ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА КИНЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения всех специальностей

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука, которая изучает общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Она имеет большое значение для качественной подготовки инженерных кадров в различных отраслях техники, так как является фундаментальной наукой для многих специальных технических дисциплин. Теоретическая механика построена на законах И. Ньютона, а также на ряде аксиом, справедливость которых проверена многовековой практической деятельностью человека в области механики.

В общем случае движение является одной из форм существования материи. В теоретической механике изучают один из видов движения – механическое движение – это изменение положения тел в пространстве, происходящее с течением времени. Следует отметить, что состояние покоя является частным случаем механического движения, поэтому в теоретической механике изучают также равновесие материальных объектов. Под механическим взаимодействием понимают действия материальных тел друг на друга, в результате которых изменяется характер их механического движения или форма. Основной мерой механического взаимодействия тел является сила, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Кинематика – важный раздел теоретической механики, в котором изучают законы движения материальной точки и абсолютно твердого тела с геометрической точки зрения, без учёта их инерционных характеристик (массы) и действующих на них сил.

Движение в кинематике рассматривают как изменение положения тела в пространстве с течением времени по отношению к выбранной системе отсчета. *Система отсчета* включает тело отсчета (движение тела всегда изучают по отношению к какому-либо другому телу, которое считают неподвижным), связанную с ним систему координат и часы для измерения времени. В теоретической механике в качестве основной используют гелиоцентрическую инерциальную систему отсчета, связанную с Солнцем. Однако при решении многих практических задач применяют и систему отсчета, связанную с Землей.

Движение тел происходит в пространстве с течением времени. В классической механике Галилея-Ньютона пространство, в котором изучают движение тел, считают трехмерным, евклидовым, абсолютным, однородным и изотропным. Свойства пространства не зависят от времени и движущихся в нем тел, они одинаковы во всех точках и направлениях. Время является непрерывно изменяющейся скалярной величиной, направлено от настоящего к будущему и протекает одинаково во всех системах отсчета.

Кинематику подразделяют на кинематику точки и кинематику абсолютно твердого тела. Если при изучении движения тела его формой и размерами можно пренебречь, то такое тело отождествляют с *материальной точкой*, т.е. с геометрической точкой, в которой вся масса тела условно считается сосредоточенной. В других случаях тело рассматривают как абсолютно твердое, форму и размеры которого принимают неизменяемыми. ***Абсолютно твердым телом*** называют такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого при его движении не изменяется.

В теории относительности Эйнштейна свойства пространства зависят от материальных объектов и их движения, а пространство и время связаны между собой и рассматриваются как единое четырехмерное пространство – время. При этом время зависит от того, в какой системе отсчета оно изменяется. Эйнштейну удалось обобщить законы механики на движение тел со скоростью, близкой к скорости света. Поправки и изменения, вносимые теорией относительности в законы классической механики, становятся ощутимыми только при больших скоростях, близких к скорости света, а также для тел, размеры которых имеют порядок атомов.

Основными задачами кинематики являются:

1) установление закона движения, т.е. способа задания положения точки или тела в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета;

2) определение по заданному закону движения всех кинематических величин, характеризующих изучаемое движение.

Для точки кинематическими характеристиками движения являются *траектория*, *скорость* и *ускорение*, для абсолютно твердого тела – у*гловая скорость* и *угловое ускорение* самого тела, а также *траектория*, *скорость* и *ускорение* любой его точки. В кинематике не используют какие-либо законы механики, полученные опытным путем. Все ее изложение опирается на известные аксиомы евклидовой геометрии. Для изучения кинематики необходимы знания математики в рамках аналитической геометрии, математического анализа и векторной алгебры.

В настоящем учебно-методическом пособии содержатся краткие теоретические сведения из раздела «Кинематика» по следующим темам:

1) кинематика точки;

2) простейшие виды движения твердого тела: поступательное и вращательное вокруг неподвижной оси;

3) плоскопараллельное движение твердого тела.

По каждой теме даны вопросы для самоконтроля. В 4-м разделе пособия рассмотрены примеры решения типовых задач и приведены варианты контрольных заданий. В пособии имеются ссылки на рекомендуемую литературу, из которой студенты заочного обучения могут получить более объемные знания по интересующим их вопросам.

Для изучения конкретной темы и выполнения контрольного задания студенту следует:

1) внимательно прочитать соответствующий раздел в учебнике, выбранном из списка рекомендуемой литературы; изучить теоретические сведения и методические рекомендации настоящего пособия; составить краткий конспект, записав основные определения, теоремы и формулы; ответить на контрольные вопросы;

2) разобрать решения приведенных типовых задач;

3) самостоятельно выполнить и оформить контрольные задания в соответствии с предложенным преподавателем вариантом.

Данное пособие способствует развитию и закреплению у будущих инженеров практических навыков решения разнообразных задач кинематики, необходимые в их профессиональной деятельности.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика точки – это раздел кинематики, в котором исследуют механическое движение материальной точки. Основная задача кинематики точки состоит в следующем:

1) задать закон движения точки, т.е. указать правило, в соответствии с которым можно однозначно определить положение точки в пространстве в любой момент времени по отношению к выбранной системе отсчета;

2) по заданному закону движения точки определить все кинематические характеристики ее движения. К характеристикам движения относят *траекторию, скорость и ускорение точки*. *Траектория точки* – непрерывная пространственная кривая, которую точка описывает в процессе движения. Если траекторией является прямая линия, то движение называют ***прямолинейным***, если кривая – ***криволинейным***.

1.1. Способы задания движения точки

Для решения задач кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было задано. Оно считается заданным, если в любой момент времени однозначно можно определить положение точки в пространстве относительно заданной системы отсчета. Используют три основных способа задания движения точки: *векторный, координатный* и *естественный.*

Векторный способ. Положение движущейся точки M в любой момент времени можно определить с помощью ее радиус-вектора, проведенного из центра O, связанного с телом отсчета, в точку M (рис. 1.1). Чтобы задать движение векторным способом, необходимо определить векторную функцию времени в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.1}$$

Зависимость (1.1) называют ***уравнением движения точки в векторной форме***. Начало радиус-вектора движущейся точки находится в точке O, а конец его перемещается по траектории вместе с точкой M. Геометрическое место концов радиус-вектора, т.е. годограф этого вектора, определяет траекторию движущейся точки.

Координатный способ. С телом отсчета связывают прямоугольную систему декартовых координат, при этом положение точки

определяют ее координатами, которые являются скалярными функциями времени (рис. 1.2):

$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнения (1.2) называют ***уравнениями движения точки в координатной форме***. Они являются параметрическими уравнениями траектории точки. Исключив из этих уравнений параметр – время, можно получить уравнение траектории.

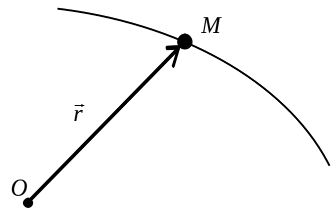


Рисунок 1.1

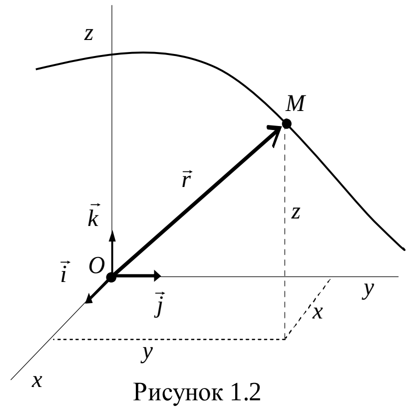


Рисунок 1.2

Между способами задания движения точки имеется связь. Так, если начало декартовой системы координат совпадает с центром, из которого проводится радиус-вектор точки при векторном способе изучения ее движения (см. рис. 1.2), то координаты точки равны проекциям на соответствующие оси радиус-вектора точки

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты координатных осей.

Естественный способ. Этот способ используют в тех случаях, когда заранее известна траектория точки. На траектории выбирают неподвижную точку O (начало отсчета), а также положительное и отрицательное направления отсчета расстояний точки от начала отсчета (рис. 1.3). Тогда положение точки M на траектории будет однозначно определяться зависимостью криволинейной координаты S = OM от времени

$$s = s(t). \qquad (1.3)$$

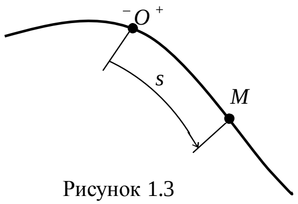


Рисунок 1.3

Связь между координатным и естественным способами определяется выражением

$$s = \pm\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt + C\ ,$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – первые производные от координат точки по времени; C – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

1.2. Скорость точки

Одной из основных кинематических характеристик движения точки является скорость точки. *Скорость точки* – это векторная величина, характеризующая интенсивность и направление движения точки в пространстве в рассматриваемый момент времени.

В случае векторного способа задания движения вектор скорости точки равен первой производной по времени от ее радиус-вектора

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \qquad (1.4)$$

где точка над функцией в теоретической механике означает первую производную по времени, а две точки – вторую производную по времени. Производные по другим переменным записывают обычным образом. Вектор скорости точки приложен в самой точке и направлен по касательной к траектории в сторону движения точки. Единица измерения скорости в системе СИ – 1 м/с.

При координатном способе задания движения точки ее скорость определяют через проекции вектора скорости на оси выбранной системы координат, которые равны первым производным от соответствующих координат по времени:

$$v_x = \dot{x};$$
$$v_y = \dot{y}; \qquad (1.5)$$
$$z_x = \dot{z}.$$

Если известны проекции скорости на оси координат, то модуль вектора скорости и его направляющие косинусы находят по формулам:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad \cos\alpha = \frac{v_x}{\left|\vec{v}\right|}; \quad \cos\beta = \frac{v_y}{\left|\vec{v}\right|}; \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{\left|\vec{v}\right|}, \qquad (1.6)$$

где α, β, γ – углы между вектором скорости и осями координат. При естественном способе задания движения точки вектор ее скорости определяют по формуле

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = v_\tau\vec{\tau}, \qquad (1.7)$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории в данной точке, направленный всегда в сторону положительного отсчета криволинейной координаты S. Скалярную величину $\dot{s} = v_\tau$, являющуюся проекцией вектора скорости на касательную к траектории, называют ***алгебраической скоростью точки*** (рис. 1.4). Знак алгебраической скорости определяет направление движения точки: если $\dot{s} > 0$, то вектор скорости совпадает по направлению с вектором $\vec{\tau}$; в противном случае он направлен в противоположную сторону. На рисунке точка O_1 означает центр кривизны траектории, а ρ – радиус кривизны в точке M.

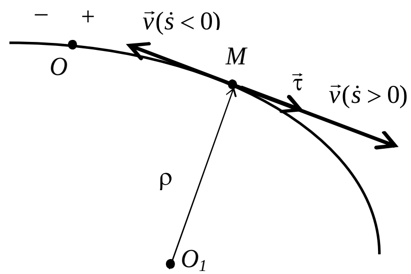


Рисунок 1.4

1.3. Ускорение точки

Ускорение точки является векторной мерой изменения ее скорости, как по величине, так и по направлению. При векторном способе задания движения вектор ускорения точки равен первой производной по времени от вектора ее скорости или второй производной по времени от ее радиус-вектора:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \tag{1.8}$$

Вектор ускорения приложен к движущейся точке, лежит в соприкасающейся плоскости к траектории в данной точке и направлен в общем случае в сторону вогнутости траектории. Единица измерения ускорения в системе СИ – 1 м/с^2 .

При координатном способе задания движения точки вектор ускорения определяют через его проекции на оси координат, которые равны вторым производным от соответствующих координат по времени:

$$a_x = \ddot{x}\,, \quad a_y = \ddot{y}\,, \quad a_x = \ddot{z}\,. \tag{1.9}$$

Если известны проекции ускорения на оси координат, то модуль вектора ускорения и его направляющие косинусы находят по формулам:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad \cos\alpha_1 = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}; \quad \cos\beta_1 = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}\,, \tag{1.10}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы между вектором ускорения и осями координат.

При естественном способе задания движения с движущейся точкой связывают естественную систему координат (рис. 1.5). Естественный трехгранник составляется из трех пересекающихся взаимно перпендикулярных плоскостей: 1 – *соприкасающейся*, 2 – *нормальной* и 3 – *спрямляющей*. Линии пересечения плоскостей образуют правую систему естественных осей координат: τ, *n* и *b*, определяемых единичными векторами $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, которые называют единичными векторами касательной, главной нормали и бинормали соответственно.

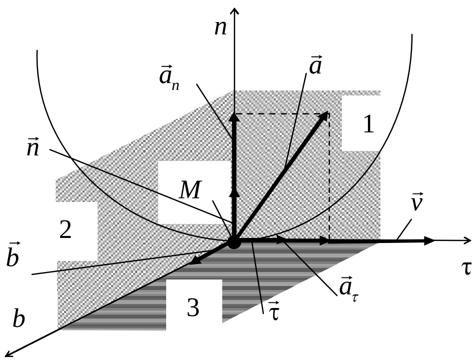


Рисунок 1.5

Вектор ускорения точки в естественной системе определяют по формулам:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \dot{v}_\tau\vec{\tau};$$

$$\vec{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\vec{n} = \frac{v_\tau^2}{\rho}\vec{n}; \tag{1.11}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}_\tau\right|^2 + \left|\vec{a}_n\right|^2}; \quad \vec{a}_b = 0.$$

Здесь $\vec{a}_\tau$ – *касательное* или *тангенциальное* ускорение точки, которое направлено по касательной к траектории в сторону движения, если движение ускоренное (алгебраическая скорость точки возрастает), и в противоположную сторону, если движение замедленное (алгебраическая скорость точки убывает). *Нормальное* ускорение $\vec{a}_n$ всегда направлено по нормали к траектории в сторону вогнутости. Поскольку вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости, то его проекция на бинормаль $\vec{a}_b$ равна нулю. Касательное ускорение характеризует изменения скорости точки по модулю, а нормальное – по направлению.

Касательное ускорение точки по величине и направлению можно определить по известным проекциям векторов скорости и ускорения на координатные оси по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\left|\vec{v}\right|}\,. \tag{1.12}$$

1.4. Частные случаи движения точки

Движение точки с постоянной по модулю скоростью называют ***равномерным***, т.е. $\left|\vec{v}\right| = \text{const}$ или $v_\tau = \dot{s} = \text{const}$. Следовательно,

при криволинейном движении

$$s = s_0 + v_\tau t; \quad a_\tau = \dot{v}_\tau = 0; \quad a_n = \frac{(v_\tau)^2}{\rho}; \qquad (1.13)$$

при прямолинейном движении, например, вдоль оси x

$$x = x_0 + \dot{x}t; \quad \ddot{x} = 0; \quad a_\tau = \ddot{x} = 0; \quad a_n = 0; \quad \rho = \infty. \qquad (1.14)$$

Движение, при котором касательное ускорение точки не изменяется, называют ***равнопеременным***, т.е. $a_\tau = \ddot{s} =$ const. Следовательно, при криволинейном движении

$$v_\tau = v_{\tau 0} + a_\tau t; \quad s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_\tau \frac{t^2}{2}; \quad a_n = \frac{(v_\tau)^2}{\rho}, \qquad (1.15)$$

при прямолинейном движении

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \ddot{x}t; \quad x = x_0 + \dot{x}_0 t + \ddot{x}\frac{t^2}{2}; \quad a_\tau = \ddot{x}; \quad a_n = 0. \qquad (1.16)$$

Пример. Движение снаряда в вертикальной плоскости (рис. 1.6) описывают уравнениями: $x = 300\,t$, м; $y = 400\,t - 5t^2$, м, где t – время, с.

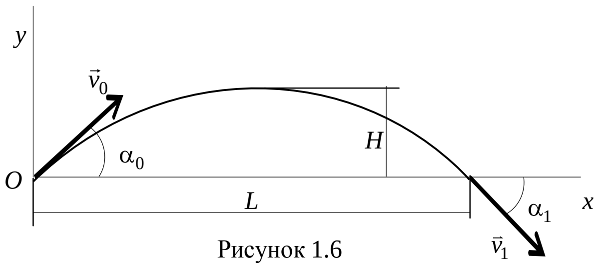


Рисунок 1.6

Определить:

– траекторию, скорость и ускорение снаряда в начальный и конечный моменты времени;

– высоту подъема снаряда над уровнем горизонта H и дальность обстрела L;

– радиус кривизны траектории в ее начальной, конечной и наивысшей точках.

Решение

Найдем уравнение траектории, исключив из уравнения движения $y = 400\,t - 5t^2$ (м) время t. Сначала из уравнения $x = 300\,t$ определим $t = \dfrac{x}{300}$, а затем получим уравнение траектории в следующем виде: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{18000}x^2$. Траекторией снаряда в координатах x и y вертикальной плоскости является парабола.

Вычислим проекции скорости и ускорения снаряда на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = 300 \text{ м/с}; \; v_y = \dot{y} = 400 - 10t \text{ м/с}; \; a_x = \ddot{x} = 0; \; a_y = \ddot{y} = -10 \text{ м/с}^2.$$

Определим их значения в начальный момент времени $t = 0$:

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ м/с};$$

$$a_0 = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-10)^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Высоту подъема снаряда над уровнем горизонта можно определить, исследовав на экстремум функции $y(t)$ по переменной t. Это означает, что с точки зрения кинематики проекция скорости точки на ось y в рассматриваемый момент времени должна быть равна нулю. Тогда $\dot{y} = 400 - 10\tau_1 = 0$, где τ_1 – время подъёма снаряда на максимальную высоту, $\tau_1 = 40$ с. Подставляя данное значение времени в выражение для y, получим $y_{\max} = H = y(40) = 8$ км. Дальность обстрела определим из условия, что в момент падения снаряда функция $y(t)$ принимает нулевое значение $y(\tau_2) = 400\tau_2 - 5\tau_2^2 = 0$, где τ_2 – время полета снаряда. Корень этого квадратного уравнения, соответствующий падению снаряда на землю, $\tau_2 = 80$ с, откуда дальность полета $x_{\max} = x(80) = 24$ км.

Теперь, зная время полета снаряда, можно определить его скорость и ускорение в конце полета. Подставляя время τ_2 в выражение для проекции скорости снаряда на ось y, получим $v_{1y} = -400$ м/с. Проекции скорости и ускорения на ось x не зависят от времени и постоянны в течение полета. Таким образом, снаряд движется с постоянным ускорением, равным 10 м/с^2 и направленным вертикально вниз, а его скорость в конце полета равна по модулю скорости в начале его $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_0| = 500$ м/с и составляют с осью x одинаковые углы $|\alpha_1| = |\alpha_0|$.

Для определения радиуса кривизны перейдем к кинематическим характеристикам движения снаряда в естественной системе отсчета.

Вначале найдем касательное ускорение по формуле

$$a_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|},$$

а затем вычислим его для начального момента времени

$$a_{0\tau} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{|\vec{v}|} = \frac{300 \cdot 0 + 400 \cdot (-10)}{500} = -8 \text{ см/с}^2$$

и для конечного

$$a_{1\tau} = \frac{300 \cdot 0 + (-400) \cdot (-10)}{500} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Теперь можно посчитать нормальное ускорение по формуле $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_\tau|^2}$, а затем и $a_{0n} = a_{1n} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см/с^2. Поскольку радиус кривизны траектории входит в формулу $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, то

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{500^2}{6} = 41.667 \text{ км}.$$

Радиусы кривизны траектории в начале и в конце полета одинаковы. В наивысшей точке траектории

$$a_\tau = \frac{300 \cdot 0 + 0 \cdot (-10)}{500} = 0; \quad a_n = 10 \text{ см/с}^2; \quad |\vec{v}| = 300 \text{ см/с};$$

$$\rho = \frac{300^2}{10} = 9 \text{ км}.$$

Как видно из приведенного примера, уравнения движения точки содержат все необходимое для исследования характеристик ее движения в любой момент времени.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключаются задачи кинематики точки и абсолютно твердого тела?
2. Какие способы применяют для задания движения точки?
3. Как определяют скорость точки при различных способах задания ее движения?
4. Как определяют ускорение точки при различных способах задания ее движения?

2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематика твердого тела – это раздел, в котором изучают кинематику абсолютно твердого тела. Основными задачами кинематики твердого тела являются задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом, а также определение кинематических характеристик движения точек, принадлежащих этому телу.

К простейшим движениям твердого тела относят *поступательное движение* и *вращение тела вокруг неподвижной оси*. Более сложные виды движения – *плоскопараллельное* и *сферическое*.

2.1. Понятие о степенях свободы твердого тела

Для задания движения твердого тела необходимо установить *число степеней свободы*, т.е. минимальное число независимых скалярных переменных, в совокупности однозначно определяющих положение материального тела в пространстве. Эти переменные в динамике принято называть обобщенными координатами. В 1-м разделе настоящего пособия было показано, что для однозначного определения положения точки в пространстве необходимо знать, например, три ее декартовы координаты. Следовательно, материальная точка имеет три степени свободы.

При задании движения твердого тела его положение в пространстве можно считать заданным, если известно положение трех его точек, например, A, B, C, не лежащих на одной прямой. В этом случае для однозначного определения положения твердого тела в пространстве необходимо знать по три координаты каждой из этих точек:

$$A(x_A, y_A, z_A),\ B(x_B, y_B, z_B),\ C(x_C, y_C, z_C).$$

Все девять координат нельзя считать независимыми, так как они связаны между собой уравнениями, вытекающими из условия неизменности расстояния между точками *A*, *B*, *C* абсолютно твердого тела:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2;$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2; \qquad (2.1)$$

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = CB^2,$$

где *AB*, *AC*, *BC* – расстояния между соответствующими точками тела.

Таким образом, число степеней свободы твердого тела в общем случае его движения в пространстве равно шести (3×3 – 3 = 6). При этом в качестве независимых параметров могут выступать как любые шесть независимых координат точек *A*, *B*, *C*, так и шесть других независимых скалярных переменных. Кроме общего случая движения твердого тела, имеют место и другие его виды, характеризующиеся некоторыми отличительными признаками, позволяющими выделять их из всех возможных движений тела.

2.2. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается при движении параллельной своему первоначальному направлению. Поступательное двнжение может быть и прямолинейным, и криволинейным. Например, кузов автомобиля, движущийся по прямолинейному участку дороги, совершает прямолинейное поступательное движение; кабинка вращающегося колеса обозрения совершает криволинейное поступательное движение.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой: «***При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (совпадающие при наложении) траектории и имеют равные по модулю и направлению скорости и ускорения***». Следовательно, поступательное движение тела вполне определяется движением какой-либо его точки, а изучение движения сводится к уже рассмотренной задаче кинематики точки. Задавать поступательное

движение можно, например, с помощью трех декартовых координат любой точки тела, являющихся функциями времени

$$x_A = f_1(t);\; y_A = f_2(t);\; z_A = f_3(t). \qquad (2.2)$$

Так как для описания положения тела в пространстве надо задать три независимых параметра (декартовы координаты одной из его точек), говорят, что тело при поступательном движении в пространстве имеет три степени свободы.

Поскольку скорости и ускорения всех точек твердого тела при поступательном движении одинаковы, можно пользоваться терминами «*скорость тела*» и «*ускорение тела*», подразумевая скорость и ускорение любой его точки. При координатном способе задания движения скорость и ускорение тела определяют по их проекциям на координатные оси, которые равны первой и второй производным от соответствующих координат по времени:

$$v_{Ax} = \dot{x}_A;\; v_{Ay} = \dot{y}_A;\; v_{Az} = \dot{z}_A; \qquad (2.3)$$

$$a_{Ax} = \ddot{x}_A;\; a_{Ay} = \ddot{y}_A;\; a_{Az} = \ddot{z}_A. \qquad (2.4)$$

Модули скорости и ускорения определяются по формулам:

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 + v_{Az}^2};\; a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2 + a_{Az}^2}. \qquad (2.5)$$

2.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением вокруг неподвижной оси называют такое движение твердого тела, при котором две какие-либо точки, принадлежащие телу, остаются неподвижными. Прямую, проходящую через эти точки, называют ***осью вращения*** тела. Перемещение тела из одного положения в другое называют ***поворотом***. Все точки тела, лежащие на оси вращения, неподвижны. Все точки, не лежащие на оси вращения, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры расположены на оси.

Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как его положение в пространстве в любой момент времени полностью определяется одним независимым параметром – плоским углом φ между двумя плоскостями: неподвижной и подвижной, жестко связанной с вращающимся телом (рис. 2.1). Этот угол называют ***углом поворота тела*** и измеряют в радианах. При этом принято считать угол поворота φ положительным, если поворот тела, наблюдаемый с положительного направления оси *Oz*, виден происходящим против хода часовой стрелки.

Таким образом, закон вращательного движения можно считать установленным, если задан угол поворота тела как функция времени

$$\varphi = \varphi(t)\,. \tag{2.6}$$

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения тела в целом являются *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Угловая скорость тела – это векторная величина, характеризующая интенсивность и направление изменения угла поворота тела.

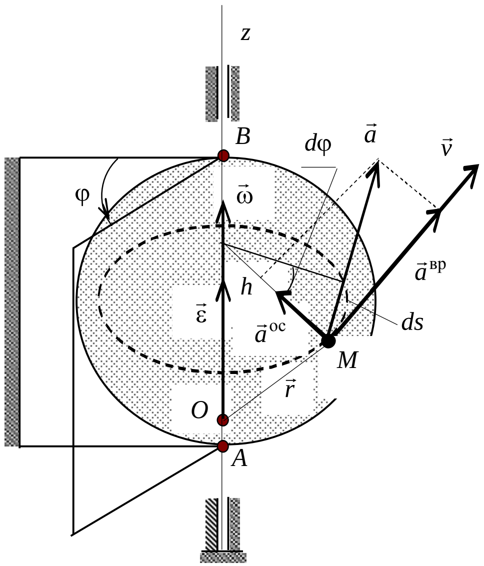


Рисунок 2.1

Алгебраическое значение угловой скорости равно первой производной по времени от угла поворота тела

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,. \tag{2.7}$$

Угловое ускорение тела – это векторная величина, характеризующая интенсивность изменения угловой скорости. Алгебраическое значение углового ускорения равно первой производной по времени от угловой скорости тела или второй производной по времени от угла поворота тела

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}\,. \tag{2.8}$$

Размерность угловой скорости в системе СИ – рад/с, размерность углового ускорения – рад/с^2. Число оборотов тела *N* и число оборотов в минуту *n* связаны с углом поворота $\varphi(t)$ и угловой скоростью $\omega_z(t)$ следующими зависимостями:

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад;}$$

$$\omega_z = \frac{2\pi n}{60} \text{ рад/с.}$$

Установим зависимости между общими кинематическими характеристиками вращательного движения тела в целом, а также скоростями и ускорениями различных точек этого тела. Траекториями точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, радиусы которых равны расстояниям от этих точек до оси вращения. Применяя естественный способ задания движения точки тела и учитывая, что $ds = h \cdot d\varphi$, где h – расстояние от точки до оси вращения тела (см. рис. 2.1), для скорости и ускорения точки *M* запишем

$$v = h\dot{\varphi} = h\omega_z; \tag{2.9}$$

$$a^{\text{вр}} = h\ddot{\varphi} = h\dot{\omega}_z = h\varepsilon_z; \tag{2.10}$$

$$a^{\text{ос}} = h\dot{\varphi}^2 = h\dot{\omega}_z^2, \tag{2.11}$$

где v – алгебраическое значение скорости точки *M*; $a^{\text{вр}}$ и $a^{\text{ос}}$ – алгебраические значения составляющих полного вектора ускорения этой точки. Здесь величины $a^{\text{вр}}$ и $a^{\text{ос}}$ соответствуют касательному и нормальному ускорениям точки, однако, при изучении вращательного движения их принято называть ***вращательным ускорением*** ($a^{\text{вр}}$) и ***осестремительным*** или ***центростремительным ускорением*** ($a^{\text{ос}}$). Определим модуль полного вектора ускорения точки

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a^{\text{вр}})^2 + (a^{\text{ос}})^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{2.12}$$

Из приведенных формул видно, что скорости, ускорения и составляющие ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, пропорциональны расстояниям от точек до оси вращения тела.

Приведем также векторные формулы, описывающие кинематические характеристики тела и его точек (см. рис. 2.1), для чего введем векторы угловой скорости и углового ускорения

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} = \omega_z \vec{k}; \quad \vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k} = \varepsilon_z \vec{k}, \tag{2.13}$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор оси, совпадающий по направлению с положительным направлением оси вращения тела; ω_z и ε_z – величины, имеющие смысл проекций векторов угловой скорости и углового ускорения на ось вращения тела. Таким образом, вектор угловой скорости располагается на оси вращения и направлен так, что с его вершины вращение тела наблюдается против стрелки часов. Вектор углового ускорения тоже располагается на оси вращения. Если знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ совпадают, то он направлен так же, как и вектор угловой скорости (вращение ускоренное), а в противном случае – противоположно вектору угловой скорости (вращение замедленное).

Скорость и ускорение точки тела определим по формулам:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad \vec{a}^{\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{a}^{\text{ос}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{2.14}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, проведенный из любой точки на оси вращения тела, знак «$\times$» означает векторное произведение.

Вращение называют ***равномерным,*** если в процессе движения угловая скорость остается постоянной по модулю и по направлению, т.е., если $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \text{const}$. Умножив правую и левую части этого равенства на величину dt и проинтегрировав левую часть полученного равенства в пределах от φ_0 до φ, а правую – от 0 до t, получим ***закон равномерного вращения***:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t\,. \tag{2.15}$$

Вращение называют ***равнопеременным***, если угловое ускорение тела в процессе движения остается постоянным по модулю и направлению, т.е., если $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \text{const}$. Чтобы найти закон изменения угловой скорости в этом случае, проинтегрируем левую часть равенства $d\omega = \varepsilon\, dt$ пределах от ω_0 до ω, а правую часть – от 0 до t:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,. \tag{2.16}$$

Так как $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то полученное выражение запишем в следующем виде $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$. Интегрируя это выражение при изменении угла поворота от φ_0 до φ и времени от 0 до t, запишем ***закон равнопеременного вращения***:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}\,. \tag{2.17}$$

2.4. Преобразования простейших движений твердого тела

В различных механизмах часто осуществляют преобразование простейших движений: поступательное – во вращательное, вращательное – в поступательное, а также передачу вращательного движения от одного элемента механизма к другому.

Рассмотрим определение угловой скорости барабана 2 при заданной скорости груза 1, подвешенного на тросе, намотанном на барабан (рис. 2.2). Скорости всех точек троса, на котором подвешен груз, одинаковы (трос считают нерастяжимым), скорость точки схода троса с барабана колеса равна скорости груза. Но с этой точкой соприкасается точка, принадлежащая колесу, которое совершает вращательное движение, и имеющая ту же скорость, что позволяет определить угловую скорость колеса. При этом будем полагать, что положительному движению груза соответствует положительное вращение колеса.

Запишем алгебраическое значение угловой скорости 2-го колеса

$$\omega_{2z} = \frac{v_{1x}}{R_2}\,. \tag{2.18}$$

Аналогично можно определить скорость груза по заданной угловой скорости колеса

$$v_{1x} = \omega_{2z} R_2\,. \tag{2.19}$$

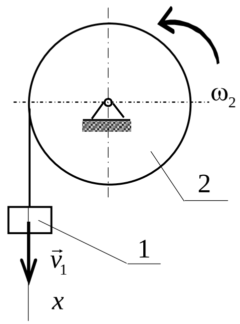


Рисунок 2.2

При передаче вращения от одного элемента к другому используют зубчатые или фрикционные зацепления (рис. 2.3, 2.4), а также цепные или ременные передачи (рис. 2.5, 2.6). В случае зубчатого зацепления колеса 1 и 2 имеют общую точку, поэтому скорости точек, находящихся на их ободьях, одинаковы, т.е.

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \,. \tag{2.20}$$

При записи алгебраического значения угловой скорости 2-го колеса учтем, что внешнее зацепление (см. рис. 2.3) меняет направление вращения на противоположное:

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} \frac{R_1}{R_2} \,, \tag{2.21}$$

а внутреннее зацепление (см. рис. 2.4) его не меняет

$$\omega_{2z} = \omega_{1z} \frac{R_1}{R_2} . \tag{2.22}$$

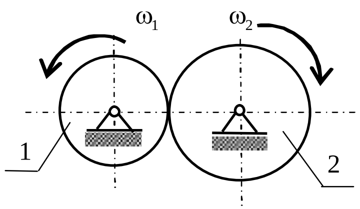


Рисунок 2.3

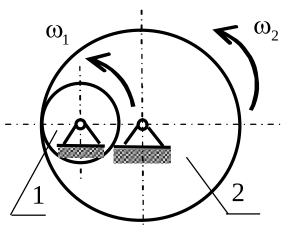


Рисунок 2.4

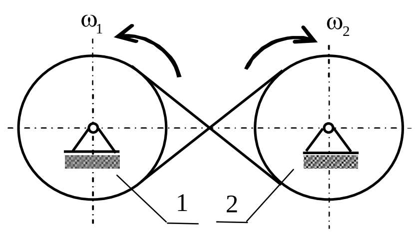


Рисунок 2.5

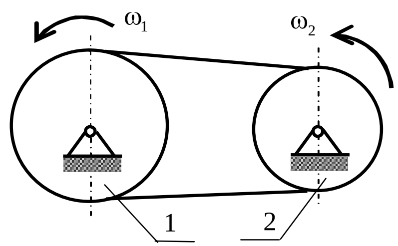


Рисунок 2.6

Одинаковы модули скоростей и для соответствующих точек на шкивах ременной передачи (имеются в виду те точки, где ремень, который считается нерастяжимым, сходит с одного шкива и наматывается на другой). Направление вращения может также либо изменяться на противоположное при передаче движения (см. рис. 2.5), либо не изменяться (см. рис. 2.6). Угловую скорость при этом определяют соответственно по формулам (2.16) и (2.17).

Пример. Колесо 1 (рис. 2.7) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2+4$, рад и приводит в движение механизм подъёма груза 4. Механизм состоит из двух ступенчатых колес 2 и 3, соединенных ременной передачей и вращающихся вокруг неподвижных осей.

Определить скорость и ускорение груза 4 в момент времени t = = 3 с, если R_1 = 40 см, R_2 = 15 см, R_3 = 25 см, r_2 = 10 см, r_3 = 20 см.

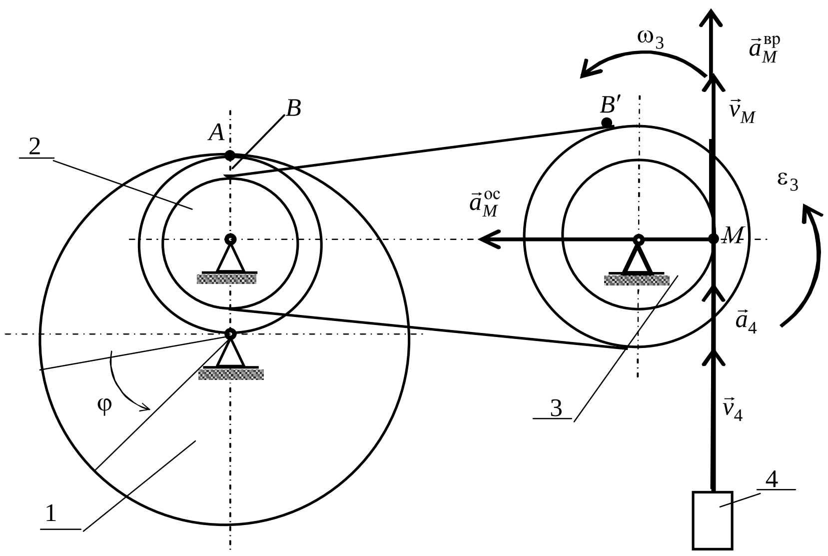


Рисунок 2.7

Решение

Определим угловую скорость зубчатого колеса $\omega_1 = \dot{\varphi} = 4t, \text{с}^{-1}$. Точка контакта колес 1 и 2 является в данный момент времени их общей и ее скорость $v_A = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$, откуда $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2}$. Далее, приравнивая скорости точек B и B', принадлежащих в этот момент времени колесам 2, 3, получим связь между угловыми скоростями этих колес $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$,

откуда $\omega_3 = \omega_2 \dfrac{r_2}{R_3} = \omega_1 \dfrac{R_1}{R_2} \cdot \dfrac{r_2}{R_3}$. Подставляя выражение для угловой скорости ω_1 и значения радиусов колес, определим

$$\omega_3 = 4t \frac{40}{15} \cdot \frac{10}{25} = 4.267t\ .$$

Так как $v_4 = \omega_3 r_3$, вычислим скорости точки M и груза 4 при $t = 3$ с

$$v_M = v_4 = 4.267 \cdot 3 \cdot 20 = 256 \text{ см/с}.$$

Ускорение груза 4 равно вращательному ускорению точки M, т.е.

$$a_4 = a_M^{вр} = \varepsilon_3 r_3 = \dot{\omega}_3 r_3 = 4.267 \cdot 20 = 85.34 \text{ см/с}^2\ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют степенями свободы твердого тела?
2. Сколько степеней свободы имеет твердое тело в общем случае его движения в пространстве?
3. Какие виды движения твердого тела называют простейшими?
4. Каковы основные свойства поступательного движения твердого тела?
5. Какое движение твердого тела называют вращением вокруг неподвижной оси?
6. Каковы основные кинематические характеристики движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
7. Как связаны между собой угол поворота тела, угловая скорость и угловое ускорение при вращении его вокруг неподвижной оси?
8. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения при вращении тела вокруг неподвижной оси?
9. Как определяют скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
10. Как определяют ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Уравнения плоскопараллельного движения. Разложение движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельным или ***плоским*** движением твердого тела называют такое движение, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости. Примерами являются движения шатуна в кривошипно-ползунном механизме или колеса, катящегося по прямолинейному рельсу. Частный случай плоскопараллельного движения – это вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Плоскопараллельное движение вполне определяется движением плоской фигуры *S*, полученной сечением тела плоскостью, параллельной неподвижной плоскости (рис. 3.1,а). Из определения такого движения и из свойств твердого тела следует, что любая прямая A_1A_2, проведенная в теле перпендикулярно неподвижной плоскости (см. рис. 3.1,а), будет перемещаться поступательно, т.е. все точки этой прямой будут иметь одинаковые траектории, скорости и ускорения. Следовательно, изучение плоскопараллельного движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры *S* в плоскости, совпадающей с координатной плоскостью x*Oy* (рис. 3.1,б). Положение сечения *S* в любой момент времени полностью зависит от положения отрезка *AB*, соединяющего точки *A* и *B* этой фигуры. Положение отрезка *AB*, в свою очередь, определяется координатами x_A и y_A точки *A*, называемой ***полюсом***, и углом φ, который образует отрезок *AB* с положительным направлением оси *Ox* (см. рис. 3.1,б). Зависимость этих трех величин от времени называют ***уравнениями плоскопараллельного движения*** твердого тела

$$x_A = f_1(t);\ y_A = f_2(t);\ \varphi = f_3(t). \qquad (3.1)$$

Таким образом, для описания положения тела в пространстве необходимо задать три независимых параметра: декартовые координаты x_A и y_A точки *A*, принятой за полюс, а также угловую координату φ. Следовательно, при плоскопараллельном движении твердое тело имеет три степени свободы.

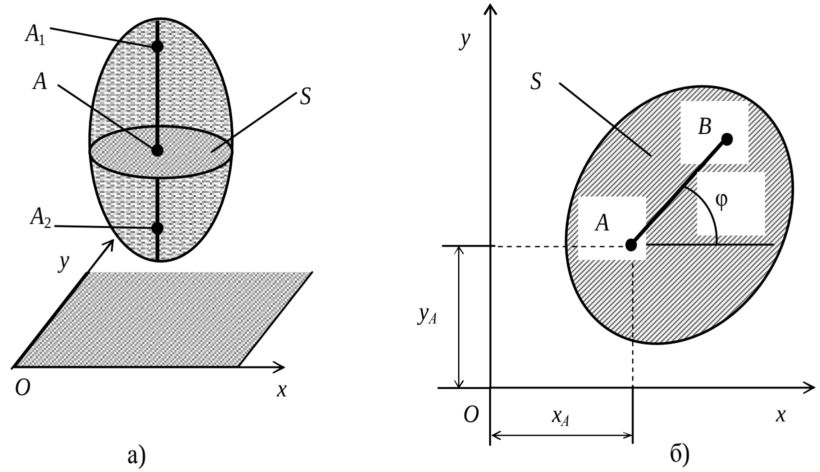


Рисунок 3.1

Плоскопараллельное движение тела – это сложное движение твердого тела, которое слагается из двух более простых движений: поступательного движения плоской фигуры *S* вместе с полюсом и вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной плоскости движения. Необходимо отметить, что в качестве полюса может быть выбрана произвольная точка тела. Выбор полюса влияет на поступательную часть плоскопараллельного движения, а вращательная часть от выбора полюса не зависит. Поступательную часть плоскопараллельного движения описывают 1-ми двумя уравнениями (3.1), при этом кинематическими характеристиками этой части движения являются скорость и ускорение полюса

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2}; \quad |\vec{a}_A| = \sqrt{\ddot{x}_A^2 + \ddot{y}_A^2}, \qquad (3.2)$$

Вращательную часть плоскопараллельного движения описывают 3-м уравнением (3.1), при этом кинематическими характеристиками этой части движения являются угловая скорость и угловое ускорение фигуры

$$\omega = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \qquad (3.3)$$

3.2. Определение скоростей и ускорений точек тела

Скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости точки A, принятой в качестве полюса, и скорости точки B при вращении тела вокруг полюса (рис. 3.2,а)

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}; \quad \vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}, \tag{3.4}$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, введенный так же, как и при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси (здесь этот вектор располагается на оси, проведенной через полюс перпендикулярно плоскости движения); $\overrightarrow{AB}$ – радиус-вектор точки M, проведенный из точки A. Вращательная составляющая скорости точки $\vec{v}_{BA}$ перпендикулярна отрезку AM и направлена в сторону вращения тела, ее модуль

$$\left|\vec{v}_{BA}\right| = \omega \cdot AB. \tag{3.5}$$

Модуль и направление скорости $\vec{v}_B$ находят построением соответствующего параллелограмма (см. рис. 3.2,а).

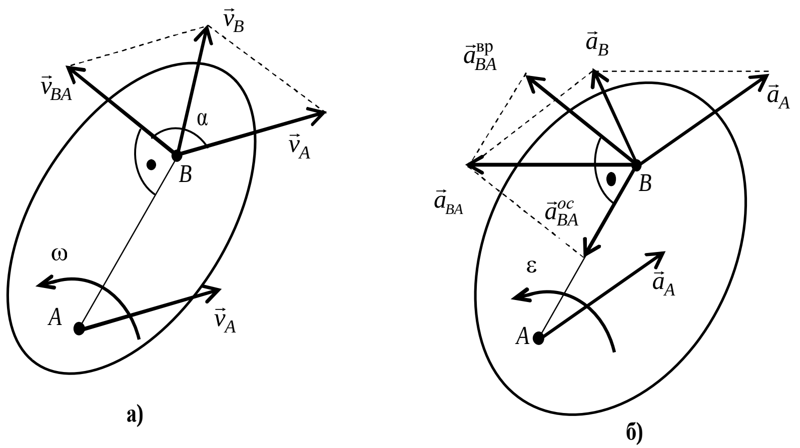


Рисунок 3.2

Еще один способ определения скоростей точек тела при плоскопараллельном движении основан на использовании теоремы о равенстве проекций скоростей двух точек тела: «***Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу***». Заметим, что эта теорема справедлива для любого вида движения абсолютно твердого тела и позволяет легко находить скорость точки тела, если известны направление скорости этой точки, а также направление и величина скорости какой-либо другой точки этого же тела.

Ускорение любой точки B плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения точки A, принятой в качестве полюса, и ускорения, которое точка приобретает при вращении тела вокруг полюса (рис. 3.2,б):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; \quad \vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{BA}^{\text{oc}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}), \tag{3.6}$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения, введенный так же, как и при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси. Вектор вращательной составляющей ускорения $\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}$ направлен перпендикулярно отрезку AB в сторону углового ускорения, т.е. в сторону вращения, если оно ускоренное, и в противоположную сторону, если замедленное. Вектор осестремительной составляющей ускорения $\vec{a}_{BA}^{\text{oc}}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Запишем модули этих векторов соответственно

$$\left|\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}\right| = \varepsilon \cdot AB; \quad \left|\vec{a}_{BA}^{\text{oc}}\right| = \omega^2 \cdot AB. \tag{3.7}$$

Определять полный вектор ускорения $\vec{a}_M$ точки M целесообразно не геометрически, а аналитически с помощью разложения слагаемых векторов на оси выбранной системы координат.

3.3. Мгновенный центр скоростей

Простой и наглядный способ определения скоростей плоской фигуры основан на понятии о ***мгновенном центре скоростей*** (МЦС). Им называют точку подвижной плоскости, в которой расположена плоская фигура S и скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Доказана теорема о том, что если тело движется не поступательно, то такая точка существует, и притом единственная. Из определения следует, что в общем случае в каждый момент времени МЦС находится в различных точках плоскости. При вращательном движении тела вокруг неподвижной оси, являющимся частным случаем плоскопараллельного движения, МЦС в любой момент времени расположен на оси вращения. Если же тело движется поступательно или мгновенно поступательно (скорости всех точек тела в данный момент времени равны по величине и совпадают по направлению), то МЦС находится на бесконечно большом расстоянии от любой точки тела. Выбрав в качестве полюса точку P, которая является в данный момент времени МЦС, а значит $\vec{v}_A = \vec{v}_P = 0$, из формулы (3.4) для определения скорости любой точки плоской фигуры найдем скорость точки M

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MP} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PM} . \qquad (3.8)$$

Следовательно, скорость любой точки тела в данный момент времени находим так же, как при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через МЦС и перпендикулярной плоскости движения. Таким образом, при плоскопараллельном движении скорость любой точки тела перпендикулярна отрезку, соединяющему эту точку с МЦС, а модуль скорости пропорционален расстоянию до МЦС

$$v_M = \omega \cdot PM. \qquad (3.9)$$

Угловая скорость плоской фигуры равна отношению скорости какой-либо ее точки к расстоянию от этой точки до МЦС

$$\omega = \frac{v_M}{PM}. \qquad (3.10)$$

Способы определения положения мгновенного центра скоростей:

1) если известны направления скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ точек A и B плоской фигуры, то МЦС (точку P) определяют как точку пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, проведенных из этих точек (рис. 3.3,а);

2) если скорости двух точек тела A и B известны по модулю, параллельны друг другу ($\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$), и перпендикулярны прямой AB, то МЦС находят в точке пересечения прямой AB с прямой, соединяющей концы векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ (рис. 3.3,б,в);

3) при качении без скольжения одного тела по неподвижной поверхности МЦС находят в точке соприкосновения тел (рис. 3.3,г), так как при отсутствии скольжения скорость этой точки подвижного тела равна нулю;

4) если скорости точек A и B тела $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ параллельны друг другу ($\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$) и не перпендикулярны прямой AB, то перпендикуляры к ним также параллельны друг другу. В этом случае МЦС находится в бесконечном удалении от точек A и B, движение тела является мгновенно поступательным, следовательно, скорости всех точек тела равны, а его угловая скорость в данный момент времени равна нулю.

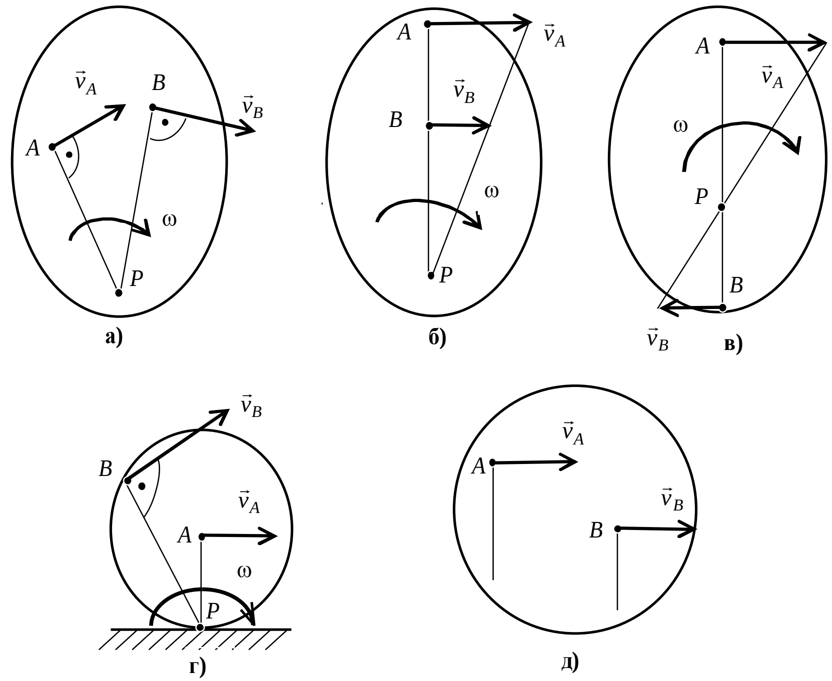


Рисунок 3.3

С помощью МЦС плоскопараллельное движение можно представить не только как сложное, состоящее из поступательного и вращательного движений, но и как простое движение, состоящее из серии элементарных последовательных поворотов вокруг МЦС. Необходимо отметить, что положение МЦС в пространстве во все время движения меняется. Геометрическое место точек МЦС подвижного тела называют ***подвижной центроидой***, а неподвижного тела – ***неподвижной центроидой***. Таким образом, плоскопараллельное движение представляет собой качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной центроиде.

Пример 1. Колесо катится без скольжения по неподвижной прямой поверхности. Скорость точки O постоянна и равна 100 см/с (рис. 3.4,а).

Определить угловую скорость колеса, скорости точек A, B, C и ускорения точек A, C, P, если R = 50 см, r = 40 см.

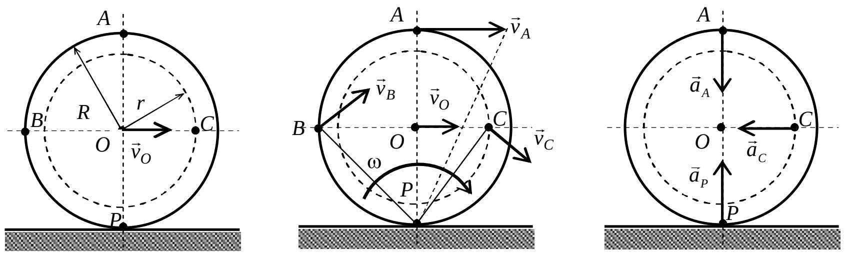


Рисунок 3.4

Решение

Колесо совершает плоскопараллельное движение. Качение происходит без скольжения, следовательно, в данном случае точка касания колеса с неподвижной поверхностью – точка P – является МЦС. Определим угловую скорость колеса согласно формуле (3.10)

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{100}{50} = 2 \text{ рад/с}.$$

Зная расстояния от точек A, B и C до МЦС, можно найти их скорости по формуле (3.9)

$$v_A = \omega \cdot PA = \omega \cdot 2R = 2 \cdot 100 = 200 \text{ см/с};$$

$$v_B = \omega \cdot PB = \omega \cdot \sqrt{R^2 + R^2} = 2 \cdot \sqrt{50^2 + 50^2} = 141.42 \text{ см/с};$$

$$v_C = \omega \cdot PC = \omega \cdot \sqrt{R^2 + r^2} = 2 \cdot \sqrt{50^2 + 40^2} = 128.06 \text{ см/с}.$$

Векторы скоростей точек колеса направлены перпендикулярно отрезкам, соединяющим их с МЦС (см. рис. 3.4,б). В соответствии с теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, убеждаемся в правильности полученных результатов.

Перейдем к определению ускорений, для чего воспользуемся формулами (3.6) и (3.7). В качестве полюса выбираем точку O. Ускорение полюса равно нулю, так как эта точка движется равномерно и прямолинейно. Поэтому ускорения точек будут равны их ускорениям во вращательном движении вокруг полюса. Например, для точки A

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}; \quad \vec{a}_{AO} = \vec{a}_{AO}^{\text{вр}} + \vec{a}_{AO}^{\text{ос}} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AO}).$$

Дифференцируя по времени выражение $\omega = \dfrac{v_O}{OP}$ и учитывая, что OP = const и v_O = const, получим $\varepsilon = 0$. Таким образом, ускорения всех точек, включая МЦС, состоят из осестремительных ускорений во вращении вокруг полюса O

$$a_A = a_{AO}^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot AO = \omega^2 \cdot R = 4 \cdot 50 = 200 \text{ см/с}^2;$$

$$a_C = a_{CO}^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot CO = \omega^2 \cdot r = 4 \cdot 40 = 160 \text{ см/с}^2;$$

$$a_P = a_{PO}^{\text{ос}} = \omega^2 \cdot PO = \omega^2 \cdot R = 4 \cdot 50 = 200 \text{ см/с}^2$$

и направлены от соответствующих точек к полюсу (см. рис 3.4,в).

Пример 2. Кривошип OA кривошипно-ползунного механизма, приведенного на рис. 3.5, вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ рад/с и угловым ускорением $\varepsilon_{OA} = 20$ рад/с^2. Положение механизма определяется углом $\varphi = 30^0$.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна AB, а также скорость и ускорение ползуна B, если длина кривошипа OA = 10 см, а длина шатуна AB = 30 см.

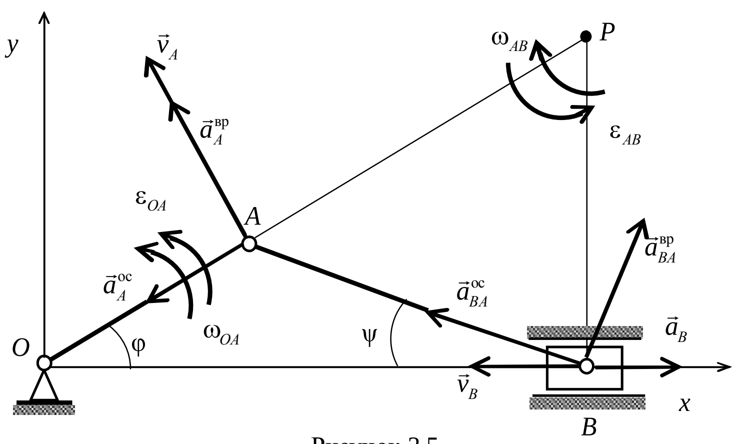


Рисунок 3.5

<u>Решение</u>

Вначале определим скорость точки A кривошипа

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см/с}.$$

Затем, зная направления скоростей точек A и B, найдем положение МЦС на пересечении перпендикуляров к скоростям этих точек – точку P. Для определения угловой скорости шатуна ω_{AB} и скорости точки B находим длины отрезков, соединяющих точки A и B с МЦС. Из теоремы синусов следует, что

$$\sin\psi = \frac{OA \cdot \sin\varphi}{AB} = \frac{10 \cdot 0.5}{30} = 0.167.$$

Вычислим длины отрезков:

$$OB = OA\cos\varphi + AB\cos\psi = 10 \cdot 0.866 + 30 \cdot \sqrt{1 - 0.167^2} = 38.239 \text{ см};$$

$$BP = OB \cdot tg\varphi = 38.239 \cdot 0.577 = 22.078 \text{ см};$$

$$AP = \frac{OB}{\cos\varphi} - OA = \frac{38.239}{0.866} - 10 = 34.156 \text{ см}.$$

Теперь найдем искомые величины:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{100}{34.156} = 2.928 \text{ рад/с};$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 2.928 \cdot 22.078 = 64.639 \text{ см/с}.$$

Определим ускорение точки B и угловое ускорение шатуна AB. Здесь надо иметь в виду, что расстояние от точки A до МЦС не является постоянным и зависит от положения механизма, т.е. от времени. Поэтому продифференцировать по времени угловую скорость шатуна не представляется возможным. Поступим следующим образом. Для нахождения ускорения точки B воспользуемся векторным равенством (3.6)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\text{вр}} + \vec{a}_A^{\text{ос}} + \vec{a}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{a}_{BA}^{\text{ос}}$$

и спроецируем его на оси координат xOy (см. рис. 3.5). При этом учтем, что вектор $\vec{a}_B$ лежит на прямой OB, так как точка B движется прямолинейно, вектор $\vec{a}_{BA}^{oc}$ направлен к полюсу A, а вектор $\vec{a}_{BA}^{вр}$ перпендикулярен ему. Получим два алгебраических уравнения для определения величин и направлений ускорений $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$ (вначале направляем искомые векторы произвольно):

$$a_B = -a_A^{\text{вр}} \cdot \sin\varphi - a_A^{\text{ос}} \cdot \cos\varphi + a_{BA}^{\text{вр}} \cdot \sin\psi - a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \cos\psi;$$

$$0 = a_A^{\text{вр}} \cdot \cos\varphi - a_A^{\text{ос}} \cdot \sin\varphi + a_{BA}^{\text{вр}} \cdot \cos\psi + a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \sin\psi.$$

Предварительно вычислим составляющие ускорения согласно формулам (3.7):

$$a_A^{вр} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 20 \cdot 10 = 200 \text{ см/с}^2; \quad a_A^{oc} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\text{ос}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2.928^2 \cdot 30 = 257.196 \text{ см/с}^2;$$

$$\cos\psi = \sqrt{1 - 0.167^2} = 0.986.$$

Далее определим:

– из 2-го уравнения

$$a_{BA}^{\text{вр}} = \frac{-a_A^{\text{вр}} \cdot \cos\varphi + a_A^{\text{ос}} \cdot \sin\varphi - a_{BA}^{\text{ос}} \cdot \sin\psi}{\cos\psi} =$$

$$= \frac{-200 \cdot 0.866 + 1000 \cdot 0.5 - 257.196 \cdot 0.167}{0.986} = 287.879 \text{ см/с}^2;$$

– из 1-го уравнения

$$a_B = -200 \cdot 0.5 - 1000 \cdot 0.866 + 287.879 \cdot 0.167 - 257.196 \cdot 0.986 =$$

$$= -1171.519 \text{ см/с}^2.$$

Знаки показывают, что направление ускорения $\vec{a}_{BA}^{\text{вр}}$ совпадает с принятым, а направление $\vec{a}_B$ – противоположно направлению, указанному на рис. 3.5. Зная ускорение $a_{BA}^{\text{вр}}$, можно найти угловое ускорение шатуна

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{\text{вр}}}{AB} = \frac{287.879}{30} = 9.596 \text{ рад/с}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называют плоскопараллельным?
2. На какие простейшие движения можно разложить плоскопараллельное движение?
3. Какие уравнения описывают плоскопараллельное движение?
4. Как определяют скорость произвольной точки плоской фигуры, если известна скорость полюса?
5. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей (МЦС)?
6. Как распределены скорости точек тела по отношению к МЦС?
7. Какие существуют способы определения положения МЦС?
8. Как определяют ускорения произвольных точек тела, совершающего плоскопараллельное движение?

4. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

Контрольные работы по кинематике включают три задания.

В задании К1 необходимо исследовать кинематику движения точки при координатном способе описания ее движения. В задании К2 необходимо определить кинематические характеристики преобразованных движений тел, а также скорости и ускорения их точек. В задании К3 необходимо определить кинематические характеристики твердого тела при плоскопараллельном движении, а также скорости и ускорения его точек. Для каждого контрольного задания в соответствующих таблицах приведено 24 варианта исходных данных, а для заданий К2 и К3 еще и 24 варианта расчетных схем.

Для выполнения контрольных работ необходимо:

1) внимательно прочитать соответствующий раздел в учебнике, выбранном из списка рекомендуемой литературы; ознакомиться с теоретическими сведениями и методическими рекомендациями настоящего пособия; составить краткий конспект, записав основные определения, теоремы и формулы;

2) ответить на контрольные вопросы;

3) разобрать решение типовых задач на примерах, приведенных в настоящем пособии;

4) самостоятельно выполнить индивидуальные контрольные задания в соответствии с предложенным преподавателем вариантом. Например, указан вариант К2-5, что означает следующее: К – раздел «Кинематика», 2 – номер темы раздела, 5 – номер варианта в задании К2;

5) оформить решенные задания в виде контрольной работы в отдельной тетради. Каждое выполненное задание должно содержать исходные данные и расчетную схему с указанием определяемых кинематических характеристик движения; решение должно быть изложено последовательно с краткими комментариями; в конце необходимо привести численные значения с размерностями определяемых величин;

6) зарегистрировать выполненные контрольные задания в установленные сроки в деканате заочного обучения у методиста.

4.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Задание К1

4.1.1. Пример решения контрольного задания К1

Пусть точка M движется в плоскости xOy в соответствии с уравнениями

$$\begin{cases} x = 4\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 6 \text{ см} \\ y = -2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) + 4 \text{ см} \end{cases}.$$

Для момента времени $t_1 = 0{,}5$ с найти положение точки M на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение

Заданный закон движения точки в координатной форме можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Исключим время t из уравнений движения и получим уравнение траектории точки в виде:

$$\frac{(x-6)^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1.$$

Таким образом, траекторией точки M является эллипс со смещенным центром, изображенный на рис. 4.1. Отметим на траектории положение точки M_1 (x_1, y_1) в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

$$x_1 = x(t = t_1) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\right) + 6 = 4\sin\frac{\pi}{4} + 6 = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = 8{,}82 \text{ см};$$

$$y_1 = y(t = t_1) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\right) + 4 = -2\cos\frac{\pi}{4} + 4 = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 2{,}59 \text{ см}.$$

Вектор скорости точки представим в виде:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей Ox и Oy; v_x, v_y – проекции вектора скорости точки на координатные оси, которые равны 1-м производным от соответствующих координат по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi\cos\frac{\pi t}{2};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \pi\sin\frac{\pi t}{2}.$$

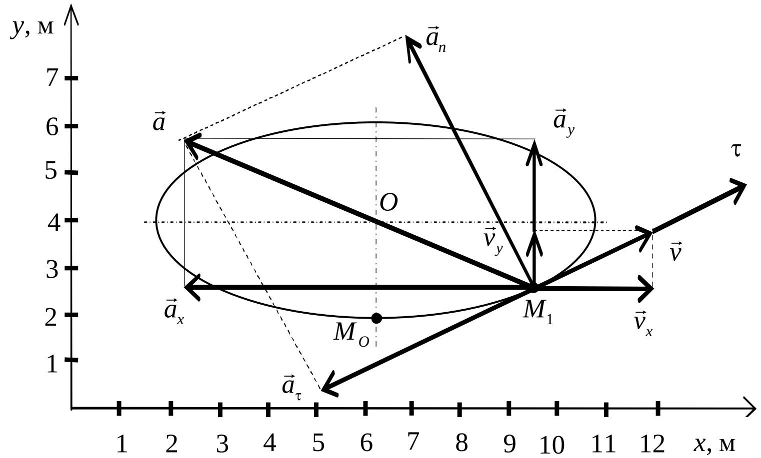


Рисунок 4.1

В момент времени $t_1 = 0{,}5$ с

$$v_x(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = 2\pi\cos\frac{\pi}{4} = 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2} = 4{,}44\,\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$v_y(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = \pi\sin\frac{\pi}{4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}22\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Вектор скорости точки $\vec{v}$ строим по двум взаимно перпендикулярным проекциям $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ в соответствии с выбранным масштабом

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y .$$

Полученный вектор должен быть направлен по касательной к траектории точки в сторону движения. Модуль скорости точки определим по уже найденным проекциям

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4{,}44^2 + 2{,}22^2} = 4{,}96 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Вектор ускорения точки представим в виде:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} ,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей Ox и Oy; a_x, a_y – проекции вектора скорости точки на координатные оси, которые равны 1-м производным от проекций вектора скорости или 2-м производным от соответствующих координат по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\pi^2 \sin\frac{\pi t}{2};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{2} \cos\frac{\pi t}{2}.$$

В момент времени t_1 = 0,5 с

$$a_x(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{4} = -\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -6{,}97 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$a_y(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = \frac{\pi^2}{2} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}49 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ строим по двум взаимно перпендикулярным проекциям $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ в соответствии с выбранным масштабом

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y .$$

Полученный вектор ускорения точки в общем случае должен отклоняться от вектора скорости в сторону вогнутости траектории, а при движении по эллипсовидной траектории – проходить через центр эллипса. Модуль ускорения точки определим по уже найденным проекциям

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{-6{,}97^2 + 3{,}49^2} = 7{,}79 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вектор полного ускорения точки можно также представить в виде геометрической суммы его проекций на оси естественной системы отсчета

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} ,$$

где $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – единичные орты касательной и главной нормали; a_τ и a_n – соответственно проекции вектора ускорения на касательную и главную нормаль. Касательную $M_1\tau$ направляем по касательной к траектории в сторону движения точки движения, а главную нормаль $M_1 n$ – перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории. При вычислении касательного ускорения удобно воспользоваться формулой, устанавливающей связь между координатным и естественным способами задания движения точки

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} .$$

В момент времени t_1 = 0,5 с

$$a_\tau(t_1 = 0{,}5) = \frac{4{,}44(-6{,}97) + 2{,}22 \cdot 3{,}49}{4{,}96} = -4{,}67\,\text{см}/\text{с}^2 .$$

Значение касательного ускорения a_τ имеет отрицательный знак, следовательно, в данный момент времени движение точки замедленное и вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ направлен в противоположную сторону направлению вектора скорости точки $\vec{v}$.

Нормальное ускорение a_n вычислим по формуле $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, если известен радиус кривизны траектории. Например, если точка движется по окружности радиусом R, то в любой точке траектории $\rho = R$. Если же траекторией движения точки является прямая, то $\rho = \infty$, следовательно, $a_n = 0$. В данном случае радиус кривизны траектории заранее не известен, поэтому нормальное ускорение определяем по формуле:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} .$$

В момент времени t_1 = 0,5 с

$$a_n(t_1 = 0{,}5\text{с}) = \sqrt{7{,}79^2 - (-4{,}67)^2} = 6{,}23 \text{см/с}^2 .$$

Построим векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ в соответствии с уже выбранным масштабом, а затем сложим их геометрически. В результате получим тот же вектор полного ускорения точки $\vec{a}$, который ранее уже был получен геометрической суммой составляющих $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$. Этот факт служит контролем правильности решения.

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определим по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} .$$

В момент времени t_1 = 0,5 с

$$\rho(t_1 = 0{,}5\,\text{с}) = \frac{4{,}96^2}{6{,}23} = 3{,}95 \text{ см} .$$

Результаты всех вычислений для заданного момента времени приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Координаты, см		Скорости, см/с			Ускорения, см/с^2					ρ, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	
8,82	2,59	4,44	2,22	4,96	–6,97	3,49	7,79	–4,67	6,23	3,95

Примечание. В последнем столбце через ρ обозначен радиус кривизны траектории в точке M_1.

4.1.2. Условие и варианты задания К1

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Исходные данные для решения приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Номер варианта	Уравнения движения		Время t_1, с
	$x = f_1(t)$, см	$y = f_2(t)$, см	
К1-1	$4\cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)+2$	$4\sin^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
К1-2	$-\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	$\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)-1$	1
К1-3	$2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+4$	1
К1-4	$3t^2+2$	$-4t$	0,5
К1-5	$3t^2-t+1$	$5t^2-\frac{5t}{3}-2$	1
К1-6	$7\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	$2-7\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	1
К1-7	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)-3$	1
К1-8	$-4t^2+1$	$-3t$	0,5
К1-9	$5\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	$-5\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)-3$	1
К1-10	$5\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$-5\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	1
К1-11	$4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi \ t}{3}\right)$	1
К1-12	$3t$	$4t^2+1$	0,5

Продолжение табл. 4.2

Номер варианта	Уравнения движения		Время t_1, с
К1-13	$7\sin^2\left(\frac{\pi\ t}{6}\right)-5$	$-7\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$	1
К1-14	$1+3\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+3$	1
К1-15	$-5t^2-4$	$3t$	1
К1-16	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{-3t}{2}-3t^2$	0
К1-17	$6\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)-2$	$6\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+3$	1
К1-18	$7t^2-3$	$5t$	0,25
К1-19	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+\frac{5t}{3}$	1
К1-20	$-4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)-1$	$-4\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$	1
К1-21	$-6t$	$2t^2-4$	1
К1-22	$8\cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)+2$	$-8\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)-7$	1
К1-23	$-3-9\sin\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)$	$-9\cos\left(\frac{\pi t^2}{6}\right)+5$	1
К1-24	$-4t^2+1$	$-3t$	1

4.2. Преобразование простейших движений твердого тела

Задание К2

4.2.1. Пример решения контрольного задания К2

Рассмотрим пример решения задания для механизма, кинематическая схема которого приведена на рис. 4.2., где ведущим звеном является груз. Задано: закон изменения вертикальной координаты груза $x(t) = 30 + 10t^2$, см; радиусы колес $R_1 = R_3 = 10$ см, $R_2 = 30$ см, $r_2 = 20$ см.

Определить скорость и ускорение точки M для момента времени $t_1 = 1$ с.

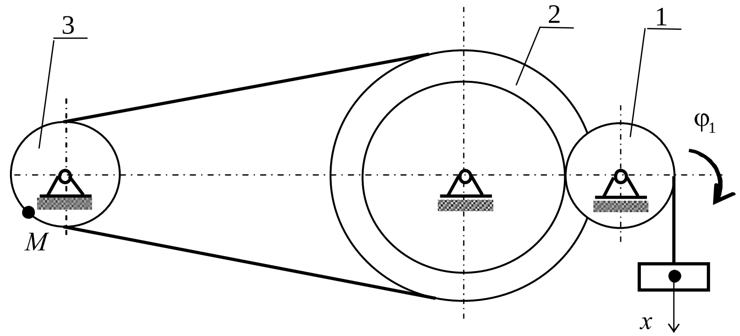


Рисунок 4.2

Решение

Обозначим и покажем на рис. 4.3 точки механизма A, B, D_1, D_2, через которые передается движение от одного звена (ведущего) к другому (ведомому).

Решение задачи начнем с определения скорости груза. Поскольку груз совершает поступательное движение, его можно считать точкой, движение которой задано координатным способом, и движется только вдоль оси x. Проекцию скорости груза на эту ось определим как производную от координаты x по времени

$$v_x = \dot{x} = 20t \ \text{см/с}, \text{ при } t_1 = 1 \text{ с} \quad v_x = 20 \text{ см/с.}$$

Поскольку знак проекции скорости груза на ось x положительный, вектор скорости направлен вниз, т.е. в положительном направлении оси x.

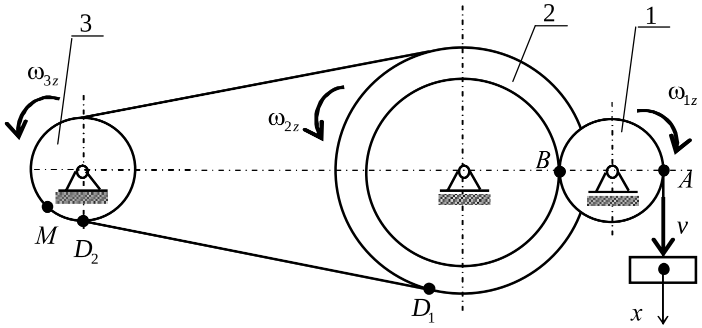


Рисунок 4.3

Скорости всех точек нити, на которой висит груз, одинаковы (нить считается нерастяжимой), скорость точки схода нити с барабана (колеса 1) равна скорости груза. Но точка A схода нити в данный момент времени принадлежит и колесу 1, совершающему вращательное движение вокруг неподвижной оси, что позволяет определить его угловую скорость. Направление угловой скорости колеса 1 соответствует направлению скорости точки A. Запишем теперь алгебраическое значение угловой скорости колеса 1

$$\omega_{1z} = \frac{v_x}{R_1} = \frac{20t}{10} = 2t \ \text{рад/с}, \text{ при } t_1 = 1\text{с} \quad \omega_{1z} = 2 \text{ рад/с.}$$

Колеса 1 и 2 находятся в зацеплении и имеют общую точку B (см. рис.4.3). Поэтому скорости точек колес, находящихся на их ободьях, одинаковы. При записи алгебраического значения угловой скорости колеса 2 учтем, что внешнее зацепление меняет направление вращения на противоположное

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} R_1 / r_2 = \text{рад/с}, \text{ при } t_1 = 1 \text{ с } \omega_{2z} = 1 \text{ рад/с.}$$

Одинаковы также скорости точек D_1 и D_2 , расположенных на шкивах ременной передачи. Однако здесь направление вращения не изменяется, поэтому

$$\omega_{3z} = \omega_{2z} R_2 / R_3 = 3t \ \text{рад/с}, \text{ при } t_1 = 1 \text{ с} \quad \omega_{3z} = 3 \ \text{рад/с.}$$

Определим теперь скорость точки M колеса 3 в момент времени $t_1 = 1$ с. Величина скорости – это произведение модуля угловой скорости на расстояние от точки M до оси вращения, которое равно радиусу R_3, $v_M = \omega_{3z} R_3 = 30$ см/с. Направление вектора скорости покажем перпендикулярно радиусу, соединяющему точку с осью вращения, в соответствии с направлением вращения (рис. 4.4).

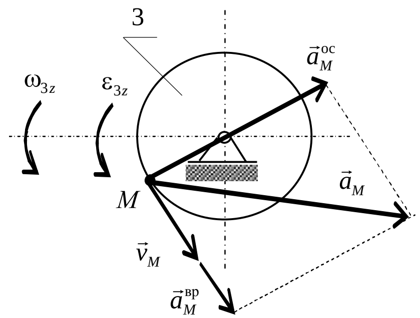


Рисунок 4.4

Для нахождения ускорения точки M необходимо знать угловое ускорение колеса 3. Алгебраическое значение углового ускорения определим как производную по времени от алгебраического значения угловой скорости $\varepsilon_{3z} = \dot{\omega}_{3z} = 3$ рад/с^2. Алгебраические значения угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые знаки, следовательно, вращательное движение является ускоренным.

Ускорение точки M определим как геометрическую сумму векторов вращательного и осестремительного ускорений, модули которых вычислим по формулам:

$$a_M^{\text{вр}} = \varepsilon_{3z} R_3 = 30 \ \text{см/с}^2; \ a_M^{\text{ос}} = \omega_{3z}^2 R_3 = 90 \ \text{см/с}^2,$$

откуда получим полное ускорение точки M

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{ос}})^2 + (a_M^{\text{вр}})^2} = 30\sqrt{10} \approx 94{,}87\ \text{см/с}^2 .$$

Векторы ускорений показаны на рис. 4.4. Движение колеса 3 ускоренное, поэтому вращательное ускорение точки *M* направлено в ту же сторону, что и ее скорость. Осестремительное ускорение всегда направлено к оси вращения.

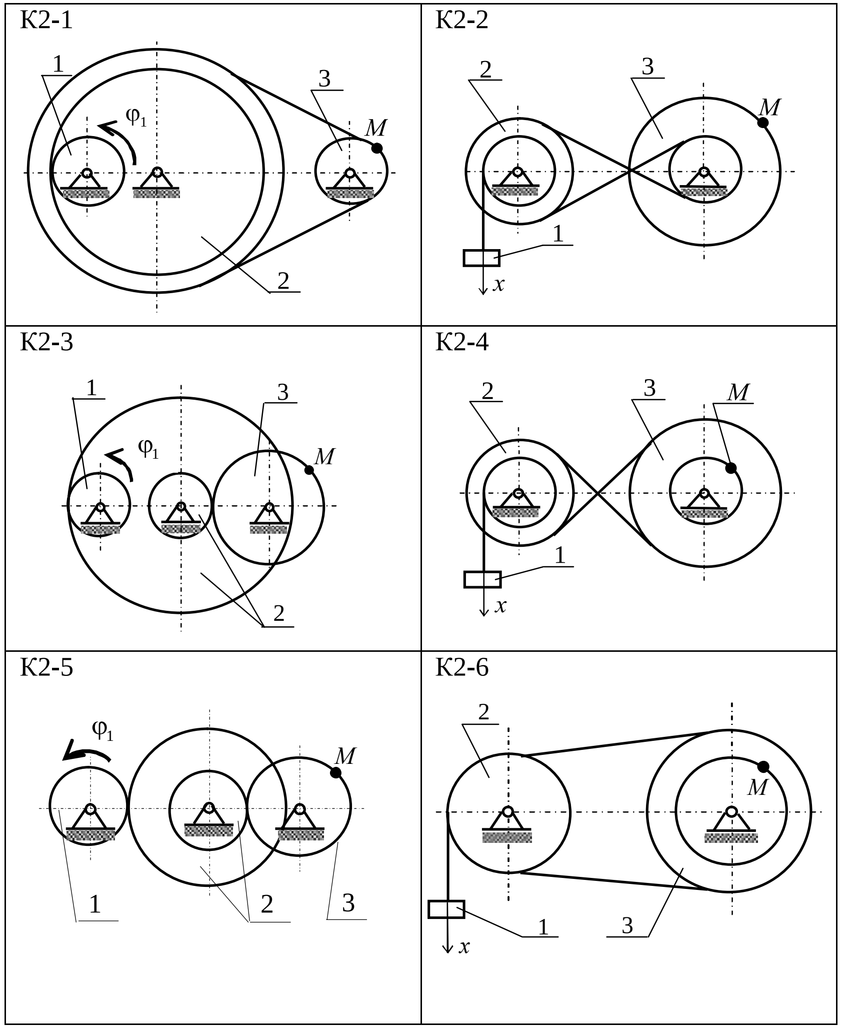
Если в условии будет задан не закон движения груза *x(t)*, а зависимость угла поворота колеса 1 от времени, например, $\varphi_1(t) = 3 + t^2$, рад, изменения в решении задачи коснутся только начального этапа. Алгебраическое значение угловой скорости колеса 1 определим как производную от его угла поворота по времени $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = 2t$ рад/с.

Дальнейшее решение задачи не отличается от приведенного примера.

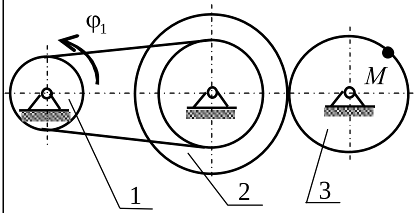
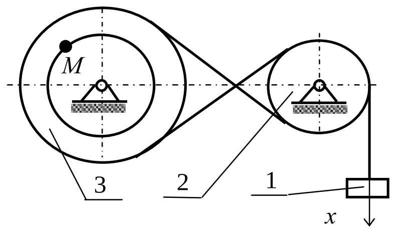
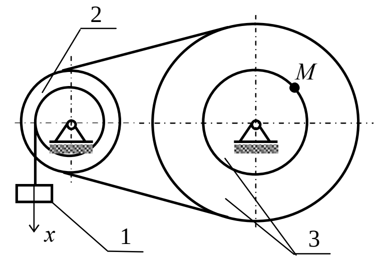
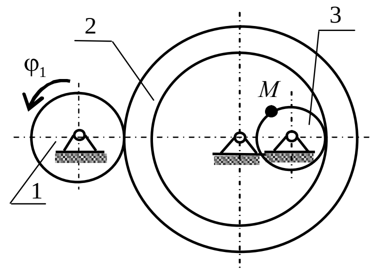
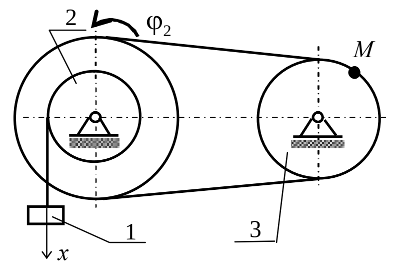
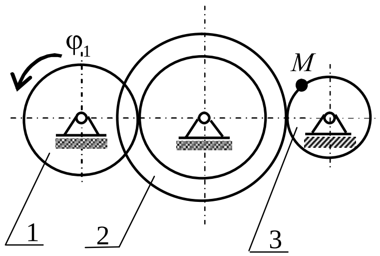
4.2.2. Условие и варианты задания К2

Задан закон движения ведущего звена механизма. В одних вариантах ведущим звеном является груз и задан закон изменения его вертикальной координаты *x(t)* в сантиметрах, а в других – одно из колес и задан закон изменения его угла поворота $\varphi(t)$ в радианах. Определить скорость и ускорение точки *M* для момента времени t_1. Расчетные схемы задания К2 представлены табл. 4.3, а числовые исходные данные – в табл. 4.4.

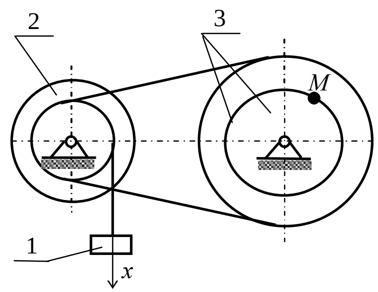
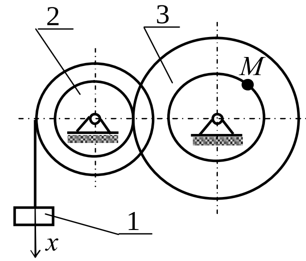
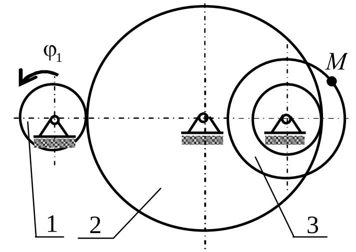
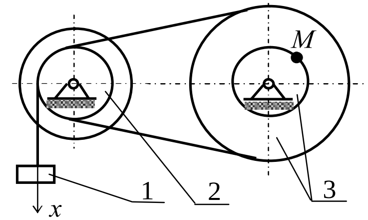
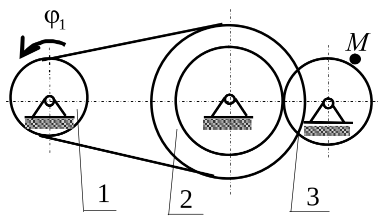
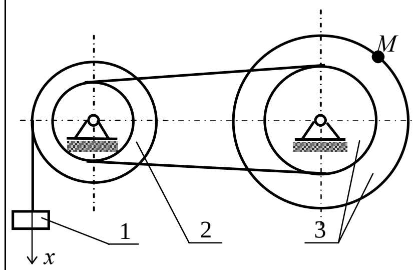
Таблица 4.3



Продолжение табл. 4.3

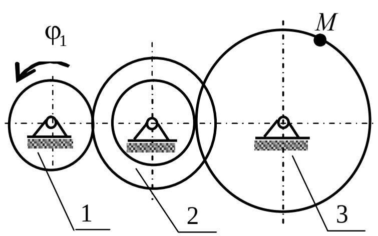
К2-7 	К2-8 
К2-9 	К2-10 
К2-11 	К2-12 

Продолжение табл. 4.3

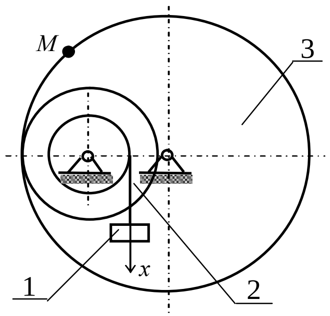
К2-13 	К2-14 
К2-15 	К2-16 
К2-17 	К2-18 

Продолжение табл. 4.3

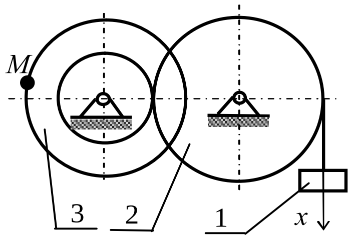
К2-19



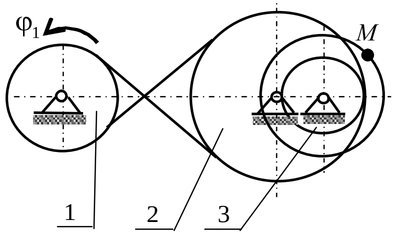
К2-20



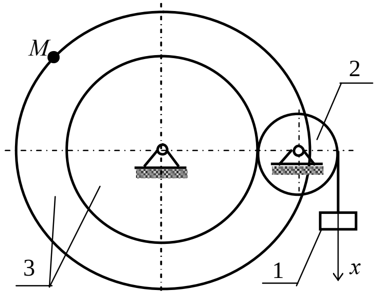
К2-21



К2-22



К2-23



К2-24

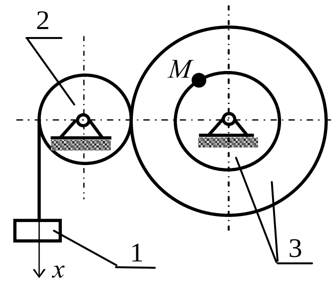


Таблица 4.4

Номер варианта	Уравнение движения ведущего звена	R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	Момент времени, с
К2-1	$\varphi_1 = 3 + t^2$	10	50	30	15	–	0,5
К2-2	$x = 2+3t^2$	–	40	30	50	40	1
К2-3	$\varphi_1 = 3+t^2$	10	40	15	30	–	1
К2-4	$x = 4t^2$	–	20	15	40	20	0,5
К2-5	$\varphi_1 = 1+ t^2$	10	30	10	15	–	0,5
К2-6	$x = 4t^2$	–	10	–	20	10	0,5
К2-7	$\varphi_1 = 4+2t^2$	20	50	40	30	–	1
К2-8	$x = t^2$	–	20	–	40	30	1
К2-9	$x = 2t^2$	–	20	10	50	20	1
К2-10	$\varphi_1 = 2 + 2t^2$	10	40	20	15	–	0,5
К2-11	$x = 5+ t^2$	–	40	20	30	–	0,5
К2-12	$\varphi_1 = t^2 + 2$	15	40	20	10	–	1
К2-13	$x = 3t^2 + t$	–	30	15	50	30	1
К2-14	$x = 10 + t^2$	–	20	10	30	20	1
К2-15	$\varphi_1 = 3\,t^2+ 2$	10	30	–	25	15	2

К2-16	$x = 5t^2 + 5$	–	40	30	50	40	1
К2-17	$\varphi_1 = 4t^2 + 2$	10	30	20	10	–	1
К2-18	$x = 6t^2$	–	20	10	50	20	2
К2-19	$\varphi_1 = 4t^2 - 2$	15	30	10	40	–	2
К2-20	$x = 4 + t^2$	–	20	10	60	–	1
К2-21	$x = 5t^2 - 4$	–	40	–	40	20	1
К2-22	$\varphi_1 = 3 + 2t^2$	30	60	–	30	20	2
К2-23	$x = 4 + t^2$	–	10	–	80	40	1
30	$x = 3 + t^2$	–	10	–		15	1

4.3. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

Задание К3

4.3.1. Примеры решения контрольного задания К3

Пример 1. Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути (рис. 4.5).

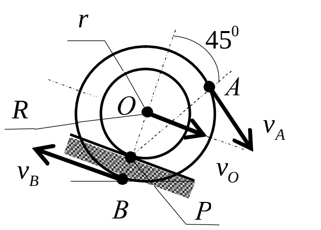


Рисунок 4.5

Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент времени $v_A = 2$ м/с,
$r = 0.6$ м, $R = 1$ м.

Решение

Катушка совершает плоскопараллельное движение. Так как качение происходит без скольжения, то скорость точки P касания катушки с неподвижной поверхностью $v_P = 0$, следовательно эта точка является мгновенным центром скоростей (МЦС). Вектор скорости точки A $\vec{v}_A$ перпендикулярен AP и направлен в сторону качения катушки, а численное значение скорости пропорционально расстоянию от точки A до МЦС:

$$v_A = \omega \cdot AP,$$

где
$$AP = \sqrt{OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OA \cdot OP \cos\left(180^0 - 45^0\right)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + r^2 - 2R \cdot r \cos 135^0} = 1{,}49 \text{ м.}$$

Определим угловую скорость катушки

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = 1{,}35 \text{ рад/с.}$$

Так как скорости точек O и B катушки также пропорциональны их расстояниям до точки P, то

$$v_O = \omega \cdot OP = \omega \cdot r = 0{,}81 \text{ м/с;}$$

$$v_B = \omega \cdot BP = \omega \cdot \left(R - r\right) = 0{,}54 \text{ м/с.}$$

Направление вращения катушки, а, следовательно, и направления скоростей точек B и O, определяются направлением вектора скорости $\vec{v}_A$ по отношению к МЦС.

Пример 2. Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A =$ = 1 м/с.

Найти в положении, указанном на рис. 4.6, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если $AB = 1{,}2$ м, $AC = BC$.

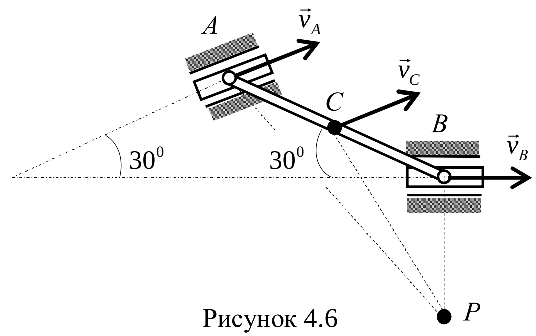


Рисунок 4.6

Решение

Стержень AB совершает плоскопараллельное движение. Так как скорости точек A и B направлены параллельно соответствующим направляющим, вдоль которых скользят ползуны, то, восстанавливая из точек A и B перпендикуляры к скоростям этих точек, определим положение мгновенного центра скоростей стержня AB – точка P. Треугольник ABP является равнобедренным, следовательно, $AB = BP = 1{,}2$м.

Скорость точки A пропорциональна расстоянию от этой точки до точки P: $v_A = \omega_{AB} \cdot AP$, где $AP = 2AB\cos 30^0 = 2{,}08$ м.

Вычислим угловую скорость стержня AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{10}{20{,}8} = 0{,}48 \text{ рад/с.}$$

Скорость точки B определим по формуле

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0{,}48 \cdot 1{,}2 = 0{,}58 \text{ м/с.}$$

Для определения скорости точки C найдем расстояние PC с помощью теоремы косинусов

$$CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2 \cdot BP \cdot BC \cos 120^0} = 1{,}59 \text{ м.}$$

Тогда скорость точки C

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0{,}76 \text{ м/с.}$$

Пример 3. Кривошип OA длиной r = 1 м вращается с угловой скоростью ω_{OA} = 2 рад/с, приводя в движение шатун AB длиной l = 4 м, как показано на рис. 4.7.

Определить скорость ползуна B, угловую скорость шатуна ω_{AB} в двух положениях механизма, когда угол поворота кривошипа $\varphi = 0$ и $\varphi = 90^0$.

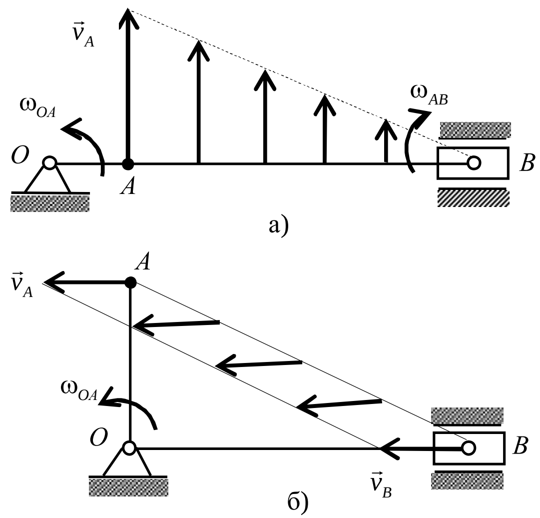


Рисунок 4.7

Решение

Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. При этом $\vec{v}_A \perp OA$, так как точка A принадлежит кривошипу OA, совершающему вращательное движение. Скорость ползуна B параллельна направляющим. Численное значение скорости точки A

$$v_A = \omega_{OA} \cdot r = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с.}$$

Найдем положение мгновенного центра скоростей, восстанавливая перпендикуляры к скоростям точек A и B из этих точек. При угле φ = 0 (см. рис. 4.7,а) перпендикуляр к скорости $\vec{v}_A$ и перпендикуляр к направлению $\vec{v}_B$ пересекаются в точке B. Следовательно, точка B является в этом положении механизма мгновенным центром скоростей и $v_B = 0$. Это положение механизма называют «*мертвым*». Найдем угловую скорость шатуна

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{AB} = \frac{\omega_{OA} \cdot r}{l} = 0{,}5 \text{ рад/с.}$$

На рис. 4.7,а показано распределение скоростей точек шатуна.

При угле поворота кривошипа $\varphi = 90^0$ скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ направлены параллельно, а перпендикуляры к ним пересекаются в бесконечности. Следовательно, в данный момент времени имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей, то есть все точки шатуна AB имеют одинаковые скорости, равные $\vec{v}_A$, при этом угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = 0$ (рис. 4.7,б).

<u>Пример 4.</u> Кривошип OA = 0,5м вращается с угловой скоростью ω_{0A} = 10 рад/с и приводит в движение шатун AB = 4 м.

Найти угловую скорость шатуна, скорости точек B и C (AC = 2,5м), если угол поворота кривошипа $\varphi = 45^0$ и $OA \perp AB$ (рис. 4.8).

<u>Решение</u>

Так как кривошип OA совершает вращательное движение, то

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5\, м/с; \quad \vec{v}_A \perp OA.$$

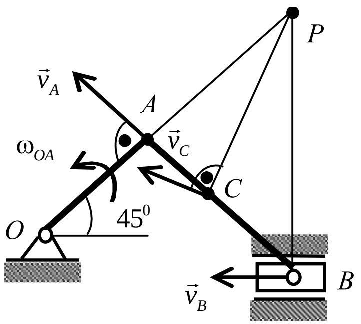


Рисунок 4.8

Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Найдем мгновенный центр скоростей для данного положения шатуна – точку P на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B, восстановленных из этих точек. Треугольник PAB равнобедренный, при этом $AB = AP$ = 4 м.

Найдем угловую скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{5}{4} = 1.25 \text{ рад/с.}$$

Скорости точек B и C пропорциональны их расстояниям до МЦС:

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP,$$

где
$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}65 \text{ м;}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1{,}25 \cdot 5{,}65 = 7{,}07 \text{ м/с;}$$

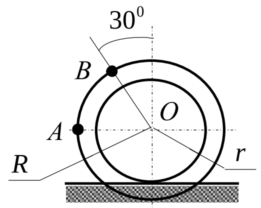
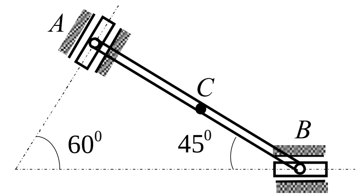
$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP, \text{ где } CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 2{,}5^2} = 4{,}72 \text{ м;}$$

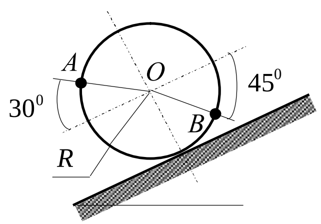
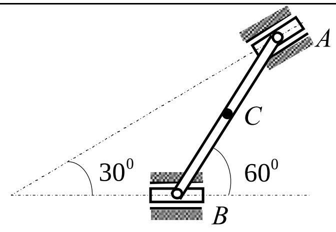
$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1{,}25 \cdot 4{,}72 = 5{,}9 \text{ м/с.}$$

4.3.2. Условие и варианты задания К3

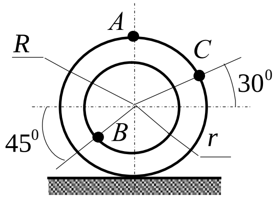
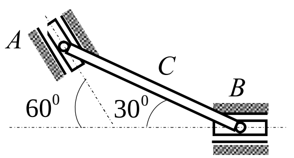
Для тела, совершающего плоскопараллельное движение, в соответствии с заданными кинематическими характеристиками и геометрическими размерами элементов, определить угловые скорости и линейные скорости точек. Расчетные схемы и исходные данные приведены в табл. 4.5.

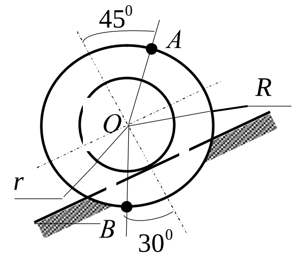
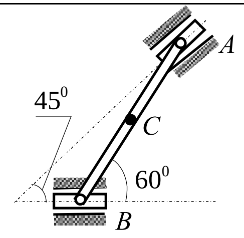
Таблица 4.5

Вариант К3-1	
1.1	1.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 7$ см/с. Найти в положении, указанном

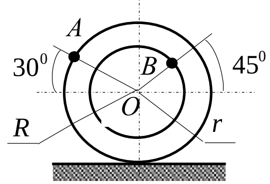
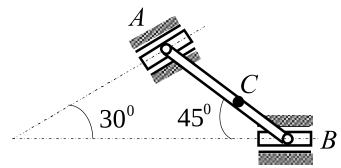
$r = 3$ см, $R = 4$ см, $v_O = 6$ см/с .	на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если $AB = 6$ см, $AC = BC$.
Вариант К3-2	
2.1	2.2
	
Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути. Найти угловую скорость колеса, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент $R = 2$ см, $v_A = 6$ см/с .	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 6$ см/с . Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если $AB = 12$ см, $AC = BC$.

Продолжение табл. 4.5

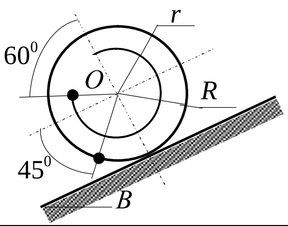
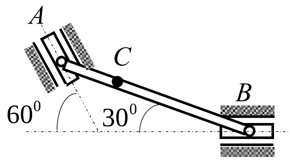
Вариант К3-3	
3.1	3.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек B и C, если в рассматриваемый момент	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 10$ см/с . Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость

$r = 1$ см, $R = 2$ см, $v_A = 4$ см/с .	стержня, скорости точек B и C, если $AB = 8$ см, $AC = BC$.
Вариант К3-4	
4.1	4.2
	
Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент $r = 4$ см, $R = 10$ см, $v_A = 20$ см/с .	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 3$ см/с . Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если $AB = 4$ см, $AC = BC$.

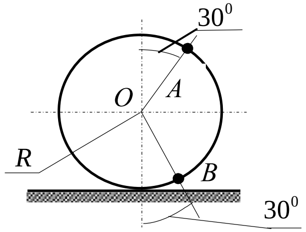
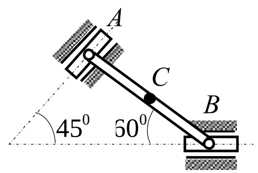
Продолжение табл. 4.5

Вариант К3-5	
5.1	5.2
	
Катушка катится без скольжения прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент $r = 5$ см, $R = 10$ см,	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 20$ см/с . Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость

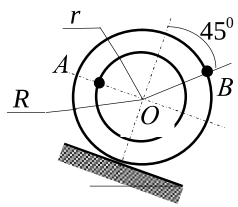
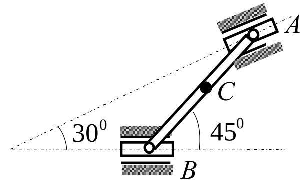
$v_A = 25$ см/с .	стержня, скорости точек B и C, если AB = 10 см, AC = 6 см.

Вариант КЗ-6	
6.1	6.2
	
Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент r = 2 см, R = 6 см, $v_A = 9$ см/с .	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 9$ см/с . Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 6 см, AC = 2 см.

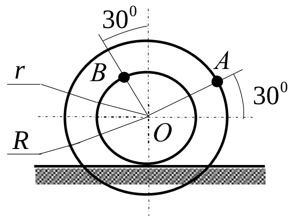
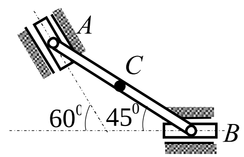
Продолжение табл. 4.5

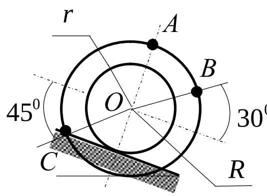
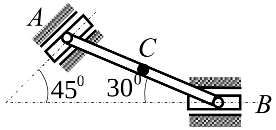
Вариант КЗ-7	
7.1	7.2
	
Колесо катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость колеса, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью v_A = 16 см/с.

R = 3 см, v_A = 12 см/с.	Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 8 см, AC = BC.

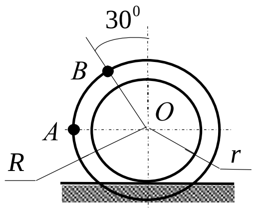
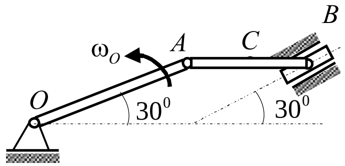
Вариант КЗ-8	
8.1	8.2
	
Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент R = 4 см, r = 3 см, v_O = 10 см/с.	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью v_A = 20 см/с. Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 10 см, AC = BC.

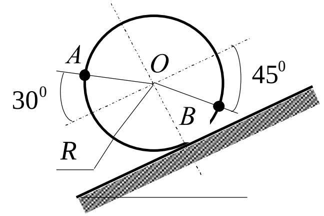
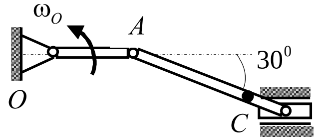
Продолжение табл. 4.5

Вариант КЗ-9	
9.1	9.2
	
Катушка катится без скольжения по наклонному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B,	Стержень AB имеет на концах ползуны, один из которых A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью

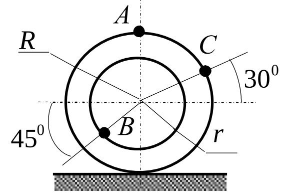
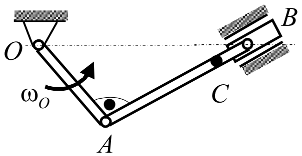
<table>
<tr><td>если в рассматриваемый момент
R = 4 см, r = 2 см, v_A = 8 см/с.</td><td>$v_A = 8$ см/с .
Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 6 см, $AC = BC$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант КЗ-10</td></tr>
<tr><td>10.1</td><td>10.2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек B и C, если в рассматриваемый момент
R = 4 см, r = 3 см, v_A = 7 см/с.</td><td>Стержень AB имеет на концах ползуны, один из них A скользит по прямолинейной направляющей со скоростью $v_A = 10$ см/с .
Найти в положении, указанном на рисунке, угловую скорость стержня, скорости точек B и C, если AB = 4 см, $AC = BC$.</td></tr>
</table>

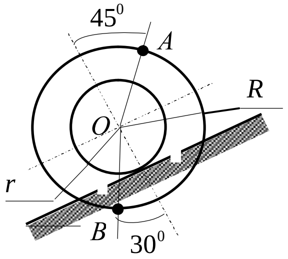
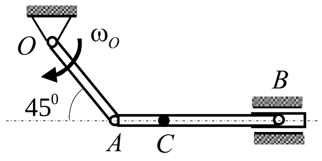
Продолжение табл. 4.5

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант КЗ-11</td></tr>
<tr><td>11.1</td><td>11.2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Колесо катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость колеса, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент</td><td>Кривошип OA длиной 1 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м.</td></tr>
</table>

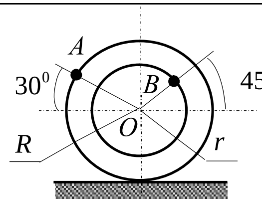
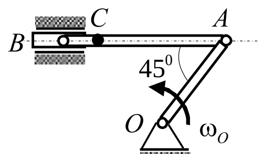
<table>
<tr><td>R = 5 см, r = 3 см, v_A = 12 см/с.</td><td>Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек A и C, если $AC = BC$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант КЗ-12</td></tr>
<tr><td>12.1</td><td>12.2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Катушка катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент
R = 4 см, v_O = 10 см/с.</td><td>Кривошип OA длиной 0,5 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м.
Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек A и C, если BC = 0,2 м.</td></tr>
</table>

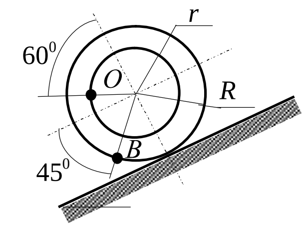
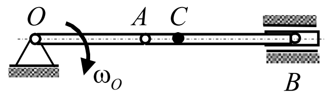
Продолжение табл. 4.5

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант КЗ-13</td></tr>
<tr><td>13.1</td><td>13.2</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и C,</td><td>Кривошип OA длиной 0,5 м вращается с угловой скоростью ω_O = 3 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м.</td></tr>
</table>

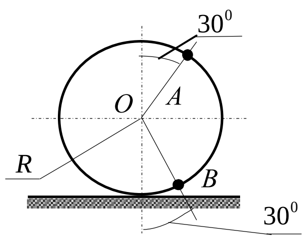
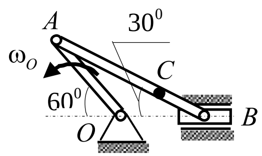
если в рассматриваемый момент $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_B = 6$ см/с .	Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если $BC = 0{,}1$ м.
Вариант К3-14	
14.1	14.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент $r = 2$ см, $R = 4$ см, $v_O = 6$ см/с .	Кривошип OA длиной 0,4 м вращается с угловой скоростью $\omega_O = 2{,}5$ рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м. Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если $AC = 0{,}3$ м.

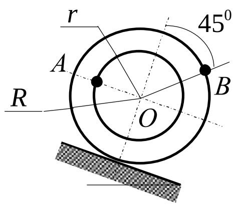
Продолжение табл. 4.5

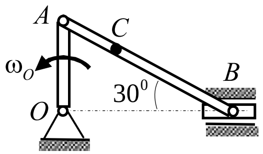
Вариант К3-15	
15.1	15.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, ес-	Кривошип OA длиной 0,6 м вращается с угловой скоростью $\omega_O = 2$ рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м.

ли в рассматриваемый момент $r = 5$ см, $R = 10$ см, $v_O = 10$ см/с .	Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если $BC = 0{,}3$ м.
Вариант К3-16	
16.1	16.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент $r = 5$ см, $R = 10$ см, $v_O = 10$ см/с .	Кривошип OA длиной 0,4 м вращается с угловой скоростью $\omega_O = 1$ рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м. Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если $AC = 0{,}2$ м.

Продолжение табл. 4.5

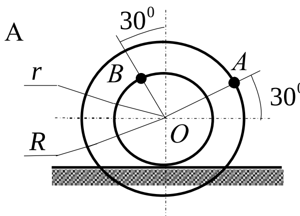
Вариант К3-17	
17.1	17.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.	Кривошип OA длиной 1 м вращается с угловой скоростью

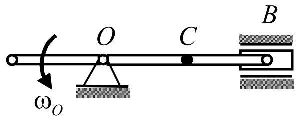
<table>
<tr><td>Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент
R = 3 см, $v_O = 6$ см/с .</td><td>ω_O = 1 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 3 м.
Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если BC = 1 м.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант К3-18</td></tr>
<tr><td>18.1</td><td>18.2</td></tr>
<tr><td>

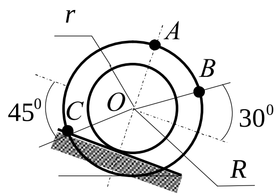
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент
r = 3 см, R = 4 см, $v_A = 6$ см/с .</td><td>

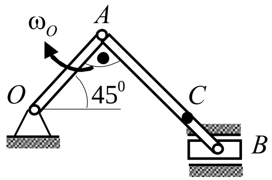
Кривошип OA длиной 1,5 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 2 м.
Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если BC = 0,15м.</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 4.5

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант К3-19</td></tr>
<tr><td>19.1</td><td>19.2</td></tr>
<tr><td>

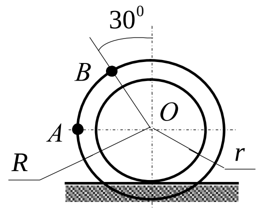
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент
r = 2 см, R = 4 см, $v_O = 6$ см/с .</td><td>

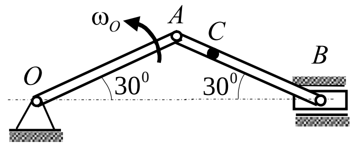
Кривошип OA длиной 0,5 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 4 м.
Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если AC = 2,5 м.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вариант К3-20</td></tr>
<tr><td>20.1</td><td>20.2</td></tr>
<tr><td>

Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если в рассматриваемый момент
r = 2 см, R = 5 см, $v_O = 10$ см/с .</td><td>

Кривошип OA длиной 0,5 м вращается с угловой скоростью ω_O = 1 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 4 м.
Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если BC = 1 м.</td></tr>
</table>

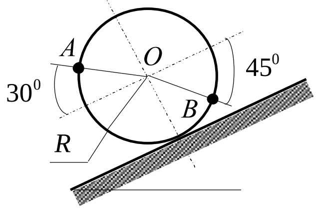
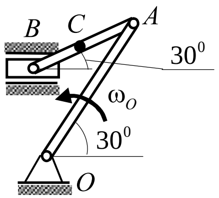
Продолжение табл. 4.5

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант К3-21</td></tr>
<tr><td>21.1</td><td>21.2</td></tr>
<tr><td>

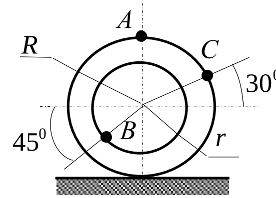
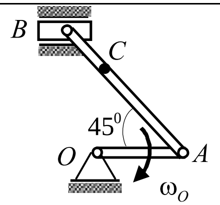
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути.
Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и O,</td><td>

Кривошип OA длиной 2 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 2 м.</td></tr>
</table>

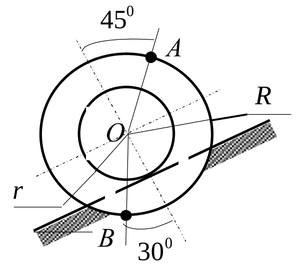
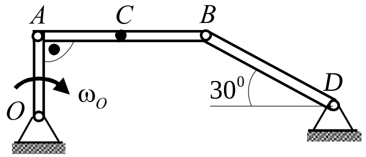
если в рассматриваемый момент r = 2 см, R = 4 см, $v_B = 10$ см/с .	Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если AC = 0,5 м.

Вариант КЗ-22	
22.1	22.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и O, если в рассматриваемый момент, R = 3 см, $v_B = 6$ см/с .	Кривошип OA длиной 2 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 1 м. Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если AC = 0,5 м.

Продолжение табл. 4.5

Вариант КЗ-23	
23.1	23.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек A и B, если	Кривошип OA длиной 1 м вращается с угловой скоростью ω_O = 2 рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 3 м.

в рассматриваемый момент r = 3 см, R = 4 см, $v_C = 6$ см/с .	Найти угловую скорость ω_{AB} шатуна, скорости точек B и C, если BC = 1 м.

Вариант КЗ-24	
24.1	24.2
	
Катушка катится без скольжения по прямолинейному пути. Найти угловую скорость катушки, скорости точек O и B, если в рассматриваемый момент r = 3 см, R = 6 см, $v_A = 10$ см/с .	Стержень OA длиной 1 м шарнирного четырехзвенника вращается с угловой скоростью ω_O = = 2 рад/с. длиной 1 м. Найти угловые скорости стержней AB длиной 2 м и BD длиной 3 м, а также скорости точек B и C, если AC = 1 м.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.– М.: Высшая школа, 1974.– 400 с.

2. Бутенин И.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Краткий курс теоретической механики. Т.1 : Статика и кинематика.– М.: Наука, 1985.– 240 с.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики Ч.1 : Статика. Кинематика.– М.: Высшая школа, 1984.– 343 с.

4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1 : Статика и кинематика.– М.: Наука, 1990.– 670 с.

СОДЕРЖАНИЕ