ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА
Методические указания по проведению практических занятий и выполнению расчетно-графической работы

Представленные методические указания по проведению практических занятий и выполнению расчетно-графического задания по теме «Кинематика» могут использоваться следующим образом: при непосредственное проведение практических занятий по указанной теме в качестве сборника задач, а также использоваться как справочник и руководство при подготовке к контрольным работам (в том числе и выполнению расчётно-графической работы), практическим занятиям, зачёту, тестированию «ФЭПО».

В содержательном плане представленные методические указания ориентированы на перечень тем, указанных в рабочей программе специальности, а также перечень дидактических единиц, которые содержатся в тестовых материалах «ФЭПО».

Методические указания содержит необходимый теоретический минимум (определения, теоремы), примеры решения задач, набор задач по каждому разделу из сборников задач известных авторов: И. В. Мещерский, О.Э. Кепе.

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовки данных методических указаний автор учитывал следующие два документа: перечень дидактических единиц ГОС в тестовых материалах по механике «ФЭПО» для горных специальностей и рабочую программу специальности 130400.65 «Горное дело».

Согласно тестам «ФЭПО» в раздел (дидактическую единицу) «Кинематика» входят следующие 4 темы: реакции опор (направление); равновесие тел с учетом сил трения (тормоз); наименьший главный момент системы сил; координаты центра тяжести пластины.

Рабочая программа указывает следующий список тем: кинематика точки; способы задания движения точки; скорость и ускорение точки при векторном, координатном и естественном способах задания движения; кинематика твердого тела; вращательное движение тела; угловая скорость и угловое ускорение тела как векторы; поступательное движение твердого тела; плоскопараллельное движение тела; мгновенный центр скоростей; сферическое движение тела; общий случай движения тела; составное движение точки и тела; понятия составного движения точки; абсолютная скорость точки; абсолютное ускорение точки; кориолисово ускорение точки; составное движение тела.

На изложение тем, указанных в рабочей программе, отводится 6 часов. Понятно, что в этом случае лекционное изложение материала будет максимально сжатым, лаконичным и ориентированным на изложение только основных формул и примеров. На практических же занятиях возможно решение только основных, базовых задач

Представленные методические указания являются сборником коротких задач, дополненным минимально необходимой теорией, призванным помочь студентам в подготовке к лекциям, практическим занятиям; решению расчетно-графической работы; контрольным, зачёту, подготовке к тестированию «ФЭПО». В качестве центрального примера разобрано задание из расчётно-графической работы К7 на тему «Составное движение точки»

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и прилагаемых сил.

Другими словами, неважно **почему** движется тело, важно **как** оно движется.

Движение – это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Задать движение в кинематике означает задать положение этого тела относительно данной системы отсчета в любой момент времени. Существуют три способа задания движения тела: векторный, координатный естественный.

Векторный способ. Пусть точка ***M*** движется по отношению к некоторой системе отсчета **O*xyz***. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав радиус-вектор, соединяющий начало координат и точку ***M***: $\vec{r}=\vec{r}(t)$ (рисунок 1). Вектор в пространстве определяется тремя величинами – координатами конечной точки радиуса-вектора. Таким образом, получим следующую формулу:

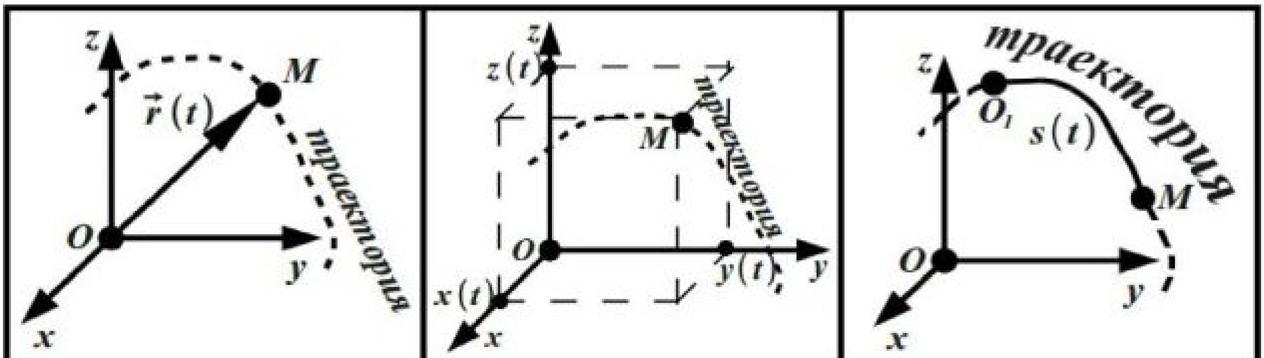
(1) $$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}.$$

Координатный способ. Пусть точка ***M*** движется по отношению к некоторой системе отсчета **O*xyz***. Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав законы изменения её координат в зависимости от времени (рисунок 1):

(2) $$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

Естественный способ. Пусть известна траектория движения точки ***M***. Зафиксируем на этой траектории некоторую начальную точку O_1, которую будем считать началом координат. Обозначим через ***s*** расстояние от O_1 до ***M*** вдоль известной траектории (рисунок 1). Зависимость величины ***s*** от времени определяет закон движения точки по заданной траектории:

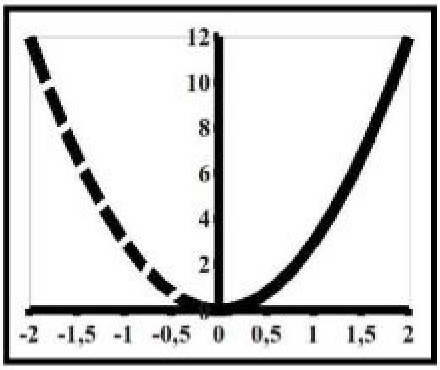
(3) $$s=s(t).$$



– Рисунок 1

Замечание 1. Векторный и координатный способы задания движения – это задание движение относительно некоторой внешней точки, которая не лежит на траектории, (например, наблюдение за движением машины с обочины); естественный же способ – относительно точки, которая лежит на траектории, (наблюдение за движением машины изнутри машины).

Пример 1. Движение точки на плоскости определяется следующими уравнениями: $x=2t$, $y=12t^2$. Определить траекторию движения тела.



Решение. Для определения траектории точки необходимо из уравнений движения исключить время t. Выразим время из первого уравнения: $t=x/2$. Подставим его во второе уравнение: $y=12\cdot(x/2)^2=3x^2$. Получили уравнение параболы. Однако траекторией движения точки является не вся парабола, а только та её часть, что начинается с точки $M_0(x(0);y(0))=M_0(0;0)$ и соответствует неотрицательному времени $t\geq 0$.

Существует взаимосвязь между координатным и естественным способами задания движения. Из математика известно, что элемент дуги траектории ds можно определить следующим образом: $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$. Откуда, интегрируя по времени на промежутке **[0; *t*]** и учитывая, что $df=f'(t)\,dt$, получим:

(4) $$s(t)=\int_0^t \sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt.$$

Пример 2. Получить естественную форму записи траектории, если задан закон движения $x=2t$, $y=12t$.

Решение. По аналогии с первым примером получим уравнение траектории $y=6x$. Далее, так как $x=2t$, $y=12t$, то $x'=2\Rightarrow(x')^2=4$ и $y'=12\cdot t\Rightarrow(y')^2=144$. По формуле (4) $s(t)=\int_0^t \sqrt{4+144}\,dt=\sqrt{148}\int_0^t dt=\sqrt{148}\,t$.

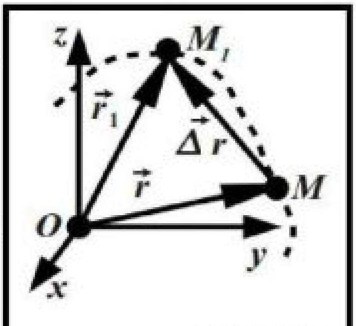
2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рассмотрим первую кинематическую характеристику движения точки – **скорость**, которая определяет быстроту перемещения и направление движения материальной точки в пространстве с течением времени относительно выбранной системы отсчёта.

Пусть движущаяся точка находится в момент времени t в положении M, которое определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент времени t_1 в положении M_1, которое определяется радиус-вектором $\vec{r}_1$. Тогда вектор перемещения точки $\vec{MM}_1$ за промежуток времени $\Delta t=t-t_1$ определяется следующим образом: $\vec{MM}_1=\vec{r}-\vec{r}_1=\Delta\vec{r}$ (рисунок 2).

Опр. 1. Средняя скорость тела за промежуток $\Delta t=t-t_1$ – это векторная величина, равная отношению вектора перемещения $\vec{MM}_1$ к соответствующему промежутку времени:

(1) $$\vec{v}_{cp}=\frac{\vec{MM}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$



- Рисунок 2

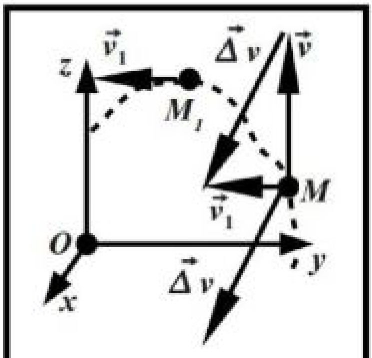
Опр. 2. Скорость тела – это векторная величина, равная предельному значению средней скорости при $\Delta t\to 0$:

(2) $$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Последнее выражение представляет собой первую производную по времени от векторной функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Таким образом, скорость – это векторная величина, равная первой производной от радиус-вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$ по времени: $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}=(\vec{r}(t))'$. Используя формулы (1, 2) из предыдущего пункта получим выражение скорости точки при координатном способе задания движения:

(3) $$v_x=x'(t),\ v_y=y'(t),\ v_z=z'(t),\ v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}.$$

Рассмотрим вторую кинематическую характеристику движения точки – **ускорение**, как с течением времени изменяется вектор скорости точки при её движении.



- Рисунок 3

Пусть в некоторый момент времени t точка находится в положении M и имеет скорость $\vec{v}$, а в момент времени t_1 – в положении M_1 и имеет скорость $\vec{v}_1$. Тогда за промежуток времени $\Delta t=t-t_1$ скорость точки получает приращение $\Delta\vec{v}=\vec{v}_1-\vec{v}$ (рисунок 3).

Опр. 3. Среднее ускорение тела за промежуток времени Δt – это векторная величина, равная отношению приращению скорости $\Delta\vec{v}$ к приращению времени Δt:

(4) $$\vec{a}_{cp}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

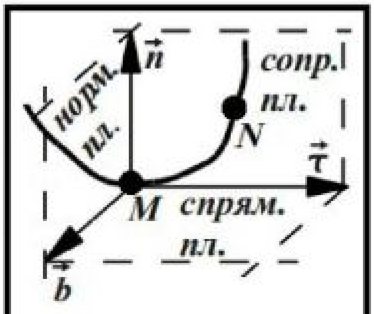
Опр. 4. Ускорение тела – это векторная величина, равная предельному значению среднего ускорения при $\Delta t\to 0$:

(5) $$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Последнее выражение представляет собой первую производную по времени от векторной функции $\vec{v}=\vec{v}(t)$ или вторую производную от функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Таким образом, ускорение – это векторная величина, равная первой производной от вектора скорости $\vec{v}=\vec{v}(t)$ или второй производной от радиус-вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$ по времени: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}=(\vec{v}(t))'=(\vec{r}(t))''$. Запишем координатную форму для ускорения точки:

(6) $$a_x=v_x'(t)=x''(t),\ a_y=v_y'(t)=y''(t),\ a_z=v_z'(t)=z''(t),\ a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Формулы (3, 6) применяются в случае координатного способа задания движения точки. В случае же естественного способа необходимом ввести дополнительную систему координат, привязанную к каждой точке M траектории – **естественный трехгранник**, который определяется с помощью трёх плоскостей: спрямляющей, нормальной и соприкасающейся. В качестве иллюстрации будем рассматривать плоскую кривую, которая вся лежит в некоторой плоскости (рисунок 4).



– Рисунок 4

Опр. 5. Касательная τ к кривой L – это прямая, которая является предельным положением секущей прямой MN, проходящей через две точки, при условии, что расстояние между этими точками стремится к нулю.

Опр. 6. Соприкасающаяся плоскость – это плоскость, которая проходит через касательную и точку кривой при условии, что эта точка стремится вдоль кривой к точке касания.

Замечание 2. В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость содержит всю кривою целиком.

Опр. 7. Нормальная плоскость – это плоскость, перпендикулярная касательной прямой в точке M.

Опр. 8. Спрямляющая плоскость – это плоскость, перпендикулярная соприкасающейся и нормальной плоскостям, и проходящая через точку M.

Опр. 9. Главная нормаль n – это линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей.

Опр. 10. Бинормаль b– это линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей.

На введенных линиях зададим пространственную систему координат $M\tau nb$ с центром в точке M. При этом ось $M\tau$ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния $s(t)$; Mn – по главной нормали в направлении вогнутости траектории; Mb – перпендикулярно к первым двум, так чтобы образовывалась правая тройка векторов.

Определим координаты векторов скорости и ускорения в полученной системе координат. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то из трех его проекций на оси $M\tau$; Mn; Mb останется только проекция на первую ось: v_τ . Используя правила дифференцирования сложной функции, получим: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{\tau}\cdot\frac{ds}{dt}$. Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$. При $\Delta s\to 0$ длина вектора $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ будет равна единице, а направление будет приближаться к направлению касательной. Таким образом, вектор $\vec{\tau}$ будет являться базисным вектором в естественной системе координат. Тогда величину скорости можно будет определить из соотношения:

(7) $$v=v_\tau=\frac{ds}{dt}.$$

Замечание 3. С помощью вектора $\vec{\tau}$ можно определить две геометрические величины, которые характеризуют кривизну заданной кривой.

Опр. 11. Соприкасающаяся окружность – это окружность, которая является наилучшим приближением заданной кривой в окрестности данной точки.

Замечание 4. Радиус кривизны ρ кривой в заданной точке – это радиус соприкасающейся окружности в указанной точке. Величина, обратная радиусу кривизны, называется **кривизной** $K=\frac{1}{\rho}$.

С другой стороны изогнутость кривой определяется поворотом касательного вектора $\vec{\tau}$ на бесконечно малом участке кривой $\Delta s\to 0$: $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$, то есть является векторной величиной.

Опр. 12. Вектор кривизны $\vec{K}$ определяется по формуле: $\vec{K}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}$.

Замечание 4. Можно показать, что вектор $\vec{K}$ пропорционален вектору главной нормали, то есть $\vec{K}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\cdot\vec{n}$.

Определим направление и величину вектора ускорения. Он расположен в соприкасающейся плоскости, поэтому его проекция на ось Mb будет равна нулю и останутся две проекции: a_τ, a_n, которые называются **касательным и нормальным** ускорением соответственно. Найдем формулы для их вычисления. Используем правила дифференцирования сложной функции.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}+\vec{\tau}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}=\vec{K}\cdot v^2+\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}=$$
$$=\vec{n}\cdot\frac{v^2}{\rho}+\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}$$

Таким образом, получаем что $\vec{a}_n=\vec{n}\cdot\frac{v^2}{\rho}=\vec{n}\cdot a_n$, $\vec{a}_\tau=\vec{\tau}\cdot\frac{dv}{dt}=\vec{\tau}\cdot a_\tau$, откуда

(8) $$a_n=\frac{v^2}{\rho},\ a_\tau=\frac{dv}{dt},\ a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}.$$

Замечание 5. Найдем формулу для касательного ускорения удобную в случае, когда движение задано координатным способом: $v^2=v_x^2+v_y^2+v_y^2\Rightarrow$
$\Rightarrow 2v\,v'=2v_x v_x'+2v_y v_y'+2v_z v_z'=2v_x a_x+2v_y a_y+2v_z a_z$. Так как из (8) $v'=a_\tau$, то получаем формулу

(9) $$a_\tau=\frac{(v_x a_x+v_y a_y+v_z a_z)}{v}.$$

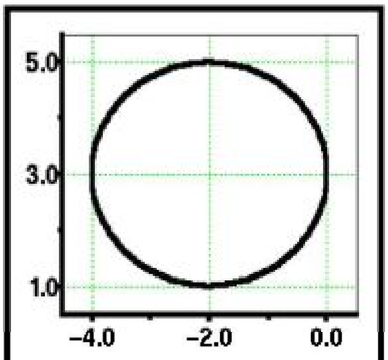
Пример 1. По заданным уравнениям точки установить вид траектории, найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное, нормальное ускорение, радиус кривизны. $x=2\cos(\pi t/3)-2$, $y=-2\sin(\pi t/3)+3$, $z=1{,}5t$, $t=1$. Построить траекторию движения точки, кривую изменения скорости и ускорения с помощью электронной таблицы MS ECXEL, OO CALC.

Решение. Найдем уравнение траектории: $(x+2)^2+(y-3)^2=$ $=4\cos^2(\pi t/3)+4\sin^2(\pi t/3)=4$ – получили уравнение окружности (рисунок 5). Найдем положение точки на плоскости и пространстве: $x(1)=2\cdot 0{,}5-2=-1$, $y(1)=-2\cdot 0{,}866+3=4{,}732$, $z(1)=1{,}5$. Найдем скорость и ускорение по формулам (3, 6):

$v_x=-\frac{2}{3}\pi\sin(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}814$, $v_y=-\frac{2}{3}\pi\cos(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}047$

$a_x=-\frac{2}{9}\pi^2\cos(\frac{\pi t}{3})\approx-1{,}097$, $a_y=\frac{2}{9}\pi^2\sin(\frac{\pi t}{3})\approx 1{,}899$,

$v_z=1{,}5$, $a_z=0$.



- Рисунок 5

В данном примере можно показать, что скорость и ускорение будут постоянными по величине. Для скорости на плоскости $v^2=v_x^2+v_y^2=\frac{4}{9}\pi^2\left(\sin^2(\frac{\pi t}{3})+\cos^2(\frac{\pi t}{3})\right)=\frac{4}{9}\pi^2\approx 4{,}386$, а для пространства будет $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2=4{,}386+1{,}5^2=6{,}636$. Для ускорения на плоскости и пространстве получим одно и тоже значение $a^2=a_x^2+a_y^2=\frac{4}{81}\pi^4\left(\sin^2(\frac{\pi t}{3})+\cos^2(\frac{\pi t}{3})\right)=\frac{4}{81}\pi^4\approx 4{,}810$. Тогда $v_{2D}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\approx 2{,}094$, $v_{3D}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\approx 2{,}576$ и $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\approx 2{,}193$.

По формуле (10) найдем касательное ускорение на плоскости:

$a_\tau = \dfrac{(-1{,}814)\cdot(-1{,}097)+(-1{,}047)\cdot(1{,}899)}{2{,}094} \approx 8\cdot 10^{-4} \approx 0$ (так как $a_z = 0$, то в пространстве величина a_τ будет такой же). По формуле (9) найдем нормальное ускорение $a_n = \sqrt{2{,}193^2 - 0^2} \approx 2{,}193$. По формуле (8) найдем радиус кривизны для плоскости и пространства: $\rho_{2D} = 2{,}092^2/2{,}193 \approx 1{,}996$ и $\rho_{3D} = 2{,}576^2/2{,}193 \approx 3{,}026$.

Ответ. $v_{2D} \approx 2{,}094$, $v_{3D} \approx 2{,}576$ $a \approx 2{,}193$, $\rho_{2D} \approx 1{,}996$, $\rho_{3D} \approx 3{,}026$.

Приведём **частные случаи** движения точки.

1. Равномерное прямолинейное движение: $v = const$, $\rho = \infty$. В этом случае $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_\tau = 0$ и $a = 0$.

2. Равномерное криволинейное движение: $v = const$, $\rho \neq \infty$. В этом случае $\vec{a}_n \neq 0$, $\vec{a}_\tau = 0$ и $a = a_n$.

3. Неравномерное прямолинейное движение: $v \neq const$, $\rho = \infty$. В этом случае $\vec{a}_n = 0$ $\vec{a}_\tau \neq 0$ и $a = a_\tau$.

4. Неравномерное криволинейное движение: $v \neq const$, $\rho \neq \infty$. В этом случае $\vec{a}_n \neq 0$, $\vec{a}_\tau \neq 0$ и $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

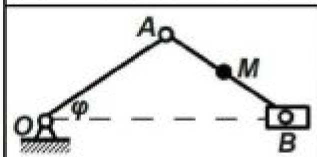
Замечание 6. Можно отметить, что в каждый момент времени нормальное ускорение фиксирует степень кривизны траектории при заданной скорости, а касательное ускорение фиксирует изменение скорости во времени.

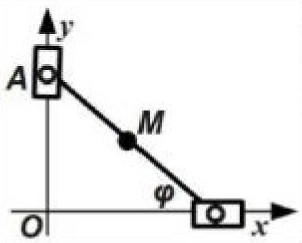
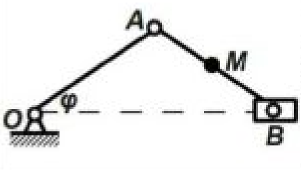
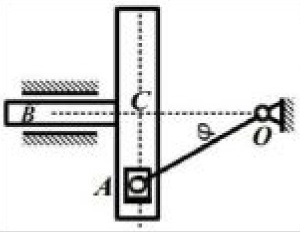
Приведём два **частных уравнения** естественного закона движения точки.

При равномерном движении $v = const$. Так как $v = \dfrac{ds}{dt}$, то $ds = v\,dt \Rightarrow s = vt + c$. Пусть известно, что $s(0) = s_0$, тогда $s = vt + s_0$.

В случае неравномерного равнопеременного движения будем иметь $a_\tau = const$. Тогда $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a_\tau\,dt \Rightarrow v = a_\tau t + c_1$, учитывая что $v = \dfrac{ds}{dt}$ получим следующее выражение: $\dfrac{ds}{dt} = a_\tau t + c_1 \Rightarrow s = a_\tau t^2 + c_1 t + c_2$. Предполагая, что $s(0) = s_0$ и $v(0) = v_0$, получим $s = a_\tau t^2 + v_0 t + s_0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<table>
<tr><td colspan="2">1 (7.1.1). Заданы уравнения движения точки $x = 1 + 2\sin(0{,}1t)$, $y = 3t$. Определить координату x в тот момент, когда её координата $y = 12$. Ответ: 1,78</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 (7.1.6). Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = t$. Определить время t, когда расстояние от точки до начала координат равно 10 м. Ответ: 4,47.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>3 (10.12). Положение кривошипа OA определяется углом $\varphi = 10t$. Длины стержней $OA = AB = 80$ см. Найти уравнения движения, траекторию и координаты точки M, если $AM = BM$ и $t = \pi/30$ с. Ответ: $x_M = 120\cos(10t)$, $y_M = 40\sin(10t)$ см, эллипс.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>4 (7.2.6). положение линейки AB определяется углом $\varphi=0{,}5t$. Определить координаты и величину скорости точки M в момент времени $t=2$ с, если $BM=20$ см.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 (12.27). Дан закон движения точки в координатной форме: $x=2t$, $y=t^2$ см. Определить скорость и ускорение в момент времени $t=1$. Ответ: $v=2\sqrt{2}$, см/с; $a=2$ см/с^2.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6 (12.18). Найти траекторию, скорость, ускорения точки M шатуна AB, если $OA=AB=0{,}6$ м, $MB=0{,}2$ м, $\varphi=4\pi t$ в момент времени, когда $\varphi=0$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>7 (7.2.7). Определить закон движения, скорость и ускорение точек A и B в момент времени $t=6$ с, если $OA=0{,}1$, $BC=0{,}3$ м, $\varphi=6t$. Ответ: $v_B=0{,}595$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8 (7.5.8). Дан закон движения в прямоугольных координатах: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$. Определить момент времени, когда $s=7$, если известно, что $s(0)=0$. Ответ: 2,33</td></tr>
<tr><td colspan="2">9. Точка M движется по плоскости по окружности радиуса 0,1 м согласно уравнению в естественной форме: $s=5\pi\sin\dfrac{\pi t}{6}$. Найти положение на траектории, скорость, ускорение точки в момент времени $t=7$ с. Ответ: $v=7{,}12$ см/с, $a=5{,}51$ см/с^2.</td></tr>
<tr><td colspan="2">10. Дан закон движения в прямоугольной системе координат: $x=4t+5$, $y=5t^2+1$. Определить уравнение траектории, скорость, полное, касательное, нормальное ускорение, радиус кривизны в момент времени $t=1$ с. Ответ: $v=10{,}8$ м/с, $a=10{,}0$ м/с^2, $\rho=31{,}2$ м.</td></tr>
</table>

3. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Различают четыре простейших движения твердого тела: 1) поступательное; 2) вращательное; 3) плоское; 4) сферическое. Рассмотрим только первые три из них.

В дальнейшем будем рассматривать только первые три типа движения.

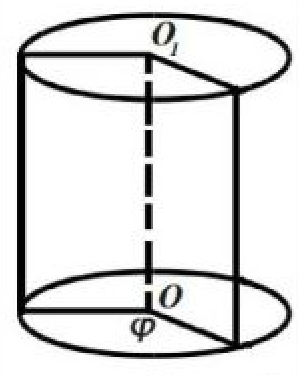
Опр. 1. Поступательное движение твердого тела – это движение, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Теорема 1. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Замечание 1. Из теоремы следует, что поступательное движение тела можно определить с помощью движения одной произвольной точки этого тела (как правило, центра тяжести).

Опр. 2. Вращательное движение твердого тела – это такое движение, при котором какие-нибудь две точки тела остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через указанные две точки называется **осью вращения**; остальные точки движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, радиусы которых равны расстоянию этих точек до оси вращения.



– Рисунок 1

Вращательное движение определяется величиной угла поворота тела в зависимости от времени:

(1) $$\varphi=\varphi(t).$$

Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются **угловая скорость** и **угловое ускорение**. По аналогии с выводом уравнений (3, 6) из предыдущего пункта, получим уравнения

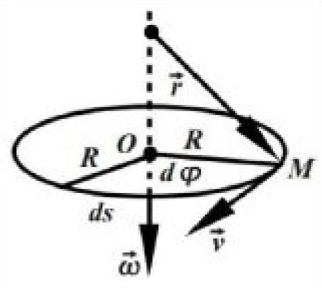
(2) $$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\varphi', \quad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\omega}{dt}=\omega'=\varphi''.$$

Замечание 2. Векторы скорости и ускорения направлены вдоль оси вращения. При этом, вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту сторону, откуда видно, что тело вращается против часовой стрелки. Вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с вектором $\vec{\omega}$, если тело вращается ускоренно, и в противоположную – если замедленно.

Замечание 3. Запишем формулы для равномерного и равнопеременного вращательного движения:

(3) $$\varphi=\frac{1}{2}\varepsilon t^2+\omega_0 t+\varphi_0 \text{ и } \varphi=\omega t+\varphi_0.$$

Определим скорости и ускорения точек вращающегося тела. Рассмотрим точку $\boldsymbol{M}$ твердого тела, находящуюся на расстоянии $\boldsymbol{R}$ от оси вращения. При вращении тела точка $\boldsymbol{M}$ будет описывать окружности радиуса $\boldsymbol{R}$, плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр $\boldsymbol{O}$ лежит на самой оси. Если за время $\boldsymbol{dt}$ происходит поворот тела на угол $\boldsymbol{d\varphi}$, то точка $\boldsymbol{M}$ совершает перемещение $ds=R\cdot d\varphi$.



– Рисунок 2

Тогда числовое значение скорости будет определяться по формуле:

(4) $$v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\varphi}{dt}=R\omega.$$

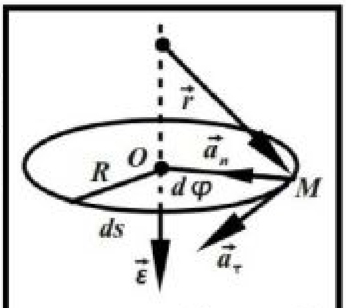
Определим направление скорости точек тела при его вращении. Поскольку траекторией точки тела является окружность, то вектор скорости направлен по касательной к окружности вращения точки и определяется формулой (рисунок 2):

(5) $$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r},$$

где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки вращения из произвольной точки, расположенной на оси вращения тела.

Поскольку при вращении тела траекторией для любой его точки является окружность, то вектор ускорения будет состоять из двух составляющих: касательного и нормального ускорений. Величины этих ускорений будут определяться по формулам (8) из предыдущего пункта:

(6) $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon\ ,\ a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2\ .$$



– Рисунок 3

Направление вектора ускорения и его компонент определим с помощью дифференцирования векторного произведения (5): $\frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r + \vec\omega\times\frac{d\vec r}{dt} = \vec\varepsilon\times\vec r + \vec\omega\times\vec v$. Получаем формулы (рисунок 3):

(7) $$\vec a_\tau = \vec\varepsilon\times\vec r\ ,\ \vec a_n = \vec\omega\times\vec v\ ,\ \vec a_\tau\perp\vec a_n\ ,\ a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\ .$$

Замечание 4. В случае вращательного движения тела, вектор $\vec a_\tau$ обычно называется вращательным ускорением, а вектор $\vec a_n$ – центростремительным. Изменение терминологии связано с тем, что в случае более сложного сферического движения эти векторы уже не будут направлены по касательной и по нормали к траектории.

Рассмотрим важное приложение теории вращательного движения: передаточные механизмы.

Опр. 3. Передаточный механизм – это механизм, который переназначен для передачи вращения от ***ведущего*** вала к ***ведомому***.

Существуют три основных способа передачи вращения: фрикционная (за счет сцепления), зубчатая, ременная.

Рассмотрим первые две передачи. В точке соприкосновения вращательная скорость обоих колес v одинакова и определяется по формуле (4): $v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$. Аналогичное соотношение выполняется и для ременной передачи, но не для одной точки, а для всех точек ремня.

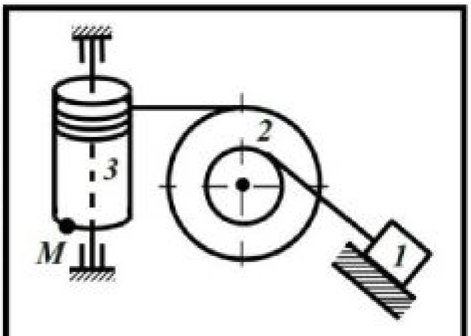
Опр. 4. Передаточное число определяется по следующим формулам:

(8) $$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}\ ,,$$

где ω_1, r_1, z_1 – угловая скорость, радиус, число зубцов ведущего колеса, ω_2, r_2, z_2 – угловая скорость, радиус, число зубцов ведомого колеса.

Пример 2. Дано: $R_2=30\,;r_2=15\,;R_3=20\,;x_0=10\,;v_0=7\,;\ x_2=128\,;t_2=2\,;t_1=1$.

Найти: Скорость и ускорение точки M и груза в момент времени t_1 (рисунок 4).



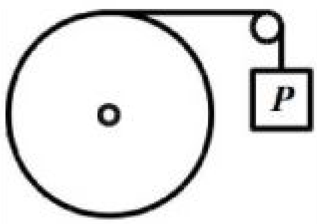
– Рисунок 4

Решение. $x = c_2t^2 + c_1t + c_0$; $x(0)=c_0=x_0=10$; $v(0)=x'(0)=c_1=v_0=7$; $x(t_2)=x_2\Rightarrow$ $\Rightarrow 4c_2+7\cdot2+10=128\Rightarrow c_2=26$, то есть уравнение движения груза имеет вид: $x=26t^2+7t+10$; скорость груза – $v=52t+7$; ускорение груза – $a=52$. Запишем уравнения, связывающие скорость движения груза и угловые скорости колеса и цилиндра. $v=r_2\omega_2$; $R_2\omega_2=R_3\omega_3$ Тогда угловая скорость цилиндра определяется по формуле , а угловое ускорение – $\varepsilon_3 = 5{,}2$. Определим скорость и ускорение точки M. $v = R_3 \omega_3 = 20 \cdot (5{,}2 \cdot 1 + 0{,}7) = 118$, $a_\tau = R_3 \varepsilon_3 = 20 \cdot 5{,}2 = 104$, $a_n = R_3 \omega_3^2 = 20 \cdot 5{,}9^2 = 696{,}2$, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{104^2 + 696{,}2^2} = 703{,}9$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

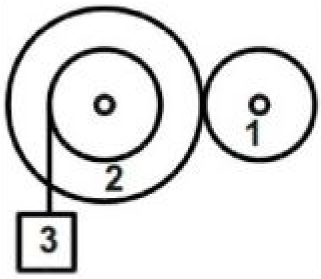
1 (8.2.3). Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 секунд 100 оборотов. Найти угловое ускорение ротора. **Ответ**: 50,3 1/с^2.

2 (8.2.6). Тело вращается по закону $\varphi = t^3 + 2$. Определить угловые скорость и ускорение тела в момент времени, когда $\varphi = 10$. **Ответ**: $\omega = 12$.

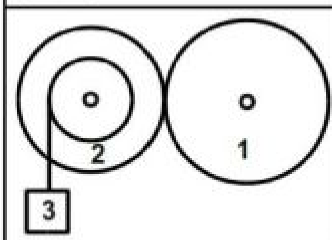


3 (13.18). Колесо радиуса 0,1 м приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = t^2$ м, где x – расстояние от гири до точки схода нити с поверхности колеса. Определить угловые скорость и ускорение, линейные скорость и ускорение точек обода колеса в момент времени $t = 1$ с. **Ответ**: $\omega = 20$ 1/с, $\varepsilon = 20$ 1/с^2, $v = 2$ м/с, $a = 40{,}05$ м/с^2.

4 (8.3.7). Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2$. Определить скорость и ускорение точки колеса на расстоянии 0,2 м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с. **Ответ**: $v = 1{,}6$ м/с, $a = 12{,}825$ м/с^2.



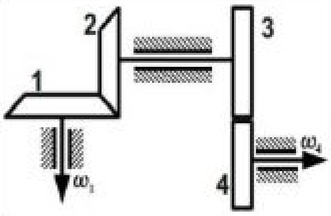
5 (8.4.10). Какой должна быть частота обращения (об/мин) шестерни 1, чтобы скорость груза 3 была равна 0,9 м/с, если число зубцов $z_1 = 26$, $z_2 = 78$, а радиус $r_2 = 0{,}1$ м. **Ответ**: $n_1 = 258$.



6 (8.4.11). Угловая скорость первого колеса $\omega_1 = 2t^2$. Определить скорость и ускорение груза 3 в момент времени $t = 2$ с, если радиусы шестерен $R_1 = 1$, $R_2 = 0{,}8$, $r_2 = 0{,}4$ м. **Ответ:** $v = 4$ м/с, $a = 4$ м/с^2.

7. Маховик радиуса 0,5 м вращается так, что его угловая скорость меняется по закону $\omega = 0{,}25 e^{2t}$ 1/с. Для момента времени $t = 0{,}5$ с после начала движения определить скорость и ускорение точки на ободе маховика. Установить, за какое время маховик сделает 100 полных оборотов. **Ответ**: $v = 0{,}340$ м/с; $a = 0{,}718$ м/с^2, $t = 4{,}26$ с.

8 (14.3). Два колеса с радиусами $R_1 = 0{,}75$, $r_2 = 0{,}3$ м связаны ременной передачей. После пуска мотора угловое ускорение первого колеса равно $\varepsilon_1 = 0{,}4\pi$ 1/с^2. Определить, через какое время угловая скорость второго колеса будет равна $\omega_2 = 10\pi$ 1/с. **Ответ**: 10 с.

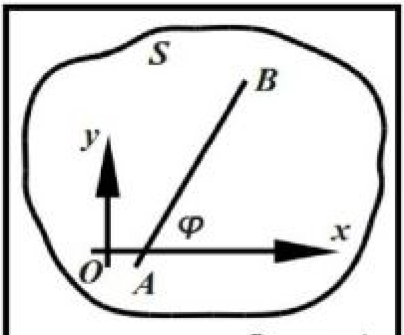
	**9 (8.4.6)**. Редуктор состоит из конических и цилиндрических передач с числом зубцов $z_1=18$, $z_2=26$, $z_3=28$, $z_4=40$. Угловая скорость первой шестерни равна $\omega_1=20t$ 1/с. Определить угловую скорость и ускорение четвёртой шестерни. **Ответ**: $\omega_4=96{,}9$ 1/с.

4. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Опр. 1. Плоскопараллельным (плоским) называется движение тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Пусть дано тело и зафиксирована плоскость. Рассмотрим сечение S этого тела плоскостью Oxy, параллельной фиксированной плоскости. Из определения следует, что для описания плоского движения тела достаточно найти законы движения сечение S этого тела в плоскости Oxy. Определим в сечении S некоторый отрезок AB, расположенный под углом φ к оси Ox. Движение в плоскости Oxy сечения S эквивалентно движению в этой плоскости отрезка AB. В свою очередь, движение отрезка AB определяет изменение координат точки A, а также изменением угла поворота отрезка. Таким образом, получаем три уравнения плоского движения (рисунок 1):

(1) $$x_A=x(t);\ \ y_A=y(t);\ \ \varphi=\varphi(t)$$

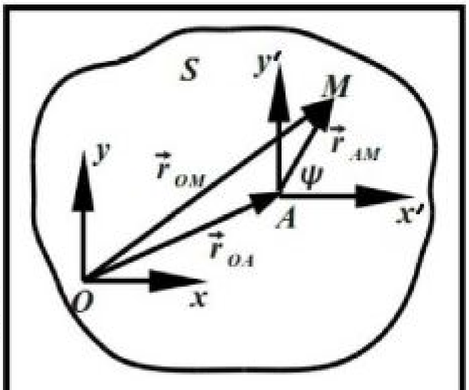


– Рисунок 1

Опр. 2. Точка A, выбранная для определения положения фигуры S, называется **полюсом**.

Замечание 1. Первые два уравнения из **(1)** определяют поступательное движение тела вместе с полюсом; третий закон определяет вращательное движение этого тела вокруг полюса. Таким образом, плоскопараллельное движение состоит из двух: поступательного и вращательного движения. Основные кинематические характеристики плоского движения – это скорость и ускорение поступательного движения $\vec{v}_{пост}=\vec{v}_A$, $\vec{a}_{пост}=\vec{a}_A$, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через полюс.

Найдем формулы для скорости движения произвольной точки тела. Зададим две системы координат: Oxy и $Ax'y'$ (рисунок 2). Тогда положение точки M определяется равенством $\vec{r}_{OM}=\vec{r}_{OA}+\vec{r}_{AM}$, тогда вектор скорости $\vec{v}_M$ определится следующим образом:



– Рисунок 2

(2) $$\vec{v}_M=\frac{d\vec{r}_{OM}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}+\frac{d\vec{r}_{AM}}{dt}=\vec{v}_{OA}+\vec{v}_{AM},$$

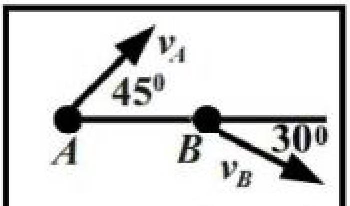
где $\vec{v}_{OA}$ – скорость поступательного движения полюса A; $\vec{v}_{AM}$ – скорость вращательного движения точки M вокруг полюса A.

Учитывая результаты предыдущего пункта, получим что $\vec{v}_{AM}=\vec{\omega}_{AM}\times\vec{r}_{AM}$ и $\vec{v}_{AM}\perp\vec{r}_{AM}$, а её числовое значение равно $v_{AM}=\omega_{AM}\cdot r_{AM}$.

Скорость точки тела при плоском движении можно определить с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой.

Пример 1. Дан отрезок ***AB***. Известны величина и направление скорости точки ***A*** $v_A = 3$ м/с, а также направление точки ***B*** (рисунок 3). Найти её величину.



– Рисунок 3

Решение. По **теореме 1** $v_A \cdot \cos 45^0 = v_B \cdot \cos 30^0$, тогда $v_B = \dfrac{0{,}707 \cdot v_A}{0{,}866} = 2{,}449$ м/с.

Замечание 2. Теорема 1 не позволяет найти все кинематические характеристики движения отрезка ***AB***, в частности его угловую скорость ω_{AB}. Поэтому определим новое кинематическое понятие.

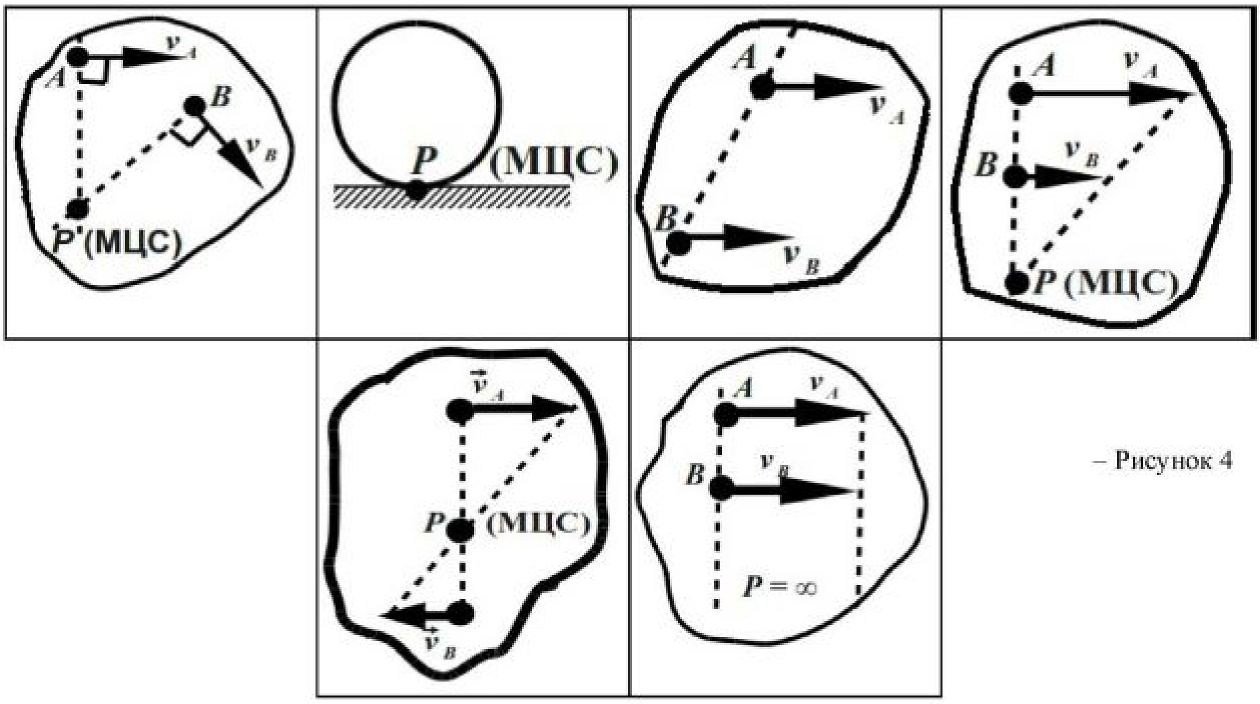
Опр 3. Мгновенный центр скоростей (МЦС) ***P*** плоской фигуры – это точка этой фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Замечание 3. МЦС – это точка плоскости, вокруг которой в данный момент времени вращается фигура. Тогда плоское вращательно-поступательное движение можно рассматривать как мгновенно-вращательное вокруг оси, проходящей через МЦС, откуда.

Рассмотрим способы определения положения МЦС (рисунок 4).

1) МЦС – точка пересечения перпендикуляров к скоростям точек ***A*** и ***B*** $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$.

2) Если тело катится без скольжения по некоторой неподвижной линии, то мгновенным центром скоростей является точка касания тела и линии.



– Рисунок 4

3) Если скорости точек ***A*** и ***B*** v_A, v_B параллельны друг другу и при этом линия ***AB*** не перпендикулярна v_A, то МЦС расположен в бесконечности и $v_A = v_B$, а $\omega = 0$.

4) Если скорости точек ***A*** и ***B*** v_A, v_B параллельны друг другу и при этом линия ***AB*** перпендикулярна v_A, то МЦС – точка пересечения линии ***AB*** и прямой, которая соединяет конечные точки векторов v_A, v_B. Если же $v_A = v_B$, то МСЦ устремляется в бесконеч-

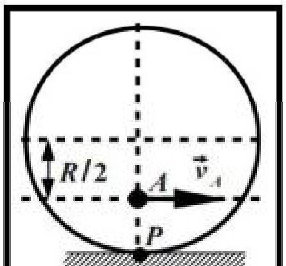
ность.

5) Если скорости точек A и B v_A, v_B параллельны друг другу и направлены в противоположные стороны, то МЦС расположен на пересечении линий, которые соединяют начальные и конечные точки векторов скоростей.

Замечание 4. Так как МЦС – это точка, вокруг которой вращается тело, то можно выбрать эту точку в качестве полюса вращения. Тогда по формуле (2) получим, что $\vec{v}_M=\vec{v}_{OP}+\vec{v}_{PM}$ и так как скорость $\vec{v}_P=\vec{v}_{OP}=0$, то $\vec{v}_M=\vec{v}_{PM}$. Учитывая, что точка M вращается вокруг полюса P, получим формулы:

(3) $\vec{v}_M=\vec{v}_{PM}=\vec{\omega}_{PM}\times\vec{PM}$ и $v_M=v_{PM}=\omega_{PM}\cdot PM$.

Пример 2. Колесо радиуса $R=0{,}2$ м катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Скорость точки A равна $v_A=5$ м/с. Определить угловую скорость колеса (рисунок 5).

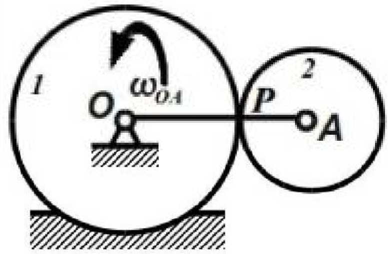


– Рисунок 5

Решение. Так как колесо катится без скольжения, то это второй случай и МЦС P расположен в точке касания колеса и поверхности. Тогда по формулам (3) после замены M на A получим $v_A=\omega_{AP}\cdot AP=\omega_K\cdot\dfrac{R}{2}$. Следовательно $\omega_K=\dfrac{2\cdot v_A}{R}=\dfrac{10}{0{,}2}=50$ 1/с.

Ответ: $\omega_K=50$ 1/с.

Пример 3. Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1. Механизм приводится в действие кривошипом OA с угловой скоростью $\omega_{OA}=20$ 1/с. Радиусы колес $R_1=0{,}3$, $R_2=0{,}1$ м. Найти угловую скорость второго колеса (рисунок 6).



– Рисунок 6

Решение. Так как колесо катится без скольжения, то это также второй случай и МЦС P расположен в точке касания подвижного и неподвижного колес. Тогда по формулам (3) после замены M на A получим $v_A=\omega_{AP}\cdot AP=\omega_2\cdot R_2$. Найдём величину скорости v_A:

$v_A=OA\cdot\omega_{OA}=(R_1+R_2)\cdot\omega_{OA}=0{,}4\cdot 20=8$ м/с. Следовательно $\omega_2=\dfrac{v_A}{R_2}=\dfrac{8}{0{,}1}=80$ 1/с.

Ответ: $\omega_2=80$ 1/с.

Найдем формулы для определения ускорения произвольной точки тела. Вычислим производную от формулы (2):

(3) $$\vec{a}_M=\frac{d}{dt}(\vec{v}_A+\vec{v}_{AM})=\vec{a}_A+\vec{a}_{AM},$$

где $\vec{a}_A$ – ускорение поступательного движения полюса A; $\vec{a}_{AM}$ – ускорение вращательного движения точки M вокруг полюса A.

Отрезок AM вращается вокруг полюса A, поэтому его ускорение можно разложить на касательную и нормальную компоненты: $\vec{a}_{AM}=\vec{a}^{\tau}_{AM}+\vec{a}^{n}_{AM}$. При этом вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}_{AM}$ направлен перпендикулярно AM в сторону вращения, если оно ускоренное, и против вращения, если замедленное; вектор нормального ускорения $\vec{a}^{n}_{AM}$ всегда направлен от точки M к полюсу A. Если же и полюс A и точка M движутся не прямолинейно, то и их ускорения тоже можно представить как $\vec{a}_A=\vec{a}^{\tau}_A+\vec{a}^{n}_A$ и $\vec{a}_{AM}=\vec{a}^{\tau}_{AM}+\vec{a}^{n}_{AM}$. Дальнейшее решение осуществляется с помощью проектирования равенства (3) на оси координат Ox, Oy.

Опр. 4. Мгновенный центр ускорений (МЦУ) Q тела – это точка тела, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

МЦУ можно определить, если известны ускорение $\vec{a}_A$ какой-либо точки A, величины ε, ω тела, которому принадлежит точка A. **Алгоритм** поиска искомой точки Q следующий:

1. Определить угол μ из соотношения: $tg\,\mu = \varepsilon / \omega^2$.

2. Определить направление вектора ускорения $\vec{a}_A$. Повернуть этот вектор вокруг точки A на угол μ в сторону направления углового ускорения ε.

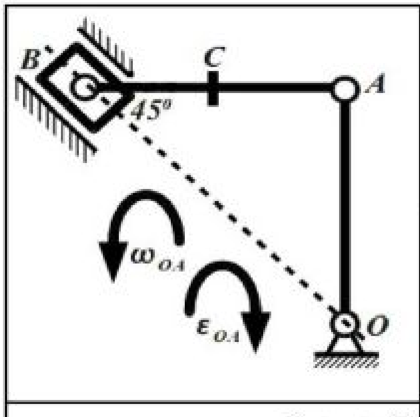
3. Вдоль полученного направления отложить отрезок AQ, равный $AQ = \dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Точка Q и будет мгновенным центром ускорений.

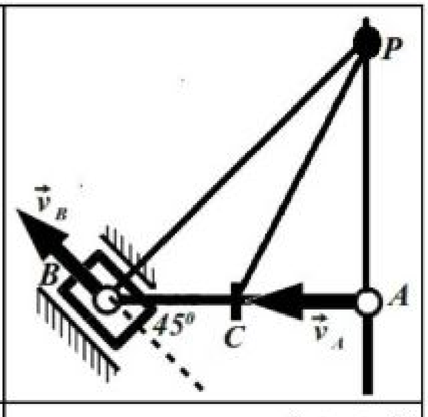
Замечание 5. Поиск точки мгновенного центра ускорений позволяет сделать проверку правильности вычислений кинематических характеристик плоского движения тела.

Пример 3. Дано: $OA = 40$, $AC = 20$ см, $\omega_{OA} = 5$ 1/с, $\varepsilon_{OA} = 10$ 1/с^2 (рисунок 7). Найти: скорости и ускорения точек A, B и C, угловую скорость, угловое ускорение звена AB.

Решение. Модуль скорости пальца A кривошипа OA, который совершает вращательное движение, определится из формулы: $v_A = R \cdot \omega = OA \cdot \omega_{OA} = 5 \cdot 40 = 200$ м/с. Направлен вектор скорости перпендикулярно кривошипу OA в направление угловой скорости. Скорость ползуна B будет направлена вдоль прямой OB. Положение МЦС P определим по первому способу (рисунок 8). Используя формулы (3) запишем соотношения для скоростей точек A, B и C: $v_A = AP \cdot \omega_{AB}$, $v_B = BP \cdot \omega_{AB}$, $v_C = CP \cdot \omega_{AB}$. Из первого соотношения найдём угловую скорость звена AB: $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{200}{40} = 5$. Для второго и третьего соотношения надо найти BP и CP. Из треугольника ABP следует, что $AP = AB = 40$, тогда для гипотенузы BP получим: $BP = \sqrt{40^2 + 40^2} = 56{,}569$, а для отрезка CP: $CP = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44{,}721$. Тогда $v_B = BP \cdot \omega_{AB} = 282{,}845$, $v_C = CP \cdot \omega_{AB} = 223{,}605$ м/с.

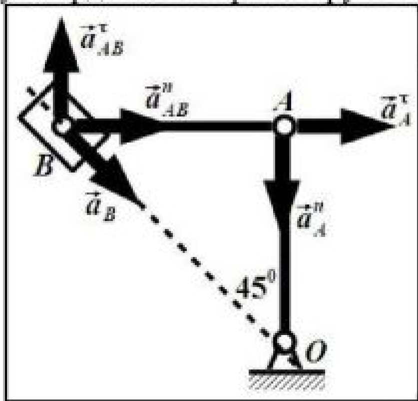


– Рисунок 7

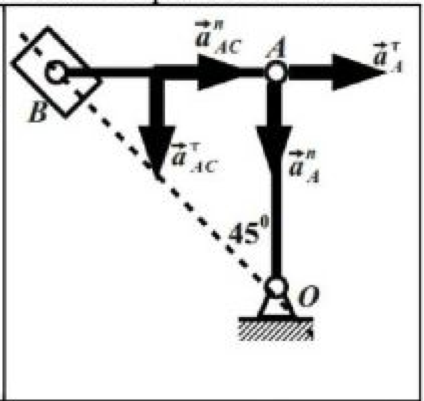


– Рисунок 8

Определим ускорение точки A на основании теории вращательного движения (рисунок 9). Получим, что $a_A^\tau = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 40 = 400$, $a_A^n = OA \cdot \omega_{OA}^2 = 40 \cdot 25 = 1000$ м/с^2, тогда полное ускорение равно: $a_A=\sqrt{(a_A^\tau)^2+(a_A^n)^2}=1077{,}033$.Определим ускорение точки B исходя из уравнения (3) с учетом дальнейших пояснений: $\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{AB}=\vec{a}_A^\tau+\vec{a}_A^n+\vec{a}_{AB}^\tau+\vec{a}_{AB}^n$. Введем систему координат и спроектируем записанное равенство на оси Ox и Oy.



– Рисунок 9



– Рисунок 10

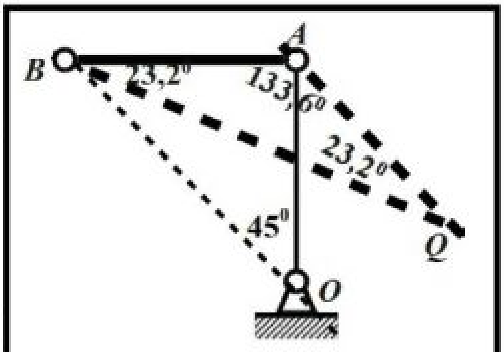
Получим следующую систему уравнений: $\begin{cases} 0{,}707\,a_B=a_A^\tau+a_{AB}^n \\ -0{,}707\,a_B=-a_A^n+a_{AB}^\tau \end{cases}$. Найдем недостающие компоненты: $a_{AB}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=40\cdot 25=1000$ и $a_{AB}^\tau=AB\cdot\varepsilon_{AB}=40\cdot\varepsilon_{AB}$. Тогда $a_B=\dfrac{1400}{0{,}707}=1980{,}198$, $a_{AB}^\tau=1000-1400=-400$, то есть на самом деле касательное ускорение направлено не вверх, а вниз. Теперь можно найти угловое ускорение звена BC: $\varepsilon_{AB}=\dfrac{a_{AB}^\tau}{AB}=\dfrac{-400}{40}=-10$. Следовательно, на самом деле вектор касательного ускорения $\vec{a}_{AB}^\tau$ будет направлен не вверх, а вниз, и угловое ускорение ε_{AB} будет направлено против часовой стрелки.

Найдем ускорение точки C, лежащей на звене AB: $\vec{a}_C=\vec{a}_A+\vec{a}_{AC}=\vec{a}_A^\tau+\vec{a}_A^n+\vec{a}_{AC}^\tau+\vec{a}_{AC}^n$ (рисунок 10). Составим систему уравнений в проекциях на оси Ox и Oy $\begin{cases} a_{Cx}=a_A^\tau+a_{AC}^n \\ a_{Cy}=-a_A^n-a_{AC}^\tau \end{cases}$. Здесь $a_{AC}^\tau=AC\cdot(-\varepsilon_{AB})=20\cdot 10=200$, $a_{AC}^n=AC\cdot\omega_{AB}^2=20\cdot 25=500$ и следовательно, $a_{Cx}=400+500=900$, $a_{Cy}=-1000-200=-1200$. Тогда $a_C=\sqrt{a_{Cx}^2+a_{Cy}^2}=1500$ м/с^2.

Сделаем проверку, определив положение МЦУ по **опр. 4 и алгоритму**. Рассмотрим стержень OA. Определим направление вектора ускорения $\vec{a}_A$, вычислив угол между искомым вектором и вертикальной осью OA: $tg\,\alpha=\dfrac{a_A^\tau}{a_A^n}=\dfrac{400}{1000}=0{,}4\Rightarrow\alpha=21{,}801^0$. Определим угол поворота вектора $\vec{a}_A$: $tg\,\mu=\dfrac{\varepsilon_{OA}}{\omega_{OA}^2}=\dfrac{10}{25}=0{,}4\Rightarrow\mu=21{,}801^0$. Можно отметить, что углы α и μ совпадают. Повернём вектор ускорения $\vec{a}_A$ по направлению углового ускорения ε_{OA}, то есть по часовой стрелке; тогда повернутый вектор совпадёт с направлением стержня OA и значит где-то на этом отрезке расположена точка МЦУ. Найдём величину отрезка AQ: $AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2_{OA}+\omega^4_{OA}}}=\dfrac{1077{,}033}{\sqrt{10^2+5^4}}=40=OA$. Таким образом, вычисленное положение МЦУ Q совпадает с неподвижной точкой O.

Рассмотрим стержень AB. Направление векторов ускорений $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ известно. Определим угол поворота μ из соотношения: $tg\,\mu=\dfrac{\varepsilon_{AB}}{\omega^2_{AB}}=\dfrac{10}{25}=0{,}4\Rightarrow\mu=21{,}801^0$. Повернём векторы $\vec{a}_A$, $\vec{a}_B$ против часовой стрелке по направлению углового ускорения ε_{AB}, продолжим повёрнутые векторы до их пересечения в некоторой точке: получился треугольник ABQ (рисунок 11). Найдём величины отрезков AQ, BQ на основе кинематических характеристик: $AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2_{AB}+\omega^4_{AB}}}=\dfrac{1077{,}033}{\sqrt{10^2+5^4}}=40=AB$, что согласуется с равнобедренностью треугольника ABQ; $BQ=\dfrac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2_{AB}+\omega^4_{AB}}}=$ $=\dfrac{1980{,}198}{\sqrt{10^2+5^4}}=73{,}543$. Определим величину BQ из треугольника ABQ по теореме синусов:

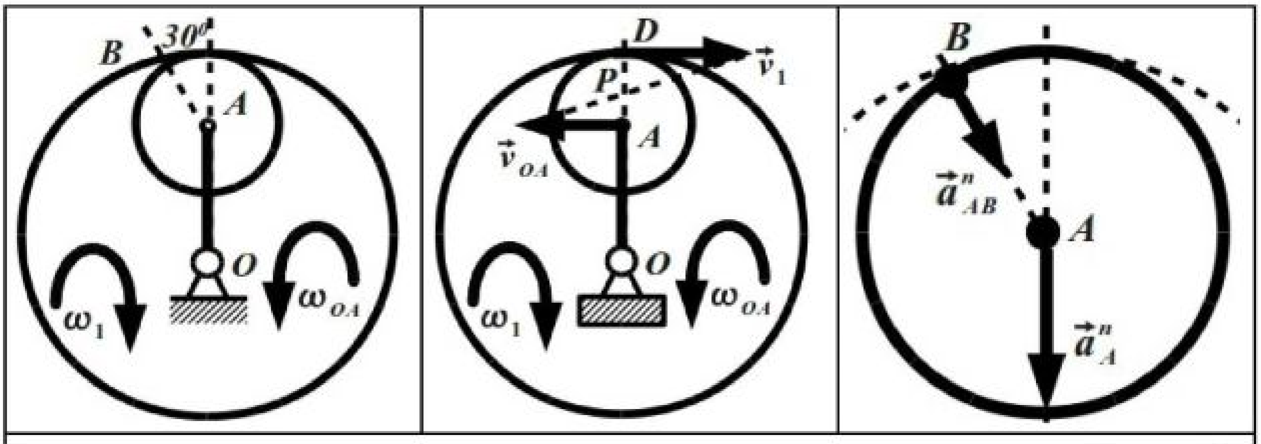
$$\frac{\sin 23{,}2^0}{AB}=\frac{\sin 133{,}6^0}{BQ}\Rightarrow BQ=\frac{40\cdot\sin 133{,}6^0}{\sin 23{,}2^0}=73{,}531.$$



– Рисунок 11

Можно отметить, что значения BQ, вычисленные двумя разными способами, совпали с точностью до десятых. Таким образом, все кинематические характеристики вычислены правильно.

Пример 3. Дано: $OA=20$ см, $r=15$ см, $\omega_{OA}=2$ 1/с, $\omega_1=1{,}2$ 1/с, $\varepsilon_{OA}=0$ 1/с^2.



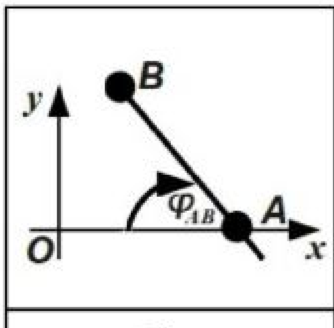
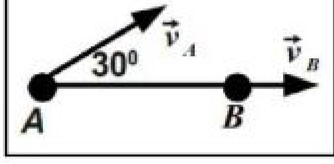
– Рисунок 12

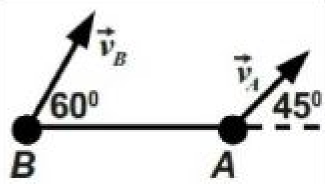
Решение. Найдём величину скорости точки A: $v_A=OA\cdot\omega_{OA}=20\cdot2=40$; вектор скорости будет направлен в сторону углового вращения кривошипа OA. Найдём величину скорости точки D обода большого колеса: $v_D=OD\cdot\omega_1=(OA+r)\cdot\omega_1=35\cdot1{,}2=42$ (рисунок 12). Векторы скоростей с общим перпендикуляром OD направлены в противоположные стороны, поэтому положение МЦС определится по пятому способу: точка P будет лежать на отрезке AD. Определим положение мгновенного центра скоростей P: $\begin{cases} v_A=\omega_2\cdot AP \\ v_D=\omega_2\cdot(r-AP)\end{cases}$. Тогда $AP=7{,}317$, $\omega_2=5{,}467$. Для вычисления скорости точки B необходимо определить расстояние BP по теореме косинусов: $BP=\sqrt{AP^2+AB^2-2\cdot AP\cdot AB\cdot\cos 30^0}=9{,}404$, тогда скорость точки B равна $v_B=\omega_2\cdot BP=51{,}412$.

Теперь перейдем к определению ускорений. Найдем нормальное и касательное ускорения точки A: $a_A^n=OA\cdot\omega_{OA}^2=20\cdot 4=80$, $a_A^\tau=OA\cdot\varepsilon_{OA}=20\cdot 0=0$. Таким образом, центр второго круга вращается равномерно, следовательно, и второй круг будет вращаться равномерно, касательные скорости всех точек круга будут равны нулю. Определим нормальную компоненту вектора ускорения отрезка AB: $a_{AB}^n=AB\cdot\omega_{II}^2=448{,}321$. Запишем векторное равенство для ускорения точки B: $\vec{a}_B=\vec{a}_A^n+\vec{a}_{AB}^n$. Введем систему координат Oxy стандартным образом, тогда $\begin{cases} a_B^X=a_{AB}^n\cdot\cos 60^0=0{,}5\cdot a_{AB}^n=224{,}161 \\ a_B^Y=-a_{AB}^n\cdot\sin 60^0-a_A^n=-0{,}866\cdot a_{AB}^n-a_A^n=-468{,}246\end{cases}$, откуда полное ускорение равно: $a_B=\sqrt{(a_B^X)^2+(a_B^Y)^2}=519{,}136$.

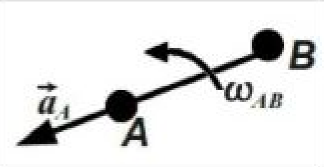
Сделаем проверку, определив положение МЦУ. Определим направление ускорения точки B: $tg\,\alpha=\left|\dfrac{a_B^X}{a_B^Y}\right|=0{,}479\Rightarrow\alpha=25{,}582$, где α – угол к оси Oy. Так как угловое ускорение второго колеса равно нулю, то угол поворота векторов ускорений $\mu=0$. Вычислим расстояния до МЦУ: $AQ=\dfrac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4}}=\dfrac{80}{29{,}889}=2{,}677$, $BQ=\dfrac{a_B}{\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4}}=\dfrac{519{,}136}{29{,}889}=17{,}369$; по теореме синусов из треугольника ABQ $\dfrac{\sin 4{,}418}{AQ}=\dfrac{\sin 25{,}582}{AB}\Rightarrow AQ=\dfrac{15\cdot 0{,}077}{0{,}432}=2{,}674$, $\dfrac{\sin 150}{BQ}=\dfrac{\sin 25{,}582}{AB}\Rightarrow BQ=\dfrac{15\cdot 0{,}5}{0{,}432}=17{,}361$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

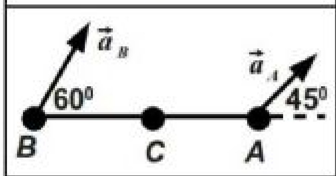
	**1 (9.1.3)**. Стержень AB диной 3 м движется согласно уравнениям $x_A=2+t^2$, $y_A=0$, $\varphi_{AB}=0{,}25\pi t$. Определить координаты и скорости точек A, B в момент времени $t=1$ с.
	2 (9.4.2). Стержень AB диной 2 м движется согласно уравнениям $x_A=4\cos(0{,}5\pi t)$, $y_A=0$, $\varphi_{AB}=0{,}5\pi t$. Определить координаты, величины и компоненты скоростей точек A, B в момент времени $t=0{,}5$ с.
	**3 (16.9)**. Стержень AB длины 2 м движется в плоскости рисунка, при этом скорость $v_A=180$ см/с. Определить скорость точки B двумя способами и угловую скорость стержня. **Ответ**: $v_B=156{,}880$ см/с, $\omega_{AB}=0{,}45$ 1/с.



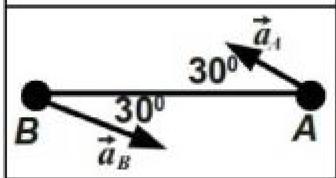
4 (16.11). Стержень AB длины 0,5 м движется в плоскости рисунка, при этом скорость $v_A = 2$ м/с. Найти скорость точки B двумя способами и угловую скорость отрезка AB. **Ответ**: $v_B = 2{,}82$ м/с; $\omega_{AB} = 2{,}06$ 1/с.



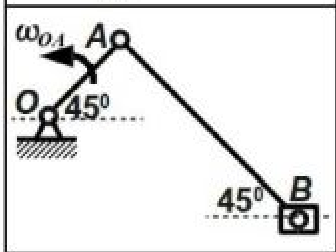
5 (9.7.2). Стержень AB длиной 2 м находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B, если ускорение точки A $a_A = 1$ м/с^2, угловая скорость стержня $\omega_{AB} = 1$ 1/с, угловое ускорение $\varepsilon_{AB} = 0$ 1/с^2. **Ответ**: $a_B = 3$ м/с^2.



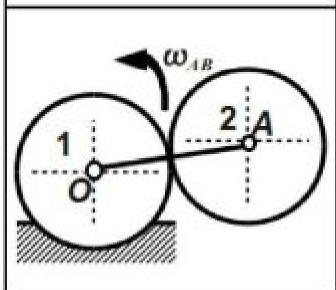
6 (18.39). Стержень AB длины 0,2 м находится в плоскопараллельном движении, при этом $a_A = 2$, $a_B = 4{,}42$ м/с^2. Найти угловую скорость, угловое ускорение, ускорение его середины. **Ответ**: $\omega_{AB} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 12{,}05$ 1/с^2, $a_C = 3{,}18$ м/с^2.



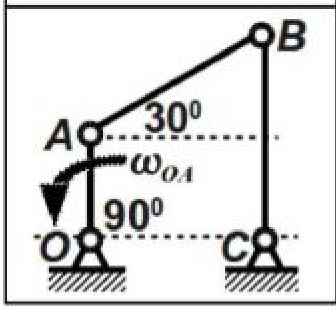
7 (9.7.11). Стержень AB длиной 0,4 м движется в плоскости рисунка, при этом $a_A = 2$, $a_B = 6$ м/с^2. Определить угловую скорость и угловое ускорение отрезка AB. **Ответ**: $\varepsilon_{AB} = 10$ 1/с^2.



8 (18.11). Кривошип OA длины 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{OA} = 10$ 1/с и приводит в движение шатун AB длины 1 м. Найти угловые скорость и ускорение шатуна AB, ускорение ползуна B. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. **Ответ**: $\omega_{AB} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 16$ 1/с^2, $a_B = 5{,}656$ м/с^2.



9 (18.28). Шестерёнка радиуса 0,12 м приводится в движение кривошипом OA, который вращается вокруг оси O неподвижной шестерёнки с тем же радиусом. При этом $\omega_{OA} = 2$ 1/с, $\varepsilon_{OA} = 8$ 1/с^2. Определить ускорение мгновенного центра скоростей и диаметрально противоположной точки второй шестерёнки. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. **Ответ**: $a_P = 0{,}96$, $a_M = 4{,}8$ м/с^2.



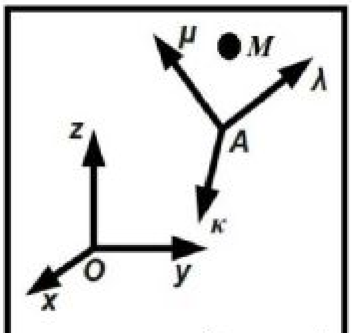
10 (18.13). Стержень OA шарнирного четырёхзвенник $OABC$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = 6$ 1/с. Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, ускорение шарнира B, если $AB = 2\,OA = 0{,}8$ м. Сделать проверку с помощью мгновенного центра ускорений. **Ответ**: $\omega_{AB} = 0$ 1/с, $\varepsilon_{AB} = 10{,}392$ 1/с^2, $a_B = 8{,}314$ м/с^2.

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Опр. 1. Движение точки является сложным, если точка участвует в двух и более движениях.

Пример 1. Перемещение лодки по реке, которая течёт вдоль берега; перемещение человека в поезде, который движется относительно рельс; движение человека по эскалатору, который движется относительно магазина; любое движение на земном шаре, который вращается вокруг своей оси и при этом движется вокруг Солнца.

Рассмотрим две системы координат: $A\kappa\lambda\mu$ и $Oxyz$ и точку M. Будем считать, что система координат $Oxyz$ неподвижна, и относительно неё движется другая система координат $A\kappa\lambda\mu$, относительно которой в свою очередь, движется точка M.



– Рисунок 1

Опр. 2. Движение точки M по отношению к подвижной системе координат $A\kappa\lambda\mu$ называется **относительным движением** с относительными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$.

Опр. 3. Движение подвижной системы координат $A\kappa\lambda\mu$ по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ называется **переносным движением** с переносными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$.

Опр. 4. Движение точки M относительно неподвижной системы координат $Oxyz$ называется **абсолютным движением** с абсолютными кинематическими характеристиками: $\vec{v}_a$, $\vec{a}_a$.

Теорема 1 (о сложении скоростей) Абсолютная скорость движения точки равна геометрической сумме относительной и переносной скорости:

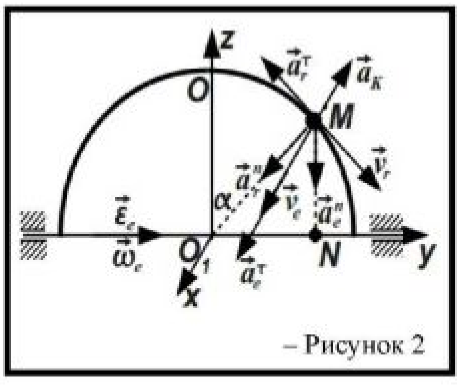
(1) $$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e.$$

Теорема 2 (о сложении ускорений). Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного ускорений, а также ускорения Кориолиса:

(2) $$\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_K,$$

где ускорение Кориолиса определяется по формуле $\vec{a}_K=2\cdot\left(\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r\right)$, $a_K=2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin\varphi$.

Замечание 1. Ускорение Кориолиса возникает в том случае, когда подвижная система координат совершает вращательное движение вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω_e. Ускорение Кориолиса равно нулю в трёх случаях, которые следуют из определения векторного произведения: 1) в случае поступательного переносного движения, 2) в случае относительного покоя точки, 3) в случае, когда относительная скорость точки параллельна оси переносного вращения.



– Рисунок 2

Пример 2. Дано $R=20$ см, $\omega_e=5$ 1/с, $\varepsilon_e=2$ 1/с^2, $s_r=OM=10\pi\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ см, $t=1$ с. Определить абсолютные скорость и ускорение в момент времени t.

Решение. Найдем длину пути, который прошла точка M за время t вдоль дуги OM: $s_r(1)=OM(1)=10\pi\sin 30^0=5\pi$ см.

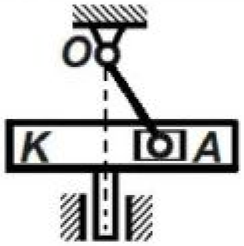
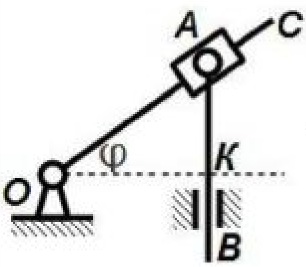
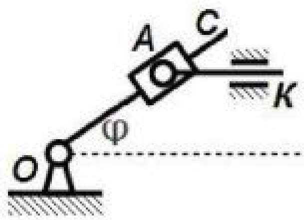
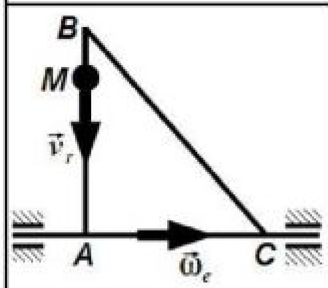
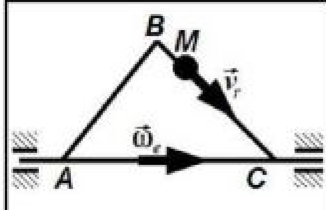
Найдём абсолютную скорость: $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$. Относительная скорость точки M $v_r=s_r^{/}=\frac{5\pi^2}{3}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, а в момент времени t $v_r(1)=14{,}245$ см/с. Так как скорость положительная, то её вектор направлен по касательной в строну возрастания дуговой координаты. Переносная скорость определяется из теории вращательного движения: $v_e=\omega_e\cdot MN$. Отрезок MN найдём из прямоугольного треугольника O_1MN: $MN=R\cdot\sin\beta$, где угол $\beta=90^0-\alpha$. Тогда $\alpha=\frac{OM}{R}=\frac{5\pi}{20}=\frac{\pi}{4}=45^0$, $\beta=90^0-\alpha=45^0$, откуда $MN=20\cdot\sin 45^0=14{,}142$, следовательно $v_e=\omega_e\cdot MN=5\cdot 14{,}142=70{,}71$ см/с. Вектор переносной скорости направлен перпендикулярно плоскости листа по направлению угловой скорости ω_e. Тогда $v_a=\sqrt{v_e^2+v_r^2}=72{,}131$ см/с.

Найдём абсолютное ускорение $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_K$. Точка M движется по кривой OB, поэтому относительное ускорение состоит из двух компонент: касательной и нормальной. Величина касательной компоненты определяется по формуле $a_r^\tau=v_r^{/}=-\frac{5\pi^3}{18}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, а в момент времени t равна $a_r^\tau=-4{,}306$ см/с^2. Так как величина касательной компоненты отрицательная, то её вектор направлен по касательной к дуге OB в противоположную сторону от вектора $\vec{v}_r$. Величина нормальной компоненты определяется по формуле $a_r^n=\frac{v_r^2}{R}=10{,}146$ см/с^2; вектор нормальной компоненты направлен вдоль радиуса от точки M к центру окружности. Так как дуга OB совершает вращательное движение вокруг оси AB, то переносное ускорение также состоит из двух компонент, которые определятся из теории вращательного движения: $a_e^\tau=\varepsilon_e\cdot MN=2\cdot 14{,}142=28{,}284$ $a_e^n=\omega_e^2\cdot MN=25\cdot MN=353{,}55$ см/с^2. Вектор касательного ускорения направлен от точки M к точке N; вектор нормального ускорения сонаправлен с вектором переносной скорости. Вектор ускорения Кориолиса направлен перпендикулярно плоскости рисунка, в которой лежат вектора $\vec{v}_r$, $\vec{\omega}_e$ так, что поворот вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{v}_r$ происходит против часовой стрелки. Величина ускорения Кориолиса определяется по формуле $a_K=2\cdot\omega_e\cdot v_r\cdot\sin\varphi=2\cdot 5\cdot 14{,}245\cdot 0{,}707=100{,}712$ см/с^2.

Для определения абсолютного ускорения зададим систему координат $Oxyz$ стандартным способом и спроектируем обе части векторного равенства из теоремы 2. Получим, что $a_a^y=-a_r^\tau\cdot\cos 45^0-a_r^n\cdot\cos 45^0=-4{,}129$, $a_a^y=a_r^\tau\cdot\cos 45^0-a_r^n\cdot\cos 45^0-a_e^n=-363{,}768$, $a_a^x=a_e^\tau-a_K=-72{,}428$ и $a=\sqrt{(a_a^x)^2+(a_a^y)^2+(a_a^z)^2}=370{,}931$ см/с^2.

Ответ: $v_a=72{,}131$ см/с, $a=370{,}931$ см/с^2.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

<table>
<tr><td colspan="2">1 (22.11). Корабль плывёт на юг со скоростью $36\sqrt{2}$ км/ч. Второй корабль идёт курсом на юго-восток со скоростью 36 км/ч. Найти величину и направление скорости второго корабля относительно первого корабля. Ответ: $v_r=36$ км/ч.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2 (22.25). В кривошипно-кулисном механизме кривошип OA длины 0,2 м вращается с постоянной угловой скоростью 3π 1/с. Определить линейную скорость кривошипа OA, скорости кулисы K и ползуна A, если угол между OA и вертикалью – 30^0. Ответ: $v_K=0{,}942$, $v_{OA}=1{,}884$, $v_A=1{,}632$ м/с.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>3 (22.17). В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O, ползун A приводит в движение стержень AB. Определить скорость кривошипа OA, ползуна A, стержня AB, если $\omega_{OC}=2$ 1/с, $\varphi_{OA}=60^0$, $OK=0{,}5$ м. Ответ: $v_A=3{,}464$ м.</td></tr>
<tr><td>4 (11.2.25). Стержень AB кулисного механизма движется вверх со скоростью $v_{AB}=1$ м/с. Для указанного положения механизма определить ω_{OC}, v_A, v_{OA}, если $OK=0{,}4$ и $\varphi_{OA}=60^0$. Ответ: $\omega_{OC}=1{,}25$ 1/с.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>5 (11.2.24). Стержень AK кулисного механизма движется вправо со скоростью $v_{AK}=1$ м/с. Для указанного положения механизма определить ω_{OC}, v_A, v_{OA}, если расстояние $OA=1$ м, $\varphi_{OA}=45^0$ Ответ: $\omega_{OC}=0{,}707$ 1/с.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>6. По стороне треугольника, который вращается вокруг стороны АВ с угловой скоростью $\omega_e=8t$ 1/с, движется точка М с относительной скоростью $v_r=3t^2$ м/с. Определить модуль и направление ускорения Кориолиса, величину относительного и переносного ускорений в момент времени $t=2$ с, если $AM=0{,}5$ м. Ответ: $a_r=12$, $a_e=128{,}062$, $a_K=384$ м/с².</td></tr>
<tr><td>
</td><td>7 (11.5.7) По стороне треугольника, который вращается вокруг стороны AC с угловой скоростью $\omega_e=2t$ 1/с, движется точка M с относительной скоростью $v_r=2\sin 4t$ м/с. Определить относительное, переносное, кориолисово ускорения точки M в момент времени $t=\pi/8$ с, если $MC=0{,}4$ м, $\measuredangle BCA=45^0$. Ответ: $a_r=0$, $a_e=0{,}352$, $a_K=2{,}221$ м/с².</td></tr>
</table>