

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ**  
**ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ С ПРИМЕНЕНИЕМ**  
**СИСТЕМЫ МАТНСАД**

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы  
с заданиями

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» для студентов специальностей 150200, 230100.

# 1 Общие сведения

Задать движение твердого тела – значит, дать условия, позволяющие найти положение каждой точки тела в любой момент времени. Для этого достаточно какими-либо геометрическими параметрами (координатами) задать положение тела в целом так, чтобы определилось положение всех точек тела.

Положение свободного абсолютно твердого тела определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой.

Число независимых параметров, определяющих положение тела, называют числом степеней свободы тела. Свободное абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Основными задачами кинематики твердого тела являются:

1) задание движения и изучение кинематических характеристик движения всего тела в целом;

2) изучения движения каждой из точек тела в отдельности.

Простейшими видами движения твердого тела являются поступательное и вращательное движения.

## 1.1 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и соответственно ускорения.

Таким образом, поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения сводится к задаче кинематики точки.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость  $\vec{v}$  называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение  $\vec{a}$  – ускорением поступательного движения. Векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$  можно, очевидно, изображать приложенными в любой точке тела.

## 1.2 Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчета, называется вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси. Эта прямая, точки которой остаются неподвижными, называется осью вращения. Все точки тела, не принадлежащие оси вращения, будут двигаться в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

### 1.2.1 Кинематические характеристики вращающегося тела

Положение вращающегося тела в любой момент времени будет известно, если задана зависимость угла поворота  $\varphi$  (рисунок 1) от времени  $t$ :

$$\varphi = f(t). \quad (1)$$

Равенство (1) называется уравнением или законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$ . Угол поворота измеряется в радианах (рад).

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения твердого тела являются его угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$ .

Угловая скорость вращающегося тела равна первой производной по времени от угла поворота тела:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2)$$

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени.

Угловое ускорение вращающегося тела равно первой производной по времени от угловой скорости или второй производной по времени от угла поворота тела:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости в данный момент времени.

Единицы измерения угловой скорости – рад/с, углового ускорения – рад/с<sup>2</sup>.

Если модуль угловой скорости со временем возрастает, вращение тела называется ускоренным, а если убывает – замедленным. Вращение будет ускоренным, когда величины  $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$  имеют одинаковые знаки, и замедленным, – когда разные.

### 1.2.2 Кинематические характеристики точек вращающегося тела

Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения:

$$v = h \cdot \omega, \quad (4)$$

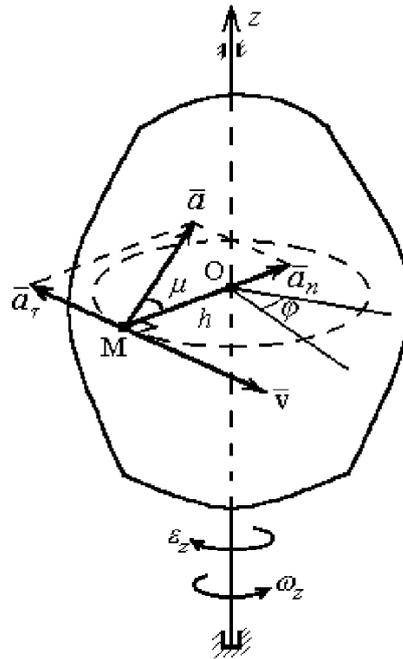


Рисунок 1

где  $v$  - модуль скорости точки, м/с;  
 $h$  - расстояние от точки до оси вращения, м;  
 $\omega$  - модуль угловой скорости тела, рад/с.

Вектор скорости точки тела направлен по касательной к описываемой точкой окружности или перпендикулярно плоскости, содержащей ось вращения и точку, в сторону вращения тела (рисунок 1).

Ускорение точки определяется как сумма его касательной  $\bar{a}_\tau$  (тангенциальной) и нормальной  $\bar{a}_n$  составляющих:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (5)$$

Модули касательного  $a_\tau$  и нормального  $a_n$  ускорения точки определяются по формулам (6) и (7).

$$a_\tau = h \cdot |\varepsilon_z|, \quad (6)$$

$$a_n = h \cdot \omega^2. \quad (7)$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки (в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в противоположную сторону, если тело вращается замедленно); нормальное ускорение всегда направлено по радиусу  $h$  к оси вращения (рисунок 1).

Модуль ускорения точки будет определяться по формуле:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (8)$$

где  $a$  – ускорение точки, м/с<sup>2</sup>.

Отклонение вектора ускорения точки от главной нормали к траектории в данной точке определяется углом  $\mu$  (рисунок 1), который вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{|\varepsilon_{\dot{z}}|}{\omega^2}. \quad (9)$$

## 2 Содержание задания и алгоритм решения

### 2.1 Содержание задания

Найти для заданного механизма в момент времени  $t_1=1$  с скорость и ускорение рейки 1, угловые скорость и ускорение колеса 4, а также скорость и ускорение точки М.

Построить для заданного механизма в промежутке времени с момента начала движения ( $t_0=0$  с) до момента времени  $t_2=3$  с графики скорости и ускорения рейки 1, графики угловой скорости и углового ускорения колеса 4, а также скорости и ускорения точки М.

Исходные данные определяются согласно варианту работы. Номер варианта представлен в виде трехзначного числа. По первой цифре варианта определяется столбец с размерами колес из таблицы 1, по второй – закон движения рейки 1 из таблицы 2, по третьей – схема механизма (рисунок 2).

Таблица 1 Размеры колес механизма

Цифра	0	1	2	3	4
$R_2$ , см	50	45	55	60	40
$r_2$ , см	30	25	35	30	25
$R_3$ , см	45	50	75	80	65
$r_3$ , см	35	25	55	40	25
$R_4$ , см	60	55	70	45	35
$r_4$ , см	25	15	30	25	15
Цифра	5	6	7	8	9
$R_2$ , см	70	50	35	75	80
$r_2$ , см	50	45	30	35	25
$R_3$ , см	55	65	45	50	70
$r_3$ , см	30	45	20	35	35
$R_4$ , см	45	55	75	40	30
$r_4$ , см	20	20	60	20	15

Таблица 2 Закон движения рейки 1

Цифра	0	1	2	3	4
$x(t)$ , см	$\sin(t^3 - 1)$	$t^3 + t^2 / (1 + t^3)$	$t^3 - t^2 + t$	$\cos(t^6 - 2)$	$\frac{t^4}{3} - (t + 1)^{t-1}$
Цифра	5	6	7	8	9
$x(t)$ , см	$\cos^{-1}(\sin(t))$	$t^5 - 2t^3 - 1$	$\sin^2(2 - e^t) + 3$	$t^5 - 7t$	$\sin(t/3) \cdot 2t$

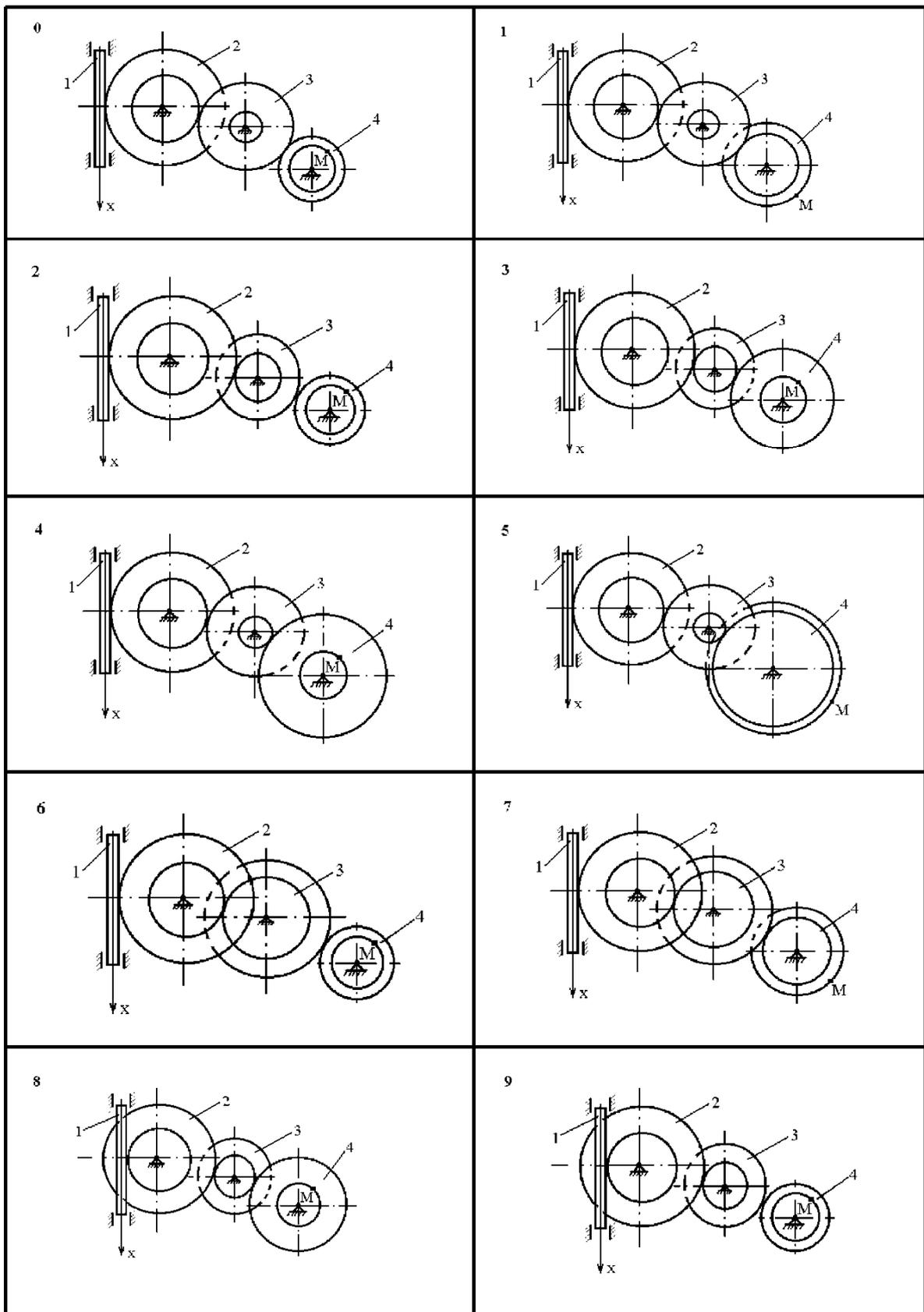


Рисунок 2

## 2.2 Алгоритм решения

2.2.1 Определить скорость и ускорение рейки 1 для момента времени  $t$  по формулам:

$$v_1 = \& \quad (10)$$

$$a_1 = \& \quad (11)$$

2.2.2 Провести кинематический анализ. Выразить угловую скорость колеса 4 через скорость рейки 1. Определить угловую скорость колеса 4 для момента времени  $t$ .

2.2.3 По формуле (3) определить угловое ускорение колеса 4 для момента времени  $t$ .

2.2.4 По формулам (4) и (8) определить скорость и ускорение точки М для момента времени  $t$ .

2.2.5 На рисунке показать направление и характер вращения ( $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$ ) колеса 4, вектора скорости и ускорения рейки 1, а также вектора скорости, тангенциального, нормального и полного ускорений точки М.

2.2.6 Построить для заданного механизма в промежутке времени с момента начала движения ( $t_0=0$  с) до момента времени  $t_1=3$  с графики скорости и ускорения рейки 1, графики угловой скорости и углового ускорения колеса 4, а также скорости и ускорения точки М.

### 3 Пример выполнения задания

Дано:

В механизме, представленном на рисунке 3, закон движения рейки 1 имеет вид  $x(t) = 3t^3 - 2t^2 + 2$  (см). Колеса механизма имеют размеры:  $R_2=70$  см;  $r_2=50$  см;  $R_3=30$  см;  $r_3=25$  см;  $R_4=55$  см;  $r_4=35$  см.

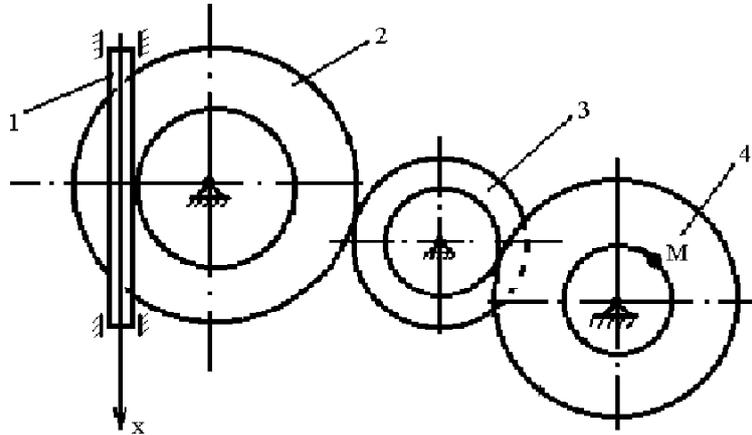


Рисунок 3

Требуется:

- 1) в момент времени  $t_1=1$  с определить скорость и ускорение рейки 1, угловые скорость и ускорение колеса 4, а также скорость и ускорение точки М;
- 2) в промежутке времени с момента начала движения ( $t_0=0$  с) до момента времени  $t_2=3$  с построить графики скорости и ускорения рейки 1, графики угловой скорости и углового ускорения колеса 4, а также скорости и ускорения точки М.

Решение:

Решение и оформление работы выполняется в документе Mathcad 2000 или Mathcad 2001. Перед началом выполнения работы необходимо запустить программу Mathcad и открыть новый документ (рисунок 4).

При наборе теста и формул необходимо использовать шрифт Times New Roman Суг обычный, размер 14 пт. Для появления области ввода текста необходимо нажать знак двойной кавычки “ на английском регистре или выбрать в меню Вставка команду Текстовая область (рисунок 5).

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Курсор ввода в виде маленького красного крестика окажется перенесенным на это место. Курсор ввода указывает место, с которого начинается набор формулы. Набор формул осуществляется на английском языке.

Необходимые математические символы, знаки и буквы греческого алфавита находятся в меню Вид под командой Панели инструментов (рисунок 6).

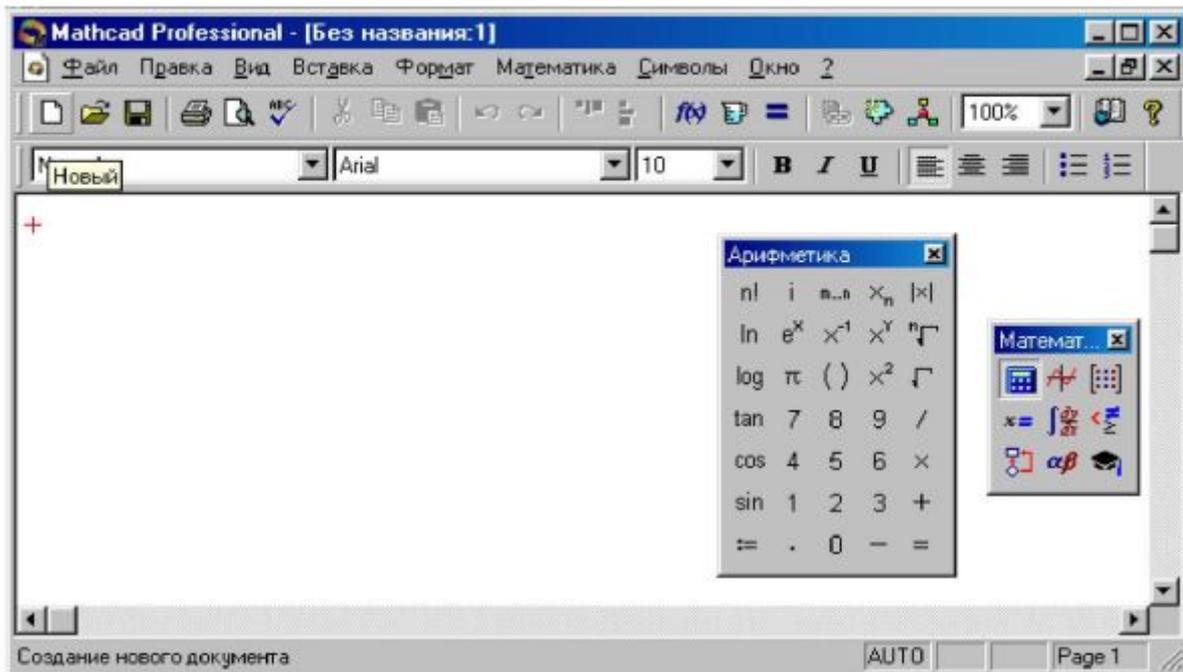


Рисунок 4

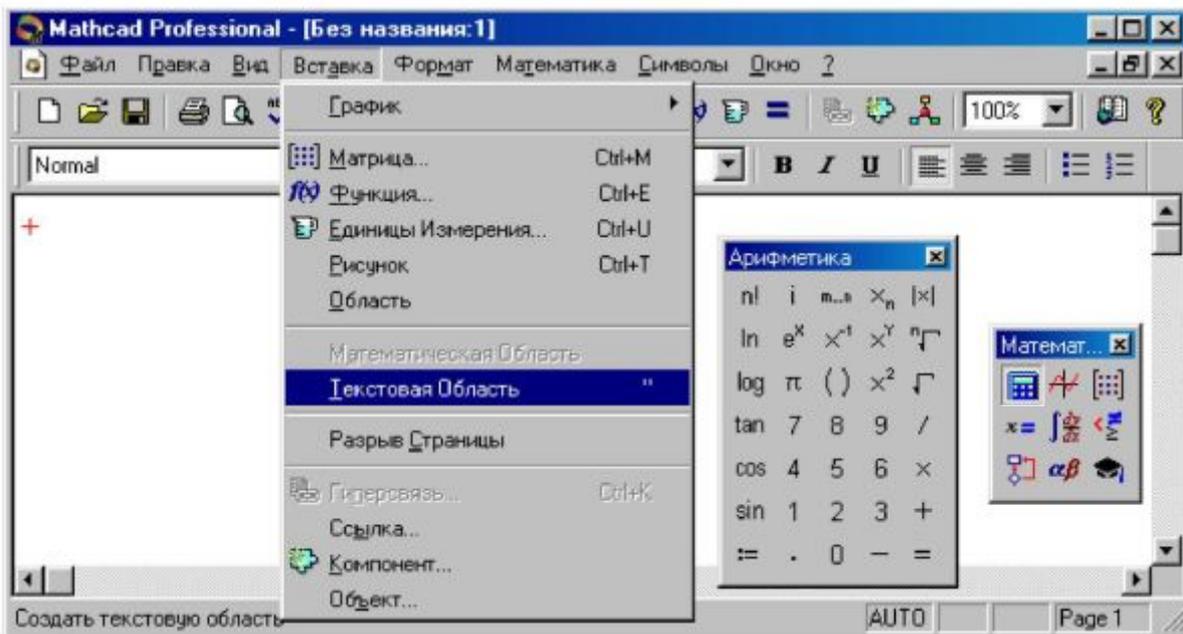


Рисунок 5

Введем заданные уравнения движения груза 1, размеры колес механизма, а также значения  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  (рисунок 7). В Mathcad знаки равенства (=) и присваивания (:=) имеют различные функции. Знак присваивания используется для присваивания функциям и переменным определенных значений или зависимостей, а знак равенства – для вывода полученных результатов.

Решаем задачу по алгоритму.

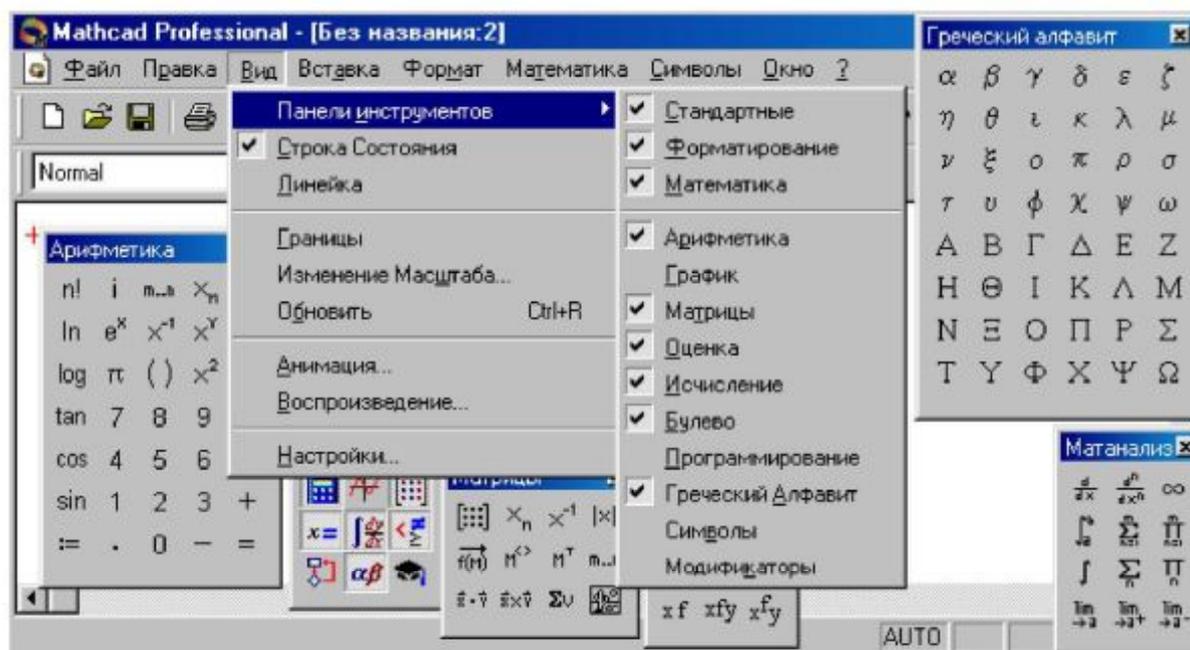


Рисунок 6

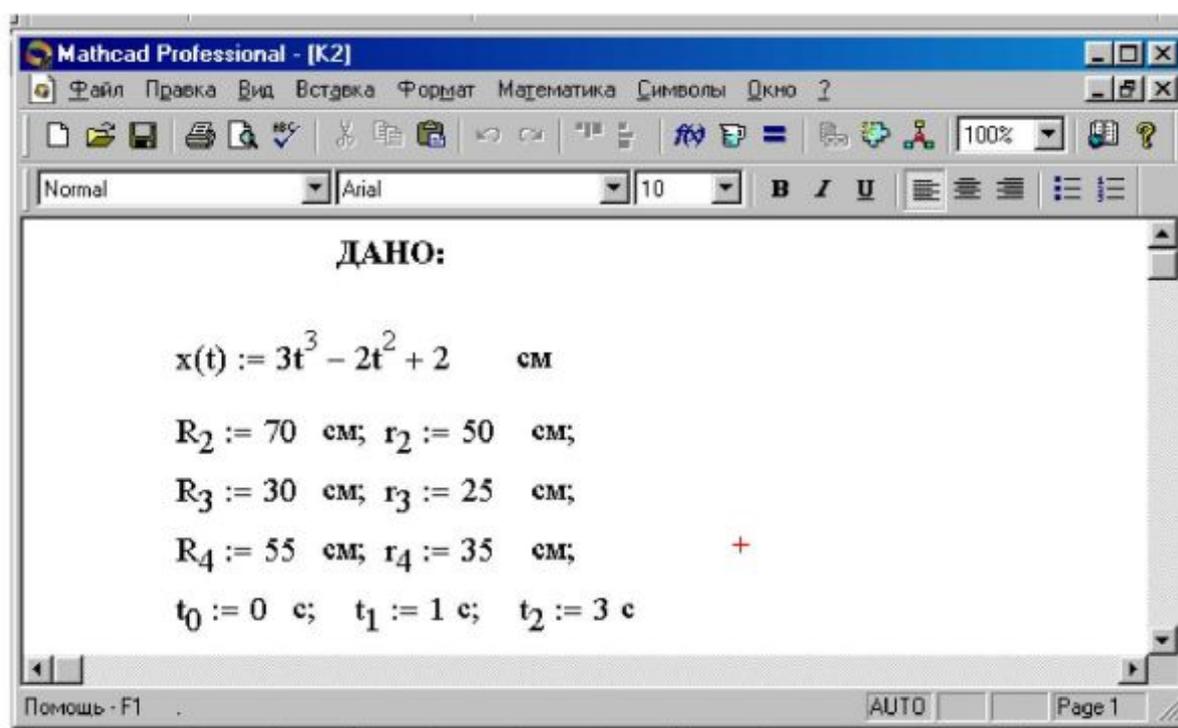


Рисунок 7

1 Определим скорость и ускорение рейки 1 для момента времени  $t$  (рисунок 8).

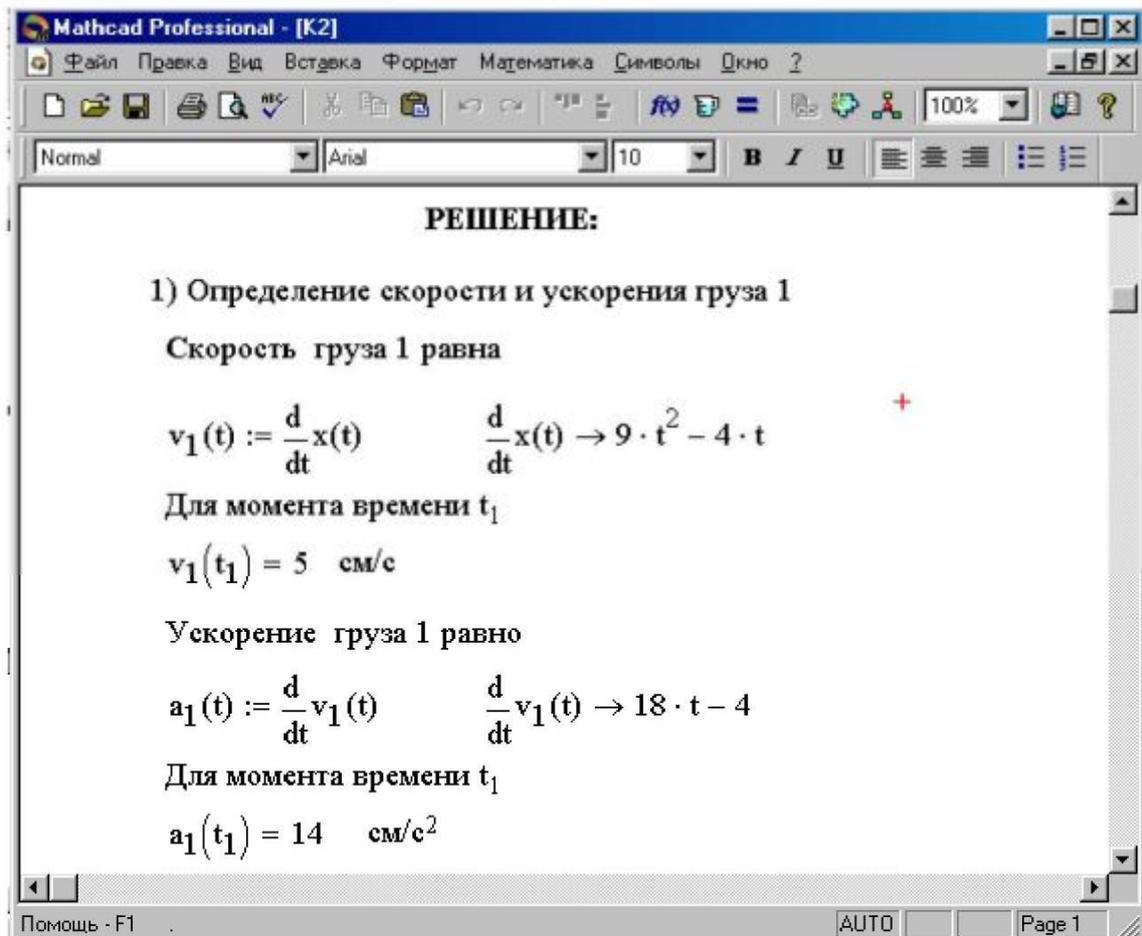


Рисунок 8

2 Проведем кинематический анализ. Выразим угловую скорость колеса 4 через скорость рейки 1. Определим угловую скорость колеса 4 для момента времени  $t$  (рисунок 9).

3 Определить угловое ускорение колеса 4 для момента времени  $t$  (рисунок 10).

4 Определим скорость и ускорение точки М для момента времени  $t$  (рисунок 11).

5 Покажем на рисунке направление и характер вращения ( $\omega_z$  и  $\varepsilon_z$ ) колеса 4, вектора скорости и ускорение рейки 1, а также вектора скорости, тангенциального, нормального и полного ускорений точки М (рисунок 12).

6 Построим для заданного механизма в промежутке времени с момента начала движения ( $t_0=0$  с) до момента времени  $t_1=3$  с графики скорости и ускорения груза 1, графики угловой скорости и углового ускорения колеса 4, а также скорости и ускорения точки М с помощью шаблона двумерных графиков (рисунок 13).

Шаблон двумерного графика (Х-У Зависимость) расположен в меню Вставка (команда Графики). После вывода шаблона необходимо ввести пере-

менную, функцию и пределы изменения переменной и функции. Если пределы изменения не заданы, они устанавливаются программой.

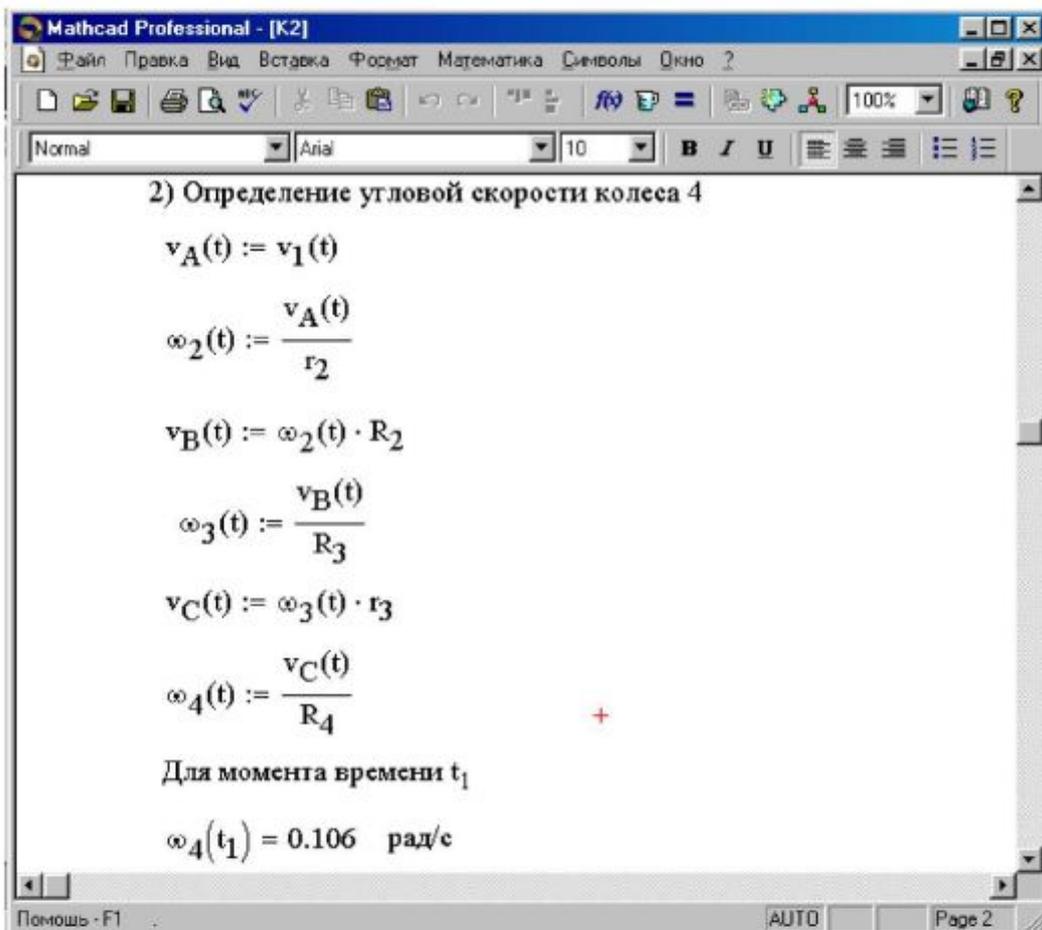


Рисунок 9

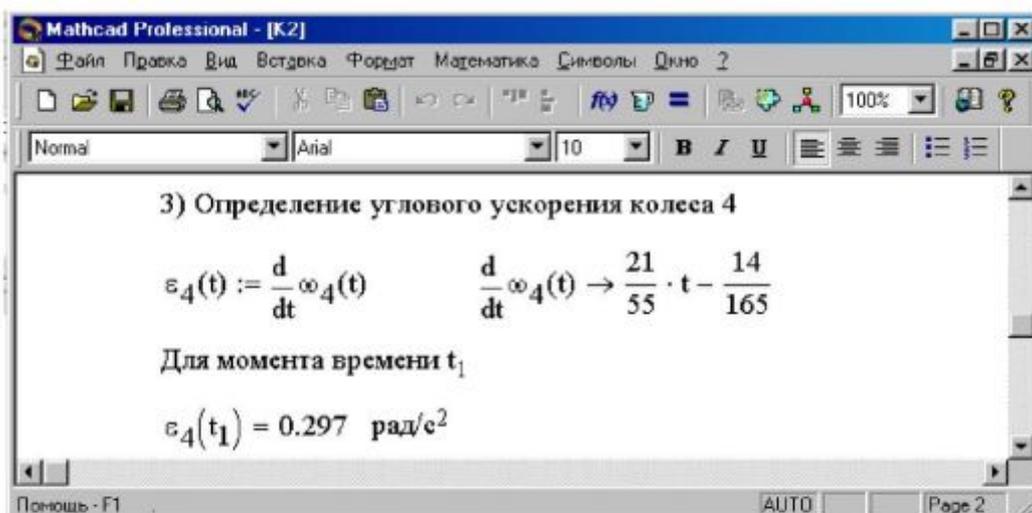


Рисунок 10

Mathcad Professional - [K2]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Normal Arial 10

4) Определение скорости и ускорения точки М

$$v_M(t) := \omega_4(t) \cdot r_4$$

Для момента времени  $t_1$

$$v_M(t_1) = 3.712 \text{ см/с}$$


---


$$a_{\tau M}(t) := \varepsilon_4(t) \cdot r_4$$

$$a_{nM}(t) := \omega_4(t)^2 \cdot r_4$$

$$a_M(t) := \sqrt{a_{\tau M}(t)^2 + a_{nM}(t)^2}$$

Для момента времени  $t_1$

$$a_M(t_1) = 10.401 \text{ см/с}^2$$

Помощь · F1 AUTO Page 2

Рисунок 11

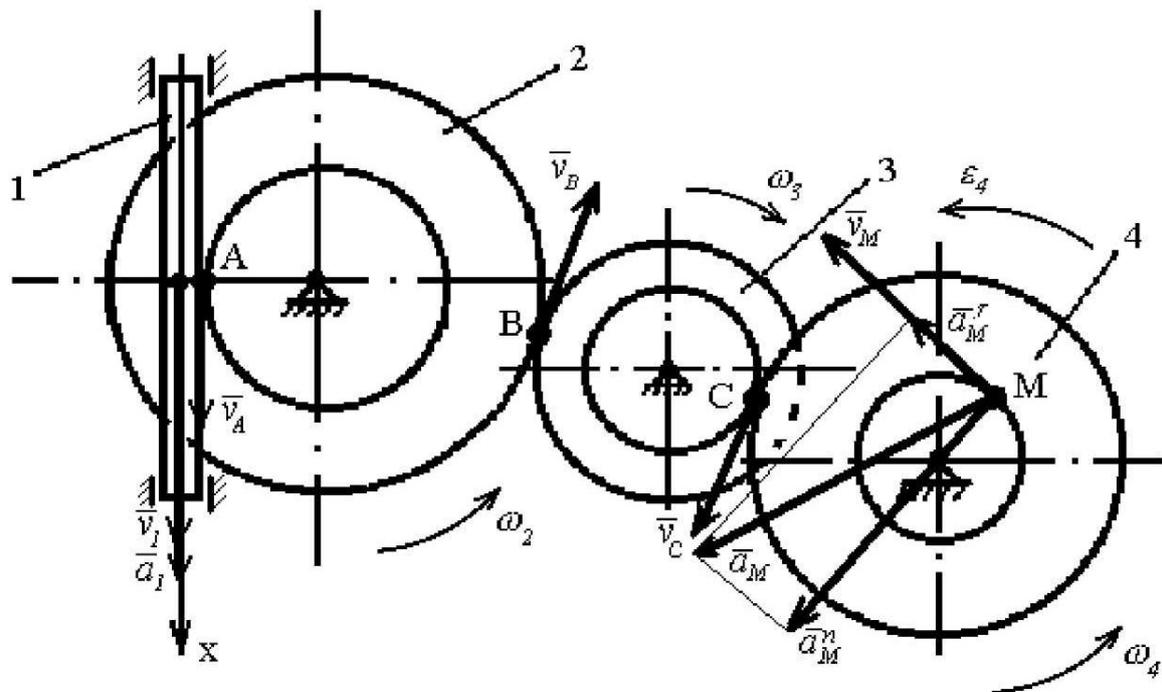


Рисунок 12

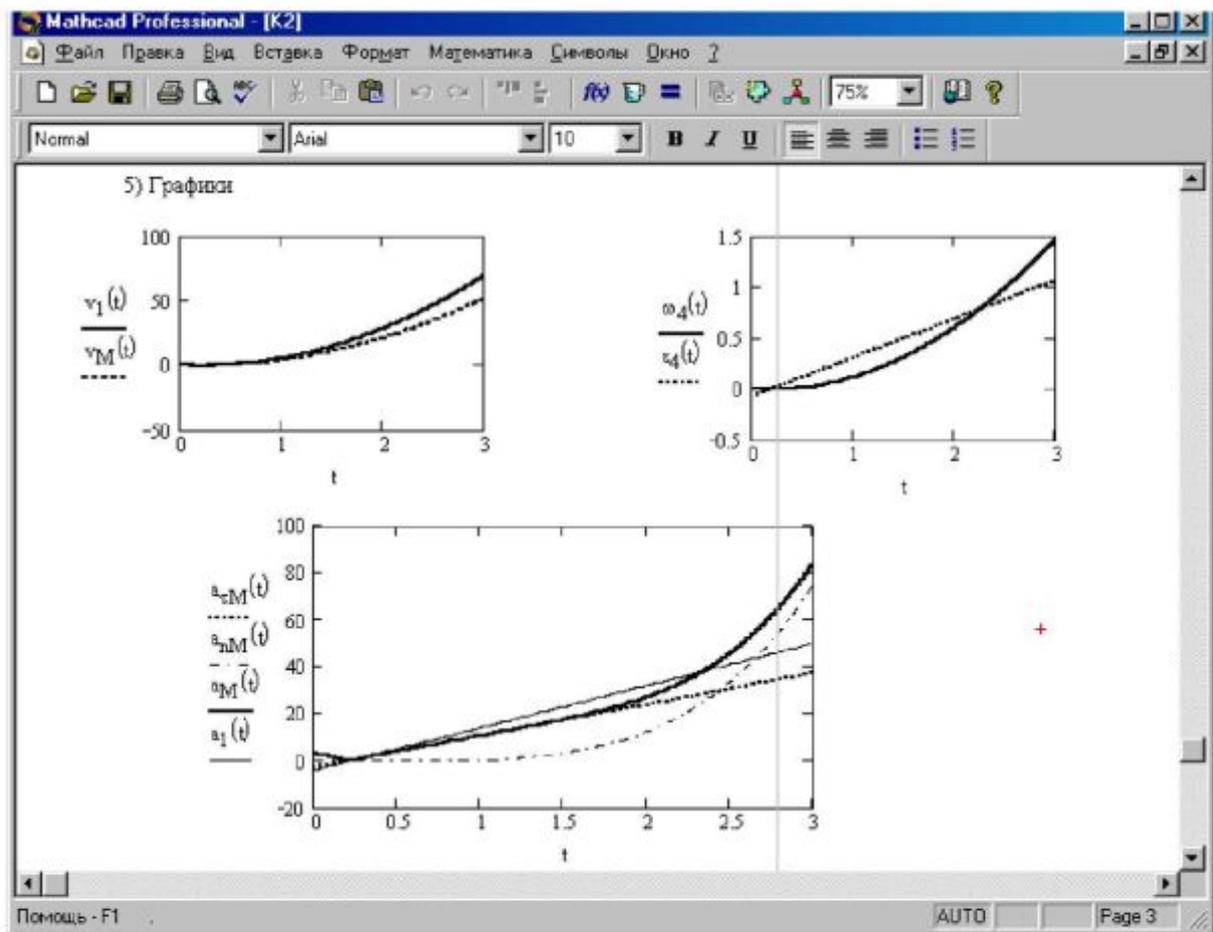


Рисунок 13

## Список использованных источников

- 1 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
- 2 Попов М.В. Теоретическая механика: Краткий курс: Учебник для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 330 с.
- 3 Дьяконов В. Mathcad 2000: учебный курс. – СПб: Питер, 2000. – 592 с.: ил.
- 4 Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учеб. Пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.: ил.