ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
Учебное пособие

1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

Основное свойство: при поступательном движении все точки тела движутся одинаково, т.е. описывают одинаковые траектории и имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Поступательное движение характеризуется движением любой его точки, поэтому для определения кинематических характеристик поступательного движения достаточно определить соответствующие характеристики одной из его точек.

Пример.

Точка А кривошипа движется со скоростью $V_A = 0{,}8$ *м/с*. $OA = 0{,}4$ *м*. Определить траекторию, скорость и ускорение точки *M*.

Решение.

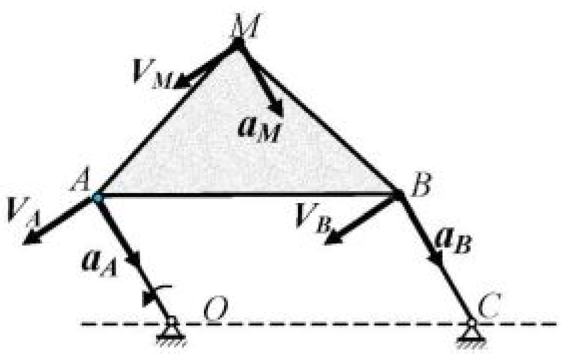

Рис.1

Движение треугольной пластины *ABM*, соединенной шарнирно с кривошипами *OA* и *CB*, является поступательным, поэтому его можно характеризовать движением точки *A*. Точка описывает окружность радиуса ОА, скорость точки направлена по касательной к этой окружности, т.е. перпендикулярно ОА.

Скорости всех точек пластины одинаковы и равны скорости точки А.

$$V_M = V_D = V_A.$$

Точка *A* движется с постоянной скоростью, поэтому она имеет нормальное ускорение, направленное по кривошипу к точке *O*.

$$a_A = \frac{V^2}{R} = \frac{0{,}64}{0{,}4} = (1{,}6\ м/с^2)$$

Ускорения всех точек пластины одинаковы и равны ускорению точки *A:*

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A.$$

2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две принадлежащие телу точки остаются неподвижными.

Прямая, проходящая через эти неподвижные точки, называется осью вращения.

2.1. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося твердого тела

При движении твердого тела, закрепленного в двух неподвижных точках A и B (рис.1), все точки, расположенные на прямой AB, остаются неподвижными.

Проведем через ось вращения неподвижную плоскость 1 и плоскость П, жестко связанную с телом. Положение подвижной плоскости относительно неподвижной определяется ***углом поворота φ***. Угол φ измеряется в радианах и считается положительным при условии, что он отсчитывается в направлении против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения *Az.*

Зависимость угла поворота от времени называется законом вращательного движения:

$$\varphi = \varphi(t)$$

Угловой скоростью вращательного движения называется производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Знак ω определяет направление вращения: если $\omega > 0$ вращение происходит против часовой стрелки, если $\omega < 0$, то тело вращается по часовой стрелке.

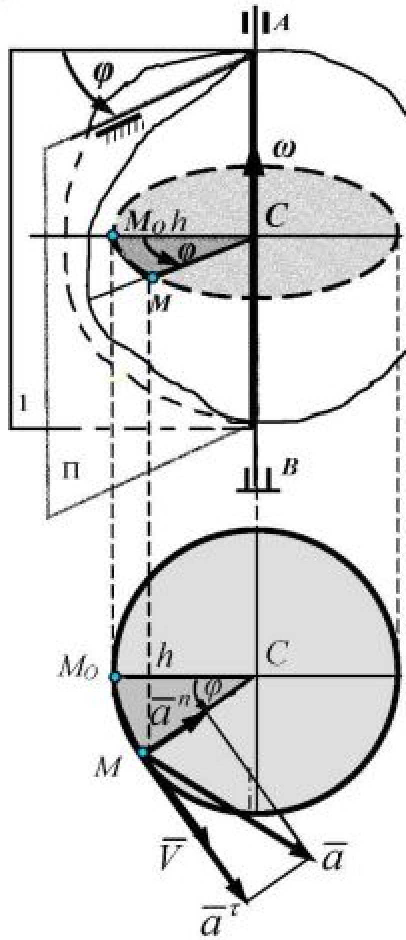

Рис.1

Если угол поворота измеряется в радианах, а время - в секундах, то единицей угловой скорости будет

$$[\omega] = 1/сек = сек^{-1}.$$

В технике угловую скорость определяют числом оборотов в минуту, обозначая эту величину как n об/мин. Зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту определяется по формуле:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \ 1/сек.$$

Изменение угловой скорости характеризуется угловым ускорением.

Угловым ускорением называется производная от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Учтем, что $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, тогда $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, или $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

Единица измерения углового ускорения:

$$[\varepsilon] = 1/c^2 = c^{-2}.$$

Вращение будет ускоренным, если угловая скорость и угловое ускорение будут иметь одинаковые знаки: $\omega > 0, \varepsilon > 0$ или $\omega < 0, \varepsilon < 0$.

Вращение будет замедленным, если: $\omega > 0, \varepsilon < 0$ или $\omega < 0, \varepsilon > 0$.

2.2. Скорости точек при вращательном движении

Все точки вращающегося твердого тела описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

В самом деле, в силу неизменяемости расстояний точки M от неподвижных точек A и B, точка M должна постоянно оставаться как на поверхности сферы, описанной из точки A радиусом AM, так и на поверхности сферы, описанной их точки B радиусом BM. Следовательно, точка M остается на линии пересечения обеих сфер, т.е. на окружности, плоскость которой перпендикулярна к прямой AB, центр лежит на этой прямой, а радиус равен расстоянию точки до оси вращения.

Положение точки M, находящейся на окружности радиуса h (рис. 1), в соответствии с естественным способом задания, определяется длиной дуги окружности, отсчитываемой от начального положения M_O, находящегося на неподвижной плоскости:

$$S = M_O M = h\varphi\ .$$

Скорость точки M, движущейся по окружности радиуса h, определяется по формуле

$$V = \frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\,\omega$$

Скорость точки вращающегося твердого тела равна произведению угловой скорости тела на ее радиус вращения

$$V = h\,\omega$$

Вектор скорости лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направлен по касательной к описываемой точкой окружности в направлении

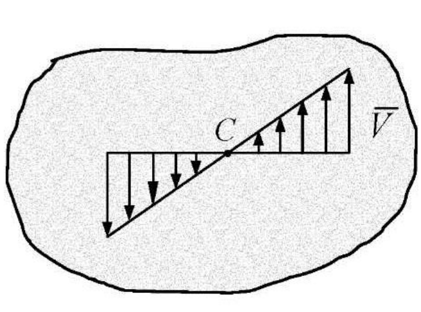

Рис.2

вращения.

Так как угловая скорость ω для всех точек тела имеет в данный момент одно и то же значение, то скорости точек вращающегося твердого тела пропорциональны радиусам вращения. Поле скоростей точек вращающегося твердого тела имеет вид, показанный на рис.2.

2.3. Передача вращательного движения от одного тела к другому осуществляется непосредственным контактом (зубчатые и фрикционные зацепления см. рис .6 и рис.7) или при помощи ременной передачи (рис.8).

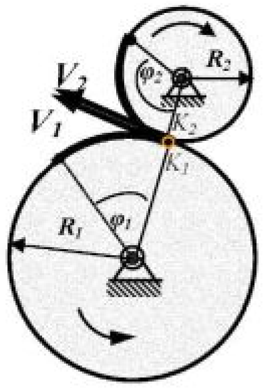

Рис.6

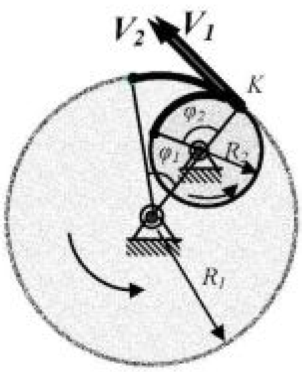

Рис.7

При внешнем зацеплении (рис. 6) и скрещивающейся ременной передаче (рис.9) вращение колес противоположно по направлению, при внутреннем зацеплении (рис. 7) и нескрещивающейся ременной передаче (рис.8) направления вращения колес совпадают.

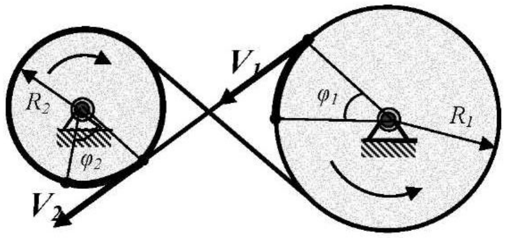

Рис.9

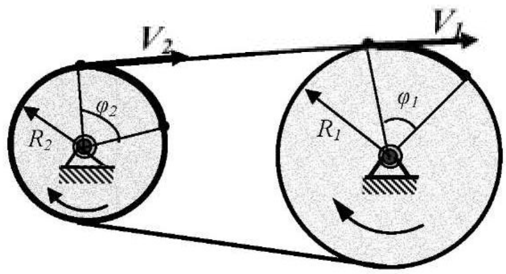

Рис.8

При отсутствии проскальзывания пути, проходимые за одинаковый промежуток времени точками, расположенными на ободах сцепленных колес для всех видов сцепления, равны:

$$S_1 = S_2. \qquad S_1 = R_1\varphi_1, \qquad S_2 = R_2\varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 - углы, на которые опираются дуги окружностей, описываемые контактирующими точками.

$$R_1\varphi_1 = R_2\varphi_2.$$

Полученное равенство связывают углы поворота контактирующих тел.
Скорости точек, лежащих на соединенных ободах обоих тел для всех видов сцепления равны:

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{dS_2}{dt}, \quad V_1 = V_2.$$

$$R_1\frac{d\varphi_1}{dt} = R_2\frac{d\varphi_2}{dt}, \qquad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2.$$

Угловые скорости тел, находящихся в зацеплении, обратно пропорциональны их радиусам.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

2.4. Ускорения точек вращающегося тела.

Ускорение точки, движущейся по окружности, раскладывается на нормальную и касательную составляющие:

$$\overline{a} = \overline{a}^{\tau} + \overline{a}^{n}.$$

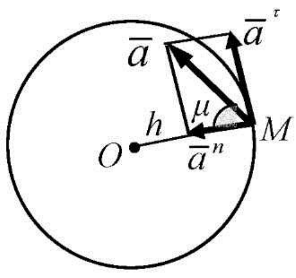

Рис.10

Эти составляющие вычисляются по формулам, определяемым естественным способом задания:

$$a^{\tau} = \frac{dV}{dt}; \quad a^{n} = \frac{V^2}{\rho}.$$

Подставим в эти формулы значение скорости точки вращающегося тела $V = \omega h$ и, учитывая, что $\rho = h$, получим:

$$a^{\tau} = \frac{d}{dt}(\omega h) = h\frac{d\omega}{dt} = h\,\varepsilon;$$

$$a^{n} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h.$$

Окончательно касательное и нормальное ускорения определяются по формулам:

$$a^{\tau} = \varepsilon h; \quad a^{n} = \omega^2 h.$$

Касательное ускорение (рис.10) ***направлено перпендикулярно радиусу вращения и совпадает с вектором скорости, если вращение тела является ускоренным; касательное ускорение противоположно вектору скорости при замедленном вращении.***
Нормальное ускорение всегда направлено по радиусу к центру вращения.

$$\overline{a}^{\tau} \perp \overline{a}^{n}$$

Модуль полного ускорения точки М (рис. 10):

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a\tau)^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\,.$$

Вектор полного ускорения образует с радиусом h угол μ, определяемый соотношением (рис.3):

$$tg\mu = \frac{a^\tau}{a^n} = \frac{\varepsilon\, h}{\omega^2\, h} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

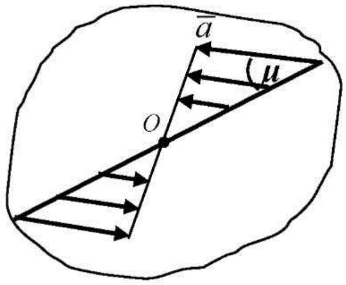

Рис.11

В данный момент времени значения ε и ω для всех точек одинаковы, следовательно, угол μ также одинаков для всех точек, а модули ускорений точек пропорциональны радиусам вращения. Поле ускорений показано на рис. 11.

5. Векторные формулы*

Угловую скорость можно представить в виде вектора $\overline{\omega}$.
Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно против часовой стрелки (рис.5), а его модуль **равен** $|\omega|$**.**

Угловое ускорение тела также можно представить в виде вектора

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}\,.$$

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора угловой скорости, если тело вращается ускоренно (рис.12), и эти векторы противоположны по направлению, если вращение тела – замедленное.

Вектор скорости точки вращающегося тела равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус – вектор, проведенный из любой точки, взятой на оси вращения, в данную точку.

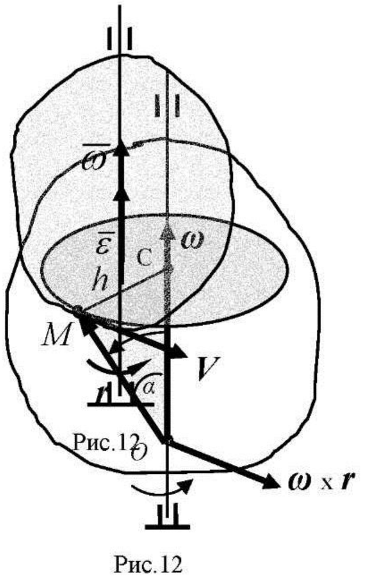

Рис.12

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

Доказательство. Два вектора равны, если они равны по величине и одинаковы по направлению.

Модуль векторного произведения:

$$|\overline{\omega} \times \overline{r}| = |\omega| \cdot r \sin\alpha = |\omega| h = |\overline{V}|\,.$$

Векторное произведение $\overline{\omega} \times \overline{r}$ направлено по перпендикуляру к плоскости треугольника *OMC*, где лежат перемножаемые векторы, в сторону, откуда совмещение вектора угловой скорости с радиусом - вектором на меньший угол видно против часовой стрелки.

Вектор скорости $\overline{V}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и направлен по касательной к окружности в сторону вращения тела (перпендикулярен радиусу *h*).Следовательно, направления векторов $\overline{\omega}\times\overline{r}$ и $\overline{V}$ совпадают, значит $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}$.

Аналогично докажем, что ***вектор касательного ускорения выражается в виде векторного произведения:***

$$\overline{a}^{\tau}=\overline{\varepsilon}\times\overline{r}.$$

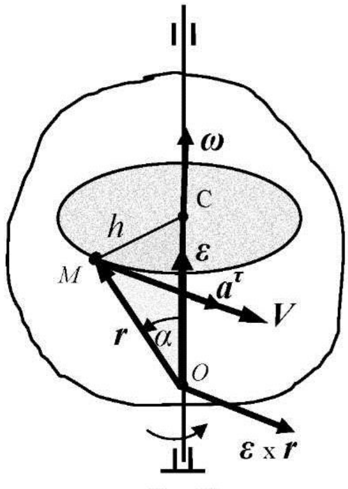

Рис.13

Действительно:

$$\left|\overline{\varepsilon}\times\overline{r}\right|=\left|\varepsilon\right|\cdot r\sin\alpha=\left|\varepsilon\right|h=\left|\overline{a}^{\tau}\right|.$$

Вектор $\overline{\varepsilon}\times\overline{r}$ направлен (рис.13) по касательной к окружности, по которой движется точка и совпадает по направлению с вектором скорости точки, если векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ направлены в одну сторону, что соответствует ускоренному вращению тела. Вектор $\overline{\varepsilon}\times\overline{r}$ направлен противоположно вектору скорости, если вращение тела является замедленным, т.е. векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\varepsilon}$ противоположны по направлению.

Вектор нормального ускорения точки также можно представить в виде векторного произведения:

$$\overline{a}^{n}=\overline{\omega}\times\overline{V}$$

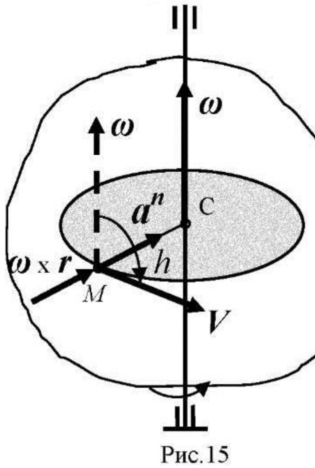

Рис.15

Действительно

$$\left|\overline{\omega}\times\overline{V}\right|=\left|\omega\right|\left|V\right|\sin 90^{0}=\omega\,\omega\,h=\omega^{2}\,h=a^{n}.$$

Векторное произведение $\overline{\omega}\times\overline{V}$ перпендикулярно векторам $\overline{\omega}$ и $\overline{V}$ и направлено по этому перпендикуляру так, чтобы с его конца совмещение вектора $\overline{\omega}$ с вектором $\overline{V}$ на меньший угол было видно против часовой стрелки. В соответствии с этим правилом вектор $\overline{\omega}\times\overline{V}$ направлен по радиусу вращения точки к центру окружности (рис.15), т.е. совпадает с вектором $\overline{a}^{n}$.

Полное ускорение равно сумме касательного и нормального ускорений, следовательно

$$\overline{a}=\overline{\varepsilon}\times\overline{r}+\overline{\omega}\times\overline{V}.$$

6. Основные определения и формулы

В этом пункте дана сводка основных определений и формул.

1. Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором две его точки остаются неподвижными.

2. Осью вращения называется прямая, проходящая через неподвижные точки.

3. Углом поворота φ называется угол между двумя проведенными через ось вращения плоскостями: неподвижной плоскостью и плоскостью, жестко связанной с телом.

4. Уравнением вращательного движения называется зависимость угла поворота от времени $\varphi = \varphi(t)$

5. Угловой скоростью называется производная от угла поворота по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

6. Угловым ускорением называется производная от угловой скорости по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Вращательное движение будет ускоренным, если ω и ε имеют одинаковые знаки, вращение – замедленное, если ω и ε имеют разные знаки.

7. Траекторией любой точки вращающегося твердого тела является окружность, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а радиус h которой равен кратчайшему расстоянию до оси вращения и называется радиусом вращения точки.

8. Скорость точки направлена по касательной к окружности (перпендикулярно радиусу вращения)

$$\overline{V} \perp h$$

8. Модуль скорости точки равен произведению угловой скорости тела на радиус вращения точки.

$$V = \omega h$$

9. Скорости точек пропорциональны их радиусам вращения.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{h_A}{h_B}$$

10. Ускорение раскладывается на нормальную и касательную составляющие $\overline{a} = \overline{a}^{\tau} + \overline{a}^{n}$

11. Вектор касательного ускорения совпадает с вектором скорости, если вращение тела ускоренное, и противоположен вектору скорости, если вращение замедленное, но всегда $\overline{a}^{\tau} \perp h$

12. Касательное ускорение равно

$$a^{\tau} = \varepsilon h$$

13. Нормальное ускорение направлено по радиусу вращения к центру и равно $a^{n} = \omega^{2} h.$

14.Модуль полного ускорения:

$$a = h\sqrt{\omega^{4} + \varepsilon^{2}}.$$

16.Ускорения точек пропорциональны радиусам вращения:

$$\frac{a_A^{\tau}}{a_B^{\tau}} = \frac{a_A^{\tau}}{a_B^{\tau}} = \frac{a_A}{a_B} = \frac{h_A}{h_B}$$

7. Пример на определение скоростей и ускорений точек вращающихся тел.

Две одинаковые круглые пластины радиуса R вращаются, как показано на рис.16 и рис.17, с одинаковыми угловыми скоростями ω и одинаковыми угловыми ускорениями ε. Определить скорость точки M, расположенной на каждой пластине, как показано на рисунках.

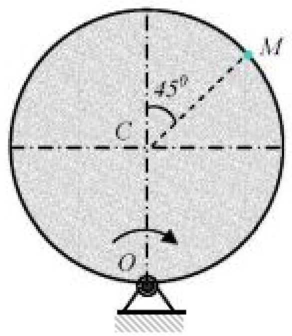

Рис.16

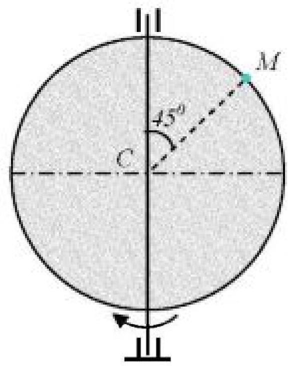

Рис.17

Решение. Значения скорости, нормального и касательного ускорений точки определяются по формулам: $V = \omega h$, $a^{n} = \omega^{2} h$, $a^{\tau} = \varepsilon h$.

Так как в обоих случаях угловые скорости и угловые ускорения заданы, то для определения всех характеристик необходимо определить радиусы вращения точек в обоих случаях.

В первом случае (рис.16) ось вращения пластинки, проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, радиус вращения h точки M, определяемый как перпендикуляр, опущенный из точки M на ось вращения, равен отрезку OM. Треугольник OCM является равнобедренным, углы при основании равны $\alpha = 22{,}5^{0}$.

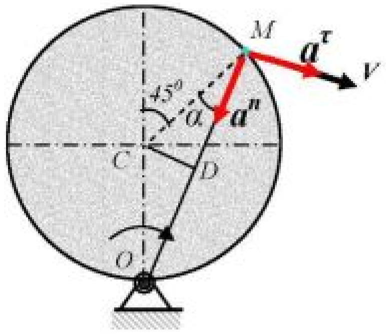

Рис.18

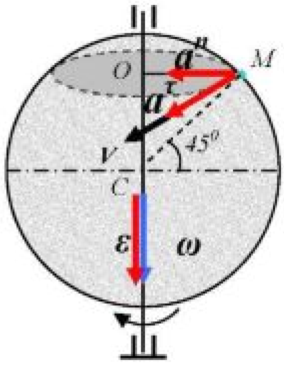

Рис.19

$h = OM = 2\ DM = 2\ CM\ cos\alpha = 2R\ cos22,5^0$.

Скорость точки M перпендикулярна радиусу вращения и направлена в сторону вращения.

$V = \omega\ h = \omega\ 2R\ cos\ 22,5$.

При ускоренном вращении касательное ускорение совпадает по направлению со скоростью точки и равно

$a^\tau = \varepsilon\ h = \varepsilon\ 2R\ cos22,5^0$

Нормальное ускорение точки направлено по радиусу вращения к центру и равно

$a^n = \omega^2\ h = \omega^2 2R\ cos22,5^0$.

Во втором случае (рис.17) радиус вращения точки равен отрезку OM. Из треугольника COM:

$OM = R\ cos\ 45^0$.

Скорость точки M лежит в плоскости окружности, которая перпендикулярна оси вращения и направлена перпендикулярно радиусу вращения в сторону вращения пластинки, т.е. перпендикулярно плоскости чертежа.

$V = \omega\ h = \omega\ R\ cos45$.

Касательное ускорение совпадает по направлению со скоростью точки и равно

$a^\tau = \varepsilon\ h = \varepsilon\ R\ cos45^0$.

Нормальное ускорение направлено по радиусу вращения h к точке O и равно

$a^n = \omega^2\ h = \omega^2 R\ cos45^0$.

8. Пример решения задачи на вращательное движение.

Груз 1 опускается вниз со скоростью $V_1=4t$.

Определить скорость и ускорение точки C подъемного механизма при t = 1 с, если радиусы тел 2 и 3 соответственно равны: $r_2 = 0{,}2$ *м* $R_2=0{,}4$ *м*, $r_3 =0{,}5$ *м*, $R_3 = 0{,}75$ *м*.

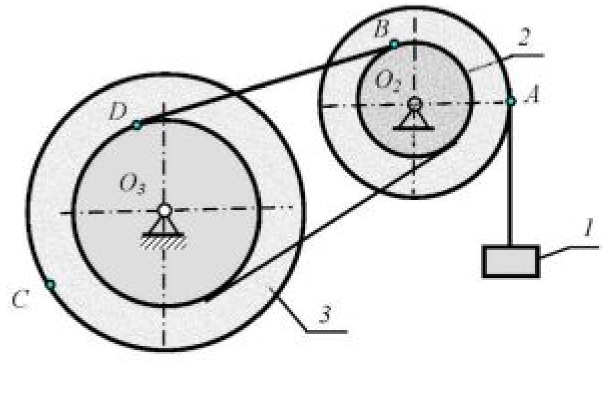

Рис.1

Решение. Скорость груза равна скорости точки A шкива 2: $V_A = V_1$.

Скорость точки B определяется из пропорции:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{r_2}{R_2}.$$

Откуда

$$V_B = V_A \frac{r_2}{R_2} = 0{,}5 V_1 = 2t\ (м/с).$$

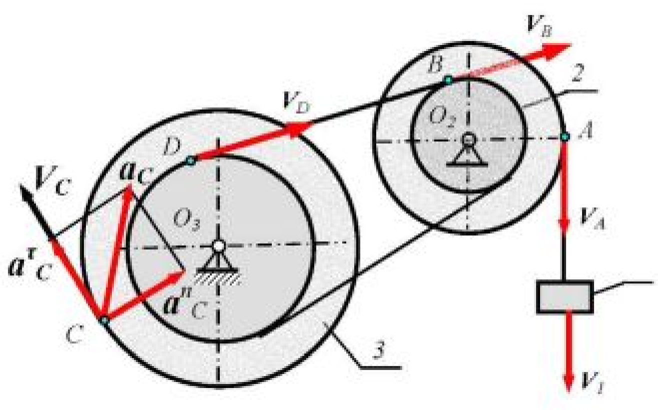

Рис.1

Скорости точек B и D равны, так как они связаны нерастяжимой нитью.

Скорость точки C находится из пропорции:

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{r_3}{R_3} = \frac{0{,}5}{0{,}75} \quad =>$$

$$V_C = 1{,}5\ V_D = 3\ t\ м/с.$$

При $t = 1с$, $V_C = 3$ *м/с*.

Угловая скорость тела 3 равна: $\omega_3 = \dfrac{V_C}{R_3} = 4t\ (1/c)$, при $t = 1c$, $\omega_3 = 4\ 1/c$

Угловое ускорение тела 3: $\varepsilon_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt} = \dfrac{d}{dt}(4t) = 4\,(1/c^2)$.

Ускорение точки C складывается из нормальной и касательной составляющих:

$$\overline{a}_C = \overline{a}^n_C + \overline{a}^\tau_C.$$

Нормальное ускорение точки С $a^n_C = \omega_3^2 R_3 = 12$ м/с^2.

Касательное ускорение точки С $a^\tau_C = \varepsilon_3 R_3 = 3$ м/с^2.

Модуль полного ускорения равен

$$|\overline{a}_C| = \sqrt{(a^n_C)^2 + (a^\tau_C)^2} = 12{,}3 \text{ м/с}^2.$$

9. ***Варианты заданий для самостоятельной работы.***

По заданной величине, указанной в таблице, определить скорости всех отмеченных на схеме точках, угловые скорости вращающихся тел и ускорение точки *B* при $t = 1$ *с*, если известны радиусы: $r_2 = 0{,}24$ *м*, $R_2 = 0{,}36$ *м*, $r_3 = 0{,}32$ *м*, $R_3 = 0{,}4$ *м*. Перемещение тела 1 - x_1 измеряется в метрах, скорости точек – *м/с*, угол поворота вращающихся тел - *рад*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_1=4t^2$	$V_A=2t$	$V_B=4t$	$\omega_2=8t$	$V_C=3t$	$\omega_3=6t$	$\omega_4=4t$	$V_D=6t$	$V_E=5t$	$\varphi_2=2t^2$

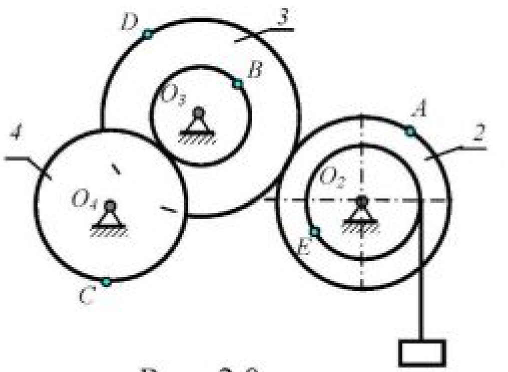

Рис. 2.0

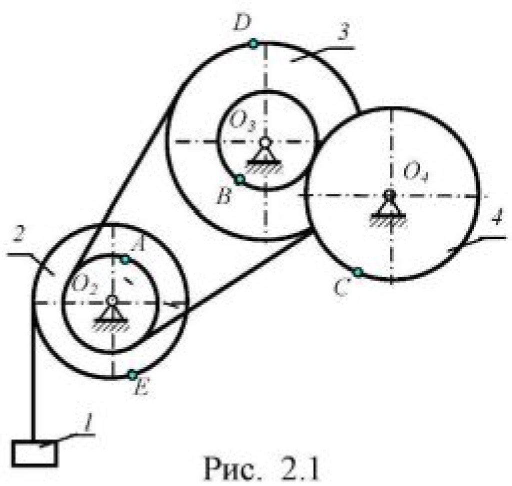

Рис. 2.1

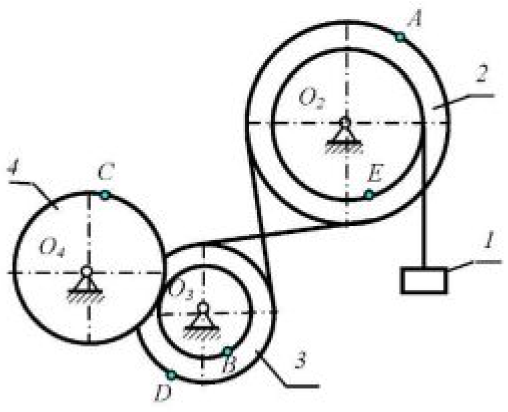

Рис. 2.2

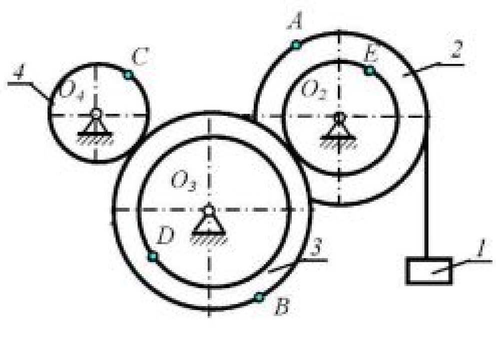

Рис. 2.3

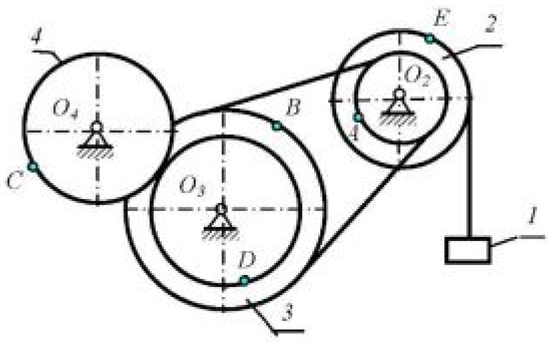

Рис. 2.4

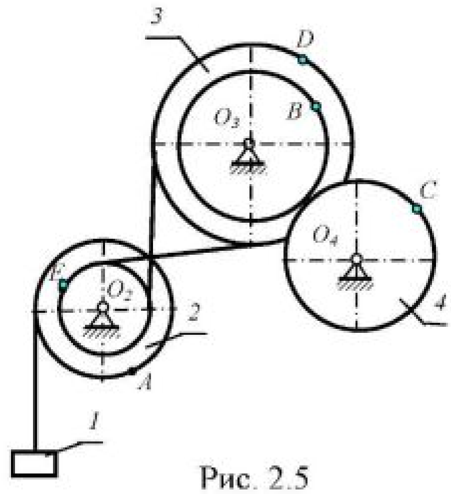

Рис. 2.5

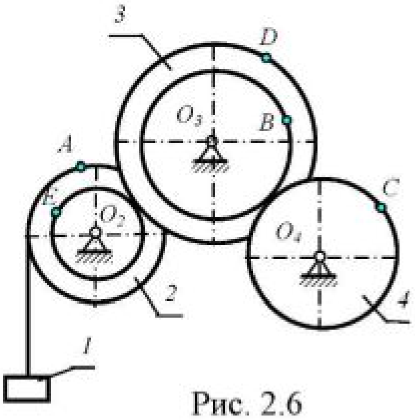

Рис. 2.6

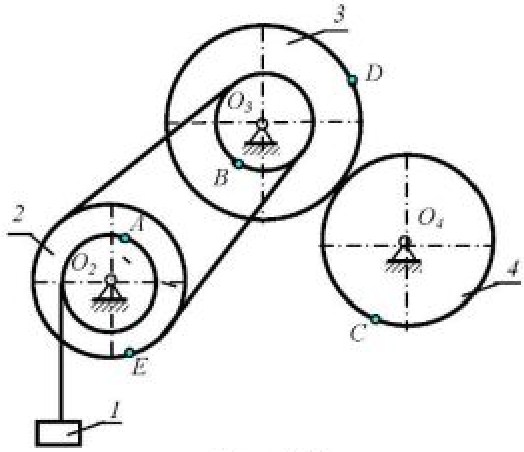

Рис. 2.7

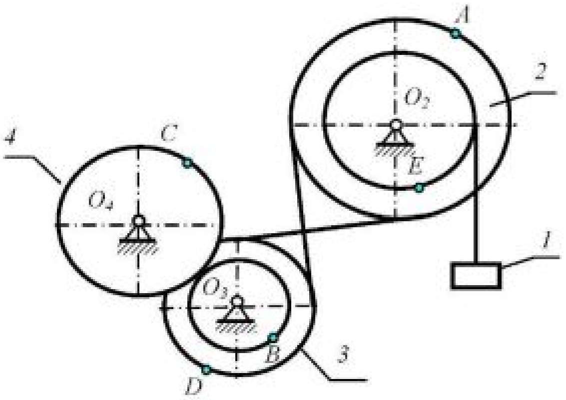

Рис. 2.8

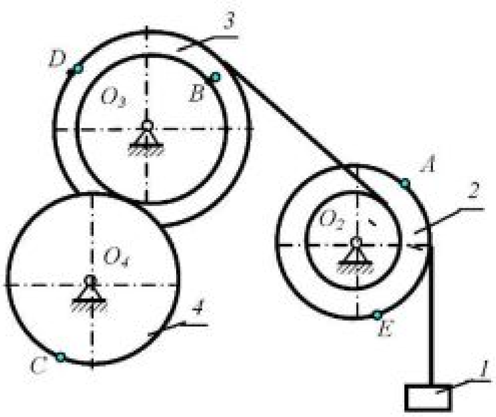

Рис. 2.9

10. Контрольные вопросы

1.Какое движение твердого тела называется поступательным? Основное свойство поступательного движения.

2.Какое движение твердого тела называется вращательным?

3. Какую траекторию описывает точка твердого тела при вращательном движении?

4. Что называется осью вращения?

5.Что называется углом поворота?

6.Как направлена скорость точки при вращательном движении?

7. Что называется угловой скоростью вращательного движения?

8. Как направлен вектор угловой скорости тела?

9. Что называется угловым ускорением?

10. В каких единицах измеряется угол поворота, угловая скорость и уг ловое ускорение?

11. Формула скорости точки при вращательном движении тела.

12. В каких единицах измеряется скорость и ускорение точки?

13. Как относятся скорости двух точек вращающегося тела?

14. Как направлено и чему равно нормальное ускорение точки?

15. Как направлено и чему равно касательное ускорение точки?

16. Какое ускорение имеет точка при равномерном вращении тела во круг оси?

17.Чему равен модуль полного ускорения точки?

18.Как осуществляется передача вращательного движения при внешнем зацеплении?

19.Как осуществляется передача вращательного движения при внутрен нем зацеплении?

20. Как связаны угловые скорости двух вращающихся тел, находящихся в зацеплении, внешнем и внутреннем?

21. Как связаны угловые скорости вращающихся тел, связанных ремен ной передачей?