

## **ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания с заданиями для  
расчетно-графических работ

## 2.4. Кинематический расчет манипулятора

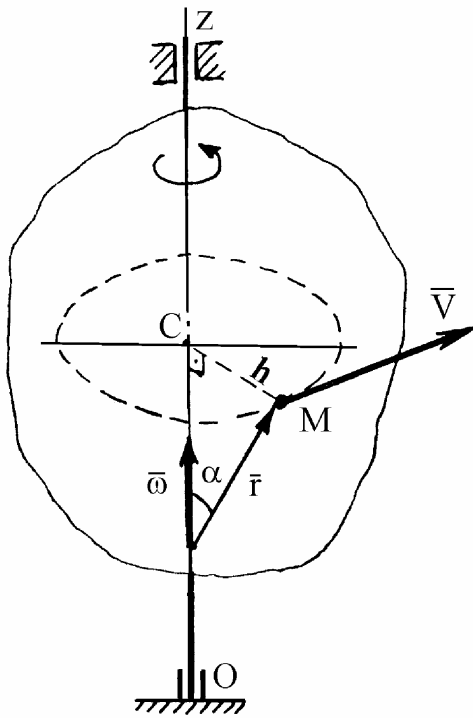


Рис. 30

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси  $Oz$  (рис. 30). Выделим какую-либо точку  $M$  этого тела. Как известно [2], вектор скорости любой точки вращающегося тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, т. е.

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (72)$$

Модуль скорости точки  $M$  равен модулю векторного произведения  $\bar{\omega} \times \bar{r}$ :

$$|\bar{V}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin \alpha = \omega \cdot h,$$

где  $h$  – расстояние от оси вращения до точки  $M$ .

Рассматривая вращение стержня  $OA$  (рис. 31) вокруг оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно к плоскости рисунка, и полагая, что вектор

угловой скорости  $\bar{\omega}$  направлен вдоль этой оси (к нам), применим формулу (72) для нахождения скорости точки  $A$ :

$$\bar{V}_A = \bar{\omega} \times \overline{OA}. \quad (73)$$

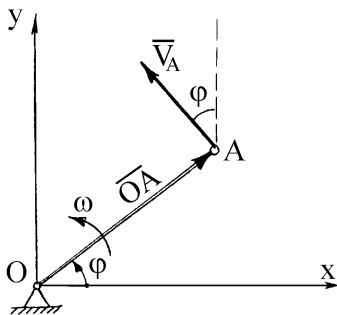


Рис. 31

В формуле (73) стержень  $OA$  представлен в виде вектора  $\overline{OA}$ . Направление этого вектора определим углом  $\varphi$ , отсчитанным от положительного направления оси  $Ox$  против хода часовой стрелки. Отметим, что модуль вектора  $\overline{OA}$  равен длине стержня и, кроме того, вектор скорости  $\bar{V}_A$  перпендикулярен этому стержню. Угол между вектором  $\bar{V}_A$  и положительным направлением оси  $Oy$  также равен  $\varphi$ , а модуль вектора  $\bar{V}_A$  равен

$$|\bar{V}_A| = V_A = \omega \cdot OA.$$

Проецируя векторное равенство (73) на координатные оси, получаем проекции  $\overline{V}_A$  на эти оси:

$$V_{Ax} = -V_A \cdot \sin \varphi = -\omega \cdot OA \cdot \sin \varphi, \quad (74)$$

$$V_{Ay} = V_A \cdot \cos \varphi = \omega \cdot OA \cdot \cos \varphi. \quad (75)$$

Формулы (74) и (75) будут справедливы для любых значений угла  $\varphi$ , если отсчет этого угла производить против хода часовой стрелки от положительного направления оси  $Ox$  до направления вектора  $\overline{OA}$ .

В случае плоскопараллельного (плоского) движения твердого тела скорость какой-либо точки  $B$  (рис. 32) равна геометрической сумме скорости точки  $A$ , принятой за полюс, и скорости точки  $B$  при вращении тела вокруг полюса  $A$ , т. е.

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}, \quad (76)$$

где  $\overline{V}_{BA}$  определяется по формуле, аналогичной формуле (73):

$$\overline{V}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{AB}.$$

С учетом последнего выражения формула (76) приобретет вид

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}. \quad (77)$$

Проецируя равенство (77) на координатные оси, получаем формулы для определения проекций скорости точки  $B$  на эти оси:

$$V_{Bx} = V_{Ax} - \omega \cdot AB \cdot \sin \varphi, \quad (78)$$

$$V_{By} = V_{Ay} + \omega \cdot AB \cdot \cos \varphi. \quad (79)$$

Плоские механизмы в своем составе могут содержать звенья (тела), совершающие вращательное движение вокруг неподвижных осей, и звенья, совершающие плоское движение. При определении скоростей отдельных точек таких звеньев будем применять формулы, аналогичные формулам (73)–(79).

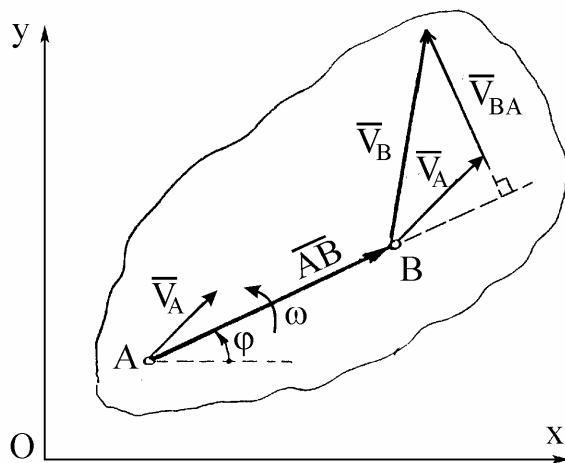


Рис. 32

### Задача К4

На с. 97–101 приведены схемы манипуляторов для различных вариантов задания. Здесь же даны соотношения между длинами звеньев. Необходимые исходные данные приведены в табл. К4.1. В вариантах К4.4, К4.9, К4.15, К4.17, К4.22 и К4.25 каток 2 относительно опорной поверхности не проскальзывает.

Закон изменения скорости схвата груза А для всех вариантов задания одинаков и имеет вид

$$V_A = V_{Ay} = V \cdot \sin pt; \quad V = 0,45 \text{ м/с}; \quad p = 1,87 \text{ рад/с.}$$

Кинематический расчет манипулятора необходимо провести в интервале времени  $\tau = 0-1,68$  с шагом 0,07 с.

**Пример К4.** Рассмотрим манипулятор, предназначенный для перемещения груза А (рис. К4а). Груз за отрезок времени  $\tau$  под действием двигателей управления, расположенных в шарнирах В и D, перемещается по вертикальной прямой из точки а в точку b с заданной скоростью  $V_A$  ( $V_{Ay}$ ), являющейся известной функцией времени.

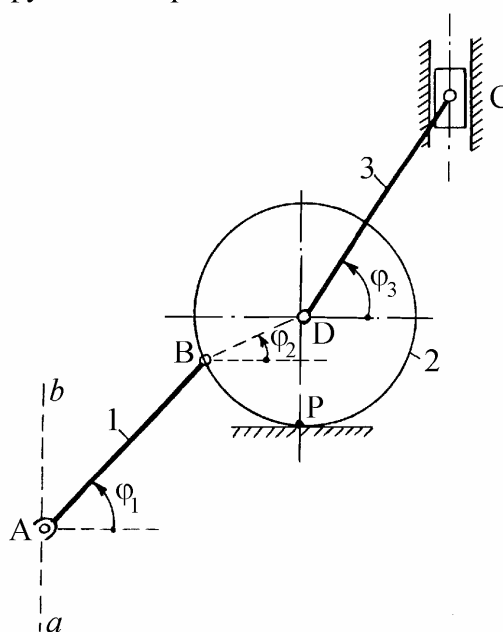
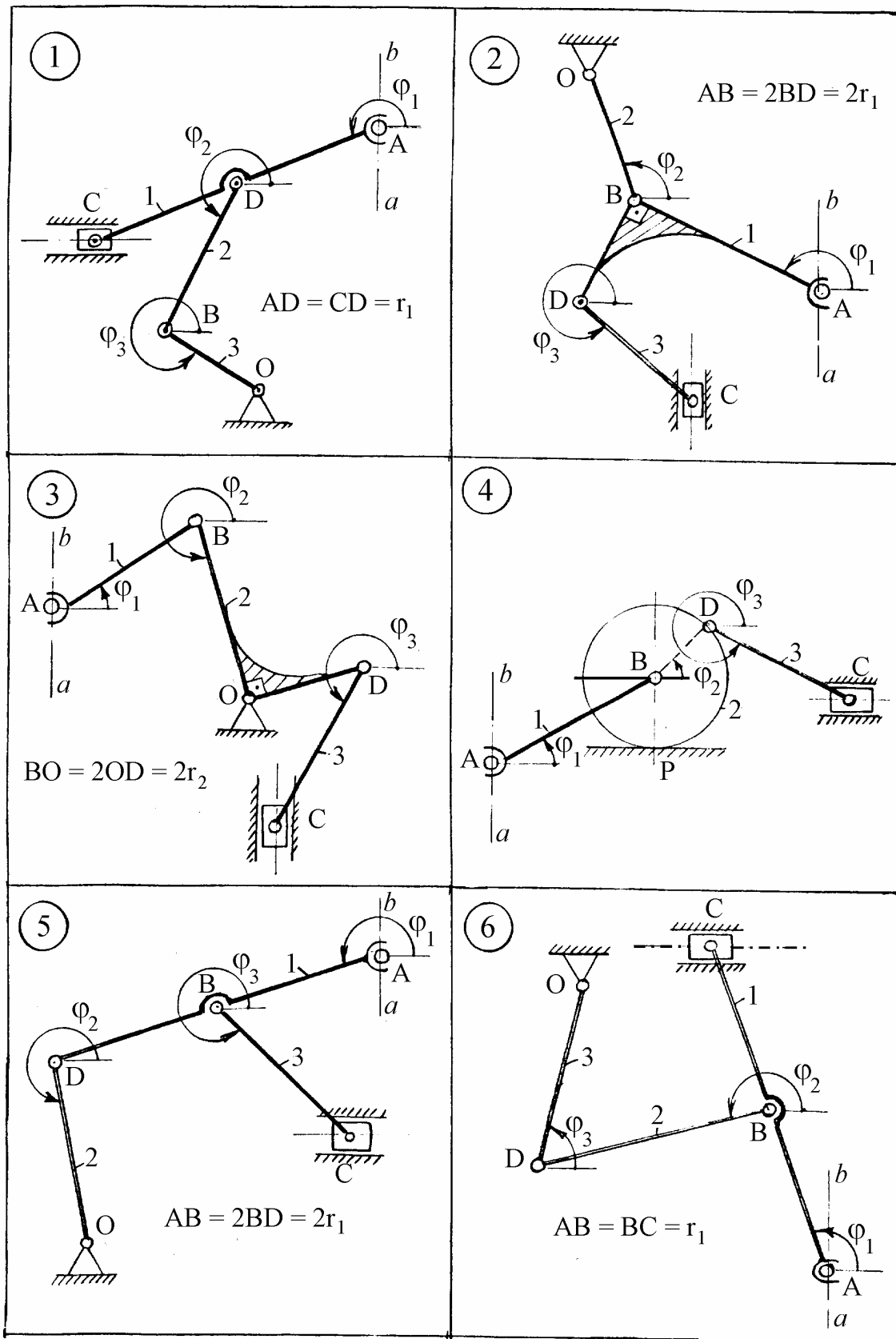
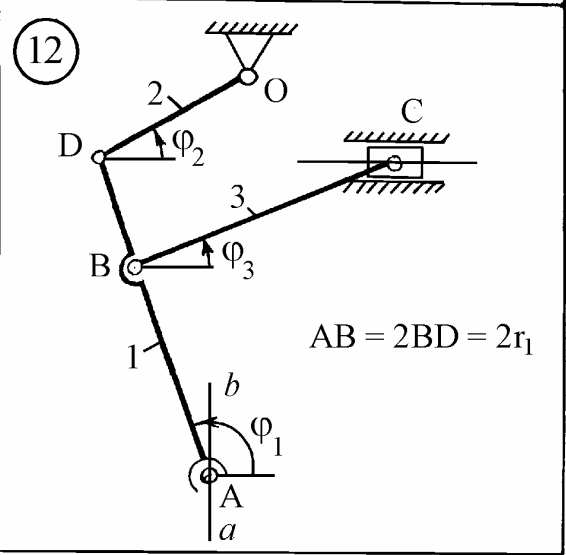
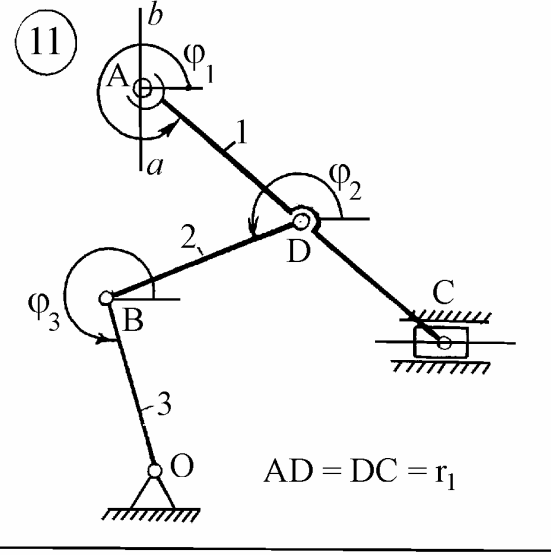
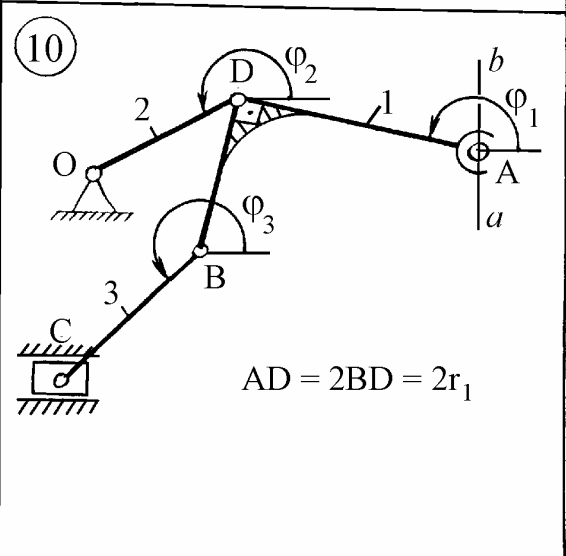
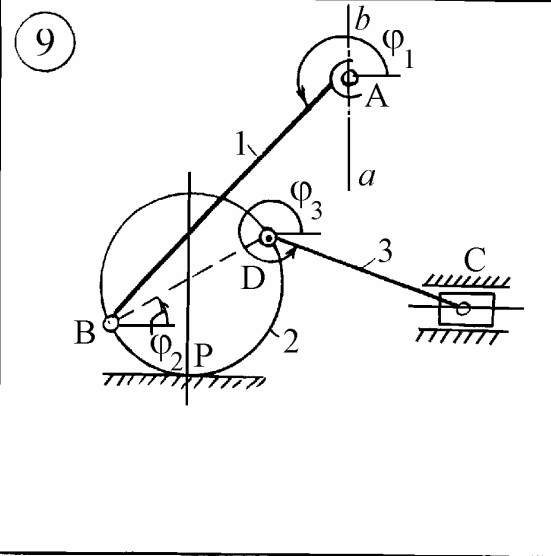
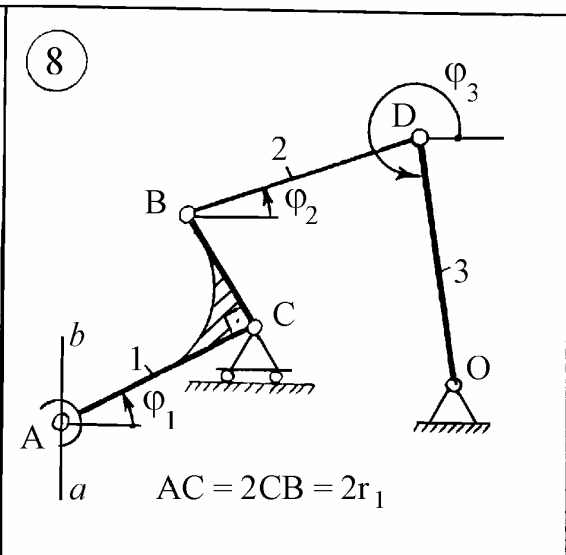
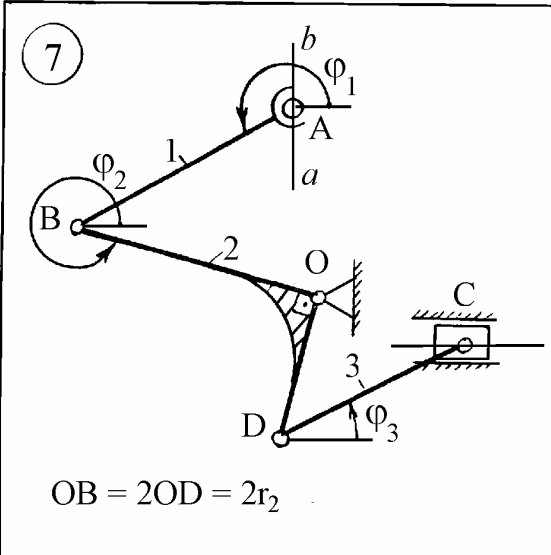


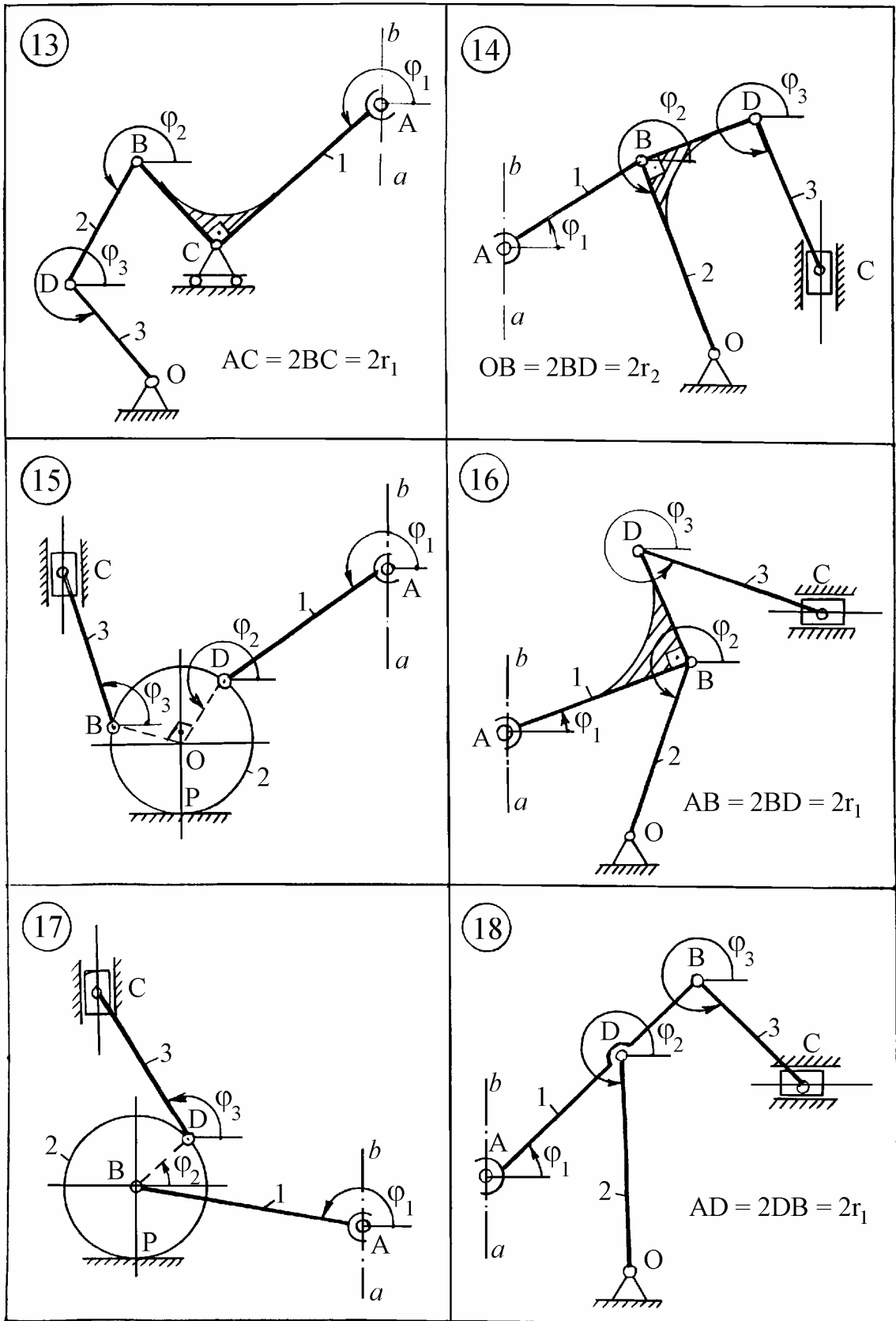
Рис. К4а

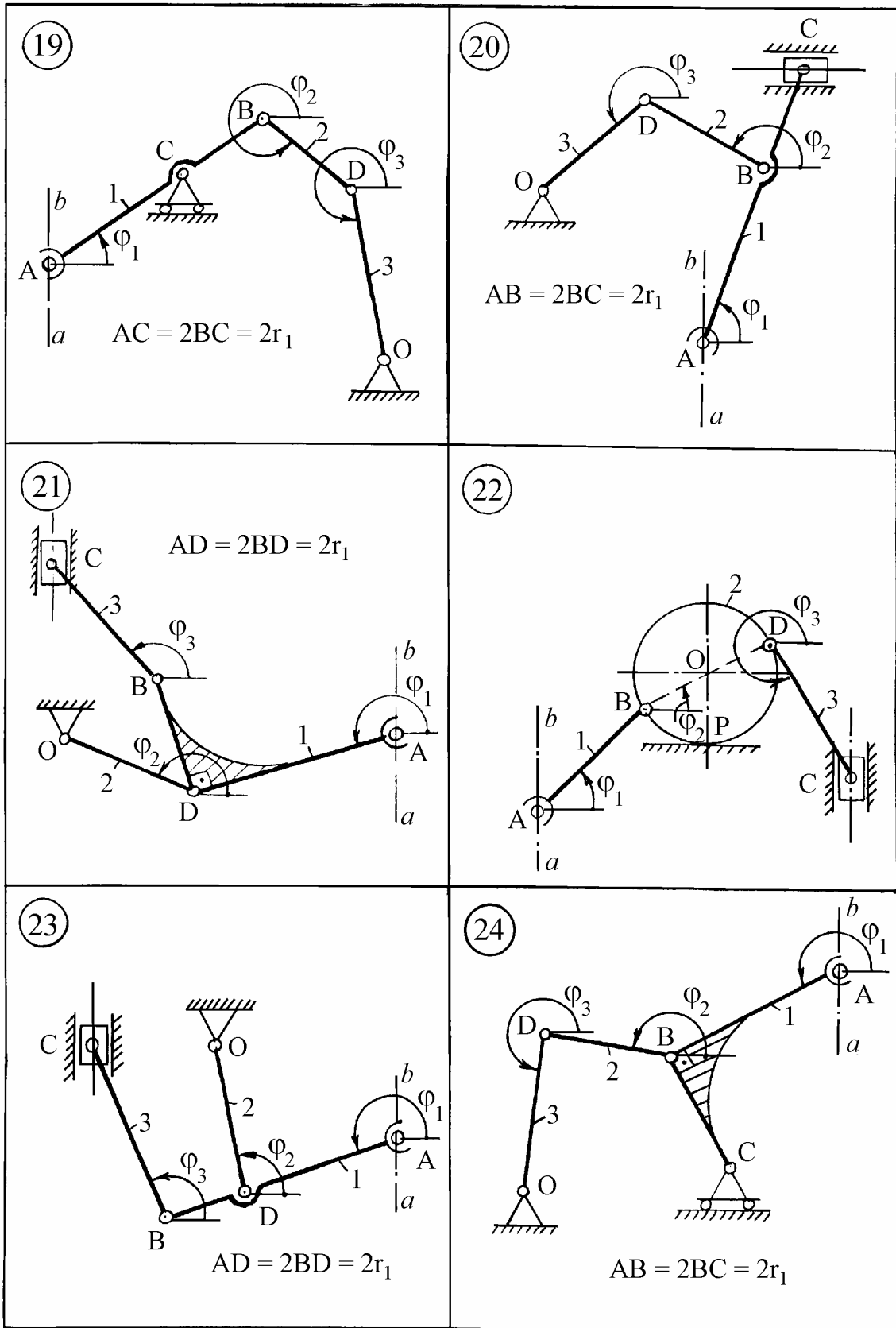
Звенья манипулятора считаются абсолютно твердыми телами. Каток 2 относительно опорной поверхности не проскальзывает. Требуется определить угловые скорости  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  звеньев 1, 2, 3, а также скорость точки С как функции времени.

Схемы манипуляторов



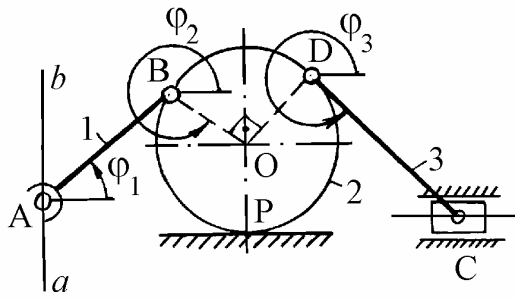




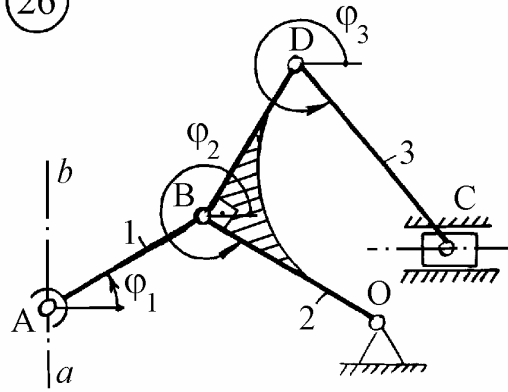




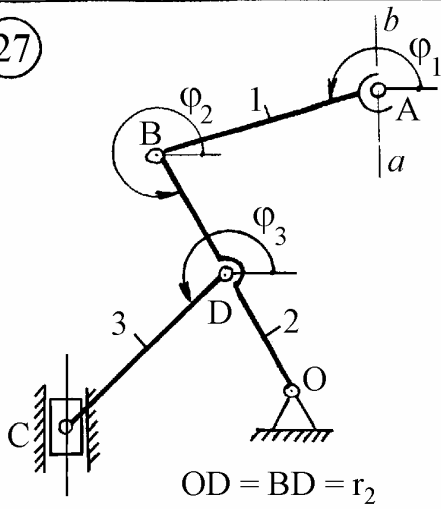
25



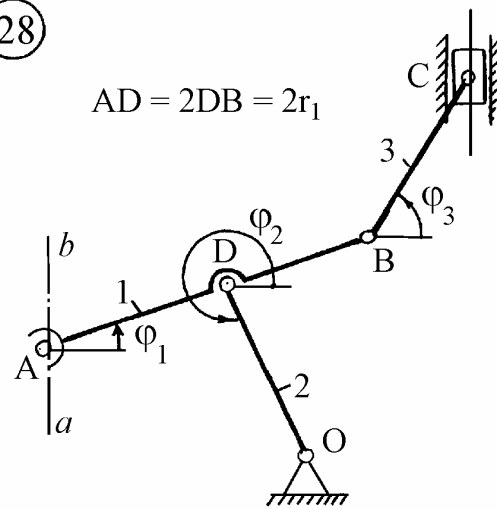
26



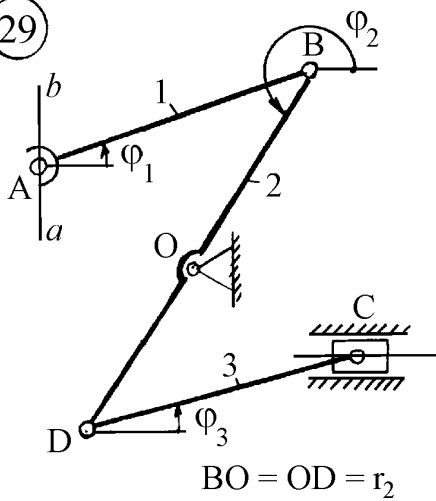
27



28



29



30

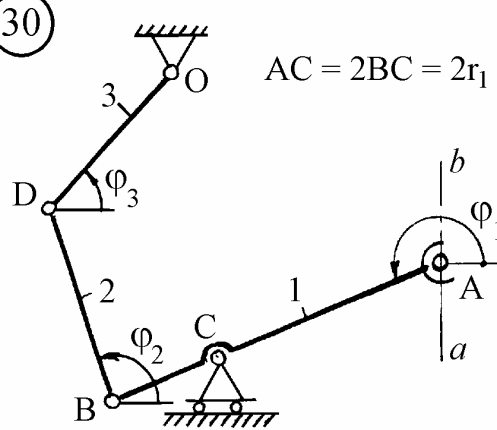


Таблица К4.1

Вариант	$r_1$ , м	$r_2$ , м	$r_3$ , м	$\varphi_1$ , рад	$\varphi_2$ , рад	$\varphi_3$ , рад
1	0,8	0,7	0,7	3,1	3,7	5,5
2	0,4	0,6	0,6	2,5	2,0	2,0
3	0,8	0,4	0,8	0,5	5,2	4,2
4	0,9	0,5	0,8	0,4	0,7	5,7
5	0,4	0,6	0,6	3,0	4,9	5,8
6	0,7	0,7	0,6	2,0	3,4	1,3
7	0,9	0,4	0,8	3,1	5,9	0,6
8	0,4	0,7	0,7	0,5	0,5	5,1
9	0,9	0,4	0,8	3,7	0,4	5,8
10	0,4	0,6	0,6	2,8	3,6	3,7
11	0,8	0,5	0,6	5,8	3,2	4,7
12	0,4	0,6	0,7	1,9	0,7	0,4
13	0,4	0,6	0,6	3,2	3,9	5,4
14	0,9	0,4	0,7	0,5	5,0	5,2
15	0,9	0,5	0,7	2,8	4,5	1,8
16	0,5	0,7	0,7	0,4	4,2	5,0
17	0,9	0,5	0,7	2,6	0,7	2,0
18	0,4	0,6	0,5	0,4	5,0	5,8
19	0,53	0,47	0,47	0,57	5,77	5,17
20	0,4	0,5	0,6	1,1	2,5	3,7
21	0,5	0,7	0,7	3,1	2,5	2,5
22	0,9	0,5	0,8	0,3	0,4	5,1
23	0,4	0,6	0,7	3,3	2,1	2,2
24	0,4	0,7	0,7	3,1	3,0	4,2
25	0,9	0,5	0,8	0,5	5,6	5,5
26	0,8	0,6	0,7	0,5	5,7	5,6
27	0,9	0,5	0,7	3,0	5,1	4,2
28	0,5	0,7	0,7	0,5	5,2	1,2
29	0,9	0,5	0,8	0,4	4,2	0,5
30	0,6	0,6	0,6	3,0	2,1	0,7

Размеры звеньев:  $AB = r_1 = 0,7$  м,  $BD = r_2 = 0,5$  м,  $DC = r_3 = 0,8$  м, значения углов, определяющих положения звеньев манипулятора в начальный момент времени ( $t = 0$ ):  $\varphi_1(0) = 0,5$  рад;  $\varphi_2(0) = 0,3$  рад;  $\varphi_3(0) = 1,0$  рад.

*Порядок расчета.* Исходные соотношения для расчета получим, воспользовавшись векторным описанием геометрии механизма, расчленив его на две группы звеньев (рис. К4б и рис. К4в).

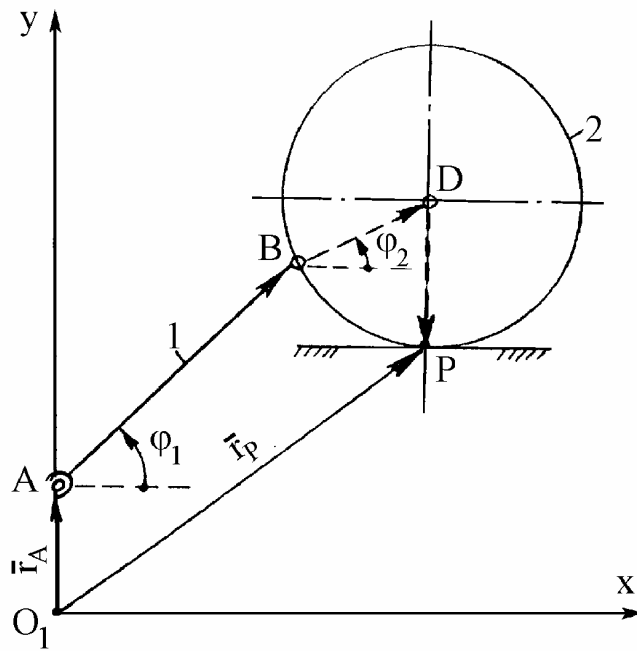


Рис. К4б

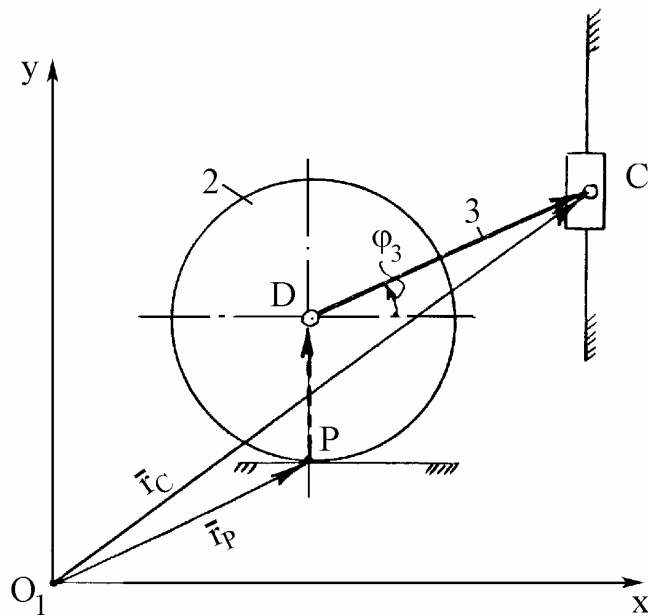


Рис. К4в

Из рис. К4б следует

$$\bar{r}_P = \bar{r}_A + \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DP}. \quad (80)$$

Входящие сюда векторы  $\bar{r}_A$  и  $\bar{r}_P$  определяют положение точек А и Р относительно неподвижного начала  $O_1$  системы координат  $xO_1y$ . Векторы, обозначенные двумя буквами, задают положение точки, определяемой второй из этих букв, относительно точки, обозначенной первой буквой.

Продифференцировав равенство (80) по времени, получим

$$\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} + \overline{V}_{DB} + \overline{V}_{PD}, \quad (81)$$

где обозначение  $\overline{V}$  с одним индексом (Р или А) соответствует значению абсолютной скорости точки Р или А, а обозначение  $\overline{V}$  с двумя индексами – относительной скорости; например,  $\overline{V}_{BA}$  есть скорость точки В во вращательном движении звена АВ вокруг точки А. Указанные скорости определяются известными соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{V}_{BA} &= \overline{\omega}_1 \times \overline{AB}, \\ \overline{V}_{DB} &= \overline{\omega}_2 \times \overline{BD}, \\ \overline{V}_{PD} &= \overline{\omega}_2 \times \overline{DP}, \end{aligned} \quad (82)$$

где  $\overline{\omega}_1$ ,  $\overline{\omega}_2$  – векторы угловых скоростей звеньев 1 и 2, направленные перпендикулярно чертежу.

С учетом (82) равенство (81) будет иметь вид

$$\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{\omega}_1 \times \overline{AB} + \overline{\omega}_2 \times \overline{BD} + \overline{\omega}_2 \times \overline{DP}. \quad (83)$$

Спроецировав векторное равенство (83) на координатные оси и учитывая, что  $AB = r_1$ ,  $BD = DP = r_2$ , получим два скалярных уравнения:

$$V_{Px} = V_{Ax} - \omega_1 \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1 - \omega_2 \cdot r_2 \cdot \sin \varphi_2 - \omega_2 \cdot r_2 \cdot \sin \left( \frac{3}{2} \cdot \pi \right), \quad (84)$$

$$V_{Py} = V_{Ay} + \omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos \varphi_1 + \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos \varphi_2 + \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos \left( \frac{3}{2} \cdot \pi \right). \quad (85)$$

Так как точка Р, принадлежащая катку 2, является мгновенным центром скоростей, то  $V_{Px} = V_{Py} = 0$ . Кроме того,  $\sin (3\pi/2) = -1$ ,  $\cos (3\pi/2) = 0$  и, как следует из условий задачи,  $V_{Ax} = 0$  и  $V_{Ay} = V_A = V \cdot \sin pt$ . С учетом этих замечаний уравнения (84) и (85) принимают вид:

$$\omega_1 \cdot r_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 \cdot r_2 (\sin \varphi_2 - 1) = 0, \quad (86)$$

$$\omega_1 \cdot r_1 \cos \varphi_1 + \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos \varphi_2 + V \cdot \sin pt = 0. \quad (87)$$

Рис. К4в позволяет составить следующее векторное равенство:

$$\bar{r}_C = \bar{r}_P + \overline{PD} + \overline{DC},$$

после дифференцирования которого по времени получим

$$\overline{V}_C = \overline{V}_P + \overline{V}_{DP} + \overline{V}_{CD},$$

или

$$\overline{V}_C = \overline{V}_P + \overline{\omega}_2 \times \overline{PD} + \overline{\omega}_3 \times \overline{DC}. \quad (88)$$

Спроецировав векторное равенство (88) на координатные оси и учитывая, что  $PD = r_2$  и  $DC = r_3$ , находим:

$$V_{Cx} = V_{Px} - \omega_2 \cdot r_2 \cdot \sin(\pi/2) - \omega_3 \cdot r_3 \cdot \sin \varphi_3,$$

$$V_{Cy} = V_{Py} + \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos(\pi/2) + \omega_3 \cdot r_3 \cdot \cos \varphi_3.$$

В этих уравнениях  $V_{Cx} = 0$ ,  $V_{Px} = V_{Py} = 0$ ,  $V_{Cy} = V_C$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ,  $\cos(\pi/2) = 0$ . С учетом этих замечаний последние уравнения приобретают вид:

$$\omega_2 \cdot r_2 + \omega_3 \cdot r_3 \sin \varphi_3 = 0, \quad (89)$$

$$\omega_3 \cdot r_3 \cos \varphi_3 - V_C = 0. \quad (90)$$

Полученная система четырех линейных уравнений (86), (87), (89) и (90) позволяет определить четыре неизвестных  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $V_C$ .

Подставив в эти уравнения числовые значения заданных величин, получим систему уравнений:

$$0,7 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \omega_1 + 0,5 (\sin \varphi_2 - 1) \cdot \omega_2 = 0,$$

$$0,7 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \omega_1 + 0,5 \cos \varphi_2 \cdot \omega_2 + 0,45 \cdot \sin(1,87 \cdot t) = 0, \quad (91)$$

$$0,5 \cdot \omega_2 + 0,8 \sin \varphi_3 \cdot \omega_3 = 0,$$

$$0,8 \cos \varphi_3 \cdot \omega_3 - V_C = 0.$$

Для проведения расчетов по формулам (91) с помощью универсальной математической системы MathCAD приведем эти уравнения к стандартной матричной форме:

$$A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cdot X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = B(t), \quad (92)$$

где  $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  – матрица коэффициентов при  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  и  $V_C$ ;  $B(t)$  – матрица свободных членов;  $X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  – матрица-столбец неизвестных.

Расположим элементы матрицы столбца  $X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  в следующем порядке:

$$X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ V_C \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица  $A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  и столбец свободных членов  $B(t)$  таковы:

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 \cdot \sin \varphi_1 & 0,5 \cdot (\sin \varphi_2 - 1) & 0 & 0 \\ 0,7 \cdot \cos \varphi_1 & 0,5 \cdot \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,8 \cdot \sin \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \cdot \cos \varphi_3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,45 \cdot \sin (1,87 \cdot t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение (92) можно записать как

$$X(t, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = A(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{-1} \cdot B(t). \quad (93)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3, \quad (94)$$

из (93) получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \quad (95)$$

Для решения полученных уравнений используем функцию  $\text{rkfixed}(f0, t0, \tau, n, D)$ , возвращающую матрицу решений методом Рунге-Кутты. Задаем решение уравнений

$$z = \text{rkfixed}(f0, t0, \tau, n, D),$$

где  $f0$  – вектор начальных условий для углов  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$ ;  $t0$  – начальный момент времени;  $\tau$  – конечный момент времени;  $n$  – число шагов;  $D$  – вектор правых частей дифференциальных уравнений (95).

В результате расчетов получим:  $Z^{<0>}$  – вектор значений времени;  $Z^{<1>}$  – вектор значений  $\varphi_1$ ;  $Z^{<2>}$  – вектор значений  $\varphi_2$ ;  $Z^{<3>}$  – вектор значений  $\varphi_3$  для каждого шага времени  $n$ .

Введя вспомогательные функции

$$f_1(t, s1, s2, s3) = X(t, s1, s2, s3)_0,$$

$$f_2(t, s1, s2, s3) = X(t, s1, s2, s3)_1,$$

$$f_3(t, s1, s2, s3) = X(t, s1, s2, s3)_2,$$

$$f_4(t, s1, s2, s3) = X(t, s1, s2, s3)_3,$$

определим векторы значений:

$$\omega_1 = \overline{f_1(z^{<0>}, z^{<1>}, z^{<2>}, z^{<3>})},$$

$$\omega_2 = \overline{f_2(z^{<0>}, z^{<1>}, z^{<2>}, z^{<3>})},$$

$$\omega_3 = \overline{f_3(z^{<0>}, z^{<1>}, z^{<2>}, z^{<3>})},$$

$$V_c = \overline{f_4(z^{<0>}, z^{<1>}, z^{<2>}, z^{<3>})}.$$

Ниже приведена программа расчета, а результаты решения по изложенному методу содержатся в табл. К4.2 и на рис. К4г.

## Программа расчета

Матрица левой части системы уравнений

$$A(\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \begin{bmatrix} 0.7 \cdot \sin(\phi_1) & 0.5 \cdot (\sin(\phi_2) - 1) & 0 & 0 \\ 0.7 \cdot \cos(\phi_1) & 0.5 \cdot \cos(\phi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.8 \cdot \sin(\phi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \cdot \cos(\phi_3) & -1 \end{bmatrix}$$

Матрица правой части системы уравнений

$$B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ -0.45 \cdot \sin(1.87 \cdot t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система уравнений в матричном виде, записанная относительно угловых скоростей звеньев и скорости точки С

$$X(t, \phi_1, \phi_2, \phi_3) := A(\phi_1, \phi_2, \phi_3)^{-1} \cdot B(t)$$

$$D(t, \phi) := \begin{pmatrix} X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_0 \\ X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_1 \\ X(t, \phi_0, \phi_1, \phi_2)_2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} f1(t, s1, s2, s3) &:= X(t, s1, s2, s3)_0 \\ f2(t, s1, s2, s3) &:= X(t, s1, s2, s3)_1 \\ f3(t, s1, s2, s3) &:= X(t, s1, s2, s3)_2 \\ f4(t, s1, s2, s3) &:= X(t, s1, s2, s3)_3 \end{aligned}$$

Вектор столбец начальных условий  $\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0)$

$$f0 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z := \text{rkfixed}(f0, 0, 1.68, 24, D)$$

$$\omega_1 := f1(\overrightarrow{z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}})$$

$$\omega_3 := f3(\overrightarrow{z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}})$$

$$\omega_2 := f2(\overrightarrow{z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}})$$

$$V_c := f4(\overrightarrow{z^{\langle 0 \rangle}, z^{\langle 1 \rangle}, z^{\langle 2 \rangle}, z^{\langle 3 \rangle}})$$



## Результаты решения задачи

t	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$V_c$
0.000	0.500	0.300	1.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.070	0.500	0.300	1.000	-0.0549	-0.0523	0.0389	0.0168
0.140	0.496	0.296	1.003	-0.1093	-0.1029	0.0763	0.0328
0.210	0.489	0.289	1.008	-0.1627	-0.1495	0.1105	0.0472
0.280	0.477	0.279	1.016	-0.2146	-0.1904	0.1400	0.0590
0.350	0.462	0.265	1.026	-0.2647	-0.2240	0.1637	0.0679
0.420	0.444	0.250	1.037	-0.3123	-0.2492	0.1809	0.0736
0.490	0.422	0.232	1.050	-0.3567	-0.2655	0.1913	0.0762
0.560	0.397	0.214	1.063	-0.3972	-0.2727	0.1950	0.0759
0.630	0.369	0.195	1.077	-0.4331	-0.2711	0.1924	0.0730
0.700	0.339	0.176	1.090	-0.4635	-0.2612	0.1841	0.0681
0.770	0.306	0.157	1.103	-0.4878	-0.2441	0.1709	0.0616
0.840	0.272	0.140	1.115	-0.5051	-0.2209	0.1538	0.0541
0.910	0.237	0.125	1.126	-0.5149	-0.1930	0.1337	0.0460
0.980	0.201	0.111	1.135	-0.5162	-0.1620	0.1117	0.0377
1.050	0.164	0.100	1.143	-0.5087	-0.1295	0.0890	0.0295
1.120	0.129	0.091	1.149	-0.4916	-0.0973	0.0666	0.0218
1.190	0.094	0.084	1.154	-0.4644	-0.0670	0.0458	0.0148
1.260	0.062	0.079	1.157	-0.4267	-0.0402	0.0274	0.0088
1.330	0.032	0.077	1.159	-0.3784	-0.0184	0.0126	0.0040
1.400	0.006	0.075	1.160	-0.3195	-0.0027	0.0018	0.0006
1.470	-0.017	0.075	1.160	-0.2505	0.0064	-0.0043	-0.0014
1.540	-0.034	0.075	1.160	-0.1729	0.0090	-0.0061	-0.0020
1.610	-0.046	0.076	1.159	-0.0884	0.0062	-0.0042	-0.0014
1.680	-0.053	0.077	1.159	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000

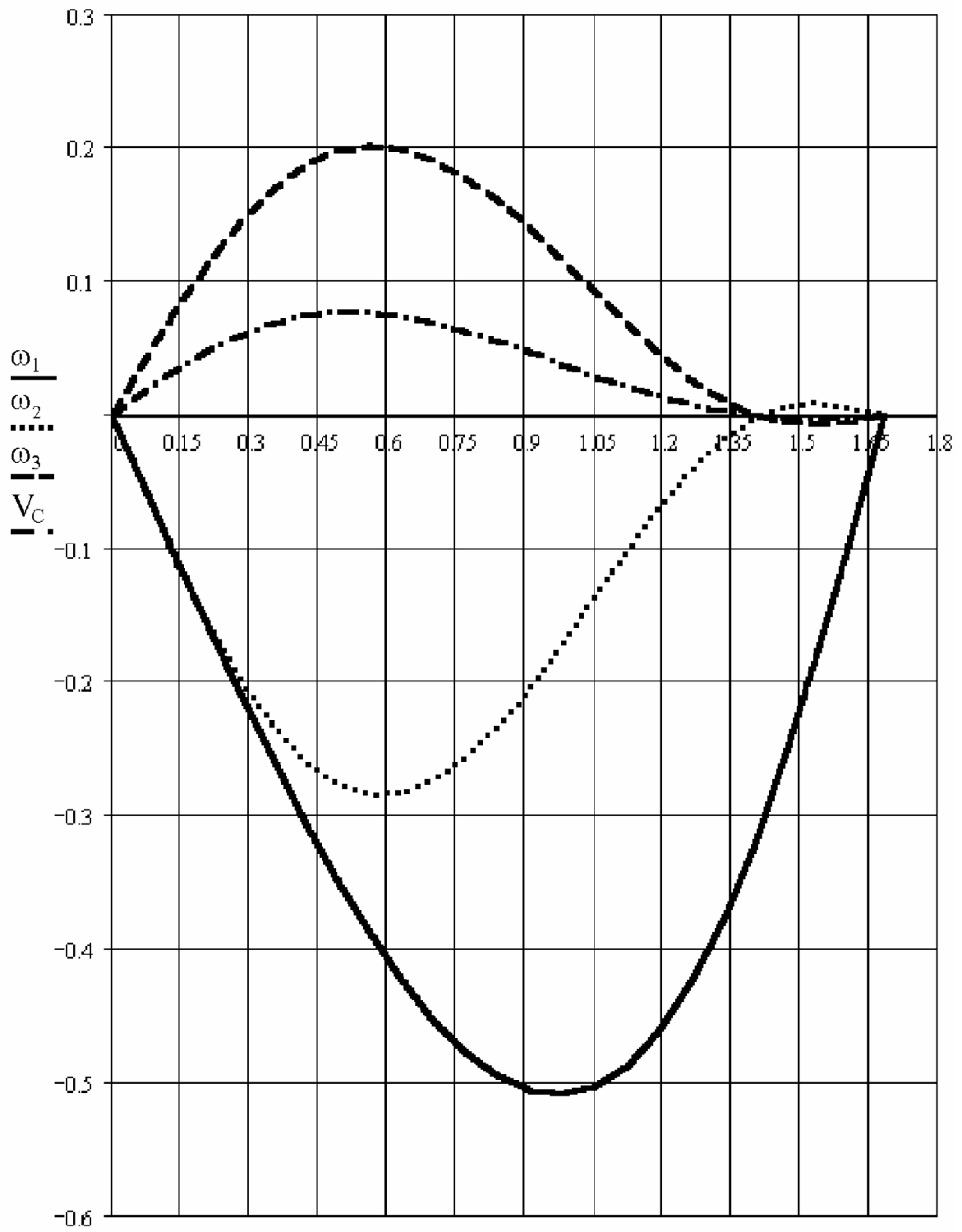


Рис. К4г

Для составления программ на языке *Pascal* уравнения (91) представим в явном виде относительно  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $V_C$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{0,6428 \cdot \sin(1,87 \cdot t) \cdot (\sin \varphi_2 - 1)}{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_2 \cdot (\sin \varphi_2 - 1)}, \\ \omega_2 &= \frac{-1,4 \cdot \omega_1 \sin \varphi_1 \cdot (\sin \varphi_2 - 1)}{\sin \varphi_2 - 1}, \\ \omega_3 &= \frac{-0,625 \cdot \omega_2}{\sin \varphi_3}, \\ V_C &= 0,8 \cdot \omega_3 \cdot \cos \varphi_3.\end{aligned}\tag{96}$$

Конечно-разностная схема Эйлера для уравнений (94), (96) приводит к следующим уравнениям, связывающим значения углов и угловых скоростей в начале и конце  $k$ -го шага интегрирования:

$$\varphi_1(k+1) = \varphi_1(k) + \omega_1(k) \cdot \Delta t,$$

$$\varphi_2(k+1) = \varphi_2(k) + \omega_2(k) \cdot \Delta t,$$

$$\varphi_3(k+1) = \varphi_3(k) + \omega_3(k) \cdot \Delta t.$$

Учитывая начальные условия  $\varphi_1(0)$ ,  $\varphi_2(0)$ ,  $\varphi_3(0)$  и шаг по времени  $\Delta t$ , организуем цикл по времени с помощью стандартного оператора

```
repeat
.....
Тело цикла (формулы (96) для вычислений  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $V_C$ )
.....
until t >  $\tau$ .
```

На печать с шагом  $\Delta t = \tau/24 = 0,07$  с выводятся переменные  $t$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $V_C$ .

Ниже представлена программа и результаты расчета на языке *Pascal* (табл. К4.3), а также график изменения скоростей в зависимости от времени (рис. К4д).

```

Program Manipul
const dt=1.68/24;

Var
    om1, om2, om3, Vc, f1, f2, f3, t, K1, K2: REAL;
    F, S: Text;

Begin
    t := 0; f1 := 0.5; f2 := 0.3; f3 := 1.0;
    Assign(F, 'S41.dat');
    Assign(S, 'S42.dat');
    ReWrite(F);
    ReWrite(S);
    Repeat
        K1 := sin(f1)*cos(f2) - cos(f1)*(sin(f2) - 1);
        om1 := 0.6428*sin(1.87*t)*(sin(f2) - 1)/K1;
        K2 := - K1;
        om2 := 0.9*sin(1.87*t)*sin(f1)/K2;
        om3 := 0.5625*sin(1.87*t)*sin(f1)/(K1*sin(f3));
        Vc := 0.45*sin(1.87*t)*sin(f1)*cos(f3)/(K1*sin(f3));
        Writeln(F, t:8:3, f1:8:3, f2:8:3, f3:8:3,
om1:10:4, om2:10:4, om3:10:4, Vc:10:4);
        Writeln(S, t:8:3, om1:8:3, om2:10:3, om3:10:3,
Vc:12:3);
        t := t + dt;
        f1 := f1 + om1*dt;
        f2 := f2 + om2*dt;
        f3 := f3 + om3*dt;
        Until t >= 1.68 + 0.15;

End.

```

## Результаты расчета

t	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$V_c$
0.0000	0.5000	0.3000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0700	0.4981	0.2981	1.0014	-0.0529	-0.0548	0.0407	0.0175
0.1400	0.4926	0.2924	1.0057	-0.1055	-0.1074	0.0795	0.0341
0.2100	0.4834	0.2831	1.0125	-0.1572	-0.1557	0.1147	0.0486
0.2800	0.4706	0.2707	1.0216	-0.2078	-0.1979	0.1450	0.0606
0.3500	0.4544	0.2556	1.0326	-0.2566	-0.2327	0.1694	0.0694
0.4200	0.4348	0.2383	1.0452	-0.3030	-0.2589	0.1871	0.0751
0.4900	0.4120	0.2196	1.0587	-0.3465	-0.2761	0.1980	0.0776
0.5600	0.3863	0.1999	1.0727	-0.3863	-0.2841	0.2021	0.0772
0.6300	0.3580	0.1800	1.0868	-0.4218	-0.2830	0.1998	0.0744
0.7000	0.3274	0.1605	1.1006	-0.4521	-0.2735	0.1917	0.0695
0.7700	0.2948	0.1419	1.1135	-0.4767	-0.2563	0.1785	0.0631
0.8400	0.2608	0.1247	1.1255	-0.4947	-0.2326	0.1611	0.0555
0.9100	0.2258	0.1094	1.1360	-0.5055	-0.2038	0.1404	0.0473
0.9800	0.1902	0.0963	1.1451	-0.5083	-0.1713	0.1175	0.0388
1.0500	0.1548	0.0855	1.1525	-0.5025	-0.1369	0.0936	0.0304
1.1200	0.1201	0.0771	1.1582	-0.4872	-0.1025	0.0699	0.0224
1.1900	0.0868	0.0711	1.1623	-0.4619	-0.0700	0.0477	0.0152
1.2600	0.0557	0.0673	1.1649	-0.4258	-0.0413	0.0281	0.0089
1.3300	0.0275	0.0652	1.1663	-0.3786	-0.0181	0.0123	0.0039
1.4000	0.0029	0.0646	1.1667	-0.3203	-0.0016	0.0011	0.0003
1.4700	-0.0171	0.0648	1.1666	-0.2514	0.0075	-0.0051	-0.0016
1.5400	-0.0320	0.0654	1.1661	-0.1734	0.0097	-0.0066	-0.0021
1.6100	-0.0412	0.0660	1.1657	-0.0885	0.0064	-0.0043	-0.0014
1.6800	-0.0443	0.0663	1.1656	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

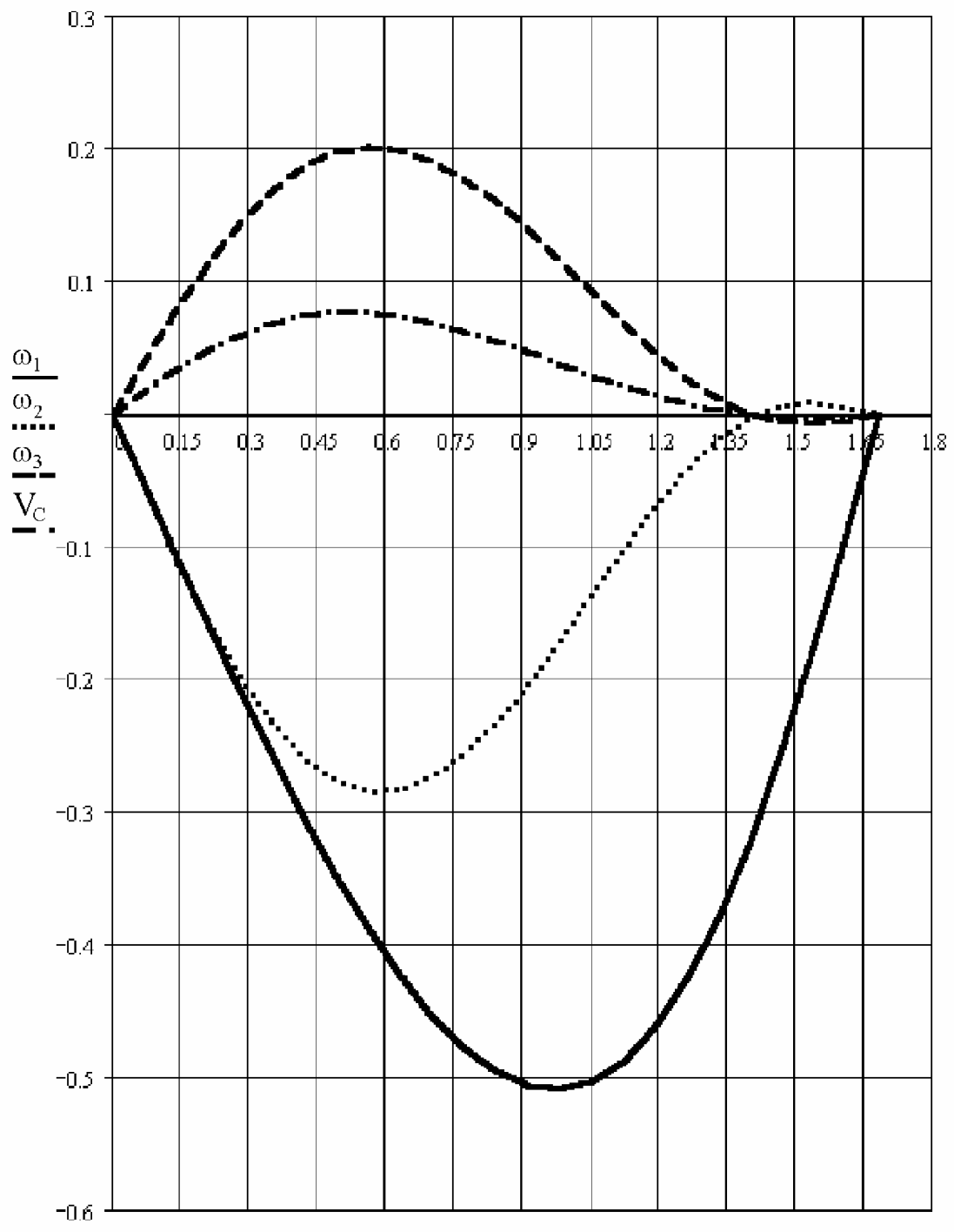


Рис. К4д

Оценим полученные результаты, сравнив их со значениями скоростей, вычисленными для какого-либо момента времени с помощью мгновенных центров скоростей.

Например, при  $t = 0,7$  с из табл. К4.2 имеем:  $\varphi_1 = 0,339$  рад =  $19,42^\circ$ ,  $\varphi_2 = 0,167$  рад =  $10,08^\circ$ ,  $\varphi_3 = 1,09$  рад =  $62,45^\circ$ ,  $V_A = 0,435$  м/с.

Вычертим в масштабе схему механизма для выписанных углов (рис. К4е) и покажем на ней положение мгновенных центров скоростей.

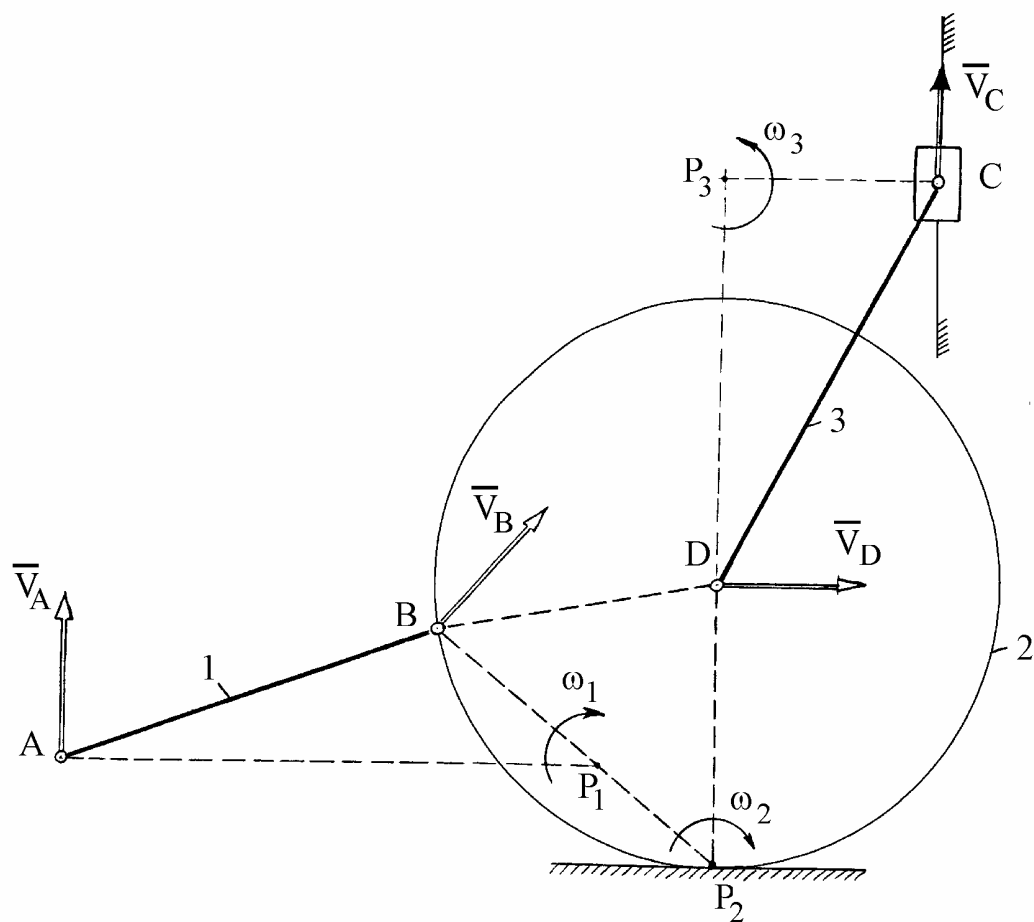


Рис. К4е

Угловая скорость звена 1

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{0,435}{0,94} = 0,4627 \text{ рад / с.}$$

Скорость точки В

$$V_B = \omega_1 BP_1 = 0,4627 \cdot 0,37 = 0,1712 \text{ м/с.}$$

Угловая скорость колеса (звена 2)

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BP_2} = \frac{0,1712}{0,65} = 0,2634 \text{ рад / с.}$$

Скорость точки D

$$V_D = \omega_2 DP_2 = 0,2634 \cdot 0,5 = 0,1317 \text{ м/с.}$$

Угловая скорость звена 3

$$\omega_3 = \frac{V_D}{DP_3} = \frac{0,1317}{0,72} = 0,1829 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки C

$$V_C = \omega_3 CP_3 = 0,1829 \cdot 0,38 = 0,0695 \text{ м/с.}$$

Полученные результаты практически совпадают с результатами расчета на ЭВМ.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: В 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб.: Изд-во «Лань», 1998. 736 с.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов / С. М. Тарг. М.: Высш. шк., 1995. 416 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. М.; СПб.: Изд-во «Лань», 2001. 768 с.
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Статика и кинематика: Учеб. пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. СПб: Политехника, 1995. 670 с.
5. Новожилов, И. В. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ. / И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.
6. Мартынов, А. Г. Определение опорных реакций составной балки с элементами оптимизации: Метод. указания / Сост. А. Г. Мартынов, Т. П. Мартынова. Красноярск: КГТУ, 1997. 20 с.
7. Мартынов, А. Г. Кинематический расчет манипулятора: Метод. указания / Сост. А. Г. Мартынов, К. А. Редкоус. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. 26 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Программа курса «Теоретическая механика»	3
1. Статика. Основные положения	6
1.1. Произвольная плоская система сил	15
Задача С1	17
Задача С2	22
1.2. Система сходящихся сил	29
Задача С3	29
1.3. Произвольная пространственная система сил	34
Задача С4	39
1.4. Определение опорных реакций составной балки с элементами оптимизации	44
Задача С5	44
Пример выполнения задания	51
2. Кинематика	61
2.1. Кинематика точки	61
Задача К1	64
2.2. Кинематика плоскопараллельного движения твердого тела	69
Задача К2	74
2.3. Составное (сложное) движение точки	82
Задача К3	85
2.4. Кинематический расчет манипулятора	94
Задача К4	96
Библиографический список	116