# ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
## РУКОВОДСТВО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
## ЧАСТЬ 2. КИНЕМАТИКА
Учебное пособие

Учебное пособие состоит из 3 частей. Часть 2 содержит определения понятий, методики решения типовых задач раздела « Кинематика» курса «Теоретическая механика».

Предназначено для студентов 2-го курса технических специальностей всех форм обучения.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ....4
1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ....5
1.1. Способы задания движения точки....5
1.2. Характеристики движения....6
1.3. Уравнение траектории. Виды траекторий....7
***Решение задач***....8
2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ....19
2.1. Характеристики вращательного движения....19
2.2. Скорость и ускорения точек при вращательном движении....20
***Решение задач***....20
3. КИНЕМАТИКА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА....23
3.1. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении....23
3.1.1. Аналитический метод....23
3.1.2. Метод, основанный на использовании векторного уравнения....24
***Решение задач***....24
3.1.3. Метод, основанный на использовании мгновенного центра скоростей....26
***Решение задач***....27
3.2. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении....33
3.2.1. Аналитический метод....33
3.2.2. Метод, основанный на использовании векторного уравнения....34
***Решение задач***....35
3.2.3. Метод, основанный на использовании мгновенного центра ускорений....40
***Решение задач***....41
4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ....42
4.1. Основные понятия и определения....42
4.2. Определение скоростей точки в сложном движении....43
***Решение задач***....44
4.3. Определение ускорений в сложном движении точки....47
***Решение задач***....50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ....57
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК....58

# ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое пособие предназначено для самостоятельного изучения студентами раздела теоретической механики «Кинематика». В пособии приведены определения основных понятий, изложены основные методы расчета различных движущихся тел и механизмов, даны разъяснения наиболее трудных этапов решения, необходимые правила и рекомендации.

Предполагается, что для освоения методов решения задач студенты будут изучать материал в той последовательности, которая приведена в пособии.

В конце каждого раздела даны подробные решения задач с необходимыми комментариями. К выполнению индивидуальных домашних заданий по кинематике следует приступать после изучения соответствующего раздела, а также литературы [1–5]. Это позволит закрепить полученные знания и приобрести опыт решения задач.

# 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

## 1.1. Способы задания движения точки

Существуют 3 способа задания движения точки: 1) векторный; 2) координатный; 3) естественный.

1. ***Векторный способ задания движения точки.*** Пусть точка $M$ движется по отношению к некоторой системе отсчета $Oxyz$. Положение этой точки в любой момент времени можно определить с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в точку $M$. При движении точки $M$ вектор $\vec{r}$ будет с течением времени изменяться по модулю и направлению. Следовательно, $\vec{r}$ является переменным вектором (вектором-функцией), зависящим от аргумента $t$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.1)$$

Закон движения точки в векторной форме определяется формулой (1.1) и позволяет в любой момент времени построить вектор $\vec{r}$ и найти положение движущейся точки (рис. 1.1).

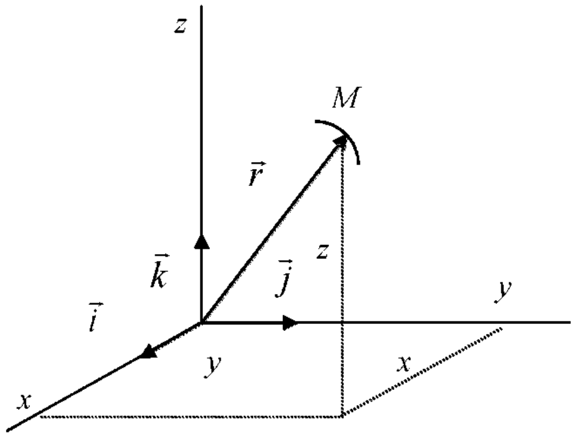


Рис. 1.1

2. ***Координатный способ задания движения точки.*** Положение точки можно задать с помощью координат ($x$, $y$, $z$), которые при движении точки будут с течением времени изменяться.

Уравнения

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (1.2)$$

представляют собой уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Если движение точки происходит в плоскости, то соответствующими уравнениями движения будут:

$$x = x(t), y = y(t). \qquad (1.3)$$

Прямолинейное движение точки определяется уравнением

$$x = x(t). \tag{1.4}$$

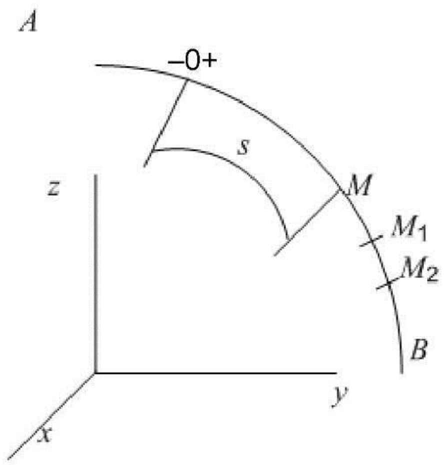


Рис. 1.2

3. ***Естественный способ задания движения точки.*** Пусть кривая $AB$ является траекторией точки $M$ в системе отсчета $Oxyz$ (рис. 1.2). Выберем на траектории неподвижную точку $O'$, которую примем за начало отсчета и установим на траектории положительное и отрицательное направление отсчета (как на координатной оси).

Положение точки $M$ на траектории в любой момент времени будет определяться законом движения точки:

$$s = s(t). \tag{1.5}$$

Для задания движения точки естественным способом следует знать: 1) траекторию точки; 2) начало отсчета; 3) закон движения точки на траектории.

## 1.2. Характеристики движения

**Скорость точки.** Одной из основных характеристик движения точки является *скорость – векторная величина, равная отношению вектора перемещения точки к промежутку времени:*

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.6}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения.

При прямолинейном движении вектор скорости точки направлен вдоль прямой, по которой движется точка и может изменяться только численно.

При криволинейном движении в плоскости, кроме числового значения, меняется и направление вектора скорости. В этом случае вектор скорости имеет проекции на оси: $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$ (рис. 1.3). Скорость точки определяется по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\,. \tag{1.7}$$

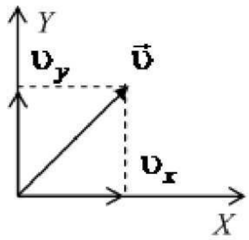

Рис. 1.3

**Ускорение точки.** Ускорением точки называется векторная величина, характеризующая изменение с течением времени модуля и направления скорости точки:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \tag{1.8}$$

При прямолинейном движении точка имеет единственное (касательное) ускорение.

При криволинейном движении в плоскости вектор ускорения имеет проекции на координатные оси:

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{\upsilon}_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \vec{a}_y = \frac{d\vec{\upsilon}_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{1.9}$$

В этом случае ускорение точки определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{1.10}$$

### 1.3. Уравнение траектории. Виды траекторий

***Траекторией движения точки*** называется линия, вдоль которой движется точка.

Уравнение траектории имеет вид:

$$y = f(x). \tag{1.11}$$

Уравнение траектории следует получить из уравнений движения, исключив переменную $t$.

Траектории движения имеют вид прямой линии или изображаются в виде кривой.

Ниже приведены канонические уравнения основных траекторий точки:

*прямая* $y = kx + b$;

*парабола* $y = ax^2 + bx + c$;

*гипербола* $y = \frac{a}{x}$;

*окружность* $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2$;

*эллипс* $\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$.

### *Решение задач*

***Задача 1.1*** *[4, задача 1]*

Даны уравнения движения точки:

$$x = 8\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 6;$$

$$y = 6\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 3.$$

Определить уравнение траектории и построить ее.

Определить начальное положение точки на траектории.

Указать моменты времени, когда точка пересекает оси координат.

Найти закон движения точки по траектории $s = \varphi(t)$, принимая за начало отсчета расстояний начальное положение точки.

Построить график движения точки.

*Решение*

1. Для определения уравнения траектории необходимо исключить параметр $t$ из уравнений движения:

$$\left.\begin{aligned} x &= 8\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 6; \\ y &= 6\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 3; \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{3} t &= \frac{x - 6}{8}; \qquad (а) \\ \cos^2 \frac{\pi}{3} t &= \frac{y - 3}{6}. \qquad (б) \end{aligned}$$

Приравнивая (а) и (б), получаем:

$$\frac{x - 6}{8} = \frac{y - 3}{6} \quad \text{или} \quad y = \frac{3(x - 2)}{4}. \qquad (в)$$

Полученное уравнение (в) является уравнением траектории точки.

График этого уравнения – прямая линия.

2. Начальное положение точки найдем, подставив $t$ = 0 в уравнения движения:

$$x_o = 8\,cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot 0 + 6 = 14\,;$$

$$y_o = 6\,cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot 0 + 3 = 9\,.$$

Следует отметить положение точки на координатной плоскости и убедиться, что она лежит на графике траектории (рис. 1.4).

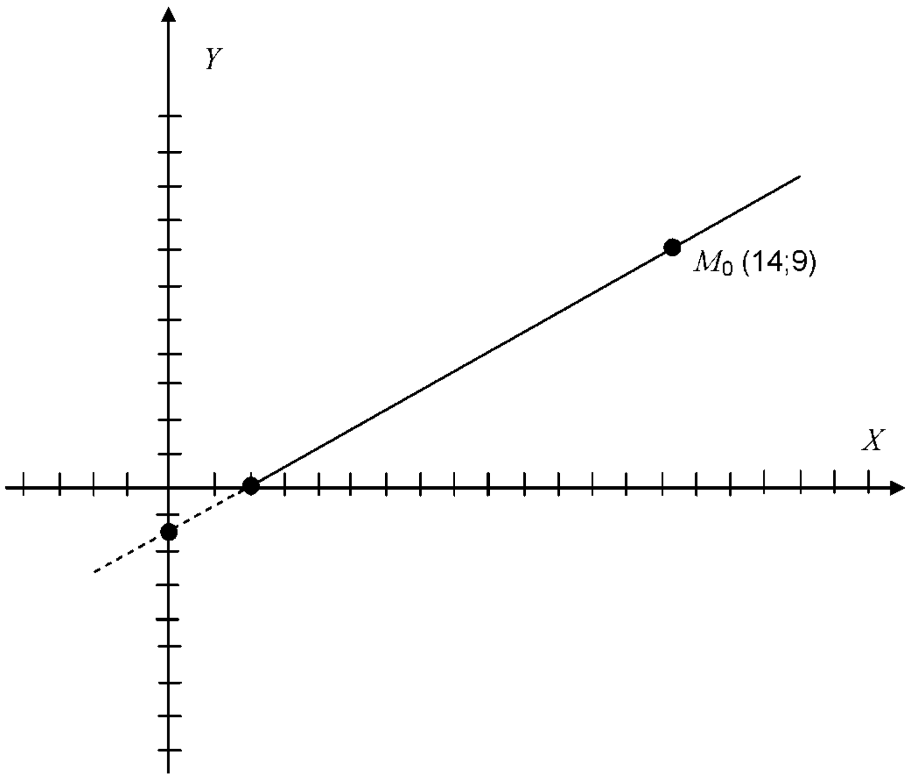


Рис. 1.4

3. При пересечении точкой оси ординат ее абсцисса будет равна нулю:

$$8\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 6 = 0 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} t = -\frac{3}{4}.$$

Квадрат функции может быть только неотрицательным числом, поэтому у приведенного уравнения нет корней и, следовательно, точка не пересекает ось ординат. К аналогичному выводу приходим, решая уравнение:

$$6\cos^2 \frac{\pi}{3} t + 3 = 0 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} t = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, точка не пересекает и ось абсцисс.

Для определения закона движения точки будем использовать формулу

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Для этого найдем проекции скоростей на координатные оси:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\frac{16}{3}\pi \sin\frac{\pi}{3}t;$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = -4\pi \sin\frac{\pi}{3}t.$$

Подставив полученные проекции скоростей в формулу, и выполнив преобразование, получим искомый закон движения:

$$s = 10\sin^2\frac{\pi}{3}t.$$

4. Построим график закона движения точки (рис. 1.5).

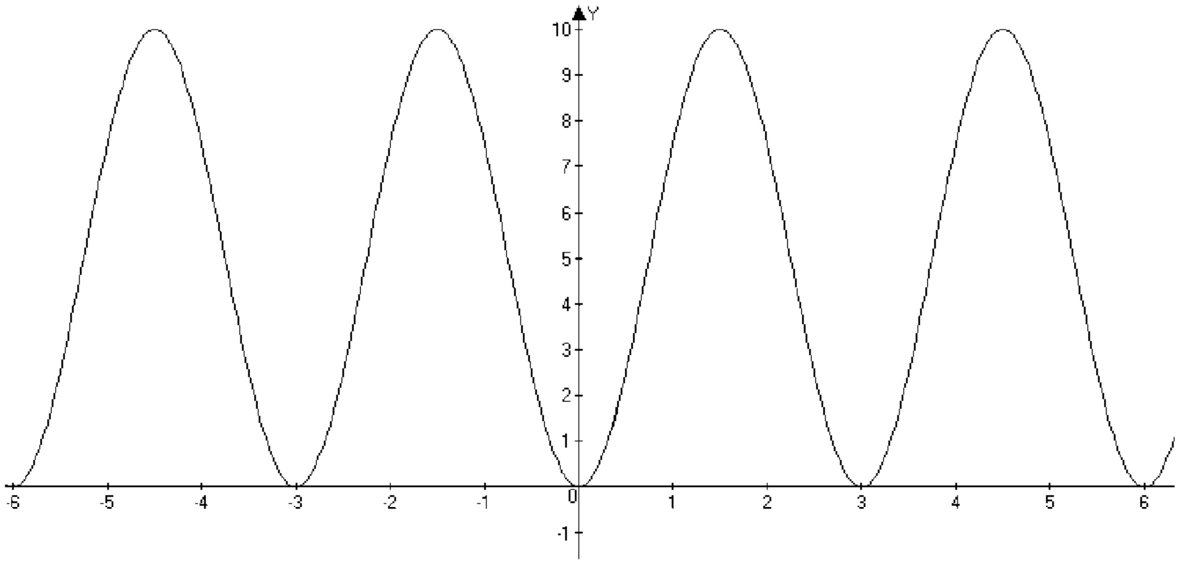


Рис. 1.5

***Задача 1.2*** [4, задача 2]

Даны уравнения движения точки:

$$x = 5\cos\frac{3}{2}\pi t - 5;$$

$$y = 5\sin\frac{3}{2}\pi t + 5.$$

Определить уравнение траектории и построить ее.

Определить начальное положение точки на траектории.

Указать моменты времени, когда точка пересекает оси координат.

Найти закон движения точки по траектории $s = f(t)$, принимая за начало отсчета расстояний начальное положение точки.

Определить время $T$, в течение которого точка пройдет полную окружность.

*Решение*

1. Для определения уравнения траектории точки используем основное тригонометрическое тождество:

$$\begin{aligned} x &= 5\cos\frac{3}{2}\pi t - 5 \\ y &= 5\sin\frac{3}{2}\pi t + 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \cos^2\frac{3}{2}\pi t &= \left(\frac{x+5}{5}\right)^2; \qquad &\text{(а)} \\ \sin^2\frac{3}{2}\pi t &= \left(\frac{y-5}{5}\right)^2. \qquad &\text{(б)} \end{aligned}$$

Сложив (а) и (б), получим:

$$\left(\frac{x+5}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{5}\right)^2 = 1. \qquad \text{(в)}$$

Графиком траектории является окружность с центром в точке $O_1$ (–5;5) и радиусом 5 (рис. 1.6).

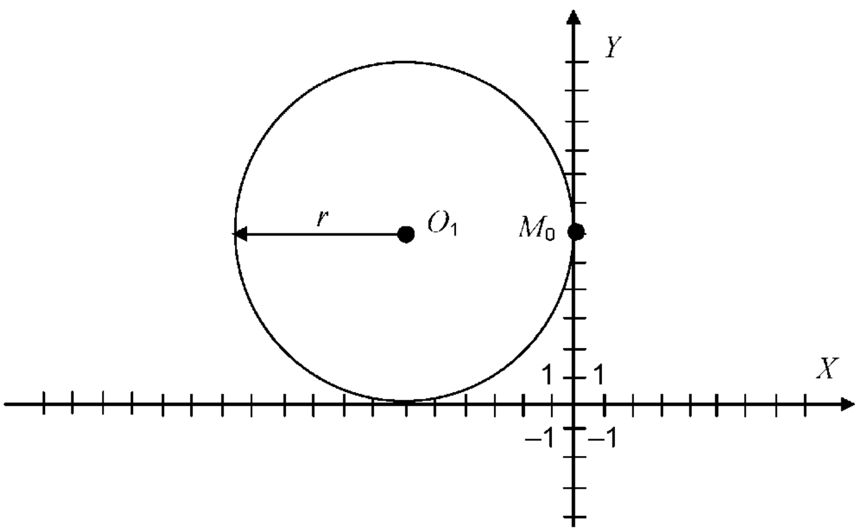


Рис. 1.6

2. Начальное положение точки найдем, подставив $t$ = 0 в уравнения движения:

$$x_o = 5\cos^2\frac{3}{2}\pi\cdot 0 - 5 = 0;$$

$$y_o = 5\sin\frac{3}{2}\pi\cdot 0 + 5 = 5.$$

Следует отметить положение точки на координатной плоскости и убедиться, что она лежит на графике траектории.

При пересечении точкой оси ординат ее абсцисса будет равна нулю:

$$5\cos\frac{3}{2}\pi t - 5 = 0 \Rightarrow \cos\frac{3}{2}\pi t = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Полученный результат означает, что в момент времени $t$ = 0 точка находится на оси ординат.

Решая аналогичное уравнение при $y$ = 0, получим:

$$5\sin\frac{3}{2}\pi t = -5 \Rightarrow t = 1.$$

Следовательно, при $t$ = 1 с точка пересекает ось абсцисс.

Для определения закона движения точки будем использовать формулу

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Для этого найдем проекции скоростей на координатные оси:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\frac{15}{2}\pi\sin\frac{3}{2}\pi t;$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = \frac{15}{2}\pi\cos\frac{3}{2}\pi t.$$

В результате преобразования и интегрирования получим закон движения точки:

$$s = 7{,}5\pi t.$$

Определим период движения точки по окружности.

За период точка пройдет расстояние, равное длине окружности:

$$7{,}5\pi T = 2\pi R.$$

Так как радиус окружности равен 5, период

$$T = \frac{4}{3}\ \text{с}.$$

***Задача 1.3*** [4, задача 3]

Кривошип $OA$ длиной $\ell$ вращается вокруг оси $O$ с постоянной угловой скоростью $\omega$ и приводит в движение стержень $BC$ длиной $3\ell$, конец которого движется по горизонтали (рис. 1.7). Определить уравнения движения и уравнения траектории точки $M$, если в начальный момент кривошип $OA$ совпадал с осью $Ox$. $AB = \ell$.

*Решение*

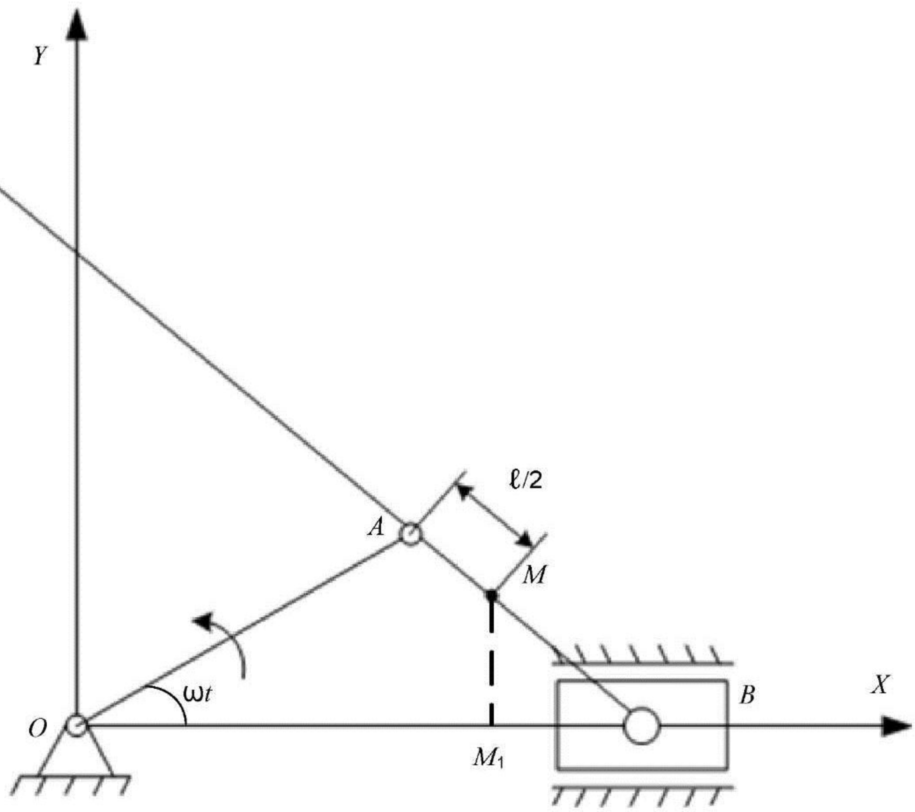


Рис. 1.7

Определим координаты точки $M$.

Пусть точка $M_1$ – проекция точки $M$ на ось $Ox$. Абсцисса точки $M$:

$$x_M = OM_1 = OB - M_1B.$$

Так как кривошип $OA$ вращается вокруг точки $O$ с угловой скоростью $\omega$, то за время $t$ величина угла AOB составит $\varphi = \omega t$. По условию треугольник $AOB$ – равнобедренный ($OA = AB$). Построим $A_1$ – проекцию точки $A$ на ось $Ox$. В этом случае:

$$OB = 2OA_1 = 2\ell\cos\omega t.$$

Из треугольника $M_1MB$ $M_1B = 0{,}5\ell\cos\omega t$.

Следовательно,

$$x_M = OM_1 = OB - M_1B = 2\ell\cos\omega t - 0{,}5\ell\cos\omega t = 1{,}5\ell\cos\omega t. \qquad (а)$$

Отметим, что полученное соотношение является уравнением движения точки $M$ относительно оси $Ox$.

Ординату точки $M$ определим из треугольника $M_1M_B$:

$$y_M = MM_1 = 0{,}5\ell\sin\omega t. \qquad (б)$$

Одновременно полученное соотношение является уравнением движения точки $M$ относительно оси $Oy$.

Составим уравнение траектории точки $M$. Для этого исключим из уравнений (а) и (б) переменную $t$, используя основное тригонометрическое тождество:

$$\frac{x^2}{(1{,}5\ell)^2} + \frac{y^2}{(0{,}5\ell)^2} = 1.$$

Траекторией движения точки $M$ является эллипс с центром в точке $O(0;0)$ и полуосями $1{,}5\ell$ и $0{,}5\ell$.

***Задача 1.4*** [4, задача 4]

Даны уравнения движения точки:

$$x = 3\cos\frac{\pi}{2}t, \;\; y = t.$$

Определить уравнение траектории точки.

Определить скорость и ускорение точки при $t = 0$ и $t = 1$ с.

Построить траекторию и указать полученные векторы скорости и ускорения на чертеже.

*Решение*

1. Для получения уравнения траектории заменим $t$ на $y$:

$$x = 3\cos\frac{\pi}{2}y.$$

2. Модуль скорости точки определим по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2},$$

где $\upsilon_x = \dot{x}, \upsilon_y = \dot{y}$ – проекции вектора скорости на координатные оси.

Определим проекции скоростей при $t = 0$ и $t = 1$ с:

$$\upsilon_x = -\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{2}t, \;\; \upsilon_y = 1 \text{ м/с}.$$

При $t$ = 0 $\upsilon_{0x} = -\dfrac{3}{2}\pi\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot 0 = 0; \upsilon_{0y} = 1$ м/с; $\upsilon = 1$ м/с.

При $t$ = 1 с $\upsilon_{1x} = -\dfrac{3}{2}\pi\sin\dfrac{\pi}{2}\cdot 1 \approx -4{,}71; \upsilon_{1y} = 1$ м/с; $\upsilon \approx 4{,}82$ м/с.

3. Модуль ускорения точки определим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

где $a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}$ – проекции вектора ускорения на координатные оси.

Определим проекции ускорения при $t$ = 0 и $t$ = 1 с:

$$a_x = -\frac{3}{4}\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t, \quad a_y = 0.$$

При $t$ = 0 $a_{0x} = -\dfrac{3}{4}\pi^2\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot 0 \approx -7{,}4$ м/с$^2$; $a_{0y} = 0; a \approx -7{,}4$ м/с$^2$.

При $t$ = 1 с $a_{1x} = -\dfrac{3}{4}\pi^2\cos\dfrac{\pi}{2}\cdot 1 = 0; a_{0y} = 0; a = 0$.

Траектория точки представляет собой косинусоиду. Для ее построения найдем координаты нескольких точек согласно уравнениям (а) и (б): $M_0(3;0)$, $M_1(0;1)$, $M_2(-3;2)$; $M_3(0;3)$; $M_4(3;4)$.

Построим траекторию, соединив точки гладкой линией (рис. 1.8).

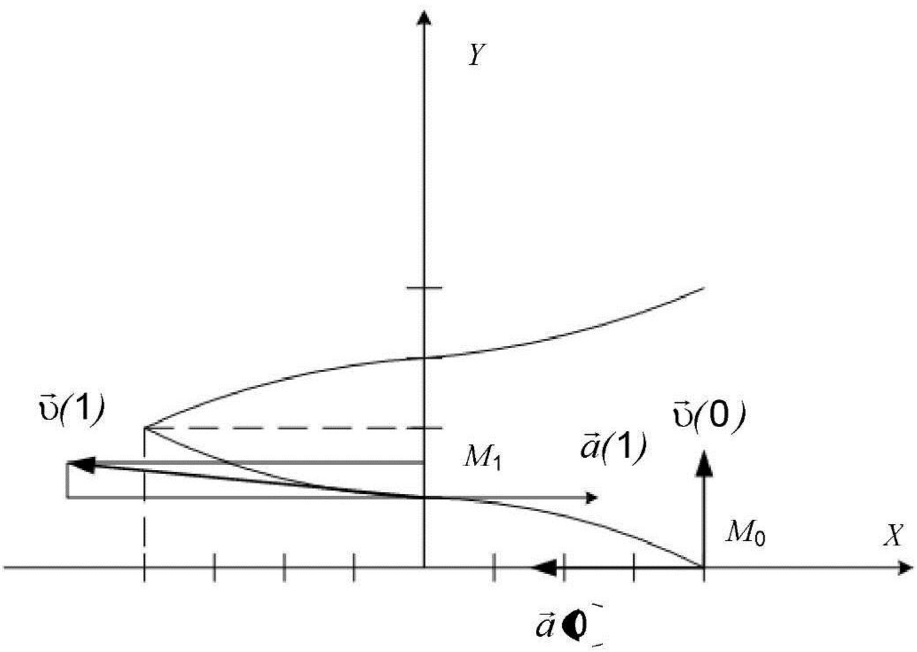


Рис. 1.8

Отметим положение точки на траектории при $t$ = 0 и $t$ = 1 с.

Построим векторы скорости и ускорений точки, как показано на рис. 1.8.

***Задача 1.5*** [4, задача 5]

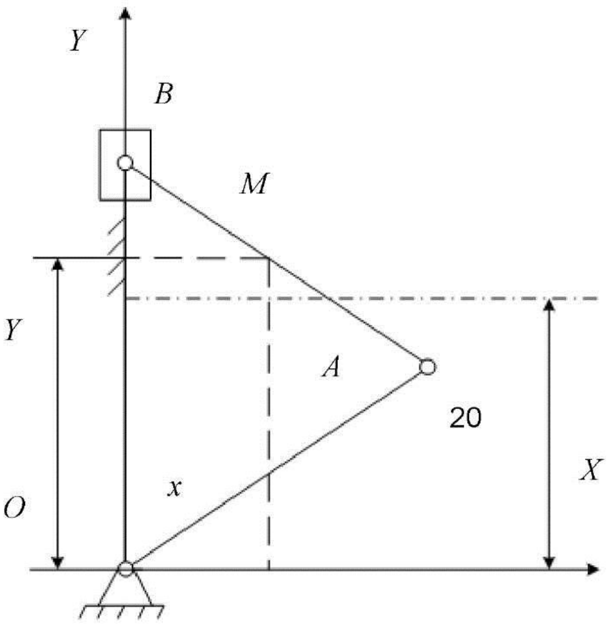


Рис. 1.9

Даны уравнения движения точки $M$ шатуна $AB$ (рис. 1.9):

$$x = 20\cos 2\pi t; \; y = 40\sin 2\pi t.$$

Определить уравнения движения точки.

Определить скорость и ускорение точки, когда она пересечет прямую $y = 20$ см.

*Решение.*

Для определения уравнения траектории исключим $t$ из уравнений движения:

$$\left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{40}\right)^2 = 1.$$

Траекторией точки является эллипс с центром в точке $O(0;0)$ и полуосями 20 и 40 см.

Для определения скорости и ускорения точки найдем время, когда точка пересечет прямую $y = 20$ см:

$$40\sin 2\pi t = 20 \Rightarrow t = \frac{1}{12} \text{ (с)}.$$

Проекции скоростей на оси:

$$\upsilon_x = -40\pi\sin\frac{1}{6}\pi = -20\pi; \quad \upsilon_y = -80\pi\cos\frac{1}{6}\pi = -40\sqrt{3}\pi \text{ (см/с)}.$$

Скорость точки в момент пересечения прямой составит:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \approx 224 \text{ (см/с)}.$$

Проекции ускорений на оси:

$$a_x = -80\pi^2\cos\frac{1}{6}\pi = -40\pi^2\sqrt{3} \text{ (см/с}^2\text{)}; \quad a_y = -160\pi\sin\frac{1}{6}\pi = -80\pi^2.$$

Ускорение точки: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \approx 1022$ (см/с).

***Задача 1.6*** [4, задача 6]

Дан закон движения точки по окружности радиусом $R$ = 5 м:

$$s = t^3 - 22{,}5t^2 + 162t - 15 \text{ (см)}.$$

Определить скорость и ускорение точки при $t$ = 0 и $t_1$ = 10 с.

Определить моменты остановки точки.

Определить путь, пройденный точкой за 10 с.

*Решение.*

На траектории отметим точку $O$ – начала отсчета координаты $s$ и укажем положительное направление отсчета этой координаты стрелкой ($+s$, рис. 1.10). Отметим положение точки в моменты времени $t$ = 0 и $t_1$ = 10 с. При $t$ = 0 $s_0$ = –15 см; при $t_1$ = 10 с $s_1$ = 355 см. Положение точек $M_0$ и $M_1$ показано на рис. 1.10. Проведем из точек $M_0$ и $M_1$ естественные оси координат $\tau_0, n_0, \tau_1, n_1$.

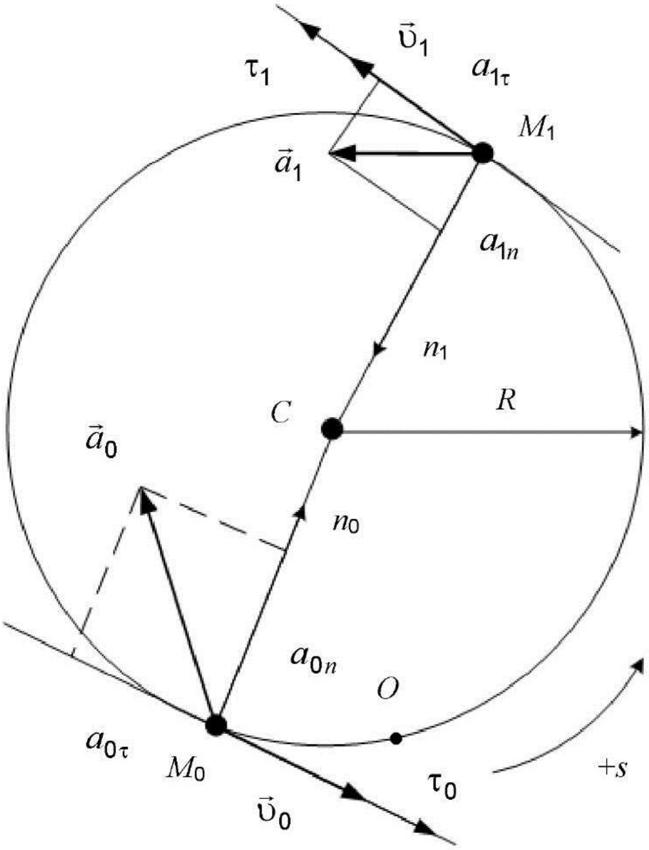


Рис. 1.10

2. Определим проекцию скорости:

$$\upsilon_\tau = 3t^2 - 45t + 162.$$

При $t$ = 0 $\upsilon_{\tau 0} = 162$ см/с и при $t_1$ = 10 с: $\upsilon_{\tau 1} = 12$ см/с.

Теперь отложим найденные проекции скорости из точек $M_0$ и $M_1$ по соответствующим касательным: $\upsilon_{\tau 0}$ по касательной $\tau_0$, $\upsilon_{\tau 1}$ по касательной $\tau_{01}$. Векторы $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}_1$ совпадают со своими проекциями $\upsilon_{\tau 0}$ и $\upsilon_{\tau 1}$.

3. Определим проекции ускорения на естественные оси координат:

$$a_\tau = \ddot{s} = 6t - 45t \text{ (см/с}^2\text{)};\quad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\left(3t^2 - 45t + 162\right)^2}{500} \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Ускорение точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

В момент времени $t = 0$: $a_{\tau 0} = -45$ см/с$^2$; $a_{n0} \approx 52{,}48$ см/с$^2$; $a \approx 69{,}3$ см/с$^2$.

При $t_1 = 10$: $a_{\tau 1} = 15\, a_{n0} \approx 52{,}48$ см/с$^2$; $a_{n1} \approx 0{,}29\, a_{n0} \approx 52{,}48$ см/с$^2$; $a \approx 15\, a_{n0} \approx 52{,}48$ см/с$^2$.

Отложим из точек $M_0$ и $M_1$ по естественным осям проекции $a_{\tau 0}$, $a_{n0}$, $a_{\tau 1}$, $a_{n1}$. Векторы $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$ изображаются диагоналями прямоугольников, построенных на векторах ускорений.

Чтобы найти моменты остановки, необходимо найти время, когда скорость точки равна нулю. Из закона движения получим:

$$\upsilon = \dot{s} = 3t^2 - 45t + 162 = 0.$$

Решив это уравнение, получим $t_1 = 6$ с, $t_2 = 9$ с.

Так как за 10 с точка сделала 2 остановки, то пройденный ею путь за 10 с найдем как сумму:

$$П = |s_1 - s_0| + |s_6 - s_1| + |s_9 - s_6| + |s_{10} - s_9|.$$

Вычислим пути $s$, подставив $t = 0$; 1; 6; 9; 10 в закон движения:

$$s_0 = -15 \text{ см};$$

$$s_1 = 25{,}5 \text{ см};$$

$$s_6 = 349{,}5 \text{ см};$$

$$s_1 = 355 \text{ см}.$$

Путь, пройденный точкой за 10 с, $П = 397$ см.

***Задача 1.7*** [4, задача 7]

По заданным уравнениям движения точки

$$x = \sqrt{3}\cos t - \sin t;\ y = \cos t - \sqrt{3}\sin t \ \ (x,\ y \text{ – м};\ t \text{ – с})$$

найти ее касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории для заданного момента времени $t_1 = 0{,}5\,\pi$ с.

*Решение.*

Из заданных уравнений движения точки найдем проекции скоростей на оси координат:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\sqrt{3}\sin t - \cos t; \qquad a_x = \ddot{x} = -\sqrt{3}\cos t + \sin t;$$

$$\upsilon_y = \dot{y} = -\sin t - \sqrt{3}\cos t; \qquad a_y = \ddot{y} = -\cos t + \sqrt{3}\sin t.$$

В момент времени $t = 0{,}5\,\pi$ с:

$$\upsilon_x = -\sqrt{3}\text{ м/с} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = 2 \text{ (м/с)};$$
$$\upsilon_y = -1\text{ м/с}$$

$$a_x = 1\text{ м/с}^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$
$$a_y = \sqrt{3}\text{ м/с}^2$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon} = -\sqrt{3} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Нормальное ускорение найдем из соотношения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 1 \text{ (м/с)}.$$

Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = 4 \text{ (м)}.$$

# 2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

## 2.1. Характеристики вращательного движения

*Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором 2 точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения* (рис. 2.1).

Законом вращательного движения называется зависимость угла поворота $\varphi$ от времени $t$:

$$\varphi = f(t). \qquad (2.1)$$

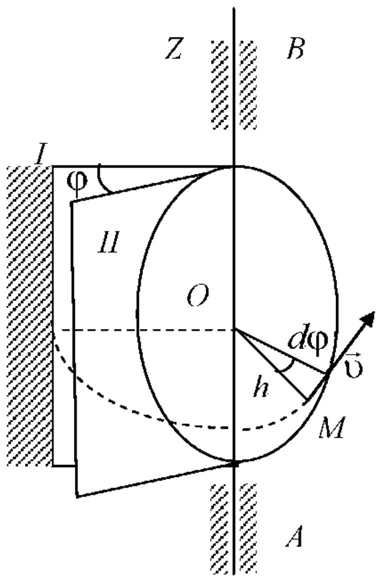


Рис. 2.1

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость $\omega$ и угловое ускорение $\varepsilon$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (2.3)$$

## 2.2. Скорость и ускорения точек при вращательном движении

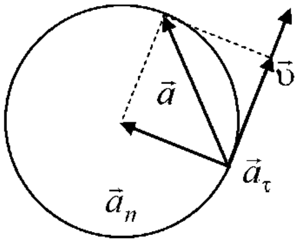

Рис. 2.2

Скорость точки $\upsilon$ определяется из соотношения

$$\upsilon = \omega R. \qquad (2.4)$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения (рис. 2.2).

Ускорения точки:

- нормальное

$$a_n = \omega^2 R; \qquad (2.5)$$

- тангенциальное

$$a_\tau = \varepsilon R. \qquad (2.6)$$

Вектор нормального ускорения направлен к центру (оси) вращения.

Вектор тангенциального ускорения направлен по касательной к траектории движения и совпадает с направлением вектора скорости при ускоренном движении и противоположен ему при замедленном движении.

Ускорение точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2.7)$$

### *Решение задач*

***Задача 2.1*** [4, задача 8]

Найти закон вращения тела вокруг оси, если известен характер изменения угла поворота $\varphi = k(t^3 + t^2)$ и угловое ускорение $\varepsilon = 32$ 1/с$^2$ для момента времени $t$ = 1 с.

*Решение*

Найдем угловую скорость вращения тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = k(3t^2 + 2t).$$

Тогда угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = k(6t + 2).$$

По условию для момента времени $t$ = 1 с

$$k(6t + 2) = 32,$$

откуда $k = 4$.

Следовательно, искомый закон вращения тела будет иметь вид:

$$\varphi = 4(t^3 + t^2).$$

***Задача 2.2*** [4, задача 9]

Колесо диаметром $D$ = 60 см вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости колеса, согласно уравнению $\varphi = \left(\cos\frac{\pi}{8}t + t\right)$ рад. Определить скорость и ускорение точки обода колеса в конце второй секунды.

*Решение*

Найдем угловую скорость вращения колеса, рад/с

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}t + 1.$$

При $t$ = 2 с угловая скорость составит:

$$\omega(2) = 1 - \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}72 \text{ (рад/с)}.$$

Скорость точки обода колеса

$$\upsilon(2) = 0{,}72 \cdot 30 = 21{,}6 \text{ см/с}.$$

Так как угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ и в конце второй секунды составит:

$$\varepsilon(2) = -\frac{\pi^2}{64} \cdot 0{,}707 = -0{,}11 \text{ рад/с}^2.$$

В этом случае тангенциальное ускорение

$$a_\tau(2) = -0{,}11 \cdot 30 = -3{,}3 \text{ см/с}^2$$

и нормальное

$$a_n(2) = \omega^2 \cdot R = 15{,}6 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

***Задача 2.3*** [4, задача 10]

Груз $P$ поднимается посредством механизма, состоящего из ременной передачи (шкивы *1* и *2*), зубчатой передачи (колеса *3* и *4*) и барабана *5* (рис. 2.3).

Определить скорость подъема груза, если шкив *1* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2$ 1/с.

*Решение*

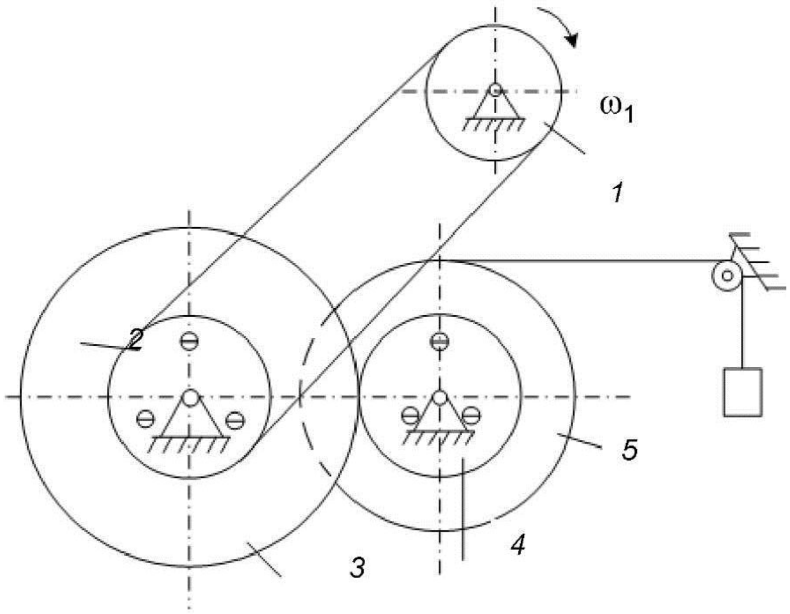


Рис. 2.3

Так как колеса *1* и *2* связаны передачей, то

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

поэтому $\omega_2 = \dfrac{\omega_1 r_1}{r_2} = 1{,}25$ (1/с).

Так как колеса *2* и *3* имеют общую ось вращения, то их угловые скорости

$$\omega_3 = \omega_2 = 1{,}25 \text{ 1/с}.$$

Колеса *3* и *4* связаны передачей, поэтому

$$\omega_3 r_3 = \omega_4 r_4,$$

тогда

$$\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = 4{,}5 \text{ (1/с)}.$$

Следовательно, скорость подъема груза составит:

$$\upsilon = \omega_4 r_5 = 45 \text{ (1/с)}.$$

# 3. КИНЕМАТИКА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

## 3.1. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении

*Плоскопараллельным движением тела называют такое движение, при котором все его точки движутся в одной плоскости.* Траекториями точек тела при плоскопараллельном движении являются плоские кривые.

Для расчета скоростей движения точек применяются следующие методы:

- аналитический;
- основанный на использовании векторного уравнения;
- основанный на использовании мгновенного центра скоростей;
- основанный на использовании теоремы о проекциях.

### 3.1.1. Аналитический метод

При использовании аналитического метода уравнения движения тела считаются известными:

$$x = x_A(t),\ y = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t). \tag{3.1}$$

Тогда координаты точки $M$ (рис. 3.1)

$$x_M = x_A + b\cos\varphi = \psi_1(t);$$
$$y_M = y_A + b\sin\varphi = \psi_2(t), \tag{3.2}$$

где $b$ – расстояние от точки $M$ до полюса $A$.

Модуль скорости точки определяется по формуле (1.7)

$$\upsilon_M = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{3.3}$$

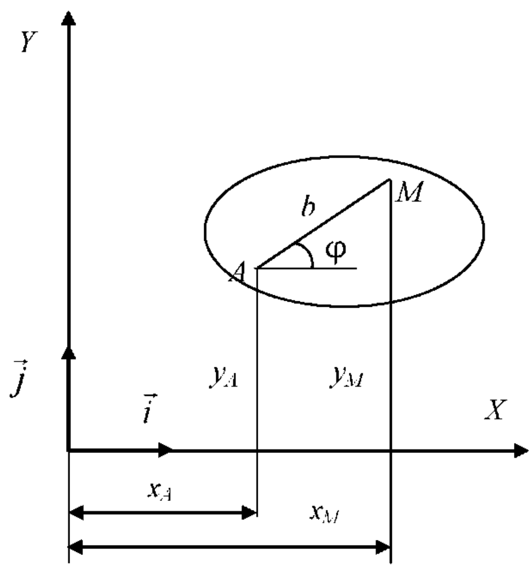


Рис. 3.1

Направление вектора $\vec{\upsilon}_M$ определяется по направляющим косинусам:

$$\cos(\vec{\upsilon}_M, \bar{\imath}) = \frac{\dot{x}_M}{\upsilon_M}\ ; \quad \cos(\vec{\upsilon}_M, \bar{j}) = \frac{\dot{y}_M}{\upsilon_M}. \tag{3.4}$$

Таким образом, задача по определению скоростей плоской фигуры сводится к решению соответствующей задачи кинематики точки.

Угловая скорость плоской фигуры определяется из соотношения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{3.5}$$

Аналитический метод решения задач рекомендуется использовать в тех случаях, когда требуется определить скорости точек для большого числа положений плоской фигуры.

### 3.1.2. Метод, основанный на использовании векторного уравнения

Известно, что при плоскопараллельном движении тела векторы скоростей точек тела не параллельны между собой, и величины скоростей различны. Метод основан на применении следующей теоремы: «Скорость какой-либо точки тела при плоскопараллельном движении равна векторной сумме скорости полюса и скорости этой точки вокруг полюса».

Уравнение, составленное в соответствии с этой теоремой, называется векторным и имеет вид:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{B/A}. \tag{3.6}$$

### *Решение задач*

Решение задачи следует начинать с изображения данного тела в положении, соответствующем данному моменту времени. За полюс принимается точка, для которой направление вектора и величина скорости известны. Затем необходимо построить параллелограмм скоростей, вектор скорости и рассчитать его величину.

***Задача 3.1*** [4, задача 11]

Центр диска радиусом $R = 25$ см начал двигаться из состояния покоя вертикально вверх с постоянным ускорением, равным $a = 10$ см/с$^2$. Одновременно диск начал вращаться вокруг $C$ в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ с$^{-1}$ (рис. 3.2). Определить в момент времени $t = 5$ с скорости точек $A$ и $B$, если $\varphi = 60°$.

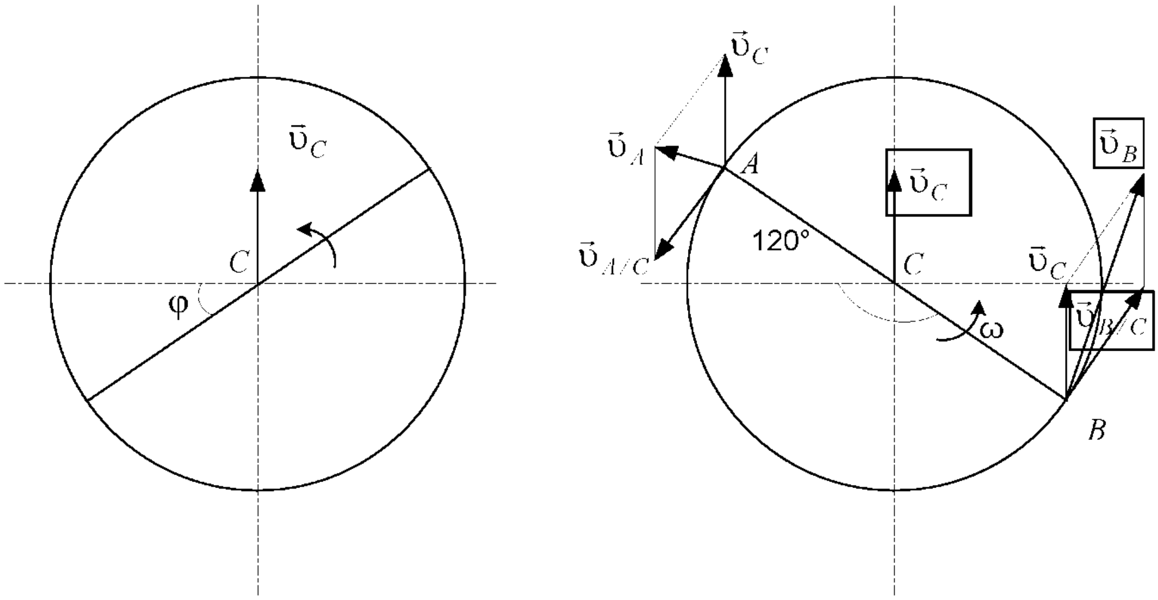


Рис. 3.2

*Решение*

На расчетной схеме изобразим стержень $AB$ в положении, соответствующем $\varphi = 60°$. Выберем за полюс точку $C$, так как по условию задачи определен закон ее движения и известна величина ускорения. Скорость полюса при $t = 5$ с составит:

$$\upsilon_C = at = 10 \cdot 5 = 50 \text{ см/с}.$$

Запишем векторные уравнения для концов $A$ и $B$ стержня:

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{A/C}, \quad \vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{B/C}.$$

Векторы скоростей $\vec{\upsilon}_{A/C}$ и $\vec{\upsilon}_{B/C}$ направлены перпендикулярно стержню $AB$ в сторону вращения, их модули определяются по формуле

$$\upsilon_{A/C} = \upsilon_{B/C} = \omega \cdot \frac{AB}{2} = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (см/с)}.$$

Построим на векторах $\vec{\upsilon}_C, \vec{\upsilon}_{A/C}$ и $\vec{\upsilon}_C, \vec{\upsilon}_{B/C}$ параллелограммы скоростей и вычислим модули скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ по теореме косинусов:

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_C{}^2 + \upsilon_{A/C}{}^2 + 2\upsilon_C \upsilon_{A/C} \cos 120^\circ} \approx 50{,}0 \text{ (см/с) и}$$

$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon_C{}^2 + \upsilon_{B/C}{}^2 + 2\upsilon_C \upsilon_{B/C} \cos 30^\circ} \approx 86{,}6 \text{ (см/с).}$$

### 3.1.3. Метод, основанный на использовании мгновенного центра скоростей

*Мгновенный центр скоростей (МЦС) есть точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.* МЦС занимает такое положение, при котором все точки тела совершают вокруг него вращательное движение. Таким образом, МЦС является мгновенным центром вращения.

Так как МЦС является центром вращения, то для точек плоской фигуры будут справедливы соотношения:

$$\upsilon_A = \omega \cdot AP \text{ и } \upsilon_A \perp AP;$$
$$\upsilon_B = \omega \cdot BP \text{ и } \upsilon_B \perp BP;$$
$$\upsilon_C = \omega \cdot CP \text{ и } \upsilon_C \perp CP,$$

где $\omega$ – угловая скорость тела

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP} = \frac{\upsilon_C}{CP}. \tag{3.7}$$

Из этих соотношений следует, что большей скоростью обладает точка, наиболее удаленная от МЦС.

Таким образом, для того чтобы определить скорости точек тела, совершающего плоскопараллельное движение, необходимо:

а) знать величину скорости какой-либо точки тела и расстояния от точек тела до МЦС:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP}; \qquad \upsilon_B = \omega \cdot BP;$$

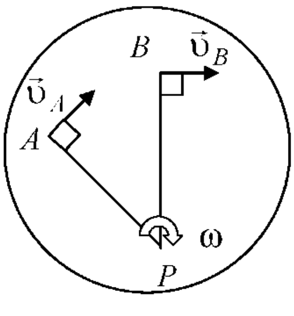

Рис. 3.3

б) знать величину угловой скорости тела и расстояния от точек тела до МЦС:

$$\upsilon_A = \omega \cdot AP; \qquad \upsilon_B = \omega \cdot BP.$$

Для определения положения МЦС необходимо знать направления векторов скоростей каких-либо двух точек плоской фигуры. МЦС будет находиться на пересечении перпендикуляров, восстановленных к этим точкам к направлениям векторов скоростей (перпендикуляры $AP$ и $BP$, рис. 3.3).

*Частные случаи определения положения МЦС.*

В случае качения тела по неподвижной поверхности точка соприкосновения тела с этой поверхностью является МЦС, обозначенным на рис. 3.4 точкой $P$.

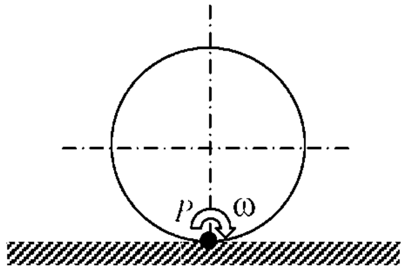


Рис. 3.4

Если векторы скоростей точек $A$ и $B$ параллельны, а точки лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то МЦС находится на пересечении этого перпендикуляра и прямой, проведенной через концы векторов этих точек (рис. 3.5).

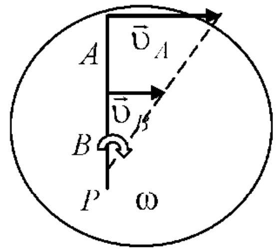


Рис. 3.5

Если векторы скоростей точек $A$ и $B$ параллельны, а точки не лежат на общем перпендикуляре к скоростям, то МЦС находится в бесконечности. В этом случае тело совершает мгновенное поступательное движение, а его угловая скорость равна нулю.

*Последовательность определения скоростей точек плоской фигуры с использованием МЦС*

1. Изобразить на чертеже тело в заданном положении и определить положение МЦС.

2. Указать направления векторов скоростей точек тела и записать формулы для вычисления модулей скоростей.

3. Определить угловую скорость тела.

4. Вычислить искомые модули скоростей точек.

## Решение задач

***Задача 3.2*** [4, задача 12]

Стержень $AB$ длиной 60 см скользит концом $A$ вдоль прямой, опираясь в точке $C$ на неподвижную опору. Определить угловую скорость стержня, а также скорости точек $B$ и $C$, если скорость точки $A$ $\upsilon_A$ = 10 см/с (рис. 3.6).

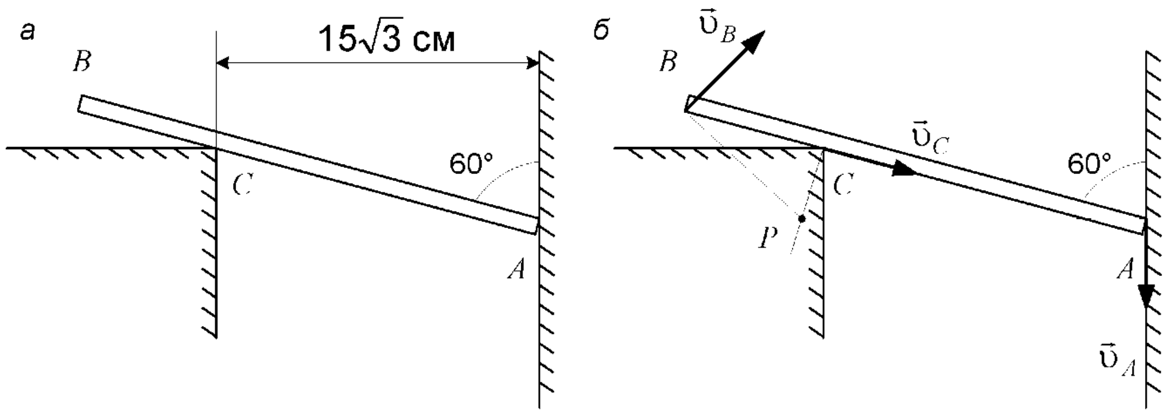


Рис. 3.6

*Решение*

1. Покажем направления векторов скоростей точек $A$ и $C$ стержня. Точка $A$ опирается на неподвижную опору и при движении стержня будет скользить вдоль нее вниз. Точка $C$ опирается на неподвижную опору и будет двигаться вдоль стержня $AB$. Так как направления векторов скоростей двух точек стержня известны, то определим положение МЦС (точка $P$).

2. Определим угловую скорость стержня $AB$:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} \approx 0{,}288 \text{ (1/с)}.$$

3. Из прямоугольного треугольника $APC$ найдем длины сторон:

$$AC = 30 \text{ см}, \ AP = BP = 20\sqrt{3} \text{ см}, \ CP = 10\sqrt{3} \text{ см}.$$

4. Вычислим скорости точек $B$ и $C$:

$$\upsilon_B = \omega \cdot BP = 0{,}288 \cdot 20\sqrt{3} = 10 \text{ (см/с)};$$

$$\upsilon_C = \omega \cdot CP = 0{,}288 \cdot 10\sqrt{3} = 5 \text{ (см/с)}.$$

***Задача 3.3*** [4, задача 13]

Колесо радиусом $r$ = 6 см катится без скольжения по горизонтальной прямой $MN$, скорость его центра постоянна $\upsilon_A$ = 5 м/с. В точке $A$ с колесом шарнирно связан стержень $AB$ длиной 20 см, проходящий через качающуюся муфту $C$. Для момента времени, определяемого углом $\varphi$ = 60°, найти скорости точек $B$ и $C$ стержня и скорость точки $D$ обода колеса, расположенной на прямой $AB$ (рис. 3.7).

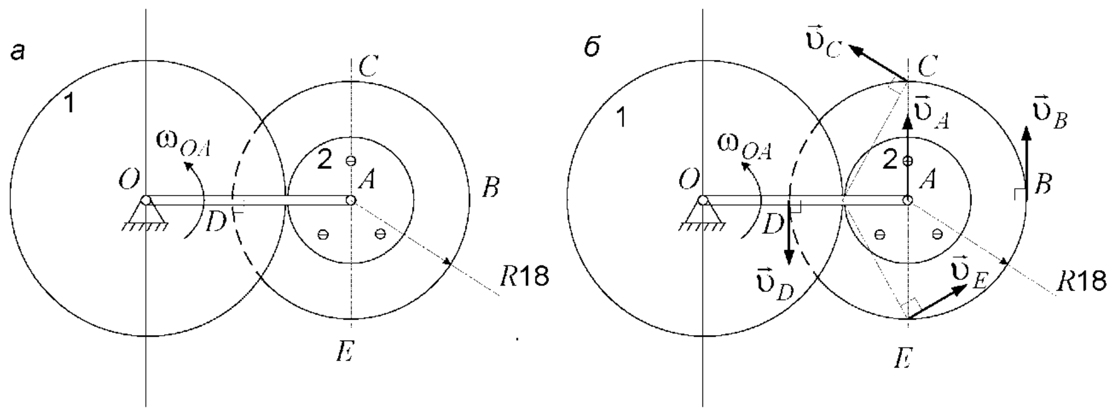


Рис. 3.7

*Решение*

Механизм состоит из колеса и связанного с ним стержня. Каждое звено совершает плоскопараллельное движение и имеет мгновенный центр скоростей.

1. Рассмотрим движение стержня $AB$. Вектор скорости точки $A$ $\upsilon_A$ направлен параллельно горизонтальной поверхности. Из заданного положения точка $C$ движется вдоль стержня $AB$. Поэтому МЦС стержня (точка $P_1$) определяется как точка пересечения перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_C$. Вектор скорости $\vec{\upsilon}_B$ будет направлен перпендикулярно отрезку РВ. Запишем соотношения для определения скоростей точек $\upsilon_B$ и $\upsilon_C$

$$\upsilon_B = \omega_{AB}|BP_1|;$$
$$\upsilon_C = \omega_{AB}|CP_1|.$$

Угловую скорость найдем из соотношения: $\omega_{AB} = \dfrac{\upsilon_A}{AP_1}$.

Длину отрезка $AP_1$ найдем из треугольника $\Delta\, AP_1C$ ($\hat{C} = 90°$):

$$|AP_1| = \frac{AC}{\cos 30°},$$

а длину отрезка $AC$ – из треугольника $\Delta\, AP_2C$ ($\hat{P}_2 = 90°$):

$$|AC| = \frac{AP_2}{\sin 30°} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ (см)}.$$

Тогда

$$|AP_1| = \frac{12}{\cos 30°} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Угловая скорость стержня $AB$ равна:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP_1} \approx 0{,}36 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Из треугольника $\Delta\, AP_1C$ ($\hat{C} = 90°$):

$$|CP_1| = |AP_1|\cos 30° = 12 \text{ (см)}.$$

Из треугольника $\Delta\, BP_1C$ ($\hat{C} = 90°$):

$$|BP_1| = \sqrt{|P_1C|^2 + |BC|^2} \approx 14{,}4 \text{ (см)}.$$

Определим скорости точек $B$ и $C$:

$$\upsilon_B = \omega_{AB}|BP_1| \approx 5{,}19 \text{ (см/с)};$$
$$\upsilon_C = \omega_{AB}|CP_1| \approx 4{,}32 \text{ (см/с)}.$$

2. Скорость точки $D$ определим из рассмотрения движения колеса.

Известно, что при качении колеса МЦС находится в точке касания колеса с поверхностью (точка $P_2$).

Тогда скорость точки $D$ найдем из соотношения:

$$\upsilon_D = \omega_k \left| DP_2 \right|.$$

Угловая скорость колеса равна:

$$\omega_k = \frac{\upsilon_A}{r} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83 \ (\text{с}^{-1}).$$

Длину отрезка $P_2D$ определим из $\Delta\, P_2AD$ ($AP_2 = AD = r$):

$$\left| P_2D \right| = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \ (\text{см}).$$

Следовательно,

$$\upsilon_D = \frac{5}{6} \cdot 6\sqrt{3} \approx 8{,}66 \ (\text{см}).$$

***Задача 3.4*** [4, задача 14]

Кривошип $OA$ кривошипно-шатунного механизма $OAB$ вращается с угловой скоростью $\omega_{OA}$. К стержню $OA$ прикреплен стержень $CO$ длиной 30 см, конец $D$ которого скользит по вертикальной направляющей $OD$.

Определить скорости точек $B$, $D$, $E$ и $F$ ($BE = EA$ и $CF = FD$) в положении механизма, указанном на чертеже ($\varphi = 60°$) (рис. 3.8).

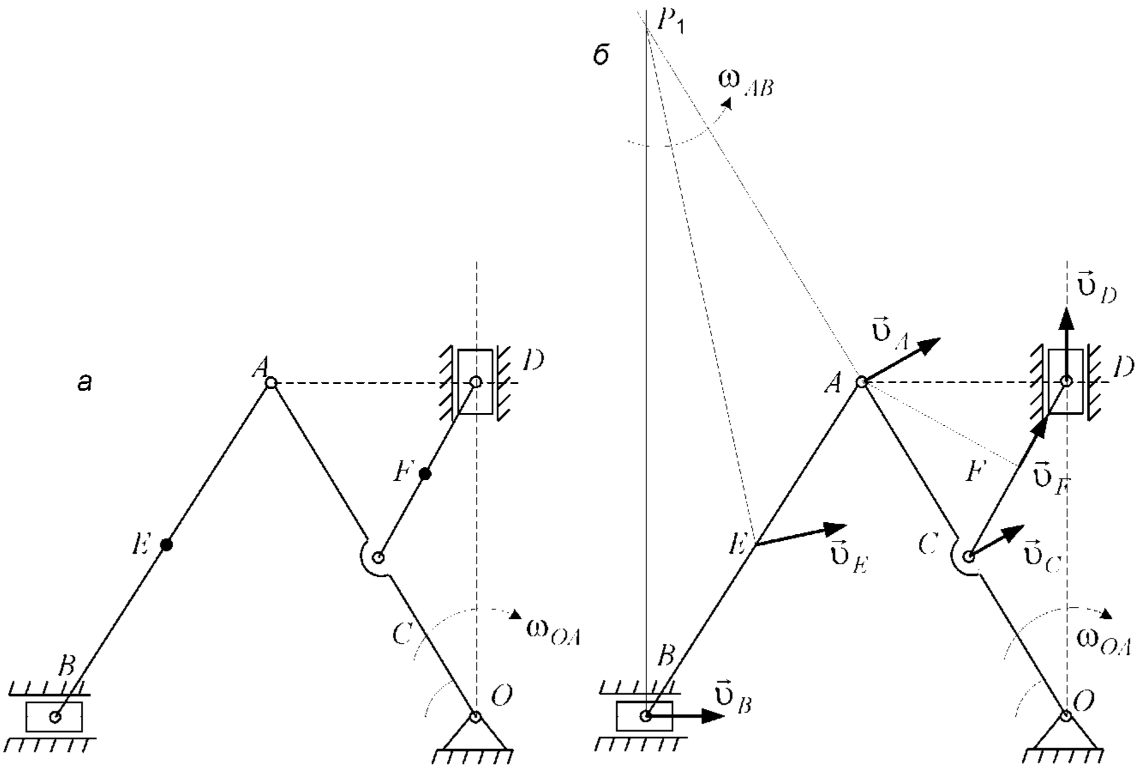


Рис. 3.8

*Решение*

1. Изобразим механизм в положении, соответствующем условию задачи.

Покажем на схеме направления векторов скоростей точек $A$ и $C$. Так как траекториями их движения являются окружности с центром в точке $O$, то векторы скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_C$ направлены по касательным к этим окружностям.

Данное движение кривошипа приведет к движению других звеньев механизма. Точки $B$ и $D$ будут двигаться вдоль своих направляющих (горизонтальной и вертикальной соответственно).

Так как векторы скоростей точек $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ непараллельны, то звено $AB$ совершает плоскопараллельное движение и имеет мгновенный центр скоростей $P_1$, построенный на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$.

Найдем скорости точек $B$ и $E$ стержня $AB$:

$$\upsilon_B = \omega_{AB}|BP_1|;$$

$$\upsilon_E = \omega_{AB}|EP_1|.$$

Угловую скорость стержня $AB$ найдем из соотношения:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{|AP_1|} = \frac{\omega_{OA}|OA|}{|AP_1|} = \frac{2\cdot 60}{60} = 2 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Длину отрезка $BP_1$ найдем из треугольника $\Delta\, OBP_1$ ($\hat{B} = 90°$):

$$|BP_1| = \frac{|OB|}{tg30^\circ} = 60\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Длину отрезка $EP_1$ найдем из треугольника $EBP_1$ по теореме косинусов:

$$|EP_1| = \sqrt{|BE|^2 + |P_1B|^2 - 2|BE||P_1B|\cos 30^\circ} = 30\sqrt{7} \text{ (см)}.$$

Вычислим скорости точек $B$ и $E$:

$$\upsilon_B = \omega_{AB}|BP_1| = 2\cdot 60\sqrt{3} \approx 208 \text{ (см/с)}.$$

$$\upsilon_E = \omega_{AB}|EP_1| = 2\cdot 30\sqrt{7} \approx 159 \text{ (см/с)}.$$

2. Определим скорости точек $D$ и $F$ звена $CD$.

3. Мгновенным центром скоростей звена $CD$ является точка $A$.

Угловая скорость

$$\omega_{CD} = \frac{\upsilon_C}{|AC|} = \frac{\omega_{OA}|OC|}{|AC|} = \frac{2\cdot 30}{30} = 2 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Тогда

$$\upsilon_D = \omega_{CD}|AD| = 2\cdot 30 = 60 \text{ (см/с)};$$

$$\upsilon_F = \omega_{AB}|AF| = 2\cdot 15\sqrt{3} \approx 52 \text{ (см/с)}.$$

***Задача 3.5*** [4, задача 15]

Планетарный механизм состоит из кривошипа $OA$ длиной 10 см, приводящего в движение шатун $AB$ длиной 100 см, стержня $BC$ и шестерни *1* радиусом $R$ = 25 см; шатун $AB$ оканчивается шестерней *2* радиусом $r$ = 10 см, наглухо с ним связанной. Определить угловую скорость стержня $BC$, шатуна $AB$ и шестерни *1* в положении механизма, указанном на чертеже, если угловая скорость кривошипа $OA$ равна 2 $с^{-1}$ (рис. 3.9).

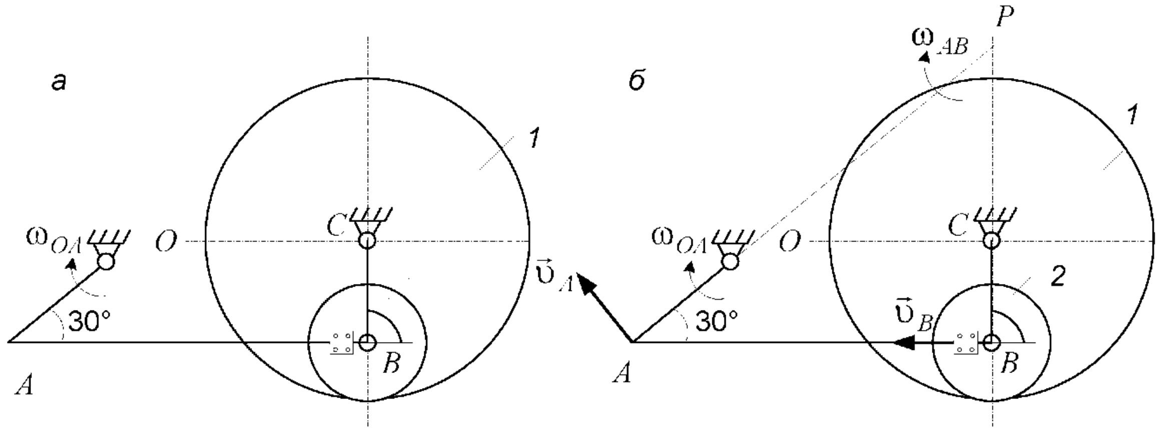


Рис. 3.9

*Решение*

1. Так как кривошип $OA$ совершает вращательное движение вокруг точки $A$, вектор $\vec{\upsilon}_A$ направлен по касательной к траектории. Вектор скорости $\vec{\upsilon}_B$ направлен горизонтально влево. Тогда шатун $AB$ совершает плоскопараллельное движение, а точка пересечения перпендикуляров векторов скоростей $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ (точка $P$) является мгновенным центром скоростей.

Пользуясь тем, что угловая скорость $\omega_{OA}$ и длина кривошипа $OA$ известны из условия задачи, найдем скорость точки $A$:

$$\upsilon_A = \omega_{OA}|OA| = 2 \cdot 10 = 20 \text{ (см/с)}.$$

Определим угловую скорость кривошипа $AB$ (длину отрезка $AP$ найдем из треугольника $APB$):

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{|AP|} = \frac{20}{\frac{100}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Тогда скорость точки $B$

$$\upsilon_B = \omega_{AB}|BP| = 10 \text{ (см/с)}.$$

2. Найдем угловые скорости $\omega_{BC}$ и $\omega_1$.

Точка $B$ совершает вращательное движение вокруг точки $C$. Длина отрезка $BC$ равна разности радиусов:

$$BC = R - r = 25 - 10 = 15 \text{ (см)}.$$

Тогда $\omega_{AB} = \dfrac{\upsilon_B}{|BC|} = \dfrac{10}{15} \approx 0{,}67 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$

Угловую скорость $\omega_1$ найдем из соотношения:

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_B}{R} = 0{,}4 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

## 3.2. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении

Определение ускорений можно выполнить одним из следующих методов:

- аналитическим;
- основанным на использовании векторного уравнения;
- основанным на использовании мгновенного центра ускорений.

### 3.2.1. Аналитический метод

При использовании аналитического метода уравнения движения плоской фигуры считаются известными. Проекции ускорения на координатные оси

$$a_x = \frac{d^2x}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt} = \frac{d\upsilon_y}{dt}; \tag{3.8}$$

модуль ускорения $a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$.

Направление ускорения определяется направляющими косинусами:

$$\cos(\vec{a};\vec{i}\,) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a};\vec{j}\,) = \frac{a_y}{a}. \tag{3.9}$$

Если задана функция $\varphi = \varphi(t)$, то угловое ускорение тела определяется из соотношения:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{3.10}$$

3.2.2. Метод, основанный на использовании векторного уравнения

Плоскопараллельное движение представляет совокупность поступательного движения точки (полюса) и вращательного движения вокруг полюса:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}. \tag{3.11}$$

Таким образом, *ускорение какой-либо точки плоской фигуры при плоскопараллельном движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения точки при вращении фигуры вокруг этого полюса.*

Нормальная составляющая при вращательном движении направлена к полюсу и имеет величину:

$$a_n = \omega^2 \rho, \tag{3.12}$$

где $\rho$ – радиус кривизны траектории; $\omega$ – мгновенная угловая скорость плоской фигуры.

Касательная составляющая ускорения направлена перпендикулярно нормальной в сторону углового вращения и имеет величину:

$$a_\tau = \varepsilon \rho, \tag{3.13}$$

где $\varepsilon$ – мгновенное угловое ускорение плоской фигуры.

Следует помнить, что при ускоренном вращении плоской фигуры вокруг полюса направление дуговой стрелки углового ускорения $\varepsilon$ совпадает с направлением вращения, а при замедленном вращении – противоположно ему.

С помощью уравнения (3.8) задача определения ускорений решается для заданного момента времени. При решении задачи векторное уравнение проектируется на оси координат. Результатом проектирования является система из двух уравнений. Чтобы полученная система была разрешима, она должна содержать не более двух неизвестных величин.

Следует отметить, что угловую скорость $\omega$ необходимо определить заранее при решении задачи о скоростях.

В соответствии с вышеизложенным рекомендуется следующий порядок решения задачи по определению ускорений.

1. Изобразить на чертеже положение тела в заданный момент времени, выбрать полюс и отметить точку, ускорение которой требуется определить.
2. Записать для этой точки векторное уравнение (3.8).
3. Показать на чертеже все векторы, входящие в уравнение (3.8). Если направление искомого вектора ускорения неизвестно, то его следует представить составляющими по направлению выбранных координатных осей.
4. Убедиться, что составленная система уравнений содержит не более двух неизвестных величин.
5. Спроектировать уравнения на выбранные оси координат.
6. Решить составленную систему уравнений, определить искомые величины.

### *Решение задач*

***Задача 3.6*** [4, задача 16]

Прямоугольная пластина размером 2×4 м$^2$ движется в плоскости чертежа так, что ускорение точки $O$ $a_O = 5$ м/с$^2$, угловая скорость $\omega = \sqrt{3}$ с$^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4$ с$^{-2}$. Найти ускорение вершин $A$ и $B$ пластинки (рис. 3.10).

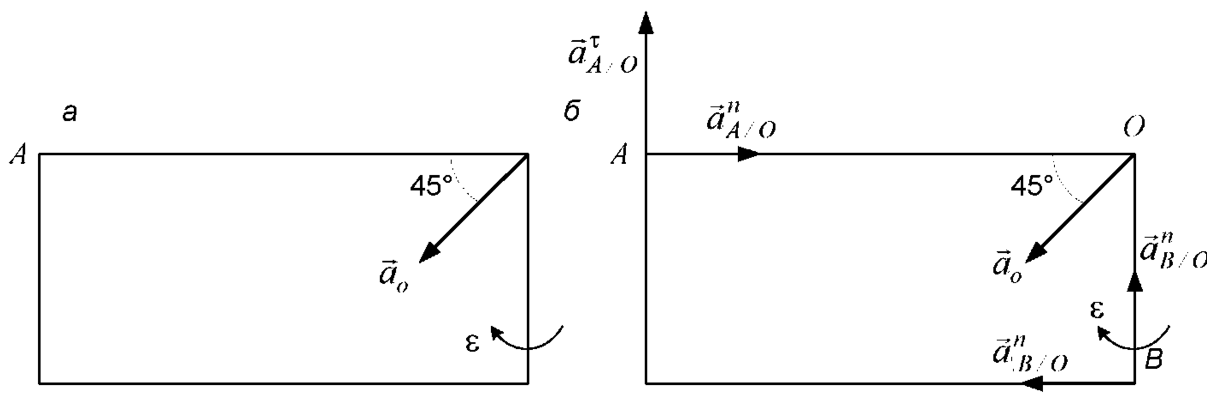


Рис. 3.10

*Решение*

В качестве метода решения задачи используем метод векторного уравнения. Выберем за полюс точку $O$, так как направление вектора ускорения и его модуль известны из условия задачи.

1. Определим ускорение точки $A$.

Составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^{\text{ос}}_{A/O} + \vec{a}^{\text{вр}}_{A/O}.$$

Покажем на чертеже (рис. 3.10) составляющие ускорения точки $A$ $\vec{a}^{\text{ос}}_{A/O}$ и $\vec{a}^{\text{вр}}_{A/O}$ и вычислим их модули: $\left|\vec{a}^{\text{ос}}_{A/O}\right| = \omega^2|AO|$, $\left|\vec{a}^{\text{вр}}_{A/O}\right| = \varepsilon|AO|$.

Спроектируем векторное уравнение на оси координат:

$$Ox: a_{A_x} = a^{oc}_{A/O} - a_O \cos 45^\circ;$$

$$Oy: a_{A_y} = a^{вр}_{A/O} - a_O \sin 45^\circ.$$

Подставив данные из условия задачи, получим:

$$a_{A_x} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 8{,}48 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A_y} = 4 \cdot 4 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 12{,}48 \text{ м/с}^2.$$

Вычислим ускорение точки $A$:

$$a_A = \sqrt{a^2_{A_x} + a^2_{A_y}} \approx 15{,}0 \text{ (м/с}^2).$$

2. Определим ускорение точки $B$.

Составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}^{\text{ос}}_{B/O} + \vec{a}^{\text{вр}}_{B/O}.$$

Покажем на чертеже (рис. 3.10) составляющие ускорения точки $B$ $\vec{a}^{\text{ос}}_{B/O}$ и $\vec{a}^{\text{вр}}_{B/O}$ и вычислим их модули: $\left|\vec{a}^{\text{ос}}_{B/O}\right| = \omega^2|BO|$, $\left|\vec{a}^{\text{вр}}_{B/O}\right| = \varepsilon|BO|$.

Спроектируем векторное уравнение на оси координат:

$$Ox: a_{B_x} = -a^{вр}_{B/O} - a_O \cos 45^\circ;$$

$$Oy: a_{B_y} = a^{oc}_{B/O} - a_O \sin 45^\circ.$$

Подставив данные из условия задачи, получим:

$$a_{B_x} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4{,}46 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B_y} = -2 \cdot 3 - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -9{,}54 \text{ м/с}^2.$$

Вычислим ускорение точки $B$:

$$a_B = \sqrt{a^2_{B_x} + a^2_{B_y}} \approx 11{,}8 \text{ (м/с}^2).$$

***Задача 3.7*** [4, задача 17]

Колесо радиусом $r$ = 12 см катится без скольжения внутри подвижной опорной цилиндрической поверхности радиусом $R$ = 48 см. Закон изменения скорости центра колеса имеет вид: $\upsilon_C = 36t$. Определить для момента времени $t$ = 1 с ускорения точек $A$ и $B$ (рис. 3.11).

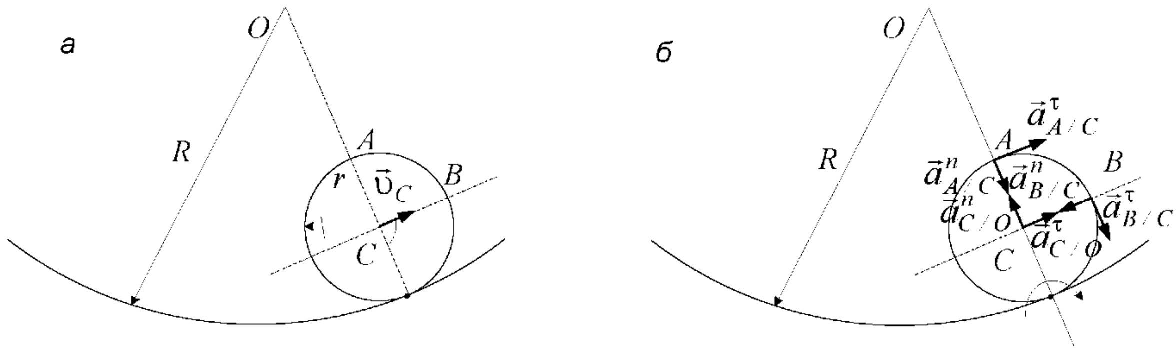


Рис. 3.11

*Решение*

1. Для определения ускорения точки $A$ составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{A/C} + \vec{a}_{C/O}.$$

Покажем на чертеже (рис. 3.11) составляющие ускорения и определим их модули:

$$\left|\vec{a}^{вр}_{A/C}\right| = \varepsilon_{A/C}|AC| = 3 \cdot 12 = 36 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{ос}_{A/C}\right| = \omega^2_{A/C}|AC| = \frac{\upsilon^2}{|AC|} = \frac{36^2}{12} = 108 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{вр}_{C/O}\right| = \varepsilon_{C/O}|OC| = 1 \cdot 36 = 36 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{ос}_{C/O}\right| = \omega^2_{C/O}|OC| = \frac{\upsilon^2}{|OC|} = 36 \ (\text{см/с}^2).$$

Вычислим $\varepsilon_{A/C}$, $\omega_{A/C}$, $\varepsilon_{C/O}$, $\omega_{C/O}$ в момент времени $t$ = 1 с:

$$\omega_{A/C} = \frac{\upsilon_C}{r} = \frac{36 \cdot 1}{12} = 3 \ (\text{с}^{-1});$$

$$\varepsilon_{A/C} = \frac{d\omega_{A/C}}{dt} = 3 \ (\text{с}^{-2});$$

$$\omega_{C/O} = \frac{\upsilon_C}{R-r} = \frac{36}{48-12} = 1 \ (\text{с}^{-1});$$

$$\varepsilon_{C/O} = \frac{d\omega_{C/O}}{dt} = 1 \ (\text{с}^{-2}).$$

Составим уравнения проекций для ускорений точки $A$:

$$Ox\text{:} \ a_{Ax} = a^{\tau}_{C/O} + a^{\tau}_{A/C} = 72 \ (\text{см/с}^2);$$

$$Oy\text{:} \ a_{Ay} = a^{n}_{C/O} - a^{n}_{A/C} = 72 \ (\text{см/с}^2);$$

$$a_A = \sqrt{a^2_{Ax} + a^2_{Ay}} \approx 108 \ (\text{см/с}^2).$$

2. Для определения ускорения точки $B$ составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B/C} + \vec{a}_{C/O}.$$

Покажем на чертеже составляющие ускорения и определим их модули:

$$\left|\vec{a}^{\,вр}_{B/C}\right| = \varepsilon_{B/C}\left|BC\right| = 3 \cdot 12 = 36 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{\,ос}_{B/C}\right| = \omega^2_{B/C}\left|BC\right| = \frac{\upsilon^2}{\left|AC\right|} = \frac{36^2}{12} = 108 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{\,вр}_{C/O}\right| = \varepsilon_{C/O}\left|OC\right| = 1 \cdot 36 = 36 \ (\text{см/с}^2);$$

$$\left|\vec{a}^{\,ос}_{C/O}\right| = \omega^2_{C/O}\left|OC\right| = \frac{\upsilon^2}{\left|OC\right|} = 36 \ (\text{см/с}^2).$$

Вычислим $\varepsilon_{B/C}$, $\omega_{B/C}$, $\varepsilon_{C/O}$, $\omega_{C/O}$ в момент времени $t$ = 1 с:

$$\omega_{B/C} = \frac{\upsilon_C}{r} = \frac{36 \cdot 1}{12} = 3 \ (\text{с}^{-1});$$

$$\varepsilon_{B/C} = \frac{d\omega_{A/C}}{dt} = 3 \ (\text{с}^{-2});$$

$$\omega_{C/O} = \frac{\upsilon_C}{R-r} = \frac{36}{48-12} = 1 \ (\text{с}^{-1});$$

$$\varepsilon_{C/O} = \frac{d\omega_{C/O}}{dt} = 1 \ (\text{с}^{-2}).$$

Составим уравнения проекций для ускорений точки $B$:

$$Ox\text{:} \ a_{Bx} = a^{\tau}_{C/O} - a^{\tau}_{B/C} = 0;$$

$$Oy\colon\ a_{By} = a^{n}_{C/O} - a^{\tau}_{B/C} = -72 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} = 72 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

***Задача 3.8*** [4, задача 18]

Стержень $AB$ длиной $\ell$ = 60 см. Скорость и ускорение точки $B$ равны соответственно: $\upsilon_B = 60\sqrt{3}$ см/с, $a_B = 60$ см/с². Заданы значения углов: $\alpha = 90^\circ, \varphi = 30^\circ$ (рис. 3.12). Для заданного положения стержня определить его угловое ускорение и ускорение точки $A$.

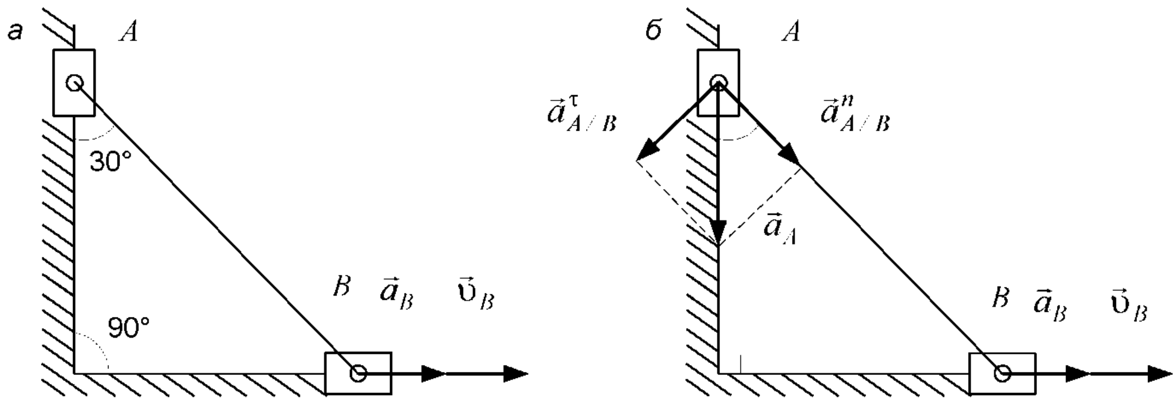


Рис. 3.12

*Решение*

1. Для определения ускорения точки $A$ составим векторное уравнение:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B},$$

где $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}^{\text{ос}}_{A/B} + \vec{a}^{\text{вр}}_{A/B}$.

Покажем на чертеже направления всех векторов ускорений (рис. 3.12, *б*).

2. Определим величину угловой скорости стержня $AB$:

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_B}{|PB|} = \frac{60\sqrt{3}\cdot 2}{60\sqrt{3}} = 2 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

3. Спроектируем векторы всех ускорений на оси при условии, что вектор $\vec{a}_A$ направлен в сторону, противоположную истинной. Это означает, что механизм находится в равновесии:

$$Ox: a_B + a^{oc}_{A/B}\sin 30^\circ - a^{вр}_{A/B}\sin 60^\circ = 0; \qquad (а)$$

$$Oy: a_A - a^{oc}_{A/B}\cos 30^\circ - a^{вр}_{A/B}\cos 60^\circ = 0. \qquad (б)$$

Выразим из уравнения (а) $a^{вр}_{A/B}$ и вычислим угловое ускорение $\varepsilon_{A/B}$:

$$\varepsilon_{A/B} = 2\sqrt{3} \text{ 1/с}^2.$$

Подставим значение углового ускорения в (б) и определим $a_A$:

$$a_A = 180\sqrt{3} \text{ м/с}^2.$$

### 3.2.3. Метод, основанный на использовании мгновенного центра ускорений

При движении плоской фигуры существует точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений (МЦУ).

*Определение положения МЦУ*

1. Определить величину угла $\mu$ из формулы: $\mathrm{tg}\mu = \dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$.

2. Из точки $A$ под углом $\mu$ к вектору $\vec{a}$ следует провести прямую:

а) в сторону вращения фигуры, если вращение является ускоренным;

б) против вращения, если оно является замедленным.

3. Отложить из точки $A$ вдоль прямой отрезок $AQ$, длина которого

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

В этом случае $Q$ – мгновенный центр ускорения плоской фигуры.

Ускорения всех точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений. Следовательно, ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений.

## *Решение задач*

### *Задача 3.9*

Прямоугольник, составленный из двух квадратов со стороной 1 м каждый, движется плоскопараллельно. В данный момент времени известны ускорения двух его точек $A$ и $B$: $a_A = 2$ м/с$^2$; $a_B = 2\sqrt{2}$ м/с$^2$. Определить положения точки $C$ и мгновенного центра ускорений $Q$ прямоугольника (рис. 3.13).

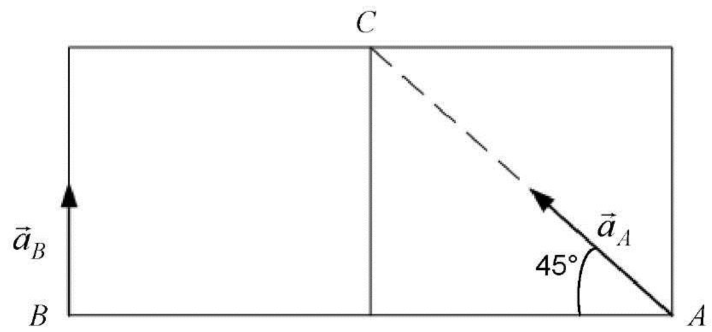


Рис. 3.13

*Решение.*

1. Примем за полюс точку $A$. Покажем все векторы ускорений на расчетной схеме и составим уравнения проекций ускорений на оси $Ox$ и $Oy$:

$$Ox: a_{B/A}^n = a_A \sin 45^\circ; \quad \text{(а)}$$

$$Oy: a_B = a_A \cos 45^\circ + a_{B/A}^\tau. \quad \text{(б)}$$

Вычислим угловые скорость и ускорение, учитывая, что

$$a_{B/A}^n = \omega^2 |AB|,\ a_{B/A}^\tau = \varepsilon |AB| \text{ и } |AB| = 2.$$

Из уравнения (а):

$$\omega^2 = \frac{a_A \sin 45^\circ}{AB} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ (1/\text{с}^2),$$

из (б):

$$\varepsilon = \frac{a_B - a_A \cos 45^\circ}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ (1/\text{с}^2).$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

2. Определим положение мгновенного центра ускорений $Q$.

Длины отрезков $AQ$ и $BQ$ соответственно составят:

$$|AQ| = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2}{1} = 2(\text{м}),\ |BQ| = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}(\text{м}) .$$

Мгновенный центр ускорений (точка $Q$) находится на пересечении дуг окружностей, проведенных из точек $A$ и $B$.

Длина отрезка $CQ$ равна $\sqrt{2}$ м. Следовательно, ускорение точки $C$ составит:

$$a_C = |CQ|\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{2}\ (\text{м/с}^2).$$

# 4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

## 4.1. Основные понятия и определения

Виды движений, рассмотренные ранее, совершаются в заданной системе отсчета. Для решения ряда задач механики необходимо рассматривать движения точки или тела, происходящие одновременно по отношению к двум системам отсчета. Движение, совершаемое при этом точкой или телом, называется *сложным* (рис. 4.1).

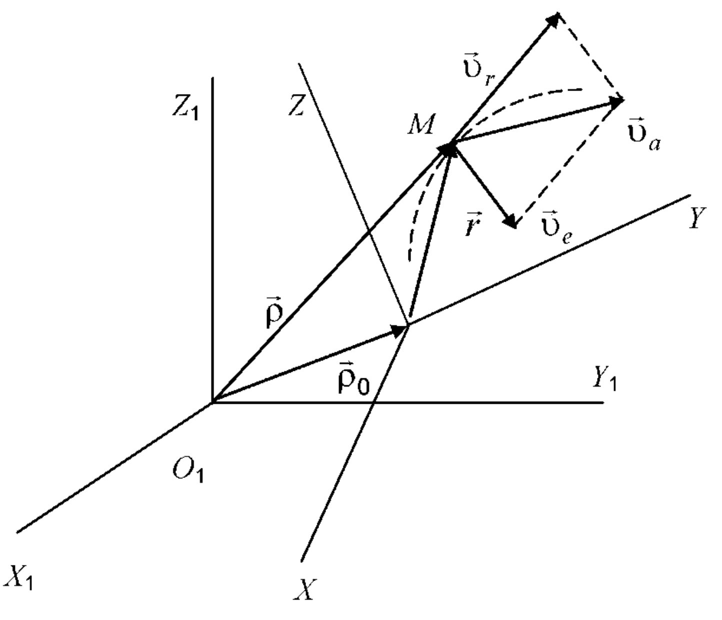


Рис. 4.1

Рассмотрим точку $M$, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая движется относительно другой системы отсчета $Ox_1y_1z_1$, являющейся основной или условно неподвижной.

Введем следующие определения.

1. Движение, совершаемое точкой $M$ по отношению к подвижной системе отсчета ($Oxyz$), называется *относительным* (такое движение будет видеть наблюдатель, связанный с этими осями и перемещающийся вместе с ними. Траектория, описываемая точкой или телом, называется *относительной траекторией*. Скорость точки называется *относительной скоростью*, а ускорение – *относительным ускорением*.

2. Движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе называется *переносным движением*. Скорость этого движения называется *переносной скоростью*, а ускорение – *переносным ускорением*.

3. Движение, совершаемое точкой $M$ по отношению к неподвижной системе отсчета ($Ox_1y_1z_1$), называется *абсолютным* или *сложным*.

Траектория этого движения, скорость и ускорение называются *абсолютными*.

Важной операцией исследования сложного движения является определение абсолютного, относительного и переносного движения для каждого конкретного случая движения точки. Анализ сложного движения точки или тела следует выполнить в соответствии с приведенными выше определениями *абсолютного, относительного* и *переносного* движений.

### 4.2. Определение скоростей точки в сложном движении

Связь между скоростями точки в сложном движении определяется теоремой о сложении скоростей: *в сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:*

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_{отн} + \vec{\upsilon}_{пер}. \tag{4.1}$$

Приведенное векторное соотношение представляет операцию сложения векторов, проведенных из одной точки, в результате которой вектор абсолютной скорости $\vec{\upsilon}_a$ будет направлен вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах относительной $\vec{\upsilon}_{отн}$ и переносной $\vec{\upsilon}_{пер}$ скоростей.

Для решения задачи определения скоростей точки в сложном движении необходимо правильно построить параллелограмм скоростей. Для этого следует из точки, совершающей сложное движение, провести линии, вдоль которых направлены векторы *относительной, переносной и абсолютной скоростей*. Величину (модуль) абсолютной скорости точки в сложном движении рекомендуется определять с использованием теоремы косинусов, в которой $\alpha$ – угол между векторами относительной и переносной скоростей:

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_{отн}^2 + \upsilon_{пер}^2 + 2\upsilon_{отн}\upsilon_{пер}\cos\alpha}\,. \qquad (4.2)$$

## ***Решение задач***

***Задача 4.1*** [4, задача 20]

Окружность движется в плоскости чертежа поступательно с горизонтальной скоростью $\upsilon_0$ = 30 см/с и перемещает кольцо $M$ по неподвижной прямой $AB$, наклоненной под углом $\alpha$ = 60° к вертикали. Найти абсолютную скорость кольца $M$ и его скорость относительно окружности в положении, указанном на чертеже (рис. 4.2).

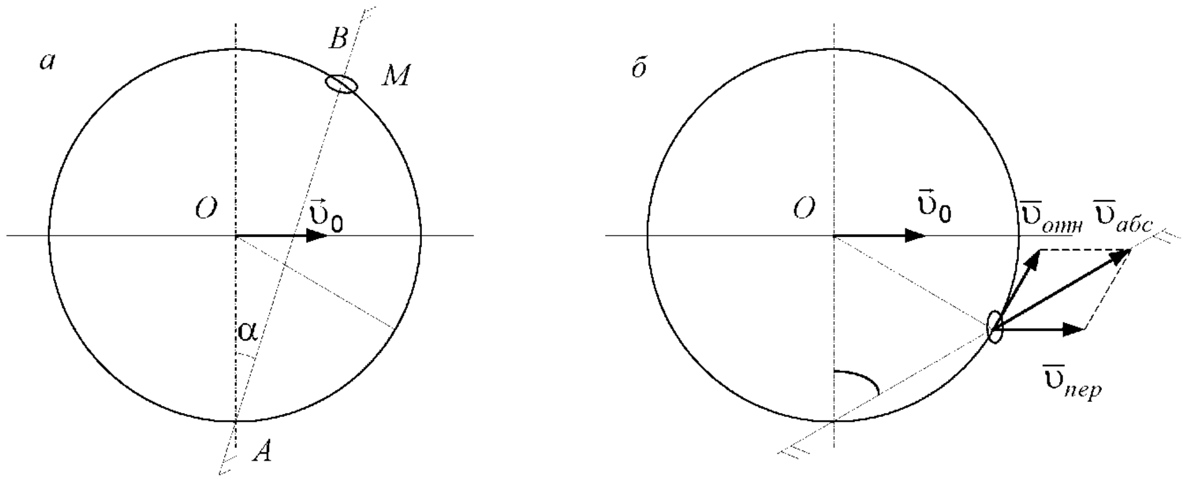


Рис. 4.2

*Решение*

Покажем на чертеже (рис. 4.2, *б*) векторы переносной и относительной скоростей точки в сложном движении. Подвижной системой координат является окружность, поэтому вектор скорости ее центра $\vec{\upsilon}_o$ представляет вектор переносной скорости. Вектор относительной скорости $\vec{\upsilon}_{отн}$ направлен по касательной к этой окружности. Построим на векторах $\vec{\upsilon}_{пер}$ и $\vec{\upsilon}_{отн}$ параллелограмм так, чтобы его диагональ была направлена вдоль неподвижного стержня $AB$. Из условия задачи следует, что $\vec{\upsilon}_{отн} = \vec{\upsilon}_{пер} = 30$ см/с. Величину абсолютной скорости определим по теореме косинусов:

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_{отн}^2 + \upsilon_{пер}^2 + 2\upsilon_{отн}\upsilon_{пер}\cos\alpha} =$$

$$= \sqrt{30^2 + 30^2 + 2\cdot 30\cdot 30\cdot\cos 60^\circ} = 30\sqrt{3}\ (\text{см/с}).$$

***Задача 4.2*** [4, задача 21]

Кривошип $OA$ приводит в действие кулису $BCD$, представляющую собой ломаный рычаг. $OA = BC = 30$ см, $\alpha = 30°$. Угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$. Определить угловую скорость кулисы и скорость ползуна $A$ относительно кулисы (рис. 4.3).

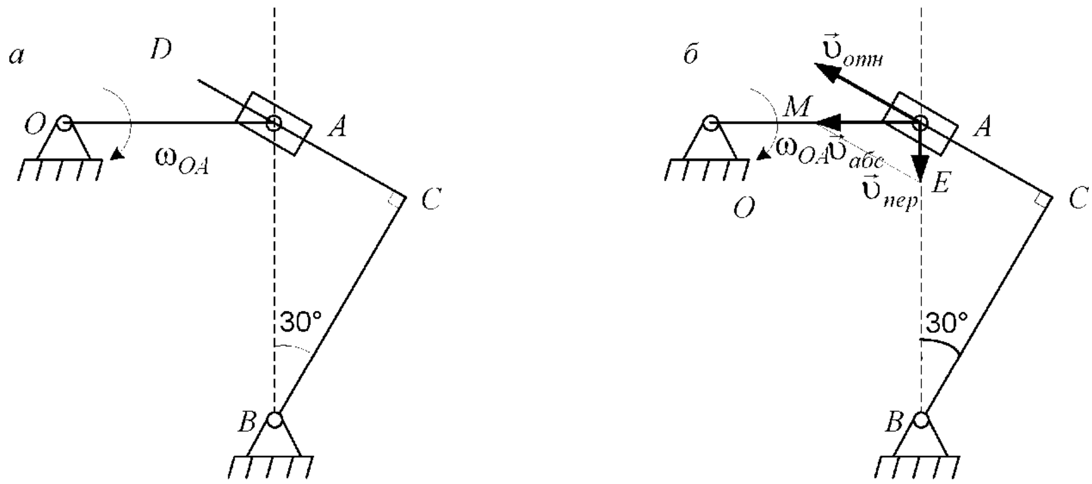


Рис. 4.3

*Решение.*

1. Кулиса $BCD$ является подвижной системой отсчета, движение которой происходит относительно точки $B$, которая является неподвижной. Поэтому движение точки $A$ вдоль $CD$ является относительным, а скорость этого движения – относительной скоростью. Скорость точки $A$ относительно точки $O$ является переносной скоростью

$$\upsilon_{пер} = \omega_{OA}|OA| = 2\cdot 30 = 60\ (\text{см/с}).$$

2. Рассмотрим треугольник $AEM$ ($\hat{A} = 90°$), в котором векторы переносной и абсолютной скоростей направлены вдоль катетов, а вектор относительной скорости – вдоль гипотенузы. Определим величину относительной скорости:

$$\upsilon_{отн} = \frac{\upsilon_{пер}}{\cos 60°} = \frac{60}{0{,}5} = 120 \text{ (см/с).}$$

3. Из треугольника $AEM$ найдем величину абсолютной скорости $\upsilon_a$:

$$\upsilon_a = \upsilon_{отн} \cos 30° = 60\sqrt{3} \text{ (см/с).}$$

4. Угловая скорость кулисы определяется соотношением:

$$\omega_{BCD} = \frac{\upsilon_A}{|AB|} = \frac{60\sqrt{3}}{\frac{30\sqrt{3}}{2}} = 3 \text{ (с}^{-1}\text{).}$$

***Задача 4.3*** [4, задача 22]

Треугольная пластина $OAB$ (рис. 4.4), вращаясь вокруг оси $O$ с угловой скоростью $\omega_0$ = 3 с$^{-1}$, поворачивает вокруг точки $D$ стержень $CD$. $CD = OA$ = 12 см. Найти угловую скорость стержня $CD$ и скорость его конца $C$ относительно пластинки в момент, когда стержень горизонтален.

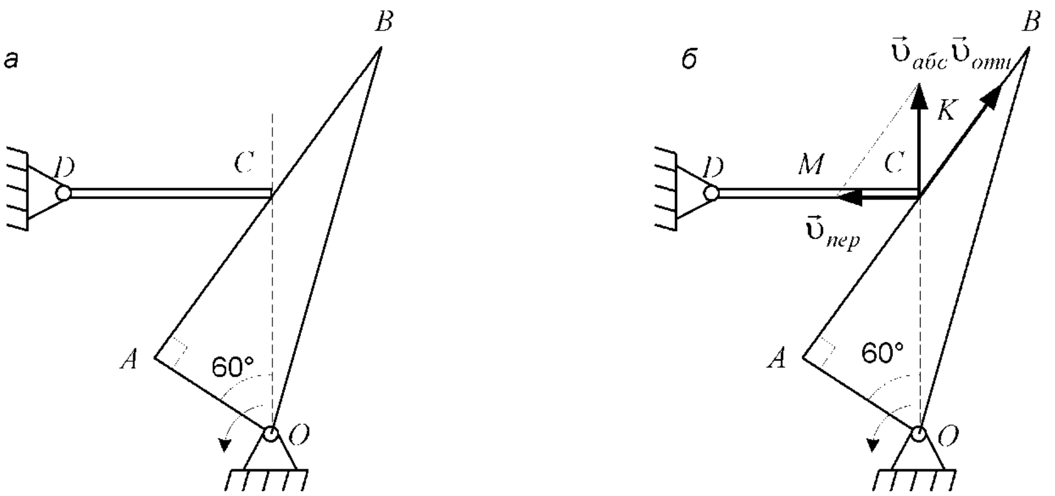


Рис. 4.4

*Решение*

Так как в качестве подвижной системы отсчета можно рассматривать пластинку, то скорость точки по стороне $AB$ будем рассматривать как относительную скорость. Вектор переносной скорости направлен перпендикулярно отрезку $OC$ в сторону вращения. Тогда вектор абсолютной скорости будет направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах относительной и переносной скоростей.

Из треугольника $OAC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) найдем $OC$:

$$|OC| = \frac{|OA|}{\sin 30^\circ} = 24 \text{ см.}$$

Тогда $\upsilon_{пер} = \omega_O |OC| = 3 \cdot 24 = 72$ см.

Из треугольника $CMK$ найдем величины относительной и абсолютной скоростей:

$$\upsilon_{отн} = \frac{\upsilon_{пер}}{\sin 30^\circ} = \frac{72}{0{,}5} = 144 \text{ (см/с);}$$

$$\upsilon_a = \upsilon_{отн} \cos 30^\circ = 72\sqrt{3} \text{ (см/с).}$$

Зная величину абсолютной скорости, определим величину угловой скорости стержня:

$$\omega_{CD} = \frac{\upsilon_a}{|CD|} = \frac{72\sqrt{3}}{12} = 6\sqrt{3} \text{ (с}^{-1}\text{).}$$

### 4.3. Определение ускорений в сложном движении точки

Для определения ускорения точки применяется *теорема Кориолиса.* Ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме трех ускорений: *относительного, переносного и кориолисова*:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим определение каждого из этих ускорений.

***Абсолютным ускорением*** точки называется ее ускорение в движении относительно неподвижного тела. Расчет абсолютного ускорения зависит от траектории абсолютного движения точки.

Траектория – прямая линия:

$$a_a = \frac{d\upsilon_a}{dt}. \tag{4.4}$$

В случае окружности:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_a^{\tau} + \vec{a}_a^{n}, \tag{4.5}$$

где $a_a^{\tau} = \dfrac{d\upsilon_a}{dt}$ – касательное абсолютное ускорение; (4.6)

$$a_a^n = \frac{\upsilon^2}{R} \text{ – нормальное абсолютное ускорение;} \tag{4.7}$$

$R$ – радиус окружности.

Если траектория абсолютного движения не задана, то абсолютное ускорение следует разложить на составляющие по осям координат:

для плоских кривых: $\vec{a}_a = \vec{a}_{a_x} + \vec{a}_{a_y}$; (4.8)

для пространственных кривых: $\vec{a}_a = \vec{a}_{a_x} + \vec{a}_{a_y} + \vec{a}_{a_z}$. (4.9)

***Переносным ускорением*** называется ускорение точки перемещающегося тела относительно неподвижной системы отсчета. Направление и величина переносного ускорения определяется характером переносного движения.

***Относительным ускорением*** называется ускорение точки относительно перемещающегося тела. Направление и величина переносного ускорения зависит от траектории относительного движения.

Ускорение, характеризующее совокупное изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки при относительном движении, называется ***поворотным*** или ***кориолисовым ускорением точки***.

С учетом ускорения Кориолиса формула для определения абсолютного ускорения примет вид:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \tag{4.10}$$

Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}||\upsilon_{отн}|\sin(\vec{\omega};\vec{\upsilon}_{отн}). \tag{4.11}$$

Для определения ускорения Кориолиса используют *правило Жуковского: модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения; чтобы получить направление ускорения Кориолиса следует вектор проекции относительной скорости повернуть на 90° вокруг оси переносного вращения в направлении этого вращения.*

Рассмотрим случаи, когда ускорение Кориолиса равно нулю и, следовательно, его можно не учитывать.

1. Переносное движение является поступательным.

2. Скорость относительного движения равна нулю.

3. Векторы угловой скорости переносного вращения и относительной скорости параллельны между собой.

В задачах, предлагаемых студентам для самостоятельного решения, необходимо определить абсолютное ускорение точки тела, совершающего сложное движение, в соответствии с теоремой Кориолиса:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}. \quad (4.12)$$

При этом предполагается, что относительное, переносное и ускорение Кориолиса заранее заданы. В случае, если известны уравнения относительного и переносного движений, то соответствующие ускорения определяются из соотношений:

$$a_{отн} = \frac{d^2 x_{отн}}{dt^2} = \frac{d\upsilon_{отн}}{dt}; \quad a_{пер} = \frac{d^2 x_{пер}}{dt^2} = \frac{d\upsilon_{пер}}{dt}. \quad (4.13)$$

При этом следует помнить, что в случае равноускоренного движения векторы скорости и ускорения сонаправлены, а при равнозамедленном – противоположны. В случае равномерного движения ускорение равно нулю.

Расчет ускорения точки в сложном движении рекомендуется проводить в определенной последовательности.

1. На расчетной схеме показать направления векторов относительного и переносного ускорений. Направление вектора ускорения Кориолиса следует определить по правилу Жуковского.

2. Спроектировать векторы ускорений на оси прямоугольной системы координат, составить уравнения проекций и определить величину абсолютного ускорения точки.

## *Решение задач*

***Задача 4.4*** [4, задача 23]

На тележке, движущейся по горизонтальной плоскости вправо с ускорением $a = 3$ м/с$^2$, установлен электродвигатель, ротор которого вращается согласно уравнению $\varphi = 3/2\ \pi t$. Определить абсолютное ускорение точки $A$ ротора через 1 с после начала движения, если радиус $OA = 20$ см (рис. 4.5).

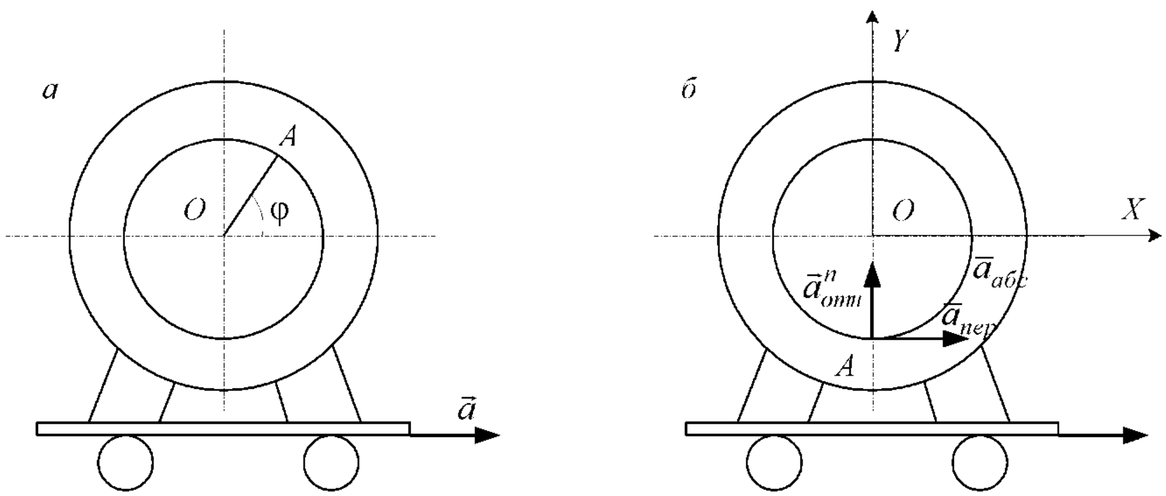


Рис. 4.5

*Решение*

1. Переносное ускорение.

Так как подвижная система отсчета связана с тележкой, то ускорение тележки является ускорением переносного движения. Поэтому величина переносного ускорения равна 300 см/с$^2$.

2. Относительное ускорение.

Ускорение точки $A$ при вращении вокруг $O$ определяет относительное ускорение. Так как угловая скорость вращательного движения является постоянной, то относительное ускорение равно нормальной составляющей:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{2}\pi;$$

$$a_{отн} = a_{отн}^n = \omega^2 |OA| = 441{,}1 \text{ см/с}^2$$

3. Ускорение Кориолиса.

Переносное движение является поступательным, угловая скорость равна нулю. Поэтому ускорение Кориолиса равно нулю и при расчете абсолютного ускорения не учитывается.

4. Абсолютное ускорение.

В условиях данной задачи абсолютное ускорение будет равно векторной сумме относительного и переносного ускорений:

$$a_a = \sqrt{a_{отн}^2 + a_{пер}^2} \approx 535{,}9 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

***Задача 4.5*** [4, задача 24]

Стержень $OA$ длиной 60 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с вокруг горизонтальной оси $O$. К концу $A$ стержня шарнирно прикреплен круглый диск радиусом $r = 10$ см, диаметр которого при перемещении сохраняет вертикальное положение. По ободу диска движется точка $M$ с постоянной относительной скоростью $\upsilon_{отн} = 100$ см/с. Найти абсолютное ускорение точки $M$ в момент, когда она проходит через левый край горизонтального диаметра диска, стержень $OA$ в этот момент образует с горизонталью угол $\varphi = 60°$ (рис. 4.6).

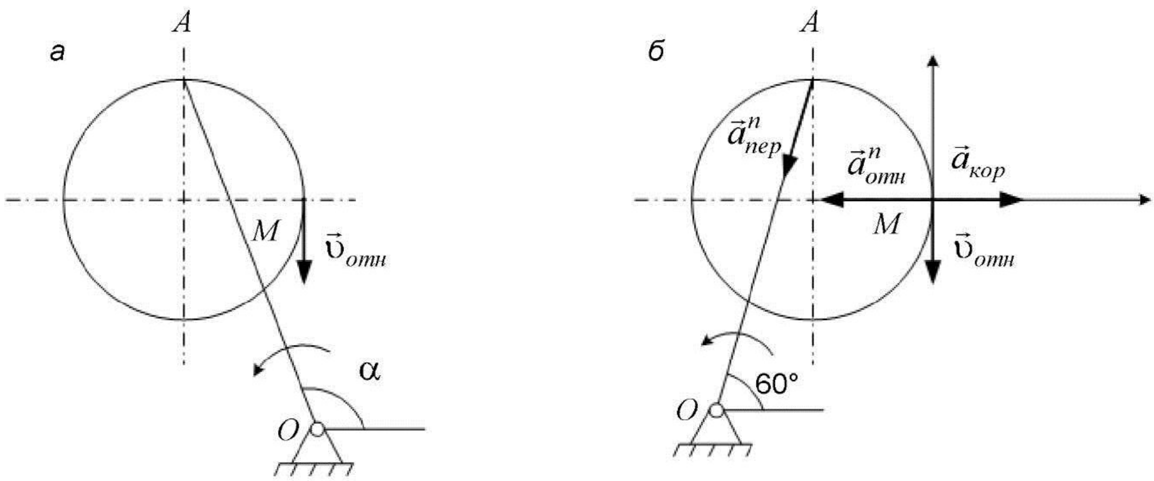


Рис. 4.6

*Решение.*

1. Для определения абсолютного ускорения точки $M$ запишем векторное уравнение:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}.$$

Далее покажем на расчетной схеме и найдем величины относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

2. *Относительное ускорение.*

В условиях данной задачи относительным движением точки $M$ является ее движение относительно диска. Так как это движение равномерно, то относительное ускорение имеет только нормальную составляющую

$$a_{отн}^n = \frac{\upsilon_{отн}^2}{r} = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

3. *Переносное ускорение.*

Переносным является движение диска относительно точки $O$. Так как переносное движение по условию данной задачи является равномерным, то переносное ускорение точки $M$ имеет единственную нормальную составляющую величиной

$$a^n_{пер} = \omega^2_{пер}|OA| = 4^2 \cdot 0{,}6 = 9{,}6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

4. *Ускорение Кориолиса.*

Так как переносное движение является поступательным, то $a_{кор} = 0$ и при определении абсолютного ускорения не учитывается.

5. *Абсолютное ускорение.*

Спроектируем относительное и переносное ускорение на оси:

$$Ox: a_{абсX} = a^n_{отн} + a^n_{пер}\cos 60^\circ = 10 + 4{,}8 = 14{,}8;$$

$$Oy: a_{абсY} = a^n_{пер}\sin 60^\circ = 8{,}3.$$

Абсолютное ускорение равно:

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсY}} \approx 17{,}0 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

***Задача 4.6*** [4, задача 25]

Полое кольцо радиусом $r$ = 20 см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{пер}$ = 3 рад/с вокруг оси $O$, перпендикулярной оси кольца. Внутри кольца движется жидкость против часовой стрелки с постоянной относительной скоростью $\upsilon_{отн}$ = 60 см/с. Найти абсолютное ускорение частицы жидкости, расположенной в заданной точке $M$ (рис. 4.7).

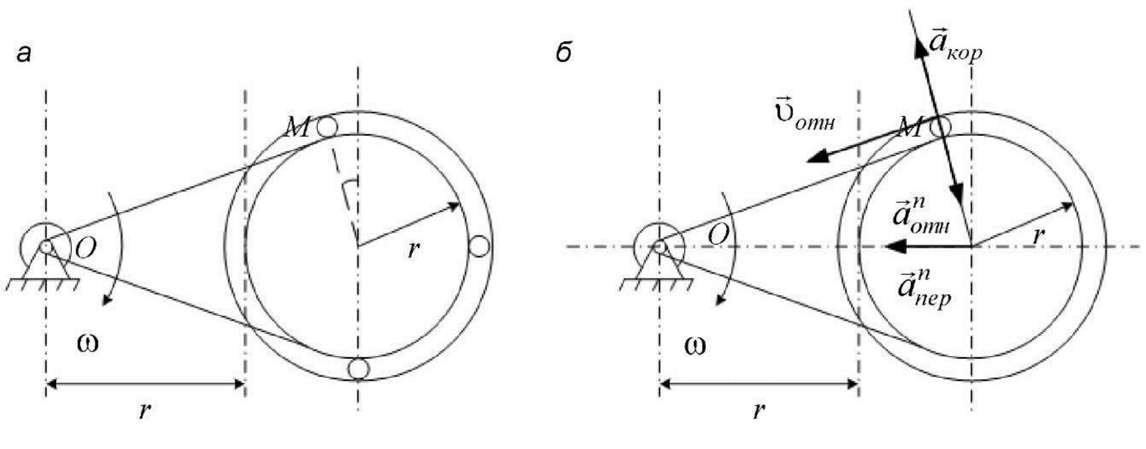


Рис. 4.7

*Решение*

Проведем анализ сложного движения частицы $M$.

Переносное ускорение.

Так как подвижной системой отсчета является кольцо, то его ускорение относительно точки $O$ является переносным ускорением.

По условию угловая скорость переносного вращения постоянна, поэтому переносное ускорение состоит только из нормальной составляющей:

$$a^n_{пер} = \omega^2_{пер} \cdot 2r = 360 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Относительное ускорение.

Движение частицы внутри кольца является относительным, поэтому ускорение этого движения – относительным ускорением. Так как по условию задачи скорость относительного движения постоянна, то относительное ускорение имеет только нормальную составляющую:

$$a^n_{отн} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{r} = 180 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ускорение Кориолиса.

Направление вектора ускорения Кориолиса определим по правилу Жуковского с учетом направлений относительной скорости и переносного вращения:

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot \upsilon_{отн} = 360 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

В соответствии с теоремой Кориолиса:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}.$$

Спроектируем вектора ускорений на оси координат:

$$Ox: a_{абсX} = a^n_{пер} \cos 30^\circ = 180\sqrt{3};$$

$$Oy: a_{абсY} = a_{кор} - a^n_{отн} = 180;$$

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсY}} = 360 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

***Задача 4.7*** [4, задача 26]

Кулиса $ABC$ приводится в движение вокруг оси $A$, перпендикулярной к ее плоскости, кривошипом $OD$ и ползуном $D$, шарнирно связанным с кривошипом и скользящим вдоль направляющей $BC$ кулисы. Кривошип вращается вокруг оси $O$ с заданными угловой скоростью $\omega = 2\frac{1}{\text{с}}$ и угловым ускорением $\varepsilon = 20\frac{1}{c^2}$. Определить угловое ускорение кулисы и ускорение ползуна $D$ относительно направляющей $BC$ в момент, когда $\angle ODA = 90^\circ$ и $OD = DA$ (рис. 4.8).

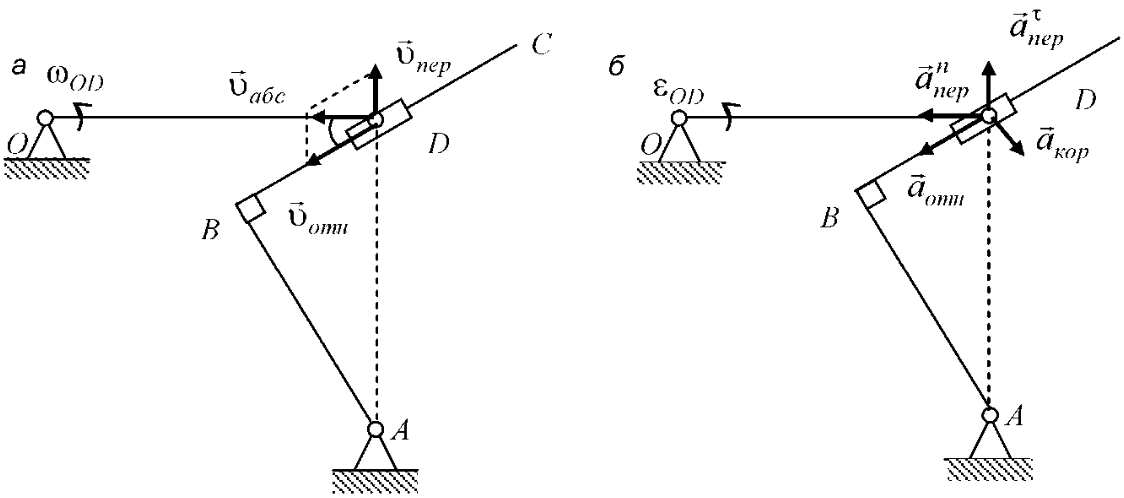


Рис. 4.8

*Решение.*

1. Проведем анализ движения ползуна $D$:

- относительное движение – движение ползуна $D$ по направляющей $BC$;
- переносное движение – вращение кулисы $ABC$ вокруг точки $A$;
- абсолютное движение – движение ползуна $D$ вертикально вверх вокруг оси $O$.

2. Найдем скорости ползуна в сложном движении.

Составим векторное уравнение:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e.$$

Вычислим модуль переносной скорости:

$$\upsilon_e = \omega_{OD}|OD| = 2 \cdot 30 = 60 \text{ (см/с)}.$$

Из треугольника скоростей определим величины относительной и абсолютной скоростей:

$$\upsilon_r = \frac{\upsilon_e}{\sin 30^\circ} = 120 \text{ (см/с)}; \quad \upsilon_a = \upsilon_r \cos 30^\circ = 60\sqrt{3} \text{ (см/с)}.$$

3. Расчет ускорений.

Сделаем предварительные расчеты:

$$a_e^n = \omega_{OD}^2 |OD| = 2^2 \cdot 30 = 120 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_{OD} |OD| = 20 \cdot 30 = 600 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{кор} = 2\omega_e \upsilon_r = 2 \cdot 2 \cdot 120 = 480 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Составим уравнения проекций:

$$Ox: a_a^\tau - a_e^n - a_r \cos 30^\circ + a_k \cos 60^\circ = 0; \qquad \text{(а)}$$

$$Oy: a_r \cos 60^\circ + a_e^\tau - a_a^n - a_k \cos 30^\circ = 0. \qquad \text{(б)}$$

Из которых получаем:

$$a_r = 480 \text{ см/с}^2; \quad \varepsilon_{AB} = \frac{a_a^\tau}{|AB|} = 4 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

***Задача 4.8*** [4, задача 27]

Шар радиусом $R = 20\sqrt{3}$ см вращается вокруг неподвижной оси $z$ с угловой скоростью $\omega = 4t^2$. Траекторией относительного движения является окружность радиусом $R_1 = R\cos\varphi$, $\varphi = 30^\circ$. Найти абсолютную скорость и ускорение точки $M$ в момент времени $t = 1$ с (рис. 4.9).

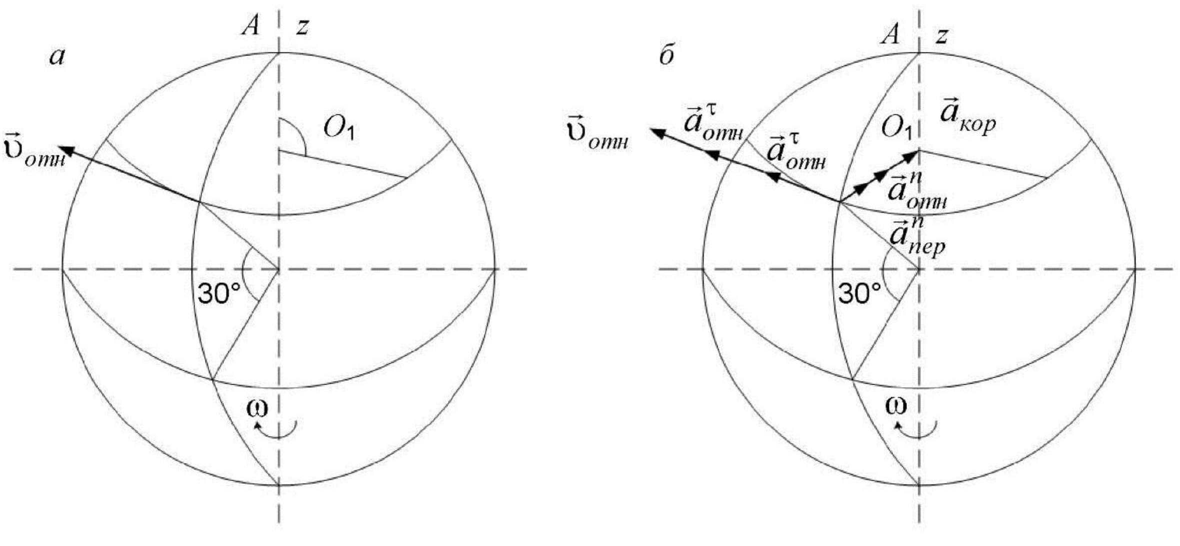


Рис. 4.9

*Решение.*

1. Покажем на расчетной схеме векторы скоростей относительного и переносного движений и найдем абсолютную скорость согласно соотношению:

$$\vec{\upsilon}_{абс} = \vec{\upsilon}_{отн} + \vec{\upsilon}_{пер}.$$

Определим величины относительной и переносной скоростей:

$$\upsilon_{отн} = 30 \cdot 1 = 30 \text{ см/с};$$

$$\upsilon_{пер} = \omega_{пер} \cdot R_1 = \omega_{пер} \cdot R cos\varphi = 120 \text{ (см/с)}.$$

Векторы относительной и переносной скоростей лежат на одной прямой, поэтому величина абсолютной скорости будет равна их алгебраической сумме:

$$\upsilon_{абс} = \upsilon_{отн} + \upsilon_{пер} = 30 + 120 = 150 \text{ (см/с)}.$$

2. Покажем на расчетной схеме векторы относительного, переносного и кориолисова ускорений, найдем их величины:

$$a^n_{пер} = \omega^2_{пер} \cdot R_1 = 480 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a^n_{отн} = \frac{\upsilon^2_{отн}}{R_1} = 30 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a^\tau_{пер} = \varepsilon_{пер} \cdot R_1 = 8 \cdot 30 = 240 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a^\tau_{отн} = \varepsilon_{отн} \cdot R_1 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{кор} = 2\upsilon_{отн}\omega_{пер} = 2 \cdot 30 \cdot 4 = 240 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Спроектируем векторы ускорений на оси и составим уравнения проекций:

$$Ox: a_{абсX} = a^n_{пер} + a^n_{отн} + a_{кор} = 480 + 30 + 240 = 750 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$Oy: a_{абсY} = a^\tau_{отн} + a^\tau_{пер} = 330 \text{ (см/с}^2\text{)};$$

$$a_{абс} = \sqrt{a^2_{абсX} + a^2_{абсY}} = 820 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При самостоятельном изучении данного пособия студент может приобрести навык решения задач по кинематике, определять характеристики простых и сложных видов движения: закон движения, уравнение траектории, скорость, ускорение тела.

Методы, применяемые для расчетов в разделе «Кинематика», используются для тел и механизмов, совершающих движение. Дальнейшее изучение этого явления проводится в разделе «Динамика» и курсе «Теория машин и механизмов».

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. – М. : Высш. шк., 1983. – 575 с.

2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. В 2 т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1984. – 343 с.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Высш. шк., 1986. – 416 с.

4. Теоретическая механика. Сборник задач. В 3 ч. Ч. 2. Кинематика / под ред. проф. В.И. Доронина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС. – 2002. – 88 с.

5. Теоретическая механика. Типовые задачи и методы их решения. Ч. 2. Кинематика / под ред. проф. В. И. Доронина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. – 92 с.