

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
Лекции

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ	4
1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	8
1.1. Консервативные колебательные системы.....	8
1.1.1. Уравнения движения.....	8
1.1.2. Фазовый портрет.....	10
1.2. Составление механической модели (расчетной схемы).....	15
1.2.1. Ограничение числа степеней свободы.....	15
1.2.2. Силы, действующие при колебаниях. Общий вид уравнения движения.....	17
1.3. Свободные колебания линейной консервативной системы.....	20
1.4. Вынужденные колебания линейной системы без трения.....	21
1.4.1. Импульсивная нагрузка.....	21
1.4.2. Произвольная нагрузка.....	22
1.4.3. Внезапная нагрузка.....	24
1.4.4. Линейно возрастающая нагрузка.....	25
1.4.5. Выражение частного решения через реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку.....	25
1.4.6. Гармоническое возбуждение.....	27
1.4.7. Негармоническое периодическое возбуждение.....	28
1.5. Затухание свободных колебаний.....	31
1.5.1. Линейное вязкое трение.....	31
1.5.2. Сухое (кулоново) трение.....	34
1.5.3. Сила трения, пропорциональная смещению (позиционное трение).....	36
1.5.4. Энергетическая оценка сил сопротивления.....	38
1.5.5. Потери на внутреннее трение в материалах и конструкциях.....	39
1.6. Вынужденные колебания систем при линейном вязком трении.....	40
1.6.1. Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону.....	40
1.6.2. Гармоническое возбуждение. Метод комплексных амплитуд.....	42
1.7. Вынужденные колебания систем с трением, отличным от линейного вязкого.....	45
1.7.1. Гармоническое возбуждение. Приближенное решение методом гармонического баланса.....	45
2. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ	47
2.1. Свободные (собственные) колебания.....	48
2.1.1. Линеаризация уравнения движения для малых колебаний.....	48
2.1.2. Главные (нормальные) координаты.....	49
2.1.3. Решение системы уравнений движения. Частоты и формы собственных колебаний.....	50
2.1.4. Ортогональность форм собственных колебаний.....	52
2.1.5. Связь форм собственных колебаний и главных координат.....	52
2.2. Вынужденные колебания системы без трения.....	53
2.2.1. Метод главных координат.....	53
2.2.2. Гармоническая сила. Резонанс.....	53
2.2.3. Динамическая податливость. Антирезонанс.....	54
2.2.4. Динамический гаситель колебаний.....	55
2.2.5. Кинематическое возбуждение колебаний.....	57
2.3. Влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	57
2.3.1. Внешнее и внутреннее вязкое трение. Диссипативная функция Рэлея.....	57
2.3.2. Пропорциональное демпфирование.....	58
2.3.3. Метод комплексных амплитуд.....	59

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	62
3.1. Уравнение движения параметрических колебаний	62
3.2. Параметрические колебания около положения равновесия	62
3.3. Параметрические колебания около стационарного режима движения.....	64
3.4. Параметрическое возбуждение по кусочно-постоянному периодическому закону..	65
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ.....	70
4.1. Свойства нелинейных колебаний	70
4.1.1. Свободные колебания	70
4.1.2. Вынужденные колебания нелинейной системы с кубической упругой характеристикой при гармоническом возбуждении и вязком трении	72
4.2. Автоколебания	74
4.3. Аналитические методы теории нелинейных колебаний	75
4.3.1. Качественный метод анализа фазового портрета.....	75
4.3.2. Асимптотические и прямые методы.....	77
Рекомендуемая литература	78

ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Колебания — это движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Можно дать и другое определение: колебания — это повторяющиеся ограниченные движения или процессы относительно некоего среднего состояния, которое в частном случае может быть состоянием равновесия. Такие определения объединяют весьма широкий круг явлений, встречающихся в природе и находящихся многочисленными применениями в технике: звук, свет, радио, колебания цен и т.д. Ближким к колебательным движениям являются явления распространения волн в средах, т.е. изменения состояния (возмущений) таких сред. Поэтому иногда выделяют единую теорию колебаний и волн, поскольку у них общие уравнения и математические методы. Используются в качестве синонимов также термины вибрации и осцилляции, имеющие латинское происхождение от слов, означающих колебание, качание, дрожание.

В теории колебаний проводится рассмотрение специфического типа движений, присущего определенному классу динамических систем. Подобные динамические системы, в которых могут существовать колебательные процессы, принято называть колебательными системами.

Предметом теории колебаний является рассмотрение общих закономерностей колебательных процессов в различных динамических системах.

В этой связи представляется необходимым упомянуть ряд имен ученых, внесших наиболее фундаментальный вклад в учение о колебаниях.

Джон Уильям Стрэтт – лорд Рэлей (John William Strutt – Reyleigh) (1842–1919) — один из основоположников теории колебаний. В своем труде «Теория звука» он впервые изложил расчеты ряда колебательных процессов с последовательным учетом нелинейных свойств колебательных систем. В современной теории колебаний используются также математические методы, развитые Жюлем Анри Пуанкаре (1854–1912) в его работах по небесной механике; нашли применение и исследования Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918) по устойчивости движений и методы расчета колебательных движений, развитые Алексеем Николаевичем Крыловым (1863–1945). Очень большое значение для формирования теории колебаний имели основополагающие работы Ван дер Поля (1889–1959) по колебаниям в некоторых нелинейных системах и общие исследования колебательных процессов в нелинейных системах, проведенные Александром Александровичем Андроновым (1901–1952), развившим учение о самоподдерживающихся колебательных процессах, названных им автоколебаниями. Этот термин в настоящее время является общепринятым.

Однако следует иметь в виду, что для физиков и специалистов технических направлений теория колебаний — это не совокупность методов анализа и расчета, а изучение закономерностей протекания колебательных процессов в реальных системах с использованием в каждом случае наиболее адекватных методов рассмотрения. При этом чрезвычайное многообразие колебательных систем и их свойств требует при изучении протекающих в них колебательных процессов нахождения общих черт у различных колебательных систем и объединения их по наиболее характерным признакам в определенные классы и типы.

Последовательная классификация различных колебательных систем возможна лишь при условии замены конкретных реальных систем с их неизбежным многообразием свойств моделями, в которых отражается только основные существенные черты изучаемых процессов.

Выбор модели, передающей наиболее важные, основные и определяющие свойства изучаемой реальной системы и вместе с тем достаточно простой для применения известных методов анализа и расчета — первый и очень важный этап всякой теории и в том числе теории колебаний. От его правильности решающим образом зависит реальность и достоверность результатов последующего исследования, а также оправданность выбора

метода дальнейшего анализа. Если модель груба, то избыточно точный расчет лишен смысла, так же как и использование очень сложной детальной модели при ее дальнейшем упрощенном анализе. Весьма важно правильно выбрать соответствие между степенью идеализации при переходе к модели, точностью аналитической аппроксимации реальных физических зависимостей и точностью применяемых математических методов.

Заменяя реальные динамические системы их соответственно выбранными моделями, мы можем провести последовательную классификацию систем и протекающих в них колебательных процессов по различным признакам. Кинематические признаки — основа классификации колебательных движений. Основа классификации колебательных систем — их динамические свойства.

Кинематическими признаками колебательного движения являются его периодичность, форма и амплитуда. Для строго периодических процессов выполняется соотношение

$$F(t) - F(t + T) = 0,$$

справедливое для любого момента времени t , где T — период данного колебательного движения; $1/T = \nu$ — частота (число периодов в единицу времени). Широко используется так называемая угловая, или круговая, частота $\omega = 2\pi\nu$. Частота меряется в герцах, 1 Гц соответствует одному колебанию в секунду.

В зависимости от природы изучаемых колебательных движений встречаются периоды, имеющие самые различные значения. Так, например, периоды приливных процессов — величины порядка 10^5 с, периоды колебаний маятников в часах — порядка 1 с, периоды колебаний, изучаемых в акустике (слышимый звук), — от 10^1 до 10^4 с; ультразвук — 10^{-4} – 10^{-9} с, гиперзвук — 10^{-9} – 10^{-13} с, в радиотехнике имеют дело с колебаниями с периодами от 10^4 до 10^{-12} с. Колебания молекул, связанные с инфракрасным излучением, имеют периоды порядка 10^{-12} – 10^{-14} с. Оптический диапазон соответствует периодам колебаний 10^{-14} – 10^{-15} с, связанных с атомными процессами (ультрафиолетовое излучение) 10^{15} – 10^{17} с, а периоды колебаний, соответствующих рентгеновскому излучению, составляют 10^{17} – 10^{19} с. Из приведенных примеров видно, насколько различаются величины периодов колебательных процессов, изучаемых в астрономии, физике, технике, с которыми приходится сталкиваться исследователям. Однако у всех этих процессов, имеющих самую различную природу, есть ряд общих свойств и особенностей, которыми занимается теория колебаний.

Следует отметить, что строгой периодичности реальных процессов в природе нет и строгая периодичность — это тоже идеализация. В реальных колебательных системах всегда существуют возмущающие силы, случайные смещения (например, флуктуационные) и нестабильность параметров, исключающие возможность идеальной периодичности. Поэтому более последовательным было бы изучение колебательных процессов, в которых условие периодичности выполняется приближенно, т. е. положить в основу рассмотрения почти периодические колебания, для которых

$$|F(t) - F(t + T)| \ll \varepsilon,$$

где ε — любая наперед заданная малая величина и $T(\varepsilon)$ — почти период. Примером такого процесса может служить процесс затухающих колебаний

$$F(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

при достаточно малом δ . Здесь $T = 2\pi/\omega$ — почти период.

Процесс, представляющий собой сумму двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, также служит примером почти периодического движения

$$F(t) = a_1 \cos(\omega_1 t) + a_2 \cos(\omega_2 t).$$

Если, кроме того, можно указать такие m и n , что $|mT_1 - nT_2| \ll \varepsilon$, то T_1 и T_2 также являются почти периодами этого процесса при достаточно малом значении ε .

Однако теория почти периодических процессов сложна и во многих случаях мало разработана. Поэтому в основу рассмотрения большинства колебательных задач можно

положить допущение о периодичности наряду с существованием заведомо непериодических колебательных процессов.

Помимо периодичности, колебательные движения характеризуются формой и амплитудой, и эти кинематические признаки позволяют определенным образом классифицировать разнообразие процессов колебаний. Например, прямоугольные и пилообразные колебания, затухающие и нарастающие амплитудно- и частотно-модулированные.

Особое значение имеет простейший вид колебательного процесса — гармоническое колебание

$$F(t) = a \cos(2\pi vt + \varphi_0) = a \cos(\omega t + \varphi_0)$$

здесь a — амплитуда колебания, $\omega t + \varphi_0$ — мгновенная фаза, φ_0 — начальная фаза колебания. Гармонические колебания представляют особый интерес не только в силу простоты их аналитического представления, но в первую очередь потому, что эта форма движений наиболее обычна для колебательных процессов в системах с постоянными параметрами и чрезвычайно часто встречается в реальных процессах, изучаемых в физике и в технических дисциплинах.

Отдельно можно выделить случайные колебания.

В теории колебаний, как уже упоминалось, главной задачей является изучение колебательных процессов в определенных динамических системах — в колебательных системах. Поэтому необходима классификация колебательных систем по их динамическим свойствам. Подобная классификация, естественно, будет полностью последовательной лишь для соответствующих моделей с ограниченным числом свойств. Классификацию колебательных систем можно провести по ряду признаков: во-первых, по числу степеней свободы, во-вторых, по энергетическим признакам, разделяя системы на активные (с внутренним источником энергии) и пассивные, в-третьих, по свойствам параметров системы, выделяя системы с параметрами, не зависящими от ее состояния (линейные системы), и с параметрами, зависящими от состояния системы (нелинейные системы) или от времени (параметрические), в-четвертых, по условиям действия внешних сил, разделяя системы на автономные (свободные) и неавтономные (вынужденные и диссипативные). Эта классификация не является полной и единственно возможной. Немного другой вариант классификации предложен в таблице 2.

Очевидно, что простейшими колебательными системами являются системы с одной степенью свободы, с которых и начинается рассмотрение колебательных процессов в идеализированных динамических системах. Далее рассматриваются автономные и неавтономные системы с двумя и большим числом степеней свободы, а также колебательные и некоторые волновые процессы в системах с распределенными параметрами.

Следует иметь в виду, что системы с одной степенью свободы представляют собой объект, наиболее доступный для исследования возможных колебательных движений при самых разных их нелинейных свойствах. Нелинейные же системы с двумя и большим числом степеней свободы и распределенные системы поддаются последовательному анализу лишь в отдельных частных случаях. Их рассмотрение даже в линейном приближении значительно более сложно, громоздко и не допускает ряда качественных и наглядных приемов, которые возможны для систем с одной степенью свободы.

Колебательные процессы в системах с постоянными параметрами (в линейных системах) изучены уже сравнительно давно, и математическая их теория развита с большой полнотой. Однако изучение общих закономерностей колебаний в системах с параметрами, зависящими от состояния системы (в нелинейных системах), началось значительно позднее, и долгое время рассматривались лишь отдельные частные задачи без обобщения полученных результатов на широкие классы динамических колебательных систем и протекающие в них процессы.

Таблица 1.

Процессы	Период, с	Частота, Гц
приливы	10^5	10^{-5}
колебаний маятников в часах	1	1
акустика (слышимый звук)	$10^{-1}-10^{-4}$	10^1-10^4
ультразвук	$10^{-4}-10^{-9}$	10^4-10^9
гиперзвук	$10^{-9}-10^{-13}$	10^9-10^{13}
радиотехника	$10^{-4}-10^{-12}$	10^4-10^{12}
колебания молекул, связанные с инфракрасным излучением	$10^{-12}-10^{-14}$	$10^{12}-10^{14}$
оптический диапазон (видимый свет)	$10^{-14}-10^{-15}$	$10^{14}-10^{15}$
атомные процессы (ультрафиолетовое излучение)	$10^{-15}-10^{-17}$	$10^{15}-10^{17}$
рентгеновское излучение	$10^{-17}-10^{-19}$	$10^{17}-10^{19}$

Таблица 2.

Классификация			
колебательных движений (процессов)		колебательных систем	
в основе лежат			
кинематические признаки движений		динамические свойства систем	
1) периодичность	– строго периодические – почти периодические	1. число степеней свободы	– 1, 2, и т.д., конечное число, – распределенные системы
2) форма (амплитуда)	– гармонические – пилообразные – затухающие – нарастающие – установившиеся – амплитудно-модулированные – частотно-модулированные	2. свойства параметров	– линейные (не зависят от состояния) – нелинейные (зависят от состояния) – параметрические (зависят от времени)
3) стохастичность	– случайные – детерминированные	3. тип действующих сил: а) внешние силы	– автономные (свободные) – неавтономные (вынужденные)
		б) внутренний источник энергии (внутренние силы)	– активные или автоколебательные – пассивные
		в) силы трения	– консервативные – диссипативные
		г) случайные возмущения	– детерминированные – стохастические

Часто названия определенного типа колебательных систем переносят на название колебательных движений, хотя особых кинематических признаков у них нет. Например, говорят о свободных, вынужденных, параметрических колебаниях.

1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Закономерности, устанавливаемые в этой главе, для систем с одной степенью свободы, имеют большое значение, так как задачу о колебаниях системы с произвольным числом степеней свободы часто удается свести к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы. Дифференцирование по времени мы будем обозначать по Ньютону — точками над соответствующей переменной. Лагранж для обозначения производных использовал штрих, а Лейбниц — букву d для обозначения малых приращений и дробь для их деления.

1.1. Консервативные колебательные системы

При рассмотрении колебательных систем имеет смысл уделить особое внимание системам с малым затуханием, в которых величина энергии, рассеиваемой за период (или почти период) колебаний, мала по сравнению с общим запасом энергии. В подобных системах наиболее ярко проявляются их колебательные свойства. В большом числе практических применений мы встречаемся с высокочастотными колебательными системами. Это маятник или баланс в часовых механизмах, колебательные элементы в частотомерах и спектр-анализаторах и др. Многие колебательные свойства подобных систем весьма мало зависят от величины и характера затухания. Поэтому, ограничиваясь интервалами времени не слишком большими по сравнению с периодом колебаний, мы можем пренебречь затуханием и рассматривать изучаемую систему как консервативную. Очевидно, что при этом имеет место существенная идеализация и применение выводов, полученных при рассмотрении подобной идеальной системы, к реальной системе должно проводиться с учетом тех особенностей, которые вносятся затуханием, всегда наблюдаемым в реальных физических устройствах.

Консервативные колебательные системы — это идеализированные системы, в которых запас энергии в процессе совершения колебаний остается постоянным. Несмотря на отсутствие в природе консервативных колебательных систем, их изучение позволяет получить много данных, помогающих исследованию систем, отличных от консервативных, особенно систем, близких к ним.

1.1.1. Уравнения движения

Рассмотрим вывод уравнения движения на примере идеального кругового математического маятника (рис. 1.1) с длиной подвеса l и массой m , находящегося в поле тяготения с ускорением g . Дифференциальное уравнение движения для угловой координаты $q = \varphi$ может быть получено из уравнения Лагранжа II рода. Для этого запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий, а затем и функции Лагранжа:

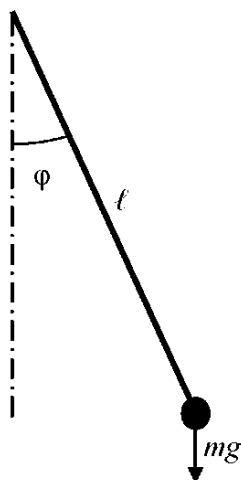


Рис. 1.1. Математический маятник (груз — материальная точка, нить нерастяжима и её массой можно пренебречь)

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \Pi = -mgl \cos \varphi, \quad L = T - \Pi = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl \cos \varphi$$

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$$

в нашем случае получаем

$$ml^2\ddot{\varphi} + (-mgl(-\sin \varphi)) = 0$$

и окончательно

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Примем гамильтоново описание. Введем обобщённые импульсы

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{\varphi}.$$

Гамильтониан для консервативной системы равен

$$H = T + \Pi = \frac{p_1^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi.$$

Тогда уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mgl \sin \varphi,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p_1}{ml^2},$$

или в другом виде (после несложного преобразования координат $p = p_1/(ml^2)$)

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos \varphi$$

$$\dot{p} = -\omega_0^2 \sin \varphi$$

$$\dot{q} = p$$

В случае малого изменения угла φ в уравнении (1) $\sin \varphi$ можно заменить на φ и получить уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2)$$

Оба уравнения (1) и (2) описывают процессы колебаний в консервативных системах, но уравнение (2) линейно относительно координаты q и, следовательно, описывает движение в линейной колебательной системе. Напротив, уравнение (1) нелинейно относительно координаты (возвращающая сила пропорциональна $\sin \varphi$) и поэтому колебательная система, описываемая этим уравнением, нелинейна.

В общем случае рассмотрения систем с одной степенью свободы мы должны для описания движений в консервативных системах рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка

$$\ddot{q} = \Phi(q, \dot{q}). \quad (3)$$

Для механических систем в уравнениях типа (3) можно считать, что вторая производная q представляет приведенную силу инерции, а правая часть — возникающую в системе силу, связанную только с положением рассматриваемой массы (например, упругую силу), и обе они отнесены к единице массы. Однако подобное уравнение будет описывать движение в консервативной системе не при любом виде функции $\Phi(q, \dot{q})$. Начнем с изучения случая, когда уравнение, описывающее движение в исследуемой системе, не содержит \dot{q} , т. е. возвращающая сила не зависит от скорости. Тогда общим видом подобного дифференциального уравнения второго порядка будет уравнения

$$\ddot{q} = f(q), \text{ где } f(q) = Q = -\frac{\delta\Pi}{\delta q}. \quad (4)$$

Это уравнение является обобщением полученного нами уравнения (1) для кругового математического маятника. Считая, что функция $f(q)$ является голоморфной (или аналитической, т.е. разлагается в степенной ряд), интегрируемой и, в общем случае, нелинейной функцией координаты q , используем новую переменную $p = \dot{q}$, которая позволяет исключить из уравнений движений время в явном виде, хотя по-прежнему $q = q(t)$ и $p = p(t)$ являются функциями времени. Тогда можно записать

$$\frac{dp}{dq} = \frac{f(q)}{p}. \quad (5)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получим первый интеграл — интеграл энергии

$$\frac{p^2}{2} - \int f(q) dq = T + \Pi = E, \quad (6)$$

Это уравнение является естественной записью условия консервативности системы, выражающегося в постоянстве общего запаса энергии.

Для более общего случая, когда возвращающая сила зависит от скорости, уравнение (3) может быть записано в виде

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\Phi(q, p)}{p}. \quad (7)$$

В этом случае оно будет описывать консервативную систему при условии существования однозначного интеграла этого уравнения (интеграла энергии или гамильтониана) следующего вида

$$F(q, p) = const.$$

Такой случай имеет место, когда действуют гироскопические силы.

1.1.2. Фазовый портрет

При гамильтоновом подходе можно использовать известный метод рассмотрения поведения исследуемой системы с помощью фазовой плоскости — плоскости переменных q и p . Каждому состоянию системы соответствует пара значений q и p , т. е. точка на фазовой плоскости. Подобную точку, координаты которой однозначно определяют мгновенное состояние системы, называют *описывающей* или *изображающей* точкой. Очевидно, что при движении, совершаемом системой, будут происходить изменения величин q и p , а, следовательно, описывающая точка будет перемещаться по некой кривой, которую принято называть *фазовой траекторией движения*.

Для исследуемой системы переменные q и p связаны системой двух дифференциальных уравнений первого порядка (уравнениями Гамильтона)

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= f(q) \end{aligned} \quad (8)$$

или одним уравнением (5), интеграл которого дает уравнение фазовых траекторий. В общем случае интегральные кривые, описываемые интегралом уравнения (5), не однозначно соответствуют фазовым траекториям, однако мы в дальнейшем, интересуясь в первую очередь формой этих кривых, будем считать, что уравнение (5) дает семейство фазовых траекторий, однозначное определение которых требует некоторого дополнительного рассмотрения с учетом начальных условий и свойств изучаемой величины. Из общих свойств дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку фазовой плоскости должна проходить одна и только одна фазовая траектория, за исключением тех точек, в которых $f(q)$ и p одновременно обращаются в нуль. В этих *особых точках* направление и число фазовых траекторий становятся неопределенными и свойства системы при таких значениях координат нуждаются в специальном изучении.

Заметим, что, получая уравнение фазовых траекторий, мы исключили время в явном виде. Форма фазовой траектории дает только некоторое указание о временном ходе изучаемого процесса и без дополнительных исследований не позволяет количественно получить основную переменную q как функцию t .

Рассмотрим условия, при которых в системе возникают состояния равновесия. В равновесном состоянии скорость движения обращается в нуль, и в системе должны отсутствовать силы, вызывающие движение, т. е.

$$p = \dot{q} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{p} = \ddot{q} = 0.$$

Отсюда следует, что в точках, соответствующих положениям равновесия

$$(q = q_i, p = 0) \quad f(q_i) = 0, \quad (9)$$

и потенциальная функция $\Pi(q_i)$ имеет экстремум, так как

$$\dot{p} = f(q) = -\frac{d\Pi(q)}{dq},$$

а при $q = q_i$

$$f(q_i) = -\left. \frac{d\Pi(q)}{dq} \right|_{q=q_i} = 0. \quad (10)$$

Особые точки, в которых выполняется условие (10), называются особыми точками первого порядка. Если

$$\left. \frac{d^n \Pi(q)}{dq^n} \right|_{q=q_i} = 0, \quad \left. \frac{d^{n+1} \Pi(q)}{dq^{n+1}} \right|_{q=q_i} \neq 0,$$

где $n = 1, 2, \dots$, то мы имеем дело с особыми точками порядка n .

Таким образом, мы видим, что положения равновесия системы соответствуют особым точкам на фазовой плоскости

$$p_i = 0, \quad f(q_i) = 0.$$

В окрестности точки равновесия $q = q_i$ потенциальную функцию можно разложить в ряд по степеням $\xi = q - q_i$

$$\Pi(q) = \Pi(q_i) + \left. \frac{d\Pi(q)}{dq} \right|_{q=q_i} \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \Pi(q)}{dq^2} \right|_{q=q_i} \xi^2 + \dots \quad (11)$$

Обозначим

$$\Pi(q_i) = \Pi_i, \quad a = \left. \frac{d^2 \Pi(q)}{dq^2} \right|_{q=q_i}.$$

Для малых вариаций q и p вблизи положения равновесия можно написать уравнение сохранения энергии (6) в виде

$$\frac{p^2}{2} + \Pi_i + \frac{a\xi^2}{2} \approx E \quad (12)$$

или

$$p^2 + a\xi^2 = 2(E - \Pi_i) \quad (13)$$

Если $\Pi(q)$ при $q = q_i$ имеет минимум, то

$$\left. \frac{d\Pi(q)}{dq} \right|_{q=q_i} = 0, \quad \left. \frac{d^2 \Pi(q)}{dq^2} \right|_{q=q_i} > 0. \quad (14)$$

Таким образом, если положение равновесия соответствует минимуму потенциальной функции (а, следовательно, и потенциальной энергии), то $a > 0$ и с точностью до высших степеней ξ мы получили в качестве уравнений фазовых траекторий вблизи положения равновесия уравнения эллипсов. Эти эллипсы различаются между собой величиной полуосей, определяемой значением $E - \Pi_i$. Выбирая различные значения E , мы получаем

различные эллипсы, которые по мере приближения E к Π_i уменьшаются, стягиваясь в точку $(q_i, 0)$ при $E = \Pi_i$.

Наличие на фазовой плоскости замкнутых фазовых траекторий (например, эллипсов в окрестностях рассмотренной особой точки) указывает на существование периодических движений. Из нашего анализа следует, что в окрестностях особой точки, отвечающей минимуму потенциальной энергии, происходят периодические движения с эллиптическими фазовыми траекториями, соответствующими гармоническим колебаниям. Реальное движение тем ближе к гармоническому, чем меньше превышение запаса энергии системы над запасом энергии в точке равновесия, т. е. чем меньше величина $E - \Pi_i$.

В системах, в которых потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию координаты q , $\frac{d^n \Pi(q)}{dq^n}$ всегда равно нулю при $n > 2$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$p^2 + aq^2 = const \quad (15)$$

для любых значений $E - \Pi_i$. Можно лишь указать, что этот случай относится к тривиальному случаю линейной системы, так как, если

$$\Pi(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2, \quad (16)$$

то

$$f(q) = -a_1 - 2a_2 q$$

и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + 2a_2 q = -a_1.$$

Последнее уравнение представляет собой известное уравнение гармонического осциллятора. Преобразованием координат можно избавиться от слагаемого в правой части.

Таким образом, исследованное положение равновесия (минимум потенциальной функции) соответствует на фазовой плоскости особой точке, называемой особой точкой типа центр, и отвечает положению равновесия, относительно которого система может совершать колебания, близкие к гармоническим или точно гармонические. Для представления на фазовой плоскости таких движений характерно наличие семейства замкнутых фазовых траекторий, окружающих центр, причем они (за исключением специальных случаев зависимости потенциальной функции от координаты в окрестностях данной особой точки) всегда стремятся к эллипсам при уменьшении амплитуды колебаний.

Достаточный признак или критерий устойчивости для консервативных систем дается теоремой, доказанной в конце XVIII века Лагранжем для некоторых частных случаев и обобщенной в середине XIX века Дирихле на случай любых консервативных систем.

Теорема Лагранжа — Дирихле. *Если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, то равновесие устойчиво.*

Для рассматриваемого случая из уравнения (6), выражающего закон сохранения энергии, можно получить после ряда простых выкладок выражение для периода колебаний. Действительно, разрешим его относительно импульса

$$p = \pm \sqrt{2[E - \Pi(q)]}. \quad (17)$$

Так как из (8)

$$p = \frac{dq}{dt},$$

то

$$dt = \frac{dq}{\pm \sqrt{2[E - \Pi(q)]}},$$

и

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E - \Pi(q)}}. \quad (18)$$

Рассматривая движение в положительном направлении оси времени и учитывая симметрию семейства фазовых траекторий относительно оси q , получим при заданной амплитуде колебаний выражение для периода колебаний вида

$$T = \sqrt{2} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E - \Pi(q)}}. \quad (19)$$

Здесь q_1 и q_2 — отклонения системы в моменты прохождения p через нулевые значения. Соответственно $q_2 - q_1$ представляет собой полный размах колебаний при данном, но произвольном запасе энергии E .

В общем случае полученное выражение для T будет функцией q_1 и q_2 , так что для нелинейной системы имеет место зависимость периода колебаний от общего запаса энергии или амплитуды совершаемых колебаний (неизохронность колебаний в нелинейных системах). Лишь для линейной системы, когда потенциальная функция представляет собой квадратичную функцию (16) координат колебаний вокруг положения равновесия, можно сделать замену переменных $v = \omega_0 q / \sqrt{E} = q \sqrt{2a_2/E}$, избавиться от энергии и получить

$$T = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{a_2}} = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

т. е. период равен величине, не зависящей от амплитуды совершаемых колебаний. В этом случае колебания становятся изохронными, и период свободных колебаний в линейной системе не зависит от сообщенного ей начального запаса энергии.

Рассмотрим случай, когда положение равновесия системы, а, следовательно, и особая точка на фазовой плоскости соответствуют максимуму потенциальной функции $\Pi(q)$. Тогда, проводя те же выкладки, мы получим аналогичное уравнение для малых вариаций p и q , но

$$\left. \frac{d^2\Pi(q)}{dq^2} \right|_{q=q_1} = a = -b < 0 \quad (20)$$

и уравнение (13) примет вид

$$p^2 - b\xi^2 = 2(E - \Pi_1)$$

Это уравнение фазовых траекторий для окрестности исследуемой особой точки задает гиперболы с асимптотами

$$p = \pm\sqrt{b}\xi. \quad (21)$$

Таким образом, особая точка на фазовой плоскости, соответствующая максимуму потенциальной функции, представляет собой такую особую точку, через которую проходят целых две фазовые траектории и в ее окрестности все остальные фазовые траектории имеют вид гипербол. Такую особую точку называют точкой типа *седло*. Подобные точки соответствуют неустойчивому положению равновесия, так как любое сколь угодно малое отклонение системы от положения равновесия приводит к дальнейшему росту вариаций координат системы, т. е. к дальнейшему удалению от точки равновесия. На фазовой плоскости это соответствует выходу описывающей точки из особой точки и ее дальнейшему движению по одной из уходящих фазовых траекторий.

Проиллюстрируем приведенные рассуждения графическими изображениями двух описанных типичных случаев, сделав одно очевидное замечание. По самому определению величины $p = \dot{q}$ значения $p > 0$ соответствуют росту q , а $p < 0$ — убыванию q . Поэтому движения описывающей точки по фазовым траекториям всегда происходят в верхней полуплоскости фазовой плоскости в сторону возрастания q , а в нижней — в сторону убывания q .

Если изобразить графически функцию $\Pi(q)$ и построить фазовые траектории на основании уравнения

$$\frac{p^2}{2} + \Pi(q) = E$$

то, задаваясь различными значениями E , мы получим два характерных случая (рис. 1.2, точки A и B). Значение $q = q_A$ соответствует минимуму потенциальной функции $\Pi(q)$, и точка $A(q_A, 0)$ является особой точкой типа *центр*. Точка $B(q_B, 0)$, соответствующая максимуму функции $\Pi(q)$, представляет собой особую точку типа *седло* и отвечает на фазовой плоскости неустойчивому положению равновесия.

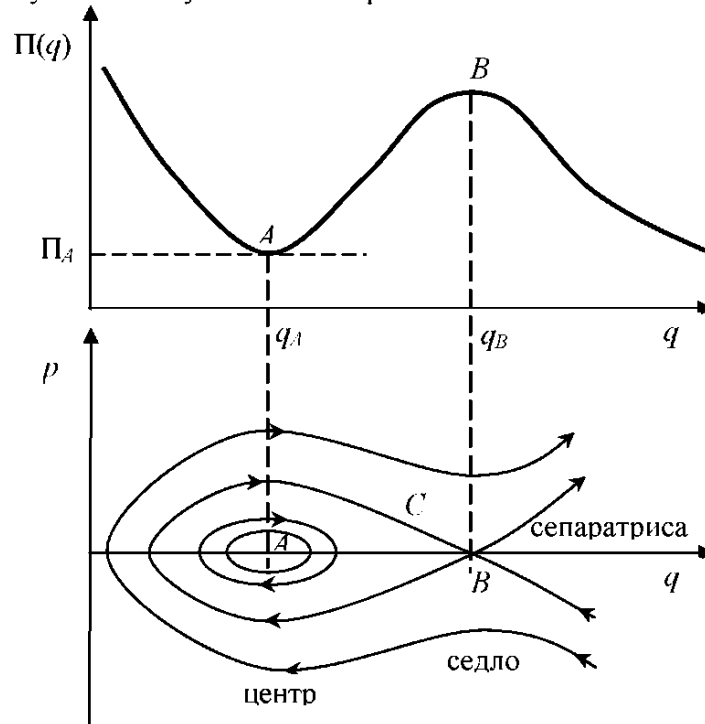


Рис. 1.2. Построение фазового портрета

Совокупность семейства фазовых траекторий и особых точек на фазовой плоскости принято называть *фазовым портретом* системы — он графически изображает ее динамические свойства. К этим двум основным элементам фазового портрета консервативной системы следует добавить еще фазовые траектории, пограничные между областями фазовой плоскости, соответствующими движениям различного характера. Эти линии (например, линия C на рис. 1.2) носят название *разделительных* линий или *сепаратрис*. Их расположение очень наглядно показывает области возможных движений разного типа и те значения фазовых координат q и $p = \dot{q}$, при которых одно движение переходит в другое. Например, на рис. 1.2 мы видим, как кривая C выделяет вокруг точки A область, внутри которой существуют колебательные движения вокруг устойчивого положения равновесия. Вне нее эти движения отсутствуют и характер движения системы, т. е. вид фазовых траекторий, может быть определен только при задании вида потенциальной функции $\Pi(q)$ для большей области изменений q .

Вообще, в большинстве случаев возможность хотя бы приближенного построения фазового портрета системы чрезвычайно облегчает рассмотрение общих свойств системы, и вид фазового портрета сразу показывает ряд наиболее характерных свойств изучаемой системы. Поэтому метод фазовой плоскости является исключительно полезным при качественном рассмотрении различных колебательных систем, особенно нелинейных.

1.2. Составление механической модели (расчетной схемы)

1.2.1. Ограничение числа степеней свободы

Все реальные деформируемые тела обладают бесконечным числом степеней свободы, соответствующих всевозможным их деформированным состояниям. Однако в зависимости от характера изучаемого явления и требуемой точности можно ограничить число учитываемых в расчете степеней свободы, выбирая в качестве расчетной схемы реальной конструкции систему, обладающую несколькими или даже одной степенью свободы. Т.е. реальную конструкцию мы заменяем расчетной схемой.

Ограничение числа учитываемых в расчете степеней свободы может быть выполнено различными способами. Укажем три способа. **Первый способ** связан с тем, что часто в реальной конструкции можно выделить массивные элементы, деформацией которых можно пренебречь, и упругие элементы, массу которых можно не учитывать. В этом случае расчетная схема представляет собой ряд жестких массивных тел, соединенных упругими связями. Так, например, система, представленная на рис. 1.3 а может рассматриваться как система с одной степенью свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза, если нас не интересует поведение отдельных витков пружины, а груз может перемещаться только в вертикальном направлении.

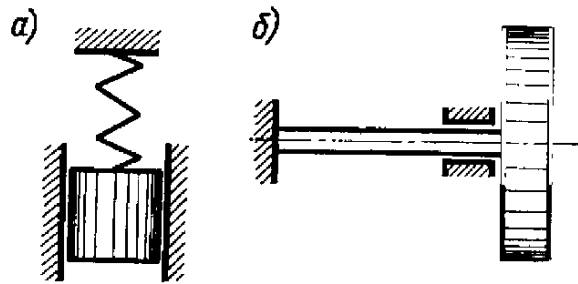
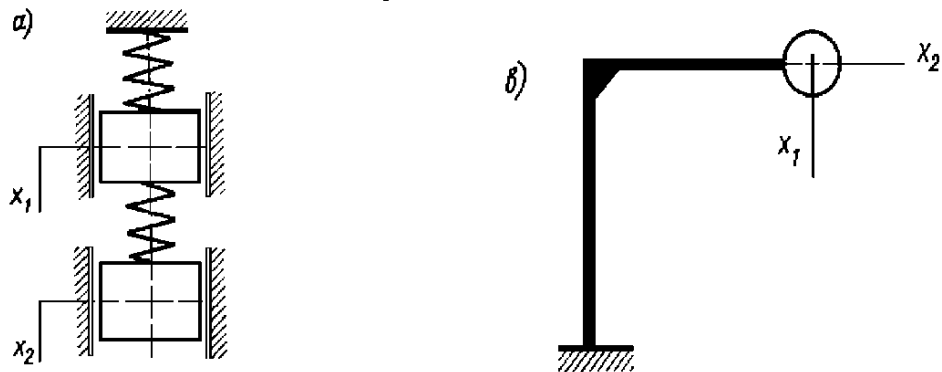


Рис. 1.3. Колебательные системы с одной степенью свободы

Другим примером систем с одной степенью свободы может служить диск, закрепленный на упругом валике (рис. 1.3 б). Если масса валика пренебрежимо мала по сравнению с массой диска, а диск может перемещаться только поворачиваясь в своей плоскости вокруг оси валика, то положение этой системы фиксируется единственной координатой — углом поворота диска.

На рис. 1.4 представлены системы с двумя степенями свободы. Положение грузов (рис. 1.4 а), масса которых значительно больше массы пружин, при движении в вертикальном направлении определяется двумя координатами: x_1 и x_2 . Системы, изображенные на рис. 1.4 б, в, могут рассматриваться как системы с двумя степенями свободы, если собственные массы балки и рамы малы по сравнению с массой колеблющихся грузов, а размеры грузов невелики, так что массы их можно считать сосредоточенными.



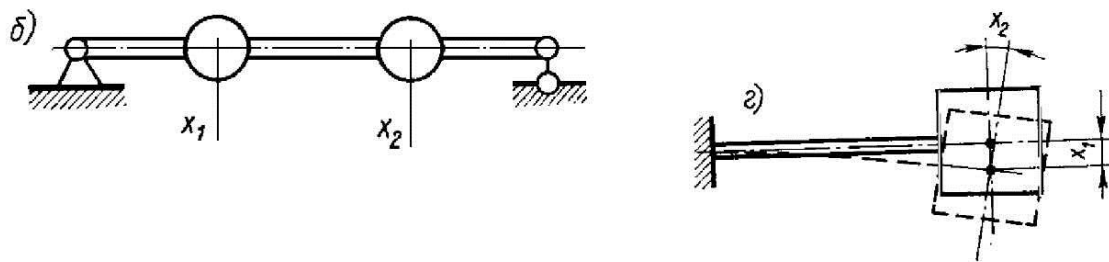


Рис. 1.4. Колебательные системы с двумя степенями свободы

В случае больших поперечных размеров груза (рис. 1.4 г) положение его определяется смещением центра массы x_1 и углом поворота груза x_2 . Такая система имеет две степени свободы.

Согласно **второму способу** распределенные по всему объему системы свойства податливости локализуются в конечном числе точек (или линий). При этом система представляется в виде совокупности упруго (или вязкоупруго) сочлененных жестких элементов. Например, упругая балка с непрерывно распределенной массой (рис. 1.5 а) может быть приближенно заменена цепочкой жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами. При выборе числа шарниров следует исходить из требуемого уровня точности (см. варианты замены на рис. 1.5 б, в).

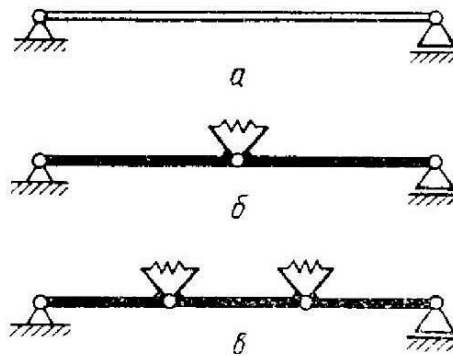


Рис. 1.5. Локализация податливостей в колебательной системе

Третий способ состоит в том, что на основе тех или иных соображений заранее задается форма движения системы.

Так, например, при изгибе балки ее положение в данный момент, как и положение любого деформируемого тела, определяется бесчисленным множеством координат. Однако уже в сопротивлении материалов число степеней свободы балки ограничивается благодаря использованию гипотезы плоских сечений. Согласно этой гипотезе, положение всех точек балки определяется положением точек, лежащих на ее оси. Благодаря принятию гипотезы плоских сечений задача существенно упрощается (становится одномерной), но число степеней свободы остается бесконечным.

Пусть для определенности речь идет о колебаниях показанной на рис. 1.4 а системы с двумя степенями свободы. Согласно этому способу можно принять, что отношение между перемещениями $x_1(t)$, $x_2(t)$, неизменно во времени, а числовые значения такого отношения ($x_2/x_1 = \alpha$) заранее назначается; разумеется, это вносит элемент произвола в решение. В результате движение системы полностью описывается одной функцией времени, например $x_1(t)$, через которую непосредственно выражаются перемещения всех точек системы; такая система имеет всего одну степень свободы.

Соответственно тому же способу, для двухопорной балки (рис. 1.6 а) принимается, что в любой момент процесса колебаний форма изогнутой оси остается неизменной и меняется лишь ее масштаб. Если заранее задать форму в виде «подходящей» координатной функции $f(x)$, то прогибы оси балки будут описываться произведением

$$y(x,t) = q(t)f(x), \quad (1)$$

в котором $q(t)$ — функция времени, являющаяся единственной неизвестной задачи.

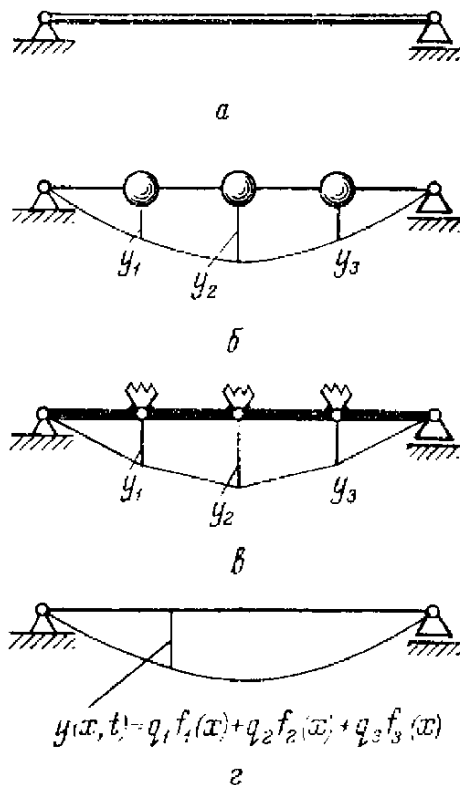


Рис. 1.6. Примеры приведения двухопорной балки к колебательной системе с тремя степенями свободы (рис. 1.6 а).

Для иллюстрации на рис. 1.6 показана изогнутая ось балки в избранные моменты процесса колебаний t_1, t_2 и t_3 ; все кривые имеют одну и ту же форму и различаются лишь масштабом. Таким образом, при фиксированном выборе функции $f(x)$ выражение (1) определяет переход к системе с одной степенью свободы, причем $q(t)$ представляет собой обобщенную координату.

Эта идея приведения к системе с одной степенью свободы лежит в основе метода Рэлея, который мы будем изучать ниже.

Точность решения может быть повышена, если вместо (1) описать движение балки суммой произведений

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^s q_j(t)f_j(x) \quad (2)$$

где $f_j(x)$ — задаваемые координатные функции, $q_j(t)$ — искомые функции времени, играющие роль обобщенных координат, s — сохраняемое в модели число степеней свободы системы.

Одна и та же система может быть приведена к системе с несколькими степенями свободы любым из трех способов. В качестве примера на рис. 1.6 а – г показаны три варианта приведения для двухопорной балки с

1.2.2. Силы, действующие при колебаниях. Общий вид уравнения движения

В первой части курса говорилось, что обобщенные силы, зависят от времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей $Q = Q(t, q, \dot{q})$.

Некоторые зависимости могут присутствовать, другие отсутствовать. Рассмотрим подробнее разновидности сил, ограничиваясь здесь системами с одной степенью свободы.

1) Вынуждающие (возмущающие) силы — внешние силы типа $Q(t)$, являющиеся заданными функциями времени; такие силы служат причиной вынужденных колебаний в неавтономных системах. Источники возникновения вынуждающих сил весьма разнообразны: периодически изменяющиеся силы давления газовой смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, инерционные эффекты в вибровозбудителях, переменное притяжение электромагнитов и др. Весьма различны и законы их изменения во времени, хотя в практике наиболее часто встречаются периодические вынуждающие силы. Иногда вынуждающие силы не детерминированы, а представляют собой случайные функции времени (случайные процессы).

В некоторых случаях возбуждение колебаний задается кинематически, когда каким-либо точкам системы «предписано» некоторое определенное движение — оно также может быть детерминированным или случайным процессом. В частности, кинематическим является возбуждение колебаний автомобиля или железнодорожного вагона при движении по неровному пути. Любое кинематическое возбуждение может быть представлено в виде некоторого эквивалентного силового возбуждения, т. е. заменено действием соответствующих сил.

2) Позиционные силы — силы, зависящие от положения (конфигурации) системы, т.е. от обобщенных координат. Среди позиционных сил особое значение имеют восстанавливающие силы, т.е. силы, возникающие при отклонениях системы от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть систему в это положение. Именно восстанавливающие силы обуславливают собственные колебательные свойства механических систем — их способность совершать свободные колебания.

В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих элементов при колебаниях (упругие силы). В других случаях роль восстанавливающей силы может играть сила тяжести (маятник) или архимедова сила (корабль).

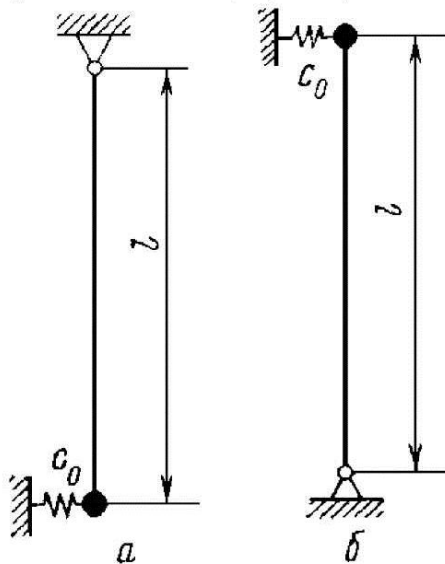


Рис. 1.7.

Зависимости восстанавливающих сил от обобщенных координат, как правило, нелинейны; однако при исследовании малых колебаний — что во многих случаях достаточно — чаще всего допустима линеаризация таких зависимостей. Для системы с одной степенью свободы линейная восстанавливающая сила всегда может быть записана в виде

$$Q(q) = -cq, \quad (3)$$

где q — обобщенная координата, c — обобщенный коэффициент жесткости. Например, если для маятника принять за обобщенную координату угол отклонения от вертикали, то обобщенная сила (момент силы тяжести) равна $-mgl \sin q \approx -mgl q$, т.е. $c = mgl$.

Иногда обобщенная восстанавливающая сила возникает вследствие одновременного влияния двух различных причин. Таков, например, упруго закрепленный маятник (рис. 1.7 а), для которого $c = c_0 l^2 + mgl$, где c_0 — коэффициент жесткости пружины, т.е. статическая сила, способная вызвать удлинение пружины на единицу длины. Эти влияния могут быть противоположными по направлению; так, для опрокинутого маятника (рис. 1.7 б) $c = c_0 l^2 - mgl$. Если пружина имеет малую жесткость, такую, что $c_0 l^2 < mgl$, то обобщенный коэффициент жесткости оказывается отрицательным, т.е. суммарная позиционная сила не является восстанавливающей.

3) Силы трения зависят от обобщенных скоростей (по крайней мере, от их знака) и направлены противоположно движению. Силы трения возникают в сочленениях звеньев и опорах механической системы, а также в материале ее звеньев. К этой категории также относятся силы сопротивления среды (жидкости, газа), в которой происходят колебания; такие и им подобные силы ниже условно также называются силами трения.

Особенно значительно трение в демпферах, которые специально вводятся в механические системы для гашения колебаний. Чаще всего силы трения препятствуют развитию колебаний, например, служат причиной затухания свободных колебаний; механические системы, в которых действуют такие силы, называются диссипативными. В некоторых случаях силы трения оказывают противоположное действие и возбуждают колебания (например, в автоколебательных системах).

Зависимость обобщенной силы трения от обобщенной скорости наиболее часто представляют в одной из следующих форм (для диссипативных систем с одной степенью свободы):

сила вязкого (линейного) трения

$$Q(\dot{q}) = -b\dot{q} \quad ; \quad (4)$$

сила сухого (кулонова) трения;

$$Q(\dot{q}) = -b \operatorname{sign} \dot{q} \quad (5)$$

сила нелинейно-вязкого трения, обычно аппроксимируемая зависимостью

$$Q(\dot{q}) = -b |\dot{q}|^n \operatorname{sign} \dot{q} \quad \text{или} \quad Q(\dot{q}) = -b\dot{q} - b_3\dot{q}^3 - b_5\dot{q}^5 - \dots \quad (6)$$

В некоторых системах действуют силы смешанного характера. Таковы, например, силы $Q(q, t)$, зависящие от координат и времени, которые нельзя представить в виде суммы позиционной силы и вынуждающей силы; эти силы характерны для параметрических систем, о которых кратко было уже сказано выше. Смешанным характером обладают также силы $Q(q, \dot{q})$, зависящие от координат и скоростей и притом непредставимые в виде суммы позиционной силы и силы трения; иногда такие силы придают механической системе автоколебательные свойства.

При составлении механической модели большое значение имеет разумное пренебрежение несущественными составляющими сил, а для учитываемых в анализе составляющих — правильная схематизация их свойств. Так, при определении собственных частот механических систем в большинстве случаев допустимо пренебречь действием сил трения; ими можно пренебречь и при исследовании вынужденных колебаний в достаточном удалении от резонанса. Аналогично этому, если рассматриваются малые колебания, то часто можно не учитывать нелинейность восстанавливающих сил.

Впрочем, подобные упрощения нужно делать осторожно, имея в виду, что, казалось бы, малые влияния иногда могут явиться причиной важных следствий принципиального характера. Так, даже весьма малые силы трения необходимо учитывать при анализе затухания свободных колебаний, а также при определении резонансных или околорезонансных амплитуд вынужденных колебаний. Подобно этому нужно помнить, что даже малые параметрические силы могут вызвать весьма опасные колебания типа параметрического резонанса.

Необходимо иметь в виду, что возможность схематизировать реальную систему и представить ее в виде системы с одной, двумя и большим числом степеней свободы зависит не только от вида системы, но и от характера воздействующих на нее сил.

Так, например, если в системе, изображенной на рис. 1.3 *a* оттянуть пружину в сторону, а затем отпустить, то возникнут ее боковые колебания, при которых нельзя пренебречь собственной массой пружины, как бы мала она ни была. При исследовании такого рода колебаний систему уже нельзя рассматривать как имеющую одну степень свободы.

Таким образом, выбор той или иной расчетной схемы может быть сделан только в результате изучения физической природы рассматриваемых явлений и в зависимости от требований, предъявляемых к точности расчета.

Для начала мы ограничимся рассмотрением систем только с одной степенью свободы. Эти системы наиболее просты, а закономерности, справедливые для них, справедливы и для более сложных систем. Как мы увидим далее, часто задача о колебаниях сложной системы с n степенями свободы может быть сведена к n задачам о колебаниях системы с одной степенью свободы.

Уравнение движения системы с одной степенью свободы включает в общем случае четыре члена — силу инерции, восстанавливающую (позиционную) силу упругости, вынуждающую (возмущающую) силу и силу трения.

Рассмотрим, например, тело массой m (рис. 1.8), которое может перемещаться в заданном направлении (связь неидеальная, поэтому заменяем ее на идеальную и учитываем трение) и удерживается упругой связью (идеальная связь с потенциальной силой). Уравнение движения этого тела имеет вид

$$-m\ddot{x} - R(\dot{x}) - F(x) + P(t) = 0,$$

где \ddot{x} — ускорение груза; R — сила трения; F — сила упругости, действующая на тело со стороны упругого элемента; $P(t)$ — возмущающая сила.

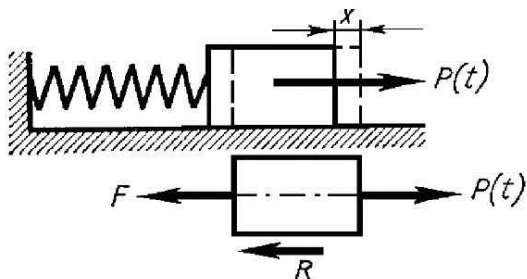


Рис. 1.8.

Представляет интерес рассмотрение свободных колебаний идеализированной системы при отсутствии сил трения и вынуждающей силы. В этом случае $P(t)=0$, $R=0$, система изолирована от окружающей среды и является консервативной. Для консервативных систем с одной степенью свободы в любой момент времени силы инерции уравновешиваются силами упругости.

1.3. Свободные колебания линейной консервативной системы

В большинстве упругих систем при достаточно малых перемещениях сила упругости линейно зависит от перемещения x . Если начало отсчета смещения x выбирать так, что при $x=0$ $F=0$, то для линейной системы $F = cx$, где c — коэффициент упругости системы.

Итак, дифференциальное уравнение движения при свободных колебаниях консервативной линейной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (1)$$

Вид уравнения не меняется при действии на систему постоянных сил (например, силы тяжести), если смещение тела отсчитывать от положения его статического равновесия.

Действительно, уравнение движения тела массой m , находящегося под действием силы тяжести и совершающего свободные колебания (рис. 1.3 а), имеет вид

$$m\ddot{x} = mg - c(x + x_{ст}), \quad (2)$$

где $x_{ст} = \frac{mg}{c}$ — статическое удлинение пружины от силы тяжести груза.

Следовательно, слагаемые mg и $cx_{ст}$ в уравнении (2) взаимно уничтожаются, и уравнение (2) совпадает с (1).

Уравнение движения одномассовой консервативной линейной системы, совершающей свободные крутильные колебания, записывают аналогично:

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

где I — момент инерции движущегося тела; φ — угол поворота тела; c — крутильная жесткость упругой связи.

Как известно, решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad (3)$$

где, $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — угловая собственная частота (круговая частота собственных колебаний);

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Обозначив смещение и скорость в начальный момент $t = 0$ соответственно через x_0 и \dot{x}_0 , после подстановки в уравнение (3) найдем:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega}. \quad (4)$$

Выражение (3) можно записать в виде

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Таким образом, движение груза при свободных колебаниях консервативной одномассовой линейной системы описывается синусоидальным законом с амплитудой колебаний A , периодом T и начальной фазой φ (рис. 1.9), при этом

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}. \quad (7)$$

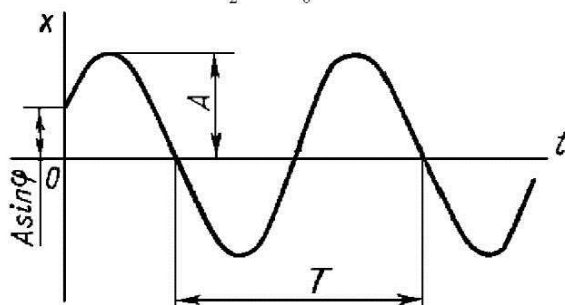


Рис. 1.9

Период колебаний T определяется из условия $\omega T = 2\pi$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (8)$$

и не зависит от амплитуды колебаний, начальных значений скорости и смещения.

Число колебаний в единицу времени (техническая частота)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (9)$$

1.4. Вынужденные колебания линейной системы без трения

В качестве модели системы с одной степенью свободы вновь рассмотрим тело массой m , удерживаемое упругой связью с жесткостью c (рис. 1.10). На тело действует переменная внешняя сила $P(t)$.

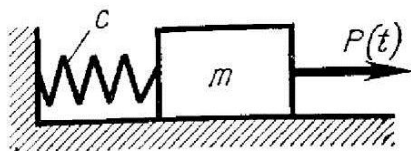


Рис. 1.10

В этом случае уравнение движения груза имеет вид

$$m \ddot{x} + c x = P(t),$$

или после деления на m

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{m}. \quad (1)$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1) равно сумме какого-либо частного его решения x_* и общего решения однородного уравнения:

$$x = x_* + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (2)$$

1.4.1. Импульсивная нагрузка

Для вычисления частного решения при произвольной нагрузке рассмотрим сначала воздействие на заданную систему импульсивной нагрузки. Пусть на неподвижную и

недеформированную систему ($x_0 = 0$) в течение бесконечно малого времени $-\theta < t < 0$ действует бесконечно большая сила, так что импульс силы

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{-\theta}^0 P dt = J$$

имеет конечное значение. В соответствии с теоремой импульсов (законом сохранения количества движения) тело получает за время действия импульса скорость $v = J/m$. Смещение груза за время действия импульса при $\theta \rightarrow 0$ также стремится к нулю. Таким образом, по окончании действия импульса при $t = 0$ тело имеет нулевое смещение и скорость v .

Далее (при $t > 0$) система совершает свободные колебания в соответствии с формулой

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$$

Начальные условия свободного движения определяются равенствами

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v = \frac{J}{m},$$

и, следовательно, закон движения определяется зависимостью

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{J}{m\omega} \sin \omega t = J \cdot Y(t) \quad (3)$$

Здесь введено специальное обозначение для закона движения системы под действием единичного импульса

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega t. \quad (4)$$

Функцию $Y(t)$ называют реакцией системы на единичный импульс.

1.4.2. Произвольная нагрузка

Пусть к системе, изображенной на рис. 1.11, приложена сила $P(t)$, меняющаяся по произвольному закону. Найдем частное решение уравнения движения, предполагая, что в начальный момент $t = 0$ система неподвижна и не деформирована.

Поскольку рассматриваемая система является линейной, для нее справедлив принцип суперпозиции. Это означает, что перемещение (в функции времени), вызываемое несколькими нагрузками, равно сумме перемещений, вызываемых каждой из нагрузок.

Поэтому произвольную нагрузку представим в виде суммы следующих один за другим бесконечно малых импульсов, действующих за бесконечно малый промежуток времени от τ до $\tau + d\tau$ (рис. 1.11)

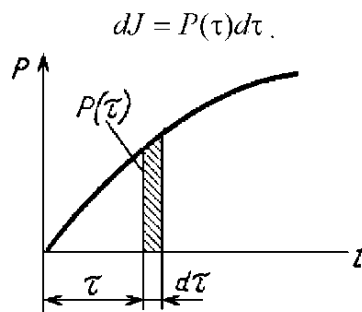


Рис. 1.11

Каждый из таких импульсов вызывает в момент $t > \tau$ смещение

$$dx_* = P(\tau)d\tau Y(t - \tau)$$

где $Y(t)$ — реакция системы на единичный импульс.

Полное смещение в момент t равно сумме смещений, вызываемых всеми элементарными импульсами, приложенными при $\tau < t$. Иначе говоря,

$$x_* = \int_0^t P(\tau) Y(t - \tau) d\tau. \quad (5)$$

Выражение (5) называют *интегралом Дюамеля*. Для рассматриваемой системы реакция на единичный импульс должна быть заменена ее значением в соответствии с уравнением (4) и тогда

$$x_* = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau. \quad (6)$$

Следует отметить, что область применения формулы (5), значительно шире, чем формулы (6), справедливой лишь для рассмотренной простейшей одномассовой системы. При выводе формулы (5) использовался только принцип суперпозиции. Поэтому интеграл Дюамеля выражает частное решение для любой линейной системы через ее реакцию на единичный импульс.

Нетрудно проверить подстановкой, что выражение (6) в самом деле представляет собой частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1). При дифференцировании выражения (6) следует учесть, что t является верхним пределом интеграла и, кроме того, входит в подынтегральное выражение в качестве параметра. Поэтому производная $\frac{dx_*}{dt}$ складывается из производной по верхнему пределу и производной по параметру:

$$\begin{aligned} x_* &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau, \\ \frac{dx_*}{dt} &= \frac{1}{m\omega} P(t) \sin(\omega t - \omega t) + \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \cos(\omega t - \omega \tau) d\tau = \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau) \cos(\omega t - \omega \tau) d\tau, \\ \frac{d^2 x_*}{dt^2} &= \frac{1}{m} P(t) \cos(\omega t - \omega t) - \frac{\omega}{m} \int_0^t P(\tau) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau = \frac{P(t)}{m} - \omega^2 x_*. \end{aligned}$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (1) обращает его в тождество.

Так как при $t = 0$ $x_*(0) = 0$, $\dot{x}_*(0) = 0$ (т.е. частное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям), то постоянные C_1 и C_2 в выражении (2) связаны с начальными условиями движения теми же зависимостями, как и при свободных колебаниях. Поэтому при ненулевых начальных условиях перемещение в любой момент времени определяется выражением

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau.$$

В заключение отметим, что путем замены переменной интегрирования на $\tau = t - T$ интеграл Дюамеля (5) может быть представлен также в виде

$$x_*(t) = - \int_t^0 P(t - T) Y(T) dT = \int_0^t P(t - \tau) Y(\tau) d\tau, \quad (7)$$

или после подстановки выражения (4)

$$x_*(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (8)$$

1.4.3. Внезапная нагрузка

Пусть в начальный момент времени к неподвижной и недеформированной системе прикладываются мгновенно возрастающая и в дальнейшем сохраняющая постоянное значение P_0 нагрузка (рис. 1.12 а).

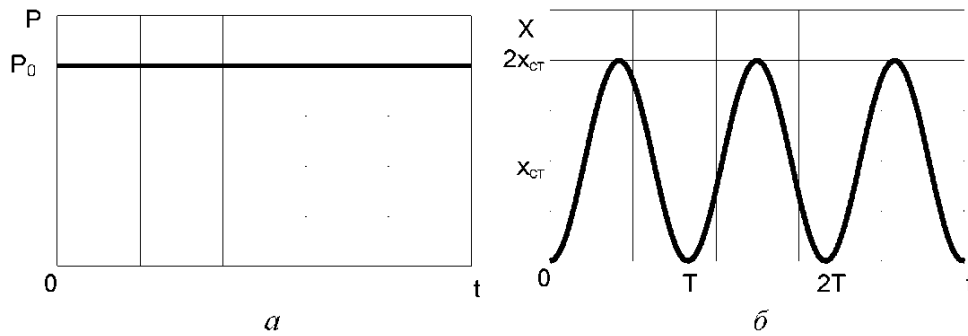


Рис. 1.12

Пользуясь выражением (7) и вынося постоянную силу P_0 за знак интеграла, находим при $t > 0$

$$x_s(t) = P_0 \int_0^t Y(\tau) d\tau = P_0 Y_1(t).$$

Здесь введена функция

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau) d\tau,$$

которую называют реакцией системы на внезапно приложенную единичную нагрузку. Для нашей системы (рис.1)

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{m\omega} d\tau = \frac{1 - \cos \omega t}{m\omega^2}, \quad (9)$$

и, следовательно, перемещение системы под действием внезапно приложенной нагрузки составляет

$$x(t) = \frac{P_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (10)$$

Так как $m\omega^2 = c$ (жесткость упругой связи), то

$$\frac{P_0}{m\omega^2} = x_{ст}$$

представляет собой статическую деформацию упругой связи, и из формулы (10) следует, что максимальное динамическое перемещение при внезапном приложении нагрузки вдвое больше статического, а минимальное равно нулю. График зависимости $x(t)$ приведен на рис. 1.12 б.

1.4.4. Линейно возрастающая нагрузка

Закон изменения нагрузки (рис. 1.13 а) задан формулой $P(t) = kt$.

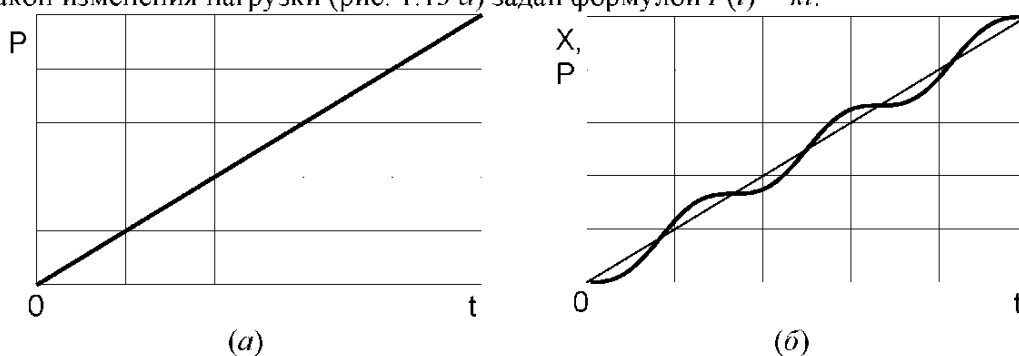


Рис. 4

Если эта нагрузка прикладывается к неподвижной и недеформированной системе, то перемещения определяются формулой

$$x(t) = \int_0^t k \cdot (t - \tau) \cdot Y(\tau) d\tau = k \cdot Y_2(t).$$

Здесь введено обозначение

$$Y_2(t) = \int_0^t (t - \tau) Y(\tau) d\tau$$

для функции, которую называют реакцией системы на линейно возрастающую нагрузку. Выполняя интегрирование по частям, нетрудно установить связь функции $Y_2(t)$ с функцией $Y_1(t)$:

$$Y_2(t) = \int_0^t (t - \tau) Y(\tau) d\tau = \left[(t - \tau) \int_0^\tau Y(\tau_1) d\tau_1 \right]_0^t + \int_0^t \int_0^\tau Y(\tau_1) d\tau_1 d\tau = \int_0^t Y_1(\tau) d\tau \quad (11)$$

Итак, реакции линейной системы на единичный импульс $Y(t)$, на внезапно приложенную $Y_1(t)$ и на линейно возрастающую нагрузку $Y_2(t)$ связаны зависимостями

$$Y_1(t) = \int_0^t Y(\tau) d\tau \quad Y_2(t) = \int_0^t Y_1(\tau) d\tau.$$

В частном случае системы, представленной на рис. 1,

$$Y_2(t) = \int_0^t \frac{1 - \cos \omega \tau}{m\omega^2} d\tau = \frac{1}{m\omega^2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (12)$$

Перемещения, вызываемые силой $P(t) = kt$, определяются при этом выражением

$$x(t) = kY_2(t) = \frac{kt}{m\omega^2} \left(1 - \frac{\sin \omega t}{\omega t} \right) = \frac{P(t)}{c} \left(1 - \frac{\sin \omega t}{\omega t} \right).$$

Здесь первое слагаемое соответствует статическому перемещению, пропорциональному приложенной в данный момент нагрузке, второе слагаемое отражает влияние колебаний. График изменения перемещений показан на рис. 4.

1.4.5. Выражение частного решения через реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку

Наряду с формулами (5) и (7) для интеграла Дюамеля, в которые входит реакция системы на единичный импульс, закон вынужденного движения можно также выразить через функции $Y_1(t)$ или $Y_2(t)$. Произвольную нагрузку $P(t)$ можно представить не только как последовательность импульсов, но и как последовательность внезапно приложенных постоянных нагрузок. В момент времени $t = 0$ прикладывается начальная нагрузка $P(0)$, а в момент τ — бесконечно малая нагрузка

$$dP = \dot{P}(\tau)d\tau,$$

($\dot{P}(\tau)$ — скорость роста нагрузки). Используя реакцию системы на внезапно приложенную нагрузку Y_1 и суммируя эффект всех ранее приложенных нагрузок, получаем в момент времени t

$$x(t) = P(0)Y_1(t) + \int_0^t \dot{P}(\tau)Y_1(t-\tau)d\tau. \quad (13)$$

Формулу (13) можно получить путем интегрирования по частям выражений (5) или (7) с учетом того, что функции Y , Y_1 и Y_2 связаны между собой зависимостями (11).

Приведем простой пример использования функций Y_1 и Y_2 для расчета переходных процессов в линейной системе с одной степенью свободы.

Постоянная сила P_0 воздействует на систему в течение времени $0 < t < t_0$ рис. 5.а).

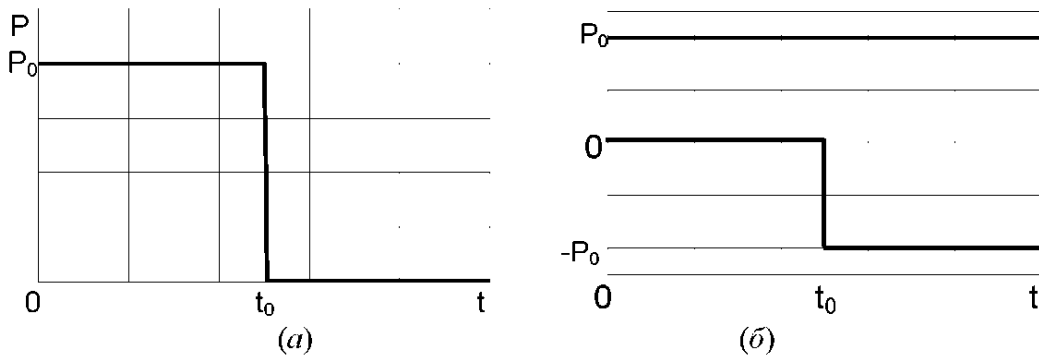


Рис. 5

Закон изменения нагрузки представим как внезапное приложение силы P_0 при $t = 0$ и внезапное приложение отрицательной силы $-P_0$ при $t = t_0$ (рис. 5.б). Первая из этих нагрузок (при $t > 0$) вызовет перемещение

$$x_1 = P_0 Y_1(t)$$

а вторая (при $t > t_0$)

$$x_2 = -P_0 Y_1(t - t_0)$$

где

$$Y_1(t) = \frac{1}{c}(1 - \cos \omega t)$$

— реакция системы на единичную внезапно приложенную постоянную нагрузку.

Таким образом, полное перемещение, вызванное обеими нагрузками, составит: при $0 < t < t_0$

$$x = P_0 Y_1(t) = \frac{P_0}{c}(1 - \cos \omega t)$$

при $t > t_0$

$$x = P_0 Y_1(t) - P_0 Y_1(t - t_0) = \frac{P_0}{c}(\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t) = \frac{2P_0}{c} \sin \frac{\omega t_0}{2} \sin \omega \left(t - \frac{t_0}{2} \right).$$

Из полученных формул видно, что если время приложения нагрузки t_0 превышает половину периода собственных колебаний ($t_0 > \pi/\omega$), то максимум перемещения

$$x_{\max} = \frac{2P_0}{c} = 2x_{cm}$$

достигается еще во время действия нагрузки. Если время действия нагрузки меньше полупериода собственных колебаний, то максимальное перемещение достигается уже после прекращения действия нагрузки. В этом случае

$$x_{\max} = \frac{2P_0}{c} \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2x_{cm} \sin \frac{\omega t_0}{2}$$

и будет меньше, чем в первом случае, поскольку синус всегда не больше единицы.

В приведенном примере можно было получить результат и не пользуясь методом наложения, однако при расчете нестационарных процессов в более сложных линейных системах этот метод обладает значительными преимуществами.

1.4.6. Гармоническое возбуждение

Поведение линейной системы без трения при гармонической возмущающей силе

$$P(t) = P_0 \cos \theta t,$$

где θ — угловая частота изменения нагрузки, описывается уравнением движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \cos \theta t. \quad (1)$$

Решение этого уравнения можно получить, вычислив интеграл Дюамеля при $P(\tau) = P_0 \cos \theta \tau$. Полученное в результате выражение представляет собой сумму колебаний с частотами ω и θ . Слагаемые, изменяющиеся с частотой собственных колебаний ω , зависят от начальных условий.

В реальных системах свободные колебания с частотой ω со временем затухают и через некоторое время устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные колебания с частотой возмущения θ . Решение уравнения (1), отвечающее таким стационарным колебаниям, представим в виде

$$x(t) = A \cos \theta t. \quad (2)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем

$$-\theta^2 A \cos \theta t + \omega^2 A \cos \theta t = \frac{P_0}{m} \cos \theta t$$

откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{P_0}{m\omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)} = A_0 \beta \quad (3)$$

где $A_0 = \frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{c}$ — равновесная амплитуда, равная статической деформации упругой

связи амплитудной силой P_0 ; $\beta = \frac{A}{A_0} = \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^{-1}$ — коэффициент усиления колебаний в связи с инерционностью системы (коэффициент динамичности).

Коэффициент динамичности β определяет рост амплитуды вынужденных колебаний и зависит от отношения частоты изменения возмущающей силы к частоте собственных колебаний системы. Эта зависимость графически представлена на рис. 1. Отрицательные значения β означают, что колебания системы происходят в противофазе с возмущающей силой, поэтому практическое значение имеют абсолютные значения этого коэффициента.

При частоте возмущения, равной частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний стремится к бесконечности — имеет место явление резонанса. Это объясняется тем, что если колебания происходят с собственной частотой, то силы упругости уравновешиваются силами инерции при любом значении амплитуды колебаний. Внешняя возмущающая сила оказывается неуравновешенной.

Таким образом, в случае резонанса сделанное допущение о возможности рассматривать стационарные колебания является необоснованным и, чтобы изучить процесс развития колебаний, нужно рассмотреть решение уравнения движения в форме интеграла Дюамеля.

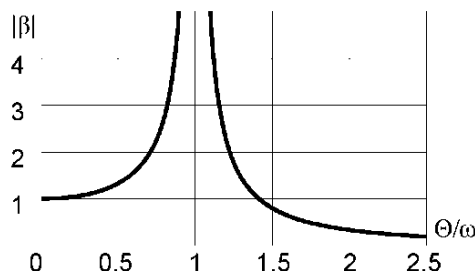


Рис.1

Так как при резонансе $\theta = \omega$ и $P(t) = P_0 \cos \omega t$, получим при нулевых начальных условиях

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \cos \omega \tau \cdot \sin[\omega(t - \tau)] d\tau = \\
 &= \frac{P_0}{m\omega} \left[\sin \omega t \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t \cos \omega \tau \cdot \sin \omega \tau d\tau \right] = \frac{P_0}{2m\omega} t \cdot \sin \omega t
 \end{aligned}$$

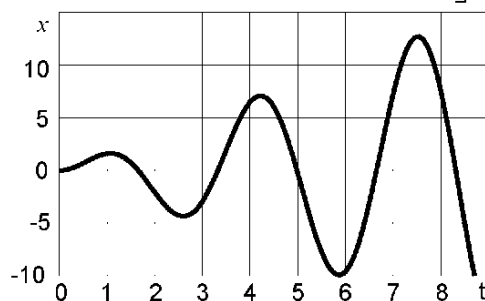


Рис.2

Как видно из полученной формулы, колебания при резонансе не являются гармоническими, а размахи их растут пропорционально времени. График движения показан на рис. 2. Конечно, безграничное нарастание колебаний возможно лишь в рассматриваемой идеализированной линейной системе при отсутствии потерь. В реальных системах наличие потерь и проявление нелинейности при достаточно больших размахах колебаний приводит к ограничению амплитуд. Но и в реальных механических системах коэффициенты динамичности при резонансе оказываются настолько большими, что работа при режимах, близких к резонансному, как правило, недопустима.

1.4.7. Негармоническое периодическое возбуждение

Пусть внешняя сила, действующая на одномассовую систему, изменяется по некоторому произвольному, но периодическому закону (рис. 3) с периодом T .

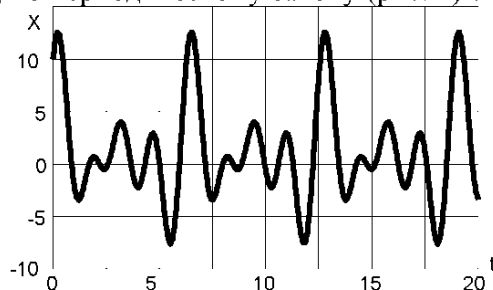


Рис.3

В этом случае вынужденные установившиеся колебания могут быть рассчитаны двумя способами.

1) Наиболее простой метод расчета состоит в том, что периодическая внешняя нагрузка представляется в виде ряда Фурье

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos \theta t + a_2 \cos 2\theta t + \dots + b_1 \sin \theta t + b_2 \sin 2\theta t + \dots \quad (4)$$

где θ — частота, соответствующая периоду T возмущающей силы,

$$\theta = \frac{2\pi}{T}.$$

Коэффициенты разложения определяются по известным формулам из теории рядов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos k\theta t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin k\theta t dt.$$

Смещение груза от действия силы $P(t)$, представленной в виде ряда (4), на основе принципа независимости действия сил равно сумме смещений, вызванных каждым из членов ряда и определяемых по формулам (2) и (3):

$$x = \frac{a_0}{c} + \frac{a_1}{c(1 - \theta^2/\omega^2)} \cos \theta t + \frac{a_2}{c(1 - 4\theta^2/\omega^2)} \cos 2\theta t + \dots + \frac{b_1}{c(1 - \theta^2/\omega^2)} \sin \theta t + \frac{b_2}{c(1 - 4\theta^2/\omega^2)} \sin 2\theta t + \dots \quad (5)$$

Амплитуда колебаний стремится к бесконечности при обращении в нуль знаменателя любого члена ряда, т. е. при $\theta = \omega$, $\theta = \omega/2$, $\theta = \omega/3$ и т. д.

Таким образом, при негармоническом периодическом возбуждений резонанс возникает, когда частота любой k -й гармоники совпадает с собственной частотой колебаний системы:

$$k\theta = \omega, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Не обязательно, конечно, осуществляются все резонансы. В разложении силы $P(t)$ в ряд Фурье некоторые коэффициенты могут оказаться равными нулю, соответствующих гармоник не будет и в выражении для x .

Решение задачи о колебаниях под действием произвольной периодической нагрузки с помощью рядов Фурье целесообразно для выявления условий резонанса.

2) В случае, если нас интересует закон стационарного движения, целесообразен другой путь решения. Предположим, что нагрузка, действующая на систему, меняется по некоторому периодическому закону (рис.3). Выбрав произвольно начало отсчета времени, рассмотрим движение в течение одного периода T возмущающей силы. Общее решение уравнения движения складывается из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т. е. его можно записать в форме:

$$x = x_0 \cos \omega t + \dot{x}_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Смещение x_0 и скорость \dot{x}_0 в начале отсчета времени ($t = 0$) и в конце периода ($t = T$) определяются из условий периодичности движения:

$$x(T) = x(0) = x_0, \quad \dot{x}(T) = \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (6)$$

Подставляя в эти условия выражение для x , получаем:

$$x_0(1 - \cos \omega T) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega T = B_1, \quad (7)$$

$$x_0 \omega \sin \omega T + \dot{x}_0(1 - \cos \omega T) = B_2,$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{m\omega} \int_0^T P(\tau) \sin \omega(T - \tau) d\tau, \\
 B_2 &= \frac{1}{m} \int_0^T P(\tau) \cos \omega(T - \tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Решая систему уравнений (7), определяем x_0 и \dot{x}_0 :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{2} \left[B_1 + \frac{B_2}{\omega} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right], \\
 \dot{x}_0 &= \frac{1}{2} \left[B_2 - B_1 \omega \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Подстановка значений x_0 и \dot{x}_0 в общее выражение для x позволяет определить в замкнутой форме закон движения за период $0 < t < T$.

Как видно из формул (9), x_0 и \dot{x}_0 обращаются в бесконечность при $\sin \left(\frac{\omega T}{2} \right) = 0$ т. е. если $\omega T = 2\pi k$ или $\omega = \frac{2\pi}{T} k = \theta k$.

Таким образом, этот путь решения приводит к тому же условию резонанса, что и разложение возмущающей силы в ряд Фурье.

В качестве примера рассмотрим поведение упругой одномассовой системы при действии периодических импульсов. Установив начало отсчета времени сразу после очередного импульса, так что следующий импульс величиной J воздействует в самом конце рассматриваемого периода при $t = T - \varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) найдем:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m\omega} \int_{T-\varepsilon}^T P(\tau) \sin \omega(T - \tau) d\tau = 0, \\
 B_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m} \int_{T-\varepsilon}^T P(\tau) \cos \omega(T - \tau) d\tau = \frac{J}{m}.
 \end{aligned}$$

По формулам (9) находим смещение и скорость при $t = 0$:

$$x_0 = \frac{J}{2m\omega} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}, \quad \dot{x}_0 = \frac{J}{2m}.$$

Поскольку на протяжении всего периода $0 < t < T - \varepsilon$ возмущающая сила отсутствует, уравнение движения имеет вид (отсутствует слагаемое, соответствующее частному решению неоднородного уравнения)

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{J}{2m\omega} \left[\operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \cos \omega t + \sin \omega t \right], \quad (0 < t < T).$$

Движение в другие периоды времени определяется условиями периодичности.

Характер движения при $T < \frac{\pi}{\omega}$ показан на рис. 4.

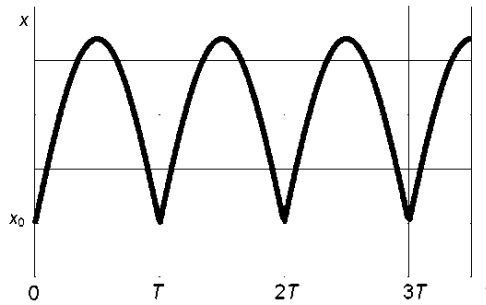


Рис.4

Можно отметить, что на фазовом портрете колебания с возрастающей амплитудой будут изображаться в виде разворачивающейся спирали. Если это соответствует режиму установления от свободных колебаний к стационарным вынужденным, то эта спираль выйдет на новый эллипс. В случае резонанса спираль уходит на бесконечность.

1.5. Затухание свободных колебаний

Рассмотрим свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом трения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + R = 0. \quad (1)$$

Зависимость силы трения R от скорости движения или смещения определяется физической природой трения. Наиболее простым случаем является так называемое вязкое трение.

1.5.1. Линейное вязкое трение

Рассмотрим случай линейного вязкого трения, когда сила трения пропорциональна скорости движения: $R = \alpha \dot{x}$. Такая сила сопротивления возникает, например, в гидравлических амортизаторах, работающих при ламинарном режиме течения жидкости, успокоителях колебаний, основанных на действии токов Фуко, и других технических устройствах. В этом случае уравнение движения можно привести к виду

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

График зависимости суммарной силы от координаты имеет вид

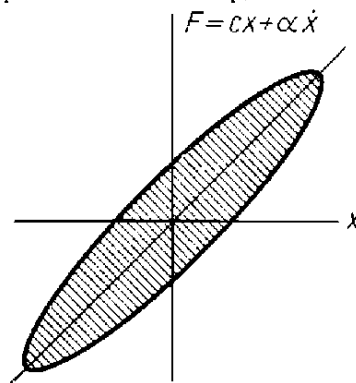


Рис. 1

По правилу решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами ищем решение в виде $x = \exp(s \cdot t)$, составляем характеристическое уравнение

$$s^2 + 2\varepsilon s + \omega^2 = 0.$$

При очень большом трении, когда $\varepsilon^2 > \omega^2$ все корни вещественные и решение соответствует постепенному уменьшению координаты без колебаний. При $\varepsilon^2 < \omega^2$

$$s = -\varepsilon \pm i\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}.$$

Обозначим

$$\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega_1 \quad (3)$$

Тогда решение уравнения (2) будет определяться формулой

$$x = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (4)$$

или

$$x = A e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (5)$$

Следовательно, при наличии вязкого трения движение груза описывается непериодическим законом, представленным графически на рис.2. Однако часто это движение называют периодическими затухающими колебаниями, несмотря на неточность такого названия. Под периодом T_1 этих колебаний понимают время между двумя максимальными смещениями.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}} \quad (6)$$

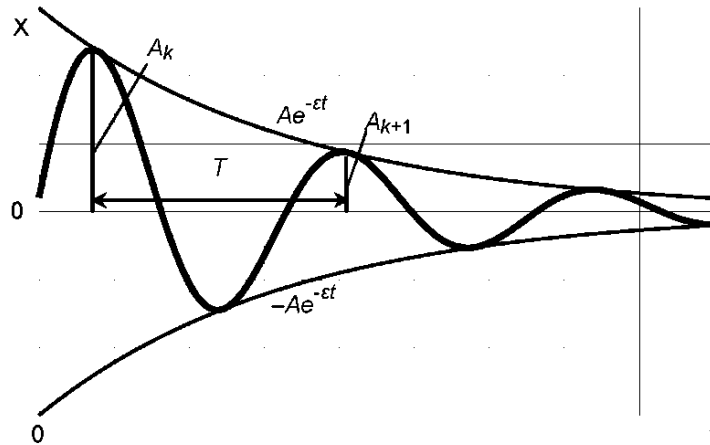


Рис.2

Величину ω_1 называют соответственно угловой частотой затухающих колебаний. Отношение двух последовательных максимальных отклонений A_k, A_{k-1} составляет

$$\frac{A_k}{A_{k-1}} = e^{\varepsilon T_1} < 1. \quad (7)$$

Таким образом, последовательные максимальные отклонения системы от равновесного положения представляют собой члены геометрической прогрессии со знаменателем, равным $e^{-\varepsilon T_1}$. Чаще рассматривают не отношение двух последовательных отклонений, а логарифм этого отношения, который называют логарифмическим декрементом колебания:

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \varepsilon T_1 \quad (8)$$

В металлоконструкциях, где нет специально введенных элементов трения, логарифмический декремент составляет обычно от нескольких сотых до десятых долей единицы.

Если колебания затухают медленно и отношение двух последовательных отклонений близко к единице, то введя среднее значение амплитуды $\Delta A = A_k - A_{k+1}$ и ее изменение за период $A = \frac{A_k + A_{k+1}}{2}$ получим

$$\delta = \ln \frac{A_k}{A_{k+1}} = \ln \frac{A + \frac{\Delta A}{2}}{A - \frac{\Delta A}{2}} \approx \frac{\Delta A}{A} \approx 0,001..0,01. \quad (9)$$

Таким образом, при малом затухании логарифмический декремент примерно равен отношению изменения амплитуды колебаний за период T_1 к амплитуде A .

Теперь посмотрим, насколько отличается частота затухающих колебаний от частоты свободных собственных колебаний.

Так как логарифмический декремент колебания

$$\delta = \varepsilon T_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_1} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}},$$

то, возведя обе части в квадрат, получим

$$\varepsilon^2 = \omega^2 \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (10)$$

Подставив это значение ε^2 в формулу (3), установим связь между ω_1 , ω и δ :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi} \right)^2}} \approx \omega \quad (11)$$

Из формулы (11) видно, что даже при значительном затухании частота затухающих колебаний мало отличается от частоты собственных колебаний соответствующей консервативной системы. Так, например, при сравнительно большом затухании, когда каждый следующий размах вдвое меньше предыдущего $A_k = 2A_{k+1}$, частота ω_1 лишь на 0,6% меньше, чем ω . Таким образом, можно считать, что трение не влияет на частоту колебаний и $\omega \approx \omega_1$.

Определим постоянные интегрирования в уравнении затухающих колебаний (4). Обозначив смещение и скорость в начальный момент времени $t = 0$ соответственно через x_0 и \dot{x}_0 , найдем

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = -C_1\varepsilon + C_2\omega_1.$$

Итак,

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1}$$

и выражение для смещения, удовлетворяющее начальным условиям имеет вид

$$x = e^{-\varepsilon t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \quad (12)$$

Заметим, что если движение вызвано импульсом силы J , приложенным к неподвижной системе при $t = 0$, то возникает начальная скорость

$$\dot{x}_0 = \frac{J}{m}$$

и смещения изменяются по закону

$$x = \frac{J}{m\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t)$$

Полагая в этой формуле $J = 1$, находим реакцию на единичную импульсную нагрузку системы с трением, пропорциональным скорости:

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t). \quad (13)$$

Отметим, что на фазовом портрете затухающие колебания изображаются в виде сворачивающейся спирали. Подробнее обсудим этот вопрос на примере сухого трения.

1.5.2. Сухое (кулоново) трение

Рассмотрим движение упруго закрепленного груза массой m по шероховатой поверхности (рис.3).

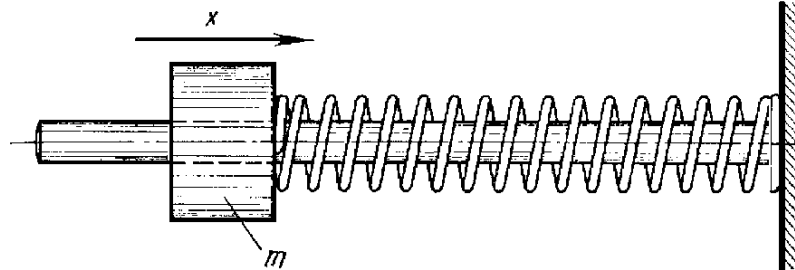


Рис.3

Сила трения, действующая на груз, постоянна по величине и направлена против движения. Уравнение свободных колебаний такой системы имеет вид

$$m\ddot{x} + cx \pm R_0 = 0 \quad (14)$$

где знак плюс соответствует этапу движения, на котором скорость положительна, а знак минус — этапу движения, на котором скорость отрицательна. Зависимость от x полной действующей на груз силы $F - cx \pm R_0$ показана на рис.4.

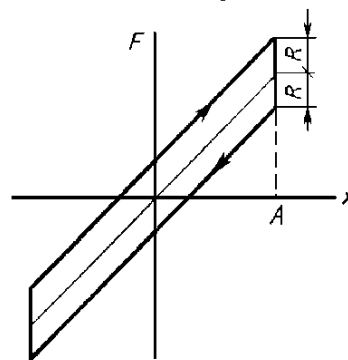


Рис.4

Запишем уравнение (14) в форме

$$m\ddot{x} + cx + R_0 \operatorname{sgn} \dot{x} = 0 \quad (15)$$

Функция $\operatorname{sgn} x$ есть единичная функция, имеющая знак аргумента. При $x > 0$ $\operatorname{sgn} x = 1$, при $x < 0$ $\operatorname{sgn} x = -1$, при $x = 0$ $\operatorname{sgn} x = 0$.

Уравнение (15) содержит нелинейное слагаемое. Тем не менее мы легко найдем решение этого уравнения, рассмотрев последовательные интервалы движения, на каждом из которых знак скорости постоянен. Этот метод решения нелинейных задач, когда есть кусочно-линейная зависимость и на каждом участке движения точно решается соответствующее линейное дифференциальное уравнение, называется способом (методом) поэтапного интегрирования или принасовывания.

Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A и отпустим его без начальной скорости. В этом случае

$$x_0 = A, \quad \dot{x}_0 = 0. \quad (16)$$

Под действием натяжения пружины на первом этапе груз движется влево $\dot{x} < 0$ и уравнение движения будет

$$m\ddot{x} + cx - R_0 = 0,$$

или с учетом обозначений

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \text{ и } a = \frac{R_0}{c}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a. \quad (17)$$

Коэффициент a представляет собой максимально возможное отклонение груза, уравновешенное силой трения, т.е. когда сила трения равно упругой силе. При отклонении груза на величину, меньшую или равную a , движение не начнется, так как силы упругости пружины недостаточно для преодоления силы трения (полоса $-a < x < a$ называется зоной застоя). Поэтому уравнение (17) имеет место при $x > a$. Общее решение уравнения (17) имеет вид

$$x = a + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Определяя постоянные из начальных условий (16), получаем

$$x = a + (A - a) \cos \omega t \quad (18)$$

Закон движения (18) справедлив, пока $\dot{x} < 0$, Так как

$$\dot{x} = -\omega(A - a) \sin \omega t,$$

то скорость движения будет отрицательной до момента времени t_1 определяемого из условия

$$\omega t_1 = \pi.$$

В этот момент груз остановится. Смещение его

$$x = a + (A - a) \cos \pi = -(A - 2a).$$

Под влиянием трения отклонение груза уменьшилось по абсолютной величине на $2a$.

После остановки груз начнет двигаться вправо. Повторяя приведенные выше расчеты, можно показать, что движение слева направо также продолжается в течение времени π/ω . Максимальное отклонение вправо равно $A - 4a$. Процесс движения продолжается до тех пор, пока груз не остановится в зоне застоя. Зависимость смещения от времени на каждом этапе движения представляет собой косинусоиду, смещенную по оси x на величину $+a$ или $-a$, с амплитудой, уменьшающейся по закону арифметической прогрессии. Время между двумя соседними максимумами отклонения, которое условно можно назвать периодом движения, $T = 2\pi/\omega$ и он совпадает с периодом собственных колебаний как и частота. Наличие сухого трения не меняет частоту и период колебаний.

Фазовый портрет свободных колебаний системы с сухим трением представлен на рис. 5. В координатах $x, \dot{x}/\omega$ гармонический закон движения изображается дугами окружности. Если в уравнение (17) ввести новую переменную $(x - a)$, то получится уравнение гармонических колебаний без трения. Это движение на фазовой плоскости изображается полуокружностью радиусом $(A - a)$ с центром в точке $(x = a)$. На втором этапе движения, когда $x > 0$, уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 a$$

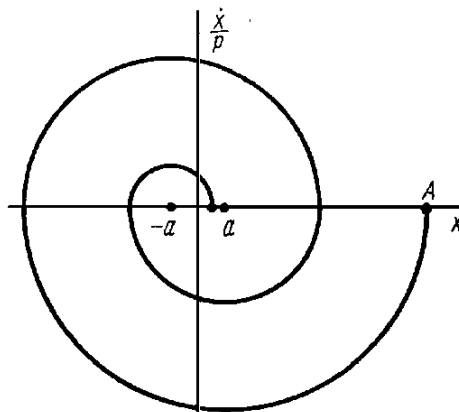


Рис.5

может рассматриваться как уравнение гармонических колебаний со смещением $(x + a)$. На фазовой плоскости на втором этапе движения получаем полуокружность с центром в точке $(x - a)$. И так до тех пор, пока кривая при $x = 0$ не попадет в зону застоя $-a < x < a$.

Особая точка, которая является асимптотической точкой всех фазовых траекторий, имеющих вид спиралей, вложенных друг в друга, называется фокусом. Если спирали сходятся, то это — устойчивый фокус. Такие фазовые портреты характерны для диссипативных систем. Для вынужденных колебаний спирали могут расходиться, тогда мы имеем неустойчивый фокус.

1.5.3. Сила трения, пропорциональная смещению (позиционное трение)

Рассмотрим систему, состоящую из груза массой m , закрепленного на рессоре, листы которой собраны без предварительного натяга (рис.6).

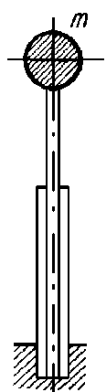


Рис.6

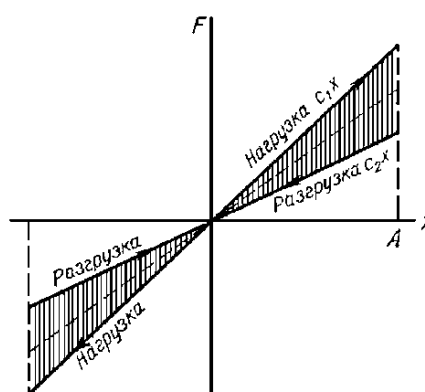


Рис.7

Сила трения листов рессоры друг о друга пропорциональна контактному давлению, которое в свою очередь пропорционально смещению. Зависимость между реакцией рессоры, действующей на груз, и смещением груза для рассматриваемой системы представлена на рис. 7.

Обозначим c_1 — жесткость системы при увеличении смещения x по модулю; c_2 — жесткость при уменьшении абсолютного значения смещения; $c_0 = 0,5(c_1 + c_2)$ — жесткость упругого элемента системы при отсутствии трения. На каждой четверти периода характеристика системы прямолинейна, поэтому движение массы описывается синусоидой. При переходе через равновесное положение меняется частота собственных колебаний от $\omega_2 = \sqrt{c_2/m}$ до $\omega_1 = \sqrt{c_1/m}$.

Далее проведем такой же анализ, как и для сухого трения. Отклоним груз в крайнее правое положение на величину A ; скорость движения его в этот момент $\dot{x}_0 = 0$. Если груз отпустить, то он начнет двигаться влево под действием силы упругости, уменьшенной на величину сил трения. Частота собственных колебаний груза будет ω_2 , а время движения до равновесного положения $\frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2\omega_2}$.

При переходе груза в равновесное положение скорость его станет $\omega_2 A$. Дальнейшее движение влево определяется жесткостью c_1 . Крайнего левого положения груз достигает через время $\frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2\omega_1}$. Наибольшее смещение влево равно $A \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Продолжая рассуждения, находим, что максимальное отклонение вправо в конце полного периода движения вычисляется по формуле $A \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ и,

следовательно, логарифмический декремент $\delta = \ln \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \ln \frac{c_1}{c_2}$.

При малом затухании, когда разность жесткостей $c_1 - c_2$ существенно меньше средней жесткости c_0 , получим

$$\delta = \ln \frac{c_1}{c_2} \ln \frac{c_0 + \frac{c_1 - c_2}{2}}{c_0 - \frac{c_1 - c_2}{2}} \approx \frac{c_1 - c_2}{2} \cdot \frac{\delta}{c_0} \quad (1)$$

Характер движения показан на рис. 8.

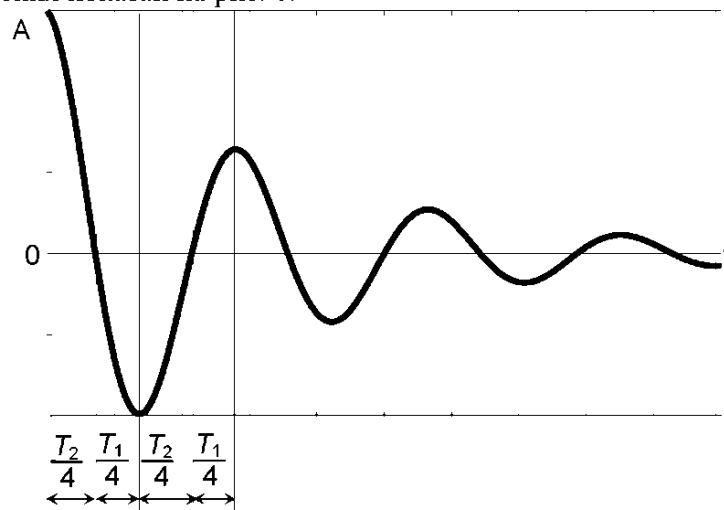


Рис.8

Как видно из полученных формул, при силе трения, пропорциональной смещению, декремент колебания постоянен и, следовательно, точно так же, как и при вязком трении, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2T_2}{4} + \frac{2T_1}{4} = \pi \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Соответствующая этому периоду угловая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}}.$$

Заметим, что

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 + \frac{c_1 - c_2}{2c_0} \right)} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\delta}{2}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{c_1 - c_2}{2c_0} \right)} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}},$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m}}$ — собственная частота консервативной системы. Тогда

$$\omega = 2\omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{\delta}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\delta}{2}}}$$

При небольших декрементах это выражение отличается от ω_0 на величину второго порядка малости. Поэтому, подобно вязкому и сухому трению, трение, пропорциональное смещению, практически не влияет на частоту колебаний.

1.5.4. Энергетическая оценка сил сопротивления

Рассмотрим один k -й период затухающих свободных колебаний системы. В начале периода отклонение максимально и равно A_k , в конце — также максимально и равно A_{k+1} . Поскольку в рассматриваемых положениях скорость равна нулю, вся энергия системы представляет собой энергию деформации упругой связи:

$$U_k = \frac{1}{2}cA_k^2, \quad U_{k+1} = \frac{1}{2}cA_{k+1}^2.$$

Таким образом, за период рассеивается энергия

$$W = \Delta U = \frac{1}{2}c(A_k^2 - A_{k+1}^2). \quad (1)$$

Если затухание не очень велико, то движение в течение одного периода мало отличается от гармонического колебания со средней амплитудой $A = \frac{1}{2}(A_k + A_{k+1})$, которому соответствует средняя энергия $U = \frac{1}{2}cA^2$.

Преобразуя формулу (1), находим

$$W = \Delta U = \frac{1}{2}c(A_k - A_{k+1})(A_k + A_{k+1}) = cA\Delta A = 2U \frac{\Delta A}{A}, \quad (2)$$

где $\Delta A = A_k - A_{k+1}$ — уменьшение амплитуды колебаний за один период.

Уменьшение энергии ΔU , с другой стороны, может быть с высокой точностью подсчитано как работа сил сопротивления за один период стационарного колебания с амплитудой A . Графически эта работа изображается площадью заштрихованной гистерезисной петли в зависимости суммарной силы от координаты. Аналитически она вычисляется как соответствующий этой площади интеграл. Так, силой вязкого трения при колебании по гармоническому закону $x = A \cos \theta t$ за период колебания совершается работа

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R \dot{x} dt = \alpha \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \dot{x}^2 dt = \alpha A^2 \theta^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} \sin^2 \theta t dt = \pi \alpha A^2 \theta.$$

Отношение энергии, рассеиваемой за один период гармонического колебания, к максимальной упругой энергии называется коэффициентом поглощения или относительным гистерезисом и обозначается

$$\Psi(A, \omega) = \frac{\Delta U}{U} = \frac{2\Delta A}{A} = 2\delta. \quad (3)$$

В зависимости от природы сил трения величина Ψ может тем или иным способом зависеть от амплитуды и частоты колебаний. Например, для рассмотренного движения с частотой θ при линейном вязком трении получим

$$\Psi(A, \theta) = \frac{2\pi \alpha A^2 \theta}{cA^2} = \frac{2\pi \alpha \theta}{c} = \frac{4\pi \varepsilon \theta}{\omega^2}. \quad (4)$$

Если мы рассматриваем затухание свободных колебаний, то Ψ должно подсчитываться при частоте θ , равной частоте собственных колебаний ω . С введением значения Ψ формула (2) приобретает вид

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{2} \Psi_{\theta=\omega} \quad (5)$$

Левая часть равенства (5) приблизительно равна логарифмическому декременту колебания, поэтому имеется простая связь между δ и коэффициентом поглощения

$$\delta \approx \frac{1}{2} \Psi_{\theta=\omega} \quad (6)$$

Если коэффициент поглощения Ψ не зависит от амплитуды, то логарифмический декремент колебания постоянен, а значит, последовательные амплитуды составляют геометрическую прогрессию. В этом случае уравнение огибающей $A(t)$ имеет вид экспоненциальной функции как для вязкого трения.

Таким образом можно сделать следующий вывод: главной характеристикой трения при колебаниях является коэффициент поглощения, форма же петли гистерезиса второстепенна.

1.5.5. Потери на внутреннее трение в материалах и конструкциях

Для пластичных материалов даже при напряжениях ниже предела текучести в некоторых малых областях материала происходят небольшие пластические деформации. Поэтому зависимости между напряжением и деформацией при его нагрузке и разгрузке несколько отличаются друг от друга. При заметных пластических деформациях известен так называемый эффект Баушингера, когда при циклическом нагружении в σ - ϵ диаграмме образуется петля гистерезиса. Аналогично и при упругой циклической деформации в координатах σ - ϵ (или τ - γ при деформации сдвига) точка, изображающая напряженное и деформированное состояние, описывает замкнутую кривую — петлю гистерезиса. Таким образом, картина похожа на колебания в системе с трением. Поэтому говорят о внутреннем трении в материалах.

Для металлов при напряжениях, меньших предела пропорциональности, ширина петли гистерезиса столь мала, что непосредственное ее наблюдение большей частью невозможно. Однако энергетическая оценка внутреннего трения — относительный гистерезис — может быть определена из опытов по затуханию свободных колебаний или другими динамическими методами.

Многочисленные исследования внутреннего трения свидетельствуют о том, что в металлах коэффициент поглощения Ψ не зависит от частоты колебаний, но зависит от амплитуды изменений напряжений.

Зависимости $\Psi(\sigma)$, полученные при однородном напряженном состоянии (т. е. при постоянных по всему объему детали напряжениях), могут быть пересчитаны и для деталей, напряженное состояние которых неоднородно. Для этого определяют поглощение энергии W за цикл деформации во всем объеме V детали:

$$\Delta U = W = \int_V \Psi(\sigma) \frac{\sigma^2}{2E} dV,$$

где σ — величина напряжения в данной точке детали.

Коэффициент поглощения для детали в целом определяется как отношение W к максимальной упругой энергии:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV.$$

Приведенные выше формулы записаны для одноосного напряженного состояния. Не представляет труда написать аналогичные формулы для чистого сдвига, а также обобщить их на случай сложного напряженного состояния.

Следует отметить, что для металлических конструкций расчеты внутреннего трения в материале имеют небольшое значение, так как это трение мало и обычно во много раз перекрывается потерями на трение в сочленениях деталей — так называемым конструкционным гистерезисом.

Даже в специальных установках для изучения внутреннего трения трудно исключить конструкционный гистерезис так, чтобы он не влиял на результаты опытов. В этом одна из причин больших расхождений в величинах $\Psi(\sigma)$, полученных для одинаковых материалов различными экспериментаторами.

Значительно большее значение, чем для металлов, внутреннее трение имеет для высокомолекулярных материалов — разного рода пластмасс и резины. Для этих материалов Ψ мало зависит от амплитуды напряжений, но существенно зависит от температуры и в некоторых диапазонах — от частоты колебаний.

Величина Ψ для полимеров много больше, чем для металлов. Так, например, для наполненных резин имеет порядок 0,1...1,0, что приблизительно в 100 раз превышает значения Ψ , характерные для сталей. Приведем ориентировочные значения коэффициентов поглощения различных материалов при амплитуде деформации сдвига $\gamma = 0,001$:

Сталь различных марок	0,01...0,02
Чугун серый	0,23
Медь	0,33
Латунь	0,01
Никель	0,03
Пробка	0,04
Дерево	0,07...0,14
Бетон	0,26
Железобетон	0,25

Многие решенные теоретически задачи конструкционного демпфирования относятся к сильно схематизированным системам. Результаты решения этих задач позволяют выяснить принципиальные особенности явления (зависимость Ψ от амплитуды и других факторов). Однако рассчитать теоретически потери на гистерезис в реальных конструкциях, как правило, не удастся. В этих случаях пользуются статистическими данными о коэффициенте поглощения.

Приведем ориентировочные данные о коэффициенте поглощения в строительных конструкциях из различных материалов:

Стальные конструкции	0,16...0,18
Деревянные конструкции	0,30...0,35
Железобетонные конструкции	0,5
Кирпичная кладка	0,25

Эти цифры включают как потери на внутреннее трение в материале, так и потери на конструкционный гистерезис. Сравнение этих цифр с приведенными выше данными для потерь на внутреннее трение показывает, что для стальных конструкций основную роль играет конструкционный гистерезис, тогда как для деревянных и железобетонных конструкций роль внутреннего трения в материале и потерь в соединениях примерно одинакова.

1.6. Вынужденные колебания систем при линейном вязком трении

1.6.1. Возмущающая сила, изменяющаяся по произвольному закону

Зная реакцию системы на единичный импульс

$$Y(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_1 t),$$

можно, используя метод наложения (суперпозиции), написать выражение для перемещений первоначально неподвижной системы при воздействии на нее произвольной силы $P(t)$:

$$x_* = \int_0^t P(\tau) Y(t-\tau) d\tau.$$

Эта формула отличается от формулы для системы без трения только видом функции $Y(t)$. Подставив значение этой функции из формулы, получим

$$x_* = \frac{e^{-\varepsilon t}}{m\omega_1} \int_0^t P(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

Формула (1) соответствует нулевым начальным условиям. Если надо учесть условия, отличные от нулевых, то к выражению (1) следует добавить свободные затухающие колебания в соответствии с формулой

$$x = e^{-\varepsilon t} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{\dot{x}_0 + \varepsilon x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

В качестве примера рассмотрим воздействие на систему с вязким трением и нулевыми начальными условиями внезапной нагрузки

$$P(t) = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ P_0, & (t \geq 0) \end{cases}.$$

В этом случае

$$x = \frac{P_0}{m\omega_1} e^{-\varepsilon t} \int_0^t e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau.$$

Интеграл удобно вычислить, перейдя к показательной форме записи тригонометрической функции:

$$\begin{aligned} x &= \frac{P_0}{m\omega_1} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{1}{2i} \left[e^{i\omega_1(t-\tau)} - e^{-i\omega_1(t-\tau)} \right] d\tau = \frac{P_0}{2m\omega_1 i} \left[\frac{1}{\varepsilon - i\omega_1} e^{-(\varepsilon - i\omega_1)(t-\tau)} - \frac{1}{\varepsilon + i\omega_1} e^{-(\varepsilon + i\omega_1)(t-\tau)} \right]_0^t = \\ &= \frac{P_0}{m\omega_1(\varepsilon^2 + \omega_1^2)} \left[\omega_1 - e^{-\varepsilon t} (\omega_1 \cos \omega_1 t + \varepsilon \sin \omega_1 t) \right] \end{aligned}$$

Учитывая, что $m(\varepsilon^2 + \omega_1^2) = m\omega^2 = c$, а $P_0/c = x_{cm}$ представляет собой статическую деформацию системы силой P_0 , получаем

$$\frac{x}{x_{cm}} = 1 - e^{-\varepsilon t} \left[\cos \omega_1 t + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right].$$

На рис.1 показано изменение x/x_{cm} при различных значениях затухания в системе, характеризуемого величиной коэффициента ε/ω .

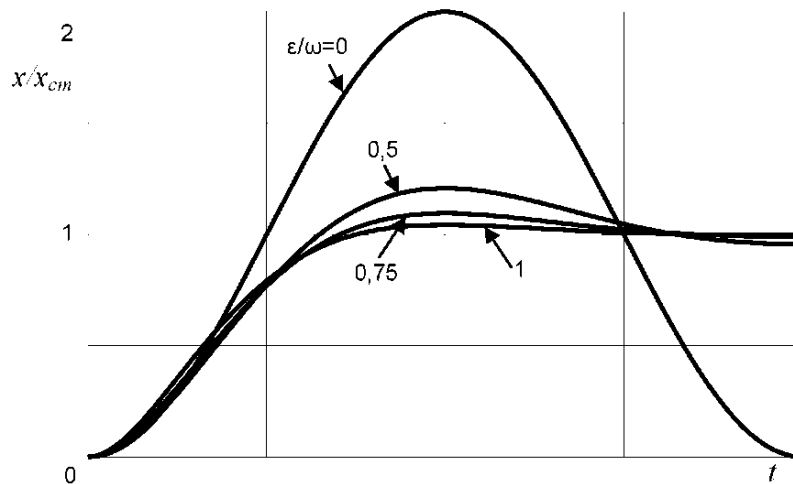


Рис.1

Рассмотренная задача имеет большое значение в теории регистрирующих приборов с инерционными элементами (шлейфовые осциллографы, индикаторы и т. п.). Пользуясь графиком на рис.1, можно установить, что необходимое для таких приборов демпфирование соответствует $\varepsilon/\omega = 0,75$. При меньших значениях демпфирования максимальное показание прибора значительно превышает значение измеряемой величины (при скачкообразном ее изменении); большее демпфирование приводит к замедленному установлению показаний прибора.

1.6.2. Гармоническое возбуждение. Метод комплексных амплитуд

Пусть возмущающая сила $P(t)$ меняется по закону $P(t) = P_0 \cos \theta t$.

В этом случае дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = \frac{P_0}{m} \cos \theta t \quad (2)$$

Как и в случае консервативной системы, найдем частное решение уравнения (2), описывающее стационарное периодическое движение с периодом возмущающей силы. Движение, зависящее от начальных условий, со временем затухает и не представляет практического интереса. Для отыскания частного решения используем метод комплексных амплитуд: введем в рассмотрение комплексную величину x_* , действительная часть которой совпадает с выражением для смещения

$$\operatorname{Re} x_* = x.$$

Зависимость возмущающей силы от времени также представим в комплексной форме

$$P_*(t) = P_0 e^{i\theta t},$$

так что

$$P(t) = \operatorname{Re} P_*(t) = P_0 \cos \theta t.$$

Действительная часть решения уравнения

$$\ddot{x}_* + 2\varepsilon\dot{x}_* + \omega^2 x_* = \frac{P_0 e^{i\theta t}}{m} \quad (3)$$

совпадает с решением уравнения (2), так как коэффициенты уравнения являются действительными величинами. Искомое решение запишем в виде

$$x_* = A_* e^{i\theta t}. \quad (4)$$

Подставив это выражение в формулу (3), получим

$$m(-\theta^2 + 2\varepsilon i\theta + \omega^2) A_* = P_0,$$

откуда определяется комплексная амплитуда

$$A_* = \frac{P_0}{m(\omega^2 - \theta^2 + i2\varepsilon\theta)},$$

или в показательной форме

$$A_* = Ae^{-i\varphi}, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon\theta}{\omega^2 - \theta^2}. \quad (6)$$

Подставляя значение A_* в формулу (4), находим

$$x_* = Ae^{i(\theta t - \varphi)} = A[\cos(\theta t - \varphi) + i \sin(\theta t - \varphi)].$$

Таким образом, действительное перемещение

$$x = \operatorname{Re} x_* = A \cos(\theta t - \varphi). \quad (7)$$

Следовательно, величины A и φ в формуле (5) представляют собой соответственно амплитуду колебаний и запаздывание по фазе перемещения по отношению к возмущающей силе. Комплексная амплитуда A_* одновременно характеризует как действительную амплитуду, так и фазу колебаний. Поэтому при исследовании колебаний методом комплексных амплитуд обычно не переходят к тригонометрической записи [см. формулу (7)], ограничиваясь равноправной с ней показательной формой (5).

Проанализируем формулу (6) для амплитуды вынужденных колебаний. Отношение A к так называемой равновесной амплитуде

$$A_0 = \frac{P_0}{m\omega^2} = \frac{P_0}{c},$$

называемое, как и в случае вынужденных колебаний без трения, коэффициентом динамичности (или коэффициентом усиления колебаний) β , равно

$$\beta = \frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \frac{\theta^2}{\omega^2}}}. \quad (8)$$

(Заметим, что равновесная амплитуда A_0 представляет собой статическую деформацию, упругой связи под действием максимальной силы P_0 .)

Непосредственное определение коэффициента $\varepsilon = \frac{\alpha}{2m}$, характеризующего силы вязкого трения, затруднительно. Поэтому в формулу (8) целесообразно вместо ε ввести коэффициент поглощения Ψ , используя зависимость (формула (4) подраздела 1.5.4)

$$\Psi = \frac{4\pi\varepsilon\theta}{\omega^2}.$$

Тогда

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\Psi^2}{4\pi^2}}}. \quad (9)$$

Преимуществом формулы (9) является то, что коэффициент динамичности ставится в зависимость от энергетической характеристики трения Ψ , что позволяет использовать эту формулу не только для линейного вязкого трения, но и для других законов трения.

Можно также ввести в формулу для коэффициента динамичности логарифмический декремент δ . Воспользовавшись приближенной зависимостью

$$\delta \approx \frac{1}{2} \Psi(\theta = \omega),$$

получим

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2}}. \quad (10)$$

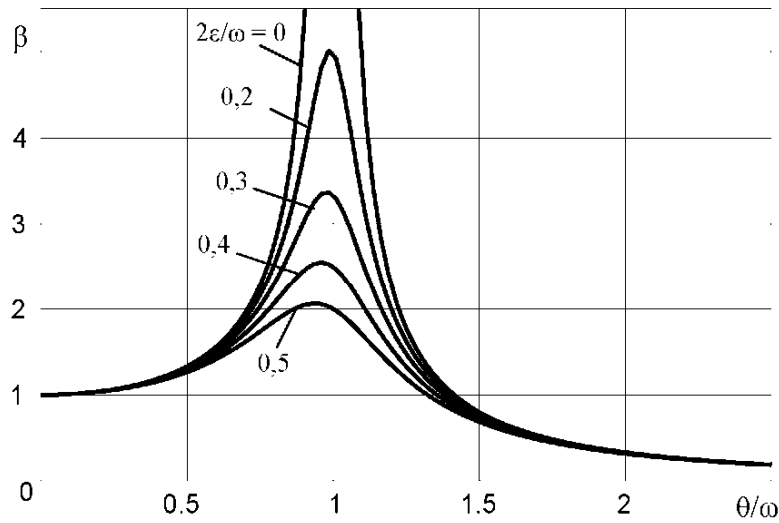


Рис. 2

Из анализа приведенных выше зависимостей следует, что при приближении частоты возмущения θ к частоте собственных колебаний ω коэффициент динамичности возрастает (рис.2). Максимум амплитуды колебаний достигается приблизительно при $\theta/\omega = 1$, при этом

$$\beta_{\max} = \frac{2\pi}{\Psi(\theta = \omega)} = \frac{\omega}{2\varepsilon} \approx \frac{\pi}{\delta}. \quad (11)$$

По аналогии с электрическими системами эта величина называется иногда добротностью механической системы. Чем меньше логарифмический декремент δ , тем больше добротность системы и тем больше амплитуда вынужденных колебаний в области резонанса. Вместе с тем при режимах, далеких от резонанса, затухание мало влияет на величину коэффициента динамичности. Это дает возможность расчет таких режимов вести без учета демпфирования.

Проследим за изменением угла сдвига фазы φ в зависимости от частоты колебаний и величины логарифмического декремента затухания (рис.3).

В системах с небольшим трением угол сдвига существен только в области резонанса. При переходе через резонанс φ изменяется от 0 до π тем быстрее, чем меньше трение. В положении резонанса независимо от величины затухания сдвиг фазы всегда равен $\pi/2$ и энергия, доставляемая системе возмущающей силой, максимальна.

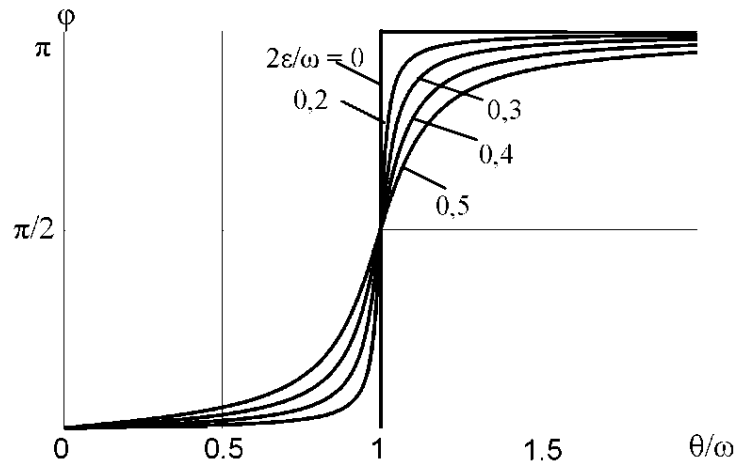


Рис.3.

1.7. Вынужденные колебания систем с трением, отличным от линейного вязкого

1.7.1. Гармоническое возбуждение. Приближенное решение методом гармонического баланса

При трении, не линейно пропорциональном скорости, уравнения движения являются нелинейными и их решение становится затруднительным. При гармоническом возбуждении эффективным является приближенный способ расчета. Уравнение движения при произвольной зависимости силы трения от смещения и скорости может быть записано в виде

$$m\ddot{x} + R(x, \dot{x}) + cx = P_0 \cos(\theta t + \varphi). \quad (1)$$

Приближенное решение этого уравнения представим в виде гармонического колебания, отстающего по фазе от возмущающей силы на угол φ ,

$$x = A \cos \theta t. \quad (2)$$

В данном случае фазовый угол φ включен в выражение возмущающей силы, а не перемещения. Это позволяет несколько упростить выкладки и не влияет на результат, так как существенна лишь разница между фазами силы и перемещения.

Скорость движения определяется формулой

$$\dot{x} = -A\theta \sin \theta t. \quad (3)$$

Очевидно, что сила трения $R(A \cos \theta t, -A\theta \sin \theta t)$ в этом случае также является периодической функцией периода $T = \frac{2\pi}{\theta}$, причем она обращается в нуль при $\cos \omega \theta t = \pm 1$, когда скорость движения также обращается в нуль. Поэтому функцию R можно разложить в ряд Фурье, содержащий только функции \sin :

$$R(x, \dot{x}) = R_1(A, \theta) \sin \theta t + R_2(A, \theta) \sin 2\theta t + \dots, \quad (4)$$

где

$$R_1(A, \theta) = \frac{\theta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R(A \cos \theta t, -A\theta \sin \theta t) \sin \theta t dt, \quad (5)$$

$$R_2(A, \theta) = \frac{\theta}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\theta}} R(A \cos \theta t, -A\theta \sin \theta t) \sin 2\theta t dt.$$

Подставляя выражения (2) и (4) в левую часть дифференциального уравнения (1), получаем

$$(c - m\theta^2)A \cos \theta t + R_1 \sin \theta t + R_2 \sin 2\theta t + \dots = P_0 (\cos \theta t \cos \varphi - \sin \theta t \sin \varphi)$$

Легко видеть, что ни при каком выборе постоянных A и φ левая часть, содержащая гармоники с частотами 2θ , 3θ и последующие, не может в точности совпадать с правой частью уравнения (1), не содержащей таких гармоник. Это и понятно, так как выражение (2) не является точным решением уравнения (1). Поэтому мы вынуждены ограничиться требованием, чтобы совпадали только слагаемые, изменяющиеся с основной частотой θ в левой и правой частях уравнения (1). Этот метод приближенного решения задачи называется методом гармонического баланса.

Таким образом, приходим к двум уравнениям:

$$(c - m\theta^2)A = P_0 \cos \varphi, \quad R_1(A, \theta) = -P_0 \sin \varphi. \quad (6)$$

Уравнения (6) позволяют, зная зависимость $R_1(A, \theta)$, определить амплитуду стационарных колебаний A и фазовый угол φ . Как видно из уравнений (6), в приближенном решении существенна лишь одна основная гармоника R_1 силы трения.

Рассмотрим физический смысл этой гармоники. В формуле (5) учтем зависимость $\dot{x} = -A\theta \sin \theta t$, тогда

$$R_1(A, \theta) = -\frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} R(A \cos \theta t, -A\theta \sin \theta t) \dot{x} dt.$$

Интеграл в этом выражении представляет собой работу W силы сопротивления за цикл (площадь петли гистерезиса). Вводя вновь коэффициент поглощения $\Psi = W/U$ получаем

$$\int_0^{2\pi} R(A \cos \theta t, -A\theta \sin \theta t) \dot{x} dt = \Psi U = \frac{\Psi c A^2}{2}$$

и окончательно

$$R_1(A, \theta) = -\frac{cA\Psi}{2\pi}. \quad (7)$$

Подставив значение R_1 в формулы (6), приведем их к такому виду:

$$A \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right) = A_0 \cos \varphi, \quad \frac{A\Psi}{2\pi} = A_0 \sin \varphi. \quad (8)$$

Здесь дополнительно обозначено: $\frac{P_0}{c} = A_0$ — равновесная амплитуда и $\frac{c}{m} = \omega^2$.

Из уравнений (8) находим амплитуду колебаний:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\Psi^2}{4\pi^2}}} \quad (9)$$

и тангенс фазового угла:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Psi}{2\pi \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \quad (10)$$

Эти формулы, являющиеся приближенными при любом законе трения, совпадают с точными формулами (6) для вязкого трения.

Таким образом, с расчетной точки зрения произвольный закон трения может быть приближенно заменен эквивалентным вязким трением с таким же коэффициентом поглощения.

Следует отметить важное отличие формулы (9) от соответствующей формулы для вязкого трения. Тогда как при вязком трении формула определяет амплитуду колебаний в

явном виде, при невязком трении коэффициент поглощения Ψ также зависит от амплитуды и последняя определяется формулой (9) неявно.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания при сухом трении. В этом случае коэффициент поглощения обратно пропорционален амплитуде и $\Psi = \frac{8a}{A}$, где

$a = \frac{R_0}{c}$ — полуширина зоны застоя. Подставив указанное значение Ψ в формулу (9), найдем

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{4a}{\pi A}\right)^2}}.$$

Отсюда

$$A = \frac{\sqrt{A_0^2 - \left(\frac{4a}{\pi}\right)^2}}{\left|1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}. \quad (11)$$

Полученная формула позволяет сделать следующие выводы:

1. Колебания возникают, только если амплитуда возмущающей силы P_0 достаточно велика по сравнению с силой трения.
2. Если $P_0 > \frac{4}{\pi} R_0$, то наличие сухого трения не ограничивает амплитуду при резонансе и при $\theta \rightarrow \omega$ $A \rightarrow \infty$.

Формула (10) для фазового сдвига после подстановки значения Ψ и амплитуды A принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi P_0}{4R_0}\right)^2 - 1}} \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right),$$

откуда видно, что абсолютная величина фазового угла не зависит от частоты, но при переходе через резонансную частоту знак $\operatorname{tg} \varphi$ меняется. Таким образом, при $\theta < \omega$ перемещение отстает по фазе от возмущающей силы на угол φ , а при $\theta > \omega$ — на угол $\pi - \varphi$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Рассмотрим пример вывода уравнений движения для системы с двумя степенными свободами. В общем случае они получаются нелинейными.

Пример. По жесткой направляющей AB под действием силы $P(t)$, направленной параллельно AB , движется груз массой m (рис.4). Левый конец направляющей закреплен шарнирно, правый оперт на пружину жесткостью c . Момент инерции массы направляющей относительно точки A равен I . Составить уравнение движения системы. Весовыми нагрузками пренебречь, угол φ предполагается малым.

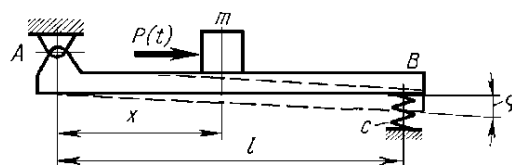


Рис.4

Решение. Положение системы в процессе движения определяется двумя координатами – углом наклона направляющей φ и расстоянием x центра тяжести груза относительно точки A . Составим выражение для кинетической энергии:

$$T = m \frac{\dot{x}^2 + (x\dot{\varphi})^2}{2} + I \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия равна энергии деформации пружины

$$\Pi = c \frac{(\varphi \ell)^2}{2}.$$

Элементарная работа силы $P(t)$

$$\delta A = P(t)\delta x = Q_x \delta x$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; & \frac{\partial T}{\partial x} &= mx\dot{\varphi}^2; & \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0; & Q_x &= P(t); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= (I + mx^2)\dot{\varphi}; & \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0; & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= c\ell^2\varphi; & Q_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа получают такой вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - mx\dot{\varphi}^2 &= P(t), \\ (I + mx^2)\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + c\ell^2\varphi &= 0. \end{aligned}$$

2.1. Свободные (собственные) колебания

2.1.1. Линеаризация уравнения движения для малых колебаний

Если в начальный момент времени положение склерономной системы выбрано достаточно близким к положению устойчивого равновесия и начальные скорости по абсолютной величине достаточно малы, то на протяжении всего движения малыми будут по абсолютной величине как сами отклонения от положения равновесия, так и обобщенные скорости. Это обстоятельство позволяет сохранить в дифференциальных уравнениях движения только линейные члены относительно отклонений и скоростей, а члены более высокого порядка малости отбросить. Тогда дифференциальные уравнения движения становятся линейными, т. е. задача линеаризуется. Рассмотрим линеаризацию уравнений движения для случая консервативной системы в общем виде.

Кинетическая энергия консервативной системы с n степенями свободы выражаются через обобщенные скорости следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Разложим коэффициенты a_{ik} в ряды по степеням координат и ограничимся первыми членами этого разложения (нулевой степени):

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \tag{1}$$

Заметим, что исходя из формул для коэффициентов, a_{ik} они являются симметричными относительно индексов и поэтому кинетическая энергия представляет собой так называемую квадратичную форму. Более того, по физическому смыслу кинетическая энергия не может быть отрицательной, поэтому мы имеем положительно определенную квадратичную форму. Выбором специального преобразования координат такая форма может быть приведена к так называемому каноническому виду

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i^2.$$

Разложим также и потенциальную энергию в ряд по степеням координат:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots$$

В положении равновесия $\Pi_0 = 0$ и, кроме того, обобщенные силы $Q_i = -\partial \Pi / \partial q_i$ равны нулю. Следовательно, два первых члена ряда исчезают. Введя обозначения

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0, \text{ (причем } c_{ik} = c_{ki} \text{)}$$

мы и потенциальную энергию представим в виде

$$\Pi \approx \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k \quad (2)$$

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле, если в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет минимум, то такое равновесие устойчиво. Таким образом, если мы рассмотрим колебания вблизи точки устойчивого равновесия системы, то полученное выражение для потенциальной энергии есть также положительно определенная квадратичная форма. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства, которые называются критерием Сильвестра (Джеймс Джозеф Сильвестр 1814–1897 – английский и американский математик):

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad (3)$$

Применительно к системам с несколькими степенями свободы эти неравенства имеют тот же смысл, как и условие $c = \partial^2 f / \partial x^2 > 0$ для системы с одной степенью свободы. При выполнении неравенств (3) система, выведенная из положения равновесия, совершает свободные колебания.

Подставив выражения (1) и (2) в уравнения Лагранжа второго рода, получим следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4)$$

2.1.2. Главные (нормальные) координаты

Конечно, фактическое составление системы уравнений не обязательно вести по схеме Лагранжа. Во многих задачах о колебаниях удобно пользоваться более непосредственными способами — прямым и обратным.

Прямой способ: из системы выделяются сосредоточенные массы (или твердые тела) и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка (или тело), находящаяся под действием позиционных (восстанавливающих) сил, которые выражаются через выбранные обобщенные координаты; после этого записываются соответствующие дифференциальные уравнения движения для материальных точек (или тел).

Обратный способ противоположен прямому: после отделения сосредоточенных масс (или твердых тел) рассматривается оставшаяся безынерционная система жестких и упругих связей, т. е. «безмассовый скелет» системы, который находится под действием кинетических реакций отделенных частей системы, причем кинетические реакции (силы инерции) выражаются через обобщенные ускорения. Затем формулируются статические соотношения для перемещений безмассового (безынерционного) скелета системы.

Сопоставляя варианты записи по прямому и обратному способам, можно сделать следующее общее заключение относительно структуры дифференциальных уравнений: при составлении системы уравнений по прямому способу

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ и уравнения имеют вид } a_{ii}\ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n c_{ik}q_k = 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

а при составлении по обратному способу

$$c_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ и уравнения имеют вид } \sum_{k=1}^n a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ii}q_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Более того, оказывается, и это принципиально важно, что специальным выбором обобщенных координат можно придать каноническую форму как кинетической, так и потенциальной энергии вместе и одновременно. Такие координаты x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) называются нормальными или главными. При этом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \dot{x}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

и уравнения Лагранжа приобретают наиболее простой вид

$$a_i \ddot{x}_i + c_i x_i = 0 \text{ или } \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0, \text{ где } \omega_i^2 = c_i/a_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4')$$

Каждое из них интегрируется независимо от других. Короче говоря, при использовании главных координат система как бы представляет собой совокупность независимых парциальных (частичных) систем с одной степенью свободы. Анализ колебаний в главных координатах называют методом главных координат.

Чаше всего заранее трудно указать, какие кинематические параметры (или их комбинации) являются главными координатами. Формально можно воспользоваться методами линейной алгебры. Тогда для нахождения главных координат и перехода к ним требуются обширные выкладки, объем которых не уступает объему выкладок при решении задачи в произвольно принятых (не главных) обобщенных координатах. Поэтому введение главных координат практически не облегчает решение задачи о свободных колебаниях, но весьма полезно для углубленного понимания их закономерностей и для теоретического анализа.

2.1.3. Решение системы уравнений движения. Частоты и формы собственных колебаний

Будем искать частное решение уравнений движения (4) в виде $q_k = u_k \sin(\omega t + \varphi)$, т.е. в виде гармонических колебаний с одной и той же частотой ω и с одной и той же начальной фазой φ для всех координат. Подставляя это выражение в дифференциальные уравнения движения (4) получаем после сокращения на $\sin(\omega t + \varphi)$ следующую систему алгебраических уравнений, линейных относительно амплитуд u_k :

$$\sum_{k=1}^n (c_{ik} - \omega^2 a_{ik}) u_k = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

Так как все амплитуды u_k искомого колебания не должны обращаться в нуль, то определитель этой системы однородных уравнений

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \dots & c_{1n} - \omega^2 a_{1n} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & \dots & c_{2n} - \omega^2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - \omega^2 a_{n1} & c_{n2} - \omega^2 a_{n2} & \dots & c_{nn} - \omega^2 a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

должен быть равен нулю. После раскрытия определителя мы получим в левой части многочлен n -й степени относительно $\lambda = \omega^2$: $P_n(\lambda) = 0$. Это уравнение называется уравнением частот, вековым уравнением или характеристическим уравнением.

Число корней уравнения частот равно n ; эти корни принято располагать в порядке возрастания. Можно показать, что из симметричности и положительной определенности матриц коэффициентов кинетической и потенциальной энергий следует, что вековое уравнение имеет только вещественные и положительные корни. То есть мы не имеем мнимых или комплексных частот $\omega_i = \sqrt{\lambda}$. Отрицательные частоты можно не рассматривать, так как соответствующие им частные решения типа $A' \sin(-\omega t)$ попросту сливаются с частными решениями $A \sin(\omega t)$.

Таким образом, для частот ω определяется n значений:

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n,$$

образующих спектр собственных частот системы (частот собственных колебаний).

Каждому из этих значений частот соответствует набор решений уравнений (5) для амплитуд. Совокупность амплитуд, соответствующих определенной собственной частоте, называется формой собственных колебаний (или собственной формой). Очевидно, что собственная форма определяется с точностью до произвольного множителя, одинакового для всех амплитуд при заданной частоте. Это следует из уравнения (5). Собственную форму можно представить в виде графика, в котором по оси абсцисс отложены номера степеней свободы, а по оси ординат — значения амплитуд. В случае таких простых систем как, например, совокупность материальных точек, расположенных на некоторой линии, этот график соответствует реальной форме системы в некоторый момент времени при колебаниях с заданной собственной частотой.

Теперь рассмотрим получение общего решения. Каждому корню ω_i соответствует частное решение типа синусоидального гармонического колебания, следовательно, общее решение представит собой сумму таких решений:

$$q_k = \sum_{i=1}^n u_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad , \quad (k = 1, \dots, n) \quad , \quad (7)$$

где амплитудам теперь приписаны два индекса: первый по-прежнему обозначает помер координаты, а второй — номер собственной частоты. Колебания, из которых складывается произвольное колебание системы (выражения под знаком суммы), называются главными колебаниями системы.

Таким образом, при произвольных начальных условиях изменение каждой из обобщенных координат следует полигармоническому закону, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы. Отметим, что если собственные частоты несоизмеримы (как это нередко бывает в реальных задачах), то процесс, описываемый таким решением, строго говоря, непериодический.

При близости хотя бы двух собственных частот общий закон движения оказывается весьма своеобразным. Например, для системы с двумя степенями свободы можно показать, что, движение носит синусоидальный характер со средней частотой $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ и также периодически, но медленно меняющейся амплитудой. Период изменения амплитуды составляет $T = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ и тем больше, чем ближе частоты друг к другу. Такие колебания называются биениями. График этого движения показан на рис. 1

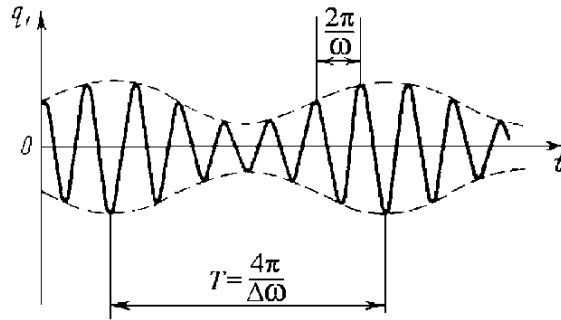


Рис.1.

А если частоты полностью совпадают? Если же уравнение частот имеет кратные корни, то можно утверждать, что решений вида $u_{ki} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ будет во всяком случае m , где m — число различных корней векового уравнения. Лагранж считал, что в случае кратных частот общее решение системы (4) уже не представляется в форме (7) и что в правой части (7) появляются так называемые вековые члены вида

$$(u_{ki} + \dot{u}_{ki}t + \ddot{u}_{ki}t^2 + \dots)\sin(\omega_i t + \varphi_i).$$

Однако Лагранж ошибся. Как доказал позже Вейерштрасс, каждому корню p -ой кратности соответствует ровно p линейно независимых решений системы линейных уравнений (5), т. е. для каждого корня p -ой кратности можно найти p линейно независимых амплитудных векторов. Таким образом, и в случае кратных частот существует n линейно независимых амплитудных векторов и составленная с их помощью формула (7) дает общее решение и в этом случае.

2.1.4. Ортогональность форм собственных колебаний

Собственные формы колебаний обладают свойством ортогональности. Две формы колебаний, соответствующие разным собственными частотами ω_k и ω_l связаны соотношениями ортогональности, которые могут быть записаны в виде

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{ik} u_{jl} = 0, \quad \text{где } k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n \quad (8)$$

или

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} u_{ik} u_{jl} = 0, \quad \text{где } k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Это свойство ортогональности является следствием того, что 1) матрицы a_{ij} и c_{ij} симметричны; 2) формы собственных колебаний u_{ik} удовлетворяют соответствующей системе алгебраических уравнениям для амплитуд; 3) частоты ω_k и ω_l не равны.

2.1.5. Связь форм собственных колебаний и главных координат

Обозначим произвольные обобщенные или реальные физические координаты через q_i , а соответствующие им формы колебаний через u_{ik} (u_{ik} — амплитуда перемещения q_i при k -й частоте собственных колебаний). Движение системы независимо от причин, его вызвавших, описывается формулами

$$q_i = q_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Это же движение можно описать в главных координатах $x_k(t)$. Связь произвольных координат с главными координатами можно получить, рассмотрев решение для произвольных координат (7), которое мы перепишем для новых обозначений

$$q_i = \sum_{k=1}^n u_{ik} \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и решение уравнений движения в главных координатах (4'), которое легко записать

$$x_k = C_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Выразим $\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ в выражениях для главных координат и подставим его в выражение для произвольных координат. Если учесть, что форма колебаний определяется с точностью до произвольного множителя при одной и той же частоте, то получим, что произвольные координаты выражаются через главные координаты $x_k(t)$ и формы колебаний, соответствующие произвольным координатам, следующим преобразованием координат

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) u_{ik}. \quad (11)$$

Можно обратить соотношение (11), выразив главные координаты x_k через физические или другие обобщенные q_j . Используем для этого соотношения ортогональности. Умножим каждое из уравнений (11) на

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{jl}$$

при некоем фиксированном l и просуммируем по i , получим

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{jl} q_i = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{jl} u_{ik} = x_l \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{jl} u_{il}.$$

Поскольку в соответствии с соотношением ортогональности все суммы в правой части полученного равенства, кроме суммы, имеющей множителем x_l , равны нулю. Заменяем для удобства изложения индекс l на k

$$x_k = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{jk} q_i}{M_k} \quad (12)$$

$$M_k = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{jk} u_{ik}.$$

Величину M_k можно назвать обобщенной массой системы при k -й форме собственных колебаний.

2.2. Вынужденные колебания системы без трения

2.2.1. Метод главных координат

При произвольных возмущающих силах существенное упрощение расчета достигается путем введения главных координат, поскольку при этом каждая из главных координат определяется независимым дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \frac{Q_k}{M_k}, \quad (13)$$

где $Q_k = \sum_{i=1}^n P_i u_{ik}$ — обобщенная сила, соответствующая координате x_k . Выражение для

обобщенной силы получается из общей формулы для обобщенных сил $Q_k = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$ и формулы для преобразования от произвольных координат к главным (12).

2.2.2. Гармоническая сила. Резонанс

Рассмотрим случай, когда на систему с n степенями свободы действует одна гармоническая сила, приложенная в направлении перемещения q_j :

$$P(t) = P_0 \cos \theta t.$$

Используем метод главных координат. Обобщенная сила, соответствующая k -й главной координате, составит

$$Q_k = P_0 u_{ik} \cos \theta t.$$

По аналогии с уравнением для одной степени свободы, получим соответствующее стационарное решение уравнения (13):

$$x_k(t) = \frac{P_0 u_{ik}}{M_k (\omega_k^2 - \theta^2)} \cos \theta t.$$

Физическое перемещение в точке приложения возмущающей силы будет равно

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n x_k u_{ik} = P_0 \cos \theta t \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik}^2}{M_k (\omega_k^2 - \theta^2)}.$$

Таким образом, резонанс возникает при совпадении частоты возмущения с любой из собственных частот системы.

2.2.3. Динамическая податливость. Антирезонанс

Для упругой (позиционной или возвращающей) силы $P = cx$ податливость — это величина обратно пропорциональная жесткости $\delta = 1/c$. Т.е. она выражается как отношение перемещения к силе $\delta = x/P$. В случае динамической возмущающей силы отношение перемещения к действующей силе $P_0 \cos \theta t$ называется динамической податливостью системы:

$$D_{ii}(\theta) = \frac{q_i(t)}{P_0 \cos \theta t} = \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik}^2}{M_k (\omega_k^2 - \theta^2)}. \quad (14)$$

Рассмотрим характер зависимости динамической податливости D_{ii} от частоты возбуждения θ . Как видно из формулы (14), функция $D_{ii}(\theta)$ имеет конечное число разрывов при $\theta = \omega_k$, т.е. при частотах собственных колебаний системы. При этом, если $\theta < \omega_k$, $D_{ii} \rightarrow +\infty$; а если $\theta > \omega_k$, $D_{ii} \rightarrow -\infty$. Следовательно, зависимость $D_{ii}(\theta)$ имеет вид, показанный на рис.1, где она приведена для системы с тремя степенями свободы.

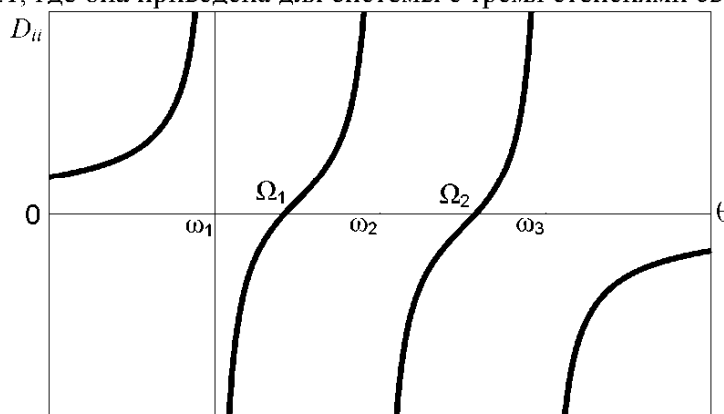


Рис.1

Как видно из графика, имеются частоты Ω_1, Ω_2 , при которых: $D_{ii}(\theta) = 0$ и, следовательно, если в некоторой точке системы приложить возмущающую силу с такой частотой, то эта точка будет неподвижна. Конечно, все другие точки системы при этом колеблются с частотой $\theta = \Omega$. Указанное явление называется антирезонансом, а частоты Ω — антирезонансными. Для системы с n степенями свободы число антирезонансных частот равно $n - 1$.

Поясним физический смысл антирезонанса. Поскольку при антирезонансе точка приложения силы неподвижна (рис.2, а), то можно ее закрепить (рис.2, б).

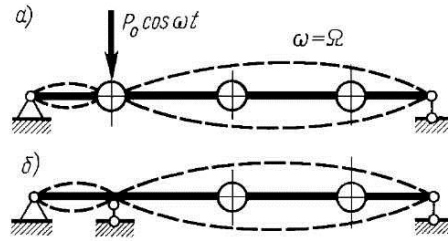


Рис.2

Таким образом, мы обнаруживаем, что антирезонансные колебания — это свободные колебания системы с дополнительным закреплением (в направлении q_i). При этом возмущающая сила $P_0 \cos \theta t$ оказывается равной реакции дополнительного закрепления. Следовательно, и антирезонансные частоты Ω можно определять как частоты собственных колебаний системы с дополнительной связью.

Перемещения других точек системы определяются равенствами

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n x_k u_{jk} = P_0 \cos \theta t \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik} u_{jk}}{M_k (\omega_k^2 - \theta^2)}.$$

Отношение этих перемещений к возмущающей силе

$$D_{ij}(\theta) = \frac{q_j}{P_0 \cos \theta t} = \sum_{k=1}^n \frac{u_{ik} u_{jk}}{M_k (\omega_k^2 - \theta^2)} \quad (15)$$

также называют коэффициентом динамической податливости, но при этом D_{ii} — главный, а D_{ij} — побочный коэффициент.

2.2.4. Динамический гаситель колебаний

Явление антирезонанса используется для гашения колебаний в так называемом динамическом гасителе.

Пусть имеется простейшая система с одной степенью свободы, совершающая вынужденные гармонические колебания с частотой θ . На рис.1 эта система представлена в виде диска с моментом инерции I на упругом валу с жесткостью на кручение c .

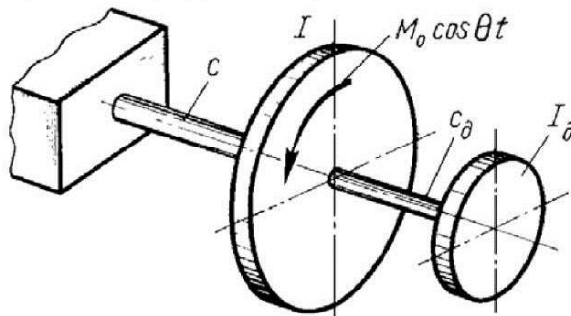


Рис.1

Если дополнительно присоединить к системе гаситель, состоящий из другого диска с моментом инерции I_δ , и дополнительного вала жесткостью c_δ , причем подобрать такие характеристики, чтобы его собственная частота при закрепленном диске I равнялась θ :

$$\omega_\delta = \sqrt{\frac{c_\delta}{I_\delta}} = \theta,$$

то частота θ станет для двухмассовой системы антирезонансной и движение основного диска прекратится.

Амплитуда A_δ колебаний диска гасителя может быть найдена из условия, что крутящий момент на валу гасителя уравнивает возмущающий момент M_0 :

$$A_{\partial} = \frac{M_0}{c_{\partial}}.$$

Проследим поведение системы с динамическим гасителем при изменении частоты возбуждения θ . Если гаситель отключить, то амплитуда A основной системы будет определяться формулой

$$A = A_0 \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}},$$

где

$$A_0 = \frac{M_0}{c}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{I}.$$

Уравнения движения системы при включенном гасителе:

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + cq_1 + c_{\partial}(q_1 - q_2) &= M_0 \cos\theta t, \\ I_{\partial}\ddot{q}_2 - c_{\partial}(q_1 - q_2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Задавая углы поворота основного диска и гасителя в форме

$$q_1 = A \cos\theta t, \quad q_2 = A_{\partial} \cos\theta t,$$

подставляя эти значения в уравнения (1) и решая полученную систему уравнений, находим:

$$A = A_0 \frac{1 - \frac{\theta^2}{\omega_{\partial}^2}}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)}, \quad A_{\partial} = A_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}\right)} \quad (2)$$

Здесь

$$\omega_{\partial} = \sqrt{\frac{c_{\partial}}{I_{\partial}}} \text{ — частота настройки поглотителя:}$$

ω_1, ω_2 — собственные частоты двухмассовой системы,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_0^2 + \omega_{\partial}^2 \left(1 + \frac{I_{\partial}}{I}\right) \pm \sqrt{\omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_{\partial}^2 \left(1 - \frac{I_{\partial}}{I}\right) + \omega_{\partial}^4 \left(1 - \frac{I_{\partial}}{I}\right)^2} \right]$$

На рис.2 показаны кривые зависимости A/A_0 от θ/ω_{∂} , вычисленные при $\omega_{\partial} = \omega_0, I_{\partial} = 0,05I$. На тот же график штриховыми линиями нанесена резонансная кривая для системы без гасителя.

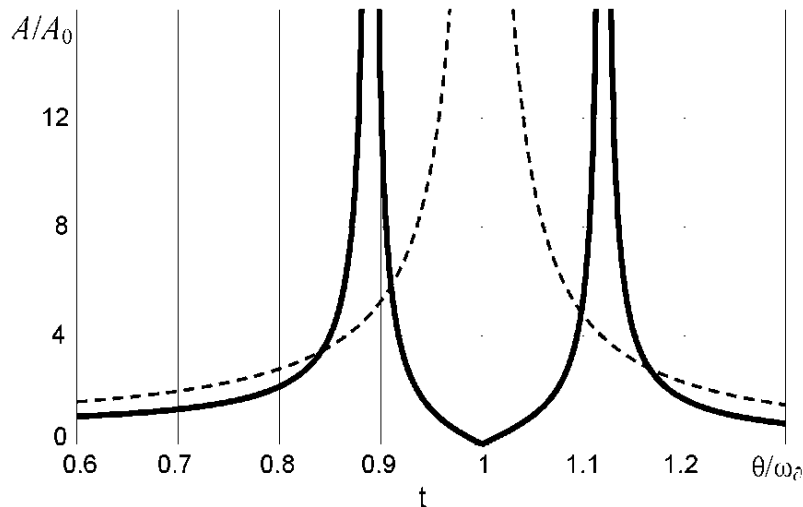


Рис.2

Как и следовало ожидать, благодаря установке гасителя устраняются колебания основной системы при частоте $\theta = \omega_0$. Однако возникают резонансные колебания при $\theta = \omega_1$ и $\theta = \omega_2$.

Таким образом, динамический гаситель колебаний эффективен, только если частота возбуждения является строго постоянной. Устранить резонансные колебания с большими амплитудами при частотах ω_1 и ω_2 оказывается возможным, если ввести в конструкцию динамического гасителя трение.

В двигателях внутреннего сгорания используются также динамические гасители, частота настройки которых меняется автоматически с частотой возбуждения. Устройство этих гасителей основано на том, что собственная частота маятника в поле центробежных сил пропорциональна скорости вращения.

2.2.5. Кинематическое возбуждение колебаний

Возможны случаи, когда заданы не внешние силы, действующие на элементы колебательной системы, а характер их движения. Если колебания системы вызываются не заданными силами, а возникают благодаря приведению в движение по заданному закону одной или нескольких точек системы, то возбуждение называется кинематическим.

Задачу о кинематическом возбуждении можно свести к задаче о силовом возбуждении. Пусть задано перемещение какой-либо j -й точки системы

$$q_j = f(t). \quad (1)$$

При кинематическом возбуждении движение системы может быть разложено на два:

- 1) движение безмассовой системы (т. е. при ее движении не возникают силы инерции);
- 2) вынужденное колебание системы с дополнительным закреплением в точке j , вызванное силами инерции $-m_i \ddot{q}_i^{(1)}$ первого движения.

2.3. Влияние трения на колебания систем с конечным числом степеней свободы

2.3.1. Внешнее и внутреннее вязкое трение. Диссипативная функция Рэлея

Если движение системы мало, то, так же как и для систем с одной степенью свободы, различные по своей физической природе силы трения в большинстве случаев можно без большой погрешности заменять энергетически эквивалентными силами вязкого трения. Поэтому ограничимся рассмотрением вязкого трения.

Силы вязкого трения могут быть пропорциональными либо абсолютным скоростям движения масс (внешнее трение), либо скоростям их относительного перемещения (внутреннее трение). В первом случае на массу m_i действует сила трения $Q_i = -b_i \dot{q}_i$, а во

втором эта сила является суммой влияния от всех других масс $Q_i = -\sum_{k=1}^n b_{ik} (\dot{q}_k - \dot{q}_i)$.

В общем случае при наличии как внешнего, так и внутреннего трения силу вязкого трения, соответствующую координате q_i , можно представить с помощью введенной Рэлеем диссипативной функции с симметричной матрицей коэффициентов

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

Действительно, тогда сила трения выражается формулой

$$Q_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^n b_{ik} \dot{q}_k \quad (1)$$

Запишем уравнения движения системы с учетом сил трения, определяемых выражением (1):

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + b_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = P_i(t), \quad (i=1, \dots, n) \quad (2)$$

В общем случае вязкого трения введение главных координат не приводит к независимым дифференциальным уравнениям относительно каждой из них. Лишь в случае так называемого пропорционального демпфирования главные координаты оказываются не связанными между собой и при наличии трения.

2.3.2. Пропорциональное демпфирование

Важным условием существования главных координат является одновременное приведение двух симметричных матриц масс и жесткостей к диагональному виду. В случае сил трения появляется еще одна матрица коэффициентов — диссипативных. Поэтому логично предположить, что эта матрица будет иметь в главных координатах диагональный вид, если она устроена особым образом, а именно эти коэффициенты пропорциональны коэффициентам других матриц.

При пропорциональном демпфировании в цепной системе коэффициенты внешнего трения пропорциональны соответствующим массам a_{ik} , а коэффициенты внутреннего трения пропорциональны соответствующим жесткостям c_{ik} . В этом случае матрица диссипативных коэффициентов может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$b_{ik} = n_0 a_{ik} + \lambda c_{ik} \quad (3)$$

(n_0 и λ — постоянные коэффициенты пропорциональности).

Если же условие (3) пропорционального демпфирования не выполняется, то все уравнения для q_k оказываются связанными и переход к главным координатам x_i не упрощает задачи.

Итак, при выполнении условия пропорционального демпфирования уравнение движения (2) примут вид

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} [\ddot{q}_k + n_0 \dot{q}_k] + c_{ik} [q_k + \lambda \dot{q}_k]) = P_i(t).$$

Представим физические перемещения в виде разложения по главным координатам:

$$q_k = \sum_{j=1}^n x_j u_{kj}.$$

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \sum_{j=1}^n u_{kj} [\ddot{x}_j + n_0 \dot{x}_j] + c_{ik} \sum_{j=1}^n u_{kj} [x_j + \lambda \dot{x}_j] \right) = P_i(t).$$

Умножим это уравнение слева на $\sum_{i=1}^n u_{il}$ и учтем, что в соответствии с соотношениями ортогональности при $l \neq j$

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{il} u_{kj} = 0, \quad \sum_{i,k=1}^n c_{ik} u_{il} u_{kj} = 0,$$

а при $l = j$

$$M_j = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{kj} u_{ij}, \quad \omega_j^2 M_j = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} u_{kj} u_{ij}.$$

Таким образом в уравнении сохраняются только те слагаемые, для которых $j = l$:

$$M_l [\ddot{x}_l + n_0 \dot{x}_l] + \omega_l^2 M_l [x_l + \lambda \dot{x}_l] = \sum_{i=1}^n u_{il} P_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, n$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^n u_{il} P_i(t) = Q_l$$

— обобщенная сила, соответствующая l -й собственной форме, приведем полученное уравнение к виду

$$\ddot{x}_l + n_l \dot{x}_l + \omega_l^2 x_l = \frac{Q_l}{M_l}, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$n_l = n_0 + \lambda \omega_l^2$$

Следовательно, при пропорциональном демпфировании каждая из главных координат определяется независимым уравнением (4). Это уравнение имеет точно такой же вид, как и уравнение колебаний системы с одной степенью свободы при вязком трении.

Из формулы для коэффициента затухания n_l следует существенное различие между внешним и внутренним пропорциональным трением. При внешнем трении (присутствует только n_0) этот коэффициент для всех главных координат одинаков и, следовательно, колебания всех частот затухают одинаково, а при внутреннем вязком трении (присутствует член $\lambda \omega_k^2$) коэффициент затухания пропорционален квадрату собственной частоты и высокочастотные колебания затухают существенно быстрее, чем низкочастотные.

Следует, однако, отметить, что в большинстве случаев инженер не располагает надежной информацией о распределении сил трения в системе (внутреннее трение в материале, конструкционный гистерезис и пр.). На основе экспериментов удается оценить лишь интегральные эффекты сил трения (например, логарифмический декремент затухания или коэффициент поглощения). В этих условиях любая разумная гипотеза о распределении сил трения является одинаково приемлемой. Естественно поэтому для простоты предположить, что силы трения распределены таким образом, что главные координаты для консервативной системы являются главными и для системы с трением и что при вынужденных колебаниях они определяются уравнениями (4).

Изложенный простой способ учета трения сводит задачу о колебаниях системы с n степенями свободы к n задачам о колебаниях систем с одной степенью свободы при наличии трения. Однако этот метод не всегда применим, если в систему специально введены элементы трения (демпферы колебаний). Большие силы трения, развивающиеся в таких демпферах при режимах, близких к резонансным, могут заметно исказить формы колебаний системы. В этих случаях целесообразно проводить точное решение задачи.

2.3.3. Непропорциональное демпфирование. Метод комплексных амплитуд

Свободные колебания. Латинская буква i нам потребуется для обозначения мнимой единицы. Заменим ее на латинское l . Дифференциальные уравнения колебаний системы с вязким как внешним, так и внутренним трением имеют вид

$$\sum_{k=1}^n (a_{lk} \ddot{q}_k + b_{lk} \dot{q}_k + c_{lk} q_k) = 0 \quad (l = 1, \dots, n) \quad (5)$$

Представим решение системы уравнений (5) в комплексной форме:

$$q_l = \bar{n}_l e^{i\bar{\omega} t} \quad (6)$$

Здесь буква $i = \sqrt{-1}$ означает мнимую единицу, $\bar{n}_l = n_l e^{i\varphi_l}$ — комплексные амплитуды; $\bar{\omega} = \omega + i\eta$ — комплексная частота. Таким образом, принятая форма решения

$$q_l = n_l e^{i\varphi_l} e^{i(\omega + i\eta)t} = n_l e^{-\eta t} e^{i(\omega t + \varphi_l)}$$

соответствует затухающим по экспоненциальному закону колебаниям. Подставив выражение (6) в уравнения (5), получим систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами относительно амплитуд:

$$\sum_{k=1}^n (-a_{lk} \bar{\omega}^2 + i b_{lk} \bar{\omega} + c_{lk}) \bar{n}_k = 0, \quad (l = 1, \dots, n) \quad (7)$$

Приравняв нулю определитель системы (7), получим алгебраическое уравнение степени $2n$ относительно $\bar{\omega}$

$$P_{2n}(\bar{\omega}) = 0$$

$2n$ корней этого уравнения определяют комплексные частоты, состоящие из n пар корней вида $\bar{\omega}_k^+ = \pm\omega_k + i\eta_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$).

Каждому корню соответствует свой набор комплексных амплитуд \bar{u}_{ik} ($k = 1, 2, \dots, n$). В общем случае соотношения между разными амплитудами из этого набора комплексны и, следовательно, при данной частоте $\bar{\omega}_l$ каждая l -тая масса колеблется со своей фазой φ_{lk} . Только при пропорциональном демпфировании отношения $\bar{u}_{ik}/\bar{u}_{jk}$ действительны, а форма колебания с частотой ω_k со временем не меняется. В этом случае она совпадает с формой колебаний консервативной системы.

Вынужденные гармонические колебания. Пусть на упругую систему действуют гармонические возмущающие силы частотой θ . Уравнения движения можно записать в форме уравнения (5)

$$\sum_{k=1}^n (a_{lk}\ddot{q}_k + b_{lk}\dot{q}_k + c_{lk}q_k) = P_l(t) \quad (l = 1, \dots, n) \quad (8)$$

где $P_l(t) = P_l \cos(\theta t + \varphi_l)$ — возмущающая сила, соответствующая перемещению q_l , P_l^0 — амплитуда этой силы, а φ_l — ее фаза. Введение фазовых углов φ_l имеет смысл только в том случае, если имеется разница в фазах сил, приложенных к разным точкам.

Поскольку мы будем использовать метод комплексных амплитуд, запишем возмущающие силы в комплексной форме

$$\bar{P}_l(t) = \bar{P}_l e^{i\theta t} \quad (9)$$

Здесь $\bar{P}_l = P_l e^{i\varphi_l}$.

Перемещения q_l при стационарном режиме также будем искать в виде

$$\bar{q}_l = \bar{u}_l e^{i\theta t} \quad (10)$$

где комплексная амплитуда $\bar{u}_l = u_l e^{i\psi_l}$ определяет как действительную амплитуду u_l , так и фазу колебаний ψ_l .

Подставляя значения $\bar{P}_l(t)$ и \bar{q}_l в уравнение (8) вместо соответствующих действительных величин, приходим к системе алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Эти уравнения получаются из исходных дифференциальных путем замены оператора дифференцирования множителем $i\theta$:

$$\sum_{k=1}^n (-a_{lk}\theta^2 + ib_{lk}\theta + c_{lk})\bar{u}_k = \bar{P}_l, \quad (l = 1, \dots, n) \quad (11)$$

Решив эту систему, получим значения \bar{u}_l ($l = 1, 2, \dots, n$), т. е. значения амплитуд и фаз колебаний всех грузов.

В данном случае такой прием вполне допустим. Решающим является то обстоятельство, что коэффициенты уравнения (8) действительные. Поэтому при всех операциях действительные части остаются действительными, а мнимые — мнимыми.

Поэтому при замене q и P на \bar{q} и \bar{P} уравнение (8) полностью сохраняет свою силу отдельно для действительных, отдельно для мнимых частей \bar{q} и \bar{P} . Таким образом, если расшифровать записи (9) и (10), то можно сказать, что нагрузкам

$$P_l(t) = P_l \cos(\theta t + \varphi_l)$$

соответствуют перемещения

$$q_l(t) = u_l \cos(\theta t + \psi_l),$$

а нагрузкам

$$P_l(t) = P_l \sin(\theta t + \varphi_l)$$

— перемещения

$$q_i(t) = u_i \sin(\theta t + \psi_i).$$

Отметим важный частный случай — действие на систему единичной гармонической силы. Представляя эту силу в форме

$$\bar{P} = e^{i\theta t},$$

обнаружим, что любое комплексное перемещение

$$\bar{q}_i = \bar{u}_i e^{i\theta t}.$$

Таким образом, отношение комплексного перемещения к комплексной силе представляет собой комплексное число, зависящее от θ . Обозначим

$$\frac{\bar{q}_i}{\bar{P}(t)} = F_i(i\theta). \quad (12)$$

Очевидно, что модуль этого числа представляет собой отношение амплитуды перемещения к амплитуде силы, а аргумент составляет разницу фаз силы и перемещения.

Функция $F_i(i\theta)$ называется комплексной частотной характеристикой системы или комплексной передаточной функцией. Функция $F_i(i\theta)$ определяется решением системы уравнений (11) и представляет собой дробь, знаменатель которой равен определителю системы (11), а числитель — тому же определителю с заменой l -го столбца столбцом правых частей, где лишь одна возмущающая сила равна единице, а остальные — нулю.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

3.1. Уравнение движения параметрических колебаний

Всем знакомым примером параметрических колебаний является раскачивание на качелях. В этом случае удастся увеличивать размахи колебаний только за счет периодического изменения момента инерции (положения центра тяжести системы от точки подвеса качелей). По самому смыслу названия параметрические колебания вызваны изменениям в параметрах системы. В уравнениях движения за них отвечают параметры c , которые теперь являются не константами, а функциями времени.

С другой стороны параметрические колебания обусловлены действием сил более сложной природы. Например, нестационарные позиционные силы, которые зависят от координат q_j а также от времени t в явном виде:

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \dots, q_m, t) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

и притом так, что их невозможно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое — только от времени.

Ограничимся рассмотрением линейных систем с одной степенью свободы, когда при малых отклонениях от положения равновесия обобщенная сила определяется выражением

$$Q = -c(t)q \quad (2)$$

причем, в отличие от случаев действия стационарных восстанавливающих сил, параметр $c=c(t)$ является функцией времени.

Дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + c(t)q = 0 \quad (3)$$

мы будем далее писать в виде

$$\ddot{q} + \psi(t)q = 0, \quad (4)$$

где $\psi(t) = \frac{c(t)}{a}$ — переменный коэффициент. (5)

Как мы увидим ниже, свойства движения, описываемого уравнением (4), существенно отличаются от свойств свободных колебаний, определяемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Важное значение имеют нередко встречающиеся в приложениях случаи периодического изменения параметра, когда

$$\psi(t+T) = \psi(t). \quad (6)$$

Уравнение (4) в этом случае называют уравнением Хилла. Соответствующие этим случаям колебания называются параметрически возбуждаемыми или, короче, параметрическими колебаниями.

Отметим, что амплитуды параметрических колебаний — в зависимости от значений параметров системы — либо остаются ограниченными, либо возрастают во времени. Очевидную опасность представляют колебания с возрастающими амплитудами; это явление называют параметрическим резонансом. По некоторым признакам, о которых будет сказано ниже, параметрический резонанс существенно отличается от «обычного» резонанса и опаснее последнего.

3.2. Параметрические колебания около положения равновесия

Прежде чем обратиться к решению дифференциального уравнения (4) и исследованию возможности параметрического резонанса, рассмотрим некоторые простые механические системы, колебания которых являются параметрическими; в этих, случаях их часто называют параметрическими системами.

В качестве первого примера рассмотрим симметричную абсолютно жесткую балку длиной $2l$ со средней шарнирно неподвижной опорой и двумя упругими опорами на концах. Коэффициенты жесткости упругих опор одинаковы и равны c (рис.1). К балке приложена переменная горизонтальная сила $P(t)$, заданная в виде периодической функции времени.

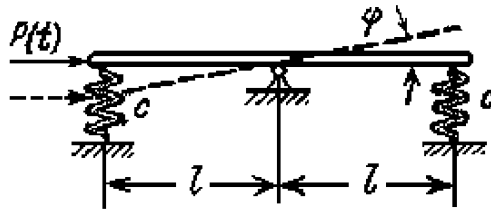


Рис.1

В положении равновесия ось балки горизонтальна. При малых отклонениях балки от положения равновесия (см. штриховые линии на рисунке) на нее действует момент сил упругости $c\phi l^2$ и момент продольной силы $P(t)\phi l$. Полный момент, представляющий собой обобщенную силу в данной задаче,

$$M = -(cl - \dot{P}(t))\phi l, \quad (7)$$

оказывается функцией координаты ϕ и времени t . Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$-(cl - P(t))\phi l = I\ddot{\phi}, \quad (8)$$

(где I — момент инерции балки относительно оси вращения) или

$$\ddot{\phi} + \frac{cl - P(t)}{I} l\phi = 0. \quad (9)$$

Оно относится к типу (4).

Другим примером может служить маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса (рис.2). Пусть l — длина маятника, m — масса груза, $y = y(t)$ — заданный периодический закон движения точки подвеса.

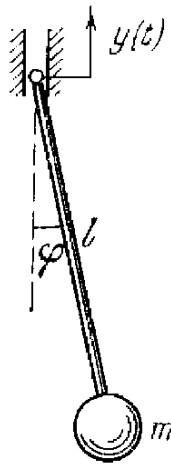


Рис.2

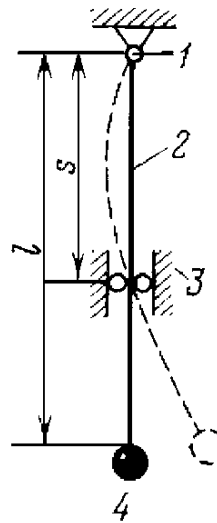


Рис.3

Дифференциальное уравнение малых относительных колебаний маятника имеет вид

$$(-mg - m\ddot{y}(t))l\phi = ml^2\ddot{\phi} \quad (10)$$

($-m\ddot{y}(t)$ — переносная сила инерции) или

$$\ddot{\phi} + \frac{g + \ddot{y}(t)}{l} \phi = 0;$$

как видно, эта система также относится к типу параметрических.

В качестве третьего примера рассмотрим вертикальный безмассовый упругий стержень 2 длиной l , показанный на рис.3. С концом стержня связан сосредоточенный груз 4. Верхней опорой служит неподвижный шарнир 1, а нижней опорой служит втулка 3 с

коротким подшипником. Если считать подшипник шарнирной опорой, то коэффициент изгибной жесткости балки определяется формулой теории сопротивления материалов

$$c = \frac{3EJ}{l(l-s)^2},$$

где s — расстояние между опорами.

Втулке задано периодическое движение около некоторого среднего положения, определяемого расстоянием S_0 . Состоянию равновесия соответствует положение груза на вертикали и прямолинейная форма оси стержня.

При возмущении этого состояния груз отклоняется в сторону, ось балки изгибается, и последующее движение, описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + \frac{3EJ}{ml(l-s(t))^2} q = 0,$$

которое также относится к рассматриваемому здесь типу.

Исследование решений подобных дифференциальных уравнений позволит судить об устойчивости состояния равновесия, около которого происходят колебания. Если параметрически возбуждаемые колебания постепенно затухают (или, по крайней мере, не имеют тенденции к возрастанию, т.е. остаются ограниченными), то состояние равновесия следует признать устойчивым; если же колебания происходят с возрастающими амплитудами (параметрический резонанс), то состояние равновесия неустойчиво. Поэтому в подобных случаях самым важным является выяснение основной тенденции параметрических колебаний.

3.3. Параметрические колебания около стационарного режима движения

К необходимости исследовать свойства решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приводят также задачи об устойчивости стационарных режимов движения. Обычно дело сводится к следующему.

Допустим, что после решения некоторой задачи о движении механической системы найден режим движения, описываемый функцией $q = q(t)$. И этот режим движения является стационарным, т.е. его параметры (например, частота и амплитуда) не меняются со временем. Для исследования устойчивости этого режима необходимо предположить, что он каким-либо образом нарушен, и возмущенное движение описывается функцией $q + \delta q$, близкой к функции $q(t)$; здесь $\delta q(t)$ — отклонение системы от исследуемого режима движения. Если функция δq с течением времени возрастает, то исследуемый режим $q = q(t)$ неустойчив; в случае постепенного затухания функции δq режим $q = q(t)$ устойчив. Как оказывается, для функции $\delta q(t)$ в ряде случаев можно получить дифференциальное уравнение типа (4). Характер решения этого уравнения позволяет сделать заключение об устойчивости режима движения $q = q(t)$.

Поясним сказанное примером из области вынужденных колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой. Пусть дифференциальное уравнение колебаний такой системы имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = Q(t), \quad (11)$$

причем $F(q)$ и $Q(t)$ — заданные функции координаты и времени. Как мы увидим далее, решение этого уравнения может быть неоднозначным и возможно существование нескольких стационарных режимов с различными амплитудами

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Так как среди этих режимов физически осуществимы только устойчивые режимы, то полное решение задачи о вынужденных колебаниях должно содержать не только выяснение (точное или, приближенное) возможных режимов, но и анализ их устойчивости.

Решение $q_1(t)$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (11):

$$a\ddot{q}_1 + F(q_1) = Q(t). \quad (12)$$

Но тому же дифференциальному уравнению (11) должна удовлетворять также функция $q_1 + \delta q_1$:

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1 + \delta q_1) = Q(t);$$

Рассматривая малые величины δq_1 , мы можем принять

$$F(q_1 + \delta q_1) \approx F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по координате q_1 , т. е.

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F'(q_1) + F''(q_1)\delta q_1 = Q(t); \quad (13)$$

Вычитая уравнение (12) из уравнения (13), получим уравнение для отклонения от стационарного режима

$$a\delta\ddot{q}_1 + F''(q_1)\delta q_1 = 0. \quad (14)$$

Но так как q_1 представляет некоторую известную функцию времени (стационарный режим), то и $F''(q_1)$ также является функцией времени, т. е. дифференциальное уравнение (14) есть уравнение типа (4).

Пусть, например,

$$F(q) = \beta q^3, \quad Q(t) = H \sin \theta t,$$

и необходимо исследовать устойчивость стационарного режима

$$q_1 = A_1 \sin \theta t.$$

В данном случае

$$F'(q) = 3\beta q^2 = 3\beta A_1^2 \sin^2 \theta t$$

и для вариации стационарного режима получим дифференциальное уравнение

$$a\delta\ddot{q} + (3\beta A_1^2 \sin^2 \theta t)\delta q = 0. \quad (15)$$

3.4. Параметрическое возбуждение по кусочно-постоянному периодическому закону

В ранний период строительства и эксплуатации транспортных электровозов последние снабжались спарниками, которые порождали периодически изменяющуюся жесткость ведущей системы, что приводило часто к интенсивным колебаниям. Этот вопрос был подробно исследован швейцарским профессором Мейснером, который для описания явления получил дифференциальное уравнение угла поворота кривошипа с периодическим коэффициентом, причем жесткость системы он аппроксимировал ступенчатой характеристикой. Поэтому оно называется уравнением Мейснера.

Рассмотрим случай, когда переменный коэффициент изменяется по кусочно-постоянному периодическому закону (закону прямоугольного синуса) (рис. 1) с периодом T :

$$\psi = \psi_0 \pm \Delta\psi,$$

причем ψ_0 — среднее значение коэффициента, входящего в дифференциальное уравнение движения $\Delta\psi$ — глубина пульсации этого коэффициента.

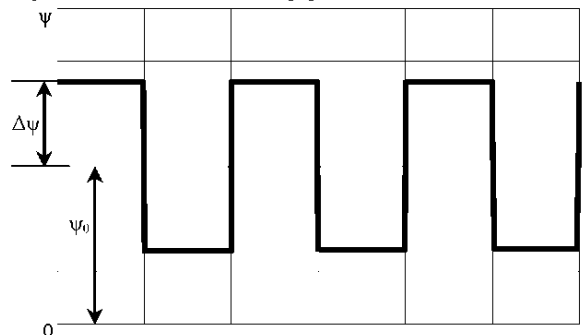


Рис. 1

Тогда само дифференциальное уравнение движения $\ddot{q} + \psi(t)q = 0$ принимает вид

$$\ddot{q} + k_0^2(1 \pm \mu)q = 0,$$

где $k_0^2 = \psi_0$, $\mu = \frac{\Delta\psi}{\psi_0}$.

Ввиду того, что в течение каждого полупериода $T/2$ дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, можно воспользоваться способом припасовывания.

Рассмотрим какой-либо период T изменения коэффициента Ψ и совместим с началом этого периода начало отсчета времени. В первом полупериоде, когда $0 < t < T/2$, дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$\ddot{q} + k_0^2(1 + \mu)q = 0, \quad (2)$$

а во втором полу периоде $T/2 < t < T$ соответственно будет

$$\ddot{q} + k_0^2(1 - \mu)q = 0. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения (2) и (3) с постоянными коэффициентами имеют решения

$$q_1 = C_1 \sin k_1 t + D_1 \cos k_1 t, \quad q_2 = C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t, \quad (4)$$

причем $k_1 = k_0 \sqrt{1 + \mu}$, $k_2 = k_0 \sqrt{1 - \mu}$.

В этих решениях содержатся четыре постоянные, C_1, D_1, C_2, D_2 , для определения которых необходимы четыре условия. Два условия относятся к моменту времени $t = T/2$, общему для обоих полупериодов; в указанный момент должно совпадать перемещение и скорости

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right).$$

Это дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_1 \sin \frac{k_1 T}{2} + D_1 \cos \frac{k_1 T}{2} &= C_2 \sin \frac{k_2 T}{2} + D_2 \cos \frac{k_2 T}{2}, \\ k_1 \left(C_1 \cos \frac{k_1 T}{2} - D_1 \sin \frac{k_1 T}{2} \right) &= k_2 \left(C_2 \cos \frac{k_2 T}{2} - D_2 \sin \frac{k_2 T}{2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем еще два соотношения:

$$q_2(T) = \lambda q_1(0), \quad \dot{q}_2(T) = \lambda \dot{q}_1(0), \quad (7)$$

в которых λ — некоторое, пока неизвестное число. Соотношениями (7) утверждается, что по истечении рассматриваемого периода обобщенная координата и обобщенная скорость изменяются в λ раз. Соответственно этому движение в следующем периоде начнется при измененных в λ раз начальных условиях, т. е. будет повторять движение в рассматриваемом периоде, но в измененном в λ раз масштабе.

Если $|\lambda| > 1$, то колебания в каждом следующем периоде будут усиливаться, а если $|\lambda| < 1$, то они будут постепенно затухать. Таким образом, устойчивость или неустойчивость системы определяется значением модуля λ .

Подставив решения (4) в соотношения (7), получим,

$$\lambda D_1 = C_2 \sin k_2 T + D_2 \cos k_2 T, \quad \lambda C_1 k_1 = C_2 k_2 \cos k_2 T - D_2 k_2 \sin k_2 T. \quad (8)$$

Система уравнений (6) и (8) однородна относительно постоянных C_1, D_1, C_2, D_2 . и имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{k_1 T}{2} & \cos \frac{k_1 T}{2} & -\sin \frac{k_2 T}{2} & -\cos \frac{k_2 T}{2} \\ k_1 \cos \frac{k_1 T}{2} & -k_1 \sin \frac{k_1 T}{2} & -k_2 \cos \frac{k_2 T}{2} & k_2 \sin \frac{k_2 T}{2} \\ 0 & \lambda & -\sin k_2 T & -\cos k_2 T \\ k_1 \lambda & 0 & -k_2 \cos k_2 T & k_2 \sin k_2 T \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим следующее квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0, \quad (9)$$

в котором для краткости обозначено

$$\begin{aligned} A &= \cos \frac{k_1 T}{2} \cos \frac{k_2 T}{2} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin \frac{k_1 T}{2} \sin \frac{k_2 T}{2} = \\ &= \cos(\pi\alpha\sqrt{1+\mu}) \sin(\pi\alpha\sqrt{1-\mu}) - \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \sin(\pi\alpha\sqrt{1+\mu}) \cos(\pi\alpha\sqrt{1-\mu}) = A(\alpha, \mu), \end{aligned} \quad (10)$$

причем $\alpha = \frac{k_0 T}{2\pi}$ — есть отношение среднего значения собственной частоты k_0 к частоте пульсации параметра $2\pi/T$. Корни уравнения (9) следующие:

$$\lambda_1 = A - \sqrt{A^2 - 1}, \quad \lambda_2 = A + \sqrt{A^2 - 1}. \quad (11)$$

Для того чтобы числа λ_1 и λ_2 были вещественными, как это предполагается по смыслу решаемой задачи, должно быть

$$|A| > 1, \quad (12)$$

т. е. либо $A > 1$, либо $A < -1$. Но в обоих этих случаях модуль одного из корней (11) больше единицы: если $A > 1$, то $|\lambda_2| > 1$; если $A < -1$, то $|\lambda_1| > 1$.

Отсюда следует, что если выполнено неравенство (12), то колебания будут с каждым новым периодом увеличиваться. Неравенство (12) представляет собой не только условие вещественности множителя λ , но одновременно и условие возникновения параметрического резонанса.

Так как значение A зависит от двух постоянных системы α и μ , то их значения полностью определяют устойчивость системы.

На рис.2 представлена построенная с помощью условия (12) диаграмма устойчивости, по осям которой отложены значения $4\alpha^2$ и $2\mu\alpha^2$. В незаштригованных областях значения параметров таковы, что условие (12) выполняется, т. е. система неустойчива.

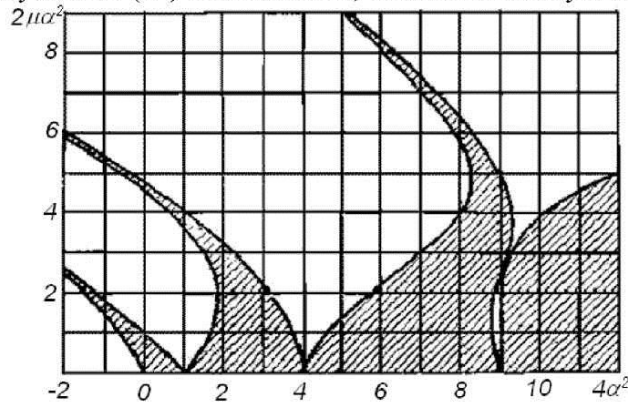


Рис.2

Заштригованные области диаграммы соответствуют устойчивым состояниям системы. С помощью такой диаграммы можно сразу судить об устойчивости по данным значениям α и μ без всяких дополнительных вычислений.

Прежде всего обратим внимание на те зоны областей неустойчивости, которые расположены вблизи горизонтальной оси, т. е. соответствуют малым значениям параметра $\mu = \frac{\Delta\psi}{\psi_0}$. Как видно, в этих зонах $4\alpha^2 = n^2$, т.е.

$$\alpha \approx \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

То же можно найти из (10), положив $\mu = 0$. В самом деле,

$$A = \cos^2 \pi\alpha - \sin^2 \pi\alpha = \cos 2\pi\alpha,$$

т. е. при произвольных значениях α имеем $A \leq 1$. Равенство $|A| = 1$, соответствующее возникновению параметрического резонанса, возможно при условии, что аргумент $2\pi\alpha$ удовлетворяет равенству

$$2\pi\alpha = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

из которого также следует соотношение (13).

Таким образом, если выполняется условие (13), то параметрический резонанс возникает при сколь угодно малой глубине пульсации. При этом основное значение имеет случай $n = 1$, когда $\alpha = 1/2$, т. е., когда среднее значение собственной частоты вдвое меньше частоты параметрического возбуждения.

При значительной глубине пульсации и заметном отличии μ от нуля параметрический резонанс возникает в целых областях значений α , расположенных вблизи значений (13); чем больше заданное значение μ , тем шире эти области. По этой причине отстройка от параметрического резонанса труднее, чем от обычного резонанса; параметрический резонанс более опасен, чем обычный, еще и по той причине, что линейное демпфирование (которое выше вообще не учитывалось) лишь несколько суживает области неустойчивости, но неспособно ограничить возрастание амплитуд колебаний в этих областях.

Пример. Груз 1 массы m упруго подвешен на цилиндрической витой пружине 2 длиной l ; коэффициент жесткости пружины равен s . Разрезная втулка 3 периодически обжимает верхнюю часть пружины так, что длительность каждого обжима t равна длительности интервала между двумя последовательными обжимами. Длина деформируемой части пружины при обжиге мало отличается от длины l (рис. 3). Найти наименьшее значение t , при котором возникает параметрический резонанс.

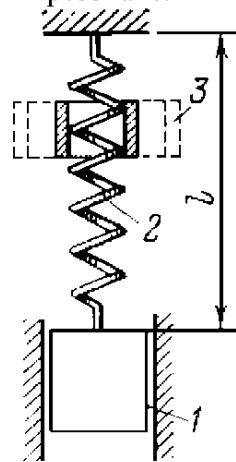


Рис. 3

Замечая, что период изменения жесткости $T = 2t$, и учитывая малость глубины пульсации (втулки, а т. е. μ в формулах), запишем условие параметрического резонанса (13):

$$\alpha = \frac{k_0 T}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\varepsilon = 1, 2, \dots)$$

Подставляя сюда $k_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $T = 2t_*$, находим $t_* = \frac{\pi\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{m}{c}}$. Наименьшее значение t_* соответствует $\varepsilon = 1$: $t_* = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c}}$, т.е. вчетверо меньше периода собственных колебаний груза.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Большинство задач теоретической и математической физики приводит к нелинейным уравнениям. Существенным оказывается деление динамических систем по количеству степеней свободы и по сохранению энергии на консервативные и неконсервативные. Консервативные системы с одной степенью свободы всегда интегрируемы (в специальных функциях, например, эллиптических). Системы с несколькими степенями свободы, как правило, неинтегрируемы. Исключение составляют системы, обладающие определенными симметриями, с каждой из которых, по теореме Нётер, связан первый интеграл (закон сохранения). В настоящее время нет общих методов, позволяющих найти первые интегралы и нет общего метода интегрирования нелинейных систем.

Однако необходимость решения различных нелинейных задач обусловлена требованиями развития техники и общества в целом. Во многих важных задачах можно выделить некие параметры, которые вполне допустимо полагать малыми и использовать идеи теории возмущений или метода усреднений. Поэтому было разработано множество асимптотических и приближенных методов.

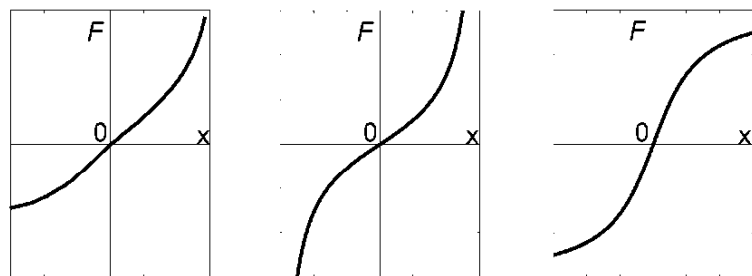
Здесь стоит также отметить, что использование компьютеров в значительной мере способствовало пониманию некоторых характерных особенностей поведения существенно нелинейных систем.

Рассмотрим отличительные свойства нелинейных систем на примере систем с одной степенью свободы.

4.1. Свойства нелинейных колебаний

4.1.1. Свободные колебания

Рассмотрим простейшую нелинейную систему с одной степенью свободы — груз m на нелинейной пружине. Примеры упругой характеристика пружины, т. е. зависимость усилия F от смещения x , графически представлены на рис. 1.



(а) несимметричная

(б) жесткая

(в) мягкая

Рис. 1.

В зависимости от вида характеристики она называется несимметричной (рис. 1, а) или симметричной (рис. 1, б, в). Если жесткость (dF/dx) возрастает с увеличением x , как на рис. 2, б, характеристика называется *жесткой*, в противном случае (рис. 2, в) — *мягкой*.

Уравнение свободных колебаний консервативной системы имеет вид

$$m\ddot{x} + F(x) = 0. \quad (1)$$

Первый интеграл этого уравнения легко может быть вычислен. Обозначив $\dot{x} = y$, приведем уравнение (1) к виду

$$my \frac{dy}{dx} + F(x) = 0,$$

откуда

$$\frac{my^2}{2} + \int_0^x F(x)dx = C, \quad (2)$$

где C — постоянная.

Равенство (2) выражает закон сохранения энергии; первый член левой части представляет собой кинетическую энергию, второй — потенциальную. Уравнение (2) позволяет качественно изобразить фазовый портрет движения, т. е. семейство траекторий в координатах x, y (рис. 3).

Так как уравнение (2) четное относительно y , траектории симметричны относительно оси x . В случае симметричной упругой характеристики $F(x)$ они симметричны также и относительно вертикальной оси y .

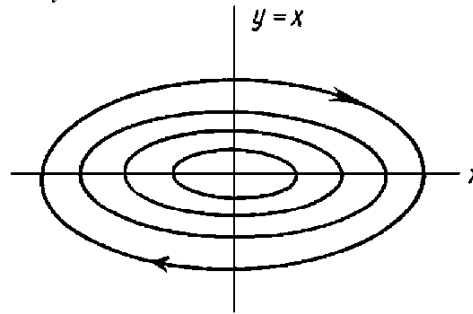


Рис.2

Для определения закона движения требуется выполнить второе интегрирование:

$$t = \int \frac{dx}{\dot{x}} = \int \left[\frac{2}{m} \left(C - \int F(x)dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} |dx| \quad (3)$$

В отличие от привычного представления перемещения x как функции времени t , формула (3) дает обратную зависимость. В процессе колебания x то возрастает, то убывает, однако отношение $\frac{dx}{\dot{x}}$ всегда положительно, поэтому в формулу (3) входит абсолютное значение dx .

Используя формулу (3), можно определить период колебания как время, затрачиваемое на полный цикл движения, при котором изображающая точка обходит полностью фазовую траекторию. Учитывая симметрию фазовой траектории, находим

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{2}{m} \left(C - \int F(x)dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} |dx| \quad (4)$$

При этом постоянная C определяется формулой

$$C = \int_{x_{\min}}^0 F(x)dx = \int_0^{x_{\max}} F(x)dx = \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2.$$

Для системы с симметричной упругой характеристикой $x_{\max} = -x_{\min} = A$

$$T = 4 \int_0^A \left[\frac{2}{m} \int_0^x F(x)dx \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) следует ПЕРВАЯ важная особенность нелинейных систем — зависимость периода свободных колебаний (а следовательно и частоты) от амплитуды.

Свободные колебания нелинейной системы являются периодическими, но не гармоническими; соответствующее перемещение может быть разложено в ряд Фурье:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega_* t + B_1 \sin \omega_* t + A_2 \cos 2\omega_* t + B_2 \sin 2\omega_* t + \dots \quad (6)$$

Здесь $\omega_*(A)$ — основная частота колебания, зависящая от амплитуды.

Среди гармонических коэффициентов особое место занимает A_0 ; этот коэффициент характеризует смещение центра колебания от положения статического равновесия.

Если упругая характеристика системы является симметричной, то, как следует из симметрии фазовых траекторий относительно оси y , A_0 и все четные коэффициенты разложения равны нулю.

Однако в общем случае следует ВТОРОЕ свойство нелинейной системы: ряд Фурье негармонического решения содержит бесконечное число гармоник основной частоты.

Для представления закона движения в форме разложения в ряд Фурье (6) следует предварительно обратить зависимость (3) и найти $x(t)$. Вычисления оказываются обычно чрезвычайно затруднительными. Поэтому для приближенного определения периода T колебания (или основной его частоты), а также нескольких первых коэффициентов разложения большой частью используются приближенные методы.

Наконец, ТРЕТЬЕ важное свойство состоит в том, что в нелинейных системах возможно реализация нескольких режимов колебаний в одних и тех же условиях. Это свойство мы подробнее рассмотрим на примере вынужденных колебаний диссипативной нелинейной системы.

4.1.2. Вынужденные колебания нелинейной системы с кубической упругой характеристикой при гармоническом возбуждении и вязком трении

Уравнение движения имеет вид (уравнение Дуффинга)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma x^3 = P_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Фазовый угол φ включен в выражение возмущающей силы для упрощения вычислений. Приближенное решение уравнения (1) будем искать в форме

$$x = A \sin \omega t \quad (2)$$

и используем метод гармонического баланса, т.е. сбалансируем коэффициенты при всех слагаемых содержащих одинаковые гармонические функции. Подставим выражение (2) в левую часть уравнения (1), используем тождество

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t$$

и раскроем синус суммы в правой части уравнения (1)

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi.$$

Затем приравняем нулю члены, содержащие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ в отдельности:

$$(c - m\omega^2)A + \frac{3}{4}\gamma A^3 = P_0 \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\alpha A \omega = P_0 \sin \varphi.$$

При этом член $\frac{1}{4}\gamma A^3 \sin 3\omega t$ остается несбалансированным. Учитывая, что

$$\frac{c}{m} + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} A^2 = \omega_*^2(A) \quad (4)$$

представляет собой квадрат частоты свободных колебаний (зависящий от амплитуды), и

обозначая $\frac{\alpha}{m} = 2\varepsilon$, получаем

$$(\omega_*^2(A) - \omega^2)A = \frac{P_0}{m} \cos \varphi \quad (5)$$

$$2\varepsilon \omega A = \frac{P_0}{m} \sin \varphi.$$

Исключив отсюда фазовый сдвиг, найдем

$$\left((\omega_*^2(A) - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega^2 \right) A^2 = \left(\frac{P_0}{m} \right)^2. \quad (6)$$

Разделив уравнения (5) одно на другое почленно, получим значение фазы колебаний

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\varepsilon\omega}{\omega_*^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Уравнение (6) дает зависимость между частотой возмущающей силы и амплитудой вынужденных колебаний. Решив это уравнение относительно ω^2 , получим

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) - 2\varepsilon^2 \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2 - 4\varepsilon^2\omega_*^2(A) + 4\varepsilon^4}. \quad (8)$$

При малом демпфировании $\varepsilon^2 \ll \omega_*^2$ и формула (8) может быть приведена к виду

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2 - 4\varepsilon^2\omega_*^2(A)}. \quad (9)$$

Построение зависимости $A(\omega)$, называемой амплитудно-частотной характеристикой, согласно формуле (9) показано на рис. 1.

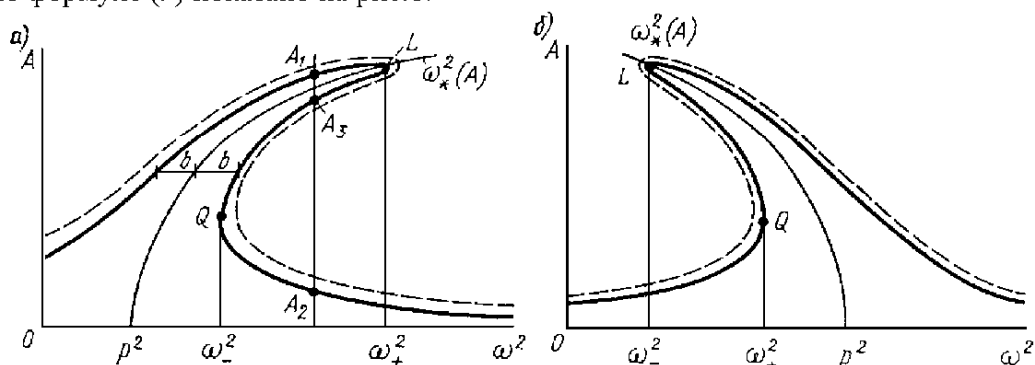


Рис. 1 Для жесткой системы амплитудно-частотная характеристика имеет вид, показанный на рис. 1, а, а для мягкой—на рис. 1, б.

В координатах ω^2, A построена скелетная кривая, т. е. зависимость $\omega_*^2(A)$ для системы без трения и вынуждающей силы, а затем на каждом уровне амплитуды влево и вправо от нее по горизонтали отложены отрезки

$$b = \sqrt{\left(\frac{P_0}{mA}\right)^2 - 4\varepsilon^2\omega_*^2(A)}.$$

Третьей существенной особенностью нелинейных систем является возможность реализации нескольких различных периодических режимов при изменении частоты в определенных пределах, в том числе неустойчивые режимы. Так, как видно из рис. 1, а, при $\omega < \omega_* < \omega_+$ уравнение (9) дает три режима: с большими амплитудами A_1 , с малыми амплитудами A_2 и с промежуточными амплитудами A_3 . Правда, как мы увидим далее, устойчивыми являются только режимы A_1 и A_2 , а режим A_3 неустойчив и не реализуется практически.

Реализация того или иного устойчивого режима зависит от начальных условий движения. Так, если медленно увеличивать частоту возмущающей силы, амплитуды будут изменяться по линии KL (рис. 2). В точке L произойдет срыв колебаний и при дальнейшем увеличении

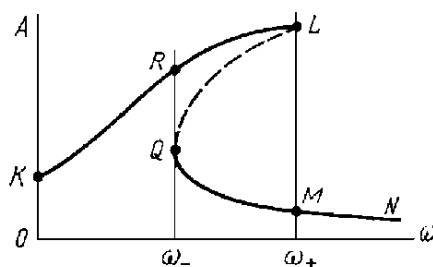


Рис.2

частоты амплитуды будут изменяться по линии MN . При медленном уменьшении частоты амплитуды меняются по линии $NQRK$. Следует отметить, что, поскольку в интервале частот $\omega_- < \omega < \omega_+$ возможны два устойчивых периодических режима, система, колеблющаяся в одном из них, может перейти на другой при каких-либо дополнительных внешних воздействиях.

Исследуем зависимость амплитуды колебаний от амплитуды возмущения. Как видно из формулы (9), увеличение P_0 приводит к увеличению отрезков b , откладываемых влево и вправо от скелетной кривой. Таким образом, на рис.1, а штриховая кривая соответствует большему значению возмущающей силы, чем сплошная. Обратим внимание на то, что в режимах A_1 и A_2 увеличение силы приводит к увеличению амплитуды колебаний $\frac{\partial A}{\partial P_0} > 0$, а

в режиме A_3 — к уменьшению амплитуды $\frac{\partial A}{\partial P_0} < 0$. Можно показать строго, что условие

$\frac{\partial A}{\partial P_0} < 0$ является признаком неустойчивости режима.

4.2. Автоколебания

Рассмотрим систему со следующими свойствами 1) есть канал поступления энергии извне; 2) есть трение; 3) присутствует нелинейность, позволяющая контролировать отбор внешней энергии. Если, несмотря на наличие трения в системе устанавливаются и поддерживаются незатухающие колебания за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы, причем «амплитуда» этих колебаний определяется свойствами системы, а не начальными условиями (как в консервативных системах), то такие колебания называют автоколебаниями, а системы, в которых возможны автоколебания, — автоколебательными системами. Примеры автоколебательных систем: часы, смычковые музыкальные инструменты, паровая машина, ламповый генератор, крыло самолета в потоке воздуха (колебания тел в потоке газа или жидкости — флаттер) и т.д.

Основные свойства автоколебаний: 1) независимость амплитуды от начальных условий; 2) существование источника энергии, компенсирующего потери за счет трения (заводной механизм в часах) 3) существенно нелинейный ограничитель амплитуды колебаний (трение). Причем автоколебательная система представляет собой устройство, которое из постоянного источника энергии периодически черпает известные порции энергии и таким образом за счет непрерывного источника энергии создает периодический процесс.

Общий класс автоколебательных систем с одной степенью свободы описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x}.$$

Здесь функция F является нелинейной и уравнение является квазилинейным. Примером может служить уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}.$$

На фазовой плоскости для автоколебаний характерно наличие особых траекторий, которые называются предельными циклами — изолированной траектории, к которой стремятся соседние

4.3. Аналитические методы теории нелинейных колебаний

4.3.1. Качественный метод анализа фазового портрета

Качественный метод, составляющий основу качественной теории дифференциальных уравнений, позволяет исследовать общий характер решений нелинейных уравнений на основе анализа фазового портрета этих уравнений.

Основную роль в описании структуры фазового пространства динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обыкновенные и особые. К последним принадлежат: особые точки, соответствующие состояниям равновесия системы или ее стационарным движениям (типа центр, седло, фокус,); изолированные замкнутые траектории, называемые предельными циклами, которые соответствуют периодическим движениям; сепаратрисные кривые и поверхности, которые являются границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям.

Устойчивые состояния равновесия и периодические движения являются простейшими примерами установившихся движений.

Изолированную замкнутую траекторию, к которой стремятся все соседние и которая соответствует периодическому режиму, называют предельным циклом.

Их может быть три вида

1. Устойчивый предельный цикл или аттрактор — с обеих сторон на нее навиваются траектории при $t \rightarrow +\infty$ (в трехмерном пространстве — кривая, обвивающая тор)
2. Неустойчивый предельный цикл или репеллер — кривая, от которой при $t \rightarrow +\infty$ с обеих сторон удаляются траектории.
3. Полуустойчивый предельный цикл — траектории с одной стороны навиваются, а с другой стороны удаляются.

Например, в стационарном режиме фазовый портрет автоколебаний представляет собой предельный цикл.

Таким образом, основное внимание в этом методе уделяется выявлению и анализу особых точек динамических систем, которые соответствуют состояниям равновесия и особым траекториям или сепаратрис, которые разделяют режимы с разным типом движения. От характера особых точек зависит поведение фазовых траекторий в их окрестности. Мы кратко уже рассмотрели особые точки первого порядка для одномерных систем типа центр, узел, фокус, седло и характер фазовых траекторий в их окрестности для случая одной степени свободы.

Рассмотрим теперь структуру разбиения фазового пространства на траектории в окрестности периодического движения на примере трехмерного фазового пространства. Пусть $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$ — периодическое решение периода T системы дифференциальных уравнений. Линеаризуя эти уравнения в окрестности рассматриваемого периодического движения, приходим к уравнениям в вариациях, в которых теперь частные производные

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)_0.$$

вычисленные при $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $z = z_0(t)$ представляют собой периодические функции периода T . Пусть $\xi^i(t), \eta^i(t), \zeta^i(t)$, ($i = 1, 2, 3$) — фундаментальная система решений дифференциальных уравнений (9) с периодическими коэффициентами, удовлетворяющая начальным условиям $\xi^i(0) = \delta_{1i}$, $\eta^i(0) = \delta_{2i}$, $\zeta^i(0) = \delta_{3i}$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т. е. нормированная к единичной матрице при $t = 0$.

Характеристическое уравнение для рассматриваемого периодического движения, имеет вид

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \xi^1(T) - \lambda & \eta^1(T) & \zeta^1(T) \\ \xi^2(T) & \eta^2(T) - \lambda & \zeta^2(T) \\ \xi^3(T) & \eta^3(T) & \zeta^3(T) - \lambda \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Один из корней этого уравнения всегда равен единице, поскольку рассматриваемое движение — периодическое. В зависимости от значений двух других корней возможны следующие основные случаи.

1. Корни действительные и имеют разные знаки. Это — случай седлового периодического движения (рис.6): через замкнутую траекторию γ , соответствующую изучаемому периодическому колебанию, проходят две интегральные поверхности S_2^+ и S_2^- , состоящие из фазовых кривых, асимптотически приближающихся к кривой γ при $t \rightarrow +\infty$ и соответственно при $t \rightarrow -\infty$.

2. Корни действительные и отрицательные (положительные). Этот случай соответствует устойчивому (неустойчивому) узловому периодическому движению и изображен на рис. 7, а, б.

3. Корни комплексные с отрицательными (положительными) действительными частями. В этом случае, как показано на рис. 8, а, б, фазовые кривые возмущенного движения образуют винтовые линии, осью которых является замкнутая траектория γ ; исследуемое движение при этом является фокусным (устойчивым или неустойчивым). Очевидно, центральному периодическому движению соответствует пара чисто мнимых корней; при этом винтовые линии не приближаются и не удаляются от кривой γ , а во все время возмущенного движения находятся от нее на расстоянии $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, определенном начальными возмущениями (рис.8, в). Такое движение является, как известно, орбитно устойчивым.

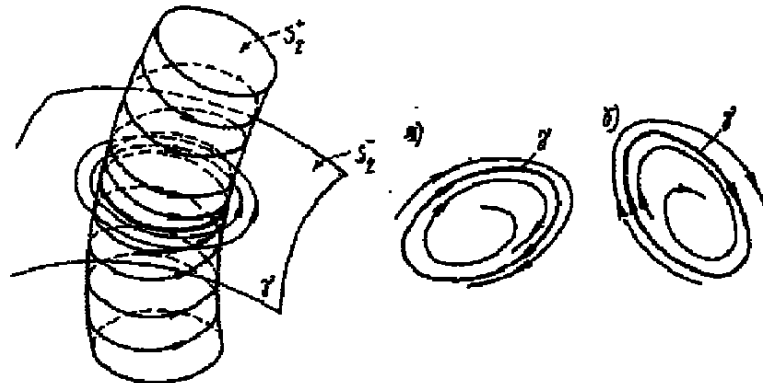


Рис.6

Рис.7.

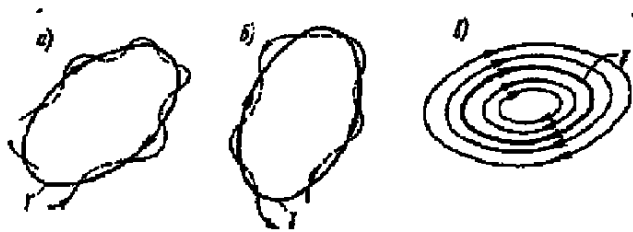


Рис.8.

Локальное исследование состояний равновесия и периодических колебаний уравнения проясняет картину поведения траекторий в фазовом пространстве в их малой окрестности, однако не позволяет окончательно изучить колебательные процессы. Полное (глобальное) описание фазового портрета для произвольной динамической системы представляет собой очень сложную и до сих пор не решенную (качественным методом) проблему.

Бифуркации

Как правило, нелинейные функции содержат параметры, описывающие влияние внешних условий на систему. Часто случается так, что при малом изменении такого параметра качественно меняется поведение системы. Тогда говорят, что система имеет точку бифуркации. Качественно меняется и фазовый портрет системы, например особая точка из устойчивого узла может превратиться в седло. Или устойчивый фокус превращается в неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом (бифуркация Хопфа). Существует классификация таких бифуркаций, хотя о полноте такой классификации трудно судить.

Развитие подобных теорий привело к появлению математического термина «катастрофа» и теории катастроф как раздела математики.

Дальнейшие исследования показывают, что в определенных случаях при увеличении параметра системы бифуркаций оказывается очень много, и это обстоятельство приводит к возникновению хаотической динамики — наблюдается переход к стохастичности в детерминированных системах. В этом случае аттракторы имеют топологическую структуру, которую характеризует нецелая размерность Хаусдорфа, т.е. аттрактор является фракталом, и его называют хаотическим или странным аттрактором.

4.3.2. Асимптотические и прямые методы

Важный класс нелинейных систем представляют нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору, или системы с малой нелинейностью. Такие системы описываются уравнениями вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu F(x, \dot{x}),$$

где μ — малый безразмерный положительный параметр. Для решения таких уравнений разработан ряд асимптотических (приближенных) методов. Например, метод малого параметра, метод осреднения и т.д.

1) Метод медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля). Метод Ван-дер-Поля дает возможность найти асимптотические решения, как для периодических, так и для процессов установления периодических движений или состояний равновесия. Решения получаются тем более точные, чем меньше параметр μ . В методе Ван-дер-Поля вместо точных уравнений рассматриваются специальным образом введенные так называемые укороченные уравнения. Эти уравнения также нелинейны, но для них сравнительно просто найти предельные циклы на фазовой плоскости. Переход к этим уравнениям состоит в том, что решения ищутся в виде решения простого гармонического осциллятора, но константы интегрирования в этих решениях предполагаются медленно меняющимися функциями, которые называют переменными Ван-дер-Поля.

2) Метод малого параметра (метод Пуанкаре). Метод Пуанкаре позволяет найти периодические решения в виде рядов по степеням параметра μ . Можно получить решения с любой степенью точности, если только эти ряды не расходятся.

3) Метод гармонического баланса предполагает близость колебаний к гармоническим и по существу является видоизменением методов Ван-дер-Поля и Пуанкаре. Метод гармонического баланса был разработан Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым и в дальнейшем развит другими учеными. Этот метод является одним из широко распространенных приближенных приемов отыскания периодических режимов в нелинейных колебательных системах; он основан на том обстоятельстве, что, несмотря на наличие нелинейностей, установившиеся колебания в системе при определенных условиях оказываются близкими к гармоническим.

4) Метод Крылова – Боголюбова является обобщением метода гармонического баланса.

Методы приближенного решения дифференциальных уравнений, основанные на сведении этой задачи к решению систем алгебраических уравнений, называются прямыми

методами. Полученные уравнения удобнее решать численными методами. При применении этих методов приближенное решение $q(t)$ нелинейного уравнения

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t) \quad (1)$$

ищут в виде линейной комбинации некоторых заданных функции $\varphi_k(t)$, т. е. в виде ряда

$$q(t) = \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(t) \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами a_k . Для того чтобы при $m \rightarrow \infty$ приближенное решение (2) стремилось к точному, необходимо чтобы координатные функции $\varphi_k(t)$ были допустимыми в рассматриваемой задаче. Это означает, что функции $\varphi_k(t)$ должны удовлетворять определенным краевым условиям, условию линейной независимости функций на некотором интервале, а также обладать свойствами гладкости. Важным требованием к системе координатных функций является условие полноты, заключающееся в том, что решение $q(t)$, а также его производная могут быть сколь угодно точно аппроксимированы линейной комбинацией (2) координатных функций $\varphi_k(t)$ при достаточно большом m . Таким образом, при фиксированном m решение $q_m(t)$ представляет собой функцию от m переменных a_1, a_2, \dots, a_m .

Рекомендуемая литература

Основная:

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1980. — 408 с.
2. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний: Учебное пособие. — СПб.: Лань, 2003. — 247 с.
3. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 560 с.
4. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 385 с.
5. Светлицкий В.А. Статистическая механика и теория надежности. — М.: Изд-во МГТУ, 2002. — 504 с.

Дополнительная:

6. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1965. — 276 с.
7. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1972. — 416 с.
8. Киселев О.М. Введение в теорию нелинейных колебаний. — Уфа, 2000. — 98 с.
9. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1991. — 256 с.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 917 с.
11. Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. Т. IV. Лекции по колебаниям. — М.: Изд-во академии наук СССР, 1955. — 512 с.