в состоянии безразличного равновесия.

### § 13. Устойчивость равновесия консервативной системы с конечным числом степеней свободы. Критерий Сильвестра

Мы знаем, что устойчивому равновесному положению соответствует минимум потенциальной энергии.

Если для системы с одной степенью свободы существование минимума потенциальной энергии определяется только одним условием (12.1), то для системы с конечным числом степеней свободы этот минимум потенциальной энергии определяется рядом условий.

Потенциальная энергия консервативной системы с  $s$  степенями свободы определяется выражением (10.4)

$$P = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_{ij} q_i q_j.$$

На основании теорема Лагранжа-Дирихле потенциальная энергия системы представляет собой положительную знакоопределенную форму.

Чтобы определить условия, при которых рассматриваемая квадратичная форма является определено положительной, воспользуемся критерием Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма была определено положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее дискриминанта были положительны, т.е. выполнялись условия:

$$c_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \dots \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0,$$

где

$$c_{11} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^2}; \quad c_{22} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^2}; \quad \dots; \quad c_{ss} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_s^2};$$

$$c_{12} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2}; \quad c_{23} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \text{ и т.д., при этом } c_{12} = c_{21} \quad c_{23} = c_{32} \text{ и т.д.}$$

С увеличением числа степеней свободы исследование устойчивости равновесия систем значительно усложняется.

## Свободные колебания системы с одной степенью свободы

## § 14. Уравнения Лагранжа второго рода

Если точкам системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, будем сообщать малые отклонения и малые начальные скорости, то система будет совершать свободные колебания около положения устойчивого равновесия.

Положение системы, имеющей  $s$  степеней свободы, в любой момент времени определяется  $s$  обобщенными координатами  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ).

Будем считать, что в положении равновесия обобщенные координаты равны нулю:

$$q_j = 0.$$

В случае свободных колебаний на материальные точки системы, кроме потенциальных (восстанавливающих сил)  $P_j$  сил, действуют еще силы сопротивления  $R_j$ .

Уравнения Лагранжа второго рода для системы с  $s$  степенями свободы в данном случае принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{jP} + Q_{jR} \quad j = (1, 2, \dots, s), \quad (14.1)$$

где  $Q_{jP}$  - обобщенная сила, соответствующая восстанавливающим силам  $P_j$ ;  $Q_{jR}$  - обобщенная сила, соответствующая силам сопротивления  $R_j$ . Вывод этих уравнений имеется в курсах теоретической механики [20].

Известно, что обобщенную силу, соответствующую восстанавливающим силам  $P_j$ , имеющим потенциал, определяют по формулам

$$Q_{jP} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad j = (1, 2, \dots, s).$$

Таким образом, для составления уравнений Лагранжа второго рода необходимо иметь прежде всего выражения кинетической энергии  $T$  малых колебаний системы и потенциальной энергии  $\Pi$  системы.

Малые колебания системы около равновесного положения представляют собой такое движение системы, при котором значения обобщенных координат  $q_j$ , определяющих положение системы и отсчитываемых от положения устойчивого равновесия и обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ , в любой момент времени настолько малы, что их можно рассматривать как величины первого порядка малости ( $q_j \ll 1$  и  $\dot{q}_j \ll 1$ ).

Для голономной системы со стационарными связями, имеющей  $s$  степеней свободы, радиус - вектор любой точки системы  $\bar{r}_i$  является функцией  $s$  обобщенных координат этой системы:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

Тогда скорость каждой точки системы:

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s.$$

Подставляя значения  $\bar{v}_i$  в выражение кинетической энергии системы  $T$ , получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \bar{v}_i \bar{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[ \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right)^2 \dot{q}_s^2 + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2 \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{s-1}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right) \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right].$$

Из этого выражения видно, что кинетическая энергия системы  $T$  - однородная квадратичная функция обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  с коэффициентами, являющимися функциями обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$ :

$$T = \frac{1}{2} \left[ A_{11} \dot{q}_1^2 + A_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + A_{ss} \dot{q}_s^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2A_{s-1s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s \right],$$

где

$$A_{11} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right)^2; \quad A_{22} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right)^2; \quad A_{ss} = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \right)^2, \\ A_{12} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}, \quad A_{s-1,s} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_{s-1}} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s}.$$

При этом  $A_{ij} = A_{ji}$ .

Разлагая каждый из этих коэффициентов в ряд Маклорена по степеням обобщенных координат, получаем

$$A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s) = (A_{ij})_0 + \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \dots \quad (14.2)$$

Индекс  $O$  соответствует значениям функций в положении равновесия. Так как рассматриваются весьма малые отклонения систем от положения равновесия, то в равенстве (14.2) ограничимся только первыми постоянными членами:

$$(A_{ij})_0 = A_{ij}(0, 0, \dots, 0).$$

Обозначим эти постоянные через  $a_{ij}$ . Тогда выражение кинетической энергии системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} (a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + a_{ss} \dot{q}_s^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2a_{s-1,s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s) \quad (14.3)$$

или в общем виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (14.4)$$

Постоянные  $a_{ij}$  называются коэффициентами инерции.

Значения  $a_{ij}$  коэффициентов инерции и  $c_{ij}$  коэффициентов жесткости определяют непосредственно из соответствующих выражений  $T$  и  $\Pi$ .

### § 15. Диссипативная функция. Функция Релея

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления  $\bar{R}_i$  точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т.е.

$$\bar{R}_i = -\beta_i \bar{v}_i = -\beta_i \dot{\bar{r}}_i,$$

где  $\beta_i$  - постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы имеем

$$Q_{jR} = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j},$$

так как

$$\bar{v}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s,$$

то

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}.$$

Подставляя эти значения в выражения обобщенных сил сопротивления, получаем:

$$Q_{jR} = -\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i \bar{v}_i \bar{v}_i}{2} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i v_i^2}{2}.$$

Введем диссипативную функцию (понятие диссипативной функции введено Релеем в его классическом труде «Теория звука» (1878)) или функцию рассеивания (или функцию Релея), которая имеет такую же форму, как и выражение кинетической энергии ( $\beta_i$  вместо  $m_i$ )

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i v_i^2}{2}.$$

Тогда обобщенные силы сопротивления определяются по следующим формулам

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (15.1)$$

Следовательно, в случае стационарных связей диссипативную функцию можно представить по аналогии с кинетической энергией (14.4) в виде однородной положительной квадратичной функции обобщенных скоростей:

$$\Phi = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2 + \dots + b_{ss} \dot{q}_s^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dots + 2b_{s-1s} \dot{q}_{s-1} \dot{q}_s)$$

или

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (15.2)$$

где  $b_{ij}$  - постоянные коэффициенты, называемые коэффициентами диссипации.

Выясним сущность диссипативной функции Релея  $\Phi$ , для чего воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} = Q_{jR} + Q_{jP} \quad (j=1,2,\dots,s).$$

Поскольку

$$Q_{jP} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad \text{а} \quad Q_{jR} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

то получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j=1,2,\dots,s).$$

Умножая все уравнения на  $\dot{q}_j$  и суммируя их по  $j$ , получаем

$$\sum_{j=1}^s \left[ \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = -\sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (15.3)$$

Так как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) = \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j,$$

то

$$\dot{q}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j.$$

Подставляя эти выражения в (15.3), имеем

$$\sum_{j=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) \right] = - \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^s \dot{q}_j \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (15.4)$$

Поскольку  $T$  и  $\Phi$  являются однородными квадратичными функциями обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ , то по теореме Эйлера

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\Phi.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{d\Pi}{dt}.$$

и

$$\sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{dT}{dt}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (15.4), получаем

$$2 \frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = - \frac{d\Pi}{dt} - 2\Phi,$$

или

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2\Phi. \quad (15.9)$$

Из этого равенства следует, что величина  $2\Phi$  характеризует уменьшение (рассеивание) энергии системы  $(T + \Pi)$  в единицу времени.

## § 16. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движение механической системы с одной степенью свободы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным связям около положения устойчивого равновесия под действием лишь восстанавливающих сил  $\bar{P}_j$ . При наличии этих сил возникают свободные колебания системы.

Составим дифференциальное уравнение этих колебаний, предполагая, что восстанавливающие силы имеют потенциал (консервативные силы).

Кинетическая энергия  $T$  и потенциальная энергия  $\Pi$  определяются следующими выражениями

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2. \quad (16.1)$$

Так как  $T > 0$  и  $\Pi > 0$ , то  $a > 0$  и  $c > 0$ .

Подставляя эти выражения в уравнение Лагранжа учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = a\ddot{q}, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq,$$

получим



$$a\ddot{q} + cq = 0.$$

Полагая

$$\frac{c}{a} = k^2,$$

где  $k$  - вещественное положительное число, имеем:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. \quad (16.2)$$

Выражение (16.2) является дифференциальным уравнением свободных колебаний системы с одной степенью свободы.

Из характеристического уравнения  $\lambda^2 + k^2 = 0$  находим корни этого уравнения:  $\lambda_1 = ik$  и  $\lambda_2 = -ik$ .

Общее решение дифференциального уравнения (16.2) имеет следующий вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (16.3)$$

отсюда

$$\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Определим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий (при  $t = 0$   $q = q_0$  и  $\dot{q} = \dot{q}_0$ )

$$C_1 = q_0; \quad kC_2 = \dot{q}_0; \quad C_2 = \dot{q}_0 / k.$$

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в (16.3) имеем

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \quad (16.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (16.2) можно представить в ином виде. Положим в уравнении (16.3)

$$C_1 = A \sin \beta \quad C_2 = A \cos \beta,$$

где  $A$  и  $\beta$  - две произвольные постоянные.

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в (16.3), получаем

$$q = A \sin \beta \cos kt + A \cos \beta \sin kt$$

или

$$q = A \sin(kt + \beta). \quad (16.5)$$

Тогда

$$\dot{q} = Ak \cos(kt + \beta);$$

при  $t = 0$

$$q_0 = A \sin \beta, \quad \dot{q}_0 = Ak \cos \beta,$$

откуда

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (16.6)$$

Частоту свободных колебаний определяем по формуле

$$k = \sqrt{c/a}. \quad (16.7)$$

Период свободных колебаний системы

$$T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{a/c}. \quad (16.8)$$

Из уравнений (16.7) и (16.8) следует, что частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий, а зависят лишь от параметров системы.

Коэффициент инерции  $a$  характеризует инертность механической системы, а коэффициент жесткости  $c$  упругие свойства системы.

Значения этих коэффициентов для каждой механической системы зависят от выбора обобщенных координат, а их отношение, определяющее квадрат частоты колебаний, остается постоянным.

## § 17. Основные характеристики свободных колебаний

Для установления основных характеристик свободных колебаний системы с одной степенью свободы рассмотрим движения отдельных точек системы. Радиус - вектор какой-либо точки  $M_i$  этой системы обозначим  $\bar{r}_i$ , а ее декартовы координаты -  $x_i, y_i, z_i$ .

Радиус – вектор точки в равновесном положении обозначим  $\bar{r}_{i0}$ , а декартовы координаты точки в этом положении -  $x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}$ .

Смещение точки  $M_i$  из ее равновесного положения определяется как разность радиус –векторов точки в этих положениях:

$$\delta\bar{r}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_{i0}.$$

Проекция смещения точки  $\delta\bar{r}_i$  на оси декартовых координат находим по формулам:

$$\begin{aligned} \delta r_{ix} &= x_i - x_{i0}, \\ \delta r_{iy} &= y_i - y_{i0}, \\ \delta r_{iz} &= z_i - z_{i0}. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Координаты точек системы являются функциями обобщенной координаты  $q$ :

$$x_i = x_i(q), \quad y_i = y_i(q), \quad z_i = z_i(q).$$

Разложим эти функции по степеням малой величины  $q$ , имея в виду, что постоянные члены в этих разложениях представляют собой значения координат в равновесном положении системы, т.е. когда  $q = 0$ :

$$x_i = x_{i0} + L^i q + \dots;$$

$$y_i = y_{i0} + M^i q + \dots;$$

$$z_i = z_{i0} + N^i q + \dots,$$

где  $L^i$ ,  $M^i$ ,  $N^i$  - постоянные коэффициенты;

$x_i, y_i, z_i$  - координаты точки, определяемые с точностью до величин первого порядка малости.

Из уравнения (17.1)

$$\delta r_{ix} = L^i q, \quad \delta r_{iy} = M^i q, \quad \delta r_{iz} = N^i q. \quad (17.2)$$

Подставляя в эти формулы значения  $q = A \sin(kt + \beta)$ , получаем

$$\begin{aligned} \delta r_{ix} &= L^i A \sin(kt + \beta), \\ \delta r_{iy} &= M^i A \sin(kt + \beta), \\ \delta r_{iz} &= N^i A \sin(kt + \beta), \end{aligned} \quad (17.3)$$

откуда

$$\frac{\delta r_{ix}}{L^i} = \frac{\delta r_{iy}}{M^i} = \frac{\delta r_{iz}}{N^i} = A \sin(kt + \beta). \quad (17.4)$$

Из уравнений (17.3) и (17.4) можно сделать следующие выводы, характеризующие свободные колебания системы с одной степенью свободы:

1. Свободные колебания системы представляют собой гармонические колебания.

2. Амплитуды колебаний точек системы, а также начальная фаза колебаний зависят от начальных условий.

3. Отношения амплитуды различных точек системы не зависят от начальных условий, т.к. начальные условия влияют на амплитуды только через множитель  $A$ , общий для всех точек системы.

4. Все точки системы находятся всегда в одной фазе, т.е. эти точки одновременно проходят через свои равновесные положения; координаты этих точек одновременно достигают своих максимальных значений.

Эти свойства свободных колебаний системы с одной степенью свободы основываются на приближенных линейных дифференциальных уравнениях. Эти уравнения тем точнее характеризуют истинные движения системы, чем меньше амплитуды колебаний.

## § 18. Влияние сил сопротивления на свободные колебания системы с одной степенью свободы

Свободные колебания механической системы в реальных условиях происходят при наличии сил сопротивления, вызывающих рассеивание (диссипацию) механической энергии системы.

Предположим, что силы сопротивления, действующие на каждую точку системы  $\bar{R}_j$ , пропорциональны скорости:

$$\bar{R}_j = -\beta_j \bar{v}_j.$$

Тогда для рассматриваемой механической системы с одной степенью свободы, как уже показали, обобщенную силу сопротивления определим по формуле

$$Q_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}},$$

где  $\Phi$ -функция рассеивания (диссипативная функция Релея).

Для получения дифференциального уравнения движения системы с одной степенью свободы воспользуемся уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_p + Q_R.$$

Для системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2; \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2;$$

$$Q_p = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c q; \quad Q_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}.$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа, получаем

$$a \ddot{q} = -c q - b \dot{q}. \quad (18.1)$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad \frac{b}{a} = 2n.$$

Тогда уравнение (18.1) примет вид

$$\ddot{q} + 2n \dot{q} + k^2 q = 0. \quad (18.2)$$

Интегрирование этого уравнения производим по общему правилу интегрирования однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

В зависимости от соотношения величин  $n$  и  $k$  могут быть три различных случая:

1. При  $n < k$ , т.е. в случае малого сопротивления, движение системы представляет собой затухающие колебания.

2. При  $n > k$ , т.е. в случае большого сопротивления, система совершает апериодическое движение.

3. При  $n = k$  имеется предельный случай апериодического движения.

**Затухающие колебания.** При  $n < k$ , общее решение уравнения (18.2) имеет вид:

$$q = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta). \quad (18.3)$$

Здесь  $A$  и  $\beta$  определяются по начальным условиям следующими формулами:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{q_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}. \quad (18.4)$$

Движение, соответствующее уравнению (18.3), имеет колебательный характер. График этих колебаний представлен на рис. 25.

Множитель  $Ae^{-nt}$  с течением времени уменьшается, а потому и последовательные отклонения системы от ее равновесного положения также уменьшаются.

Период затухающих колебаний

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}, \quad (18.5)$$

где  $T = \frac{2\pi}{k}$  - период свободных колебаний системы при отсутствии сопротивления.

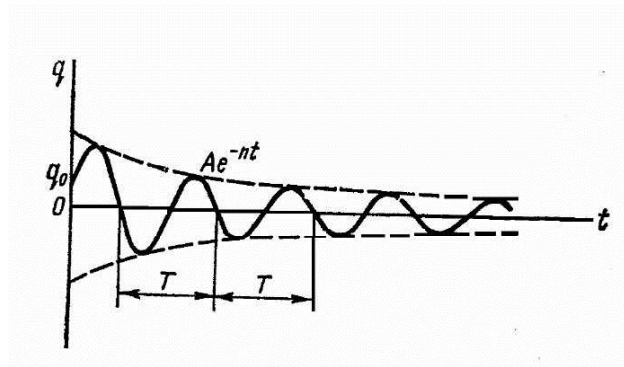


Рис. 25

Так как промежуток времени, отделяющий моменты двух наибольших последовательных отклонений системы от ее равновесного положения, соответствует полупериоду колебания  $\frac{T^*}{2}$ , то значения этих отклонений будут следующими:

$$q_t = Ae^{-nt}, \quad q_{t + \frac{T^*}{2}} = Ae^{-n\left(t + \frac{T^*}{2}\right)}.$$

Абсолютная величина  $\eta$ - отношения двух последовательных наибольших отклонений системы от положения равновесия, называемая декрементом колебаний (или фактором затуханий), – остается неизменной во все время колебательного движения.

$$\eta = \frac{Ae^{-n\left(t+\frac{T^*}{2}\right)}}{Ae^{-nt}} = e^{-\frac{nT^*}{2}}. \quad (18.6)$$

Величину натурального логарифма этого отношения называют *логарифмическим декрементом колебаний*

$$\ln \eta = n \frac{T^*}{2}. \quad (18.7)$$

Итак логарифмический декремент колебаний, определяемый как натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд колебаний является мерой сопротивления.

**Апериодическое движение.** При  $n > k$  общее решение уравнения (18.2) имеет следующий вид:

$$q = Ae^{-nt} \operatorname{sh}(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta). \quad (18.8)$$

График апериодического движения представлен на рис. 26.

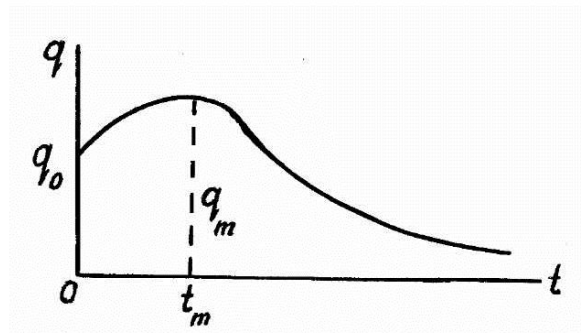


Рис. 26

**Предельное апериодическое движение.** При  $n = k$  общее решение уравнения (18.2) имеет вид:

$$q = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (18.9)$$

Определив  $C_1$  и  $C_2$  по начальным условиям движения, уравнение (18.9) можно представить в следующем виде:

$$q = e^{-nt} [(\dot{q}_0 + nq_0)t + q_0]. \quad (18.10)$$

Общий характер апериодического движения системы определяется тем, что при беспредельном возрастании времени  $t$  обобщенная координата  $q$  стремится к нулю.

Рассмотрев влияние сопротивления, пропорционального скорости, на свободные колебания системы с одной степенью свободы, можно сделать следующие выводы:

1. Силы сопротивления, совершая отрицательную работу, вызывают непрерывное уменьшение энергии вибрирующей системы, а следовательно, постепенное уменьшение амплитуды свободных колебаний.

2. Влияние малого сопротивления на частоту и период свободных колебаний системы незначительно, однако даже очень малое сопротивление вызывает быстрое затухание этих колебаний.

3. При большом сопротивлении происходит аperiодическое движение, т.е. колебательный процесс отсутствует.

### § 19. Исследование свободных колебаний двухпролетного моста по которому с постоянной скоростью движется колонна машин

Через водосток переброшен временный двухпролетный мост, имеющий постоянную среднюю опору [19]. Пусть правая опора моста шарнирно-подвижная, а левая шарнирно-неподвижная. Пролетные строения одинаковы. Длина одного пролета равна  $\ell$ , момент инерции пролетного строения относительно оси, проходящей через его конец  $J$ . При смещении понтонной опоры по вертикали возникает восстанавливающая сила  $P = c\lambda$ , где  $c$  – коэффициент жесткости опоры, а  $\lambda$  – величина смещения.

По мосту со скоростью  $v$  следует колонна одинаковых тяжелых гусеничных машин по направлению от неподвижной опоры к подвижной. Интервал между машинами в колонне мал. Длина машины значительно меньше длины пролета рис. 27. Каждая машина развивает силу тяги  $F$ , определяемую равенством

$$F = \frac{N}{v^2},$$

где  $N$  – некоторая постоянная.

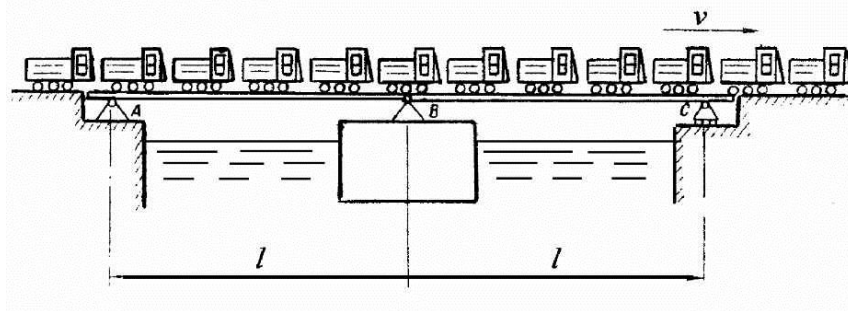


Рис. 27

Покажем мост в невозмущенном состоянии (состояние покоя под нагрузкой) рис. 27.

Необходимо исследовать свободные колебания моста около невозмущенного состояния и проанализировать его устойчивость.

**Идеализация задачи или выбор расчетной модели.**

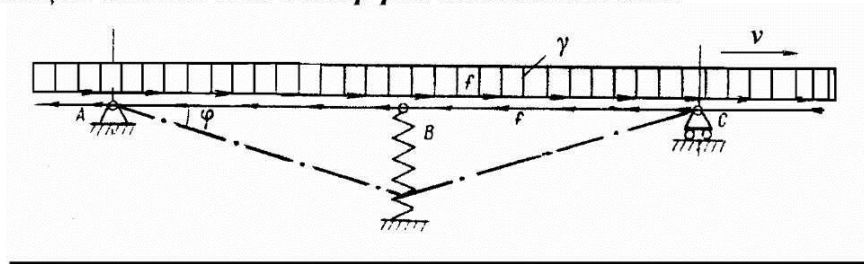


Рис. 28

При решении колонну автомашин, учитывая соотношение геометрических размеров, заменим полосой равномерно распределенной нагрузки с погонной массой  $\gamma$  и погонной силой тяги  $f = \frac{n}{v^2}$ , где  $n = const$ . Расчетная схема показана на рис. 28. Составная балка ABC имеет одну степень свободы  $s = 1$ . В качестве обобщенной координаты выберем угол поворота балки  $\varphi$ , отсчитываемый от горизонтального положения покоя под нагрузкой, т.е.  $q = \varphi$ . Отклонения от положения покоя вызываются некоторыми начальными условиями.

Для составления дифференциального уравнения колебаний системы воспользуемся уравнением Лагранжа II го рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad (19.1)$$

где  $T$  - кинетическая энергия системы;  $Q_{\varphi}$  - обобщенная сила, соответствующая координате  $\varphi$ .

Найдем кинетическую энергию системы, как сумму энергий балки и нагрузки

$$T = T_{\delta} + T_H, \quad (19.2)$$

где  $T_{\delta} = 2 \cdot \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$  - кинетическая энергия балки ABC (в силу симметрии конструкции угловые скорости частей AB и BC одинаковы);  $T_H$  - кинетическая энергия движущейся нагрузки.



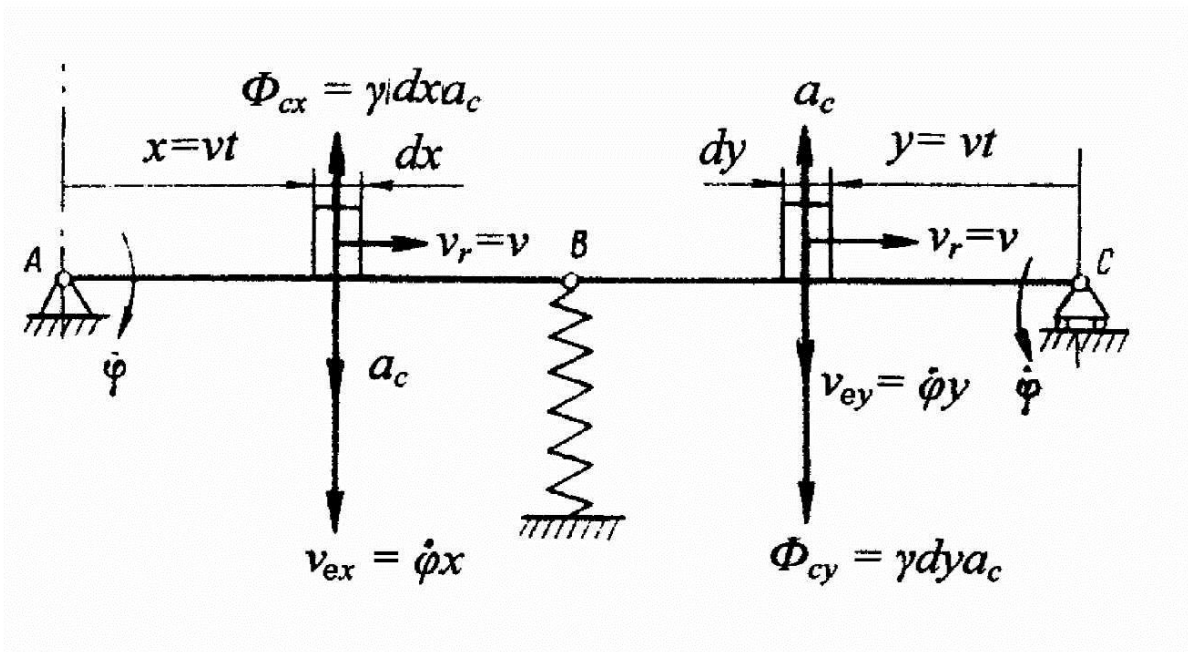


Рис. 29

Выделим два, симметрично расположенных относительно точки  $B$ , элементарных участка нагрузки на расстоянии  $vt$  от опор  $A$  и  $C$  (рис.29). Координату левого участка отсчитываем от опоры  $A$  в сторону движения нагрузки:  $x = vt$ . Координату правого участка отсчитываем от опоры  $C$  в направлении обратной движению нагрузки.

Массы элементарных участков соответственно равны:  $\gamma dx$  и  $\gamma dy$ . Абсолютные скорости каждого из участков состоят из переносных скоростей  $v_{ex}$  и  $v_{ey}$  и относительной скорости  $v_r = v$  (рис.29).

Кинетические энергии участков длиной  $dx$  и  $dy$ :

$$d\Gamma_{Hx} = \frac{\gamma}{2} (v_r^2 + v_{ex}^2) dx = \frac{\gamma}{2} (v^2 + x^2 \dot{\phi}^2) dx;$$

$$d\Gamma_{Hy} = \frac{\gamma}{2} (v_r^2 + v_{ey}^2) dy = \frac{\gamma}{2} (v^2 + y^2 \dot{\phi}^2) dy.$$

Кинетическая энергия левого и правого участков нагрузки с длинами  $x$  и  $y$  (от точек  $A$  и  $C$  соответственно) будет равна:

$$\Gamma_{Hx} = \int_0^x \frac{\gamma}{2} (v^2 + x^2 \dot{\phi}^2) dx = \frac{\gamma v^2}{2} x + \frac{\gamma}{2} \frac{x^3}{3} \dot{\phi}^2,$$

$$\Gamma_{Hy} = \int_0^y \frac{\gamma}{2} (v^2 + y^2 \dot{\phi}^2) dy = \frac{\gamma v^2}{2} y + \frac{\gamma}{2} \frac{y^3}{3} \dot{\phi}^2.$$

Естественно, что  $\frac{dx}{dt} = v$ .

Так как, направления отсчета координаты  $y$  и скорости  $v$  противоположны, то

$$\frac{dy}{dt} = -v.$$

Учитывая эти соотношения, вычисляем:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{HX}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\gamma x^3}{3} \ddot{\phi} + \gamma x^2 v \dot{\phi}; \quad (19.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{HY}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\gamma y^3}{3} \ddot{\phi} - \gamma y^2 v \dot{\phi}.$$

Первые слагаемые правых частей выражений (19.3) представляют собой моменты вращательных сил инерции левого и правого участков нагрузки длиной  $\ell$ .

Вторые слагаемые есть моменты кориолисовых сил инерции частиц левого и правого участков нагрузки. Разные знаки этих слагаемых объясняются различным направлением сил инерции  $\Phi_{cx}$  и  $\Phi_{cy}$ .

Так как

$$T_H = (T_{HX} + T_{HY}) \quad \text{при } x = \ell \text{ и } y = \ell,$$

то учитывая (19.2) будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2 \left( J + \frac{\gamma \ell^3}{3} \right) \ddot{\phi} = a \ddot{\phi}, \quad (19.4)$$

где

$$a = 2 \left( J + \frac{\gamma \ell^3}{3} \right) - \text{коэффициент инерции системы (приведенный момент}$$

инерции балки  $ABC$  и нагрузки).

В выражение (19.4) не попали слагаемые, порожденные кориолисовыми силами инерции. Они взаимно уничтожились при сложении.

Из рис 29 видно, что силы  $\Phi_{cx}$  и  $\Phi_{cy}$  образуют пару, которые не вызывают отклонения системы от нулевого положения. Эта пара приводит, однако, к появлению дополнительных динамических реакций в опорах.

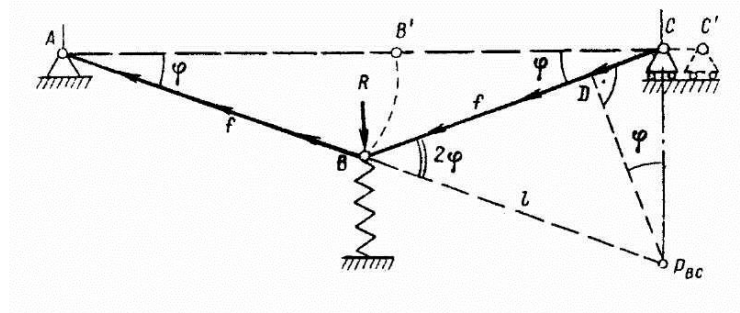


Рис. 30

Обратимся к анализу сил, действующих на балку. Силы тяжести элементов системы  $G_\ell$  и сила упругости пружины  $P$  консервативны. Соответствующая им потенциальная энергия, отсчитываемая от невозмущенного положения,

$$\Pi_{(GP)} = \frac{c\lambda^2}{2} = c\ell^2 \frac{\varphi^2}{2}, \quad (19.5)$$

где  $\lambda = \ell\varphi$ .

Следовательно, обобщенная сила:

$$Q_\varphi^{(GP)} = -\frac{\partial \Pi_{G,P}}{\partial \varphi} = -c\ell^2 \varphi. \quad (19.6)$$

Силы  $f$ , действующие на конструкцию  $ABC$  и порожденные сцеплением гусениц машин с балкой, всегда направлены вдоль балки и являются следящими силами. Они равны по модулю силе тяги и направлены в обратную сторону. В процессе колебаний направление этих сил меняется вследствие изменения обобщенной координаты, поэтому следящие силы являются функциями координаты:  $\vec{f} = \vec{f}(\varphi)$ . Такие силы называются позиционными. Естественно, что обобщенные силы  $Q_\varphi^{(f)}$  от сил  $f$  также будут функцией  $\varphi$ :  $Q_\varphi^{(f)} = Q_\varphi^{(f)}(\varphi)$ . Так как система имеет только одну степень свободы, то всегда можно найти такую функцию  $\Pi_f$ , чтобы

$$Q_\varphi^{(f)}(\varphi) = -\frac{\partial \Pi_f}{\partial \varphi}.$$

Иными словами, силы  $f$  имеют потенциал. Заметим, что если число степеней свободы системы превосходит единицу, то высказанное выше утверждение, что любые позиционные силы имеют потенциал, становится не верным. В частности, именно «следящие» силы оказываются неконсервативными при числе обобщенных координат, больше единицы.

Определим  $\Pi_f$  как работу сил  $f$  по перемещению системы из отклоненного положения  $ABC$  в нулевое  $AB^1C^1$  (рис.30). Левая часть конструкции совершит вращательное движение. Силы  $f$ , приложенные к

левой части  $AB$ , не произведут работы, ибо их линия действия проходят через неподвижную точку  $A$ .

Правая часть моста совершит плоское движение. Работу сил  $f$ , приложенных к  $BC$ , вычислим, как работу главного момента этих сил относительно мгновенного центра поворота  $P_{BC}$ .

Момент любой из погонных сил  $f_i$  относительно  $P_{BC}$  равен

$$M_{iP_{BC}} = f_i P_{BC} D.$$

Из треугольника  $BPD$  имеем:

$$P_{BC} D = \ell \sin 2\varphi.$$

Следовательно, главный момент сил  $f_i$ :

$$M_{P_{BC}} = \sum M_{iP_{BC}} = \ell f P_{BC} D = f \ell^2 \sin 2\varphi.$$

Работа по перемещению правой части из положения  $BC$  в положение  $B^1C^1$  будет определяться интегралом

$$\Pi_f = A_{\varphi \rightarrow 0} = \int_{\varphi}^0 f \ell^2 \sin 2\varphi d\varphi = -f \ell^2 \sin^2 \varphi.$$

Ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости относительно  $\varphi$ , получим

$$\Pi_f = -f \ell^2 \varphi^2. \quad (19.7)$$

Следовательно,

$$Q_{\varphi}^{(f)} = -\frac{\partial \Pi_f}{\partial \varphi} = 2f \ell^2 \varphi = \frac{2n \ell^2}{v^2} \varphi. \quad (19.8)$$

Наличие «излома» конструкции приводит к появлению еще одной силы  $R$ , которая действует со стороны движущейся нагрузки на балку в точке  $B$  (рис. 30).

Вычислим элементарный импульс силы  $R$ , действующий со стороны балки на элементарный участок нагрузки, проходящей «излом». По теореме об изменении количества движения будем иметь:

$$\gamma dx \bar{v}_2 - \gamma dx \bar{v}_1 = d\bar{S},$$

где  $\bar{v}_1$  и  $v_2$  - векторы скоростей центра масс элементарного участка нагрузки до и после прохождения излома ( $v_2 = v_1 = v$ );  $d\bar{S}$  - элементарный импульс силы  $\bar{R}_1$  ( $\bar{R}_1 = -\bar{R}$ );  $dx$  - длина элементарного участка нагрузки;  $\gamma dx$  - масса элементарного участка нагрузки.

Время прохождения излома пренебрежимо мало. Так как  $v_1 = v_2 = v$  и  $\angle CAB = \angle ACB$ , то вектор  $d\bar{S}$  в треугольнике импульсов, построенном по теореме об изменении количества движения, оказывается вертикальным.

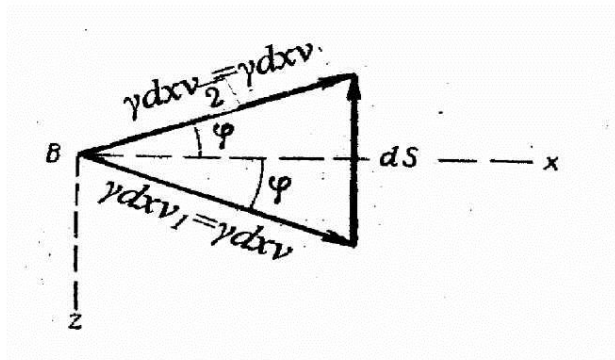


Рис. 31

При этом:

$$dS_z = -2\gamma dxv \sin \varphi \approx -2\gamma dxv \varphi. \quad (19.9)$$

Разделив обе части полученного равенства на  $dt$  и учитывая, что

$$\frac{d\bar{S}_z}{dt} = \bar{R}, \quad \text{а} \quad \frac{dx}{dt} = v$$

будем иметь

$$R_z = -R_{1z} = 2\gamma^2 \sin \varphi.$$

Сила  $R$  оказывается позиционной силой, направленной в сторону смещения (толкающая сила). Это сила возникает в результате изменения направления скорости нагрузки в точке  $B$  и родственна, таким образом, центробежной силе инерции.

Соответственная силе  $R$  потенциальная энергия будет с точностью до величины  $\varphi^2$  равна

$$\Pi_R = -\gamma^2 \ell \varphi^2. \quad (19.10)$$

И следовательно, обобщенная сила

$$Q_\varphi^R = 2\gamma^2 \ell \varphi. \quad (19.11)$$

Подставляя (19.4), (19.6), (19.8), (19.11) в уравнение Лагранжа и учитывая что  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$  получим,

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (19.12)$$

где

$$k^2 = \frac{\ell \left( c\ell - \frac{2n\ell}{v^2} - 2\gamma^2 \right)}{2 \left( J + \frac{\gamma \ell^3}{3} \right)}. \quad (19.13)$$

Формула (19.13) определяет значения частоты свободных колебаний моста в функции скорости нагрузки.

При  $k^2 \leq 0$  конструкция будет периодически уходить из состояния покоя, т.е. произойдет потеря устойчивости.

Нормальное функционирование сооружения будет обеспечено, если  $k^2 > 0$ , т.е.

$$\left( c\ell - \frac{2n\ell}{v^2} - 2\gamma^2 \right) > 0$$

или

$$v^4 - \frac{c\ell}{2\gamma} v^2 + \frac{n\ell}{\gamma} < 0. \quad (19.14)$$

Если дискриминант этого неравенства  $\Delta = \frac{c^2\ell^2}{16\gamma^2} - \frac{n\ell}{\gamma} > 0$  положителен, то мост будет сохранять устойчивость при движении нагрузки со скоростью  $v$ , лежащей в интервале

$$\sqrt{\frac{c\ell}{4\gamma} - \sqrt{\frac{c^2\ell^2}{16\gamma^2} - \frac{n\ell}{\gamma}}} < v < \sqrt{\frac{c\ell}{4\gamma} + \sqrt{\frac{c^2\ell^2}{16\gamma^2} - \frac{n\ell}{\gamma}}} \quad (19.15)$$

при

$$\frac{c^2\ell^2}{16\gamma^2} > \frac{n\ell}{\gamma}. \quad (19.16)$$

Если требование (19.16) не выполнено, то  $\Delta \leq 0$  и, следовательно, допустимых скоростей движения или нет вообще, или есть единственная:

$$v = \sqrt{\frac{c\ell}{4\gamma}}.$$

Практически этот результат не имеет значения, ибо невозможно в реальных условиях выдержать точное значение скорости, а малейшее отклонение в ту или иную сторону приведет к недопустимым последствиям.

## Глава 5

### Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

#### § 20. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы

Рассмотрим общий случай движения системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия, когда на точки системы действуют восстанавливающие силы  $P_i$ , силы сопротивления  $R_i$  и возмущающие силы  $F_i$ . При наличии возмущающих сил возникают вынужденные колебания системы.

Составим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы, предполагая, что восстанавливающие силы  $P_i$  имеют потенциал (консервативные силы), силы сопротивления  $R_i$  пропорциональны скорости  $v_i$ , а возмущающие силы  $F_i$  являются заданными функциями времени  $t$ , т.е.  $F_i = F_i(t)$ .

Кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $\Pi$  и функция рассеивания  $\Phi$  рассматриваемой системы определяются следующими выражениями:

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2.$$

Вычислим обобщенные силы  $Q_P$  и  $Q_R$ , соответствующие силам  $P_i$  и силам сопротивления  $R_i$ , по следующим формулам.

$$Q_P = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c q, \quad Q_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -b \dot{q}.$$

Обобщенная сила  $Q_F$ , соответствующая возмущающим силам  $F_i$ , как известно [20], определяется по следующей формуле:

$$Q_F = \sum_{i=1}^n \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q} \right).$$

Видно что,

$$Q_F = Q_F(t).$$

Уравнение Лагранжа для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_P + Q_R + Q_F.$$

Подставив в это уравнение значения всех указанных величин, получим:

$$a \ddot{q} + b \dot{q} + c q = Q_F(t),$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{1}{a} Q_F(t), \quad (20.1)$$

где

$$2n = \frac{b}{a}, \quad k^2 = \frac{c}{a}.$$

Уравнение (20.1) является общим дифференциальным уравнением вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления ( $n = 0$ ) имеет вид:

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{1}{2} Q_F(t), \quad (20.2)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{a}.$$

## § 21. Общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы

Общее решение дифференциального уравнения (20.1) можно получить следующим образом. Прежде всего найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0.$$

Если  $n < k$  (случай малого сопротивления), то

$$q = e^{-nt} \left( C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right).$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из начальных условий:

$$q(t)_{t=0} = q_0; \quad \dot{q}(t)_{t=0} = \dot{q}_0.$$

Имеем

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k^*},$$

где  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$  - частота затухающих колебаний.

Подставляя значения  $C_1$  и  $C_2$  в выражение для обобщенной координаты  $q$ , получаем

$$q = q_0 e^{-nt} \left( \cos k^* t + \frac{n}{k^*} \sin k^* t \right) + \frac{\dot{q}_0}{k^*} e^{-nt} \sin k^* t.$$

В этом выражении первый член представляет собой колебания системы, возникающие в результате ее начального отклонения от равновесного положения  $q_0$ , а второй - колебания, возникающие в результате сообщенной этой системе начальной скорости  $\dot{q}_0$ .



Если на рассматриваемую систему, кроме восстанавливающих сил и сил сопротивления, с некоторого момента  $t_1$ , действует возмущающая сила  $Q_F(t_1)$ , то за промежуток времени  $dt_1$  она вызывает дополнительное приращение обобщенной скорости  $d\dot{q}_{\text{don}}$ . Тогда бесконечно малое приращение обобщенной координаты  $dq$  с учетом этого приращения обобщенной скорости определим по формуле:

$$dq = d \left\{ q_0 e^{-nt} \left( \cos k^* t + \frac{n}{k^*} \sin k^* t \right) + \frac{\dot{q}_0}{k^*} e^{-nt} \sin k^* t \right\} + \frac{d\dot{q}_{\text{don}}}{k^*} e^{-n(t-t_1)} \sin k^* (t-t_1).$$

Второй член правой части этого равенства представляет собой добавочное приращение координаты  $q$  от обобщенной возмущающей силы, приложенной к системе в момент времени  $t_1$ .

Приращение скорости  $d\dot{q}_{\text{don}}$  можно определить из следующего соотношения:

$$\frac{d}{dt_1} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\text{don}}} \right) = Q_F(t_1),$$

$$d(a\dot{q}_{\text{don}}) = Q_F(t_1) dt_1.$$

Правая часть этого равенства представляет элементарный импульс обобщенной силы  $Q_F(t_1)$ .

Так как коэффициент инерции  $a$  является постоянной величиной (приведенная масса или приведенный момент инерции), то

$$d\dot{q}_{\text{don}} = \frac{1}{a} Q_F(t_1) dt_1.$$

Подставляя это значение  $d\dot{q}_{\text{don}}$ , получаем:

$$dq = d \left\{ q_0 e^{-nt} \left( \cos k^* t + \frac{n}{k^*} \sin k^* t \right) + \frac{\dot{q}_0}{k^*} e^{-nt} \sin k^* t \right\} + \frac{1}{ak^*} Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^* (t-t_1) dt_1.$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $t_1 = 0$  до  $t_1 = t$  при  $n < k$ , получим:

$$q = q_0 e^{-nt} \left( \cos k^* t + \frac{n}{k^*} \sin k^* t \right) + \frac{\dot{q}_0}{k^*} e^{-nt} \sin k^* t + \frac{1}{ak^*} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^* (t-t_1) dt_1. \quad (21.1)$$

Уравнение (21.1) является общим решением дифференциального уравнения (20.1) в случае малого сопротивления.

При  $n < k$  это решение можно также представить в следующем виде:

$$q = Ae^{-nt} \sin(k^*t + \beta) + \frac{1}{ak^*_0} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1. \quad (21.2)$$

Аналогичным путем можно получить решения дифференциального уравнения (20.1) для случая большого сопротивления (при  $n > k$ ):

$$q = e^{-nt} [q_0 + (\dot{q}_0 + nq)t] + \frac{1}{a_0} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} (t-t_1) dt_1; \quad (21.3)$$

при  $n > k$

$$q = Ae^{-nt} \operatorname{sh}(\sqrt{n^2 - k^2}t + \beta) + \frac{1}{a\sqrt{n^2 - k^2}} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \operatorname{sh}\sqrt{n^2 - k^2}(t-t_1) dt_1. \quad (21.4)$$

Общее решение дифференциального уравнения (20.1) для всех трех случаев можно получить иным путем-методом вариации произвольных постоянных.

Практически наиболее часто встречается случай малого сопротивления.

Из уравнений (21.1) или (21.2) непосредственно можно получить следующие частные случаи:

Случай 1:  $q_0 = 0$ ;  $\dot{q}_0 = 0$ .

$$q = \frac{1}{ak^*_0} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1. \quad (21.5)$$

По уравнению (21.5) определяют свободные и вынужденные колебания системы с учетом сопротивления, вызываемые возмущающими силами. Интеграл, входящий в это уравнение, так же как и его первая производная при  $t = 0$ , равны нулю. Затухающие колебания, вызываемые начальным отклонением и начальной скоростью, отсутствуют.

Случай 2:  $n = 0$ .

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak_0} \int_0^t Q_F(t_1) \sin k(t-t_1) dt_1. \quad (21.6)$$

По уравнению (21.6) определяют свободные и вынужденные колебания системы, вызываемые начальным отклонением, начальной скоростью и возмущающими силами, без учета сопротивления.

Случай 3:  $n = 0$ ;  $q_0 = 0$ ;  $\dot{q}_0 = 0$ .

$$q = \frac{1}{ak_0} \int_0^t Q_F(t_1) \sin k(t-t_1) dt_1. \quad (21.7)$$

По уравнению (21.7) определяют свободные и вынужденные колебания системы, вызываемые возмущающими силами, без учета сопротивления.

Интегралы (21.2), (21.5), (21.6) и (21.7) можно применять для исследования вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы при наличии каких угодно возмущающих сил.

Однако применения этих интегралов особенно целесообразно в тех случаях, когда обобщенная возмущающая сила не является периодической функцией времени и весьма резко изменяет величину и направление, а также когда аналитическое выражение этой силы неизвестно и ее определяют графически или численно. Интегралы, определяющие вынужденные колебания системы в этом случае, можно найти с достаточной точностью одним из приближенных методов интегрирования.

## § 22. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае периодической возмущающей силы

Периодическая возмущающая сила в различных областях техники встречается очень часто и имеет особенно важное значение.

Разложив функцию  $Q_F(t)$ , период которой равен  $T_b$ , в ряд Фурье, получим:

$$Q_F(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t),$$

где  $\Omega = \frac{2\pi}{T_b}$  - основная частота возмущающей силы.

Постоянные величины  $a_0$ ,  $a_j$  и  $b_j$  ( $j=1,2,\dots,\infty$ ) определяем по известным из гармонического анализа формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} Q_F(t) dt;$$

$$a_j = \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} Q_F(t) \cos j\Omega t dt,$$

$$b_j = \frac{2}{T_b} \int_0^{T_b} Q_F(t) \sin j\Omega t dt.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (20.1) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{a} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t). \quad (22.1)$$

Найдем общее решение этого уравнения, не применяя формулы, полученные в § 21. Его можно представить как сумму двух решений:

$$q = q^* + q^{**},$$

где  $q^*$  - общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0.$$

$q^{**}$  какое –либо частное решение уравнения (22.1).

Если  $n < k$  (случай малого сопротивления), то

$$q^* = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t),$$

где  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$  частота затухающих колебаний.

Частное решение  $q^{**}$ , как известно, можно получить в виде следующего разложения:

$$q^{**} = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t),$$

где  $A_0, A_j, B_j$  - постоянные коэффициенты, которые требуется определить.

Подставляя значение  $q^{**}$  в уравнение (22.1), получим

$$A_0 k^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (k^2 - j^2 \Omega^2) A_j + 2nj\Omega B_j \right] \cos j\Omega t + \left[ (k^2 - j^2 \Omega^2) B_j - 2nj\Omega A_j \right] \cdot \sin j\Omega t = \frac{a_0}{a} + \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t).$$

Это равенство обращается в тождество, если

$$\begin{aligned} A_0 k^2 &= a_0 / a; \\ (k^2 - j^2 \Omega^2) A_j + 2nj\Omega B_j &= a_j / a; \\ (k^2 - j^2 \Omega^2) B_j - 2nj\Omega A_j &= b_j / a. \end{aligned}$$

Из этих соотношений находим :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{ak^2} = \frac{a_0}{c}; \\ A_j &= \frac{(k^2 - j^2 \Omega^2) a_j - 2nj\Omega b_j}{a \left[ (k^2 - j^2 \Omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \Omega^2 \right]}; \\ B_j &= \frac{(k^2 - j^2 \Omega^2) b_j + 2nj\Omega a_j}{a \left[ (k^2 - j^2 \Omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \Omega^2 \right]}. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, в случае малого сопротивления и периодической возмущающей силы, имеет следующий вид:

$$q = A_0 + e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t). \quad (22.2)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяем из начальных условий:

$$q(t)_{t=0} = q_0, \quad \dot{q}(t)_{t=0} = \dot{q}_0.$$

Дифференциальное уравнение (22.1) и его общее решение (22.2) можно представить в ином виде:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = h_0 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\Omega t + \delta_j), \quad (22.3)$$

где

$$h_0 = \frac{a_0}{a}; \quad h_j = \frac{1}{a} \sqrt{a_j^2 + b_j^2}; \quad \operatorname{tg} \delta_j = \frac{a_j}{b_j};$$

$$q = A_0 + A e^{-nt} \sin(k^* t + \beta) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{jb} \sin(j\Omega t + \theta_j). \quad (22.4)$$

Здесь

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{C_1}{C_2}; \quad A_{jb} = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}; \quad \operatorname{tg} \theta_j = \frac{A_j}{B_j}.$$

В уравнениях (22.2) и (22.4) первый член представляет собой отклонение системы от ее равновесного положения, вызываемое средним значением возмущающей силы  $a_0$ ; второй член – ее затухающие колебания, третий член – вынужденные колебания системы, вызываемые периодической возмущающей силой, разложенные на отдельные гармоники, соответствующие гармоникам этой силы.

В случае большого сопротивления ( $n > k$ )

$$q = A_0 + A e^{-nt} \operatorname{sh}(k^* t + \beta) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{jb} \sin(j\Omega t + \theta_j). \quad (22.5)$$

При установившемся движении практическое значение имеют лишь незатухающие вынужденные колебания, определяемые уравнением

$$q = \sum_{j=1}^{\infty} A_{jb} \sin(j\Omega t + \theta_j). \quad (22.6)$$

Здесь  $A_{jb}$  и  $(j\Omega t + \theta_j)$  амплитуда и фаза вынужденных колебаний, соответствующие частоте этих колебаний  $\Omega_j = j\Omega$  при  $j = 1, 2, \dots, \infty$ .

Колебания (22.6) вызваны возмущающей силой  $Q_F$ :

$$Q_F(t) = a \sum_{j=1}^{\infty} h_j \sin(j\Omega t + \delta_j) = \sum H_j \sin(j\Omega t + \delta_j), \quad (22.7)$$

где  $H_j$  и  $(j\Omega t + \delta_j)$  – амплитуда и фаза возмущающей силы, соответствующие частоте этой силы  $\Omega_j = j\Omega (j = 1, 2, \dots, \infty)$ .

Найдем амплитуду  $A_{jb}$  и разность или сдвиг фаз

$$\varepsilon_j = \delta_j - \theta_j,$$

$$A_{jb} = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon_j = \operatorname{tg}(\delta_j - \theta_j) = \frac{\operatorname{tg} \delta_j - \operatorname{tg} \theta_j}{1 + \operatorname{tg} \delta_j \operatorname{tg} \theta_j}.$$

Подставляя в эти равенства вместо  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $\operatorname{tg} \delta_j$ ,  $\operatorname{tg} \theta_j$  их значения, получаем:

$$A_{jb} = \frac{h_j}{\sqrt{(k^2 - j^2 \Omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \Omega^2}}, \quad (22.8)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_j = \frac{a_j B_j - b_j A_j}{a_j A_j + b_j B_j} = \frac{2nj\Omega}{k^2 - j^2 \Omega^2}. \quad (22.9)$$

Общее решение дифференциального уравнения (20.2), т.е. без учета сил сопротивления ( $n=0$ ) в случае периодической возмущающей силы, получаем непосредственно из (22.4):

$$q = A_0 + A \sin(kt + \beta) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{jb} \sin(\Omega j t + \theta_j). \quad (22.10)$$

Амплитуда колебаний

$$A_{jb} = \pm \frac{h_j}{k^2 - j^2 \Omega^2}. \quad (22.11)$$

Знак плюс имеем в случае, если  $k > j\Omega$ , минус - если  $k < j\Omega$ .

Сдвиг фаз

$$\operatorname{tg} \varepsilon_j = 0; \quad \varepsilon_j = 0 \quad (k > j\Omega); \quad \varepsilon_j = \pi \quad (k < j\Omega).$$

### § 23. Резонанс и явление биений

Если одна из частот вынужденных колебаний – частота одной из гармоник возмущающей силы, равна частоте свободных колебаний системы, т.е.

$$j\Omega = k \quad (j = 1, 2, \dots, \infty),$$

то наступает так называемый резонанс  $j$ -го порядка.

Частоты  $j\Omega = k$  называют критическими. Амплитуда в этом случае по формуле (22.8) получается равной:

$$A_{jb} = \frac{h_j}{2nk}. \quad (23.1)$$

Так как в этом случае по формуле (22.9)  $\operatorname{tg} \varepsilon_j = \infty$ , то сдвиг фаз

$$\varepsilon_j = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \theta_j = \delta_j - \frac{\pi}{2}.$$

При малом значении коэффициента затухания  $n$  амплитуда  $A_{jb}$  может быть большой по сравнению с амплитудами всех остальных гармоник ряда

(22.6), особенно, если возникает резонанс первого порядка, т.к. амплитуда первой гармоники возмущающей силы  $h_1 > h_2 > h_3 \dots$

Уравнение (22.4) в этом случае можно заменить значительно более простым:

$$q = \frac{h_1}{2nk} \sin\left(kt + \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right). \quad (23.2)$$

Уравнение (23.2) определяет с достаточной точностью резонансные колебания первого порядка.

Необходимо отметить, что амплитуда вынужденных колебаний  $A_{jb}$ , вследствие сдвига фаз  $\varepsilon_j$ , имеет максимум не при резонансе  $\Omega_j = j\Omega = k$ , а при другом значении частоты  $\Omega_j$ .

Очевидно, максимуму

$$A_{jb} = \frac{h_j}{\sqrt{(k^2 - \Omega_j^2)^2 + 4n^2\Omega_j^2}}$$

соответствует минимум подкоренного выражения

$$\left\{ (k^2 - \Omega_j^2)^2 + 4n^2\Omega_j^2 \right\}.$$

Взяв от этого выражения производную по  $\Omega_j$  и приравняв ее нулю, получаем

$$\begin{aligned} -4\Omega_j(k^2 - \Omega_j^2) + 8n^2\Omega_j &= 0; \\ \Omega_j^2 &= k^2 - 2n^2. \end{aligned}$$

Это равенство возможно, если  $k^2 - 2n^2 > 0$ , т.е. если

$$n < \frac{k\sqrt{2}}{2}.$$

При  $n > \frac{k\sqrt{2}}{2}$  максимума у  $A_{jb}$  не существует и резонанса в этом случае нет.

Подставляя в формулу для определения  $A_{jb}$  значение  $\Omega_j^2 = k^2 - 2n^2$ , имеем

$$\max A_{jb} = \frac{h_j}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (23.3)$$

При малом значении коэффициента затухания

$$\max A_{jb} = \frac{h_j}{2nk},$$

т.е. максимальное значение амплитуды  $A_{jb}$  и ее значение при резонансе весьма близки друг другу (практически одинаковы).

В области, достаточно удаленной от резонанса при установившемся режиме и малом коэффициенте затухания, силами сопротивления можно пренебречь.

Уравнения вынужденных колебаний системы в этом случае имеет вид

$$q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h_j}{k^2 - j^2 \Omega^2} \sin(j\Omega t + \theta_j), \quad (23.4)$$

где  $\theta_j = \delta_j$  или  $\theta_j = \delta_j - \pi$ .

Если  $n = 0$  и возникает резонанс ( $j\Omega = k$ ), то

$$A_{jb} = \frac{h_j}{k^2 - j^2 \Omega^2} \rightarrow \infty,$$

т.е. уравнение (23.4) не определяет вынужденных колебаний системы.

Чтобы исследовать этот случай, рассмотрим вынужденные колебания системы, вызываемые какой-либо одной гармоникой возмущающей силы, например первой, учитывая и свободные колебания.

Так как  $n = 0$ , то уравнение (22.10) принимает вид

$$q = A \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \delta);$$

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \delta).$$

Найдем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий  $q_0 = 0$ ,  $\dot{q}_0 = 0$ :

$$C_1 = -\frac{h}{k^2 - \Omega^2} \sin \delta; \quad C_2 = -\frac{h}{k^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{k} \cos \delta.$$

Следовательно,

$$q = \frac{h}{k^2 - \Omega^2} \left\{ \sin(\Omega t + \delta) - \left( \sin \delta \cos kt + \frac{\Omega}{k} \cos \delta \sin kt \right) \right\}. \quad (23.5)$$

Свободные колебания, которые существуют при начальных условиях  $q_0 = 0$  и  $\dot{q}_0 = 0$ , вызваны возмущающей силой.

Если  $\Omega = k$ , то правая часть уравнения (23.5) обращается в неопределенность вида  $0/0$ .

Раскрывая эту неопределенность, получаем

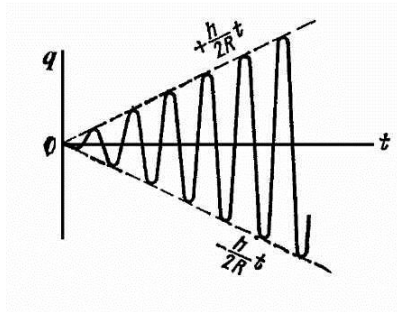
$$q = \frac{h}{2k^2} \cos \delta \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (23.6)$$

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний, соответствующая второму члену уравнения (23.6), с изменением времени неограниченно возрастает по закону прямой пропорциональности:



$$A_B = \pm \frac{h}{2k} t.$$

График этих резонансных колебаний с амплитудой, непрерывно увеличивающейся с изменением времени, показан на рис.32.



Кроме резонанса, рассмотрим, пренебрегая сопротивлением, явление биений. Биения возникают при условии, когда частота вынужденных колебаний  $\Omega$  весьма мало отличается от  $k$ - частоты свободных колебаний, т.е.  $\Omega \approx k$ .

Рис. 32

Можно, в частности, принять

$$\Omega + k \approx 2k; \quad \frac{\Omega}{k} \approx 1, \quad k^2 - \Omega^2 \approx (k + \Omega)(k - \Omega) \approx 2k(k - \Omega).$$

Колебания происходят в области, весьма близкой к резонансу. Из уравнения (23.5)

$$q = \frac{h}{2k(k - \Omega)} \{ \sin(\Omega t + \delta) - \sin(kt + \delta) \}$$

или

$$q = \frac{h}{k(k - \Omega)} \sin\left(\frac{\Omega - k}{2} t\right) \cos(kt + \delta). \quad (23.7)$$

Уравнения (23.7) и определяют вынужденные колебания системы в случае биений. Амплитуда этих колебаний

$$A_b(t) = \frac{h}{k(k - \Omega)} \sin \frac{\Omega - k}{2} t$$

является весьма медленно изменяющейся периодической функцией времени  $t$  с периодом  $T_A = 2\pi / [(\Omega - k) / 2]$ .

Период вынужденных колебаний

$$T_b = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Так как  $\Omega \approx k$ , то  $T_A \gg T_b$ .

График этих колебаний показан на рис.33. Рассмотренные колебания биений возникают тогда, когда коэффициент затухания  $n = 0$ , т.е. силы сопротивления не учитываются.

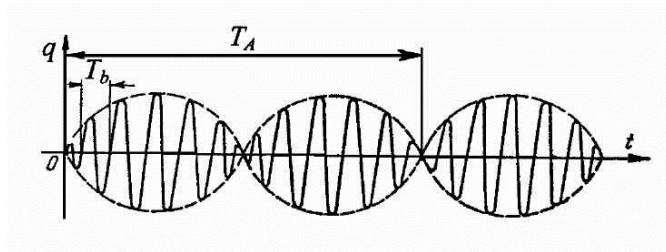


Рис. 33

Исследуем влияние этих сил на колебания в случае, когда основная частота возмущающей силы  $\Omega$  приблизительно равна частоте затухающих колебаний  $k^*$ , т.е. когда

$$\Omega \approx \sqrt{k^2 - n^2} \quad (n < k).$$

Учитывая затухающие колебания и полагая для простоты  $\theta = 0$ , получаем

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + A_b \sin \Omega t,$$

где

$$A_b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}} \approx \frac{h}{n\sqrt{4k^2 - 3n^2}}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  при начальных условиях  $q_0 = 0$ ,  $\dot{q}_0 = 0$  имеют такие значения:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{A_b \Omega}{k^*} \approx -A_b.$$

Следовательно,

$$q = A_b (\sin \Omega t - e^{-nt} \sin k^* t).$$

Представим это уравнение в виде

$$q = A_b (1 - e^{-nt}) \sin \Omega t + A_b e^{-nt} (\sin \Omega t - \sin k^* t)$$

или

$$q = A_b (1 - e^{-nt}) \sin \Omega t + 2A_b e^{-nt} \sin \left( \frac{\Omega - k^*}{2} t \right) \cos \Omega t. \quad (23.8)$$

В уравнении (23.8) первый член определяет незатухающие вынужденные колебания, второй – затухающие колебания биений с амплитудой

$$A(t) = 2A_b e^{-nt} \sin \frac{\Omega - k^*}{2} t$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Период изменения амплитуды  $A(t)$

$$T_A = \frac{2\pi}{\Omega - k^*} \gg T_b.$$

График затухающих колебаний биений показан на рис.34.

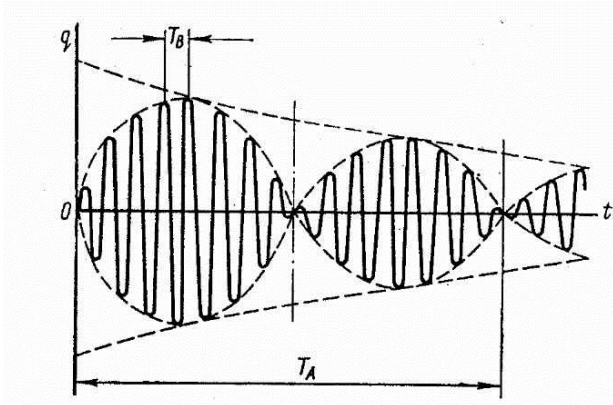


Рис. 34

Таким образом, в реальных условиях ( $n \neq 0$ ) колебания биений, вызываемые возмущающей силой, с частотой, близкой к частоте затухающих колебаний, могут иметь практическое значение только в начале движения системы, т.е. в так называемый переходный период и при малом значении коэффициента затухания  $n$ .

При установившемся режиме, который наступает тем быстрее, чем больше сопротивление, движение системы определяется уравнением

$$q = A_b \sin \Omega t = A_b \sin k^* t,$$

получаемым из (23.8), т.к.  $e^{-nt} \rightarrow 0$ .

Незатухающие колебания биений в реальных условиях могут происходить при наличии двух возмущающих сил с частотами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  весьма близкими друг к другу.

Уравнение вынужденных колебаний системы в этом случае имеет вид

$$q = A_1 \sin(\Omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\Omega_2 t + \theta_2), \quad (23.9)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  - начальные сдвиги фаз колебаний.

Введем обозначения

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \Delta\Omega; \quad \theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta.$$

Уравнение (23.9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} q &= A_1 \sin(\Omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin\{(\Omega_1 t + \theta_1) + (\Delta\Omega t + \Delta\theta)\} = \\ &= \{A_1 + A_2 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta)\} \sin(\Omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\Delta\Omega t + \Delta\theta) \cos(\Omega_1 t + \theta_1). \end{aligned}$$

Принимаем затем

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta) &= A(t) \cos \psi, \\ A_2 \sin(\Delta\Omega t + \Delta\theta) &= A(t) \sin \psi. \end{aligned}$$

Тогда

$$q = A(t) [\cos \psi \sin(\Omega_1 t + \theta_1) + \sin \psi \cos(\Omega_1 t + \theta_1)]$$

или

$$q = A(t) \sin(\Omega_1 t + \theta_1 + \psi), \quad (23.10)$$

где

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta)},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A_2 \sin(\Delta\Omega t + \Delta\theta)}{A_1 + A_2 \cos(\Delta\Omega t + \Delta\theta)}.$$

Уравнение (23.10) определяет незатухающие колебания биений. Амплитуда этих колебаний  $A(t)$  медленно изменяется с изменением времени ( $\Delta\Omega$  - малая величина) от  $A_1 + A_2$  до  $A_1 - A_2$ .

В частном случае, когда

$$A_1 = A_2 = A; \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta;$$

$$A(t) = 2A \cos \frac{\Delta\Omega}{2} t; \quad \psi = \frac{\Delta\Omega}{2} t,$$

то

$$q = 2A \cos\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t + \theta\right). \quad (23.11)$$

$$T_A = \frac{4\pi}{\Omega_2 - \Omega_1}; \quad T_b = \frac{4\pi}{\Omega_2 + \Omega_1}.$$

## §24. Коэффициент динамичности

Представим формулу (22.8) для определения амплитуд вынужденных колебаний, вызываемых периодической возмущающей силой в следующем виде:

$$A_{jb} = \frac{h_j}{\sqrt{(k^2 - j^2\Omega^2)^2 + 4n^2 j^2 \Omega^2}} = \frac{h_j}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_j^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{\Omega_j^2}{k^2}}}, \quad (24.1)$$

где  $j\Omega = \Omega_j$ .

При статическом действии силы  $H_j = ah_j$ , т.е. если  $\Omega_j = 0$ , отклонение системы от ее равновесного положения равно:

$$A_{j0} = \frac{h_j}{k^2} = \frac{H_j}{ak^2} = \frac{H_j}{c},$$

так как  $k^2 = c/a$ .

Отношение  $\frac{A_{jb}}{A_{j0}}$  называют коэффициентом динамичности:

$$\mu_j = \frac{A_{jb}}{A_{j0}}. \quad (24.2)$$

Коэффициент динамичности, соответствующий  $j$ -ой гармонике возмущающей силы,

$$\mu_j = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_j^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{\Omega_j^2}{k^2}}}. \quad (24.3)$$

При заданном отношении  $n$  и  $k$  коэффициент динамичности является функцией лишь  $\Omega_j / k$ :

$$\mu_j = \mu_j \left( \frac{\Omega_j}{k} \right).$$

Если коэффициент затухания  $n = 0$  (сопротивление не учитывается), то

$$\mu_j = \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega_j^2}{k^2}\right)}. \quad (24.4)$$

В случае резонанса  $j$ -го порядка по формуле (23.1)

$$A_{jb} = \frac{h_j}{2nk} = A_{0j} \frac{k}{2n}.$$

В этом случае

$$\mu_j = \frac{k}{2n}, \quad (24.5)$$

что следует и из формулы (24.3), т.к. в случае резонанса  $j$ -го порядка  $\Omega_j = k$ .

Максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний определяем по формуле (23.3):

$$\max A_{jb} = \frac{h_j}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = A_{j0} \frac{k}{2n\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}. \quad (24.6)$$

Максимальный коэффициент динамичности

$$\mu_{\max} = \frac{k}{2n\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}}. \quad (24.7)$$

При малом коэффициенте затухания  $n$  по формулам (24.5) и (24.7) практически получаются одни те же результаты, т.е. максимальный коэффициент динамичности и коэффициент динамичности при резонансе весьма близки друг к другу.

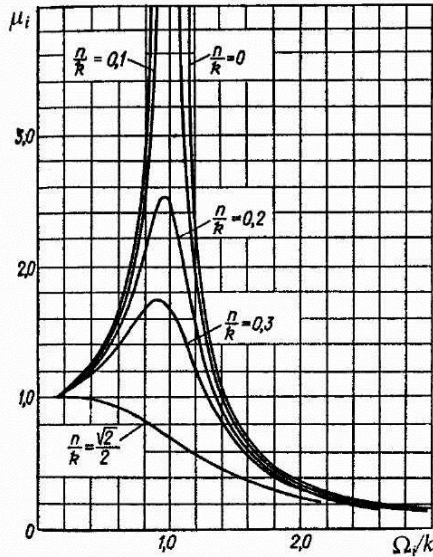


Рис.35

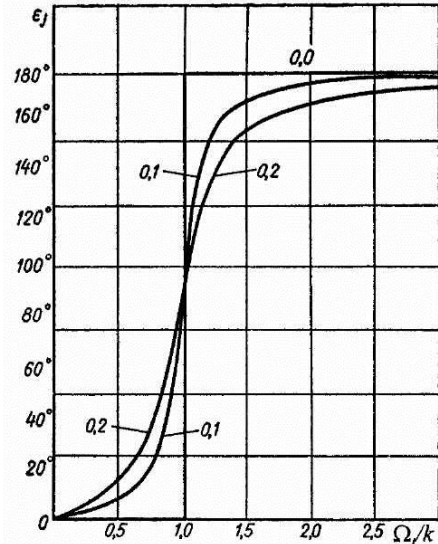


Рис. 36.

На рис. 35 показан график функций  $\mu_j = \mu_j\left(\frac{\Omega_j}{k}\right)$  для различных соотношений  $n/k$ , т.е. график изменения коэффициента динамичности.

При изменении  $\Omega_j/k$  от 0 до  $\infty$  коэффициент динамичности изменяется от 1 до 0, достигая максимума вблизи резонанса при значении  $\Omega_j/k$ , несколько меньшем единицы, что объясняется разностью (сдвигом) фаз возмущающей силы и вынужденных колебаний ( $\epsilon_j$ ).

Сдвиг фаз ( $\epsilon_j$ ) определяется по формуле (22.9):

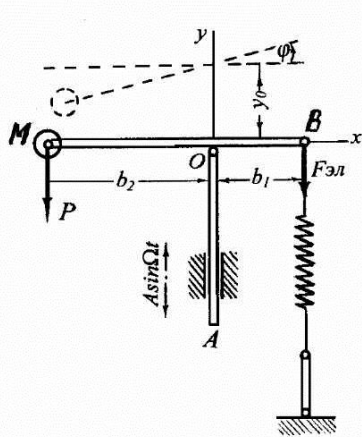
$$\operatorname{tg} \epsilon_j = \frac{2n\Omega_j}{k^2 - \Omega_j^2} = \frac{2n}{k} \frac{\Omega_j}{\left(1 - \frac{\Omega_j^2}{k^2}\right) \cdot k}, \quad (24.8)$$

т.е. величина  $\epsilon_j$  также является функцией ( $\Omega_j/k$ ):

$$\epsilon_j = \epsilon_j\left(\frac{\Omega_j}{k}\right).$$

График этой функции для некоторых соотношений  $\frac{n}{k}$  показан на рис.36. При изменении  $\Omega_j/k$  от 0 до  $\infty$  величина  $\varepsilon_j$  изменяется от 0 до  $\pi$ ; при резонансе  $\Omega_j = k$  величина  $\varepsilon_j = \pi/2$ .

**Пример.** Система, состоящая из точечного груза  $M$  силой тяжести  $P$ , невесомых стержней и пружины жесткостью  $c$ , расположена в вертикальной плоскости (рис.37). Штанга  $OA$  движется в вертикальных направляющих по закону  $y_0 = A \sin \Omega t$ . Горизонтальное положение стержня  $MB$  соответствует



положению статического равновесия системы. Определить малые движения груза  $M$  в вертикальном направлении.

В начальный момент система находится в положении статического равновесия, груз  $M$  имеет скорость, равную нулю, и  $y_0 = 0$ . Трением пренебречь.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Выбираем за обобщенную координату угол  $\varphi$ , т.е.  $q = \varphi$ , отсчитываемый от горизонтального направления против движения часовой стрелки.

Рис. 37

Связями системы являются направляющие и шарниры, трением которых пренебрегаем.

Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Кинетическая энергия системы, в которой массу имеет только точечный груз  $M$ , вычисляем по формуле

$$T = \frac{P}{g} \frac{v^2}{2} = \frac{P}{2g} (\dot{y}_0 - b_2 \dot{\varphi})^2,$$

так как движение груза является сложным, состоящим из переносного поступательного движения вместе с точкой  $O$ , со скоростью  $\dot{y}_0 = A\Omega \cos \Omega t$  и относительного вращательного движения с угловой скоростью  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , т.е.  $v = \dot{y}_0 - b_2 \dot{\varphi}$ .

Определим обобщенную силу  $Q_{\varphi}$ . Для этого сообщим системе в момент времени  $t$  возможное перемещение  $\delta\varphi$  против часовой стрелки и вычислим

элементарную работу сил на этом возможном перемещении в предположении, что  $\varphi \ll 1$ . Имеем:

$$Q_\varphi = \frac{\sum \delta A_k}{\delta \varphi} = \frac{Pb_2 \delta \varphi - F_{эл} b_1 \delta \varphi}{\delta \varphi} = Pb_2 - F_{эл} b_1,$$

где  $F_{эл} = c\lambda$  - сила упругости пружины,  $\lambda = \lambda_{см} + (y_0 + b_1\varphi)$  - ее удлинение.

Таким образом,

$$Q_\varphi = Pb_2 - c\lambda_{см} b_1 - c(y_0 + b_1\varphi)b_1 = -c(y_0 + b_1\varphi)b_1,$$

Так как в положении статического равновесия

$$Pb_2 - c\lambda_{см} b_1 = 0.$$

Для составления уравнения Лагранжа вычислим величины, входящие в его левую часть:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{Pb_2}{g}(\dot{y}_0 - b_2\dot{\varphi}), \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -\frac{Pb_2}{g}(\ddot{y}_0 - b_2\ddot{\varphi}).$$

Уравнение Лагранжа примет вид:

$$\frac{Pb_2}{g}(\ddot{y}_0 - b_2\ddot{\varphi}) = cb_1(y_0 + b_1\varphi),$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{cb_1^2 g}{Pb_2^2} \varphi = \frac{\ddot{y}_0}{b_2} - \frac{cb_1 g}{Pb_2^2} y_0.$$

Но  $\ddot{y}_0 = -A\Omega^2 \sin \Omega t$ , поэтому

$$\frac{\ddot{y}_0}{b_2} - \frac{cb_1 g}{Pb_2^2} y_0 = -A \left( \frac{\Omega^2}{b_2} + \frac{cb_1 g}{Pb_2^2} \right) \sin \Omega t.$$

Введем следующие обозначения

$$k^2 = \frac{cb_1^2 g}{Pb_2^2};$$

$$B = -A \left( \frac{\Omega^2}{b_2} + \frac{cb_1 g}{Pb_2^2} \right),$$

то дифференциальное уравнение малых колебаний выразится в форме

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = B \sin \Omega t.$$

Поскольку  $n=0$ , его общее решение запишется в форме (22.2), где  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = k$ ,  $n=0$ , т.е.

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{B}{k^2 - \Omega^2} \sin \Omega t,$$



$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{B\Omega}{k^2 - \Omega^2} \cos \Omega t.$$

Начальные условия задачи:  $t = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$ .

Подставляя эти значения в выражения для  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ , получим:

$$C_1 = 0; 0 = C_2 k + \frac{B\Omega}{k^2 - \Omega^2}$$

или

$$C_1 = 0; C_2 = -\frac{B\Omega}{(k^2 - \Omega^2)k} = \frac{\Omega}{k} \frac{B}{(\Omega^2 - k^2)}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{B}{(\Omega^2 - k^2)} \left( \frac{\Omega}{k} \sin kt - \sin \Omega t \right).$$

Для координат груза  $M$

$$y = y_0 - b_2 \varphi = A \sin \Omega t - \frac{Bb_2}{(\Omega^2 - k^2)} \left( \frac{\Omega}{k} \sin kt - \sin \Omega t \right).$$

## § 25. О колебаниях упруго подвешенных масс

Двигатель или турбонасосный агрегат, подвешенный на раме к корпусу, прибор для измерения вертикальных колебаний или какой-либо агрегат, укрепленный на корпусе, в первом приближении могут рассматриваться как колебательные системы с одной степенью свободы. К нескольким системам с одной степенью свободы приводятся также и колебания более сложных конструкций, у которых масса и жесткость являются распределенными параметрами.

Вынужденные колебания таких систем могут возникать как от действия периодических внешних сил, приложенных к массе, так и тогда, когда внешние силы неизвестны, а известен закон движения точки подвеса массы.

### *Вынужденные колебания под действием силы приложенной к массе.*

Если отклонение массы  $m$  отсчитывать от положения статического равновесия, то уравнение малых колебаний системы с одной степенью свободы ( $q = y$ ) будет иметь вид (рис.38).

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + cy = F(t). \quad (25.1)$$

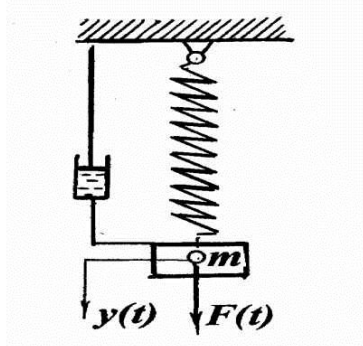


Рис. 38

Здесь  $c$  коэффициент пропорциональности между силой и смещением в положении статического равновесия,  $h$  – коэффициент пропорциональности между силой и скоростью (коэффициент вязкого трения).

Здесь мы не уточняем, какую конструктивную форму имеет упругий элемент (спиральная пружина; стержень, работающий на растяжение и сжатие; балка, работающая на изгиб и т.д.).

Если характеристика упругого элемента линейная, то для вычисления коэффициента  $c$  можно рекомендовать следующее известное правило. В месте расположения сосредоточенной массы и в направлении ее движения при колебаниях к упругому элементу надо приложить единичную силу и вычислить перемещение в направлении действия этой силы. Величина обратная перемещению, будет равна коэффициенту  $c$ .

Например, упругим элементом является работающая на изгиб шарнирно опертая балка; сосредоточенная масса расположена по середине длины балки. Пусть длина балки  $L$ , жесткость на изгиб  $EJ$ . Тогда

$$f = \frac{1 \cdot L^3}{48EJ}, \quad c = 48 \frac{EJ}{L^3}.$$

Когда сила изменяется по гармоническому закону  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ , уравнение (25.1) приведем к виду (22.1):

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = A \sin \Omega t, \quad (25.2)$$

где  $n = \frac{h}{2m}$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $A = \frac{F_0}{m}$ .

Решение уравнения (25.2) (при  $j=1$ ,  $a_0 = a_j = 0$ ,  $b_j / a = A$ ) имеет вид (22.2) или

$$y = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + \frac{B \sin(\Omega t + \theta)}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\Omega}^2}},$$

$$k^* = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{k}, \quad (25.3)$$

$$\bar{n} = \frac{n}{k}, \quad B = \frac{F_0}{c}, \quad \theta = \text{arctg} \left( -\frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2} \right).$$

Если выполняется условие

$$2n\Omega \ll (k^2 - \Omega^2), \quad (25.4)$$

то вместо формул (25.3) перемещение  $y$  можно вычислить из выражения

$$y = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + \frac{B \sin \Omega t}{1 - \bar{\Omega}^2}. \quad (25.5)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяют из начальных условий. Если предположить, что движение возникло из состояния покоя, то начальными условиями будут:

$$t = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0.$$

Для уравнения (25.5) получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{B\Omega}{k^*(1 - \bar{\Omega}^2)}.$$

Таким образом,

$$y = \frac{B}{1 - \bar{\Omega}^2} \left( \sin \Omega t - \frac{\Omega}{k^*} e^{-nt} \sin k^* t \right). \quad (25.6)$$

Колебания массы  $m$  происходит с двумя частотами: вынужденной  $\Omega$  и собственной  $k^*$ , причем, т.к.  $n > 0$ , то колебания с частотой  $k^*$  со временем затухнут. Вынужденные колебания с частотой  $\Omega$  будут существовать, пока действует возмущающая сила.

Представим максимальное перемещение массы  $m$  в виде

$$B_{\max} = B_{cm} \mu,$$

причем коэффициент динамичности с учетом выражений (25.3) и (25.4) соответственно будет

$$\mu = 1 + \frac{B}{B_{cm}} \frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\Omega}^2}}, \quad \mu = 1 + \frac{B}{B_{cm}} \frac{1}{1 - \bar{\Omega}^2}, \quad (25.7)$$

где  $B_{cm}$  - статическое перемещение от силы  $F_0$ .

Коэффициент динамичности зависит от отношения частот  $\bar{\Omega} = \Omega/k$  и от параметра затухания  $\bar{n} = n/k$ . Коэффициент  $\mu$  имеет максимальное значение при совпадении частот вынужденных и свободных колебаний (точнее, при  $\bar{\Omega}^2 = 1 - 2\bar{n}^2$ ). В этом случае возникают резонансные колебания.

При  $\bar{\Omega} = 0$   $\mu^0 = 1 + B/B_{cm}$ . Иначе говоря, при статическом приложении внешней силы  $F$  полный прогиб равен сумме прогибов от силы тяжести  $B_{cm}$  и от внешней силы  $B$ . Если  $\bar{\Omega} > \sqrt{2}$ , то  $\mu < \mu^0$ . Когда частота вынужденных колебаний значительно больше собственной частоты, амплитуда вынужденных колебаний значительно меньше статического перемещения и коэффициент динамичности  $\mu \approx 1$ .

В практике инженерных расчетов вопросы динамического нагружения конструкции и резонанса занимают одно из первых мест. При наличии гармонической внешней силы оценка производится, прежде всего, путем сопоставления собственных и вынужденных частот. Если эти частоты сильно отличаются друг от друга, то значительных динамических перемещений не возникнет и условия для работы упругих элементов будут благоприятными. Изменением параметров системы желательно добиваться такой собственной частоты, чтобы условий, близких к резонансным, не возникало. Если конструктор в силу обстоятельств лишен возможности варьировать частотами, то в случае возможности резонанса практикуется, как выше было

сказано, установка специальных устройств для рассеивания энергии при колебаниях –демпферов.

Необходимо отметить следующее. Если при вынужденных колебаниях начальные условия точно определены, то максимальное динамическое перемещение следует вычислять из общего решения (25.3). Максимальное динамическое перемещение в течение первого периода колебаний может быть больше амплитуды вынужденных установившихся колебаний в чем нетрудно убедиться из анализа решения (25.6)

Кратковременное действие гармонической силы в условиях резонанса не представляет опасности для конструкции. Известно, что при  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$  и  $n = 0$  решением уравнения (25.2) будет

$$y = -\frac{Bk}{2} t \cos kt .$$

Нужно определенное время, чтобы перемещение  $y$  превзошло некоторый допустимый предел.

**Колебания массы, вызванные перемещением точки подвеса.**  
Колебания приборов, емкостей, арматуры и других сосредоточенных масс, упруго подвешенных к корпусу, возникают как правило, из-за перемещений стенок корпуса (например, прибор для измерения вертикальных колебаний корпуса на котором он установлен рис.39).

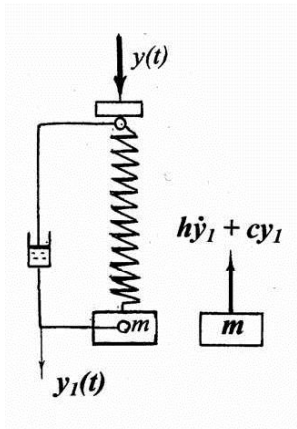


Рис. 39

Пусть точка подвеса сосредоточенной массы  $m$  (рис.39) перемещается в направлении оси пружины по закону  $y(t)$ .

Обозначим через  $y_1(t)$  перемещение массы  $m$  относительно точки подвеса, причем это перемещение будем отсчитывать от положения статического равновесия. Со стороны пружины и демпфера на массу  $m$  действует сила  $h\dot{y}_1 + cy_1$  (рис.39), ускорение массы равно  $(\ddot{y}_1 + \ddot{y})$ , так что  $m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}) = -(h\dot{y}_1 + cy_1)$ .

Тогда уравнение малых колебаний массы  $m$  будет следующим:

$$m\ddot{y}_1 + h\dot{y}_1 + cy_1 = -m\ddot{y}. \quad (25.8)$$

Это уравнение также справедливо, если упругим элементом служит, например, балка, работающая на изгиб. В случае гармонических перемещений  $y(t) = y_0 \sin \Omega t$  уравнение (25.8) приведем к виду (25.2), т.е.

$$\ddot{y}_1 + 2n\dot{y}_1 + k^2 y_1 = y_0 \Omega^2 \sin \Omega t \quad (25.9)$$

и динамическое удлинение пружины запишем в виде (25.3):

$$y_1 = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + y_0 \frac{\bar{\Omega}^2 \sin(\Omega t + \theta)}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\Omega}^2}}. \quad (25.10)$$

Обозначим статическое удлинение пружины через  $B_{cm}$ . Учитывая только вынужденные колебания координаты  $y_1$ , представим максимальное удлинение пружины в виде

$$B_{1\max} = B_{cm} \mu,$$

причем коэффициент  $\mu$  динамичности применительно к выражениям (25.10) и (25.4) соответственно будет

$$\mu = 1 + \frac{y_0}{B_{cm}} \frac{\bar{\Omega}^2}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\bar{n}^2 \bar{\Omega}^2}}, \quad \mu = 1 + \frac{y_0}{B_{cm}} \frac{\bar{\Omega}^2}{1 - \bar{\Omega}^2}. \quad (25.11)$$

Для жесткой подвески, когда  $\bar{\Omega} \ll 1$  ( $\Omega \ll k$ ), коэффициент динамичности мало отличается от единицы ( $\mu \approx 1$ ). При мягкой подвески ( $\bar{\Omega} \gg 1$ ) масса  $m$  будет почти неподвижна и удлинение пружины  $y_1$  будет равно перемещению точки подвеса. Коэффициент динамичности в этом случае будет  $\mu = 1 + y_0 / B_{cm}$ .

Если сравнить между собой коэффициенты динамичности (25.7) и (25.11), то можно сделать вывод. Для  $B / B_{cm} = y_0 / B_{cm}$  и одних и тех же значений  $\bar{\Omega}$  коэффициент динамичности до резонанса в случае (25.7) больше чем в случае (25.11). После резонанса соотношение будет обратным.

Таким образом, если колебания возбуждаются движением точки подвеса, то жесткий упругий элемент ( $\bar{\Omega} \ll 1$ , колебания до резонанса) удлинится меньше мягкого. Однако заметим, что если, например, для прибора надо добиваться уменьшения вибрационных ускорений, то подвеску надо делать возможно более мягкой, так как при мягкой подвеске ( $\bar{\Omega} \gg 1$ , колебания после резонанса) амплитуда ускорения массы  $m$  при колебаниях практически равна нулю:

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y} = y_0 \left( \frac{\bar{\Omega}^2}{1 - \bar{\Omega}^2} + 1 \right) \Omega^2 \approx 0.$$

Отметим, что вообще частные решения уравнений (25.2) и (25.9) зависят от вида функций  $F(t)$  и  $\ddot{y}(t)$ .

## § 26. Вынужденные колебания системы, вызываемые импульсами мгновенных сил

Мгновенными называют силы, действующие в течение ничтожно малого промежутка времени  $\tau$ , импульс которых имеет конечное значение

$$S = \lim_{\tau \rightarrow 0} (F \cdot \tau).$$

Такие импульсы возникают, например, при соударении тел. Для исследования колебаний, вызываемых этими импульсами, воспользуемся общим решением дифференциального уравнения вынужденных колебаний при начальных условиях  $q_0 = 0$  и  $\dot{q}_0 = 0$  - формулой (21.5):

$$q = \frac{1}{ak^*} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1.$$

Найдем, прежде всего, уравнение колебаний, вызванных постоянной обобщенной силой  $Q_F$ , внезапно приложенной к системе в момент времени  $t_1 = 0$  и действующей в течение некоторого промежутка времени  $\tau$ . Применим формулу (21.5), получаем

$$q = \frac{1}{ak^*} \int_0^t Q_F(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin k^*(t-t_1) dt_1 = \frac{Q_F}{ak} \frac{k^*}{(n^2 + k^{*2})} \left\{ -e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}_{t=\tau}$$

или

$$q = \frac{Q_F}{c} \left\{ 1 - e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}_{t \leq \tau}. \quad (26.1)$$

Колебания, определяемые уравнением (26.1), существуют до тех пор, пока действует сила  $Q_F$ , т.е. если  $t \leq \tau$ .

Найдем максимальное значение координаты  $q = q(t)$ . Из уравнения (26.1)

$$\dot{q} = \frac{Q_F}{c} \left\{ -e^{-nt} (n \cos k^* t - k^* \sin k^* t) + n e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\}.$$

Приравнивая обобщенную скорость  $\dot{q}$  нулю, получаем

$$e^{-nt} \sin k^* t = 0,$$

что при конечном значении  $t$  приводит к условию

$$\sin k^* t = 0; \quad t = \pi / k^*,$$

так как при  $t = 0$  величина  $q_0 = 0$ .

Следовательно, максимальное значение  $q$  достигает при  $t = T^* / 2$ , т.е. в том случае, когда промежуток времени  $t$  равен половине периода затухающих колебаний.

Максимальное значение

$$q_{\max} = \frac{Q_F}{c} \left( 1 + e^{-\frac{nT^*}{2}} \right). \quad (26.2)$$

Так как при статическом действии силы  $Q_F$

$$q_{ст} = \frac{Q_F}{c},$$

то коэффициент динамичности для рассматриваемого случая ( $\tau \geq T^*/2$ )

$$\mu = 1 + e^{-\frac{nT^*}{2}}. \quad (26.3)$$

Этот коэффициент всегда больше единицы.

Для случая  $n=0$  (сопротивление не учитывается) уравнение (26.1) принимает следующий вид

$$q = \frac{Q_F}{c} (1 - \cos kt)_{t \leq \tau}. \quad (26.4)$$

Динамическое воздействие внезапно приложенной постоянной силы в этом случае по формуле (26.3) в два раза больше статического:

$$\mu = 2.$$

Уравнение колебаний системы после прекращения действия силы ( $t \geq \tau$ ) можно получить следующим образом: обобщенная сила, равная  $-Q_F$ , приложенная к системе в момент времени  $t = \tau$ , вызывает колебания, определяемые уравнением, аналогичным уравнению (26.1), а именно:

$$q = -\frac{Q_F}{c} \left\{ 1 - e^{-n(t-\tau)} \left[ \frac{n}{k^*} \sin k^*(t-\tau) + \cos k^*(t-\tau) \right] \right\}.$$

Суммируя эти колебания с колебаниями, вызванными силой  $+Q_F$ , приложенной к системе в момент времени  $t=0$ , получаем следующее уравнение колебаний для случая  $t \geq \tau$ , где  $\tau$  - продолжительность действия силы  $+Q_F$ :

$$q = \frac{Q_F}{c} \left\{ e^{-n(t-\tau)} \left[ \frac{n}{k^*} \sin k^*(t-\tau) + \cos k^*(t-\tau) \right] - e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right) \right\} \quad \text{при } t \geq \tau. \quad (26.5)$$

Если  $\tau < T^*/2$ , то обобщенная координата  $q$ , определяемая уравнением (26.5), достигает своего максимального значения после прекращения действия силы, т.е. в некоторый момент времени  $t_m > \tau$ . Этот момент времени можно определить из уравнений

$$\dot{q} = 0; \quad e^{-nt_m} \left\{ \sin k^* t_m - e^{n\tau} \sin k^*(t_m - \tau) \right\} = 0; \quad (26.6)$$

$$tg k^* t_m = \frac{\sin k^* \tau}{\cos k^* \tau - e^{-n\tau}}.$$

Соотношение (26.6) позволяет получить следующее максимальное значение  $q$ :

$$q_{\max} = \frac{Q_F e^{-nt_m}}{c} \left\{ e^{n\tau} \cos k^*(t_m - \tau) - \cos k^* t_m \right\}. \quad (26.7)$$

При этом коэффициент динамичности:

$$\mu = e^{-nt_m} \left\{ e^{n\tau} \cos k^*(t_m - \tau) - \cos k^* t_m \right\}. \quad (26.8)$$

Если величина  $n$  значительно меньше величины  $k$ , т.е.  $n \ll k$ , то сопротивлением можно пренебречь. Все формулы в этом случае ( $n=0$ ) упрощаются и принимают вид:

$$q = \frac{Q_F}{c} \{ \cos k(t - \tau) - \cos kt \} = \frac{2Q_F}{c} \sin \frac{k\tau}{2} \sin k \left( t - \frac{\tau}{2} \right); \quad (26.9)$$

$$t_m = \frac{\pi}{2k} + \frac{\tau}{2}; \quad (26.10)$$

$$q_{\max} = \frac{2Q_F}{c} \sin \frac{k\tau}{2}; \quad (26.11)$$

$$\mu = 2 \sin \frac{k\tau}{2}. \quad (26.12)$$

В зависимости от продолжительности действия внезапно приложенной к системе постоянной силы  $Q_F$ , коэффициент  $\mu$ , определяемый формулами (26.8) и (26.12) может быть больше и меньше единицы.

Для исследования колебаний, вызываемых импульсом мгновенной силы  $S = \lim_{\tau \rightarrow 0} (Q_F \cdot \tau)$ , уравнение (26.5) представим в следующем виде:

$$q = \frac{Q_F \cdot \tau}{c} \frac{e^{-n(t-\tau)} \left\{ \frac{n}{k^*} \sin k^*(t - \tau) + \cos k^*(t - \tau) \right\} - e^{-nt} \left( \frac{n}{k^*} \sin k^* t + \cos k^* t \right)}{\tau}.$$

Правая часть этого выражения при  $\tau \rightarrow 0$  обращается в неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья получаем:

$$q = \frac{S \cdot e^{-nt}}{c} \frac{k^2}{k^*} \sin k^* t$$

или

$$q = \frac{S}{ak^*} e^{-nt} \sin k^* t. \quad (26.13)$$

При этом максимальное значение  $q$

$$q_{\max} = \frac{S}{ak^*} e^{-nt_m} \sin k^* t_m, \quad (26.14)$$

где

$$t_m = \frac{1}{k^*} \operatorname{arctg} \frac{k^*}{n}. \quad (26.15)$$



Для малых коэффициентов затухания  $n$ , т.е. при  $k^* \approx k$

$$t_m \approx \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2k}.$$

$$q_{\max} \approx \frac{S}{ak} e^{-\frac{nT}{4}} = \frac{S}{ak} e^{-\frac{\pi n}{2k}}. \quad (26.16)$$

Если  $n = 0$ , то

$$q = \frac{S}{ak} \sin kt = \frac{Sk}{c} \sin kt, \quad (26.17)$$

$$q_{\max} = \frac{Sk}{c}. \quad (26.18)$$

Величину  $Sk$  можно рассматривать как эквивалентную обобщенную силу  $Q_{\text{экв}}$ , статическое действие которой и определяет максимальное отклонение системы от ее равновесного положения, вызванное мгновенным импульсом  $S$ .

Рассмотрим колебания, вызываемые системой мгновенных импульсов. Если импульсы возникают через промежутки времени

$$t_j (j = 1, 2, \dots, s) \quad (t_1 = 0),$$

где  $s$  - число импульсов, то уравнение вынужденных колебаний при  $t > t_j$  имеет вид

$$q = \frac{1}{ak^*} \sum_{j=1}^s S_j e^{-n(t-t_j)} \sin k^*(t-t_j). \quad (26.19)$$

Для равных импульсов  $S_j = S$  и равных промежутков времени  $t_j = j\tau$

$$q = \frac{S}{ak^*} \sum_{j=0}^{s-1} e^{-n(t-j\tau)} \sin k^*(t-j\tau) \quad \text{при } t > j\tau. \quad (26.20)$$

Если промежуток времени между возникающими импульсами

$$\tau = \frac{2\pi}{k^*} = T^*,$$

то происходит так называемый ударный резонанс. В этом случае

$$q = \frac{S}{ak^*} \sum_{j=0}^{s-1} e^{-n(t-jT^*)} \sin k^*(t-jT^*) \quad \text{при } t > (s-1)T^*. \quad (26.21)$$

Приняв за начало отсчета времени момент  $t = (s-1)T^*$ , получим

$$q = \frac{S}{ak^*} e^{-nt} \sin k^* t \left\{ e^{-(s-1)nT^*} + e^{-(s-2)nT^*} + \dots + e^{-nT^*} + 1 \right\} \quad (26.22)$$

или

$$q = \frac{S(1 - e^{-snT})}{ak^*(1 - e^{-nT^*})} e^{-nt} \sin k^* t.$$

Если  $n = 0$ , то по (26.22)

$$q = \frac{S \cdot s}{ak} \sin t, \quad (26.23)$$

где  $s$ - число импульсов.

Для неограниченного числа периодически возникающих импульсов мгновенных сил ( $s \rightarrow \infty$ ) уравнение (26.22) принимает следующий вид:

$$q = \frac{S}{ak^*(1 - e^{-nT^*})} e^{-nt} \sin k^* t. \quad (26.24)$$

Это уравнение применимо для интервала времени  $0 \leq t < T$ .

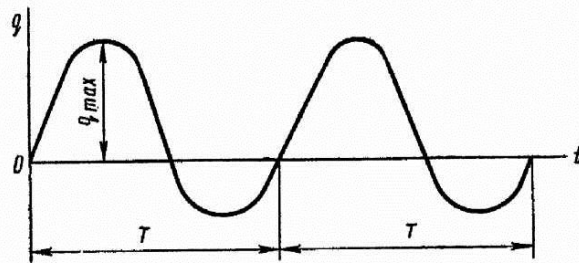


Рис.40

Для следующих интервалов цикл повторяется, т.е. движение системы определяется тем же уравнением. График колебаний показан на рис. 40.

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ ) амплитуда колебаний  $q_{\max} \rightarrow \infty$ , т.е. с увеличением числа импульсов по формуле (26.24) амплитуда неограниченно возрастает. График нарастания этих колебаний показан на следующем рис. 41.

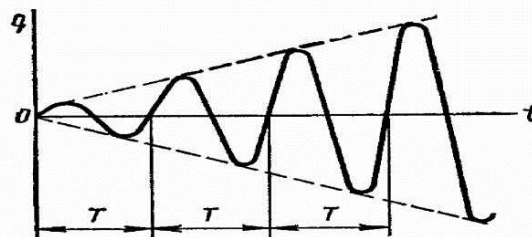


Рис. 41

Таким образом, при наличии ударного резонанса, так же как и в случае резонанса, возникшего в результате действия периодических возмущающих сил, необходимо учитывать даже незначительные силы сопротивления, характеризующиеся малым коэффициентом затухания.

Колебания, вызываемые знакопеременными импульсами, возникающими через промежуток времени  $\tau = \frac{T^*}{2}$ , можно исследовать аналогичным путем. Движение системы в этом случае определяется уравнением:

$$q = \frac{S}{ak} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^j e^{-n\left(t-j\frac{T^*}{2}\right)} \sin k^* \left(t - j\frac{T^*}{2}\right) \quad (26.25)$$

при  $t > (s-1)\frac{T^*}{2}$ .

Для конечного числа импульсов с момента времени  $t = (s-1)\frac{T^*}{2}$  это уравнение можно представить в виде:

$$q = \frac{S\left(1 - e^{-0,5snT^*}\right)}{ak^*\left(1 - e^{-0,5nT^*}\right)} e^{-nt} \sin k^* t. \quad (26.26)$$

Если число импульсов  $s \rightarrow \infty$ , то уравнение (26.26) принимает такой вид

$$q = \frac{S e^{-nt}}{ak^* \left(1 - e^{-0,5nT^*}\right)} \sin k^* t \quad \text{при } 0 < t < T. \quad (26.27)$$

Для конечного числа импульсов и коэффициента затухания  $n=0$  по уравнению (26.26) получаем неопределенность вида  $0/0$ .

Раскрывая эту неопределенность по общему правилу, получим

$$q = \frac{S \cdot s}{ak} \sin kt. \quad (26.28)$$

На рис. 42. показан график нарастания этих колебаний с увеличением числа импульсов  $s$ .

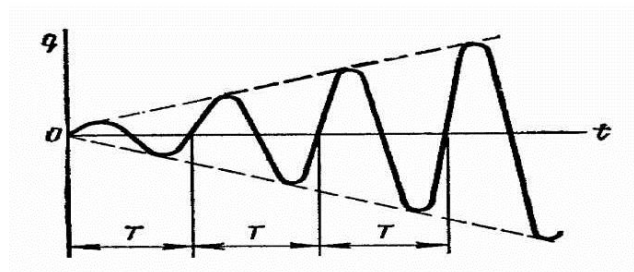


Рис.42.

## **О динамических процессах, возникающих при движении автотранспорта**

### **§ 27. Силы действующие на движущийся автотранспорт**

В процессе эксплуатации автотранспорт испытывает различные по своей природе динамические нагрузки. В частности, ими являются силы инерции, которые возникают благодаря движению самого объекта. Силы инерции в определенных условиях могут создать затруднения для нормальной эксплуатации автотранспорта и они могут привести даже к аварийным ситуациям.

Существует много силовых факторов динамического характера, действующих на движущийся автотранспорт. К главным относятся следующие:

*1. Сила тяги.* Данная сила является регулярным (постоянным) фактором.

*2. Эффект скорости.* Этот фактор определяет силы инерции, возникающие по причине движения автотранспорта по криволинейной траектории, а также появляющиеся при замедлении и ускорении автотранспорта.

*3. Удары колес в неровностях на дорогах и проезжей части на мостах.* Их можно разделить на закономерные и случайные. К первым относятся переломы профиля пути на опорах мостов, периодические неровности продольного профиля пути, периодически повторяющиеся поперечные температурные швы автомобильных дорог с бетонным покрытием; ко вторым относятся всякого рода неровности и выбоины на проезжей части, возникающие в результате неравномерного износа и угона мягких покрытий.

*4. Колебания наддресорной части подвижного автотранспорта,* которые приводят к периодическому изменению давления на ось. Они вызываются ударами колес в неровностях пути, а также движением по извилистой траектории.

*5. Пульсация статических прогибов пролетных строений мостов при движении колонны однотипных автомобилей.*

*6. Аэродинамические силы.* Как известно, на любое тело (в том числе и на автомобиль), находящееся в воздушном потоке, действует некоторая сила, вызванная их взаимодействием. В общем случае при воздействии воздушного потока на автомобиль возникают – сила лобового сопротивления, подъемная сила и крутящий момент. Вообще аэродинамические силы,

действующие на движущийся автомобиль, зависят от скорости ветра, формы и размеров поперечного сечения автомобиля.

Оценивая влияние некоторых приведенных факторов динамического воздействия, следует отметить, что влияние эффекта скорости при организации движения автотранспорта значительно; во-вторых, колебания наддресорного строения проявляются при достаточно больших скоростях движения; в-третьих, с введением бесстыкового пути на мостах роль ударов колес заметно уменьшается.

В современных условиях высокоскоростного движения становится актуальной учет вышеуказанных факторов при эксплуатации автотранспорта и организации его движения. Не учет этих факторов при определенных условиях может угрожать безопасности движения автомобилей.

## § 28. Определение критической скорости движения автомобиля по криволинейной траектории

Рассмотрим движения автомобиля по криволинейному участку пути. Пусть автомобиль движется со скоростью  $v$ , масса автомобиля  $m$ , центр его тяжести расположен на высоте  $h$  над уровнем полотна дороги, расстояние между колесами  $l$ , радиус закругления криволинейного участка дороги  $\rho$  (рис.43 а).

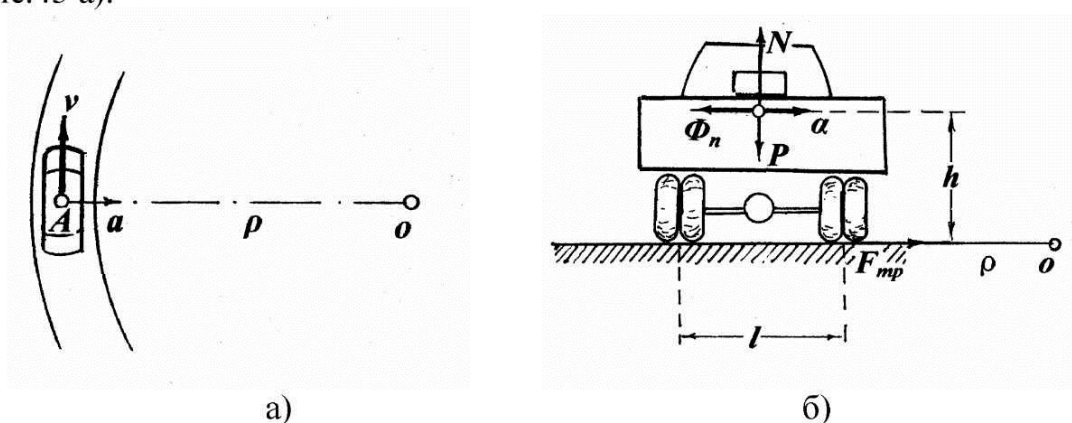


Рис. 43

Укажем все силы, действующие на автомобиль (рис.43,б):  $P$ - вес автомобиля;  $\Phi_n = \frac{mv^2}{\rho}$  - центробежная сила инерции;  $\bar{N}$  - суммарная реакция полотна дороги;  $F_{mp} = fN = fP = fmg$  - суммарная сила трения скольжения, где  $f$  - коэффициент трения скольжения. При этом коэффициент  $f$  зависит от метеоусловий, материала и состояния дорожного покрытия.

При движении автомобиля по криволинейному участку пути в зависимости от величины скорости и движения возможны следующие ситуации:

1. При  $F_{mp} \geq \Phi_n$  ситуация без аварийная. Какова при этом должна быть скорость движения автомобиля? Из условия  $F_{mp} \geq \Phi_n$  определим величину безаварийного движения

$$fmg \geq \frac{mv^2}{\rho},$$

т.е

$$v \leq \sqrt{fg\rho}. \quad (28.1)$$

2. При  $F_{mp} < \Phi_n$  возможен боковой снос автомобиля, т.е.

$$v_{кр}^{(1)} > \sqrt{fg\rho}. \quad (28.2)$$

3. При определенных значениях скорости движения автомобиля, возможно опрокидывание автомобиля. Это ситуация возможна тогда, когда  $M_{опр}$  - опрокидывающий момент будет больше, чем  $M_{уд}$  - удерживающий момент, т.е.

$$M_{опр} \geq M_{уд},$$

где

$$M_{опр} = \Phi_n \cdot h = \frac{mh}{\rho} v^2, \quad M_{уд} = P \frac{\ell}{2} = \frac{mg\ell}{2}.$$

Или

$$\frac{mhv^2}{\rho} \geq \frac{mg\ell}{2}.$$

Отсюда критическая скорость, когда возможно опрокидывание, определяется из следующей формулы:

$$v_{кр}^{(2)} \geq \sqrt{\frac{g\rho\ell}{2h}}. \quad (28.3)$$

При этом, если  $\frac{\ell}{2h} > f$ , то  $v_{кр}^{(2)} > v_{кр}^{(1)}$ ,

если  $\frac{\ell}{2h} < f$ , то  $v_{кр}^{(2)} < v_{кр}^{(1)}$ .

Поэтому эксплуатационная скорость  $v^{\text{э}}$  движения автомобиля на этом участке должна быть

$$v^{\text{э}} < v_{кр}^{(1)} < v_{кр}^{(2)}, \text{ если } \frac{\ell}{2h} > f \quad (28.4)$$

и

$$v^3 < v_{кр}^{(2)} < v_{кр}^{(1)}, \text{ если } \frac{l}{2h} < f. \quad (28.5)$$

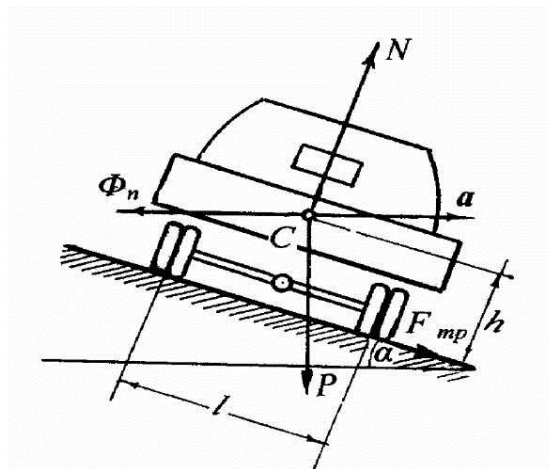


Рис.44

Следовательно, эксплуатационная скорость движения зависит от погодных условий и типа автомобиля.

Как известно, на криволинейных участках автомобильной дороги возвышает внешней край дороги над внутренним для того, чтобы сила давления проходящего автомобиля на дорожное полотно была направлена перпендикулярно полотну дороги (рис.44).

Что уменьшает во-первых, опасность бокового сноса автомобиля, во-вторых, боковой износ шин.

В данном случае:

1. При  $F_{тр} + P \sin \alpha \geq \Phi_n \cos \alpha$  бокового сноса автомобиля не будет. Но  $F_{тр} = fN$ , а  $N = P \cos \alpha + \Phi_n \sin \alpha$ .

Тогда первоначальное неравенство примет вид

$$fmg \cos \alpha + \frac{mv^2}{\rho} f \sin \alpha + mg \sin \alpha \geq \frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha.$$

Из этого уравнения

$$v_\alpha \leq \sqrt{\frac{g\rho(f \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha}}. \quad (28.6)$$

Сравнивая формулы (28.6) и (28.1), приходим к выводу, что в данном случае

$$v_\alpha > v.$$

2. При  $F_{тр} + P \sin \alpha < \Phi_n \cos \alpha$  возможен боковой снос автомобиля на вираже. Подставим значения  $F_{тр}$  и  $\Phi_n$  в это неравенство:

$$mg \sin \alpha + mgf \cos \alpha + \frac{mv^2}{\rho} f \sin \alpha < \frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha.$$

Отсюда

$$v_{\alpha}^{(1)} > \sqrt{\frac{g\rho(f \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha}}. \quad (28.7)$$

Здесь также

$$v_{\alpha}^{(1)} > v_{кр}^{(1)}.$$

Опрокидывание автомобиля возможно, когда

$$\Phi_n \cos \alpha \cdot h \geq \Phi_n \sin \alpha \cdot \frac{\ell}{2} + P \cos \alpha \frac{\ell}{2} + P \sin \alpha \cdot h,$$

или

$$\frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha \cdot h \geq \frac{mv^2}{\rho} \sin \alpha \frac{\ell}{2} + mg \left( \frac{\ell}{2} \cos \alpha + h \sin \alpha \right).$$

Следовательно, критическая скорость при опрокидывании определяется по формуле

$$v_{\alpha}^{(2)} \geq \sqrt{\frac{g\rho(\ell \cos \alpha + 2h \sin \alpha)}{(2h \cos \alpha - \ell \sin \alpha)}}. \quad (28.8)$$

Как видно из формул (28.8) и (28.3)

$$v_{\alpha}^{(2)} > v_{кр}^{(2)}.$$

При  $\alpha = 0$  формулы для определения скоростей движения (28.6), (28.7), (28.8) совпадают с формулами (28.1), (28.2), (28.3) соответственно.

В данном случае эксплуатационная скорость должна подчиняться следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^{\vartheta} < v_{\alpha}^{(1)}, & \text{ если } v_{\alpha}^{(1)} < v_{\alpha}^{(2)}; \\ v_{\alpha}^{\vartheta} < v_{\alpha}^{(2)}, & \text{ если } v_{\alpha}^{(2)} < v_{\alpha}^{(1)}. \end{aligned}$$

## § 29. Определение тормозного пути и времени торможения движущегося автомобиля

Пусть автомобиль движется со скоростью  $v$  по прямолинейному участку пути. Масса его  $m$ . В момент торможения силы, действующие на автомобиль, показаны на рис.45.

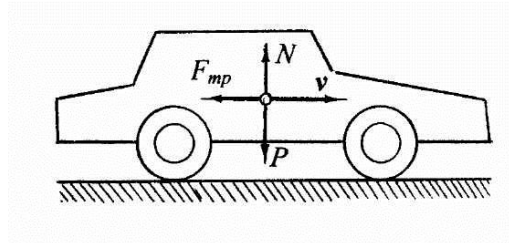


Рис. 45

Для определения тормозного пути применим теорему об изменении кинетической энергии для материальной точки:



$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{F_{mp}} + A_p + A_N. \quad (29.1)$$

В нашем случае  $v_1 = v$ ,  $v_2 = 0$ ,  $A_{F_{mp}} = -F_{mp} \cdot s$ ;  $A_p = 0$ ,  $A_N = 0$  и  $F_{mp} = fN$ , а  $N = P$  и  $f$  коэффициент трения скольжения, зависящий от метеословий, состояния дорожного покрытия и шин.

Тогда из уравнения (29.1), получим

$$-\frac{mv^2}{2} = -fmg \cdot s,$$

или тормозной путь

$$s = \frac{v^2}{2fg} \quad (29.2)$$

определяется из формулы (29.2). Как видно из (29.2) тормозной путь прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально коэффициенту трения скольжения.

Для определения времени торможения, применим теорему об изменении количества движения материальной точки

$$mv - mv_1 = S_x$$

или

$$-mv = -F_{mp} \cdot t.$$

Таким образом, время торможения определяется из следующей формулы:

$$t = \frac{v}{fg}. \quad (29.3)$$

Как видим время торможения пропорционально скорости и обратно пропорционально коэффициенту трения скольжения.

### § 30. Удары колес в неровностях на дорогах

Предположим, что на дорогах имеются неровности глубины  $h$  рис.46. При ударах колес в

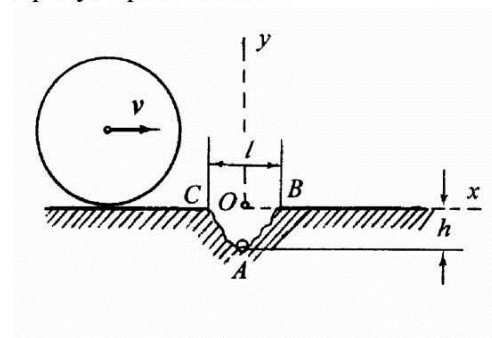


Рис. 46

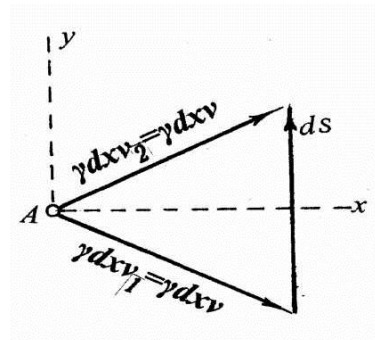


Рис.47

неровностях на автомобиль будут действовать силы. Сейчас остановимся на определении этих сил.

Вычислим элементарный импульс силы  $\bar{F}$ , действующей со стороны поверхности неровности на элементарный участок автомобиля, проходящего неровности. По теореме об изменении количества движения имеем:

$$\gamma dx \bar{v}_2 - \gamma dx \bar{v}_1 = d\bar{S},$$

где  $\gamma$  - погонная масса автомобиля.  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  - векторы скоростей центра масс элементарного участка автомобиля до и после прохождения неровности на дорогах, причем  $v_2 = v_1 = v$ .  $d\bar{S}$  - элементарный импульс силы  $\bar{F}$ .  $dx$  - длина элементарного участка автомобиля;  $\gamma dx$  - масса элементарного участка автомобиля.

Время прохождения неровности будем считать пренебрежимо малым. Так как  $v_1 = v_2 = v$  и  $\angle ACB = \angle ABC$  (рис.46), то вектор  $d\bar{S}$  в треугольнике импульсов, построенном по теореме об изменении количества движения, оказывается вертикальным (рис.47). При этом

$$dS = -2\gamma dx v \sin \alpha.$$

Разделив обе части полученного равенства на  $dt$  и учитывая условия, что

$$\frac{dS}{dt} = F, \text{ а } \frac{dx}{dt} = v$$

будем иметь

$$F = -2\gamma v^2 \sin \alpha.$$

Это сила возникает в результате изменения направления скорости автомобиля в точке  $A$  и родственна таким образом, центробежной силе инерции.

Если учесть, что

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + \ell^2}},$$

то силу, действующую на автомобиль при прохождении неровности, приблизительно можно определить по формуле

$$F = \frac{4h\gamma v^2}{\sqrt{4h^2 + \ell^2}}, \quad (30.1)$$

где  $v$  - скорость движения автомобиля,  $\gamma$  - погонная масса,  $h, \ell$  - глубина и длина неровности на дорогах.

Путем таких же рассуждений можно определить дополнительную силу, действующую на рессоры автомобиля, при прохождении неровности дорог по следующей формуле:

$$R = \frac{2mv^4}{h\sqrt{v^4 + g^2h^2}},$$

где  $m$  – масса колеса автомобиля с осью.

### § 31. Определение критической скорости движения автомобиля по трассе с периодически повторяющимися поперечными температурными швами

Пусть автомобиль движется со скоростью  $v$  по трассе с периодически повторяющимися поперечными температурными швами (рис.48).



Рис. 48

Предположим, что для каждого типа автомобиля статический прогиб (груженого или не груженого автомобиля)  $\lambda_{cm}$  - известен. Пусть  $\ell$  расстояние между периодически повторяющимися температурными швами. Определить критическую скорость движения автомобиля, при которой начинается «галопирование» автомобиля, если на температурных швах автомобиль испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания автомобиля на рессорах.

Для простоты автомобиль будем рассматривать как некую материальную точку массы  $m$  с упругой связью. Тогда частота собственных колебаний автомобиля.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

где  $c$  жесткость упругой связи или рессор,  $m$  - масса автомобиля.

Поскольку нам известен статический прогиб  $\lambda_{cm}$ , то из  $mg - c\lambda_{cm} = 0$ , находим жесткость рессор

$$c = \frac{mg}{\lambda_{cm}}.$$

Тогда собственная частота автомобиля определяется по формуле

$$k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}.$$

«Галопирование» автомобиля начнется тогда, когда частота вынужденных колебаний, вызванных периодическими толчками, будет равна частоте свободных колебаний, т.е.

$$\Omega = k.$$

Период вынужденных колебаний определяем из формулы

$$T = \frac{\ell}{v},$$

а

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\ell};$$

$v = v_{кр}$  при  $k = \Omega$  т.е.

$$\frac{2\pi v_{кр}}{\ell} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{см}}}.$$

отсюда

$$v_{кр} = \frac{\ell}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\lambda_{см}}}. \quad (31.1)$$

Например, пусть статический прогиб рессор груженого автомобиля  $\lambda_{см} = 5$  см, расстояния между швами  $\ell = 36$  м, тогда  $v_{кр} = 289$  км/час.

### § 32. Исследование относительных колебаний движущегося с постоянной скоростью надрессорного груза, вызываемых неровностями пути. Определение критической скорости

Будем исследовать относительные колебания движущегося с постоянной скоростью  $v$  надрессорного груза, вызываемые неровностями пути. Уравнение продольного профиля пути

$$y_1 = y_{1\max} \sin^2 \frac{\pi \xi}{\ell},$$

где  $\ell$  – длина волны.

Пусть  $m$  – масса груза;  $c$  – коэффициент жесткости винтовой рессоры; сопротивление пропорционально относительной скорости. Деформациями пути и колеса пренебрегаем.

Относительное положение надрессорного груза определяется обобщенной координатой  $q = y$  (рис.49). Дифференциальное уравнение относительных

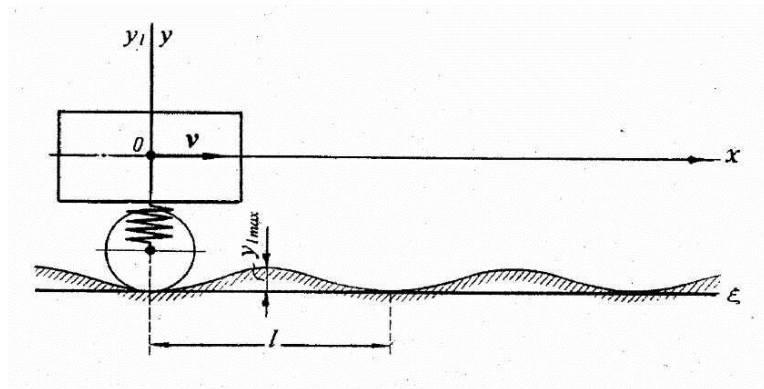


Рис. 49

колебаний системы аналогично дифференциальному уравнению в ее абсолютном движении. Необходимо лишь к силам, действующим на эту систему, присоединить переносную силу инерции (переносное движение — движение поступательное).

Кинетическая энергия надрессорного груза в относительном движении

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Следовательно, коэффициент инерции  $a = m$ .

Так как в рассматриваемом примере обобщенная возмущающая сила  $Q_F(t) = 0$ , то дифференциальное уравнение относительных колебаний груза принимает вид:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = \frac{1}{m} \Phi_e,$$

где  $\Phi_e$  — переносная сила инерции,  $n$  — коэффициент затухания ( $n < k$ ),

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  — собственная частота.

Найдем переносную силу инерции  $\Phi_e$ . Так как  $\xi = vt$ , то

$$\Phi_e = -m\ddot{y}_1 = -m \frac{d^2}{dt^2} \left( y_{1\max} \sin^2 \frac{\pi vt}{l} \right);$$

$$\Phi_e = -m \frac{2\pi^2 v^2 y_{1\max}}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}.$$

Следовательно,

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = -\frac{2\pi^2 v^2 y_{1\max}}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l} \quad \text{или}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = -h \cos \Omega t,$$

где  $\Omega = \frac{2\pi v}{l}$ ,  $h = \frac{y_{1\max} \Omega^2}{2}$ .

Общее решение этого дифференциального уравнения вынужденных колебаний имеет вид

$$y = e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) - A_b \cos(\Omega t - \varepsilon),$$

где  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$  - частота затухающих колебаний;  $\Omega$  - частота вынужденных колебаний;  $A_b$  - амплитуда вынужденных колебаний.

$$A_b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}};$$

$\varepsilon$  - разность или сдвиг фаз.

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2};$$

$C_1, C_2$  - постоянные, определяемые из начальных условий задачи. Найдем эти постоянные из условий при  $t = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $\dot{y}_0 = 0$ . Так как

$$\begin{aligned} y &= e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) - A_b \cos(\Omega t - \varepsilon); \\ \dot{y} &= e^{-nt} (C_2 k^* \cos k^* t - C_1 k^* \sin k^* t) - n e^{-nt} (C_1 \cos k^* t + C_2 \sin k^* t) + \\ &+ A_b \Omega \sin(\Omega t - \varepsilon), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 - A_b \cos \varepsilon = 0; & C_1 &= A_b \cos \varepsilon; \\ \dot{y}_0 &= C_2 k^* - n C_1 - A_b \Omega \sin \varepsilon = 0; \\ C_2 &= \frac{A_b}{k^*} (n \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение относительных колебаний наддрессорного груза

$$y = A_b e^{-nt} \left\{ \cos \varepsilon \cos k^* t + \frac{1}{k^*} (n \cos \varepsilon + \Omega \sin \varepsilon) \sin k^* t \right\} - A_b \cos(\Omega t - \varepsilon).$$

Первый член правой части этого уравнения определяет затухающие, а второй вынужденные колебания, вызываемые неровностями пути.

Если сопротивление не учитывается, то  $n = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $k^* = k$  и уравнение принимает вид:

$$y = \frac{h}{k^2 - \Omega^2} (\cos kt - \cos \Omega t).$$

В случае резонанса, т.е. когда  $\Omega = k$ ;  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ;  $n \neq 0$

$$y = \frac{h}{2nk} \left( \frac{k e^{-nt}}{k^*} \sin k^* t - \sin kt \right).$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A_b = \frac{h}{2nk} = \frac{ky_{1\max}}{4n}.$$

Для коэффициента затухания  $n = 0,1k$

$$A_b = 2,5y_{1\max}.$$

Критическая скорость, при которой наступает резонанс, определяется из следующего соотношения:

$$k = \Omega = \frac{2\pi v_{кр}}{\ell},$$

или

$$v_{кр} = \frac{k\ell}{2\pi} = \frac{\ell}{T}, \quad (32.1)$$

где  $T$  - период свободных колебаний груза.

Например, если длина волны  $\ell = 6$  м;  $T = 0,3$  с., то

$$v_{кр} = 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/час.}$$

Период обычно вычисляют по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Так как

$$c = \frac{mg}{\lambda_{cm}},$$

где  $\lambda_{cm}$  - статическое удлинение винтовой пружины, то  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}$  и

$$v_{кр} = \frac{\ell}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\lambda_{cm}}}, \text{ т.е. получили формулу (31.1).}$$

Для коэффициента затухания  $n = 0$  правая часть уравнения

$$y = \frac{h}{k^2 - \Omega^2} (\cos kt - \cos \Omega t)$$

при  $\Omega = k$ , т.е. в случае резонанса, обращается в неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая эту неопределенность, получаем

$$y = -\frac{ht}{2k} \sin kt = -\frac{ky_{1\max}}{4} t \sin kt.$$

Амплитуда вынужденных колебаний груза  $A_b = \frac{ky_{1\max}}{4} t$  с течением времени неограниченно возрастает.

### § 33. Аэродинамические силы

На любое тело, (в том числе на автотранспорт), находящееся в воздушном потоке, действует сила, вызванная их взаимодействием. При установившемся потоке аэродинамическая сила

$$P = 0.5 \rho v^2 S \Phi(\rho, \gamma, v, \alpha, d), \quad (33.1)$$

где  $\rho$  - плотность воздуха;  $v$  - скорость невозмущенного потока;  $S, d$  - характерные площадь и размер автомобиля;  $\Phi$  - некоторый безразмерный параметр,  $\gamma$  - вязкость воздуха;  $\alpha$  - угол, определяющий направление скорости потока.

Безразмерный параметр  $\Phi$  можно считать зависящим от  $\alpha$  и  $Re$ , где  $Re = vd / \lambda$  - число Рейнольдса (при  $\lambda = \gamma / \rho$ , т.е. кинематическая вязкость воздуха).

Критические значения числа Рейнольдса определяют переход от ламинарного движения потока к турбулентному. При неустановившемся движении воздуха параметр зависит дополнительно от времени  $t$  и числа Струхала

$$Sh = nd / v, \quad (33.2)$$

где  $n$  - частота срыва вихрей.

Таким образом, параметр  $\Phi$  - функция  $\alpha, Re, Sh, t$ .

Вообще аэродинамические силы зависят от скорости ветра, а также от угла атаки потока, формы и размеров поперечного сечения автомобиля.

Необходимо отметить, что в задачах аэродинамики тела (в том числе и автотранспорта), внесенные в газ, предполагают абсолютно жесткими. А в задачах аэроупругости учитывают упругие свойства и упругие деформации тел. Более того, существенным моментом теории аэроупругости является учет обратного влияния деформаций тела на движение газа. Следовательно, теория аэроупругости является комплексной областью механики, в которой объединены методы теории упругости и строительной механики, с одной стороны, и методы аэромеханики - с другой стороны. Поскольку большая часть аэроупругих явлений носит динамический характер, то в теории аэроупругости широко используют методы теории колебаний.

Наконец в случае достаточно гибких конструкций упругие деформации могут оказывать влияние на устойчивость движения и процессы управления (и обратно). Следовательно, в общем случае нужно учитывать сложное взаимодействие аэродинамических сил, сил инерции, сил упругости и процессов в системах управления.

*а) статические задачи аэроупругости.* Простейшей статической задачей аэроупругости является определение квазистатических нагрузок, действующих со стороны потока на конструкцию (автомобиль), с учетом упругих деформаций последней. Для решения этой задачи требуется совместное решение уравнений теории упругости или строительной



механики для статического случая и уравнений стационарного течения газа. Если конструкция (или поверхность конструкции – обшивка) является достаточно гибкой, то при достижении определенной скорости может наступить статическая потеря устойчивости первоначальной формы, аналогичная явлению неустойчивости в классической теории упругости. Наиболее известным примером статической потери аэроупругой устойчивости служит дивергенция (закручивание) крыльев самолет.

Еще одним примером может служить статическое выпучивание пластин и оболочек, обтекаемых потоком газа. Наряду с аэродинамическими силами здесь важную роль могут играть начальные усилия в срединной поверхности, обтекаемых конструкций.

К другим статическим аэроупругим явлениям можно отнести влияние статических упругих деформаций на устойчивость и эффективность систем уравнений.

*б) динамические задачи аэроупругости.*

Важнейшим примером динамических задач служит флаттер крыльев самолета-автоколебания, поддерживаемые за счет энергии движения самолета (или энергии потока). Другим примером являются автоколебания пластин и оболочек, обтекаемых потоком – так называемый панельный флаттер.

Как флаттер крыльев, так и панельный флаттер могут быть объяснены взаимодействием аэродинамических сил, сил инерции и упругих сил. Важную роль при этом взаимодействии играет связь между различными формами колебаний. Для описания классического флаттера достаточно привлечь линеаризованную теорию потенциального течения.

Имеются автоколебательные аэроупругие явления, происхождение которых носит другой характер. Таков, например, срывной флаттер лопаток, автоколебания проводов, дымовых труб, балок жесткости висячих мостов и других плохо обтекаемых тел в потоке воздуха. Перечисленные явления сопровождаются срывами на обтекаемой поверхности, образованием вихревой дорожки Кармана в след за телом и другими «неклассическими» особенностями.

Строго говоря, некоторые перечисленные выше задачи становятся задачами аэроупругости лишь в том случае, если учитывают обратное влияние упругих деформаций на поведение потока газа.

Аэродинамика автомобилей, как, впрочем, и любых других тел, охватывает аэродинамику и аэроупругость. Первая изучает аэродинамические силы, действующие на автомобиль при обтекании их ветровым потоком, вторая рассматривает физико-технические процессы и явления, возникающие при взаимодействии автомобиля с потоком, т.е. поведение конструкции автомобиля в потоке, реакцию отдельных элементов на действие ветрового потока.

Задачи аэромеханики ограничиваются определением стационарных аэродинамических сил лобового сопротивления. Вместе с тем характер обтекания элементов автотранспорта теоретически изучен столь не достаточно. Поэтому при исследовании аэродинамических характеристик автомобиля широкое применение находят экспериментальные исследования в аэродинамических трубах. В отечественной и зарубежной практике накоплен опыт теоретического и экспериментального определения самых разнообразных форм автомобилей по своим аэродинамическим характеристикам.

### §34. Задачи для самостоятельного решения. Пример решения и методические рекомендации

#### Общие указания и требования к выполнению курсовой работы

Программой курса предусмотрено выполнение одной курсовой работы студентами дневной формы обучения на тему "Исследование свободных и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы".

Данные методические указания предназначены для выполнения курсовой работы, состоящей из двух частей: исследование свободных и вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

Каждая курсовая работа выполняется по одной из приведенных схем. Варианты индивидуальных заданий, входящих в курсовую работу, студент определяет по своему шифру. Шифр каждому студенту устанавливает преподаватель.

Пусть студенту определен шифр 24-7801. Для выполнения курсовой работы из рисунков, приведенных в методических указаниях, нужно выбрать вариант 24 и из таблицы 1 для данного варианта выписать исходные данные  $m_1 = 8$  кг,  $m_2 = 10$  кг,  $l = 0,5$  м,  $c_1 = 38$  н/см,  $A_1 = 0,26$  м.

Оставшиеся исходные данные формулируются по второй части шифра (7801).

Запишем первые четыре буквы алфавита строго под цифрами:

7	8	0	1
А	Б	В	Г

В таблице 2 из колонки А необходимо взять число, стоящее в седьмой строке, из колонки Б - число, стоящее в восьмой строке, из колонки В- число, стоящее в нулевой строке, из колонки Г- число, стоящее в первой строке, т.е.  $c_2 = 20$  н/см,  $P = 28$  н,  $\Omega = 2,4\pi$  с<sup>-1</sup>,  $\mu = 0,60$  и начальные условия при  $t = 0$   $\varphi_0 = 0,01\pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0,08\pi$  рад/с.

При сдаче работы студент обязан предъявит расчетно - пояснительную записку в оформленном виде, ответить на вопросы по теории использованной при расчете, и показать умение решать задачи по данной теме. Расчетно - пояснительная записка оформляется на одной стороне листов форматом А4.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

**Цель работы:** Приобрести навыки в составлении и интегрировании уравнений свободных и вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы. Исследование свободных и вынужденных колебаний системы.

## Постановка задачи:

**I. Исследовать свободные колебания механической системы с учетом сил сопротивления.**

1. Найти уравнение движения стержня (варианты 1, 3, 5, 6, 9, 11, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 32) вертикальной пластины (вариант 4), блока (варианты 15, 25, 31) и катка (варианты 2, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 20, 23, 28-30), приняв за обобщенную координату  $q = \varphi$ , отсчитываемую с положения равновесия системы. Угол  $\varphi$ , указанный на схемах рекомендуется снабдить с индексом 1 или 2 (т.е. считать, что  $q = \varphi_1$ , если  $\varphi$  характеризует поворот тела 1 и  $q = \varphi_2$ , если  $\varphi$  характеризует поворот тела 2).

2. Найти амплитуду колебаний стержня, блока или катка.

3. Найти коэффициент  $\alpha$ , характеризующий сопротивление, осуществляемое в демпфере.

4. Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы как с учетом так и без учета сил сопротивления.

**II. Исследовать вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы при силовом возмущении.**

1. Найти уравнение вынужденных колебаний системы при заданной частоте возмущения.

2. Определить максимальное и резонансное значения амплитуды вынужденных колебаний, в предположении, что частота возмущения может изменяться.

3. Исследовать возможны ли резонансные явления в рассматриваемой механической системе.

4. Определить коэффициент динамичности системы.

Схемы систем показаны на рис. 50-53. Необходимые для решения задач данные приведены в таблицах 1-2.

При этом приняты следующие обозначения:  $m_1$  - масса 1-го тела;  $m_2$  - масса 2-го тела;  $R$  - радиус сплошного блока или катка;  $l$  - длина стержня

или длина какой-то его части;  $c_1, c_2$  - коэффициенты жесткости пружин 1 и 2;  $P_1$  - возмущающая сила;  $\mu$  - логарифмический декремент колебаний системы;  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  - начальные значения угла поворота и угловой скорости тела 1 или 2. Кроме тел 1 и 2 все остальные стержни в схемах считать невесомыми.

Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни - тонкими однородными, качение колес происходит без скольжения. В варианте 22 пружина жесткостью  $c_1$  является спиральной и жесткость спиральной пружины  $c_1$ , приведенная в таблице 1 измеряется в н · м/рад.

### Краткие сведения из теории и практические рекомендации

Удобным способом составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы является использование уравнений Лагранжа. Эти уравнения для системы с одной степенью свободы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где  $T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$  - кинетическая энергия системы, выражается через обобщенную скорость  $\dot{q}$ ;  $Q$  - обобщенная сила.

**Кинетическая энергия твердого тела** вычисляется по формулам:

а) при поступательном движении  $T = \frac{1}{2} M v^2$ , где  $M$  - масса тела,  $v$  - скорость любой его точки;

б) при вращении вокруг неподвижной оси  $z$   $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$ , где  $J_z$  - момент инерции относительно оси вращения  $z$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения;

в) при плоском движении  $T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_z \omega^2$ , где  $M$  - масса тела;  $v_c$  - скорость центра масс тела;  $J_z$  - момент инерции относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс перпендикулярно к неподвижной плоскости;  $\omega$  - величина мгновенной угловой скорости вращения.

Кинетическая энергия системы тел  $T = \sum T_k$ , где  $T_k$  - кинетическая энергия  $k$ -го тела, которую выражаем через обобщенную скорость  $\dot{q}$ .

### Моменты инерции твердых тел:

а) момент инерции прямолинейного тонкого стержня  $AB$  относительно его конца  $A$ , или, что то же, относительно оси  $AZ$  перпендикулярной к  $AB$

$J_A = \frac{1}{3}Ml^2$ , где  $M$  - масса стержня,  $l$  - длина стержня;

б) момент инерции круглого сплошного диска относительно оси  $z$ , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска

$J_z = \frac{1}{2}MR^2$ , где  $M$  - масса диска,  $R$  - радиус диска;

в) момент инерции однородного прямоугольника относительно его вершины  $O$  будет  $J_o = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$ , где  $M$  - масса однородного прямоугольника;  $a$  и  $b$  - стороны прямоугольной пластины.

Все основные положения раздела динамики по малым колебаниям механической системы с одной степенью свободы иллюстрированы на конкретном примере с подробными их решениями.

### Порядок расчета

При решении задач на свободные и вынужденные колебания системы с одной степенью свободы рекомендуется следующий порядок действий:

1) выбрать обобщенную координату  $q = \varphi_1$  или  $q = \varphi_2$ , определяющую положение системы;

2) составить выражение потенциальной и кинетической энергии системы, функции Рэля, выразив их через обобщенную координату и обобщенную скорость;

3) вычислить обобщенную силу;

4) внося выражения потенциальной и кинетической энергии, а также обобщенную силу в уравнение Лагранжа, находим дифференциальное уравнение малых колебаний системы;

5) проинтегрировав это уравнение и определив произвольные постоянные интегрирования, получаем уравнение движения системы;

6) определяем период колебаний, частоту и другие искомые величины;

7) исследовать возможность резонанса и определить максимальное и резонансное значения амплитуды вынужденных колебаний;

8) определить коэффициент динамичности системы.

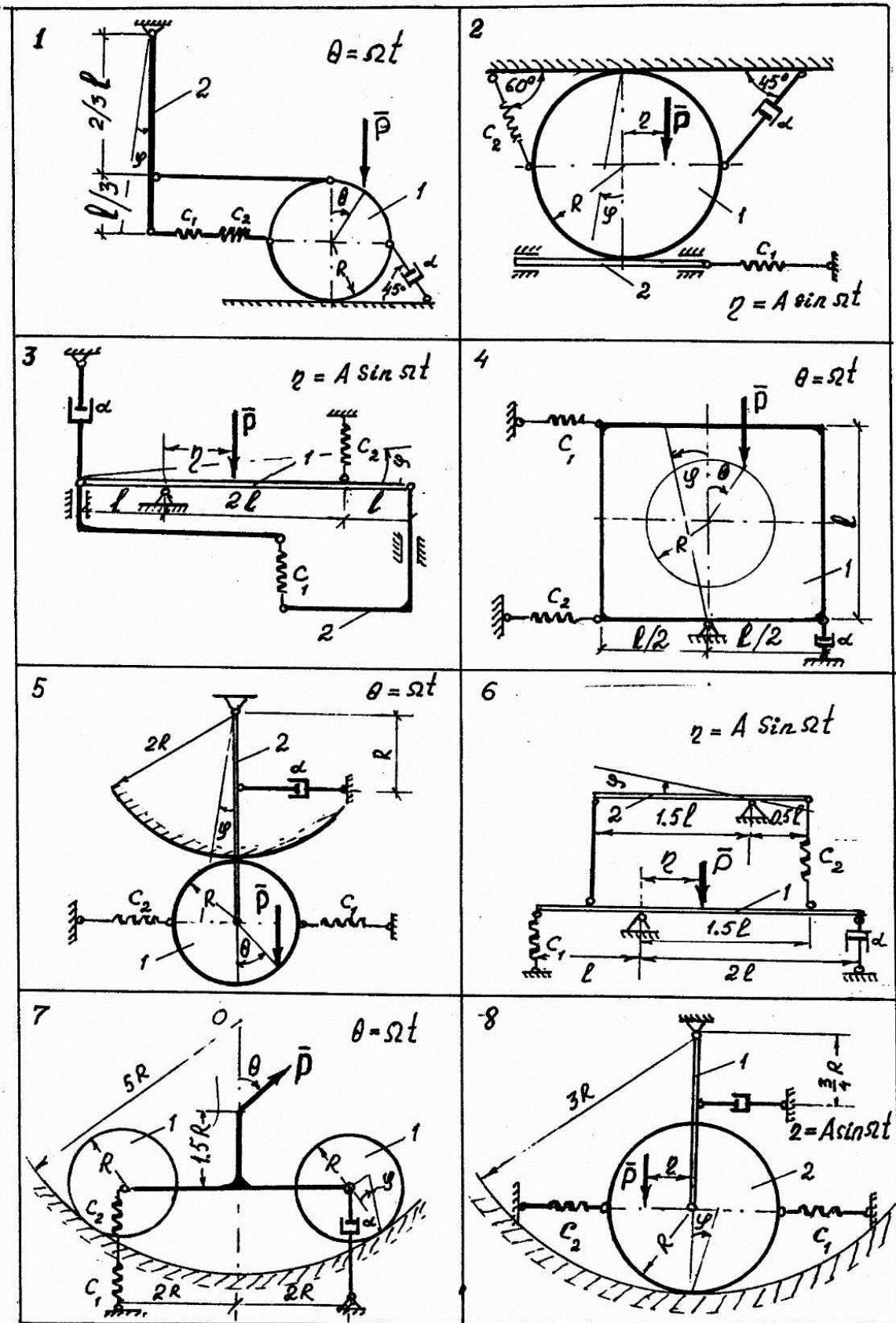


рис. 50

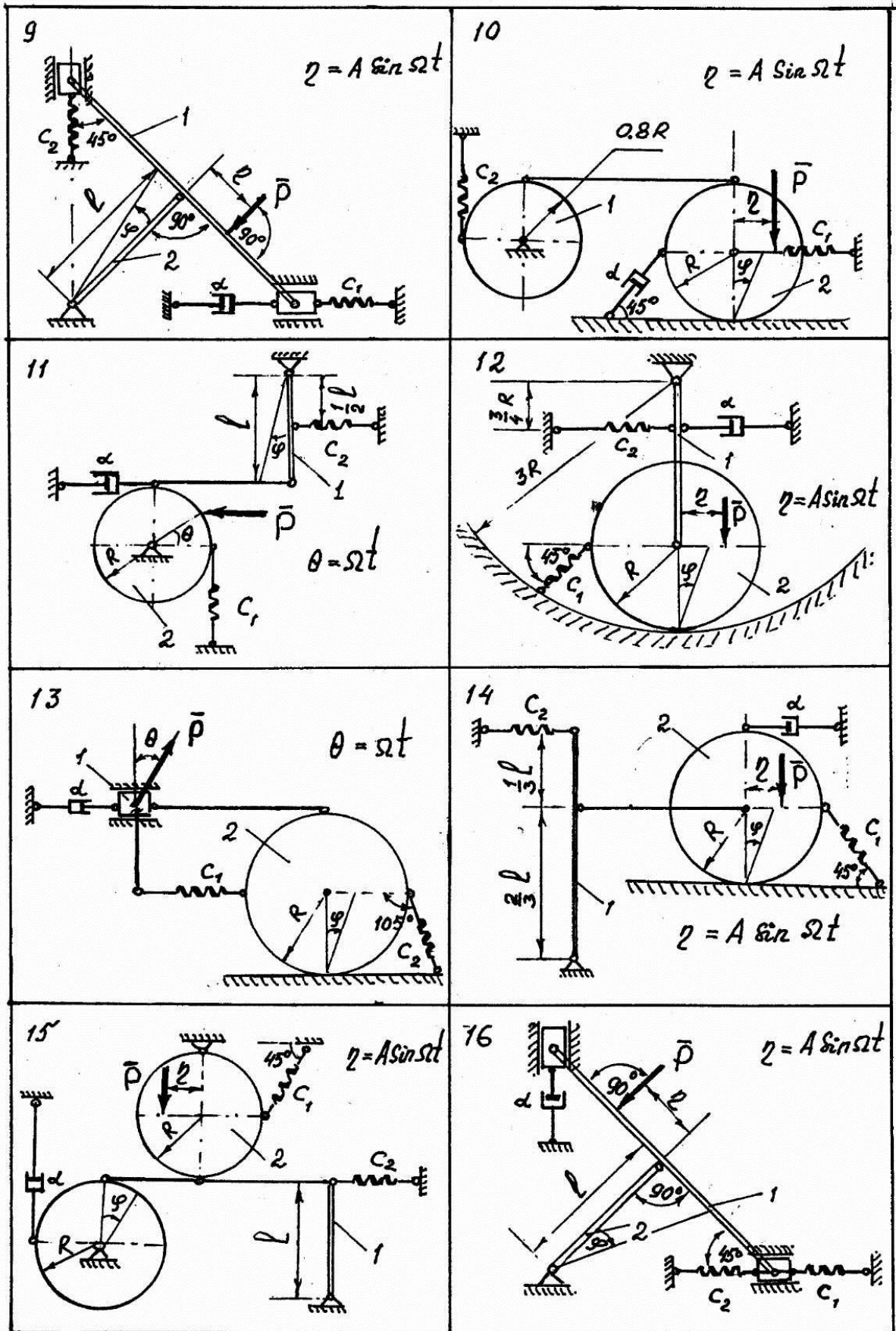


рис. 51



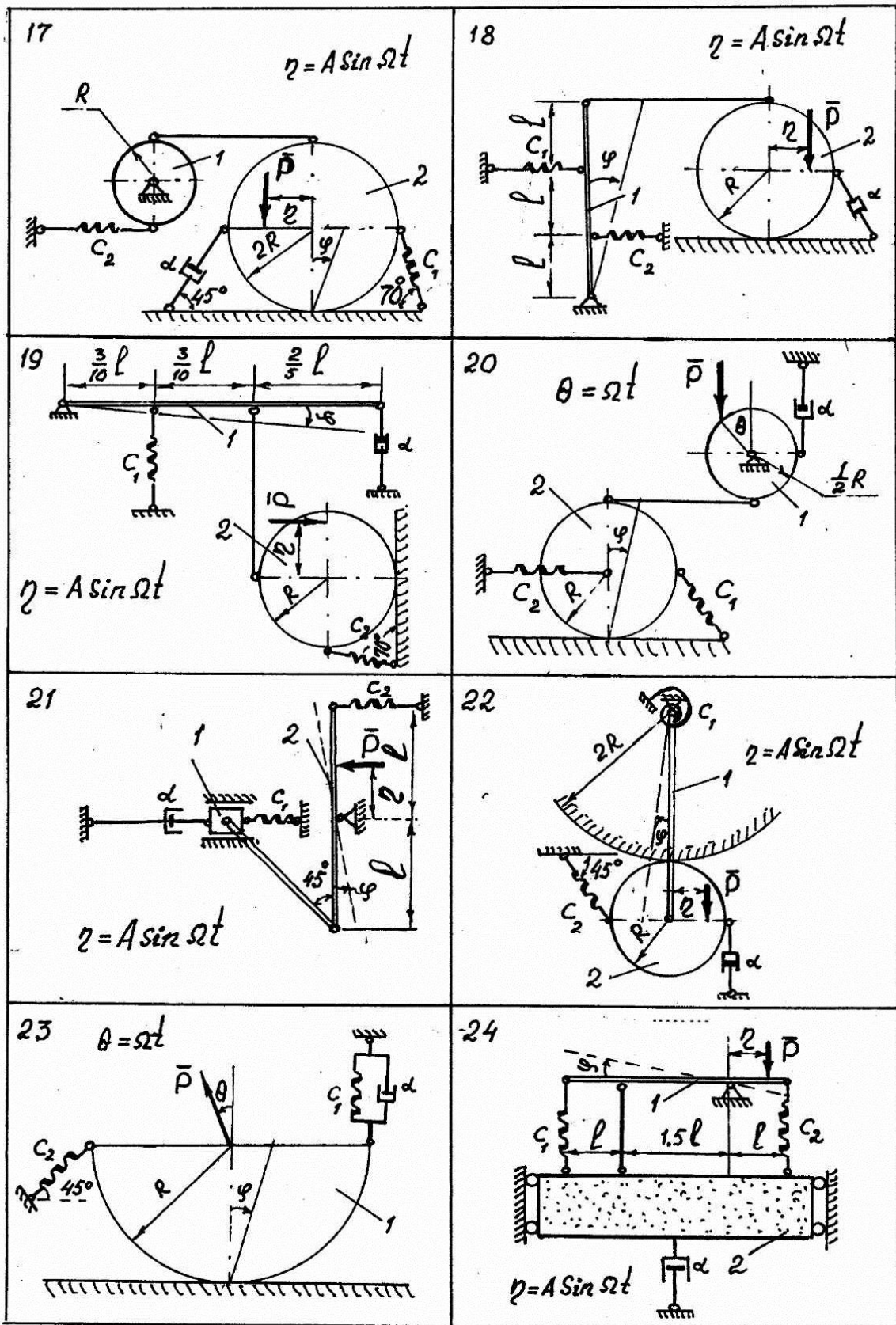


рис. 52

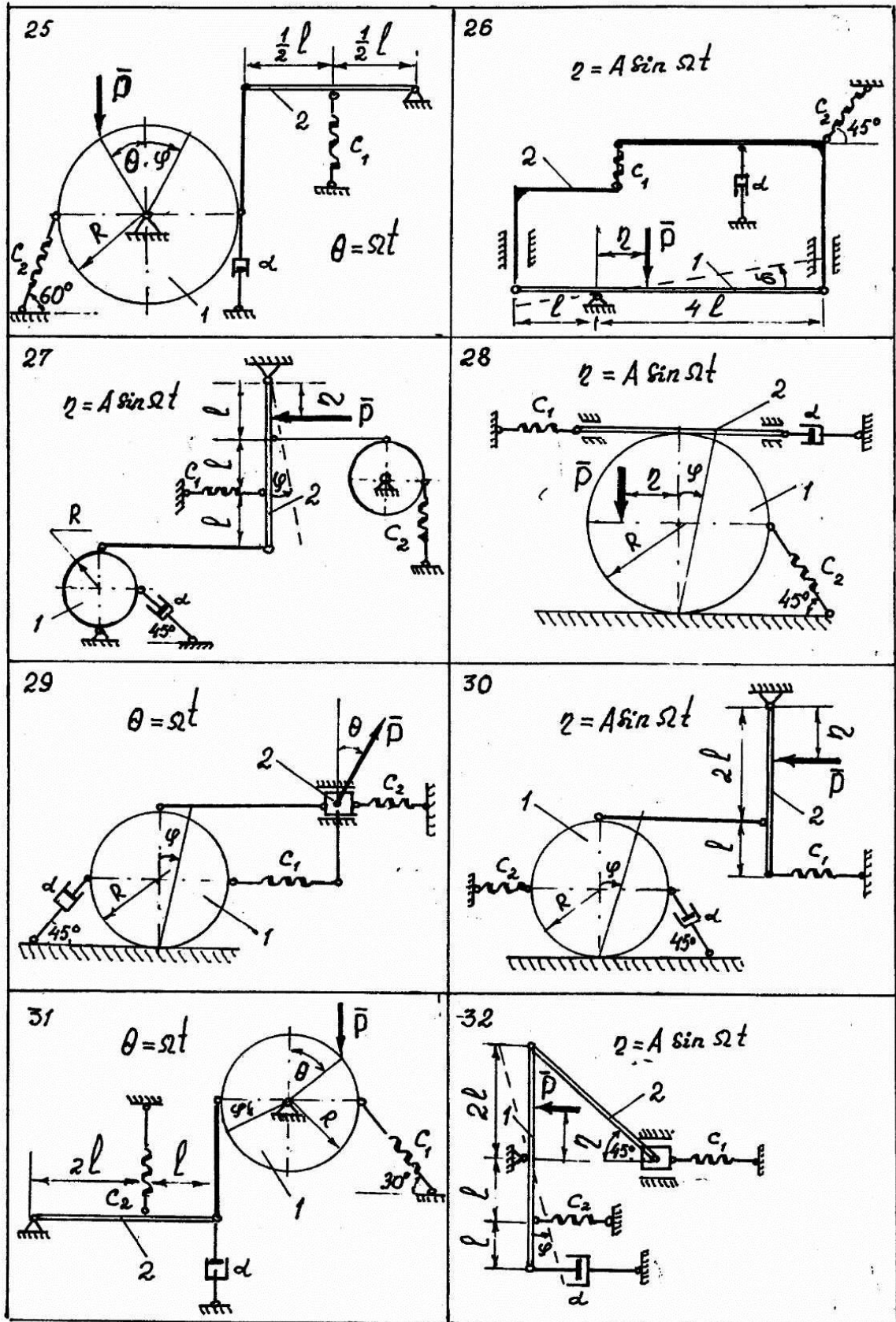


рис. 53

Таблица 1

Номер варианта	$m_1$ (кг)	$m_2$ (кг)	$R$ (м)	$l$ (м)	$c_1$ (н/см)	$A_1$ (м)
1	14	7	0,3	0,9	50	-
2	20	40	0,4	-	20	0,1
3	20	8	-	0,1	20	0,2
4	40	-	0,2	0,5	18	-
5	20	15	0,2	-	16	-
6	10	20	-	0,5	36	0,1
7	25	-	0,3	-	20	-
8	10	30	0,3	-	25	0,05
9	30	15	-	0,4	18	0,15
10	10	40	0,2	0,3	40	0,1
11	12	20	0,2	1	10	-
12	14	36	0,2	-	25	0,06
13	12	34	0,4	-	24	0,1
14	11	21	0,2	0,3	15	0,15
15	10	25	0,2	1	40	0,2
16	20	16	-	0,5	16	0,16
17	4	8	0,1	-	43	0,1
18	6	10	0,3	0,2	24	0,2
19	8	10	0,2	1,2	20	0,3
20	18	6	0,1	-	36	-
21	40	30	-	0,4	21	0,1
22	30	30	0,3	-	$1 \cdot 10^{4*})$	0,22
23	40	-	0,2	-	18	-
24	8	10	-	0,5	38	0,26
25	40	20	0,2	1	20	-
26	20	8	-	0,1	16	0,19
27	20	16	0,1	0,3	36	0,06
28	40	20	0,4	-	24	0,1
29	30	25	0,3	-	26	-
30	20	15	0,2	0,2	34	0,17
31	30	20	0,3	0,3	20	0,2
32	30	30	-	0,2	22	0,1

Таблица 2

№№ n/n	А		Б		В	Г
	$c_2$ (н/см)	$P$ (н)	$\Omega$ (с <sup>-1</sup> )	$\mu$	начальные условия	начальные условия
0	32	24	$2\pi$	1,08	$0,01\pi$	$0,07\pi$
1	26	27	$2,5\pi$	0,96	$0,012\pi$	$0,08\pi$
2	22	20	$2,2\pi$	0,87	$0,015\pi$	$0,09\pi$
3	0	25	$2,6\pi$	0,66	$0,02\pi$	$0,011\pi$
4	14	18	$2,3\pi$	0,76	$0,021\pi$	$0,036\pi$
5	30	16	$2,1\pi$	0,82	$0,009\pi$	$0,047\pi$
6	25	30	$1,8\pi$	0,91	$0,008\pi$	$0,056\pi$
7	20	28	$1,6\pi$	1,01	$0,016\pi$	$0,076\pi$
8	15	19	$2,4\pi$	0,60	$0,007\pi$	$0,025\pi$
9	21	32	$2,7\pi$	0,70	$0,006\pi$	$0,067\pi$

### Пример выполнения задания

**Дано:**  $m_1 = 20$  кг,  $m_2 = 18$  кг,  $l = 0,6$  м,  $c_1 = 40$  н/см,  $c_2 = 36$  н/см,  $\varphi_0 = 0,1$  рад,  $R = 0,2$  м,  $\dot{\varphi}_0 = 2$  рад/с,  $P = 20$  н,  $\eta = A_1 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ ,  $A_1 = 0,1$  м,  $\Omega = 4\pi$  с<sup>-1</sup>,  $\mu = 1,43$  (рис.55).

**Решение.** За обобщенную координату примем  $q = \varphi$ . Поскольку  $\varphi$  характеризует угол поворота катка 1 (рис. 54) в дальнейшем будем считать, что обобщенная координата  $q = \varphi_1$  (рис. 55).

Уравнение Лагранжа II-го рода в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + Q_p, \quad (34.1)$$

где  $T$  - кинетическая энергия системы;  $\Phi$  - диссипативная функция Рэлея или функция рассеяния системы;  $\Pi$  - потенциальная энергия;  $Q_p$  - обобщенная возмущающая сила.

Поскольку мы рассматриваем малые колебания (линейные), то функции  $T$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  вычисляются с точностью, при которой справедливы формулы

$$T = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}_1^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{\varphi}_1^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c \varphi_1^2,$$

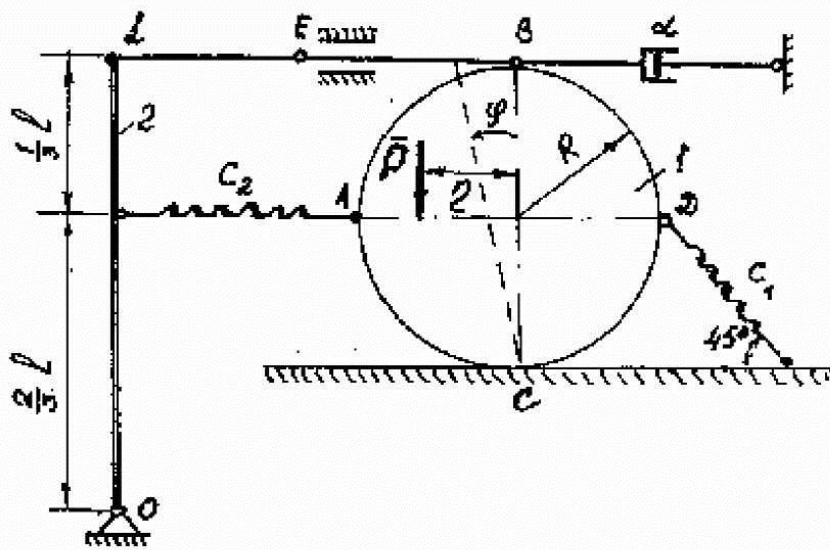


рис. 54

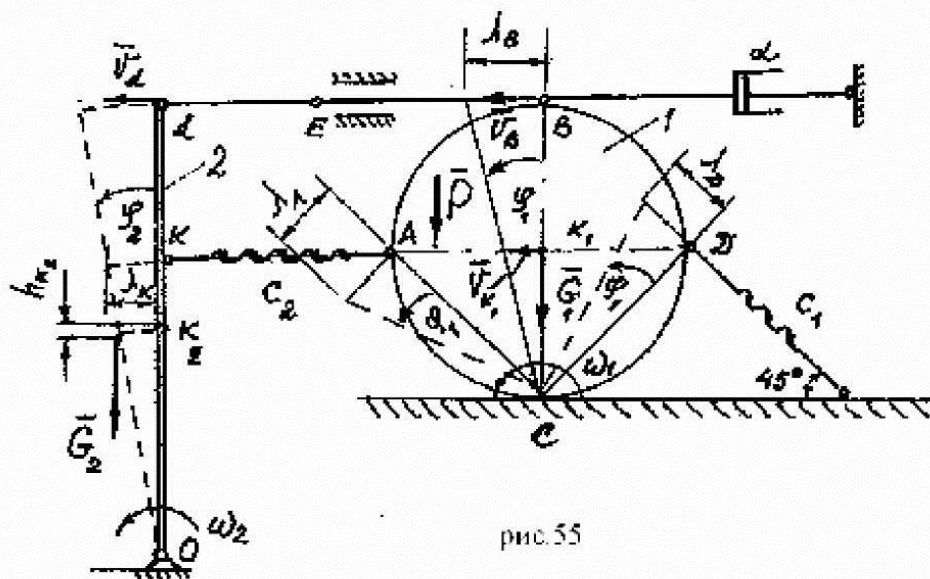


рис. 55

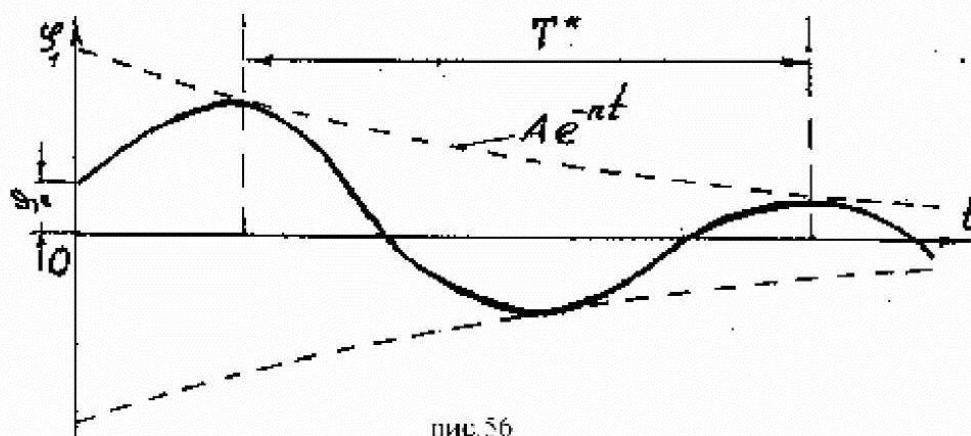


рис. 56

где  $a$  и  $c$  - коэффициенты инерции и жесткости системы, а  $b$  - коэффициент, характеризующий сопротивление в системе.

Система состоит из двух тел и кинетическую энергию системы найдем как сумму кинетических энергий тел 1 и 2 :

$$T = T_1 + T_2.$$

Выразим скорости центров масс  $v_{k_1}$  тела 1, угловые скорости  $\omega_1$  тела 1 и  $\omega_2$  тела 2 через обобщенную скорость  $\dot{\phi}_1$ :

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1, \quad v_{k_1} = R\dot{\phi}_1,$$

$$\omega_2 = \frac{v_L}{l} = \frac{v_B}{l} = \frac{2R}{l}\dot{\phi}_1.$$

Момент инерции тела 1 относительно центральной оси  $J_{k_1} = \frac{1}{2}m_1R^2$ .

Момент инерции тела 2 относительно оси вращения  $J_2 = \frac{1}{3}m_2l^2$ .

Тело 1 совершает плоское движение, а тело 2 совершает вращательное движение, следовательно, кинетическая энергия тел 1 и 2 имеет вид:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_{k_1}^2 + \frac{1}{2}J_{k_1}\omega_1^2 = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{4}m_1R^2 \cdot \dot{\phi}_1^2 = \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\phi}_1^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}m_2l^2 \cdot \frac{4R^2}{l^2}\dot{\phi}_1^2 = \frac{2}{3}m_2R^2\dot{\phi}_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{3}{4}m_1R^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{2}{3}m_2R^2\dot{\phi}_1^2 = \frac{1}{2}a\dot{\phi}_1^2,$$

где коэффициент инерции системы

$$a = \left( \frac{3}{2}m_1 + \frac{4}{3}m_2 \right) R^2 = (30 + 24) \cdot 20^2 = 21600 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Найдем функцию рассеяния системы:

$$\Phi = \frac{1}{2}\alpha v_B^2,$$

но  $v_B = \omega_1 2R = 2R\dot{\phi}_1$ , таким образом,

$$\Phi = \frac{1}{2}\alpha(2R\dot{\phi}_1)^2 = \frac{1}{2}b\dot{\phi}_1^2,$$

где  $b = 4\alpha R^2$ .

(34.1a)

Переходим к определению потенциальной энергии системы.

В положении покоя  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_1} \right)_{\phi_1=0} = 0$ ,

поэтому в выражении для  $\Pi$  сумма всех членов первого порядка малости равна нулю. Это позволяет непосредственно производить определение

потенциальной энергии системы, вычисляя только члены второго порядка малости.

Найдем потенциальную энергию системы как сумму работ сил тяжести и сил упругости пружин на перемещении системы из отклоненного положения, определяемого углом  $\varphi_1$ , в нулевое положение, каковым считаем положение покоя системы. При этом в выражениях для деформации пружины, не нагруженных в положении покоя, учитываются только те слагаемые, которые имеют первый порядок малости относительно  $\varphi_1$ , а в выражениях для вертикальных смещений центров тяжести элементов системы-слагаемые, имеющие второй порядок малости. Деформации пружин, нагруженных в положении покоя, вычисляются с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Потенциальная энергия,  $\Pi_I$  соответствующая силам тяжести равна

$$\Pi_I = -G_2 h_{k_2} = -m_2 g h_{k_2},$$

где  $h_{k_2}$  вертикальное смещение центра тяжести элемента 2, вычисленное с точностью до величин второго порядка малости.

Из рис. 55 видно, что

$$h_{k_2} = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \varphi_2 = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_2).$$

Ограничиваясь в формуле разложения

$$\cos \varphi_2 = 1 - \frac{1}{2!} \varphi_2^2 + \frac{1}{4!} \varphi_2^4 - \dots$$

двумя первыми членами и учитывая, что

$$\varphi_2 = \frac{\lambda_{I_1}}{l} = \frac{\lambda_{B_1}}{l} = \frac{2R}{l} \varphi_1,$$

имеем 
$$h_{k_2} = \frac{l}{2} \left[ 1 - 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{2R}{l} \right)^2 \varphi_1^2 \right] = \frac{R^2}{l} \varphi_1^2.$$

Тогда потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести имеет вид:

$$\Pi_I = -m_2 g \frac{R^2}{l} \varphi_1^2,$$

т.к. потенциальная энергия силы тяжести катка 1 равна нулю.

Потенциальная энергия  $\Pi_{II}$  деформированных пружин при указанном перемещении системы равна

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2} c_1 \lambda_D^2 + \frac{1}{2} c_2 (\lambda_A \cos 45^\circ - \lambda_k)^2,$$

где  $\lambda_D$ ,  $\lambda_A$ ,  $\lambda_k$  - перемещения точек прикрепления пружин, вызванные поворотом диска 1 на угол  $\varphi_1$ .

Вычисляя эти величины с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно  $\varphi_1$ , имеем

$$\lambda_D = CD \cdot \varphi_1 = \sqrt{2}R\varphi_1; \quad \lambda_A = \lambda_D = \sqrt{2}R\varphi_1;$$

$$\lambda_k = OK \cdot \varphi_2 = OK \cdot \frac{\lambda_L}{l} = OK \cdot \frac{\lambda_B}{l} = \frac{4}{3}R\varphi_1.$$

Следовательно,

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2}c_1 2R^2\varphi_1^2 + \frac{1}{2}c_2 \left( \sqrt{2}R\varphi_1 \cos 45^\circ - \frac{4}{3}R\varphi_1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ 2c_1 + \frac{1}{9}c_2 \right] R^2\varphi_1^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -m_2g \frac{R^2}{l} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \left( 2c_1 + \frac{1}{9}c_2 \right) R^2\varphi_1^2 = \frac{1}{2}c\varphi_1^2,$$

где  $c$  коэффициент жесткости системы

$$c = \left( 2c_1 + \frac{1}{9}c_2 - 2 \frac{m_2g}{l} \right) R^2 = (80 + 4 - 5,886)^2 = 31245,6 \text{ н} \cdot \text{см}$$

Определим обобщенную силу  $Q_p$ , соответствующую возмущающей силе  $P$ :

$$Q_p = \frac{P\eta\delta\varphi_1}{(\delta\varphi_1)} = P\eta = P \cdot A_1 \sin \Omega t.$$

Здесь  $\delta\varphi_1$  - приращение обобщенной координаты;  $P\eta\delta\varphi_1$  - работа силы  $P$  на элементарном перемещении системы, соответствующем приращению  $\delta\varphi_1$  обобщенной координаты  $\varphi_1$ .

Найдем значения членов уравнения (34.1)

$$\frac{\partial I'}{\partial \dot{\varphi}_1} = a\dot{\varphi}_1; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial I'}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = a\ddot{\varphi}_1; \quad \frac{\partial I'}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = c\varphi_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_1} = b\dot{\varphi}_1.$$

Используя полученные значения членов уравнения (34.1) и выражение для  $Q_p$ , получаем окончательно уравнение (34.1) в следующем виде:

$$a\ddot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_1 + c\varphi_1 = p \cdot A_1 \sin \Omega t,$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = h \sin \Omega t, \quad (34.2)$$

где  $2n = \frac{b}{a}$ ;  $k^2 = \frac{c}{a}$ ;  $h = \frac{pA_1}{a}$ .

Определим величины  $h$ ,  $k$ ,  $n$ :

$$h = \frac{p \cdot A_1}{a} = \frac{20 \cdot 10}{21600} = \frac{2}{216} = 0,0093 \text{ с}^{-2}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{a}} = 1,2029 \text{ с}^{-1}.$$



Получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с учетом линейного сопротивления.

Так как уравнение (34.2) является неоднородными уравнениями, то его решение состоит из двух частей:  $\varphi_1^{(1)}$  - общее решение однородного уравнения и  $\varphi_1^{(2)}$  - частное решение неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения удовлетворяет уравнению собственных колебаний при линейном сопротивлении, поэтому его называют собственными колебаниями, хотя это движение может и не быть колебательным.

Частное решение неоднородного уравнения  $\varphi_1^{(2)}$  называют вынужденным колебанием. Общее движение системы характеризуется обобщенной координатой  $\varphi_1$ , которая равна сумме  $\varphi_1^{(1)}$  и  $\varphi_1^{(2)}$ , т.е.  $\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)}$ . Величину  $\varphi_1$  называют вынужденным движением.

## I. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = 0 \quad (34.3)$$

является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме  $\varphi_1^{(1)} = C e^{\lambda t}$ , где постоянная  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

которое получается после постановки решения в дифференциальное уравнение (34.3). Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} \quad (34.4)$$

Могут представиться три случая: 1)  $n < k$  - случай малого сопротивления; 2)  $n > k$  - случай большого сопротивления и 3)  $n = k$  случай критического сопротивления.

Нам пока величина  $n$  неизвестна. Предположим  $n < k$ , то величина под знаком квадратного корня в (34.4) отрицательна. Обозначим  $k^{*2}$  положительную величину  $(k^2 - n^2)$ . Тогда  $k^* = \sqrt{k^2 - n^2}$  и из (34.4) получим следующее значения корней характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm ik^* .$$

Собственно общее решение однородного дифференциального уравнения (34.3), зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$\varphi_1^{(1)} = e^{-nt} (C_1 e^{ik^*t} + C_2 e^{-ik^*t}) = e^{-nt} (C_1 \cos k^*t + C_2 \sin k^*t), \quad (34.5)$$

где  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  или  $C_1$ ,  $C_2$  - произвольные постоянные.

При исследовании собственных колебаний решение (34.5) лучше представить в амплитудной форме. Для этого введем новые постоянные  $A$  и  $\varphi_*$  следующим образом:

$$C_1 = A \sin \varphi_* \quad \text{и} \quad C_2 = A \cos \varphi_*.$$

$$\text{Тогда} \quad \varphi_1^{(1)} = e^{-nt} (A \sin \varphi_* \cos k_* t + A \cos \varphi_* \sin k_* t) = A e^{-nt} \sin(k_* t + \varphi_*)$$

$$\text{и} \quad \varphi_1^{(1)} = A e^{-nt} \sin(k_* t + \varphi_*), \quad (34.6)$$

$$\text{при этом} \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_* = \frac{C_1}{C_2}. \quad (34.7)$$

Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  и соответственно  $A$ ,  $\varphi_*$  определяется из начальных условий: при  $t = 0$ ,  $\varphi_1^{(1)} = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}_1^{(1)} = \dot{\varphi}_0$ .

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  найдем уравнение угловой скорости катка из (34.5):

$$\dot{\varphi}_1^{(1)} = -n e^{-nt} (C_1 \cos k_* t + C_2 \sin k_* t) + k_* e^{-nt} (-C_1 \sin k_* t + C_2 \cos k_* t).$$

Из уравнений  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1(t)$  при  $t = 0$  имеем:

$$\varphi_0 = C_1; \quad \dot{\varphi}_0 = -nC_1 + k_* C_2.$$

Следовательно,

$$C_1 = \varphi_0; \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}{k_*}.$$

Подставляем эти значения  $C_1$  и  $C_2$  в уравнения (34.7) и (34.6), получим:

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)^2}{k_*^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_* = \frac{\varphi_0 k_*}{\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0}.$$

$$\varphi_1^{(1)} = A e^{-nt} \sin(k_* t + \varphi_*). \quad (34.8)$$

Для выяснения поведения функции  $\varphi_1^{(2)}(t)$  построим ее график. Из графика функции  $\varphi_1^{(2)}(t)$  следует (рис. 56), что величины последовательных наибольших отклонений  $\varphi_1^{(2)}$  от положения равновесия уменьшаются, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с этим движение определяемое уравнением (34.5) или (34.8), называют затухающими колебаниями.

Основные характеристики собственных затухающих колебаний:

а) круговая частота  $k_* = \sqrt{k^2 - n^2}$ , где  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  - круговая частота системы без учета сил сопротивления;

$$\text{б) период (условный) затухающих колебаний} \quad T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}};$$

в) логарифмический декремент затухания  $\mu = \frac{nT^*}{2}$ ;

г) амплитуда затухающих колебаний  $C = Ae^{-nt}$ .

Определим все выше перечисленные характеристики собственных затухающих колебаний. Но величина  $n$  не задана. Ее можно определить по заданному логарифмическому декременту колебаний системы

$$\mu = \frac{nT^*}{2} = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Отсюда

$$n = \frac{k}{\sqrt{1 + \pi^2 / \mu^2}}, \quad \text{т.е. } n = 0,4982 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент  $\alpha$ , характеризующий сопротивление, осуществляемое в демпфере, вычисляем по формуле (34.1а), т.е.:

$$\alpha = \frac{b}{4R^2} = \frac{2na}{4R^2} = \frac{na}{2R^2}; \quad \alpha = 13,453 \text{ н} \cdot \text{с/м}.$$

Таким образом, коэффициент  $\alpha = 13,453 \text{ н} \cdot \text{с/м}$ .

Частота и период свободных колебаний системы без учета сил сопротивления  $k = 1,2029 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = \frac{2\pi}{k} = 5,2234 \text{ с}$ , с учетом сил сопротивления

$k^* = \sqrt{k^2 - n^2} = 1,0946 \text{ с}^{-1}$ ;  $T^* = \frac{2\pi}{k^*} = 5,7402 \text{ с}$ . Таким образом, учет сил сопро-

тивления приводит к уменьшению частоты системы, следовательно, и к увеличению периода собственных колебаний.

Амплитуда колебаний без учета сил сопротивления:

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{k^2}} = \sqrt{0,01 + \frac{4}{1,207^2}} = 1,659 \quad \text{и} \quad \text{tg}\varphi_* = 0,060.$$

С учетом сил сопротивления:

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)^2}{k_*^2}} = 1,8753, \quad \text{tg}\varphi_* = 0,0534 \quad \text{и} \quad C = 1,8753e^{-0,49t}.$$

Таким образом из проведенного исследования можно заключить, что малое линейное сопротивление незначительно увеличивает период колебаний по сравнению со случаем отсутствия сопротивления, но сильно уменьшает последовательные значения условных амплитуд, которые уменьшаются с течением времени по экспоненциальному закону (рис.56).

## II. Вынужденные колебания системы

Итак из-за наличия множителя  $e^{-nt}$ , величина  $\varphi_1^{(1)}$ , в любом случае стремится к нулю с возрастанием времени, т.е. затухает. Следовательно, при наличии линейного сопротивления по истечении достаточного времени общее вынужденное движение  $\varphi$  не существенно отличается от вынужденных колебаний и можно считать, что  $\varphi = \varphi_1^{(2)}$ .

Частное решение  $\varphi_1^{(2)}$  уравнения (34.2) следует искать в форме

$$\varphi_1^{(2)} = B \sin(\Omega t - \varepsilon), \quad (34.9)$$

где  $B$  - амплитуда вынужденных колебаний;  $\Omega$  - частота вынуждающей силы;  $\varepsilon$  - сдвиг фазы вынужденных колебаний. Эти постоянные  $B$  и  $\varepsilon$  подлежат определению из условия, что если подставить  $\varphi_1^{(2)}$  в уравнение (34.2), то оно превратится в тождество.

Вычислим для этого производные от  $\varphi_1^{(2)}$ :

$$\dot{\varphi}_1^{(2)} = B\Omega \cos(\Omega t - \varepsilon), \quad \ddot{\varphi}_1^{(2)} = -B\Omega^2 \sin(\Omega t - \varepsilon).$$

Преобразуем правую часть уравнения (34.2) так, чтобы в нее входили косинус и синус такого же аргумента, что и у функции  $\varphi_1^{(2)}$ . Для этого следует к фазе правой части вычесть и прибавить величину  $\varepsilon$  и раскрыть синус суммы:

$$h \sin \Omega t = h \sin[(\Omega t - \varepsilon) + \varepsilon] = h \sin \varepsilon \cos(\Omega t - \varepsilon) + h \cos \varepsilon \sin(\Omega t - \varepsilon).$$

Учитывая это, подставим значение  $\varphi_1^{(2)}$  и его производных в уравнение (34.2) и соберем члены при  $\sin(\Omega t - \varepsilon)$  и  $\cos(\Omega t - \varepsilon)$ . В результате получим следующее тождество:

$$[B(k^2 - \Omega^2) - h \cos \varepsilon] \sin(\Omega t - \varepsilon) + [2Bn\Omega - h \sin \varepsilon] \cos(\Omega t - \varepsilon) = 0.$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равняются нулю одновременно, то тождество может выполняться только тогда, если каждое из постоянных в квадратных скобках равно нулю, т.е., когда

$$B(k^2 - \Omega^2) - h \cos \varepsilon = 0; \quad 2Bn\Omega - h \sin \varepsilon = 0.$$

Из этих уравнений определяем амплитуду вынужденных колебаний  $B$  и сдвиг фаз  $\varepsilon$ :

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}, \quad \sin \varepsilon = \frac{2Bn\Omega}{h}, \quad \cos \varepsilon = \frac{B(k^2 - \Omega^2)}{h}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2}.$$

Окончательная форма выражения вынужденных колебаний

$$\varphi_1^{(2)} = B \sin(\Omega t - \varepsilon), \quad (34.10)$$

где  $B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2} = -0,08$ ,

$$0 \leq \varepsilon \leq \pi. \quad (34.11)$$

**Резонанс**

Если частота возмущающей силы, равно частоте свободных колебаний системы, т.е.

$$\Omega = k,$$

то наступает так называемый резонанс.

Частота  $\Omega = k$  называется критической. Амплитуда в этом случае по формуле (34.11) получается равной:

$$B = \frac{h}{2nk}. \quad (34.12)$$

В этом случае по формуле (34.11)  $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$ , то сдвиг фаз

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение (10) в этом случае примет вид:

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{h}{2nk} \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 7,76 \cdot 10^{-3} \sin\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (34.13)$$

Отметим, что амплитуда вынужденных колебаний  $B$ , вследствие сдвига фаз  $\varepsilon$ , имеет максимум не при резонансе  $\Omega = k$ , а при другом значении частоты  $\Omega$ .

Очевидно максимуму  $B = h / \sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}$  соответствует минимум подкоренного выражения

$$\left\{ (k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2 \right\}.$$

Взяв от этого выражения производную по  $\Omega$  и приравняв ее нулю, получаем

$$-4\Omega(k^2 - \Omega^2) + 8n^2\Omega = 0 \quad \text{или} \quad \Omega^2 = k^2 - 2n^2.$$

Это равенство возможно, если  $k^2 - 2n^2 > 0$ , т.е., если  $n < \frac{k\sqrt{2}}{2}$ . При  $n > \frac{k\sqrt{2}}{2}$  максимума у  $B$  не существует и резонанса в этом случае нет. В

нашем случае  $n = 0,4982 \text{ с}^{-1}$ ,  $k = 1,2029 \text{ с}^{-1}$  и  $0,4982 < 0,8506$ , т.е.  $n < \frac{\sqrt{2}}{2}k$ , и резонанс у нашей системы существует.

Подставляя в формулу (34.11) для определения  $B$  значение  $\Omega^2 = k^2 - 2n^2$ , имеем

$$\max B = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = 8,52 \cdot 10^3$$

При малом значении коэффициента затухания

$$\max B = \frac{h}{2nk} = 7,76 \cdot 10^3,$$

т.е. максимальное значение амплитуды  $B$  и ее значение при резонансе весьма близки друг другу (практически одинаковы).

### Коэффициент динамичности

Если бы возмущающая сила была постоянной, равной амплитуде  $PA_1$ , то правая часть уравнения (34.2) была бы тоже постоянной и в качестве частного решения неоднородного уравнения  $\varphi_1^{(2)}$  можно взять постоянную величину статического смещения  $\varphi_1^{(2)} = h/k^2$ , где  $h = PA_1/a$ . Проверка убеждает, что значение  $\varphi_1^{(2)}$  удовлетворяет уравнению (34.2).

Если вычислять  $\varphi_1^{(2)}$  из (34.10) как частный случай соответствующей  $\Omega = 0$  и начальная фаза возмущающей силы равной  $\frac{\pi}{2}$  (это возможно, т.к. амплитуда и сдвиг фаз вынужденных колебаний  $B$  и  $\varepsilon$  в общем случае в соответствии с (34.11) не зависят от начальной фазы возмущающей силы, поэтому вместе нулевой начальной фазы, мы можем брать ее равной  $\pi/2$ ), то получим

$$\varphi_1^{(2)} = (B)_{\Omega=0} = B_0 = \frac{h}{k^2},$$

что совпадает со статическим смещением. Следовательно,  $B_0 = h/k^2$  можно считать "амплитудой" вынужденных колебаний при действии постоянной возмущающей силы, совпадающей по величине с наибольшим значением гармонической возмущающей силы.

Величину  $\nu = \frac{B}{B_0}$  называют коэффициентом динамичности.

Коэффициент динамичности характеризует относительную величину амплитуды вынужденных колебаний. Другими словами этот коэффициент показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний при действии гармонической возмущающей силы отличается от статического смещения, которое вызывает постоянная возмущающая сила, равная по величине наибольшему значению гармонической силы.

При определении коэффициента динамичности представим формулу (34.11) для определения амплитуды вынужденных колебаний в следующем виде

$$B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} = \frac{h}{k^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{k^2}\right)^2 + 4\frac{n^2}{k^2} \frac{\Omega^2}{k^2}}}.$$

При статическом действии возмущающей силы, отклонение системы от ее равновесного положения равно

$$B_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{PA_1}{ak^2} = \frac{PA_1}{c}, \text{ т.к. } k^2 = c/a.$$

Тогда коэффициент динамичности:

$$v = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{\Omega^2}{k^2}}} = 9,22 \cdot 10^{-3}. \quad (34.14)$$

В случае резонанса коэффициент динамичности:

$$v = \frac{k}{2n} = 1,207.$$

Максимальный коэффициент динамичности:

$$v_{\max} = \frac{k}{2n \sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = 1,326.$$

### Выводы

1. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении являются незатухающими, т.е. амплитуда их постоянна как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

2. Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

3. Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий так же, как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

4. Амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю быстрее при линейном сопротивлении с увеличением относительной частоты возмущающей силы, чем при отсутствии сопротивления.

## Литература.

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1958.
2. Бондарь Н.Г. Как работают мосты. Киев, изд-во «Наукова думка», 1986. - 120 с.
3. Балабух Л.И. и др. Основы строительной механики ракет. М., «Высш. школа». 1969. – 496 с.
4. Бабаков И.М. Теория колебаний. М., Гостехиздат, 1958.
5. Годыцкий –Цвирко А.М. Взаимодействие пути и подвижного состава железных дорог. Гострансиздат, 1931.
6. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др.; Курс теоретической механики /под общ. ред. К.С. Колесникова. – М., 2000.
7. Добронравов В.В. и др. Курс теоретической механики. Учебник для вузов. М., « Высш. школа», 1974. - 528 с.
8. Кириенко В.И. Проектирования вантовых мостов. – Вкн.: Тр. ЦНИИ ПСК.- М., 1980. с. 114-122.
9. Карцивадзе Г.Н. Сейсмостойкость дорожных искусственных сооружений. – М.: Транспорт. 1974. – 263 с.
10. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. Собр. соч., Т. IV, АН СССР, 1955.
11. Окамото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений. –М.: Стройиздат, 1980. – 342 с.
12. Петропавловский А.А., Крыльцов Е.И., Богданов Н.Н., Иосилевский Л.И., Стрелецкий Н.Н., Потапкин А.А., Фридкин В.М., Кравцов М.М. Вантовые мосты. –М.: Транспорт, 1985.- 224 с.
13. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М., 1968, - 567 с.



14. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. «Наука», 1971.
15. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Физматгиз. 1959.
16. Фин Я.Ц. Введение в теорию аэроупругости М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. 1959.- 523 с.
17. Цывильский В.Л. Теоретическая механика. – М.: Высш. школа., 2004.- 343 с.
- 18 Шестоперов Г.С. Сейсмостойкость мостов. – М., Транспорт, 1984.- 143с .
19. Яблонский А.А. и др. Методические указания к решению задач по теоретической механике. Вып. 4, Ленинград, 1977. – 40 с.
20. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика М., «Высшая школа», 1971.- 488 с.
21. Яблонский А.А. Никифорова В.М. Курс теоретической механики СПб., 2001.
22. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. Учебн. пособие для студентов вузов. М., «Высш. школа», 1975. - 248 с.
23. Харкевич А.А. Автоколебания. М., Гостехиздат, 1953

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Раздел первый. Теория колебаний.....	4
Глава 1. Основы теории колебаний механических систем.....	4
§ 1. О выборе одной из возможных динамических расчетных схем механической системы .....	5
§ 2. Основные понятия.....	8
§ 3. Основные виды колебаний.....	12
Глава 2. О динамической работе мостов .....	17
§ 4. Почему колеблются мосты .....	17
§ 5. Динамическое воздействие подвижной нагрузки на мосты.....	19
§ 6. Об особенностях колебаний на мостах.....	19
§ 7. О некоторых особенностях динамической работы автодорожных, городских и пешеходных мостов.....	21
§ 8. Аэродинамика висячих и вантовых мостов.....	23
§ 9. О некоторых методах и способах гашения колебаний мостов.....	30
Глава 3. Устойчивость равновесия системы в консервативном силовом поле.....	35
§ 10. Потенциальная энергия системы с конечным числом степеней свободы.....	35
§ 11. Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия консервативной системы.....	37
§ 12. Устойчивость равновесия консервативной системы с одной степенью свободы.....	39
§ 13. Устойчивость равновесия консервативной системы с конечным числом степеней свободы. Критерий Сильвестра...	40
Глава 4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы ....	41
§ 14. Уравнения Лагранжа второго рода.....	41
§ 15. Диссипативная функция. Функция Релея .....	43
§ 16. Свободные колебания системы с одной степенью свободы .....	45
§ 17. Основные характеристики свободных колебаний .....	47
§ 18. Влияние сил сопротивления на свободные колебания системы с одной степенью свободы.....	48

§ 19. Исследование свободных колебаний двухпролетного моста по которому с постоянной скоростью движется колонна машин.....	52
Глава 5. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы.	60
§ 20. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.....	60
§ 21. Общее решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.	61
§ 22. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае периодической возмущающей силы.....	64
§ 23. Резонанс и явление биений.....	67
§ 24. Коэффициент динамичности.....	73
§ 25. О колебаниях упруго подвешенных масс.....	78
§ 26. Вынужденные колебания системы, вызываемые импульсами мгновенных сил.....	82
Раздел 2. О динамических процессах, возникающих при движении автотранспорта.....	89
§ 27. Силы действующие на движущийся автотранспорт.....	89
§ 28. Определение критической скорости движения автомобиля по криволинейной траектории.....	90
§ 29. Определение тормозного пути и времени торможения движущегося автомобиля.....	93
§ 30. Удары колес в неровностях на дорогах.....	94
§ 31. Определение критической скорости движения автомобиля по трассе с периодически повторяющимися поперечными температурными швами.....	96
§ 32. Исследование относительных колебаний движущегося с постоянной скоростью наддрессорного груза, вызываемых неровностями пути. Определение критической скорости.....	97
§ 33. Аэродинамические силы.....	101
§ 34. Задачи для самостоятельного решения. Пример решения и методические рекомендации .....	104
Литература.....	125