

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЗАДАЧИ ПО КУРСУ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ
ЧАСТЬ 1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ
Методическое пособие

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория колебаний находит разнообразные и обширные применения. Практически в любой области науки и техники перед инженерами и учеными возникают практические задачи, тесно связанные с проблемами теории колебаний и методами исследования колебательных явлений. И, хотя в каждом конкретном случае эти задачи имеют свою специфику, все они решаются на основе общих принципов и подходов, составляющих содержание теории колебаний. В связи с этим у лиц, изучающих или использующих теорию колебаний в своей деятельности, наибольшее затруднение вызывает применение общих положений теории к решению конкретных задач.

В литературе, посвященной теории колебаний, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем нужда в таких руководствах остро ощущается как студентами в процессе обучения, так и специалистами в их практической деятельности.

Авторы настоящего пособия, опираясь на многолетний опыт преподавания теории колебаний на физическом факультете МГУ, поставили своей целью создание такого руководства по решению задач, которое дополняло бы курс теории колебаний, читаемый студентам 3—4 курсов отделения радиофизики, помогая им активно, творчески усваивать основные положения теории, демонстрируя их в действии.

Ввиду этого в пособии основное внимание уделено решению конкретных задач, специально подобранных так, чтобы иллюстрировать основные разделы теоретического курса.

Поэтому в каждом разделе пособия излагаются лишь краткие сведения из теории, после чего приведено подробное решение типичных задач. Затем приводится ряд задач для самостоятельного решения. Эти задачи снабжены ответами.

В данном пособии рассматриваются колебания в линейных и нелинейных системах с одной степенью свободы.

Пособие составлено в соответствии с принципом разделения науки о колебаниях на разделы по виду действующих на систему сил. В соответствии с этим принципом в пособии исследуются собственные или свободные колебания, вынужденные колебания, колебания в системах с переменными параметрами и автоколебания.

1. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Строго говоря, ни одна реальная система не удовлетворяет требованиям линейности. Несмотря на это анализ колебательных процессов в линейных системах чрезвычайно важен для практики, так как наряду с огромным количеством разнообразных систем, которые с достаточной для практики точностью могут рассматриваться как линейные, встречается немало случаев, когда заведомо нелинейные системы допускают линеаризацию. В частности такое положение имеет место, когда в процессе движения обобщённые координаты испытывают достаточно малые отклонения от своего равновесного или установившегося значения.

1.1. Нахождение частоты свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Положение системы с одной степенью свободы полностью определяется заданием одной координаты x . В положении равновесия системы сила F_x , действующая на систему в направлении координаты x , должна быть равна нулю. Поэтому условие равновесия имеет вид

$$F_x = 0.$$

Если сила F_x потенциальна и потенциальная энергия системы равна V то условие равновесия можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (1.1.1)$$

Для того чтобы равновесие системы было устойчивым, достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в положении равновесия имела минимум. Поэтому для систем с одной степенью свободы условие устойчивости положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} > 0. \quad (1.1.2)$$

Уравнение движения системы можно получить различными способами. В случае механических систем можно составить уравнение движения, используя законы Ньютона, в случае электрических систем — правила Кирхгофа и выражения, связывающие напряжения и токи для каждого элемента схемы. В общем

случае можно составить уравнение движения, используя уравнения Лагранжа второго рода или уравнения Гамильтона.

Уравнение свободных колебаний систем с одной степенью свободы в общем случае можно записать в виде

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (1.1.3)$$

Реальные колебательные системы любой физической природы в той или иной степени нелинейны и для их описания получаются нелинейные дифференциальные уравнения. Однако если колебания достаточно малы, то нелинейное уравнение можно линеаризовать. Член $f(x, \dot{x})$ в уравнении (1.1.3) описывает силу трения и возвращающую силу. Будем считать, что в положении равновесия системы координата x и функция $f(x, \dot{x})$ равны нулю. Разложим функцию $f(x, \dot{x})$ в ряд Тейлора в окрестности точки с координатами $x = 0, \dot{x} = 0$. Получим

$$f(x, \dot{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0)\dot{x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(0, 0)\dot{x}^2 \dots$$

Ограничимся такой малой окрестностью положения равновесия, в которой члены разложения, содержащие производную функции $f(x, \dot{x})$ второго и более высокого порядка, малы по сравнению с членами, содержащими первую производную. Тогда малые члены можно отбросить и принять

$$f(x, \dot{x}) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0)\dot{x}. \quad (1.1.4)$$

Если координата и скорость системы в любой момент времени удовлетворяют сформулированным выше условиям, то колебания называются малыми. Заменяя в уравнении (1.1.3) функцию $f(x, \dot{x})$ выражением (1.1.4) и используя обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \omega_0^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0) = 2\delta,$$

получим линеаризованное уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1.5)$$

Коэффициент 2δ в этом уравнении характеризует изменение амплитуды собственных колебаний со временем. Если коэффициент $2\delta = 0$, то уравнение (1.1.5) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой ω_0 .

Задача 1.1.1.

По гладкому жёсткому неподвижному стержню может без трения двигаться муфта, имеющая массу m (рис.1.1.1). Муфта с помощью пружины, имеющей жёсткость k , соединена с неподвижной точкой N . Пружина в недеформированном состоянии имеет длину l . При перемещениях муфты происходит деформация пружины. При этом изменяется расстояние между её витками но пружина в целом остаётся прямолинейной, то есть центры её витков всегда находятся на одной линии. Точка N располагается на расстоянии H от стержня. Пренебрегая размерами муфты найти частоты малых колебаний относительно возможных положений равновесия.

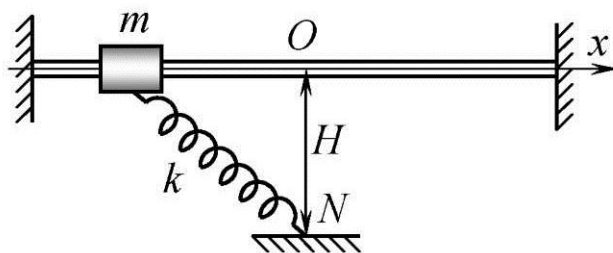


Рис. 1.1.1.

Решение

Совместим ось Ox системы координат со стержнем. Поместим начало координат в точке O , находящейся на минимальном расстоянии от неподвижной точки N . В качестве обобщённой координаты выберем координату x муфты. Длина пружины может быть больше, меньше или равна H .

Рассмотрим случай $l \leq H$. Потенциальная энергия V пружины равна

$$V = \frac{k \left(\sqrt{H^2 + x^2} - l \right)^2}{2}. \quad (1.1.6)$$

Отсюда, используя (1.1.1), найдём координату x_0 единственного положения равновесия

$$x_0 = 0$$

и направленную вдоль стержня составляющую силы F_x , с которой пружина действует на муфту:

$$F_x = \frac{kx(\sqrt{H^2 + x^2} - l)}{\sqrt{H^2 + x^2}}. \quad (1.1.7)$$

Используя второй закон Ньютона и выражение (1.1.7), получим уравнение движения

$$m\ddot{x} + k \frac{x(\sqrt{H^2 + x^2} - l)}{\sqrt{H^2 + x^2}} = 0. \quad (1.1.8)$$

Линеаризуя это уравнение, будем иметь

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{H}\right) x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой ω_0 , определяемой равенством

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{H}\right)}.$$

Рассмотрим теперь случай $l > H$. Используя соотношения (1.1.1) и (1.1.6), получим уравнение для определения положений равновесия:

$$x(\sqrt{H^2 + x^2} - l) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm a,$$

где $a = \sqrt{l^2 - H^2}$. Используя (1.1.2), найдём, что положение равновесия в точке x_1 неустойчиво, а в точках $x_{2,3}$ — устойчиво.

Сила, действующая на муфту вдоль стержня, и уравнение движения муфты при малых смещениях от устойчивых положений равновесия системы по-прежнему могут быть представлены выражениями (1.1.7) и (1.1.8), в которых, однако, теперь следует положить

$$x = x_i + q,$$

где $i = 2, 3$, а q — малое смещение муфты относительно устойчивого положения равновесия. Теперь для линеаризации уравнения движения разложим второй член уравнения (1.1.8) в ряд Тейлора по малому смещению q и ограничимся в этом разложении линейным членом. В результате получим

$$m\ddot{q} + k\left(1 - \frac{H^2}{l^2}\right)q = 0.$$

Отсюда для частоты малых колебаний находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{H^2}{l^2}\right)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.1.2

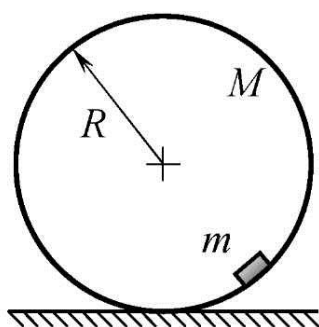


Рис. 1.1.2.

На внутренней поверхности тонкостенного цилиндра, имеющего массу M и радиус R , прикреплено небольшое тело с массой m (рис. 1.1.2). Цилиндр может без трения и проскальзывания катиться по горизонтальной плоскости. Пренебрегая размерами тела с массой m , найти частоту малых колебаний цилиндра относительно положения равновесия.

Задача 1.1.3

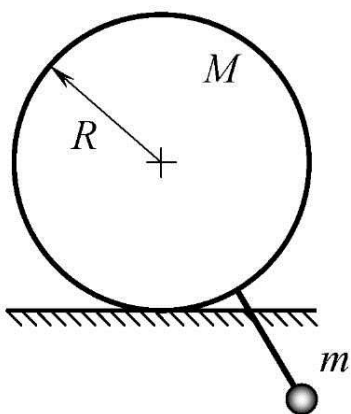


Рис. 1.1.3.

Маятник состоит из жесткого невесомого стержня, неподвижно прикреплённого к боковой поверхности сплошного цилиндра (рис. 1.1.3). Масса цилиндра M , его радиус R , длина стержня l . На конце стержня имеется небольшой грузик с массой m . Цилиндр может без трения и проскальзывания катиться по горизонтальной плоскости. Найти частоту малых колебаний относительно положения равновесия.

Задача 1.1.4

Колебательная система состоит из математического маятника, имеющего длину l и массу m , и пружины с жёсткостью k , которая одним концом прикреплена к грузику маятника, а другим — к неподвижной опоре (рис. 1.1.4). В положении равновесия нить маятника отклонена на угол α_0 от вертикали, а пружина горизонтальна. Найти частоту малых колебаний системы.

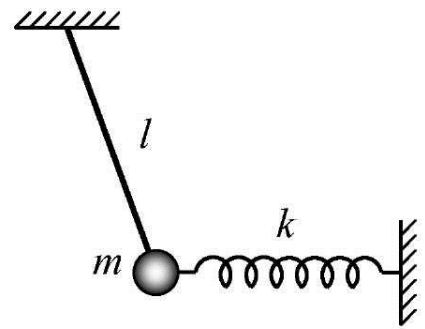


Рис. 1.1.4.

Задача 1.1.5

Жесткий невесомый стержень длиной l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. На другом конце стержня закреплен грузик пренебрежимо малых размеров, имеющий массу m . Плоская спиральная пружина, расположенная в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси вращения стержня, прикреплена одним концом к стержню в точке A на расстоянии a от оси вращения, а другим — к неподвижной опоре (рис. 1.1.5). Когда пружина не деформирована, стержень находится в вертикальном положении с грузиком, расположенным выше оси вращения. Если стержень отклоняется от вертикали на угол φ , пружина стремится вернуть его обратно с силой, направленной перпендикулярно стержню и пропорциональной длине дуги, пройденной точкой A . Найти частоты малых колебаний относительно возможных положений равновесия, пренебрегая трением и размерами грузика с массой m .

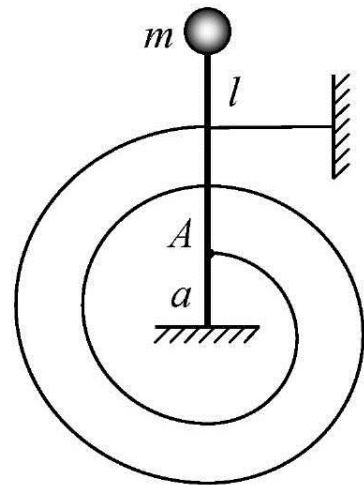


Рис. 1.1.5.

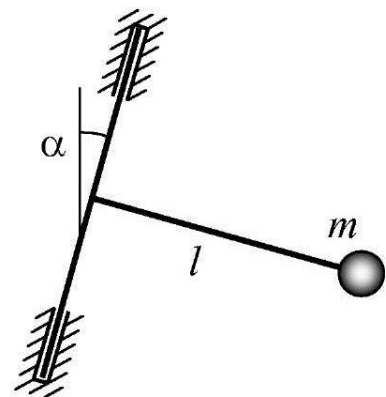


Рис. 1.1.6.

Задача 1.1.6

Колебательная система состоит из жесткого невесомого стержня длиной l , на одном из концов которого закреплено тело пренебрежимо малых размеров, имеющее массу m (рис. 1.1.6).

Стержень может без трения вращаться вокруг оси, которая проходит через второй конец стержня под углом 90° к стержню и составляет угол α с вертикалью. Найти частоту малых колебаний.

1.2. Свободные колебания при заданных начальных условиях

Задача 1.2.1

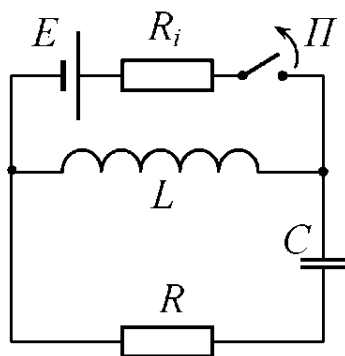


Рис. 1.2.1.

Катушка индуктивности колебательно-го контура LCR через выключатель Π подключена к батарее с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_i (рис. 1.2.1). В момент времени $t = 0$ батарея отключается от колебательного контура. Найти закон изменения во времени тока в контуре и напряжения на конденсаторе.

Решение

После отключения батареи от контура в нём происходят свободные колебания. Используя правила Кирхгофа получим дифференциальное уравнение для колебаний заряда q на конденсаторе C :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.2.1)$$

где $2\delta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$q = Ae^{\lambda t}. \quad (1.2.2)$$

Подставляя (1.2.2) в (1.2.1), для λ получим:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.2.3)$$

Характер процессов в системе зависит от соотношения между δ и ω_0 . Рассмотрим сначала случай $\omega_0^2 > \delta^2$. Тогда выражение (1.2.3) можно представить в форме

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega, \quad (1.2.4)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. С учётом (1.2.4) решение уравнения (1.2.1) можно представить в виде

$$q = A_1 e^{-\delta t + j\omega t} + A_2 e^{-\delta t - j\omega t}, \quad (1.2.5)$$

где A_1 и A_2 — постоянные величины, которые определяются начальными условиями. Введём вместо постоянных A_1 и A_2 две новые величины $|D|$ и Ψ с помощью соотношений

$$A_1 = |D| e^{j\Psi}; \quad A_2 = |D| e^{-j\Psi}.$$

Тогда решение (1.2.5) можно представить в виде

$$q = 2|D| e^{-\delta t} \cos(\omega t + \Psi). \quad (1.2.6)$$

Отсюда для $\dot{q}$ получим

$$\dot{q} = -2\delta|D| e^{-\delta t} \cos(\omega t + \Psi) - 2\omega|D| e^{-\delta t} \sin(\omega t + \Psi). \quad (1.2.7)$$

Определим начальные условия. В момент времени $t = 0$ ток через катушку индуктивности равен $\frac{E}{R_i}$, тогда как заряд конденсатора был равен нулю. Следовательно, начальные условия имеют вид

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = \frac{E}{R_i}. \quad (1.2.8)$$

Используя (1.2.6), (1.2.7), (1.2.8), определим константы $|D|$ и Ψ :

$$|D| = \frac{E}{2\omega R_i}, \quad \Psi = \frac{3\pi}{2}. \quad (1.2.9)$$

Используя эти соотношения, выражение (1.2.6) для заряда q можно представить в виде

$$q = \frac{E}{\omega R_i} e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (1.2.10)$$

Отсюда для напряжения U_C на конденсаторе получаем

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{E}{\omega R_i C} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

Дифференцируя выражение (1.2.10) по времени, получим выражение для тока в контуре, которое можно представить в виде

$$\dot{q} = \frac{E\omega_0}{\omega R_i} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.2.11)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega}$. Если имеет место сильное неравенство: $\omega \gg \delta$, то $\varphi \approx 0$, $\omega \approx \omega_0$, и выражение (1.2.11) для тока в контуре можно представить приближённым соотношением

$$\dot{q} \approx \frac{E}{R_i} e^{-\delta t} \cos \omega_0 t.$$

В случае, если имеет место неравенство

$$\delta^2 > \omega_0^2,$$

то, используя (1.2.5) и (1.2.8), для констант A_1 и A_2 получим

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{2R_i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.2.12)$$

Подставляя эти соотношения в (1.2.5), будем иметь

$$q(t) = \frac{E e^{-\delta t}}{R_i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right),$$

$$\dot{q}(t) = \frac{E}{R_i} e^{-\delta t} \left[\operatorname{ch} \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) \right].$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.2.2

Математический маятник имеет длину l и находится в покое. В момент времени $t = 0$ грузу маятника с помощью толчка сообщают скорость v_0 . Найти закон изменения во времени угла отклонения маятника от вертикали, считая, что при колебаниях маятника на его грузик действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = h\dot{x}$, где $\dot{x}$ — скорость грузика. Колебания маятника считать малыми.

Задача 1.2.3

На гладкой горизонтальной поверхности лежат два параллелепипеда, соединённые пружиной с жесткостью k (рис. 1.2.2). Массы параллелепипедов равны m_1 и m_2 . С помощью некоторого внешнего устройства параллелепипеды сдвинуты навстречу друг другу, так что вследствие деформации пружины её длина уменьшилась на x_0 по сравнению с длиной недеформированной пружины. В момент времени $t = 0$ внешнее устройство мгновенно освобождает параллелепипеды, и вся система начинает колебаться. Найти закон движения параллелепипедов в предположении, что силы трения отсутствуют.

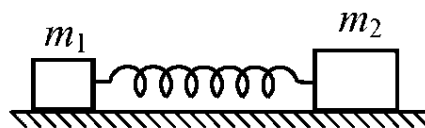


Рис. 1.2.2.

1.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Применительно к линейным системам справедлив принцип суперпозиции. Общее решение дифференциального уравнения линейной колебательной системы может быть представлено как сумма общего решения однородного уравнения (собственных колебаний) и частного решения неоднородного уравнения (вынужденных колебаний). Реальные колебательные системы диссипативны. Поэтому собственные колебания затухают. В реальных диссипативных системах, не содержащих источников энергии, стационарными могут быть только вынужденные колебания. Справедливость принципа суперпозиции в случае линейных систем позволяет находить стационарные движения при произвольной форме периодических внешних воздействий, используя представление этих воздействий в виде суммы элементарных сигналов и отыскивая стационарное движение как сумму движений, вызываемых в системе каждой элементарной составляющей внешнего воздействия в отдельности.

В частности, в качестве элементарных сигналов часто используются гармонические функции времени. В этом случае представление произвольного периодического воздействия в виде суммы гармонических функций осуществляется с помощью преобразования Фурье. При таком подходе исследование отклика системы на периодическое внешнее воздействие сложной формы

сводится к нахождению стационарного движения системы, вызываемого гармоническим внешним воздействием.

Решение этой задачи может быть найдено методом комплексных амплитуд. Этот метод основан на использовании принципа суперпозиции и позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению уравнения алгебраического.

В общем случае уравнение линейной колебательной системы, на которую действует гармоническая внешняя сила с амплитудой F и частотой p , может быть представлено в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos pt. \quad (1.3.1)$$

При использовании метода комплексных амплитуд к правой части уравнения (1.3.1) добавляют мнимое слагаемое

$$jF \sin pt. \quad (1.3.2)$$

В результате получается уравнение, которое можно представить в виде

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = F e^{jpt}. \quad (1.3.3)$$

здесь выражение $\tilde{x}$ обозначает комплексную величину. Вследствие справедливости принципа суперпозиции наличие в правой части этого уравнения мнимого добавка (1.3.2) приводит к появлению в решении мнимой части. При этом действительная часть решения уравнения (1.3.3) совпадает с решением исходного уравнения (1.3.1).

Частное решение уравнения (1.3.3) можно искать в виде

$$\tilde{x} = \tilde{X}_0 e^{jpt}. \quad (1.3.4)$$

Подставляя (1.3.4) в (1.3.3), получим для $\tilde{X}_0$ линейное алгебраическое уравнение

$$(-p^2 + 2j\delta p + \omega_0^2) \tilde{X}_0 = F.$$

Отсюда

$$\tilde{X}_0 = \frac{F}{\omega_0^2 - p^2 + 2j\delta p}.$$

Представим это выражение в виде

$$\tilde{X} = |\tilde{X}_0| e^{j\psi}, \quad (1.3.5)$$

где

$$|\tilde{X}_0| = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4p^2\delta^2}}; \quad \Psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}.$$

С учётом (1.3.5) решение модифицированного уравнения (1.3.3) можно представить в форме

$$\tilde{x} = |\tilde{X}_0| e^{j(pt + \Psi)}. \quad (1.3.6)$$

Действительная часть x этого выражения

$$x = |\tilde{X}_0| \cos(pt + \Psi) \quad (1.3.7)$$

и является искомым частным решением уравнения (1.3.1), то есть описывает вынужденное стационарное движение системы под действием гармонической внешней силы.

Как следует из (1.3.7), откликом системы на гармоническое внешнее воздействие является гармоническое колебание, амплитуда которого равна модулю величины $\tilde{X}$, определённой выражением (1.3.5), а фаза — аргументом этого выражения. Поэтому величина $\tilde{X}$ называется комплексной амплитудой.

Задача 1.3.1

Найти максимальное значение амплитуды тока в контуре L_2CR_2 (рис. 1.3.1) при условии, что подобраны оптимальные значения ёмкости C и коэффициента взаимной индукции M , а ЭДС генератора напряжения равна $E \cos \omega t$.

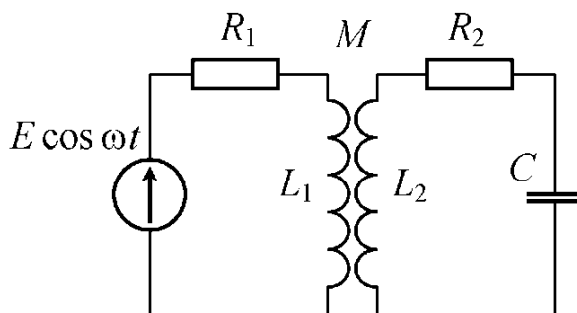


Рис. 1.3.1.

Решение

Используя правила Кирхгофа, получим систему уравнений, описывающую вынужденные движения в рассматриваемом устройстве:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = M \frac{di_2}{dt} + E \cos \omega t, \quad (1.3.8)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = M \frac{di_1}{dt}. \quad (1.3.9)$$

В правую часть уравнения (1.3.8) добавим мнимое слагаемое $jE \sin \omega t$. Представим систему уравнений (1.3.8), (1.3.9) в виде

$$L_1 \frac{d\tilde{i}_1}{dt} + R_1 \tilde{i}_1 = M \frac{d\tilde{i}_2}{dt} + E e^{j\omega t}, \quad (1.3.10)$$

$$L_2 \frac{d\tilde{i}_2}{dt} + R_2 \tilde{i}_2 + \frac{1}{C} \int \tilde{i}_2 dt = M \frac{d\tilde{i}_1}{dt}. \quad (1.3.11)$$

Здесь $\tilde{i}_1$ и $\tilde{i}_2$ — неизвестные комплексные величины. Будем искать их в виде

$$\tilde{i}_1 = \tilde{I}_1 e^{j\omega t}, \quad \tilde{i}_2 = \tilde{I}_2 e^{j\omega t}. \quad (1.3.12)$$

Подставляя (1.3.12) в (1.3.10), (1.3.11), получим систему алгебраических уравнений для определения комплексных амплитуд $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 z_1 + \tilde{I}_2 z_{\text{св}} &= E, \\ \tilde{I}_1 z_{\text{св}} + \tilde{I}_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= j\omega L_1 + R_1; \\ z_2 &= j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}; \quad z_{\text{св}} = j\omega M. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Решая систему уравнений (1.3.13), для $\tilde{I}_2$ получим

$$\tilde{I}_2 = \frac{-E z_{\text{св}}}{z_1 z_2 - z_{\text{св}}^2}. \quad (1.3.15)$$

Представим выражения для z_1 и z_2 , определённые соотношениями (1.3.14), в виде

$$z_1 = R_1 + jX_1, \quad z_2 = R_2 + jX_2, \quad (1.3.16)$$

где X_1 и X_2 — мнимые части соотношений соответственно z_1 и z_2 . Тогда выражение (1.3.15) можно представить в виде

$$\tilde{I}_2 = \frac{-jE \frac{\omega M}{z_1}}{R_2 + \frac{\omega^2 M^2}{|z_1|^2} R_1 + j \left(X_2 - \frac{\omega^2 M^2}{|z_1|^2} X_1 \right)}. \quad (1.3.17)$$

Отсюда для действительной амплитуды тока i_2 получаем:

$$|\tilde{I}_2| = \frac{E \frac{\omega M}{|z_1|}}{\sqrt{\left(R_2 + \frac{\omega^2 M^2}{|z_1|^2} R_1 \right)^2 + \left(X_2 - \frac{\omega^2 M^2}{|z_1|^2} X_1 \right)^2}}. \quad (1.3.18)$$

Это выражение приобретает максимальное значение $|\tilde{I}_2|_{\text{м}}$, равное

$$|\tilde{I}_2|_{\text{м}} = \frac{E \frac{\omega M}{|z_1|}}{R_2 + \left(\frac{\omega M}{|z_1|} \right)^2 R_1}, \quad (1.3.19)$$

при такой величине ёмкости C_2 , которая обращает в нуль второе слагаемое под корнем в знаменателе выражения (1.3.18). Отыскивая максимум этого выражения по ωM , найдём, что наибольшую амплитуду $|\tilde{I}_2|_{\text{мм}}$ ток i_2 имеет при

$$\omega M = |z_1| \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Если это условие выполнено, то из (1.3.19) получим:

$$|\tilde{I}_2|_{\text{мм}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

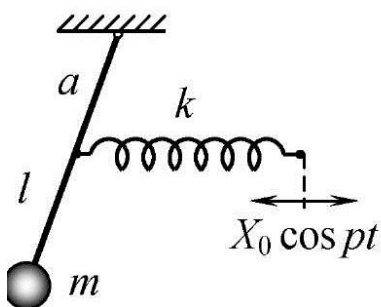
Заметим, что, сравнивая дифференциальные уравнения (1.3.8), (1.3.9) с уравнениями (1.3.13) для комплексных амплитуд, можно видеть, что переход от первой системы уравнений ко второй может быть осуществлён путём формальной замены операции дифференцирования умножением на $j\omega$, операции интегри-

рования делением на $j\omega$, а реально действующей ЭДС $E \cos \omega t$ амплитудой E .

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.3.2

Маятник состоит из жёсткого невесомого стержня длиной l , к одному из концов которого прикреплено тело с массой m , имеющее пренебрежимо малые размеры (рис. 1.3.2). Другой конец стержня может вращаться вокруг горизонтальной оси. На расстоянии a от оси к стержню прикреплена пружина с жесткостью k . Когда маятник находится в положении равновесия, пружина располагается горизонтально. Другой конец пружины перемещается по горизонтали в плоскости колебаний маятника по гармоническому закону:



$$x(t) = X_0 \cos pt.$$

Рис. 1.3.2.

Найти закон изменения во времени угла отклонения φ маятника от вертикали при условии, что при движении маятника возникают силы вязкого трения, колебания маятника можно считать малыми, а в положении равновесия системы стержень маятника располагается вертикально.

Задача 1.3.3

Найти эквивалентное сопротивление между точками a, a' при резонансе токов в колебательных контурах, показанных на рис. 1.3.3 (А, Б). Для упрощения выкладок считать, что в каждой

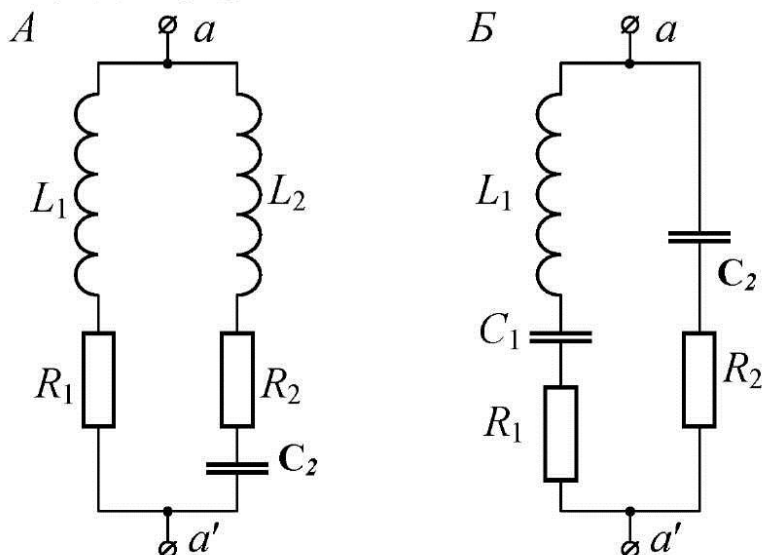


Рис. 1.3.3.

из параллельных ветвей контура активное сопротивление много меньше реактивного.

2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Существует два главных направления в развитии анализа движения нелинейных систем: аналитические методы и топологические методы графического интегрирования. Как правило, точное решение нелинейного уравнения, описывающего движение исследуемой системы, найти не удаётся. Поэтому аналитические методы основаны на получении и исследовании приближённых решений. Топологические методы позволяют получить ответы на некоторые существенные вопросы, не решая нелинейное уравнение, с помощью так называемых качественных методов исследования. Они основаны на изучении представления решений дифференциального уравнения в фазовом пространстве.

2.1. Качественный анализ движения на фазовой плоскости

При исследовании движения нелинейных систем оказывается чрезвычайно полезным использование некоторых наглядных понятий и представлений геометрического характера. Основным из них является понятие фазового пространства. Фазовым пространством называется множество всех возможных состояний системы. Состояние динамической системы однозначно определено, если заданы значения всех динамических переменных, используемых для описания движения системы. Если динамическая система имеет одну степень свободы, её фазовое пространство двумерно. В дальнейшем будем для определенности считать его плоскостью.

Каждому определённом состоянию системы соответствует некоторая точка фазового пространства. Эта точка называется изображающей точкой. Если в системе происходит некоторый процесс, в результате которого изменяется состояние системы, то изображающая точка описывает некоторую линию в фазовом пространстве. Эта линия называется фазовой траекторией. Совокупность всех возможных фазовых траекторий системы называ-

ется её фазовым портретом. Он позволяет одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть в системе при всевозможных начальных условиях. С его помощью можно выяснить, какие типы движений могут быть у рассматриваемой системы (незатухающие, затухающие или нарастающие колебания, апериодический процесс), какова устойчивость этих движений и при каких начальных условиях реализуются разные типы движений. Поэтому проблема построения фазовых портретов представляет значительный интерес.

Чтобы получить фазовый портрет, необходимо построить множество составляющих его фазовых траекторий. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий можно получить из уравнения движения системы.

Автономная система с одной степенью свободы в общем случае описывается уравнением вида:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (2.1.1)$$

Заменим это уравнение системой из двух эквивалентных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Отсюда, поделив второе уравнение на первое, получим искомое дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2.1.3)$$

Это уравнение проще исходного уравнения движения системы (2.1.1), так как порядок последнего на единицу выше. Тем не менее, в большом числе случаев точное интегрирование уравнения (2.1.3) не представляется возможным, и для построения фазовых траекторий приходится использовать различные приближенные методы.

Уравнение (2.1.3) определяет угол наклона касательной к фазовой траектории в данной точке фазовой плоскости. В фазовом пространстве могут быть как такие точки, в которых касательная имеет вполне определённый наклон, так и такие, в которых не существует определённого направления касательной к фазовой тра-

ектории. Эти точки называются особыми. В особых точках и числитель, и знаменатель правой части уравнения (2.1.3) одновременно обращаются в нуль, следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Используя эти соотношения и уравнения (2.1.2), находим, что в особых точках должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Следовательно, особые точки представляют на фазовой плоскости состояния равновесия системы. Координаты особых точек можно найти, решая систему уравнений (2.1.4).

Фазовые траектории в окрестностях особых точек определяют наиболее характерные черты фазового портрета системы. Поэтому, приступая к построению фазового портрета, целесообразно начинать с определения координат особых точек и построения фазовых траекторий в небольшой окрестности каждой из них.

Построить фазовые траектории в окрестностях особых точек можно различными способами. Можно получить уравнение фазовых траекторий, проинтегрировав соотношение (2.1.3). Если интегрирование этого соотношения не представляется возможным, но функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в правых частях уравнений (2.1.2) дифференцируемы, то можно получить приближённые уравнения фазовых траекторий, справедливые в небольших окрестностях особых точек, линеаризуя уравнения (2.1.2) и решая полученную систему линейных уравнений.

Если линеаризация уравнений (2.1.2) невозможна, но движение системы можно разделить на ряд последовательных этапов так, что на каждом из них система описывается линейным уравнением, допускающим аналитическое нахождение уравнения для отрезка фазовой траектории на данном этапе, то фазовую траекторию для движения в целом можно получить, так называемым методом поэтапного рассмотрения: сшивая на границах соседних этапов отрезки фазовых траекторий, найденные для каждого этапа в отдельности.

Приближённое построение фазовых траекторий можно также выполнить методом, основанным на аппроксимации малых отрезков фазовой траектории, исходящей из рассматриваемой точки,

малым отрезком касательной к фазовой траектории в этой точке. Наклон касательной определяется уравнением (2.1.3). В соответствии с этим методом, построив малый отрезок касательной, следует перейти в точку, расположенную в конце этого отрезка, и построить отрезок касательной в этой точке. Так, переходя от точки к точке, можно шаг за шагом построить всю фазовую траекторию в виде ломаной линии, состоящей из малых отрезков касательных. Точность такого построения зависит от малости длины отрезков.

На использовании касательных основан и получивший широкое распространение способ приближённого построения фазовых траекторий, называемый «методом изоклин». Изоклина — геометрическое место точек, в которых касательные к фазовым траекториям имеют один и тот же наклон. Уравнение изоклин можно получить из (2.1.3), положив в этом соотношении

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon.$$

Придавая параметру ε различные значения, получим множество уравнений для семейства изоклин. Начертив это семейство изоклин на фазовой плоскости, получим поле направлений фазовых траекторий. Ориентируясь по направлениям касательных, можно приближённо построить фазовые траектории.

Чтобы получить фазовый портрет системы во всём фазовом пространстве после того как в окрестностях особых точек фрагменты фазовых портретов уже построены, их необходимо дополнить фазовыми траекториями в остальных областях фазового пространства. В этих областях нет особых точек. Поэтому построение фазовых траекторий в этих областях обычно не представляет труда и может быть выполнено одним из упомянутых выше методов.

Задача 2.1.1

Построить фазовый портрет системы, движение которой описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

где все коэффициенты a , b , c и d положительны, а возможные состояния системы ограничены областью значений переменных, удовлетворяющих неравенствам

$$x \geq 0; \quad y \geq 0. \quad (2.1.7)$$

Решение

Неравенство (2.1.7) означает, что фазовым пространством системы является первый квадрант фазовой плоскости. Найдём координаты особых точек фазового пространства. Для этого положим в (2.1.6) $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ и решим полученную систему уравнений. В результате найдём, что в фазовом пространстве системы имеется две особые точки, координаты которых определяются равенствами

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad (2.1.8)$$

$$x_2 = \frac{c}{d}, \quad y_2 = \frac{a}{b}. \quad (2.1.9)$$

Получим уравнение фазовых траекторий в окрестности особой точки (2.1.8), расположенной в начале координат. Для этого положим, что в момент времени $t = 0$ имеем $x = x_0$, $y = y_0$, где x_0 и y_0 — малые величины. Линеаризуя уравнения (2.1.6) и решая полученную систему линейных уравнений с указанными выше начальными условиями, найдём зависимость фазовых переменных от времени:

$$x(t) = x_0 e^{at}; \quad y(t) = y_0 e^{-ct}. \quad (2.1.10)$$

Отсюда, исключая время, получим

$$xy^\gamma = \text{const}, \quad (2.1.11)$$

где $\gamma = \frac{a}{c}$. Выражение (2.1.11) есть уравнение семейства гипербол, причём асимптоты этого семейства совпадают с осями координат. Таким образом, фазовыми траекториями системы в небольшой окрестности начала координат является семейство гипербол.

Для получения уравнения фазовых траекторий в окрестности второй особой точки с координатами (2.1.9), положим

$$x = x_2 + \xi; \quad y = y_2 + \eta, \quad (2.1.12)$$

где ξ и η — малые вариации. Подставляя (2.1.12) в систему уравнений (2.1.6), линеаризуя её и используя (2.1.9), получим уравнения для вариаций:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\frac{bc}{d}\eta, \\ \dot{\eta} &= \frac{ad}{b}\xi.\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Решая уравнения (2.1.13), найдём, что фазовые траектории удовлетворяют выражению

$$\xi^2 + \frac{b^2c}{ad^2}\eta^2 = \text{const}.\tag{2.1.14}$$

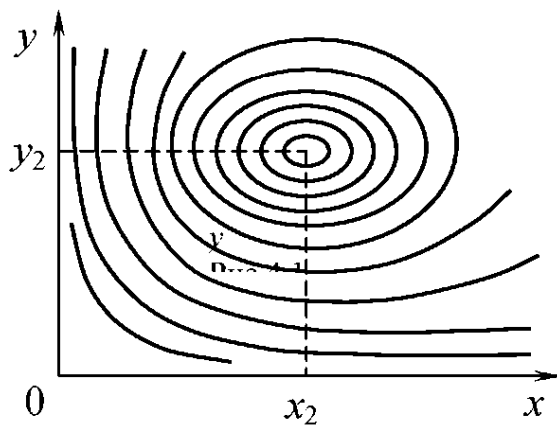


Рис. 2.1.1.

Соотношение (2.1.14) описывает семейство эллипсов. Следовательно, фазовые траектории вблизи второй особой точки являются семейством эллипсов.

В остальных областях фазового пространства фазовые траектории являются линиями, форма которых постепенно изменяется от гипербол вблизи начала координат до эллипсов в окрестности второй особой точки. Фазовый портрет в целом показан на рисунке 2.1.1.

Задача 2.1.2

Тело с массой m находится на горизонтальной поверхности между двумя пружинами и, двигаясь без трения, совершает колебательное движение, попеременно сжимая то правую пружину с жесткостью k , то левую с жесткостью $10k$ (рис. 2.1.2). В состоянии равновесия обе пружины не деформированы, но касаются тела без зазоров.

1. Методом поэтапного рассмотрения получить аналитическое выражение для фазовых траекторий и построить фазовый портрет.
2. Как изменится вид фазовых траекторий, если жёсткость одной из пружин увеличивать до бесконечности?

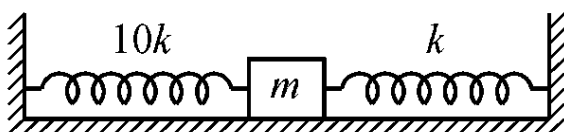


Рис. 2.1.2.

3. Как изменится вид фазовых траекторий в случае, если в состоянии равновесия между телом и пружинами будет зазор?

Решение

Направим ось Ox по линии движения тела. Будем считать, что точка $x = 0$ соответствует положению равновесия системы, в котором пружины не деформированы. Силу, возвращающую тело к положению равновесия, можно представить выражением

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{при } x > 0, \\ k_2 x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты упругости соответственно правой и левой пружин. Как можно видеть из этого выражения, колебательная система нелинейна, причём в точке $x = 0$ функция $f(x)$ не дифференцируема. Вместе с тем, весь интервал значений x , в котором перемещается тело, можно разделить на две области: $x > 0$ и $x < 0$, в каждой из которых система линейна. Это позволяет для построения фазового портрета воспользоваться методом поэтапного рассмотрения. Найдём уравнения фрагментов фазовых траекторий, расположенных в каждой из указанных выше областей.

Когда тело находится в области $x > 0$, сжата только правая пружина и движение тела описывается уравнением

$$m\ddot{x} + k_1 x = 0. \quad (2.1.15)$$

Перейдём от этого уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка. С этой целью положим

$$\dot{x} = y. \quad (2.1.16)$$

Тогда из (2.1.15) будем иметь

$$\dot{y} = -\omega_1^2 x, \quad (2.1.17)$$

где $\omega_1^2 = k_1/m$. Отсюда, поделив (2.1.17) на (2.1.16) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_1^2 \frac{x}{y},$$

интегрируя которое, найдём

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.1.18)$$

где $a^2 = C/\omega_1^2$; $b^2 = C$; C — постоянная интегрирования. Полученное соотношение является уравнением семейства эллипсов,

охватывающих точку $x = 0$, причём эксцентриситет эллипсов этого семейства зависит от жесткости правой пружины. Начальные условия определяют значение константы C и тем самым позволяют выделить из этого семейства тот эллипс, половина которого, расположенная в правой полуплоскости, совпадает с расположенной там же частью фазовой траектории движения с заданными начальными условиями.

Аналогично можно показать, что часть фазовой траектории, расположенная в области $x < 0$, является левой половиной эллипса, охватывающего точку $x = 0$, но эксцентриситет этого эллипса зависит от жесткости левой пружины. Для сшивания частей фазовых траекторий, расположенных справа и слева от точки $x = 0$, воспользуемся тем, что в процессе колебаний скорость и координата тела должны быть непрерывными функциями времени, так как кинетическая и потенциальная энергии системы не могут изменяться скачками. Отсюда следует, что в точке $x = 0$ полуэллипсы, расположенные справа и слева, должны непрерывно переходить друг в друга. Поэтому фазовый портрет движения в целом имеет вид, показанный на рисунке 2.1.3.

Если жёсткость одной из пружин устремить к бесконечности, то на фазовой плоскости соответствующая система полуэллипсов выродится в совокупность прямолинейных отрезков, лежащих на оси ординат.

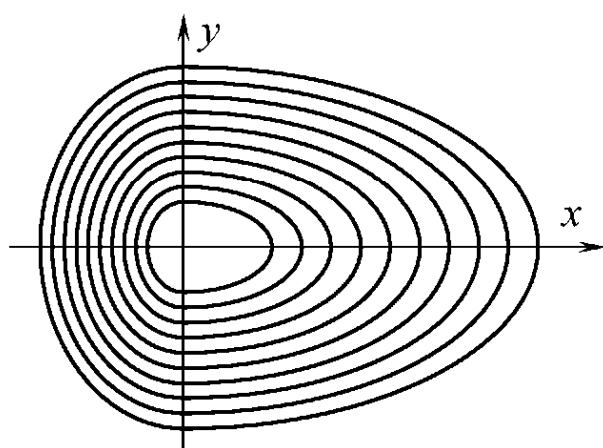


Рис. 2.1.3.

Если между пружинами появится зазор, то движение тела в зазоре должно происходить с постоянной скоростью, так как по условию задачи трение отсутствует. Следовательно, на фазовой плоскости правая и левая системы полуэллипсов должны соединяться отрезками прямых линий, параллельных оси абсцисс.

Если между пружинами появится зазор, то движение тела в зазоре должно происходить с постоянной скоростью, так как по условию задачи трение отсутствует. Следовательно, на фазовой плоскости правая и левая системы полуэллипсов должны соединяться отрезками прямых линий, параллельных оси абсцисс.

Задача 2.1.3

Движение колебательной системы описывается уравнением

$$m\ddot{x} + kx + \gamma x^3 = 0. \quad (2.1.19)$$

Используя метод изоклин, построить фазовую траекторию движения тела массой $m = 0,2 \text{ кг}$ на пружине жесткостью $k = 1 \text{ Н/м}$ с коэффициентом нелинейности $\gamma = 4 \text{ Н/м}^3$ для следующих начальных условий: при $t = 0$ $\dot{x} = 5 \text{ м/с}$, $x = 0$.

Решение

Заменяем уравнение (2.1.19) системой из двух уравнений первого порядка. С этой целью положим

$$\dot{x} = y.$$

Тогда из (2.1.19) получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx + \gamma x^3}{my}. \quad (2.1.20)$$

Введём обозначение

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon. \quad (2.1.21)$$

Используя (2.1.21), из (2.1.20) получим

$$y = -\frac{kx + \gamma x^3}{\varepsilon m}. \quad (2.1.22)$$

Соотношение (2.1.22) является уравнением изоклины, в точках которой тангенс угла наклона касательных к интегральной кривой равен ε . Используя (2.1.22), построим на фазовой плоскости семейство изоклин для значений

$$\varepsilon = 0; \pm 1; \pm 3; \pm 10; \pm 30; \infty.$$

Как можно видеть из (2.1.22), изоклина, соответствующая $\varepsilon = 0$ в нашем случае совпадает с осью ординат, а изоклина, соответствующая $\varepsilon = \infty$ — с осью абсцисс. Все упомянутые изоклины изображены на рис. 2.1.4.

На изоклины целесообразно нанести небольшие отрезки касательных

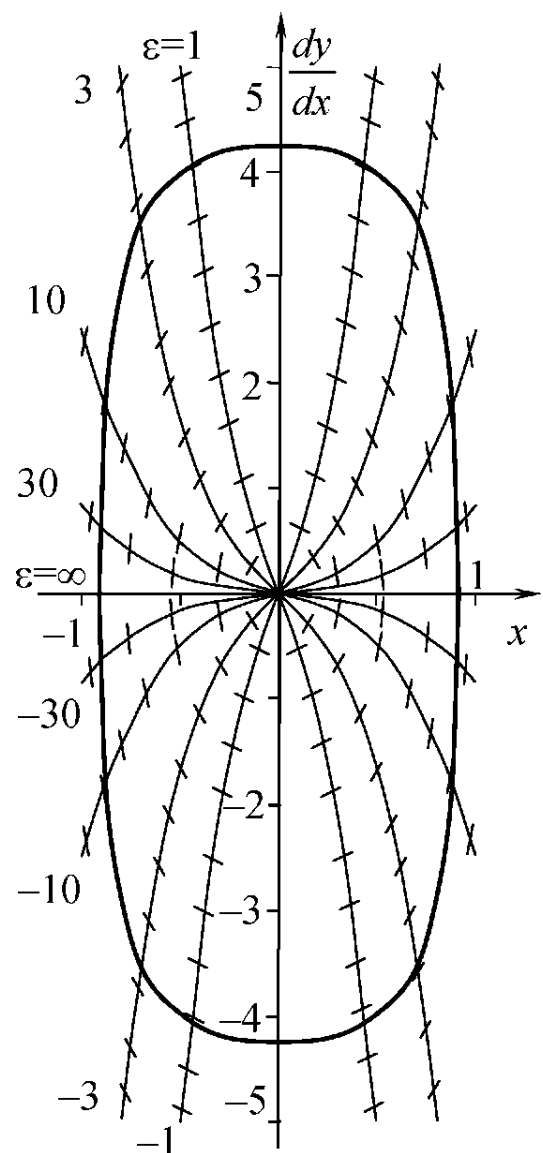


Рис. 2.1.4

тельных к интегральным кривым. Эти отрезки также изображены на рис. 2.1.4. Они образуют поле касательных, ориентируясь по которому, можно приближённо построить фазовую траекторию. Такое построение для фазовой траектории, проходящей через заданную точку фазовой плоскости, выполнено на рис. 2.1.4.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1.4

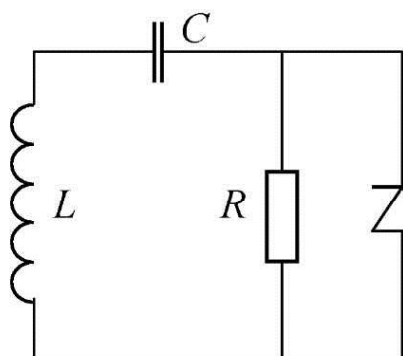


Рис. 2.1.5.

Электрическая колебательная система состоит из последовательно соединённых катушки с индуктивностью L , конденсатора с ёмкостью C и резистора с сопротивлением R (рис. 2.1.5). Резистор зашунтирован идеальным диодом. Принимая за независимую переменную ток в катушке, построить (качественно) фазовый портрет системы для трёх случаев:

$$R = 0, R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}, R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

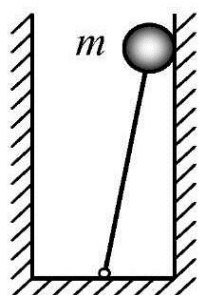


Рис. 2.1.6.

Задача 2.1.5

Маятник представляет собой жёсткий стержень с грузиком на конце и расположен грузиком вверх между двумя жёсткими вертикальными стенками, отстоящими от оси вращения маятника на равных расстояниях $d < l$, где l — длина маятника, d — расстояние от оси вращения до стенок (рис. 2.1.6). Нарисовать (качественно) фазовый портрет системы для трёх случаев: 1 — движение между стенками происходит без трения, а при ударах о стенки часть энергии маятника переходит в тепло, 2 — удары о стенки абсолютно упругие, но при движении в зазоре между стенками имеется вязкое трение, 3 — удары о стенки абсолютно упругие, трение отсутствует.

Задача 2.1.6

Пружинный маятник (рис. 2.1.7) состоит из грузика с массой $m = 1$ кг, подвешенного на пружине, у которой сила упругости F_y

связана с удлинением x соотношением: $F_y = k(x + \gamma x^3)$, где $k = 9 \text{ Н/м}$ и $\gamma = 1 \text{ м}^{-2}$. При колебаниях грузика возникает сила вязкого трения $F_m = h dx/dt$, где $h = 1 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$. Пользуясь методом изоклин, построить фазовую траекторию движения с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -15 \text{ м/с}$.

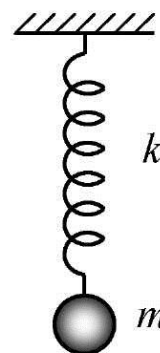


Рис. 2.1.7.

Рекомендации: перейти к безразмерному времени, ограничиться построением изоклин с $\varepsilon = 0; \pm 1; \pm 3; \infty$. Ограничиться изменением x в пределах: $-2,5 \leq x \leq 1,0$ и изменением y в пределах: $-15 \leq y \leq 10$.

Задача 2.1.7

Длина l нити математического маятника (рис. 2.1.8, А) периодически изменяется на величину Δl по закону, показанному на рис. 2.1.8, Б, с периодом $\tau = T_0/2$, где T_0 — период колебаний маятника при $l = l_0$, l_0 — среднее значение длины нити.

Считая, что трение отсутствует, и используя метод поэтапного рассмотрения, нарисовать фазовые траектории движения системы для двух случаев: а) фазовые соотношения между изменениями длины маятника и изменениями угла отклонения оптимальны для вложения энергии в систему, б) указанные фазовые соотношения оптимальны для отбора энергии из системы.

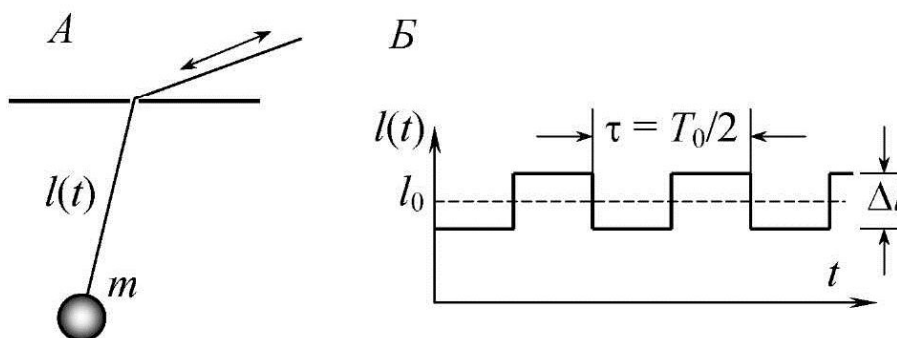


Рис. 2.1.8.

Задача 2.1.8

Движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x} = y + E,$$

$$\dot{y} = Cx + By + D.$$

Найти координаты особых точек и нарисовать качественно фазовый портрет системы для следующих случаев:

- | | |
|--|--|
| 1. $B = 0, C < 0$; | 4. $B < 0, C < 0; C < \frac{B^2}{4}$; |
| 2. $B = 0, C > 0$; | 5. $B > 0, C < 0; C > \frac{B^2}{4}$; |
| 3. $B < 0, C < 0; C > \frac{B^2}{4}$; | 6. $B > 0, C < 0; C < \frac{B^2}{4}$. |

Считать, что $E > 0, D > 0, |EB| > D$.

Задача 2.1.9

Для задачи 1.1.5 построить фазовый портрет системы. Ограничиться рассмотрением углов отклонения $-2\pi < \varphi < 2\pi$.

Задача 2.1.10

Небольшое тело совершает периодическое колебательное движение, соскальзывая с одной наклонной плоскости, поднимаясь по другой и двигаясь в обратном направлении (рис. 2.1.9). Обе наклонные плоскости образуют с горизонтом угол α . Пренебрегая трением, построить фазовый портрет системы.

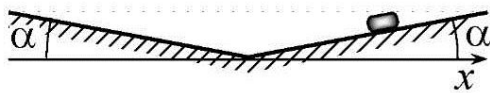


Рис. 2.1.9.

2.2. Слабо нелинейные системы с малыми потерями энергии. Метод гармонического баланса

Метод гармонического баланса является одним из наиболее простых приближённых методов аналитического исследования движения нелинейных колебательных систем. В своей наиболее простой форме, используемой ниже, этот метод позволяет исследовать только стационарные режимы движения.

Если на слабо нелинейную и слабо диссипативную систему действует гармоническая внешняя сила, то уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) + P \cos pt. \quad (2.2.1)$$

Здесь слагаемое $F(x, \dot{x})$ объединяет малые нелинейные и диссипативные члены уравнения, P и p — соответственно амплитуда и частота внешней силы. В соответствии с методом гармонического баланса в первом приближении решение уравнения (2.2.1) можно искать в виде

$$x = a_0 + a \cos pt + b \sin pt. \quad (2.2.2)$$

Здесь a и b — амплитуды первых гармонических составляющих решения, a_0 — постоянная составляющая, которая может появиться в решении при наличии в системе нелинейных элементов. Подставляя (2.2.2) в выражение для функции $F(x, \dot{x})$, разлагая полученное соотношение в ряд Фурье и отбрасывая все члены этого ряда кроме постоянной составляющей и первой гармоники, представим $F(x, \dot{x})$ приближенным выражением

$$F(x, \dot{x}) \approx \beta_0 + \beta_1 \cos pt + \beta_2 \sin pt. \quad (2.2.3)$$

Здесь

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) d(pt), \quad (2.2.4)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) \cos pt d(pt), \quad (2.2.5)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) \sin pt d(pt). \quad (2.2.6)$$

Подставляя (2.2.3) в (2.2.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармонических функциях в правой и левой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0 , a и b :

$$\omega_0^2 a_0 = \beta_0,$$

$$a(\omega_0^2 - p^2) = \beta_1 + P,$$

$$b(\omega_0^2 - p^2) = \beta_2.$$

При исследовании собственных колебаний консервативных систем решение (2.2.2) можно упростить, оставив, например, только два первых члена. Если, кроме того, нелинейная возвра-

шающая сила описывается нечётной функцией $F(x)$ координаты x , то в решении должна отсутствовать постоянная составляющая. В этом случае уравнение (2.2.1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x), \quad (2.2.7)$$

а решение этого уравнения можно искать в форме

$$x = a \cos pt. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.2.8) в $F(x)$, разлагая полученное выражение в ряд Фурье и ограничиваясь первой гармоникой, получим

$$F(x) \approx \beta_1 \cos \omega t. \quad (2.2.9)$$

Подставляя (2.2.8) и (2.2.9) в уравнение (2.2.7) и приравнявая коэффициенты при $\cos \omega t$ справа и слева от знака равенства, для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\beta_1}{a}. \quad (2.2.10)$$

Задача 2.2.1

Пружинный маятник состоит из грузика с массой m , подвешенного на пружине. Считая, что при смещении грузика от положения равновесия возникает возвращающая сила $f(x) = -kx - \gamma x^3$, найти зависимость частоты собственных колебаний системы от их амплитуды.

Решение

В данном случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = f(x). \quad (2.2.11)$$

Подставляя сюда выражение для $f(x)$, и используя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad F(x) = -\frac{\gamma x^3}{m},$$

преобразуем уравнение (2.2.11) к виду, совпадающему с (2.2.7). Будем искать решение в виде (2.2.8). Используя (2.2.5), для коэффициента β_1 получим

$$\beta_1 = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} a^3.$$

Подставляя это соотношение в (2.2.10), найдём выражение для квадрата частоты собственных колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} a^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.2.2

Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L и нелинейного конденсатора, ёмкость которого зависит от заряда q по закону $C = \frac{C_0}{1 + \gamma q^2}$, где C_0 и γ — константы. Пользуясь методом гармонического баланса, найти зависимость частоты собственных колебаний контура от их амплитуды.

Задача 2.2.3

Грузик с массой m подвешен на пружине и совершает колебания в вертикальном направлении под действием внешней силы $F_0 \cos pt$, приложенной к грузику. Считая, что при смещении грузика от положения равновесия возникает сила упругости $\Phi = -kx - \gamma x^3$, а сила трения пропорциональна скорости грузика, составить уравнение движения, решить его методом гармонического баланса, получить зависимость амплитуды колебаний грузика от частоты p и качественно построить график этой зависимости для случаев $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$.

Задача 2.2.4

Идеальный математический маятник совершает колебания с амплитудой 15° . На сколько процентов отличается частота этих колебаний от частоты малых колебаний? При какой амплитуде частота колебаний маятника будет отличаться от частоты малых колебаний на 2%?

Задача 2.2.5

Для колебательной системы, описанной в задаче 2.1.10, пренебрегая трением,

1. написать уравнение движения и, пользуясь методом гармонического баланса, получить приближенное выражение для зависимости периода движения от амплитуды колебаний в горизонтальном направлении.
2. Получить точное выражение для той же зависимости, пользуясь законами механики, и определить в процентах погрешность приближенного выражения при $\alpha \rightarrow 0$.

Задача 2.2.6

Небольшое тело с массой m может без трения двигаться по горизонтальной поверхности между двумя пружинами с жёсткостью k (рис. 2.2.1). Между пружинами имеется зазор шириной L . Тело совершает периодическое движение, двигаясь по инерции в зазоре между пружинами и периодически «отражаясь» то от одной пружины, то от другой.

1. Пользуясь методом гармонического баланса, найти зависимость частоты колебаний от их амплитуды A в предположении, что размеры тела пренебрежимо малы, а ширина зазора L удовлетворяет условию $L \ll A$. В решении удерживать только члены первого порядка малости относительно L/A .

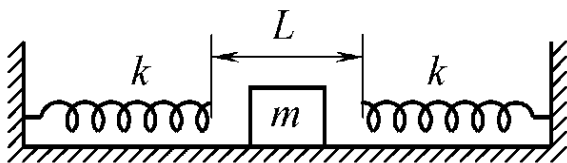


Рис. 2.2.1.

2. Пользуясь законами механики и методом поэтапного рассмотрения, получить точное выражение для частоты. Сравнить результаты обоих расчетов.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Адиабатически медленное изменение параметров системы. Адиабатические инварианты

Пусть Λ — один из параметров консервативной системы, совершающей периодическое движение с периодом T . Изменение параметра Λ считается адиабатически медленным, если измене-

ние Λ за период движения много меньше чем Λ , то есть если выполняется условие

$$\left| \frac{d\Lambda}{dt} \right| \frac{T}{\Lambda} \ll 1.$$

Введём обозначение

$$\left| \frac{d\Lambda}{dt} \right| \frac{T}{\Lambda} = \zeta.$$

Величины I , изменяющиеся много медленнее, чем Λ , называются адиабатическими инвариантами системы. Относительная скорость их изменения есть величина более высокого порядка малости, чем ζ :

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \frac{T}{I} \ll \zeta.$$

Адиабатический инвариант I можно вычислить с помощью соотношения

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (3.1.1)$$

где q — обобщённая координата, p — обобщённый импульс, сопряжённый с координатой q , а интеграл берётся по фазовой траектории периодического движения, взятой при условии, что $\Lambda = \text{const}$. Интеграл в выражении (3.1.1) равен площади S фигуры, ограниченной фазовой траекторией на плоскости p, q . Поэтому выражение (3.1.1) можно представить в виде

$$I = \frac{S}{2\pi}. \quad (3.1.2)$$

Задача 3.1.1

Грузик с массой m , подвешенный на пружине, совершает колебания с частотой ω . Считая, что это устройство является гармоническим осциллятором, и пренебрегая трением, найти адиабатический инвариант системы.

Решение

Для энергии E гармонического осциллятора с массой m и собственной частотой ω имеем

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

На плоскости p, q это выражение является уравнением эллипса с полуосями $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. Площадь эллипса S определяется выражением $S = \pi ab$. Отсюда для адиабатического инварианта гармонического осциллятора из (3.1.2) получим:

$$I = \frac{E}{\omega}.$$

Задача 3.1.2

В колебательном контуре без потерь энергии возбуждены колебания. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе, имеющем ёмкость C , равна U_0 . Ёмкость колебательного контура адиабатически медленно изменилась на величину ΔC . Найти адиабатический инвариант колебательного контура и с его помощью определить относительное изменение $\frac{\Delta U}{U_0}$ амплитуды напряжения на конденсаторе.

Решение

Выберем в качестве обобщённой координаты q заряд конденсатора. Сопряжённый с ней обобщённый импульс p определяется выражением

$$p = \partial\lambda / \partial\dot{q}, \quad (3.1.3)$$

где λ — функция Лагранжа. В нашем случае

$$\lambda = \frac{L\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}, \quad (3.1.4)$$

где L и C — соответственно индуктивность и ёмкость колебательного контура. Используя (3.1.3) и (3.1.4), для обобщённого импульса получаем

$$p = L\dot{q}. \quad (3.1.5)$$

С учётом (3.1.5) гамильтониан системы можно представить в виде

$$H = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} = E, \quad (3.1.6)$$

где E — энергия системы. Отсюда получаем уравнение фазовой траектории:

$$\frac{p^2}{2LE} + \frac{q^2}{2CE} = 1. \quad (3.1.7)$$

Это — уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2CE}; \quad b = \sqrt{2LE}. \quad (3.1.8)$$

Площадь эллипса определяется выражением

$$S = \pi ab. \quad (3.1.9)$$

Отсюда, используя (6.2), находим адиабатический инвариант колебательного контура:

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega_0}. \quad (3.1.10)$$

Здесь $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ — резонансная частота колебательного контура.

В силу адиабатической инвариантности выражения E/ω_0 , эта величина должна иметь одно и то же значение как до изменения ёмкости, так и после него. Отсюда

$$\frac{E(C)}{\omega_0(C)} = \frac{E(C + \Delta C)}{\omega_0(C + \Delta C)}. \quad (3.1.11)$$

Величина E равна максимальному значению энергии, запасённой в конденсаторе, то есть значению энергии, запасённой в конденсаторе, когда напряжение на нём максимально. Пусть до изменения ёмкости это напряжение равно U_0 . Тогда из (3.1.11) находим

$$\frac{CU_0^2}{2} \sqrt{LC} = \frac{(C + \Delta C)(U_0 + \Delta U_0)^2}{2} \sqrt{L(C + \Delta C)},$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)^{-\frac{3}{4}} - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1.3

Математический маятник, имеющий длину l , колеблется без потерь энергии с амплитудой φ_0 . Длина нити маятника адиабатически медленно изменяется на величину Δl . Считая колебания маятника малыми, найти адиабатический инвариант маятника и определить относительное изменение амплитуды колебаний $\frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}$.

Задача 3.1.4

Показать, что при адиабатически медленном изменении масс Земли или Солнца эксцентриситет орбиты Земли является адиабатическим инвариантом.

3.2. Изменение параметров с частотой, соизмеримой с частотой собственных движений системы

А. Скачкообразное изменение параметров

Как правило, изменение параметров колебательной системы осуществляется некоторым внешним по отношению к системе устройством. Это устройство принято называть генератором накачки. В общем случае для изменения параметров системы требуется некоторое количество энергии. В зависимости от фазовых соотношений между изменением параметра и колебанием системы это количество энергии может передаваться как от генератора накачки к колебательному процессу в системе, так и в обратном направлении. Если мощность, передаваемая от генератора накачки колебательному процессу, превышает суммарную мощность потерь в диссипативных элементах колебательной системы, то интенсивность колебательного процесса увеличивается. В этом случае в системе возможно параметрическое возбуждение колебаний, называемое также параметрическим резонансом.

На практике идеальное скачкообразное изменение параметров неосуществимо. Поэтому рассматриваемый случай может соответствовать реальным процессам лишь приближённо. Условия возбуждения колебаний при скачкообразном изменении парамет-

ров можно найти, приравнявая энергию, передаваемую системе за период её движения, к потерям энергии в системе за то же время.

Задача 3.2.1

Один конец тонкой невесомой нити закреплён неподвижно в точке A , а другой проходит через небольшое отверстие B в неподвижной пластине (рис. 3.2.1). К этому концу нити приложена сила T , натягивающая нить. Точка A и отверстие B расположены на одной вертикали. На нити, в середине между точкой A и отверстием B находится небольшая бусинка, имеющая массу m . Если бусинку сместить в горизонтальном направлении и затем отпустить, она будет совершать затухающие колебания с частотой ω_0 . Считая, что натяжение нити изменяется скачкообразно с частотой $2\omega_0$ в соответствии с графиком, приведённым на рисунке 3.2.2, найти минимальное значение коэффициента модуляции натяжения нити $m = \Delta T/T$, при котором наступает параметрическое возбуждение колебаний.

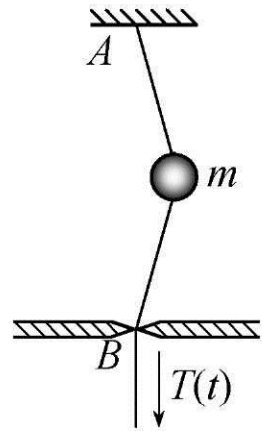


Рис. 3.2.1.

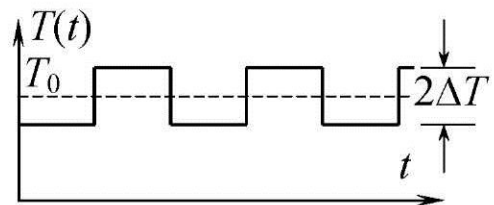


Рис. 3.2.2.

Решение

Пусть бусинка смещена по горизонтали на такое расстояние, при котором нить вблизи точки A отклоняется от вертикали на угол α . Тогда сила F , возвращающая бусинку к положению равновесия, определяется выражением

$$F = 2T \sin \alpha,$$

где T — натяжение нити. Отсюда для энергии W , которую необходимо затратить, чтобы отклонить бусинку на такое расстояние, получим

$$W = \int_0^{\alpha} l T \sin \alpha d\alpha. \quad (3.2.1)$$

Здесь l — расстояние между точкой A и отверстием B . Считая, что угол α достаточно мал и полагая $\sin \alpha \approx \alpha$, получим

$$W = \frac{lT\alpha^2}{2}. \quad (3.2.2)$$

Найдём величину потерь энергии за период колебаний из-за наличия трения. Для этого воспользуемся определением добротности Q :

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{\Delta W}. \quad (3.2.3)$$

Здесь $W_{\text{зап}}$ — энергия, запасённая в системе, ΔW — потери энергии за период колебаний. Если амплитуда колебаний равна α , то запасённая энергия определяется выражением (3.2.2). Тогда, используя (3.2.2) и (3.2.3), для потерь энергии за период колебаний получим

$$\Delta W = \frac{\pi l T \alpha^2}{Q}. \quad (3.2.4)$$

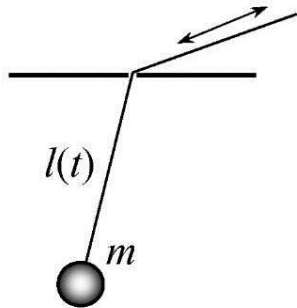


Рис. 3.2.3.

Как следует из условия задачи, за период колебаний натяжение нити дважды увеличивается на $2\Delta T$. Поэтому в соответствии с (3.2.2) вложение энергии $\Delta W_{\text{вл}}$ за то же время составляет

$$\Delta W_{\text{вл}} = 2\Delta T l \alpha^2. \quad (3.2.5)$$

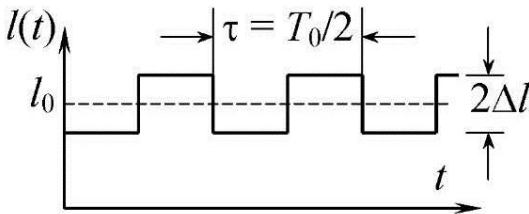


Рис. 3.2.4.

Для возбуждения колебаний необходимо выполнение условия

$$\Delta W_{\text{вл}} = \Delta W.$$

Отсюда, используя (3.2.4) и (3.2.5) получаем условие параметрического возбуждения

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{2Q}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2.2

Длина нити l математического маятника (рис. 3.2.3) периодически изменяется на величину $2\Delta l$ по закону меандра (рис. 3.2.4) с периодом $\tau = T_0/2$, где T_0 — период колебаний маятника при $l = l_0$, где l_0 — среднее значение длины нити. Считая,

что при движении маятника появляются силы вязкого трения, а добротность маятника равна Q , найти условие параметрического возбуждения колебаний.

Задача 3.2.3

Детская игрушка (рис. 3.2.5) состоит из двух нитей, проходящих через отверстия в пуговице и связанных у концов, так, что образуется замкнутое кольцо. Если это кольцо с одной стороны пуговицы накинута на палец правой руки, а с другой стороны пуговицы — на палец левой руки, и, разместив пуговицу посередине, натянуть нити с некоторой силой F , то пуговица сможет совершать крутильные колебания. Если величину силы F изменять с частотой в два раза превышающей частоту крутильных колебаний пуговицы, то амплитуда крутильных колебаний увеличивается вследствие параметрического резонанса. Считая, что при вращении пуговицы возникает вязкое трение, пропорциональное угловой скорости, добротность крутильной колебательной системы равна Q , а сила F изменяется во времени в соответствии с графиком рис. 3.2.6, найти минимальную величину коэффициента модуляции силы $m_{\min} = \left(\frac{\Delta F}{F} \right)_{\min}$, при котором наступает параметрическое возбуждение колебаний.

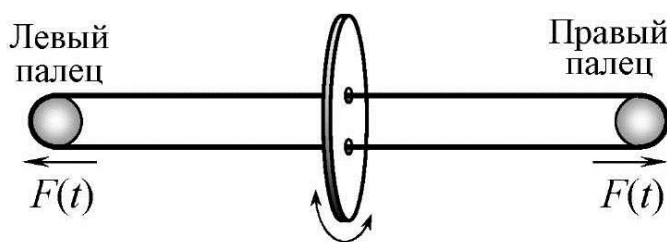


Рис. 3.2.5.

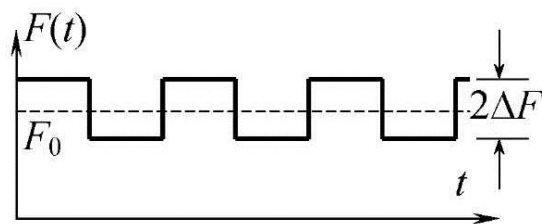


Рис. 3.2.6.

Б. Изменение параметров по гармоническому закону

Если закон изменения параметров системы таков, что коэффициенты дифференциального уравнения, описывающего колебательный процесс, изменяются во времени по гармоническому закону, то для исследования параметрического возбуждения колебаний удобно использовать метод медленно меняющихся ам-

плитуд. Этот метод помимо условий возбуждения позволяет находить стационарные режимы, а также исследовать их устойчивость и переходные процессы.

Если коэффициент модуляции параметров системы мал, то при использовании безразмерного времени $\tau = \omega t$ дифференциальное уравнение колебаний системы с малыми диссипацией, нелинейностью и глубиной модуляции параметра можно представить в виде

$$x'' + x = F(x, x', \tau). \quad (3.2.6)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени, а $F(x, x', \tau)$ — малый по сравнению с единицей член уравнения, объединяющий слагаемые, описывающие диссипацию, нелинейность и модуляцию параметра. В соответствии с методом медленно меняющихся амплитуд решение уравнения (3.2.6) можно искать в виде

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad (3.2.7)$$

где u и v — медленно меняющиеся за период колебаний системы функции, для которых справедливы приближённые укороченные уравнения

$$u' = \varphi(u, v); \quad v' = \psi(u, v). \quad (3.2.8)$$

Здесь величины $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ определяются соотношениями

$$\varphi(u, v) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \sin \tau d\tau,$$

$$\psi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \cos \tau d\tau.$$

Для отыскания стационарных значений амплитуд u и v положим в уравнениях (3.2.8) $u' = 0$ и $v' = 0$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= 0, \\ \psi(u, v) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

решая которую, найдём стационарные амплитуды u_i и v_i .

Устойчивость стационарного режима с амплитудами u_i и v_i исследуем методом возмущений. Положим

$$\begin{aligned} u &= u_i + \eta, \\ v &= v_i + \zeta, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где η и ζ — малые вариации. Подставим (3.2.10) в (3.2.8), разложим полученные уравнения в ряд Тейлора около точки $u = u_i$ и $v = v_i$ и ограничимся в этом разложении линейными относительно η и ζ членами. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений для малых вариаций η и ζ :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \eta + \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left[\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \eta + \left[\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \zeta. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Будем искать решение системы (3.2.11) в виде

$$\eta = \eta_0 e^{\lambda \tau}; \quad \zeta = \zeta_0 e^{\lambda \tau}. \quad (3.2.12)$$

Подставляя (3.2.12) в (3.2.11), получим квадратное уравнение для определения значений характеристического показателя λ . Если реальная часть хотя бы одного из возможных значений характеристического показателя положительна, то рассматриваемый стационарный режим неустойчив.

Находит также применение вариант метода медленно меняющихся амплитуд, в соответствии с которым решение уравнения (3.2.6) ищется в виде

$$x = A(\tau) \cos[\tau + \varphi(\tau)], \quad (3.2.13)$$

где амплитуда $A(\tau)$ и фаза $\varphi(\tau)$ предполагаются медленно меняющимися функциями времени. Такой вид решения приводит к укороченным уравнениям вида

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \sin[\tau + \varphi(\tau)] d[\tau + \varphi(\tau)], \\ A\varphi' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \cos[\tau + \varphi(\tau)] d[\tau + \varphi(\tau)]. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Нахождение стационарных режимов и исследование их устойчивости выполняется с помощью уравнений (3.2.14) так же как и при отыскании решения в форме (3.2.7).

Задача 3.2.4

Последовательный колебательный контур содержит катушку с индуктивностью L , конденсатор, ёмкость C которого изменяется по закону

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cos pt},$$

и нелинейный резистор, сопротивление R которого зависит от амплитуды I тока в соответствии с соотношением

$$R = R_0 (1 + \beta_0 I^2),$$

где β_0 — постоянный коэффициент. Собственная частота колебательного контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$ и частота внешнего воздействия p

удовлетворяют неравенству $\left| \frac{4\omega_0^2}{p^2} - 1 \right| \ll 1$. Считая, что m и

$\frac{R_0}{\omega_0 L}$ — малые величины, и используя метод медленно меняю-

щихся амплитуд, найти область параметрического резонанса, определить область допустимых расстроек, в которой происходит возбуждение; получить выражение для стационарной амплитуды и построить качественно зависимость амплитуды колебаний от расстройки.

Решение

Обозначим через x заряд на конденсаторе колебательного контура. Тогда уравнение колебаний можно представить в виде

$$L\ddot{x} + R_0 (1 + \beta_0 I^2) \dot{x} + \frac{1}{C_0} (1 + m \cos pt) x = 0. \quad (3.2.15)$$

Используя обозначения

$$2\theta = \frac{R_0}{\omega L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad p = 2\omega; \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \xi,$$

введя безразмерное время $\tau = \omega t$ и отбрасывая член второго порядка малости, пропорциональный произведению ξm , представим уравнение (3.2.15) в форме

$$x'' + x = \xi x - 2\theta(1 + \beta_0 I^2)x' - mx \cos 2\tau. \quad (3.2.16)$$

Уравнение (3.2.16) имеет тот же вид, что и уравнение (3.2.6) при

$$F(x, x', \tau) = \xi x - 2\theta(1 + \beta_0 I^2)x' - mx \cos 2\tau. \quad (3.2.17)$$

Решение уравнения (3.2.16) будем искать в форме (3.2.7). В выражении (3.2.7) u и v — амплитуды квадратурных составляющих решения. Полная амплитуда A колебаний заряда связана с u и v соотношением

$$A = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (3.2.18)$$

В свою очередь, амплитуда тока I связана с амплитудой заряда A выражением

$$I = \omega A. \quad (3.2.19)$$

Используя (3.2.8), с учетом (3.2.16)—(3.2.19) получим укороченные уравнения

$$\begin{aligned} u' &= -\theta_0 u - \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{m}{2} \right) v, \\ v' &= -\theta_0 v - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) u, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

где использовано обозначение

$$\theta_0 = \theta(1 + \omega^2 \beta_0 A^2). \quad (3.2.21)$$

Из (3.2.20), используя (3.2.9), получим систему уравнений для отыскания возможных стационарных значений амплитуд u и v :

$$\begin{aligned} \theta_0 u + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) v &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) u + \theta_0 v &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Решая систему уравнений (3.2.22), найдём, что возможны два стационарных значения амплитуды колебаний:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{1}{\omega^2 \beta_0} \left(\frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} - 1 \right). \quad (3.2.23)$$

Первое из этих значений соответствует состоянию покоя, второе — колебанию с отличной от нуля амплитудой.

Для исследования устойчивости состояния покоя предположим, что амплитуды u и v получили небольшие приращения, равные соответственно η и ζ . Линеаризуя укороченные уравнения (3.2.20), для вариаций η и ζ получим систему уравнений (3.2.11), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \eta' &= -\theta\eta - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) \zeta, \\ \zeta' &= -\theta\zeta - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) \eta. \end{aligned}$$

Отыскивая решение этой системы уравнений в виде (3.2.12), для характеристического показателя λ получим:

$$\lambda_1 = -\theta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2}; \quad \lambda_2 = -\theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2}. \quad (3.2.24)$$

Из (3.2.24) видно, что оба значения характеристического показателя вещественны при условии, что $\frac{m}{2} > \xi$. Если это условие выполнено, то $\lambda_1 < 0$ всегда, а $\lambda_2 > 0$ при условии, что

$$\frac{m}{2} > \sqrt{4\theta^2 + \xi^2}. \quad (3.2.25)$$

Это неравенство и есть условие возбуждения колебаний. Из (3.2.25) следует, что минимальная величина коэффициента модуляции $m_{\min}$, при которой ещё возможно возбуждение колебаний, достигается при условии, что $\xi = 0$ и определяется равенством

$$m_{\min} = 4\theta. \quad (3.2.26)$$

Принимая во внимание, что $2\theta = 1/Q$, где Q — добротность колебательного контура, выражение (3.2.26) можно также представить в виде:

$$m_{\min} = \frac{2}{Q}.$$

Для области расстройек, в которой возможно возбуждение колебаний, из (3.2.25) получим:

$$|\xi| < \sqrt{\frac{m^2}{4} - 4\theta^2}.$$

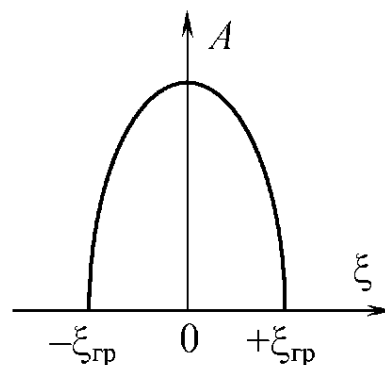


Рис. 3.2.7.

Зависимость амплитуды колебаний от расстройки ξ определяется выражением (3.2.23). Вид этой зависимости качественно показан на рис. 3.2.7.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2.5

Решить задачу 3.2.4 для случая, когда сопротивление резистора определяется соотношением

$$R = R_0 (1 + \beta_0 I),$$

где I — амплитуда тока в контуре.

Задача 3.2.6

Последовательный колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L , резистора с сопротивлением R , и конденсатора, ёмкость которого изменяется во времени по закону

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cos 2\omega t}.$$

Добротность контура $Q \gg 1$. Расстройка ξ , определяемая соотношением

$$\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

и коэффициент модуляции ёмкости m удовлетворяют неравенствам $\xi \ll 1$, $m \ll 1$.

Методом медленно меняющихся амплитуд найти условие параметрического возбуждения и область расстроек, в которой наблюдается параметрический резонанс.

Задача 3.2.7

Длина нити математического маятника периодически изменяется во времени по закону $l = \frac{l_0}{1 + m \cos 2\omega t}$. При движении маятника возникают силы вязкого трения, пропорциональные линейной скорости маятника. Добротность маятника $Q \gg 1$. Расстройка ξ , определяемая соотношением $\xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ (здесь $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$), а также коэффициент модуляции m удовлетворяют неравенствам $\xi \ll 1, m \ll 1$.

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, получить условие параметрического возбуждения колебаний и определить область расстроек, в которой происходит возбуждение. Найти минимальное значение m , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний.

4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

4.1. Автоколебательные системы с высокодобротным колебательным элементом

Для исследования автоколебательных систем, содержащих высокодобротный колебательный элемент, может быть использован метод медленно меняющихся амплитуд, рассмотренный в предыдущем разделе.

Пример решения задач

Задача 4.1.1

В последовательный колебательный контур, состоящий из индуктивности L , ёмкости C и резистора R_0 , включен элемент с падающим участком на вольтамперной характеристике. Рабочая точка этого элемента выбрана таким образом, что падение на-

пряжения на элементе связано с током, текущим через него, соотношением: $u = -S_1 i + S_3 i^3$.

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

Решение

Пусть q — заряд на конденсаторе колебательного контура. Тогда дифференциальное уравнение для колебаний заряда имеет вид

$$L\ddot{q} + R_0\dot{q} + \frac{q}{C} + u = 0. \quad (4.1.1)$$

Здесь u — падение напряжения на элементе с падающим участком вольтамперной характеристики. По условию задачи

$$u = -S_1 \dot{q} + S_3 \dot{q}^3. \quad (4.1.2)$$

Подставляя (4.1.2) в (4.1.1), вводя безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и используя обозначения

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2; \quad \frac{R_0}{\omega_0 L} = 2\theta_0; \quad \frac{S_1}{\omega_0 L} = 2\theta; \quad \frac{\omega_0 S_3}{L} = 2\beta; \quad y = q \sqrt{\frac{\beta}{\theta - \theta_0}}, \quad (4.1.3)$$

преобразуем уравнение (4.1.1) к виду

$$y'' + y = F(y'), \quad (4.1.4)$$

где

$$F(y') = 2y'(\theta - \theta_0) \left[1 - (y')^2 \right]. \quad (4.1.5)$$

Будем искать решение уравнения (4.1.4) в форме

$$q = A(\tau) \cos[\tau + \varphi(\tau)].$$

Тогда с учётом (4.1.5) укороченные уравнения будут иметь вид:

$$A' = A(\theta - \theta_0) \left(1 - \frac{3}{4} A^2 \right), \quad (4.1.6)$$

$$A\varphi' = 0.$$

Из второго уравнения (4.1.6) следует, что фаза колебательного процесса постоянна. Следовательно, обусловленная нелинейностью системы поправка к частоте в рассматриваемом приближении отсутствует.

Полагая $A' = 0$ и используя первое из укороченных уравнений, находим, что возможны два стационарных значения амплитуды колебаний:

$$A_1 = 0; \quad (4.1.7)$$

$$A_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (4.1.8)$$

Значение $A_1 = 0$ соответствует состоянию покоя. Для исследования устойчивости этого состояния положим

$$A = A_1 + \eta, \quad (4.1.9)$$

где η — малая вариация. Подставляя (4.1.9) в (4.1.6) и линеаризуя полученное уравнение с учётом (4.1.7), получим

$$\eta' = (\theta - \theta_0)\eta. \quad (4.1.10)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\eta = \eta_0 e^{\lambda \tau}. \quad (4.1.11)$$

Подставляя (4.1.11) в (4.1.10), будем иметь

$$\lambda = \theta - \theta_0. \quad (4.1.12)$$

Состояние покоя устойчиво, если $\lambda < 0$. Используя это условие, из (4.1.12) находим условие возбуждения колебаний:

$$\theta_0 < \theta. \quad (4.1.13)$$

Принимая во внимание (4.1.3), можно представить условие возбуждения в виде

$$S_1 > R.$$

Для исследования устойчивости стационарного состояния с амплитудой A_2 положим

$$A = A_2 + \eta, \quad (4.1.14)$$

где η — малое приращение, $\eta \ll A_2$. Подставляя (4.1.14) в (4.1.6) и линеаризуя полученное уравнение с учётом (4.1.8), будем иметь

$$\eta' = 2(\theta_0 - \theta)\eta. \quad (4.1.15)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде (4.1.11). Тогда после подстановки (4.1.11) в (4.1.15), для характеристического показателя λ получим

$$\lambda = 2(\theta_0 - \theta). \quad (4.1.16)$$

Для устойчивости стационарного режима с ненулевой амплитудой необходимо иметь

$$\lambda < 0. \quad (4.1.17)$$

Сравнивая выражение (4.1.16) с условием возбуждения (4.1.13), находим, что если выполнено условие возбуждения, то стационарный режим с амплитудой $A_2 \neq 0$ устойчив.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1.2

К параллельному колебательному контуру (рис. 4.1.1), состоящему из индуктивности L , ёмкости C и резистора R , подключен элемент с падающим участком на вольтамперной характеристике (туннельный диод). Рабочая точка этого элемента выбрана таким образом, что напряжение u на элементе связано с током i , текущим через него, соотношением

$$i = \alpha_0 u + \gamma_0 u^3.$$

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти условие возбуждения колебаний, стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

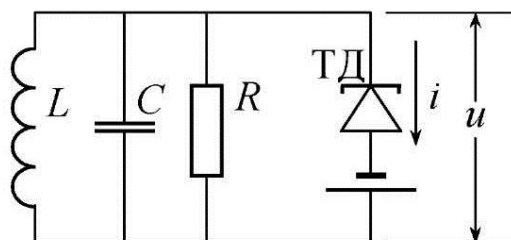


Рис. 4.1.1.

Задача 4.1.3

На ленте, равномерно двигающейся со скоростью v_0 , лежит груз с массой m . Груз двумя одинаковыми пружинами, имеющими жесткость k , связан с неподвижными стенками (рис. 4.1.2).

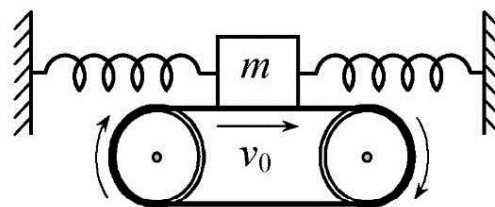


Рис. 4.1.2.

Сила трения между грузом и лентой зависит от скорости v движения ленты относительно груза в соответствии с графиком, показанным на рис. 4.1.3. При определённых условиях груз начинает периодически двигаться по закону, близкому к гармоническому. При движении груза помимо силы трения о ленту возникает ещё сила вязкого трения $F_v = h\dot{x}$, где $\dot{x}$ — скорость груза.

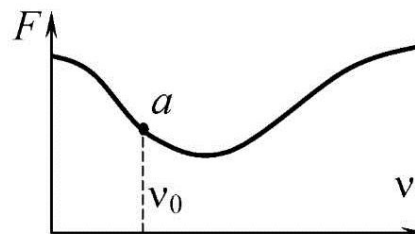


Рис. 4.1.3.

Скорость ленты соответствует точке перегиба на падающем участке графика рис. 4.1.3 (точка «a»), а характеристика трения в

небольшой окрестности этой точки может быть представлена многочленом третьей степени: $F = -\alpha v + \gamma v^3$, где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти стационарные режимы движения, исследовать их устойчивость и получить условия возбуждения гармонических колебаний.

Задача 4.1.4

Маятник Фроуда представляет собой горизонтальный вал, на котором размещена втулка. Втулка может вращаться относительно вала с некоторым трением. К этой втулке прикреплен жесткий стержень маятника. Длина стержня l . На конце стержня размещен грузик маятника (рис. 4.1.4). Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . При определенных условиях в системе

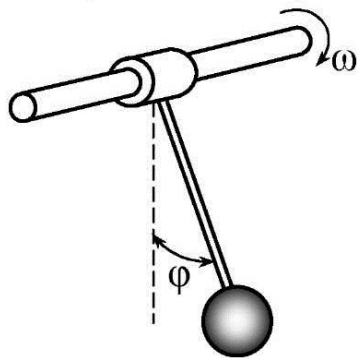


Рис. 4.1.4.

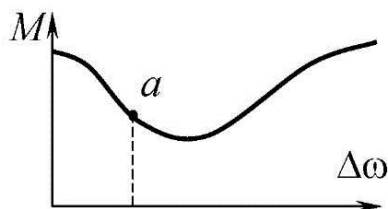


Рис. 4.1.5.

происходит возбуждение незатухающих колебаний маятника, по форме близких к гармоническим. Момент сил трения между валом и втулкой зависит от разности $\Delta\omega$ угловых скоростей вала и втулки как показано на рис. 4.1.5. Пренебрегая массой втулки и стержня, считая, что при движении маятника в воздухе возникает сила вязкого трения $F_v = hl\phi'$ (здесь ϕ' — угловая скорость маятника), приложенная к грузику маятника, угловая скорость вала соответствует точке перегиба (точка «а») на падающем участке графика рис. 4.1.5, колебания маятника имеют малую амплитуду, а характеристика трения в небольшой окрестности этой точки может быть представлена многочленом третьей степени:

$$M = -\alpha(\Delta\omega) + \gamma(\Delta\omega)^3; \quad \alpha > 0; \quad \gamma > 0,$$

получить условие возбуждения колебаний найти стационарные режимы движения системы и исследовать их устойчивость.

Задача 4.1.5

На рисунке 4.1.6 представлена упрощенная принципиальная схема авто-

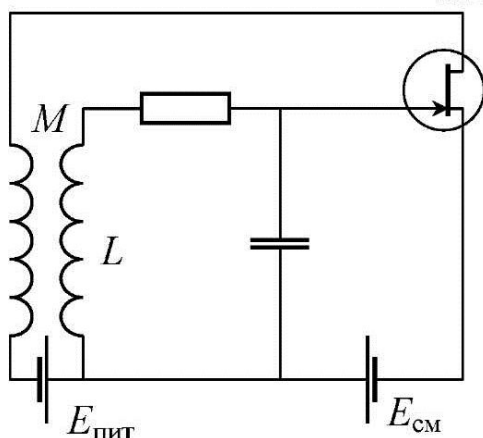


Рис. 4.1.6.

колебательной системы томсоновского типа. Зависимость тока стока i транзистора от напряжения смещения u в окрестности рабочей точки описывается выражением

$$i = i_0 + S_0 u - S_1 u^3, \text{ где } S_0 > 0, S_1 > 0.$$

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд и считая, что добротность Q колебательного контура удовлетворяет условию $Q \gg 1$, получить условие возбуждения колебаний, найти стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

$$1.1.2. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{2MR}}. \qquad 1.1.3 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg(R+l)}{\frac{3}{2}MR^2 + ml^2}}$$

$$1.1.4. \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \cos \alpha_0\right) \cos \alpha_0}.$$

1.1.5. Если $ka^2 > mgl$, то имеется единственное устойчивое положение равновесия, в котором $\varphi = 0$. В этом случае

$$\omega = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}.$$

Если $ka^2 < mgl$, то имеется три положения равновесия: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{2,3} = \pm\alpha$, где $\pm\alpha$ — ненулевые корни уравнения

$$ka^2 \varphi - mgl \sin \varphi = 0,$$

причем положение $\varphi = 0$ неустойчиво, а состояния системы, в которых $\varphi = \pm\alpha$ устойчивы. Частоты $\omega_{2,3}$ малых колебаний в этих состояниях равны

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l} \cos \alpha}.$$

$$1.1.6. \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{g}{l} \sin \alpha}.$$

1.2.3. Если $\omega_0^2 > \delta^2$, то $\varphi = \frac{v_0}{\omega l} e^{-\delta t} \sin \omega t$,

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, $\delta = \frac{h}{2m}$.

Если $\omega_0^2 < \delta^2$, то $\varphi = \frac{v_0}{l\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \operatorname{sh}\left(t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)$

1.2.3. $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_0 \cos \omega_0 t$; $x_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} x_0 \cos \omega_0 t$, где

$$\omega_0^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

1.3.2. $\varphi = \Phi_0 \cos(pt + \psi)$, где $\Phi_0 = \frac{k a X_0}{m l^2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}$,

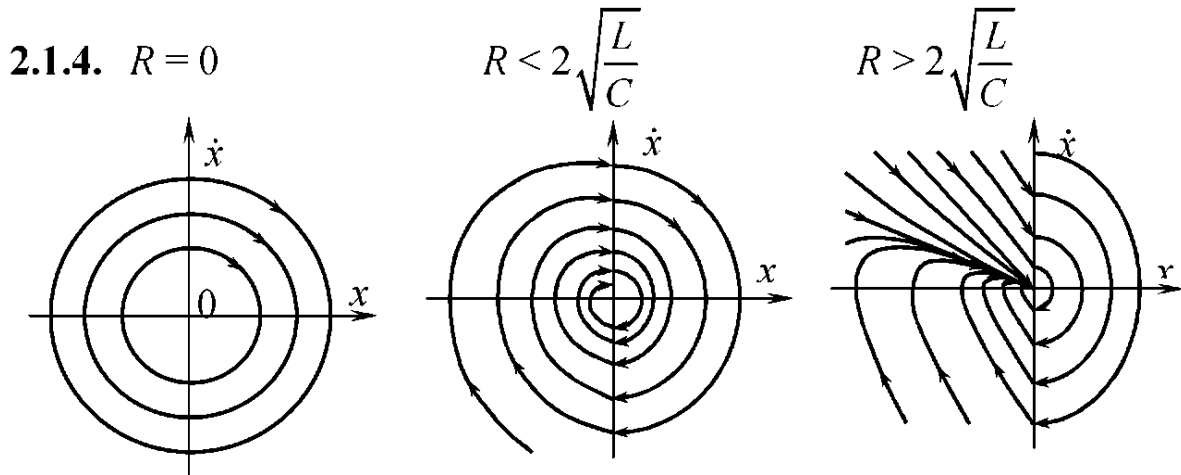
$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}$. Здесь $\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{k a^2}{m l^2}$, $\delta = \frac{h}{2m}$, h — коэффициент вязкого трения.

1.3.3. $A: z = \rho Q p^2$, где: $\rho = \omega_0(L_1 + L_2)$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C_2}}$;

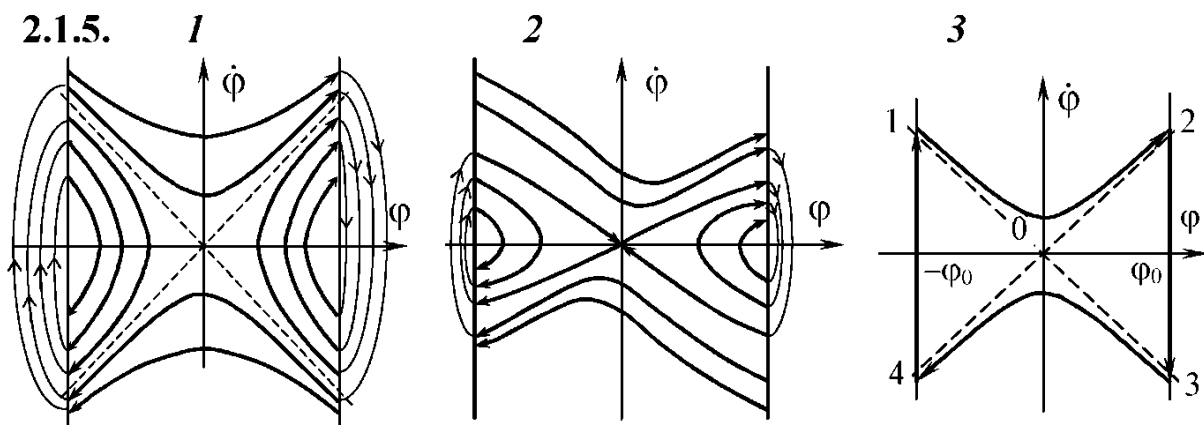
$$Q = \frac{\omega_0(L_1 + L_2)}{R_1 + R_2}; \quad p = \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

$B: z = \rho Q p^2$, где: $\rho = \frac{1}{\omega_0 C}$; $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$;

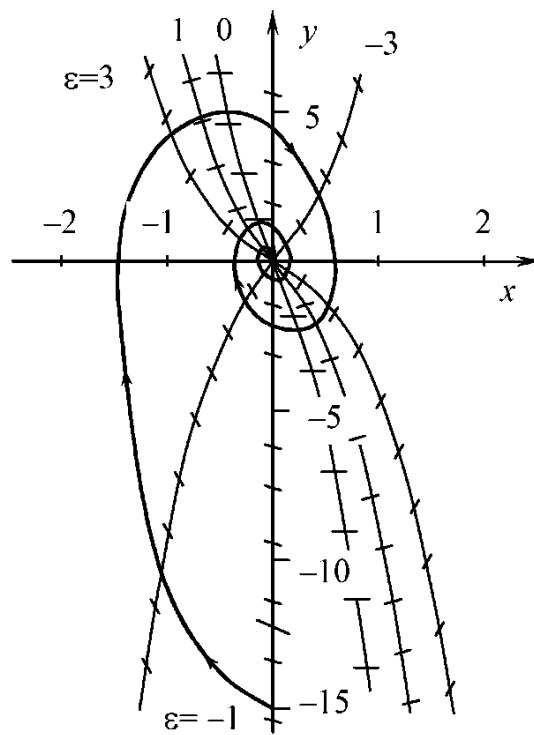
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}; \quad Q = \frac{1}{\omega_0 C (R_1 + R_2)}; \quad p = \frac{C}{C_2}.$$



2.1.5.

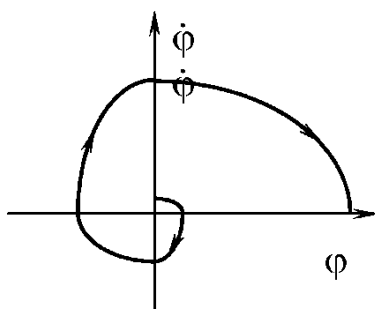


2.1.6.

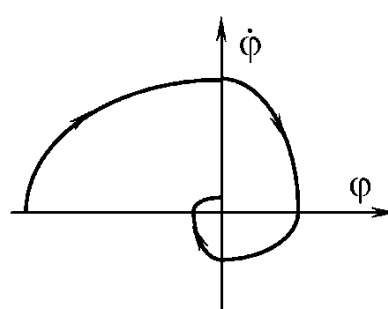


2.1.7.

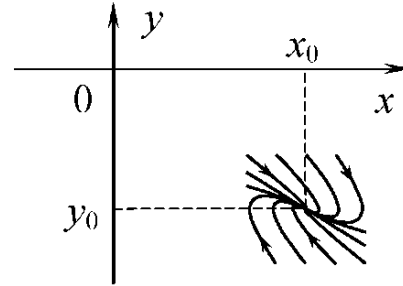
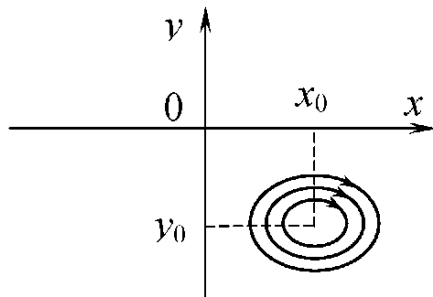
a)



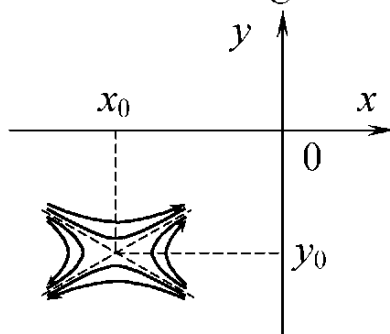
b)



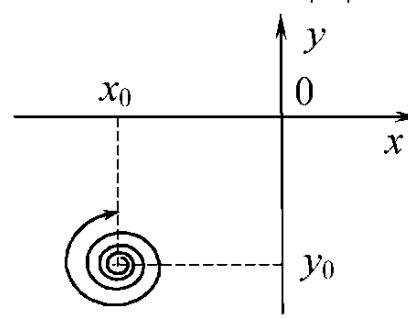
2.1.8. 1) $y_0 = -E$; $x_0 = -\frac{D}{C} = \frac{D}{|C|}$ 4) $y_0 = -E$; $x_0 = \frac{|B|E + D}{|C|}$



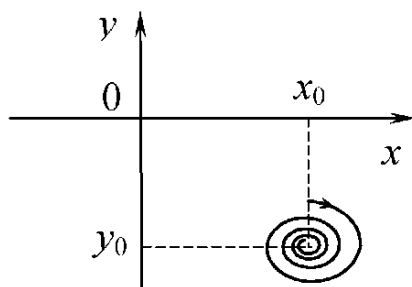
2) $y_0 = -E$; $x_0 = -\frac{D}{C}$



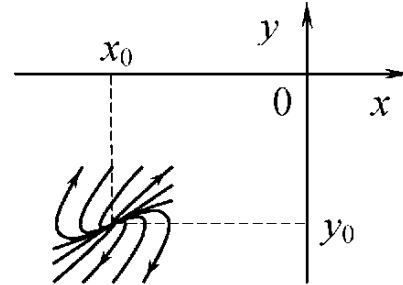
5) $y_0 = -E$; $x_0 = \frac{-BE + D}{|C|}$



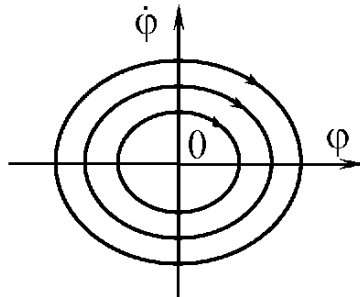
3) $y_0 = -E$; $x_0 = \frac{|B|E + D}{|C|}$



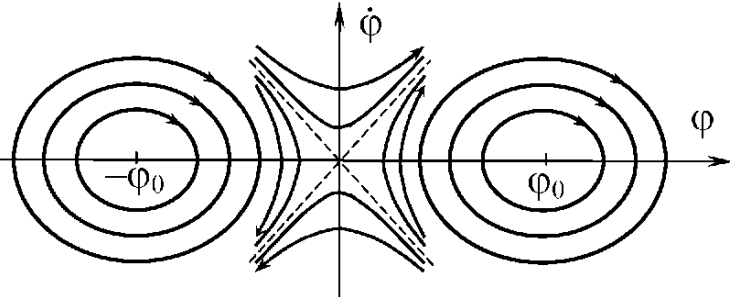
6) $y_0 = -E$; $x_0 = \frac{-BE + D}{|C|}$



2.1.9. $ka^2 > mgl$:



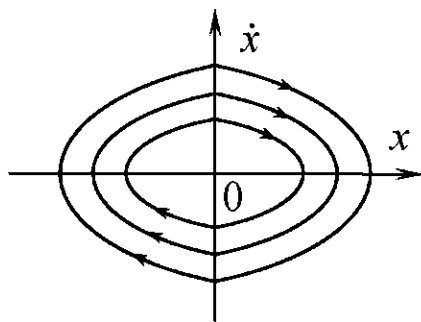
$ka^2 < mgl$:



Здесь ϕ_0 — наименьший ненулевой положительный корень уравнения

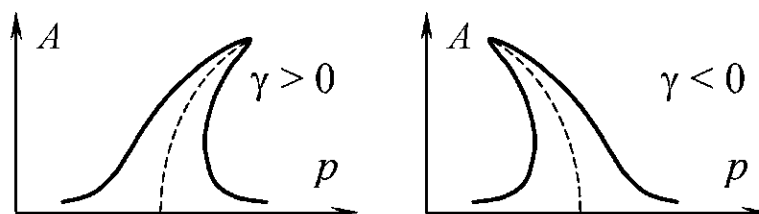
$$ka^2\phi - mgl\sin\phi = 0$$

2.1.10.



2.2.2. $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \right)$, где a — амплитуда колебаний заряда.

$$2.2.3. \quad A^2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} A^2 - p^2 \right)^2 + 4\delta^2 p^2}}.$$



2.2.4. 0,43%; 33°.

$$2.2.5. \quad T_{\text{прибл}} = \sqrt{\frac{2\pi^3 A}{g \sin 2\alpha}}; \quad T_{\text{точн}} = 8 \sqrt{\frac{A}{g \sin 2\alpha}}.$$

Здесь A — амплитуда колебаний вдоль оси Ox .

$$\frac{T_{\text{точн}} - T_{\text{прибл}}}{T_{\text{точн}}} = 1,8\%.$$

$$2.2.6. \quad \omega_{\text{прибл}} \cong \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{\pi A} \right)}; \quad \omega_{\text{точн}} = \frac{\sqrt{k/m}}{1 + \frac{l}{\pi A}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{\pi A} \right)}.$$

$$3.1.3. \quad \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right)^{-\frac{3}{4}} - 1.$$

$$3.2.2. \quad \frac{2\Delta l}{l} \geq \frac{\pi}{Q}. \quad 3.2.3 \quad \frac{2\Delta F}{F} \geq \frac{\pi}{Q}.$$

$$3.2.5. \quad m_{\min} = \frac{2}{Q}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}; \quad A = \frac{1}{\omega \beta_0} \left[Q \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} - 1 \right].$$

$$\text{Здесь } Q = \frac{\omega L}{R_0}.$$

$$3.2.6. \quad m \geq \frac{2}{Q}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}.$$

$$3.2.7. \quad m \geq 2\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{Q^2}}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}; \quad m_{\min} = \frac{2}{Q}.$$

$$4.1.2. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha_0 < 0; \quad |\alpha_0| > \frac{1}{R}.$$

$$\text{Стационарный режим: } A_1 = 0; \quad A_2 = \sqrt{-\frac{4}{3\gamma_0} \left(\frac{1}{R} + \alpha_0 \right)}, \quad \text{где}$$

$$\gamma = \frac{3\gamma_0}{\omega C}.$$

Стационарный режим с $A_2 \neq 0$ устойчив, если выполнено условие возбуждения.

$$4.1.3. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha > h; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{4m(\alpha - h)}{3k\gamma}}. \quad \text{Режим с}$$

$A_{\text{стац}} \neq 0$ устойчив, если выполнено условие возбуждения.

$$4.1.4. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha > hl^2; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{4(\alpha - hl^2)l}{3\gamma g}}.$$

$$4.1.5. \quad \text{Условие возбуждения: } S_0 > \frac{RC}{M}; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{S_0 - \frac{RC}{M}}{\frac{3}{4}S_1}}. \quad \text{Режим}$$

с $A_{\text{стац}} \neq 0$ устойчив, если выполнено условие возбуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1988. — 392 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. — СПб. и др.: Изд. Лань, 2005. — 437 с.
4. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики. — М.; Ижевск, РХД, 2004. — 351с.
5. В.П.Кандидов, Л.Н.Капцов, А.А.Харламов Решение и анализ задач линейной теории колебаний. — под ред. В.В.Мигулина. — М., Изд. Моск. ун-та, 1976. — 272 с.
6. Сборник задач по теории колебаний под ред. Постникова Л. В. и Королева В. И. — М., Наука, 1978. — 272 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	1
1. КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ	2
1.1. Нахождение частоты свободных колебаний системы с одной степенью свободы	2
1.2. Свободные колебания при заданных начальных условиях	8
1.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	11
2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	17
2.1. Качественный анализ собственных движений нелинейной системы в фазовом пространстве	17
2.2. Слабо нелинейные системы с малыми потерями энергии. Метод гармонического баланса	28
3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	32
3.1. Адиабатически медленное изменение параметров системы. Адиабатические инварианты	32
3.2. Изменение параметров с частотой, соизмеримой с частотой собственных колебаний системы	36
4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ	46
4.1. Автоколебательные системы с высокочастотным колебательным элементом	46
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ	51
ЛИТЕРАТУРА	57