ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие

Приводится условие, исходные данные, рисунки, краткая теория к решению, дополнительные вопросы к изучению, а также излагается методика решения ряда задач раздела «Кинематика» курса теоретической механики.

Предмет теоретической механики

Механика – раздел физики (науки о природе), в котором изучается **механическое движение** материальных тел (перемещение их в пространстве с течением времени относительно друг друга) и **механическое взаимодействие** между ними (такое взаимодействие между ними, при котором они изменяют или стремятся изменить характер механического движения друг друга).

Основные **законы-аксиомы механики Галилея-Ньютона** выражают взаимосвязь и взаимовлияние этих процессов, в том числе устанавливая пропорциональность между ускорением a материальной точки и равнодействующей всех приложенных к этой точке сил F.

$$m\overline{a} = m\frac{d\overline{v}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{F}.$$

В теоретической механике [1–4] объектом исследования являются упрощенные модели материальных тел: **материальная точка** (тело, размерами которого можно пренебречь), **абсолютно твердое тело** (тело, расстояние между любыми двумя точками которого остаётся неизменным) и **механическая система** (совокупность материальных точек или абсолютно твердых тел).

При изучении теоретическую механику удобно разделять на три раздела: статика, кинематика и динамика.

Кинематика (*kinematos* – движение). В этом разделе исследуется, какое механическое движение могут совершать абсолютно твердые тела, соединенные между собой различным образом, как движутся различные точки этих тел.

В начале раздела кинематики вводятся характеристики механического движения точки: радиус-вектор точки $\overline{r}$, определяющий её положение в пространстве; вектор скорости точки $\overline{v}$, определяющий изменение её положения в пространстве, и вектор ускорения точки $\overline{a}$, определяющий изменение её вектора скорости.

Связь между этими *кинематическими характеристиками* точки выражается с помощью производной по времени:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}, \quad \overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения точки разлагается на две взаимно перпендикулярные составляющие: касательное ускорение $\overline{a}_\tau$, характеризующее изменение величины вектора скорости, и нормальное ускорение $\overline{a}_n$, характеризующее изменение направления вектора скорости:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Если твердое тело движется поступательно, то есть каждый его отрезок перемещается параллельно самому себе, то кинематические характеристики самого тела и всех его точек определяются приведенными выражениями.

Если твердое тело при движении вращается с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и угловым ускорением $\overline{\varepsilon}$, то одна из точек O, связанных с телом, выбирается за полюс, и кинематические характеристики любой точки тела M определяются выражениями:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_O + \overline{v}_{MO}, \ \overline{a}_M = \overline{a}_O + \overline{a}_{MO}.$$

Вектор вращательной скорости $\overline{v}_{MO}$ точки определяется формулой Эйлера:

$$\overline{v}_{MO} = \overline{\omega} \times \overline{r}_{OM}.$$

Вектор ускорения $\overline{a}_{MO}$ точки за счет вращения тела разбивается на две составляющие: вращательное $\overline{a}_{MO}^{\varepsilon}$ и осестремительное $\overline{a}_{MO}^{\omega}$ ускорение – и определяется формулой Ривальса:

$$\overline{a}_{MO} = \overline{a}_{MO}^{\varepsilon} + \overline{a}_{MO}^{\omega}, \ \overline{a}_{MO}^{\varepsilon} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}_{OM}, \ \overline{a}_{MO}^{\omega} = \overline{\omega} \times \overline{v}_{MO} = \overline{\omega} \times \overline{\omega} \times \overline{r}_{OM}.$$

Решение задач кинематики с помощью этих выражений требует знания элементов функционального анализа и аналитической геометрии.

Методика решения задач кинематики разнится в зависимости от вида движения тела. Движение твердого тела в кинематике делится на пять видов. В курсе технического университета изучаются только три из них: поступательное, вращательное и плоское движение тела.

Задача k1. Определение кинематических характеристик точки при координатном способе задания её движения

Условие задачи k1

Материальная точка ***M*** движется в плоскости, на которой введена прямоугольная декартовая система координат Oxy. Движение точки задано координатным способом: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Координаты точки: x и y, – измеряются в метрах, а аргумент t – в секундах.

В таблице 1 исходных данных даны значения коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4 и k, определяющих уравнение движения точки, и момент времени t_1. На рисунках в таблице 2 приведены уравнения движения точки в задаче k1.

Определить в заданный момент времени t_1 все кинематические характеристики движущейся точки: уравнение траектории, координаты точки x_1, y_1, проекции и величину скорости v_{1x}, v_{1y}, v, проекции и величину полного ускорения a_{1x}, a_{1y}, a, касательное и нормальное ускорения a_τ, a_n, радиус кривизны траектории ρ и закон движения точки по траектории $s = s(t)$. Изобразить на рисунке полученные результаты.

Исходные данные задачи k1

Таблица 1

№	k_1 м	k_2 м	k_3 м	k_4 м	k $сек^{-1}$	t_1 сек
0	2	-1	-2	3	2,0	0,7
1	-1	-2	3	2	1,5	0,8

2	-2	3	-1	1	0,9	1,2

Окончание таблицы 1

3	-3	2	1	-1	0,25	1,5
4	2	1	-3	-2	0,24	1,8
5	1	-1	2	-3	0,15	2,6
6	3	-2	-2	1	1,2	1,0
7	-1	3	-3	2	0,22	2,2
8	1	2	-1	3	0,1	2,8
9	-3	1	2	-3	0,28	1,4

Рисунки задачи k1

Таблица 2

$\begin{cases} x = k_1 \sin^2(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(kt^2) + k_4 \end{cases}$ Рис. k1.0	$\begin{cases} x = k_1 \cos(2kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \sin(kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.1*
$\begin{cases} x = k_1 \sin(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(kt^2) + k_4 \end{cases}$ Рис. k1.2	$\begin{cases} x = k_1 \cos(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(2kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.3*
$\begin{cases} x = k_1 \cos(2kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(kt^2) + k_4 \end{cases}$ Рис. k1.4	$\begin{cases} x = k_1 \cos(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos^2(kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.5*
$\begin{cases} x = k_1 \cos^2(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(kt^2) + k_4 \end{cases}$ Рис. k1.6	$\begin{cases} x = k_1 \cos(2kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \sin(2kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.7*
$\begin{cases} x = k_1 \cos(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \sin^2(kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.8*	$\begin{cases} x = k_1 \sin(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \cos(2kt^2) + k_4 \end{cases}$ *Рис. k1.9*

Указания к решению задачи k1

При решении задачи k1 требуется знать:

1 Формулы тригонометрии, которые используются при получении уравнений, определяющих траекторию движения точки.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha .$$

2 Формулы из курса высшей математики для определения производной от сложной функции.

$$[f_1(f_2(f_3(t)))]' = f_1'(f_2(f_3(t))) \cdot f_2'(f_3(t)) \cdot f_3'(t).$$

Например:

$$\left[a\cos^2\left(bt^2\right)\right]' = a\left[2\cos\left(bt^2\right)\right]\cdot\left[-\sin\left(bt^2\right)\right]\cdot\left[b2t\right] = -2abt\sin\left(2bt^2\right).$$

3 Кинематические характеристики точки: радиус-вектор точки $\bar{r}$, определяющий её положение в пространстве; вектор скорости точки $\bar{v}$, определяющий изменение её положения в пространстве, и вектор ускорения точки $\bar{a}$, определяющий изменение её вектора скорости.

Формулы, определяющие связи между этими характеристиками.

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

4 Проекция вектора скорости движущейся точки на ось равна первой производной по времени от уравнения, определяющего изменение координаты точки по этой оси.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

5 Проекция вектора ускорения движущейся точки на ось равна второй производной по времени от уравнения, определяющего изменение координаты точки по этой оси, или первой производной по времени от уравнения, определяющего изменение проекции вектора скорости точки на эту ось.

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x.$$

6 Вектор ускорения движущейся точки разлагается (рис. 1) на две взаимно перпендикулярные составляющие: касательное ускорение $\bar{a}_\tau$ и нормальное ускорение $\bar{a}_n$.

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

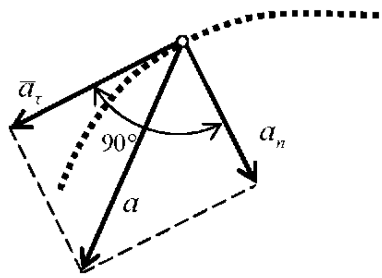


Рис. 1. Вектор ускорения движущейся точки

Касательное ускорение $\bar{a}_\tau$ характеризует изменение величины вектора скорости. Вектор $\bar{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости, когда движение ускоренное, и – в обратную сторону (рис. 1), когда замедленное. Величина касательного ускорения равна первой производной по времени от величины скорости.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальное ускорение $\bar{a}_n$ характеризует изменение направления вектора скорости. Вектор $\bar{a}_n$ направлен перпендикулярно касательной к траектории (по нормали) в сторону её вогнутости. Величина нормального ускорения равна отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны её траектории.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Пример решения задачи k1

Таблица 3.

№	k_1 м	k_2 м	k_3 м	k_4 м	k $сек^{-1}$	t_1 сек
пример	–3	1	2	–2	0,2	**2**

$$\begin{cases} x = k_1 \sin^2(kt^2) + k_2 \\ y = k_3 \sin(kt^2) + k_4 \end{cases}.$$

Рис. 2 Рисунок примера

Определить в заданный момент времени t_1 все кинематические характеристики движущейся точки.

Решение:

Подставим значения коэффициентов из таблицы 3 в заданные уравнения движения точки (рис. 2). Уравнения движения примут вид (рис. 3):

$$\begin{cases} x = -3\sin^2(0{,}2t^2) + 1 \\ y = 2\sin(0{,}2t^2) - 2 \end{cases}.$$

Рис. 3. Уравнения движения точки

1 Определим уравнение траектории движущейся точки.

$$\frac{1-x}{3} = \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{4}(y+2)^2$$ – парабола.

2 Определим координаты движущейся точки в момент времени t_1:

$$x = k_1 \sin^2(kt_1^2) + k_2 = -0{,}54 \text{ м}; \; y = k_3 \sin(kt_1^2) + k_4 = -0{,}57 \text{ м}.$$

3 Определим скорость движущейся точки в момент времени t_1:

$$v_x = \dot{x} = 2k_1kt\sin(2kt^2), \; v_x = -2{,}4\sin 1{,}6 = -2{,}40 \text{ м/с};$$

$$v_y = \dot{y} = 2k_3kt\cos(kt^2), \; v_y = 1{,}6\cos 0{,}8 = 1{,}11 \text{ м/с};$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2kt\sqrt{k_1^2\sin^2(2kt^2) + k_3^2\sin^2(kt^2)}, \; v = 2{,}64 \text{ м/с}.$$

4 Определим (полное) ускорение точки в момент времени t_1:

$$a_x = \ddot{x} = 2k_1k[\sin(2kt^2) + 4kt^2\cos(2kt^2)], \; a_x = -1{,}2(\sin 1{,}6 + 3{,}2\cos 1{,}6) = -1{,}09 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \ddot{y} = 2k_3k[\cos(kt^2) - 2kt^2\sin(kt^2)], \; a_y = 0{,}8(\cos 0{,}8 - 1{,}6\sin 0{,}8) = -0{,}36 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \; a = 1{,}14 \text{ м/с}^2.$$

5 Определим касательное ускорение точки в момент времени t_1:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}., \; a_\tau = 0{,}83 \text{ м/с}^2.$$

6 Определим нормальное ускорение точки в момент времени t_1:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\,,\ a_n = 0{,}79\ \text{м/с}^2.$$

7 Определим радиус кривизны траектории движущейся точки в том месте, в котором она находится в момент времени t_1:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n},\ \rho = 8{,}91\ \text{м}.$$

8 Запишем закон движения точки по траектории:

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt = 0{,}4\int_0^t t\sqrt{9\sin^2(0{,}4t^2) + 4\sin^2(0{,}2t^2)}dt.$$

Построение рисунка

Используем найденные кинематические характеристики движущейся точки для построения рисунка. Для чего в таблице 4 приведем значения этих характеристик, вычисленные с точностью до двух значащих цифр, так как при построении рисунка с помощью линейки большей точности не требуется.

Таблица 4.

м		*м/с*			*м/с²*					*м*
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
–0,5	–2,6	–2,4	1,2	2,7	–1,1	–0,4	1,1	0,8	0,8	8,9

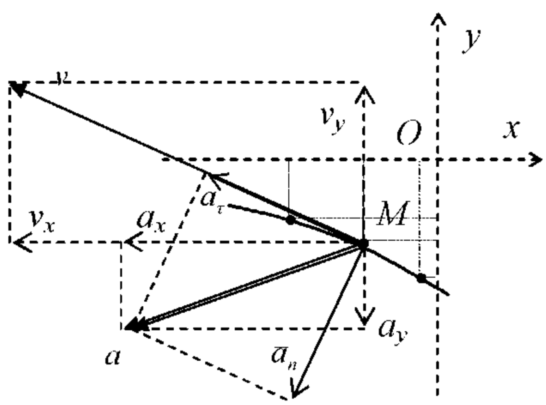
На рис. 4 введем плоскую прямоугольную декартову систему координат Oxy. Масштаб системы выберем из соображений наглядности рисунка: M_L: 1:50. Это означает, что в одном сантиметре рисунка содержится пятьдесят сантиметров траектории.

1. Построим линию траектории движущейся точки. На рис. 4 должна быть видна изогнутость траектории. Для этого достаточно построить часть траектории по трем её точкам (табл. 5).

Таблица 5.

t	1,8	2	2,2
x	–0,1	–0,5	–1,0
y	–0,8	–0,6	–0,4

Обозначим точкой M положение движущейся точки на траектории.



M_L: 1:50 M_V: 2:1 M_a: 3:1

Рис. 4. Кинематические характеристики движущейся точки

2 Построим вектор скорости движущейся точки. Выберем скоростной масштаб M_V: 2:1. Это означает, что при изображении скоростных характеристик в двух сантиметрах рисунка содержится один метр в секунду. В выбранном масштабе от точки M отложим (рис. 4) влево и вверх отрезки, равные v_x и v_y – проекциям скорости движущейся точки на координатные оси. Строим вектор v, как диагональ прямоугольника со сторонами v_x и v_y.

3 Построим вектор ускорения движущейся точки. Выберем масштаб для ускорения M_a: 3:1. Это означает, что при изображении характеристик ускорения в трёх сантиметрах рисунка содержится один метр в секунду в квадрате. В выбранном масштабе от точки M отложим (рис. 4) влево и вниз (соответственно знакам проекций) отрезки, равные a_x и a_y – проекциям ускорения движущейся точки на координатные оси. Строим вектор a, как диагональ прямоугольника со сторонами a_x и a_y.

Построим вектор касательного ускорения движущейся точки a_τ. На рис. 4 отложим в масштабе ускорения отрезок, равный величине a_τ, по линии направления вектора v в ту же сторону (соответственно знаку a_τ).

Построим вектор нормального ускорения движущейся точки a_n. На рис. 4 отложим в масштабе ускорения отрезок, равный величине a_n, перпендикулярно линии направления вектора *v в сторону вогнутости траектории* точки.

При правильно выполненном построении вектор a, построенный как диагональ прямоугольника со сторонами a_τ и a_n, должен совпасть с вектором a, построенным ранее, как диагональ прямоугольника со сторонами a_x и a_y.

Дополнительные вопросы к задаче k1

1 Способы задания движения точки.

2 Естественная система координат. Касательная, нормаль и бинормаль. Понятия соприкасающейся, нормальной и спрямляемой плоскостей.

3 Понятие кривизны траектории. Радиус кривизны.

4 Уравнение движения точки. Определение величины и направления вектора скорости при естественном способе задания движения точки.

5 Равнопеременное движение точки. Законы этого движения.

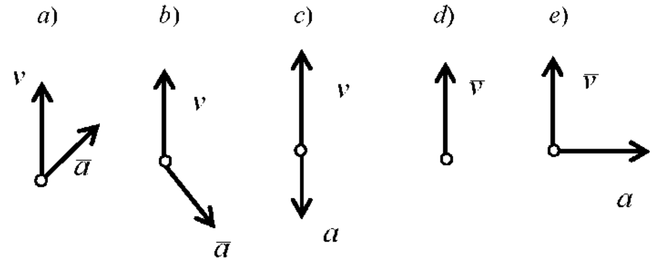


Рис. 5. Классификация движения точки

6 Классифицировать движение точки в изображенных (рис. 5) случаях.

Задача К2. Определение кинематических характеристик точек вращающегося тела.

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ К2: Механизм состоит из двух ступенчатых колес и груза D. Колеса между собой находятся в зацеплении или связаны нерастяжимой ременной передачей. Груз D подвешен к концу нерастяжимой нити, намотанной на один из ободов ступенчатого колеса 1.

Как именно соединены между собой ступенчатые колеса, показано на рисунках в таблице 17. Кроме того, на этих рисунках дано соотношение радиусов внешнего и внутреннего ободов ступенчатого колеса 1.

Закон движения груза D (вниз по вертикальной траектории) задан в таблице 16: $x=x(t)$. В таблице 16 также приведены значения параметров: t_1, μ, H и V. t_1 – заданный момент времени. μ – угол между вектором ускорения точки A (колеса 1) и прямой, соединяющей эту точку с осью вращения, в заданный момент времени. $H=R_2$-r_2 – разница радиусов внешнего и внутреннего ободов ступенчатого колеса 2. V – параметр, определяющий на рисунках в таблице 17 величину скорости точки B (колеса 2) в заданный момент времени.

Определить величину ускорения точки B (колеса 2) в заданный момент времени и найти, какой угол α составляют эти векторы между собой.

Указания к решению задачи К2

Если два колеса находятся в зацеплении, то скорости всех точек, лежащих на соответствующих ободах этих колес равны. Если два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек, лежащих на соответствующих ободах этих колес, и скорости всех точек ремня равны.

В обоих этих случаях отношение угловых скоростей и угловых ускорений связанных колес обратно пропорциональны отношению их радиусов:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

ТАБЛИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И РИСУНКОВ ЗАДАЧИ К2.

Таблица 16.

№	$x=x(t)$ **м**	t_1 **сек**	μ **град.**	$H=R_2-r_2$ **м**	V **м/с**
0	$0.375(t^3-3t)$	$\sqrt{3}/3$	60°	0.3	0.75
1	$24(t^3-t)$	0.5	45°	0.2	6
2	$0.8(t^3-4t)$	$\sqrt{3}/3$	30°	0.3	2.4
3	$0.9(t^3-11t)$	$\sqrt{3}$	60°	0.1	1.8
4	t^3-12t	$\sqrt{3}$	30°	0.2	3
5	$0.06(t^3-6t)$	$\sqrt{3}/3$	60°	0.3	0.3
6	t^3-15t	2	45°	0.2	3
7	$0.1(t^3-7t)$	$\sqrt{3}/3$	30°	0.1	0.6
8	$0.4(t^3-12t)$	$\sqrt{3}$	60°	0.2	1.2
9	$0.5(t^3-15t)$	$\sqrt{3}$	30°	0.3	3

Таблица 17.

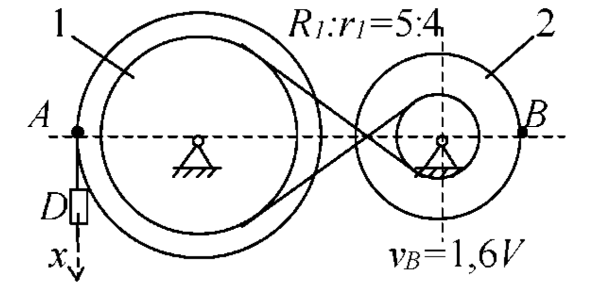


Рис. К2.0

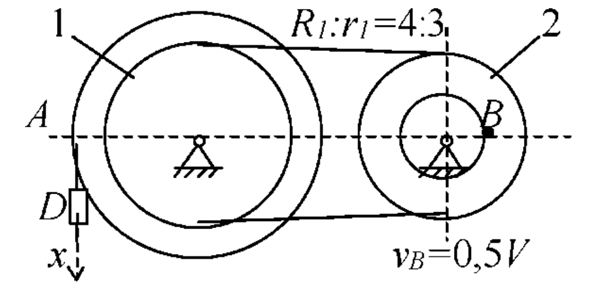


Рис. К2.1

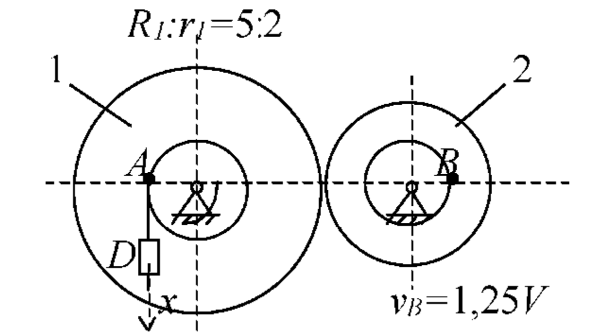


Рис. К2.2

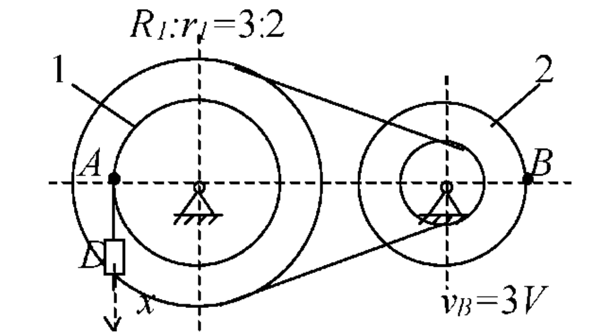


Рис. К2.3

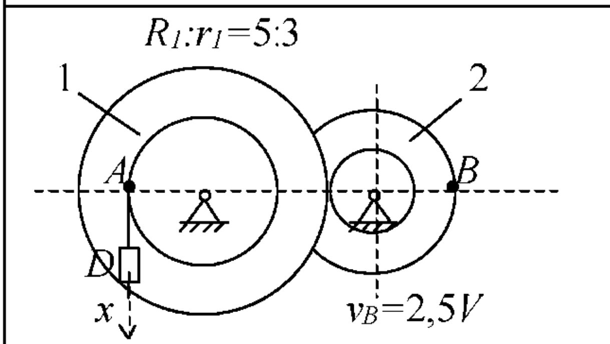


Рис. К2.4

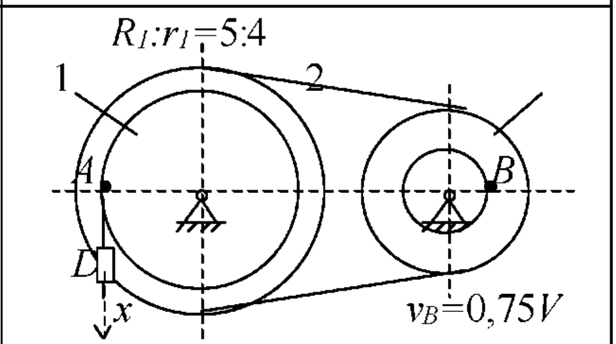


Рис. К2.5

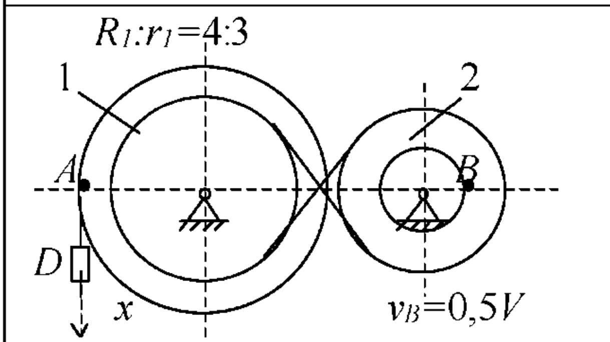


Рис. К2.6

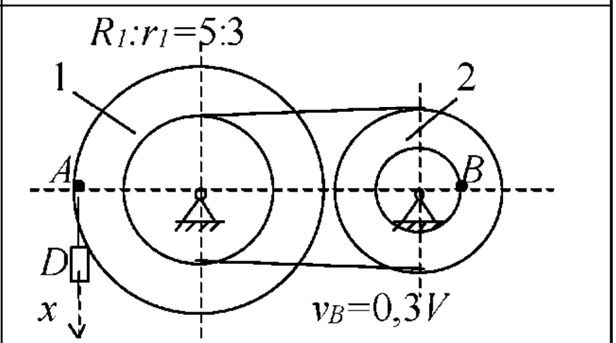


Рис. К2.7

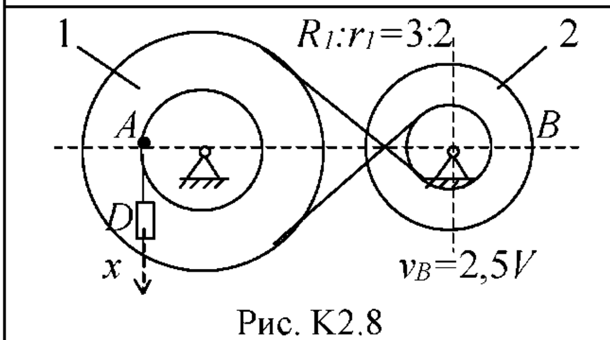


Рис. К2.8

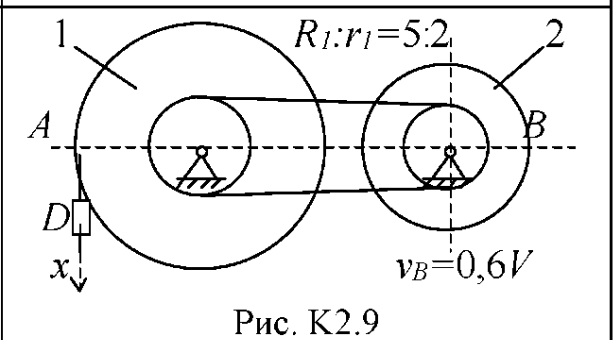


Рис. К2.9

Пример решения типовой задачи К2.

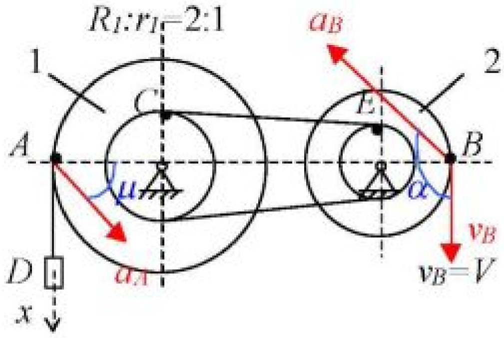


Рис. 26

Дано: Уравнение движения груза D: $x=(t^3-9t)/6$ м. Заданный момент времени t_1 = 1 сек. Угол μ = 45°. Соотношение радиусов ступенчатого колеса 1: $r_1:R_1$ = 1:2. Разница радиусов ступенчатого колеса 2: R_2-r_2=0,2 м. Параметр, определяющий скорость точки B: V=1 м/с.

Определить: величину вектора ускорения точки B (колеса 2) в заданный момент времени и угол между векторами её скорости и ускорения (рис. 26).

Решение:

1. Находим скорость и касательное и нормальное ускорения точки A: $v_A=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t^2-3}{2}$, $a_A^\tau=\dfrac{d^2x}{dt^2}=t$, $a_{A1}{}^n=a_{A1}{}^\tau\, ctg\ \mu$.

При t_1 = 1 сек: v_{A1} =-1м/с, $a_{A1}{}^\tau$ =1м/с^2, $a_{A1}{}^n$ ==1м/с^2.

Определим размеры колеса 1: $R_1=v_{A1}{}^2/a_{A1}{}^n$=1м, $r_1=R_1/2$ =0,5м.

2. Так как ступенчатые колеса связаны нерастяжимой ременной передачей, то скорости точек C и E равны: $v_C = v_E$., где $v_C = v_A r_1/R_1$= 0,5 м/с.

Найдем размеры колеса 2:

$$\begin{cases} v_E=\omega_2 r_2 \\ v_B=\omega_2 R_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_2=\frac{v_B-v_E}{R_2-r_2} \Rightarrow R_2=\frac{v_B}{v_B-v_E}\left(R_2-r_2\right)=0{,}4 \text{ м},\ r_2=0{,}2 \text{ м}.$$

3. Найдем угловую скорость ступенчатого колеса 1: $\omega_1=\dfrac{v_A}{R_1}=\dfrac{t^2-3}{2}$.

Так как ступенчатые колеса связаны между собой нерастяжимой передачей, соединяющей внутренние обода колес, то отношение угловых скоростей обратно пропорционально размерам этих ободов: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{r_2}{r_1}\Rightarrow\omega_2=\omega_1\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{5}{4}\left(t^2-3\right)$.

4. Найдем угловое ускорение ступенчатого колеса 2: $\varepsilon_2=\dfrac{d\omega_2}{dt}=\dfrac{5}{2}t$.

Тогда: $a_B^\tau=\varepsilon_2 R_2=\dfrac{5}{2}t*0.4=t$, $a_B^n=\omega_2^2 R_2=\dfrac{5}{8}\left(t^2-3\right)^2$.

Определим угол μ при t_1 = 1 сек: $tg\mu=\dfrac{a_{B1}^\tau}{a_{B1}^n}=\dfrac{2}{5},\Rightarrow\mu=arctg\dfrac{2}{5}\approx 22^\circ$.

Так как знаки алгебраических величин v_{B1} и $a_{B1}{}^\tau$ при t_1 = 1 сек различны (v_{B1}= -1 м/с, $a_{B1}{}^\tau$= 1 м/с^2), то точка B движется замедленно и, следовательно, угол α между векторами скорости и ускорения этой точки будет равен (рис. 26):

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\mu\approx 112^\circ.$$

5. Величина полного ускорения любой точки вращающегося тела равна корню квадратному из суммы квадратов его касательного и нормального ускорений: $a_{B1}=\sqrt{a_{B\tau}^2+a_{Bn}^2}=R_2\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4}$ = 2,69 м/с^2.

Задача К3. Кинематический расчет плоского механизма.

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ К3: Плоский механизм состоит из четырех звеньев и колеса, которое катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания (табл. 19). Размеры первых двух звеньев и колеса одинаковы во всех вариантах: L_1**=0,4 м;** L_2**=1 м и** R**=0,2 м**. Размеры остальных звеньев заданы в таблице 18. Части механизма соединены между собой шарнирами. Одно из звеньев соединено с центром колеса, другое – с его ободом. Иногда (рис. К3.2, 3, 7, 9 в табл. 19) одно из звеньев соединено с серединой другого звена (точка H).

Положение частей плоского механизма определяется углами α, β, γ, φ, ψ, заданными в таблице 18. Каждый угол определяет положение соответствующего звена. Все углы откладываются от горизонтального луча, проведенного вправо из соответствующего узла. В заданном положении механизма угловая скорость первого звена направлена против часовой стрелки и задана ω_1**=4рад/с**.

Для заданного положения механизма во всех вариантах определить:

1) положение МЦС всех звеньев механизма, движущихся плоско параллельно;
2) скорости всех узлов механизма (точек A, B, C и т. д.);
3) угловые скорости всех звеньев механизма и колеса.

ТАБЛИЦЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ И РИСУНКОВ ЗАДАЧИ К3.

Таблица 18.

№	α(град.)	β(град.)	γ(град.)	φ(град.)	ψ(град.)	L_3(м)	L_4(м)
0	150	225	120	60	135(225)	0,6	1,2
1	180	300	135	60	120(150)	0,8	0,8
2	210	315	180(90)	30	150(120)	0,6	0,6
3	225	330	0(270)	30	120(150)	0,8	1,2
4	30	225	0(90)	30	135(225)	0,6	1,0
5	45	210	180(90)	60	120(150)	0,8	0,6
6	60	180	210	60	150(120)	0,6	1,4
7	60	150	240	30	135(225)	0,8	1,4
8	120	135	0(270)	30	120(150)	0,6	0,8
9	135	240	180(270)	45	150(120)	1,2	1,0

Указания к решению задачи К3

В таблице 18 (в скобках) приведены дополнительные значения углов. Эти значения следует использовать в тех случаях, когда происходит заклинивание механизма, а именно, когда мгновенный центр скоростей попадает в точку, скорость которой заведомо не равна нулю. Например, в варианте 54 при γ=0° МЦС звена 2 попадает в точку А, а её скорость, равная произведению угловой скорости звена 1 на его длину, отлична от нуля. Поэтому здесь следует значение угла полагать равным дополнительному значению, а именно γ=90°. Если заклинивания не происходит, следует брать основное значение (не в скобках).

Таблица 19.

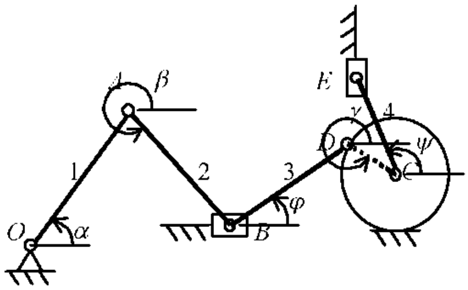


Рис. К3.0

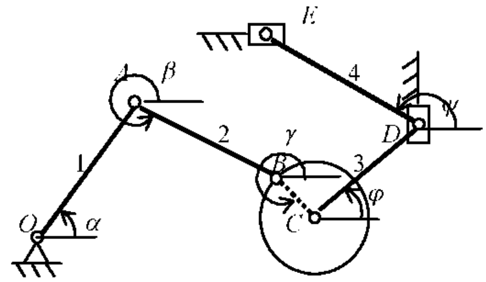


Рис. К3.1.

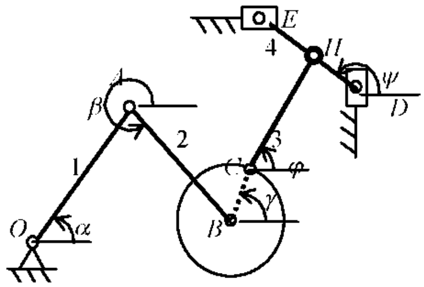


Рис. К3.2

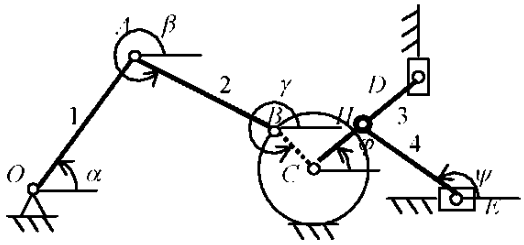


Рис. К3.3

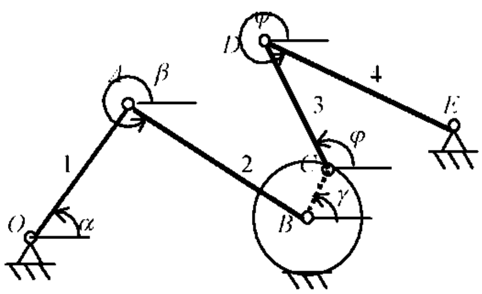


Рис. К3.4

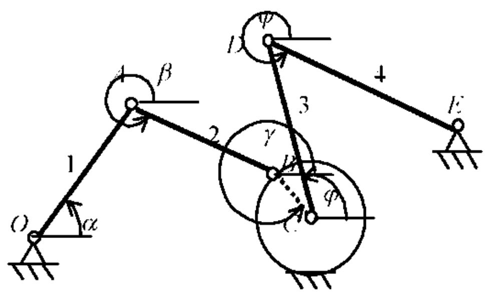


Рис. К3.5

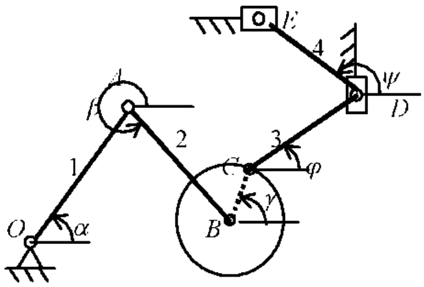


Рис. К3.6

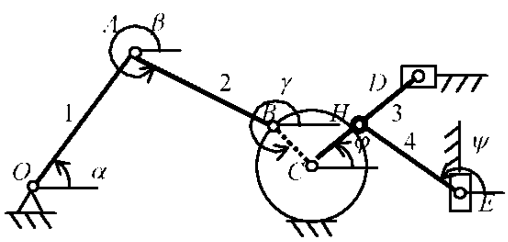


Рис. К3.7

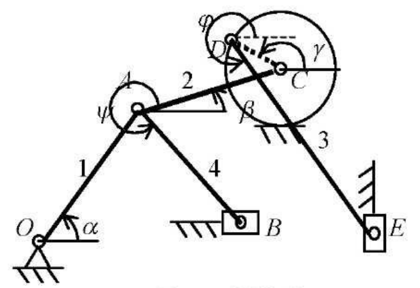


Рис. К3.8

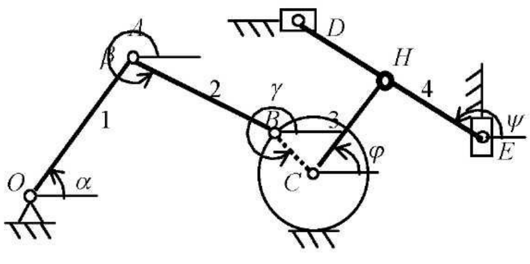


Рис. К3.9

Пример решения типовой задачи К3.

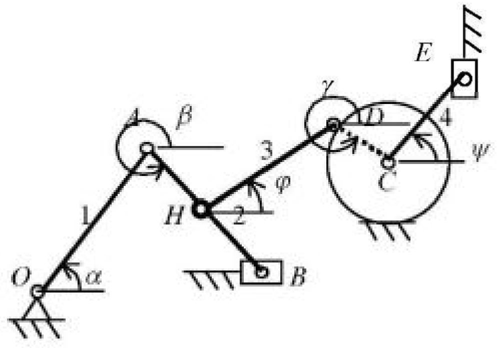


Рис. 26

Дано: L_1=0,4м; L_2=1м; L_3=0,9м; L_4=0,5м; R=0,2м; α=30°; β=330°; γ=300°; φ =0°; ψ=90°; $AH=BH$.

Определить: Положение МЦС всех звеньев механизма, движущихся плоско параллельно, скорости всех узлов, угловые скорости всех звеньев, если в данный момент времени ω_1=4 рад/с и направлена против часовой стрелки.

Решение:

Рисунок 26, заданный по условию, показывает лишь схему соединения частей плоского механизма.

Строим на рисунке 27 рабочий чертеж в соответствии с заданными углами и размерами.

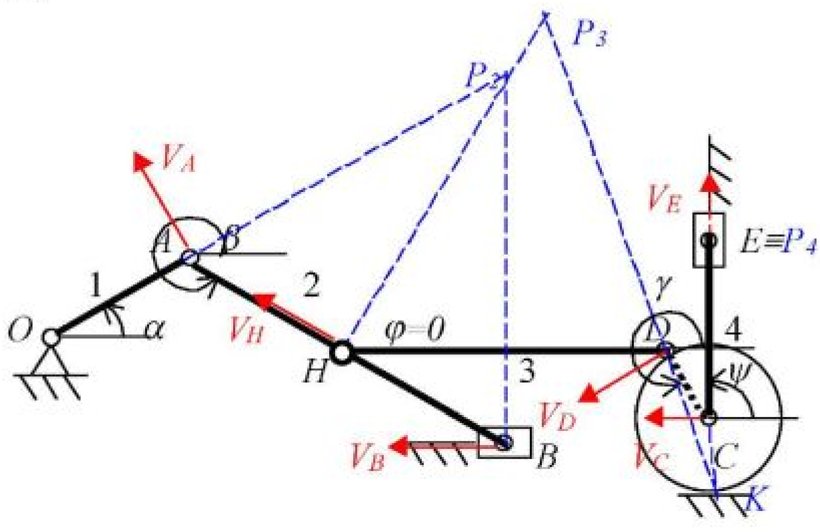


Рис. 27

1. Звено 1 вращается, значит, скорость узла A равна:

$$V_A = \omega_1 L_1 = 1{,}6 \text{ м/с},$$

и направлена под прямым углом к звену 1 против часовой стрелки.

2. Звено 2 движется плоско параллельно. Вектор скорости узла B горизонтален, так как точка B принадлежит ползуну, направляющая которого горизонтальна. Строим МЦС (точку P_2) звена 2, восстанавливая перпендикуляры из узлов A и B к векторам скоростей этих точек.

Треугольник ABP_2 – равносторонний, так как

$$\angle AP_2B = 90° - \alpha = 60°,$$

$$\angle P_2AB = 360°+\alpha \quad \beta = 60°.$$

Значит, $AP_2 = BP_2 = AB = L_2 = 1$ м. $HP_2 = L_2 \cos 30° = 0{,}866$ м.

Известно, что $\frac{v_A}{AP_2} = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_H}{HP_2} = \omega_2$. Откуда находим:

$$\omega_2 = V_A/AP_2 = 1{,}6 \text{ с}^{-1};$$

$$V_B = \omega_2\, BP_2 = 1{,}6 \text{ м/с};$$

$$V_H = \omega_2\, HP_2 = 1{,}386 \text{ м/с}.$$

Вектор V_H направлен перпендикулярно прямой HP_2, то есть, по прямой AB, так как медиана равностороннего треугольника является его высотой.

3. Звено 3 движется плоско параллельно. Вектор V_D направлен перпендикулярно прямой DK, так как точка K (точка контакта колеса с поверхностью) – МЦС колеса, а точка D принадлежит не только звену 3, но и колесу. Строим МЦС (точку P_3) звена 3, восстанавливая перпендикуляры из узлов H и D к векторам скоростей этих точек (рис. 27).

В треугольнике HDP_3:

$$\angle DHP_3 = \angle ABP_2 = 60°;$$

$$\angle HDP_3 = 90° - \angle CKD = 90° - (\gamma\text{-}270°)/2 = 75°.$$

$$\angle HP_3D = 180° - \angle DHP_3 - \angle HDP_3 = 45°.$$

По теореме синусов: $\frac{\sin 45°}{HD} = \frac{\sin 60°}{DP_3} = \frac{\sin 75°}{HP_3}$, находим

$$DP_3 = DH\sin 60°/\sin 45° = 0{,}9*0{,}866/0{,}707 = 1{,}10 \text{ м};$$

$$HP_3 = DH\sin 75°/\sin 45° = 0{,}9*0{,}966/0{,}707 = 1{,}23 \text{ м}.$$

Известно, что $\frac{v_H}{HP_3} = \frac{v_D}{DP_3} = \omega_3$. Откуда находим:

$$\omega_3 = V_H/HP_3 = 1{,}386/1{,}23 = 1{,}13 \text{с}^{-1};$$

$$V_D = \omega_3\, DP_3 = 1{,}13*1{,}10 = 1{,}24 \text{ м/с}.$$

4. Колесо движется плоско параллельно. Точка K (точка контакта колеса с поверхностью) – МЦС колеса.

Из треугольника CKD: $DK = 2R\cos\angle CKD = 2*0{,}2*0{,}966 = 0{,}386$ м.

Известно, что $\frac{v_C}{CK} = \frac{v_D}{DK} = \omega_K$. Откуда находим:

$$\omega_K = V_D/DK = 1{,}24/0{,}386 = 3{,}21 \text{с}^{-1};$$

$$V_C = \omega_K\, CK = 3{,}21*0{,}2 = 0{,}64 \text{ м/с}.$$

5. Звено 4 движется плоско параллельно. Вектор скорости узла E вертикален, так как точка E принадлежит ползуну, направляющая которого вертикальна. Строим МЦС (точку P_4) звена 4, восстанавливая перпендикуляры из узлов C и E к векторам скоростей этих точек.

Точка P_4 совпадает с узлом E, значит, V_E=0; $\omega_4 = V_C/L_4$ =0,64/0,5=1,28 c^{-1}.

Полученные результаты удобней привести в виде таблицы 20, где значения этих характеристик вычислены с точностью до двух значащих цифр, так как при построении рисунка 27 с помощью линейки большей точности не требуется:

Таблица 20.

Уз.	A	B	H	D	C	E	Зв.	1	2	3	4	K
V	1,6	1,6	1,4	1,2	0,6	0	ω	4,0	1,6	1,2	1,3	3,2

КИНЕМАТИКА (основные понятия и положения)

ЧТО ТАКОЕ КИНЕМАТИКА (основные понятия)

Кинематика – раздел теоретической механики, в котором изучаются механическое движение материальных тел и определяются кинематические характеристики всех точек этих тел.

Механическое движение – перемещение материальных тел в пространстве с течением времени относительно друг друга.

Кинематические характеристики: расстояние, скорость и ускорение.

Расстояние определяет положение всех точек тела в пространстве.

Скорость определяет изменение положения всех точек тела в пространстве с течением времени по величине и направлению.

Ускорение определяет изменение скорости всех точек тела по величине и направлению в пространстве с течением времени.

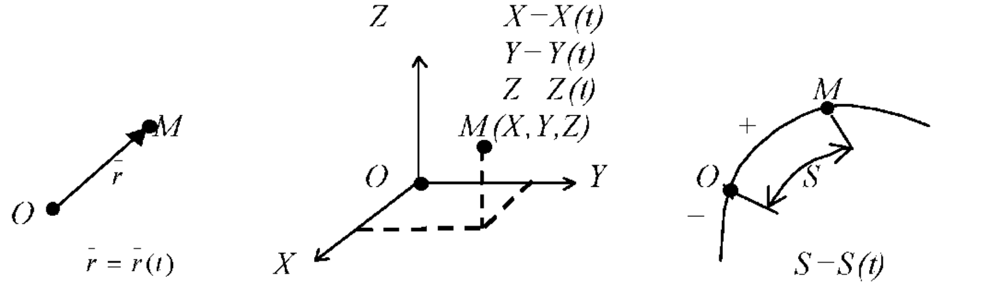
КАК ЗАДАЕТСЯ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ (способы задания движения точки)

Три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный (рис. 28).

Векторный способ (ВС): задается **радиус-вектор**, соединяющий неподвижную точку пространства О, выбранную за систему отсчета, с движущей точкой М.

Координатный способ (КС): задаются **координаты** движущей точки М.

Естественный способ (ЕС): задается 1) траектория движущейся точки М, 2) начало отсчета на траектории, 3) направление отсчета, 4) закон изменения **длины дуги траектории** между движущейся точкой М и началом отсчета.



1. Векторный 2. Координатный 3. Естественный

Рис. 28

КАК ОПРЕДЕЛИТЬ СКОРОСТЬ ТОЧКИ (при разных способах задания её движения)

1 ВС: Вектор скорости точки равен первой производной по времени от её радиус–вектора $\vec V = \dfrac{d\vec r}{dt}$

2 КС: Проекции скорости точки равны первым производным по времени от её соответствующих координат

$$V_X = \frac{dX}{dt} = \dot X,\ V_Y = \dot Y,\ V_Z = \dot Z .$$

3 ЕС: Алгебраическая величина скорости равна первой производной по времени от длины дуги траектории движущейся точки.

$$V_\tau = \frac{dS}{dt} = \dot S .$$

***Вектор скорости** точки **направлен по касательной** к её траектории.*

КАК ОПРЕДЕЛИТЬ УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ (при разных способах задания её движения)

1 ВС: Вектор ускорения точки равен первой производной по времени от вектора её скорости $\vec a = \dfrac{d\vec V}{dt} = \dfrac{d^2\vec r}{dt^2}$.

2 КС: Проекции ускорения точки равны первым производным по времени от соответствующих проекций вектора её скорости.

$$a_X = \frac{dV_X}{dt} = \dot V_X = \ddot X,\ a_Y = \dot V_Y = \ddot Y,\ a_Z = \dot V_Z = \ddot Z .$$

3 ЕС: Полное ускорение точки разлагается на две составляющих касательное (a_τ) *и нормальное* (a_n), *и его величина равна корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих.*

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Касательное ускорение характеризует изменение скорости *по величине*. Величина касательного ускорения точки равна первой производной по времени от алгебраической величины скорости:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости *по направлению*. Величина нормального ускорения точки равна отношению квадрата скорости точки к радиусу кривизны её траектории:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Вектор касательного *ускорения направлен по* касательной *к траектории точки в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное (в этом случае знак первой производной от алгебраической величины скорости положительный) и в обратную сторону, когда – замедленное (рис. 29).*

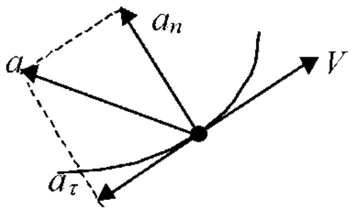


Рис. 29

Вектор *нормального* ускорения перпендикулярен вектору касательного ускорения и направлен в *сторону вогнутости траектории* (рис. 29).

КАК МОЖЕТ ДВИГАТЬСЯ ТОЧКА (классификация движения точки)

1. *Если в течение некоторого времени $a_\tau = 0$ и $a_n = 0$, – точка движется равномерно и прямолинейно.*
2. *Если в течение некоторого времени $a_\tau \neq 0$ и $a_n = 0$, – точка движется неравномерно и прямолинейно.*
3. *Если в течение некоторого времени $a_\tau = 0$ и $a_n \neq 0$, – точка движется равномерно и криволинейно.*
4. *Если в течение некоторого времени $a_\tau \neq 0$ и $a_n \neq 0$, – точка движется неравномерно и криволинейно.*

КАК МОЖЕТ ДВИГАТЬСЯ ТВЕРДОЕ ТЕЛО (виды движения тела)

1. ***Поступательное** движение: любой отрезок тела перемещается параллельно самому себе.*
2. ***Вращательное** движение: две точки, неразрывно связанные с телом, остаются неподвижны.*
3. ***Плоское** движение: каждая точка тела движется в одной и той же плоскости (траектория каждой точки   плоская линия).*
4. ***Сферическое** движение: одна точка, неразрывно связанная с телом, остается неподвижна.*
5. ***Свободное** движение: любое перемещение тела ничем не ограничено.*

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Кинематическими характеристиками тела при поступательном движении являются скорость (линейная) и ускорение (линейное) этого тела.

Скорость и ускорение любой точки поступательно движущегося тела равны скорости и ускорению самого тела.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛА ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Кинематическими характеристиками тела при вращательном движении являются угловая скорость ω *и угловое ускорение* ε *этого тела.*

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела. Вектор угловой скорости ***направлен по оси вращения*** *по правилу правого винта. Ось вращения прямая, проходящая через неподвижные точки.*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение тела равно первой производной по времени от его угловой скорости. Вектор угловой скорости направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, когда вращение ускоренное, и в обратную сторону, когда замедленное.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Величина скорости точки вращающегося тела равна произведению угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения.

$$V = \omega * OM \quad .$$

Вектор скорости точки вращающегося тела направлен ***перпендикулярно прямой****, соединяющей эту точку с осью вращения (рис. 30), и перпендикулярно самой оси вращения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Полное *ускорение точки вращающегося тела разлагается на две составляющих: вращательное* (a_ε) *и осестремительное* (a_ω), *и его величина равна корню квадратному из суммы квадратов этих составляющих.*

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}.$$

Вращательное ускорение направлено в ту же сторону, что и скорость, когда движение ускоренное и в обратную сторону (рис. 30), когда – замедленное. Величина вращательного ускорения точки равна произведению углового ускорения тела на расстояние от точки до оси вращения.

$$a_\varepsilon = \varepsilon * OM.$$

Осестремительное ускорение направлено к оси вращения (рис. 30). Величина осестремительного ускорения точки равна произведению квадрата угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения.

$$a_\omega = \omega^2 * OM.$$

Вектор полного *ускорения любой точки вращающегося тела направлен под углом* μ *к прямой, соединяющей эту точку с осью вращения (рис. 30). Тангенс этого угла равен отношению углового ускорения тела к квадрату его угловой скорости.*

$$tg\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

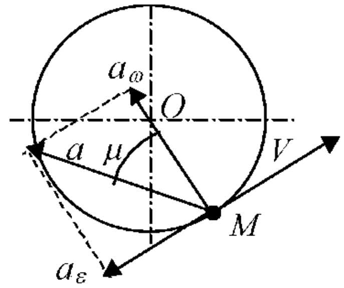


Рис. 30

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Кинематическими характеристиками тела при плоском движении являются мгновенная угловая скорость ω *и мгновенное угловое ускорение* ε *плоской фигуры, а также скорость (линейная) и ускорение (линейное) точки, выбранной за полюс.*

При определении скоростей точек плоской фигуры полюсом следует находить ***мгновенный центр скоростей****. МЦС – точка P, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*

При определении ускорений точек плоской фигуры полюсом следует находить ***мгновенный центр ускорений****. МЦУ точка Q, ускорение которой в данный момент времени равна нулю.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА

Величина скорости точки плоской фигуры равна произведению мгновенной угловой скорости фигуры на расстояние от точки до МЦС.

$$V = \omega * PM.$$

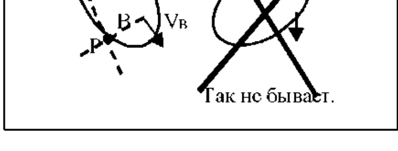
Вектор скорости точки плоской фигуры ***направлен перпендикулярно прямой****, соединяющей эту точку с МЦС, и лежит в плоскости фигуры.*

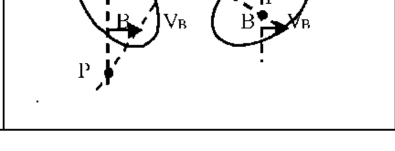
Отношение величин скоростей точек плоской фигуры к расстоянию от этих точек до МЦС есть величина постоянная для всех точек плоской фигуры и равная мгновенной угловой скорости фигуры.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \cdots = \omega.$$

КАК НАЙТИ ПОЛОЖЕНИЕ МЦС (табл. 21)

Таблица 21.





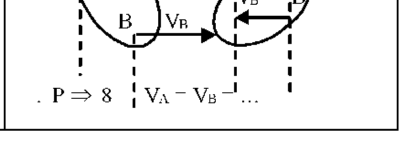


Рис. 31	*Рис. 32*	*Рис. 33*

Если известны векторы скоростей двух точек плоской фигуры (и они не параллельны), надо восстановить перпендикуляры к векторам скоростей из этих точек. Точка пересечения перпендикуляров и будет МЦС (рис. 31).

Если известны векторы скоростей двух точек плоской фигуры (и они параллельны), надо соединить начала и концы этих векторов. Точка пересечения этих линий и будет МЦС (рис. 32).

Если известны векторы скоростей двух точек плоской фигуры (и они не только параллельны, но и равны), то МЦС находится в бесконечно удаленной точке (рис. 33).

ЧТО ТАКОЕ УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

Сложным называется такое движение точки, когда она участвует в двух или более движениях.

При сложном движении точки её абсолютное ускорение равно векторной сумме относительного, переносного ускорения и ускорения Кориолиса:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k .$$

Ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости точки при её переносном движении и изменение переносной скорости точки при её относительном движении.

Вектор ускорения Кориолиса равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости подвижной системы отсчета (движущегося тела) на вектор относительной скорости движущейся (по телу) точки:

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r .$$

Вектор ускорения Кориолиса направлен по правилу правой руки.

Величина ускорения Кориолиса равна удвоенному произведению угловой скорости тела на относительную скорость точки и на синус угла между ними:

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\left(\vec{\omega}_t, \vec{v}_r\right).$$