ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
РЕШЕНИЕ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
Учебное пособие

Содержит оригинальные задачи и задачи повышенной сложности по динамике, предложенные на всесоюзных, всероссийских и других олимпиадах по теоретической механике различного уровня с 1981 по 2008 годы, рекомендации по организации самостоятельной работы студентов при решении творческих задач. Приведены ответы и указания для самооценки решения задач.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс формирования в России инновационной экономики требует особого внимания к проблеме обеспечения качества высшего профессионального образования, что предопределяет его ориентированность на личность как основную ценность и нацеленность на обеспечение максимально благоприятных условий для саморазвития этой личности и формирования академических, социально-личностных и профессиональных компетенций специалиста, и в первую очередь творческих компетенций.

Эффективность инновационной деятельности достигается в первую очередь совершенствованием подготовки специалистов в области инноватики для машиностроительного производства, которые вынуждены принимать управленческие решения в условиях жёсткого дефицита имеющихся материальных, трудовых и финансовых ресурсов, времени, в условиях повышенной ответственности за конечный результат своей деятельности. Управленческие решения не только должны полно и всесторонне учитывать факторы окружающей маркетинговой среды фирмы, но и должны быть принципиально новыми, стимулирующими дальнейшее развитие предприятия, обеспечивающими повышение его конкурентоспособности.

Основными факторами, определяющими степень овладения творческими компетенциями как базовыми для конкурентоспособного выпускника вуза являются: инициатива и творчество; нацеленность на саморазвитие; готовность к командной деятельности, как в роли участника команды, так и её лидера; самоорганизация своей деятельности; мобильность подготовки, обеспечивающая профессиональную адаптацию с учётом динамики социально-экономических преобразований в народнохозяйственной сфере; коммуникабельность в познавательной деятельности и готовность к конструктивному восприятию альтернативных подходов к решению проблем; умение прогнозировать и анализировать процессы развития производства; способность планировать и организовывать воспитательный процесс среди подчинённых; стремление к самостоятельности и ответственности за принятые решения и, прежде всего, креативный уровень интеллектуальной активности.

Решение задачи подготовки специалистов для инновационной экономики, обладающих высоким уровнем освоения творческих компетенций и вышедших на эвристический и креативный уровни интеллектуальной активности в профессиональной деятельности, затруднено тем, что существуют противоречия между потребностью общества в кадрах, обладающих высоким уровнем освоения творческих компетенций, и сложившейся практикой профессиональной подготовки, характеризующейся тем, что в вузах доминирует репродуктивный характер образовательного процесса и существует не полная востребованность интеллектуального и творческого потенциала студента (особенно в научно-производственной сфере); между ориентацией системы образования на единые государственные образовательные стандарты и неудовлетворённой потребностью творческой личности в самореализации в условиях высшей школы.

С учётом того, что «…развитие креативности способствует становлению творческой зрелости специалиста в процессе самоактуализации личности и достижению им личностной, профессиональной и духовной вершин» и «…при высоком уровне самоактуализации креативной личности творческая зрелость специалиста является более устойчивой, продуктивной и продолжительной в жизненной реальности» (Н.Ф. Вишнякова), именно креативность может рассматриваться как базовая характеристика специалиста, обладающего творческими компетенциями.

Креативность конкурентоспособного специалиста – «творческий потенциал, творческие возможности человека, которые могут проявляться в мышлении, чувствах, общении, отдельных видах деятельности, характеризовать личность в целом или отдельные её стороны, продукты деятельности и процесс их создания» (Т.А. Барышева). Креативность и интеллект необходимо рассматривать как общие способности: интеллект как общую способность решать задачи на основе имеющихся знаний, креативность как общую способность к творчеству (В.Н. Дружинин), но в то же время креативность – не только способность использовать данную в задачах информацию разными способами и в быстром темпе, но и инициативность, предполагающая готовность самостоятельно ставить проблемы, заниматься углублённым анализом на основе решения всего лишь одной задачи без воздействия внешнего стимула (Д.Б. Богоявленская).

Развитие креативности определяется индивидуальной спецификой потребностей, психофизиологической особенностью задатков, прикладной направленностью способностей и социально-личностной стимуляцией, поэтому существует необходимость оптимизации общественных условий, детерминирующих поведение личности, и социально-педагогических механизмов формирования творческих компетенций, важнейшим из которых является ближайшее социальное окружение человека (микросреда), где в процессе целенаправленного воспитания и совместной творческо-позна-вательной деятельности происходит действенная выработка программ творческого поведения обучающегося, формирующих его как креативную личность и элитного специалиста. Развитие креативности личности студентов и формирование их творческих компетенций мы рассматриваем как их целенаправленное развитие с учётом неповторимой человеческой индивидуальности, как обеспечение профессионального роста и выхода на эвристический и креативный уровни интеллектуальной активности через построение такой образовательной среды, в условиях которой максимально используются и развиваются их природные способности, прежде всего, интеллектуальные и креативные.

Важнейшим педагогическим фактором, обеспечивающим творческое саморазвитие, является проблематизация содержания образования через процесс конструирования целостной системы профессионально-ориенти-рованных творческих задач, и прежде всего по общепрофессиональным дисциплинам.

Механика, являясь научной основой важнейших областей техники, продолжает интенсивно развиваться. Это стимулируется появлением новых прогрессивных технологий и инновационных производств, автоматизацией производственных процессов, созданием новых высокотехнологичных машин и механизмов, освоением макро- и микромира. Прогресс современного производства невозможен без широкого взаимодействия науки и техники при реализации инновационных проектов. Для решения этих возрастающих по сложности задач в области машиностроения важное значение имеют знания в области одной из фундаментальных общенаучных дисциплин – механики – науки о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

Механическим движением называют изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Примеры таких явлений встречаются повсюду: газовые и жидкостные потоки в машинах и аппаратах, различные транспортные средства (автомобили, корабли, самолёты), механизмы, машины. К тому же состояние покоя, в котором находятся различные опорные конструкции и производственные сооружения, является частным случаем движения. При взаимодействии материальных тел друг с другом происходит изменение движения этих тел или изменение их формы.

Перечень проблем, рассматриваемых в механике, практически необъятен и с развитием этой науки он непрерывно пополняется, образовывая подчас самостоятельные области, связанные с изучением механики твёрдых деформируемых тел, жидкостей и газов. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных дисциплин, посвящённых проектированию и расчёту различных статических и динамических конструкций, сооружений, механизмов, машин, аппаратов, необходимых для развития инновационного производства.

Однако всё это многообразие опирается на ряд основных понятий, законов, принципов, методов, общих для всех областей механики. Рассмотрение этих общих закономерностей движения материальных тел и методов их применения и составляет предмет теоретической (или общей) механики.

При изучении какого-либо явления необходимо выделять в нём наиболее существенное, главное, абстрагируясь от других незначительных сторон явления. В результате этого исследуются некоторые модели (схемы) реальных тел, процессов, явлений. Такими научными абстракциями являются все вводимые в механике исходные положения и понятия, модели материальных тел, схемы их взаимодействий.

На самостоятельную работу государственный образовательный стандарт предлагает выделять в процессе изучения дисциплины от 50 до 90 % времени. Наряду с углублённым изучением отдельных разделов дисциплины и приобретением новых знаний, умений и навыков необходимо в процессе организации самостоятельной работы уделить достаточно времени и формированию творческих компетенций. Самостоятельное решение творческих задач по механике в технических вузах и в классических университетах является системообразующим элементом организации творческого саморазвития в процессе изучения этой дисциплины, которое способствует более системному и глубокому усвоению профессиональных знаний, даёт возможность сформировать у студентов готовность к творческой деятельности, развить креативный характер мышления. Всё это помогает подготовить конкурентоспособного специалиста к профессиональной деятельности в современных рыночных условиях по разработке и продвижению инновационных проектов в производство.

В данном пособии изложены краткие сведения по теории решения творческих задач, собран банк уникальных творческих задач по динамике, даны методические указания по решению задач и ответы для самоконтроля. Изложение курса выполнено с позиций пользователя, для которого важны осмысление и возможность использования творческих приёмов для практического применения. Студенты, заинтересованные в углублённом изучении отдельных вопросов динамики и более широкой практике по решению задач, необходимые материалы могут найти в учебной литературе, список которой даётся в конце книги.

Приведённые примеры достаточно полно отражают возможности рассматриваемых творческих задач в процессе творческого саморазвития личности обучающихся, при этом самостоятельная работа студентов с использованием учебного пособия проводится параллельно с аудиторными занятиями и обеспечивается консультациями преподавателей.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений дневных и заочных форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки 220600 – Инноватика, 150400 – Технологические машины и оборудование, а также для тех, кто изучает механику самостоятельно. Материал книги изложен так, что им можно пользоваться при изучении механики по полной и сокращённым программам других специальностей втузов, входящих в УМО по университетскому политехническому образованию.

Организация самостоятельной работы с использованием данного пособия предполагает несколько этапов:

1. Самостоятельное изучение студентом раздела дисциплины по источникам (из списка рекомендованной литературы).

2. Самостоятельное решение студентом творческих задач в соответствии с собственным уровнем креативности при использовании ответов и указаний. Базовый уровень подготовки соответствует творческим задачам средней сложности.

3. Совместная творческая деятельность группы студентов при решении олимпиадных задач повышенной и высокой сложности в рамках факультативных занятий по дисциплине и в студенческих кружках.

4. Использование задач пособия или их модификаций в качестве конкурсных заданий при проведении вузовского тура Всероссийской студенческой олимпиады.

1. РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

В процессе самообразования и развития своей креативности Вы последовательно проходите три уровня готовности к решению творческих профессиональных задач, предполагающих:

- на первом уровне решение задач повышенной трудности, требующих глубокого понимания изучаемого курса, нестандартной комбинации имеющихся знаний, способности к анализу субъективно существующего информационного поля и определение условий его достаточности;
- на втором уровне постановка и решение типовых ситуационных производственных задач, в том числе и в экстремальных внешних условиях;
- на третьем уровне решение творческих задач, основанных на исследовании профессионально-ориентированных ситуаций и предполагающих самостоятельное формулирование проблемы и её решение.

Необходимо учитывать, что большинство задач, предлагаемых Вам в пособиях и учебниках, имеют стандартную, привычную конструкцию, подразумевающую достижение искомого результата по заданной процедуре, и являются лишь слабым подобием реальных жизненных процессов. В процессе же профессиональной деятельности Вы как специалист, как правило, будете сталкиваться с производственными ситуациями, в которых действуют неопределённые, вероятностные условия, излишние, противоречивые и недостающие данные, когда нужно принимать решения в экстремальных условиях ограничения времени и (или) использования материальных и финансовых ресурсов. Производственные ситуации такого рода неизбежно возникают в условиях инновационной экономики, в процессе освоения или разработки новых производственных технологий и оборудования.

Творческие задачи, включённые в пособие, отражают в себе профессиональный и социальные контексты будущей профессиональной деятельности, и предполагают не только хорошее знание изучаемой дисциплины и умения пользоваться этими знаниями, но и требует от Вас творческого акта, т.е. построения некоторой неочевидной цепочки рассуждений, приводящей к созданию субъективно нового. Решая творческие задачи, Вы преобразуете логическую форму научного знания в деятельностную форму, выходя на креативный уровень интеллектуальной активности, при котором «найденная закономерность при решении задачи не используется как приём решения, а выступает в качестве новой проблемы и подвергается доказательству путём поиска её исходного генетического основания» (Д.Б. Богоявленская).

В творческих задачах можно выделить:

1. Предметную область – совокупность фиксированных и предполагаемых объектов разного характера, о которых явно или неявно идёт речь в задаче.
2. Отношения, которыми связаны объекты предметной области.
3. Требование или вопрос – указание о цели задачи.
4. Оператор задачи – совокупность тех действий, которые надо произвести над условиями задачи, чтобы выполнить её требование. Решение задачи и состоит в том, чтобы найти оператор.

Решение Вами творческой задачи должно включать следующие этапы:

- погружение в информационное поле предполагаемой задачи через постановку проблемы, восприятие условий и описание проблемы;
- разработка информационно-логической модели задачи через установление взаимосвязи между исходными данными, выявление основных законов и границ их применения при решении данной задачи;
- проверка адекватности разработанной модели условиям постановки задачи;
- разработка алгоритмической структуры задачи, определение её оптимальности;
- разработка технологии реализации алгоритмической структуры задачи, проведение анализа адекватности технологии предложенным средствам реализации;

- проведение анализа полученных результатов с позиции корректности постановки проблемы, адекватности разработанной информационно-логической модели постановке проблемы, оптимальности алгоритмической структуры и эффективности технологии реализации.

При этом Вы должны учитывать основные факторы, препятствующие успешному нахождению решения творческой задачи:

- на этапе погружения в информационное поле некоторые значащие элементы информации могут остаться не востребованными, и недостаток или избыток данных вызовет психологический дискомфорт;
- на этапе разработки информационно-логической модели взаимосвязь между основными структурными элементами может устанавливаться без учёта основных закономерностей протекания процесса, что не позволяет говорить об адекватности модели поставленной проблеме;
- практически всегда отсутствует проверка промежуточных этапов решения и конечного результата на адекватность, что является недопустимым для специалиста, претендующего на конкурентоспособность.

В процессе изучения дисциплины (не только дисциплины «Механика») Вам необходимо учитывать, что саморазвитие при формировании творческих компетенций включает подготовительную и состязательную стадии, которые предъявляют определённые специфические требования к творческим задачам.

На подготовительной стадии основным элементом учебного процесса выступает самостоятельная работа – познавательная деятельность, в процессе которой Вы активно воспринимаете, осмысливаете знания, углубляете и расширяете полученную в готовом виде информацию и создаёте субъективно новую, решаете практические задачи на основе теории и практики, овладеваете профессиональными умениями.

Вам необходимо помнить, что для подготовительной стадии процесса формирования творческих компетенций очень ценным является факт неоднозначного восприятия проблемы, который даёт импульс её творческому осмыслению, позволяет анализировать имеющуюся информацию, выявлять лишнюю, определять недостающую и источники её получения, самому осуществлять постановку задачи.

Ограничение по времени на данной стадии не столь существенно, так как Вы можете искать решение одной задачи длительное время, возвращаться к нему, предлагать новые версии восприятия проблемы, более оптимальные алгоритмы её решения, другой математический аппарат реализации этих алгоритмов.

На состязательной стадии (реализуемой в виде предметных олимпиад), для удобства проведения сравнительного анализа работ участников и выявления лидеров, условие задачи будет максимально корректным, и Вы должны (и можете) сразу же уяснить постановку проблемы, понять конечную цель своей работы, выявить взаимосвязь структурных элементов.

Для проведения самоанализа Вы можете воспользоваться следующими рекомендациями по оценке решения творческих задач:

«1,0» – представлено логичное и обоснованное решение и получен верный результат;

«0,8» – представлено логичное и обоснованное решение, но не получен верный результат из-за ошибок в математических преобразованиях и несущественных ошибок в рассуждениях;

«0,5» – разработан алгоритм решения задачи на основании правильно определённых закономерностей функционирования изучаемого объекта, но результат не получен;

«0,2» – приведены основные законы, позволяющие найти оператор задачи;

«0,0» – решение отсутствует или допущены принципиальные ошибки.

Самостоятельно решая творческие задачи, Вы должны учитывать, что авторы этих задач могут использовать следующие методы их составления:

- метод новых вариантов – требуется выполнить задания принципиально иначе, найти новые варианты его выполнения, когда уже имеется несколько вариантов решения;
- метод информационной недостаточности применяется для активизации деятельности студентов, при этом условие задачи представляется с явным недостатком данных;

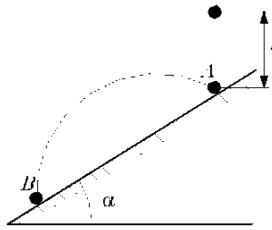
- метод информационной насыщенности, заключающийся во включении в исходное условие задачи заведомо излишних сведений, позволяет формировать у студентов готовность к критическому анализу предоставленной информации;
- метод абсурда, заключающийся в том, что предлагаемая задача заведомо невыполнима.

Представляется возможным выделить несколько основных классов творческих познавательных задач:

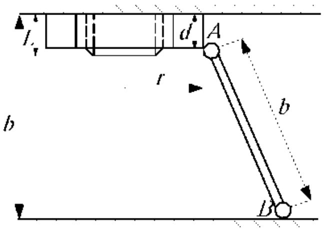
1. Неполнопоставленные, с размытыми условиями, требующие способности к «видению проблемы».
2. С парадоксальной формулировкой, «провоцирующие» на ошибку, с неопределённым, неоднозначным ответом.
3. С избыточными данными, задачи выбора, с противоречивыми условиями.
4. Рассчитанные на комбинирование известных способов решения задач в новый способ.
5. Ставящие целью выработку обобщающих стратегий, построение алгоритмов решения.
6. Предполагающие выдвижение гипотез, построение стратегии решения.

Приведём примеры нескольких типов специфичных творческих задач по механике, которые Вам могут встретиться в процессе саморазвития в рамках самостоятельной работы по дисциплине.

Пример 1. Задача на знание базового курса.



Шарик падает без начальной скорости с высоты h на наклонную плоскость с углом наклона α. Отразившись в точке A от плоскости, он попадает в точку B. Считая удар абсолютно упругим и пренебрегая сопротивление воздуха, определить расстояние AB.



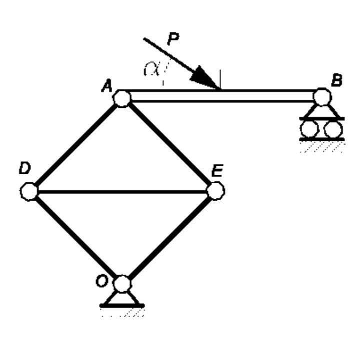
Пример 2. Информационно перегруженные задачи.

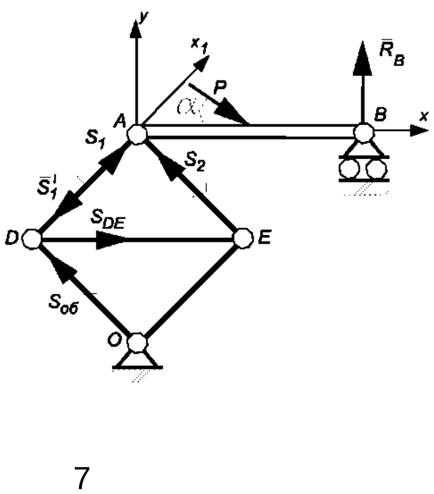
На вертикально выступающую из горизонтальной плоскости часть шпильки длиной l навёрнута однородная гайка толщиной d и весом P. К гайке на расстоянии r от её оси с помощью цилиндрического шарнира присоединён однородный стержень AB длиной b и весом Q, конец которого опирается на гладкую горизонтальную плоскость. Расстояние между плоскостями равно b. Резьба правая с постоянным шагом. Приняв, что при самоотвинчивании гайки в результате взаимодействия со шпилькой ускорение её центра тяжести C постоянно, найти скорость и ускорение точки B в момент схода гайки со шпильки, если давление на опору в этот момент равно половине веса системы и гайка к этому моменту совершила пять оборотов. Вычисления провести при $r = d = l = b/2$ и $P = Q$.

Комментарий. Задача интересная, построенная на реальном практическом материале, но понять условие за ограниченное время проблематично.

Пример 3. Задачи «провокационные».

Горизонтальная балка AB левым концом A шарнирно соединена со стержневым квадратом $ADOE$, установленным так, что $AO \perp AB$; правый коней B балки закреплён на шарнирно-подвижной опоре. К середине балки приложена сила P под некоторым углом α. Пренебрегая весом стержней квадрата, соединённого между собой и с опорой O шарнирно, а также весом балки по сравнению с силой P, определить, при каком угле α усилие в диагональном стержне квадрата будет минимальным.

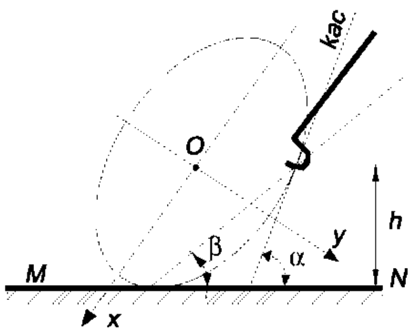




Комментарий. Решение вроде бы очевидно. Объект равновесия – балка AB, на которую действуют реакции S_1 и S_2 стержней AD и AE, реакция R_b шарнирно-подвижной опоры и сила P. Записав условия равновесия для балки AB, получим выражение для силы S_1. Затем рассмотрим равновесие узла D и найдём силу S_{dc}. Сила минимальна, если производная равна нулю. Ответ найден. Но попробуем рассматривать равновесие узла E, а не D. Ответ будет другим. И тут мы задумываемся, а будет ли равновесие вообще.

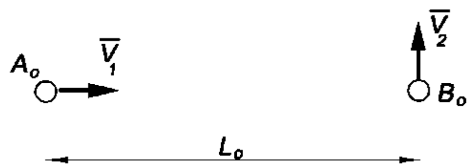
Приведём ещё несколько примеров задач, обеспечивающих формирование творческих компетенций через выход на креативный уровень интеллектуальной активности.

Пример 1. Мальчик бежит с постоянной скоростью V и с помощью водила катит перед собой обод, имеющий форму эллипса с полуосями a и b ($a > b$). Точка касания водила с ободом находится на постоянной высоте h над землёй. Выразить угловую скорость ω обода, катящегося без проскальзывания, как функцию от α, β. Вычислить ω при $OX \perp MN$.



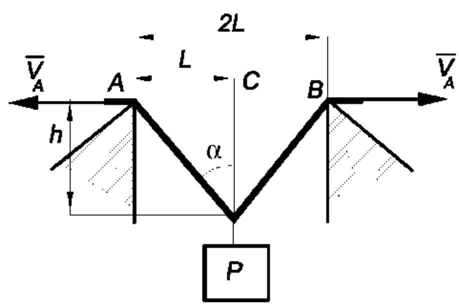
Комментарий. Решение этой задачи предполагает большие математические выкладки. Целесообразно вначале рассмотреть частный случай, когда обод является окружностью. Затем использовать средства информационных технологий и численно решить задачу.

Пример 2. Две точки A и B движутся по прямым, расположенным в одной плоскости, с постоянными скоростями V_1 и V_2. В начальный момент времени расстояние между точками равно l_0, направления скоростей указаны на чертеже. Определить кратчайшее расстояние между точками A и B.



Комментарий. На сколько усложнится задача, если одна из скоростей будет направлена постоянно на другое тело (следящая система). На Всероссийской олимпиаде участник решил аналогичную задачу (про зайца и догоняющую его лису) графически и получил ответ с допустимой погрешностью. Попробуйте. Для аналитического решения необходимо перейти в другую систему отсчёта.

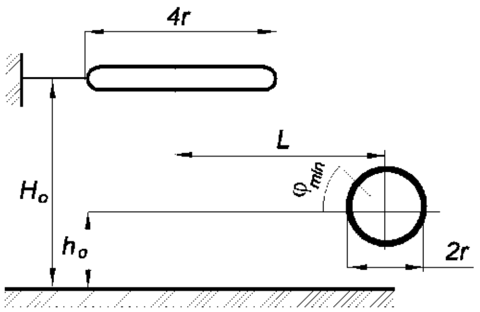
Пример 3. Груз P поднимается с помощью двух тросов, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями ($\overline{V}_A = -\overline{V}_B$). Определить скорость и ускорение груза.

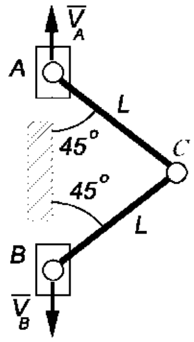


Комментарий. Возможно решение методами механики, а возможно и аналитическими, если вспомнить, что скорость груза – это производная от его перемещения.

Пример 4. Под каким наименьшим углом к горизонту φ_{min} следует бросить баскетбольный мяч, чтобы он пролетел сверху сквозь кольцо, не ударившись в него. Толщиной кольца, изменением скорости мяча за время пролёта через кольцо и сопротивлением воздуха пренебречь.

Комментарий. Интересная и доступная задача даже для школьников. Необходимо вспомнить законы баллистического движения и сообразить условие пролёта мяча через кольцо.





Пример 5. Определить скорость и ускорение точки *C* плоского механизма в положении, указанном на рисунке, если известны скорости V_A и V_B, а ускорения точек *A* и *B* равны нулю.

Комментарий. Начните с частного случая – скорости точек *A* и *B* равны. Возможен аналитический метод решения. Интересно рассмотреть и случай несимметричного механизма.

При организации самостоятельной работы по дисциплине «Механика» на основе данного пособия Вам необходимо повторить темы:

1. Динамика материальной точки.
- Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
- Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.

2. Динамика механической системы.
- Теорема о движении центра масс.
- Теорема об изменении количества движения.
- Теорема об изменении кинетического момента механической системы.
- Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.
- Динамика твёрдого тела.
- Принцип Даламбера.

3. Основы аналитической механики.
- Принцип возможных перемещений.
- Общее уравнение динамики.
- Уравнения Лагранжа второго рода.
- Малые колебания механической системы.

В каждом блоке задач данного пособия есть задачи высокой сложности (7 – 10 баллов), повышенной сложности (5–6 баллов), средней сложности (3–4 балла). Для некоторых задач повышенной сложности в разделе «Ответы и указания» приведены также указания по поиску решения. В случае невозможности найти решение в процессе самостоятельной работы даже после анализа указаний и ответа, приведённых в учебном пособии, Вам необходимо обратиться за консультацией к своему преподавателю.

1 (М., 1984, 8 баллов). Диск массой m и радиусом r, двигаясь в вертикальной плоскости, прыгает по горизонтальному полу. Известно, что в момент отскока: скорость его нижней точки меняется на противоположную, кинетическая энергия не меняется. Найти последовательность точек удара о пол. Центр масс совпадает с геометрическим центром диска.

Решение. В плоскости движения введём систему координат O_{xy}. Через x, y, φ обозначим координаты центра диска и угол поворота диска. Перед i-м ударом скорость центра диска $\overline{V}_{i-1}(\dot{x}_{i-1}, \dot{y}_{i-1})$, угловая скорость $\dot{\varphi}_{i-1}$. Соответствующие величины после удара $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\varphi}_i$. Скорость нижней точки диска $\overline{U}(\dot{x} + r\dot{\varphi}, \dot{y})$; кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$.

Первое и второе условие задачи записывается в виде:

$$\dot{x}_{i-1} + r\dot{\varphi}_{i-1} = -\dot{x}_i - r\dot{\varphi}_i, \qquad (1)$$

$$\dot{y}_{i-1} = -\dot{y}_i, \qquad (2)$$

$$m\left(\dot{x}_{i-1}^2 + \dot{y}_{i-1}^2\right) + J\dot{\varphi}_{i-1}^2 = m\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right) + J\dot{\varphi}_i^2. \qquad (3)$$

Введём начальные условия. Пусть перед первым ударом

$$\dot{x}_0 = a, \ \dot{y}_0 = -b, \ \dot{\varphi}_0 = \Omega, \ (b > 0).$$

Уравнение (2) полностью определяет движение центра масс диска по вертикали и интервалы времени между ударами: они одинаковы и равны $\tau = \frac{2b}{g}$. Преобразуем уравнение (3):

$$m(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)(\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i) + m\left(\dot{y}_{i-1}^2 - \dot{y}_i^2\right) = J(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1})(\dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_{i-1})$$

и упростим его, учитывая уравнения (1) и (2):

$$mr(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) = J(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}). \qquad (4)$$

Уравнение (4) может быть получено иначе. В момент удара на диск действует ударный импульс. Его вертикальная составляющая влияет только на $\dot{y}$. Действие горизонтальной составляющей определяется уравнениями: $m(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) = S_{ix}$, $J(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}) = rS_{ix}$. Исключив импульс, придём к уравнению (4). Из этого следует, что второе условие задачи – условие постоянства кинетической энергии – лишнее; задача разрешима без него. Решая совместно уравнения (1) и (4), получим $\left(J_P = J + mr^2\right)$:

$$J_P\dot{x}_i = \left(mr^2 - J\right)\dot{x}_{i-1} - 2rJ\dot{\varphi}_{i-1};$$

$$J_P\dot{\varphi}_i = -\left(mr^2 - J\right)\dot{\varphi}_{i-1} - 2mr\dot{x}_{i-1}. \qquad (5)$$

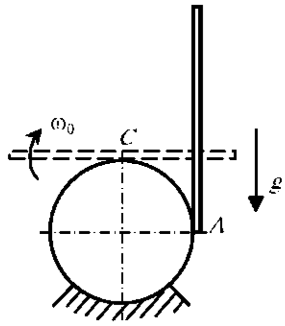
Двукратным применением формул (5) находим: $\dot{x}_{i+2} = \dot{x}_i$, $\dot{\varphi}_{i+2} = \dot{\varphi}_i$. Таким образом, установлено, что $\dot{x}, \dot{y}, \dot{y}, \dot{\varphi}$ – периодические функции времени с периодом 2τ. Определим приращения координаты x при двух последовательных ударах диска о плоскость:

$$\delta_1 = x_2 - x_1 = \dot{x}_1\tau = \frac{2b}{g}\cdot\frac{\left(mr^2 - J\right)a - 2rJ\Omega}{J + mr^2};$$

$$\delta_2 = x_3 - x_2 = \dot{x}_2 \tau = \dot{x}_1 \tau = \frac{2ab}{g}.$$

Последовательность координат точек удара диска о пол $x_{i+1} = x_i + \delta_i$, где $\delta_i = \delta_2$, если $i = 2n$; и $\delta_i = \delta_1$, если $i = 2n+1$.

Подбирая начальные условия, можно выделить различные варианты движения диска: подскоки на месте $(\dot{x}_0 \neq 0, \dot{\varphi}_0 = 0)$; перескоки влево-вправо (со сменой направления вращения) между двумя точками $(mr\dot{x}_0 = J\dot{\varphi}_0)$; подскоки с равномерным продвижением в одном направлении и с сохранением постоянной угловой скорости $(\dot{x}_0 = -r\dot{\varphi}_0)$; чередование подскоков на месте и перескоков в одном направлении $(\dot{x}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 \neq 0)$ и т.д.



2 (Россия, 2007, 6 баллов)*. Однородный стержень массой m и длиной $l = \pi R$ лежит на цилиндрической поверхности радиуса R. В этом положении центр тяжести стержня C контактирует с поверхностью, а его скорость равна нулю. Какую начальную угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню, чтобы при достижении им вертикального положения величина нормальной реакции в точке A была равна mg? Поверхность абсолютно шероховата, т.е. движение стержня происходит без проскальзывания. Считаем установленным, что на рассматриваемом участке движение происходит без отрыва стержня от поверхности.

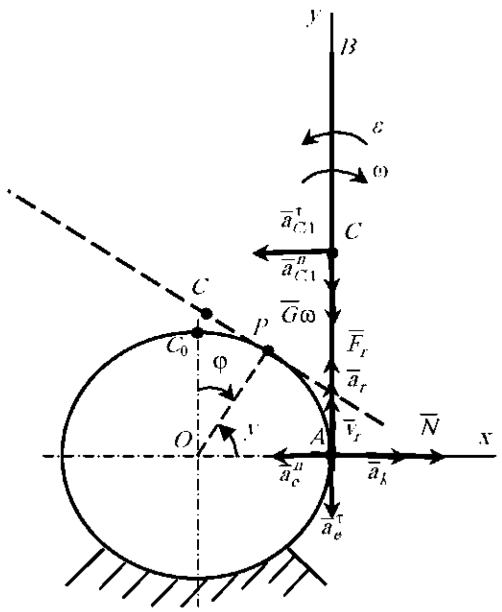
Решение.

1 способ. Произвольное положение стержня AB во время движения указано пунктиром. Это движение является сложным.

Переносное движение: вращение с проскальзыванием вокруг неподвижного центра O с поворотом на угол φ, при котором точка C всё время контактирует с цилиндром. Переносные угловая скорость и угловое ускорение равны абсолютным угловой скорости и угловому ускорению стержня:

$$\omega_e = \omega_a = \omega, \ \varepsilon_e = \varepsilon_a = \varepsilon.$$

Относительное движение: поступательное движение стержня AB вдоль прямой AB в направлении точки B. Для удовлетворения условию отсутствия проскальзывания величина относительного перемещения $s_r = PC$ должна равняться длине дуги $\overset{\frown}{C_0P}$, т.е.



$$s_r = R\varphi; \tag{1}$$

$$v_r = R\omega, \ a_r = R\varepsilon. \tag{2}$$

Формально абсолютное ускорение мгновенного центра скоростей P имеет вид: $\bar{a}_P = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_r + \bar{a}_k$. Однако в течение всего движения $a_e^{\tau} = R\varepsilon$. Из (2): $a_e^{\tau} = a_r$, при этом $\bar{a}_e^{\tau} \uparrow\downarrow \bar{a}_r$. Поэтому $\bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_r = 0$. Отсюда

$$\bar{a}_P = \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_k; \qquad (3)$$

$$a_e^{n} = R\omega^2, \; a_k = 2\omega v_r = 2R\omega^2. \qquad (4)$$

Ускорение Кориолиса $\bar{a}_k$ играет в этой задаче ключевую роль! Если его ошибочно пропустить, то далее N ошибочно получилась бы отрицательной.

При вертикальном положении стержня точка P совпадает с концом стержня A и ускорение $\bar{a}_A$ вычисляется по формулам (3), (4).

Полная реакция поверхности имеет касательную и нормальную составляющие $\bar{F}_{\tau}$ и $\bar{N}$. При данном положении стержня дифференциальные уравнения его движения имеют вид:

$$ma_{Cx} = N; \qquad (5)$$

$$ma_{Cy} = -G + F_{\tau};$$

$$J_{Cz}\varepsilon = N(l/2). \qquad (6)$$

Так как $J_{Cz} = ml^2/12$, из (6)

$$\varepsilon = \frac{6N}{ml}. \qquad (7)$$

Ускорение центра тяжести C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{CA}^{n}. \qquad (8)$$

С учётом (4), (7)

$$a_{Cx} = -a_e^{n} + a_k - a_{CA}^{\tau} = -R\omega^2 + 2R\omega^2 - (l/2)\varepsilon = R\omega^2 - 3N/m. \qquad (9)$$

Учитываем (9) в (5):

$$N = (1/4)mR\omega^2. \qquad (10)$$

Так как по условию $N = mg$, то из (10) следует:

$$\omega^2 = 4g/R. \qquad (11)$$

По теореме об изменении кинетической энергии $T - T_0 = A_G$. Так как в конечном положении точка A – мгновенный центр скоростей (МЦС), а в начальном положении точка C – МЦС, то

$$T = J_{Az}\omega^2/2 = ml^2\omega^2/6;$$

$$T_0 = J_{Cz}\omega_0^2/2 = ml^2\omega_0^2/24.$$

$$A_G = -mg\left(\frac{l}{2} - R\right) = -mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$\frac{ml^2\omega^2}{6} - \frac{ml^2\omega_0^2}{24} = -mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{R}\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Учитываем (11):

$$\frac{4g}{R} = \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{R\pi^2}(3\pi - 6).$$

$$\omega_0=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}\left(4\pi^2+3\pi-6\right)}\approx 4{,}170\sqrt{\frac{g}{R}}\,.$$

2 способ. К тому же результату можно прийти другим путём, не используя кинематические соотношения (1 – 4). Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольного угла $\phi=\frac{\pi}{2}-\varphi$, где ϕ отсчитывается от горизонтальной оси x против часовой стрелки:

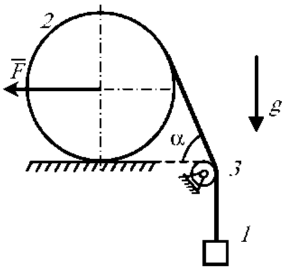
$$\frac{1}{2}mR^2\left[\frac{\pi^2}{12}+\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)^2\right]\dot{\phi}^2-T_0=-mgR\left[\sin\phi+\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\cos\phi-1\right].$$

Дифференцируя по времени, получим угловое ускорение:

$$\ddot{\phi}=\frac{\frac{g}{R}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\sin\phi+\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\dot{\phi}^2}{\frac{\pi^2}{12}+\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)^2}\,.$$

При $\phi=0$ получим: $\ddot{\phi}=\frac{3\omega^2}{2\pi}$. Тогда из (7) $\frac{6N}{ml}=\frac{3\omega^2}{2\pi}$. Приходим к ключевому соотношению (11): $\omega^2=4g/R$. Далее решение как в способе 1.

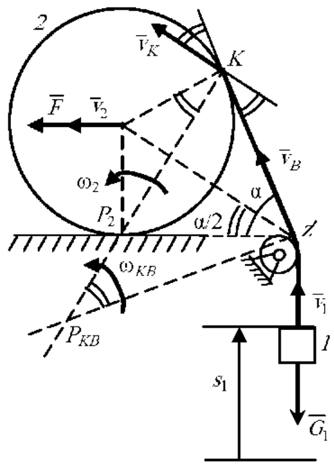
Ответ. $\omega_0=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}\left(4\pi^2+3\pi-6\right)}\approx 4{,}170\sqrt{\frac{g}{R}}$.



3 (Россия, 2007, 8 баллов). Под действием горизонтальной силы $F = 2mg$, приложенной к центру катушки *2* массой m, наматывающаяся на катушку нить поднимает груз *1* массой m. При этом нить огибает гладкий блок *3* пренебрежимо малых размеров и массой. Катушка, однородный цилиндр радиуса R, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Определите скорость и ускорение груза *1*, а также силу натяжения нити в момент, когда угол наклона нити $\alpha = 60°$. Вначале, при $\alpha_0 = 90°$, система находилась в покое.

Решение. Вначале установим кинематические связи.

1-й (*геометрический*) *способ построения кинематических соотношений.* Скорость точки K нити при соприкосновении с диском совпадает со скоростью точки K', принадлежащей диску. Обоснуем это. Через малый промежуток времени dt после контакта с диском точки K и K', очевидно, двигаются совместно по единой траектории и поэтому имеют одинаковые скорости. Ускорения $\bar{a}$ и точки K, и точки K' в данной задаче – вектора конечной величины (ударных явлений здесь нет). Значит, $d\bar{v}=\bar{a}dt$ – малые вектора и для K, и для K'. Поэтому перед этим, за время dt, т.е. в сам момент соприкосновения с диском, скорости K и K' должны мало отличаться от друга. А если устремить dt к нулю, то отличие исчезнет. Итак, $\bar{v}_K=\bar{v}_{K'}$. (Заметим, что, в отличие от скоростей, ускорения K и K' различны!)



Участок нити *KB* между *K* и точкой *B* верхнего касания нити с блоком в данный момент времени движется как твёрдое тело, совершающее мгновенное плоское движение (мгновенное, так как в следующий момент времени *KB* искривится). $\bar{v}_K \perp KP_2$, где P_2 – МЦС для диска *2*. Очевидно, $\bar{v}_B$ параллелен *KB*. Строим P_{KB} – МЦС для *KB*.

Очевидно, $v_1 = v_B$. Из ΔBKP_2 угол $P_2\hat{K}B = 90^\circ - (\alpha/2)$. Поэтому угол между $\bar{v}_K$ и *KB* равен $\alpha/2$. По теореме о проекциях скоростей для *KB* $v_B = v_K\cos(\alpha/2)$. Учтём, что $\omega_2 = \frac{v_2}{R} = \frac{v_K}{2R\cos(\alpha/2)}$. Связывая все эти соотношения, получаем

$$v_2 = \frac{v_1}{2\cos^2(\alpha/2)}. \qquad (1)$$

Найдём также ω_{KB}. Из геометрии:

$$BP_{KB} = KB\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)\,,\quad KB = BP_2 = R\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)\,.$$

$$\omega_{KB} = \frac{v_B}{BP_{KB}} = \frac{v_1}{R}\mathrm{tg}^2(\alpha/2)\,. \qquad (2)$$

Найдём зависимости $s_1 = s_1(\alpha)$, $s_2 = s_2(\alpha)$. В начале движения было $BP_2 = R$. Поэтому

$$s_2 = R(\mathrm{ctg}(\alpha/2) - 1)\,. \qquad (3)$$

Из формулы (1):

$$ds_2 = \frac{ds_1}{2\cos^2(\alpha/2)}. \qquad (4)$$

Взяв дифференциал от (3), получим $ds_2 = -\frac{R}{2\sin^2(\alpha/2)}d\alpha$. Подставляем в (4) и интегрируем:

$$R\int_{\pi/2}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}\right)d\alpha = \int_0^{s_1} ds_1\,. \qquad (5)$$

$$s_1 = R\big(2\mathrm{ctg}(\alpha/2) + \alpha - 2 - (\pi/2)\big)\,. \qquad (6)$$

Все кинематические соотношения построены. 2-й способ приведён в конце решения.

Для определения v_1, a_1 применим теорему об изменении кинетической энергии системы. Учитывая, что диск катится без проскальзывания, после стандартных преобразований получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{3mv_2^2}{4} = Fs_2 - mgs_1\,. \qquad (7)$$

С учётом (1), перепишем (7) в виде:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16\cos^4(\alpha/2)}\right)v_1^2 = g(2s_2 - s_1)\,, \qquad (8)$$

Дифференцируем (8) по времени с учётом, что в левой части оба множителя переменны:

$$\frac{3\sin(\alpha/2)}{8\cos^5(\alpha/2)}\,\dot{\alpha}\,v_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16\cos^4(\alpha/2)}\right)2v_1a_1 - 0 = g(2v_2 - v_1)\,. \qquad (9)$$

Здесь $\dot\alpha = -\omega_{KB}$. Знак «–», так как направления отсчёта угла α (по часовой стрелке) и направление ω_{KB} (против часовой стрелке) противоположны. Учитываем (2) в (9). В правой части (9) учитываем (1). Тогда

$$-\frac{3\sin^3(\alpha/2)}{8\cos^7(\alpha/2)}\cdot\frac{v_1^3}{R}+\left(1+\frac{3}{8\cos^4(\alpha/2)}\right)v_1 a_1 = g\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha/2)}-1\right)v_1 . \quad (10)$$

Так как (10) справедливо при любых значениях $v_1 \neq 0$, то v_1 можно сократить. Окончательное соотношение между v_1 и a_1:

$$-\frac{3\sin^3(\alpha/2)}{8\cos^7(\alpha/2)}\cdot\frac{v_1^2}{R}+\left(1+\frac{3}{8\cos^4(\alpha/2)}\right)a_1 = g\,\mathrm{tg}^2(\alpha/2). \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение движения груза *1* $ma_1 = T - mg$, откуда

$$T = m(g + a_1). \quad (12)$$

При $\alpha = \pi/3$ получаем следующие значения.

Из (6): $s_1 = R(2\sqrt{3} - 2 - (\pi/6))$. Из (3): $s_2 = R(\sqrt{3} - 1)$. Тогда из (8):

$$v_1 = \sqrt{\frac{\pi}{5}gR} \approx 0{,}793\sqrt{gR}.$$

Из (11): $a_1 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)g \approx 0{,}248\ g$.

Из (12): $T = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)mg \approx 1{,}248\ mg$.

2-й (аналитический) способ построения кинематических соотношений.

Точка нити M_0 перемещается в положение M. Перемещение s_1 равно разности длины нити от B до M и длины нити от B до M_0, т.е.

$$s_1 = (BK + \overset{\frown}{KM}) - BM_0 . \quad (13)$$

Так как треугольники ABK и ABP_2 одинаковы, то $BK = BP_2 = s_2 + R$. Далее, длины дуг: $\overset{\frown}{KM} = \overset{\frown}{LM} - \overset{\frown}{KL}$. Но $\overset{\frown}{LM} = R\varphi$, где φ – угол поворота диска, $\varphi = s_2/R$. Значит, $\overset{\frown}{LM} = s_2$. Далее, $\overset{\frown}{KL} = R\beta$, где угол

$$\beta = \overset{\frown}{LAK} = \overset{\frown}{P_2AK} - 90^\circ = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha .$$

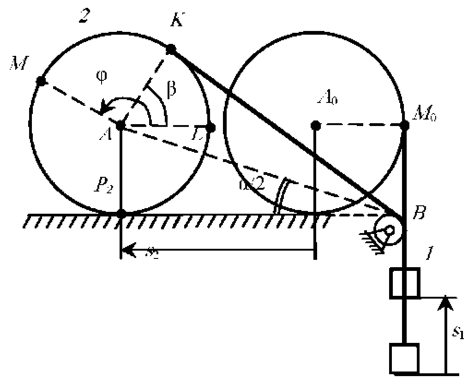
Поэтому $\overset{\frown}{KM} = s_2 - R((\pi/2) - \alpha)$. Наконец, $BM_0 = R$. Все это подставляем в (13):

$$s_1 = 2s_2 - R((\pi/2) - \alpha). \quad (14)$$

В правую часть формулы (8) удобно сразу подставить:

$$g(2s_2 - s_1) = gR((\pi/2) - \alpha). \quad (15)$$

Подставляя (3) в (14), получаем (6): $s_1 = R\big(2\mathrm{ctg}(\alpha/2) + \alpha - 2 - (\pi/2)\big)$.



Далее, $\mathrm{tg}(\alpha/2) = \dfrac{AP_2}{BP_2} = \dfrac{R}{s_2 + R}$, откуда $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\dfrac{R}{s_2 + R}$. Подставляем это в (14):

$$s_1 = 2s_2 - R\left((\pi/2) - 2\,\mathrm{arctg}\frac{R}{s_2 + R}\right) \qquad (16)$$

и дифференцируем (16) по времени. После довольно длинных преобразований придём к соотношению (1) между v_1 и v_2. Наконец, дифференцируя (6) по времени, получим: $v_1 = R\left(\dfrac{-1}{\sin^2(\alpha/2)} + 1\right)\dot{\alpha}$, откуда

$$\dot{\alpha} = -\frac{v_1}{R}\mathrm{tg}^2(\alpha/2)\,, \qquad (17)$$

что с учётом $\dot{\alpha} = -\omega_{KB}$ соответствует (2).

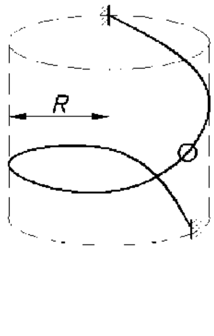
Ответ. $v_1 = \sqrt{\dfrac{\pi}{5}gR} \approx 0{,}793\sqrt{gR}$. $a_1 = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)g \approx 0{,}248\,g$. Сила натяжения нити $T = \dfrac{1}{5}\left(6 + \dfrac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)mg \approx 1{,}248\,mg$.

3. ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

3.1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1 (СССР, 1986, 6 баллов). Ракета движется прямолинейно под действием реактивной силы. В начальный момент ракета покоилась, и её масса равнялась m_0, относительная скорость U истечения газов постоянна, действием внешних сил можно пренебречь.

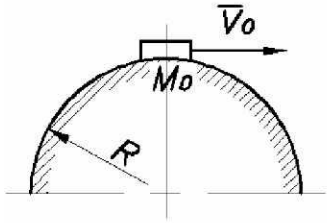
При каком значении массы следует выключить двигатель, чтобы кинетическая энергия, приобретённая ракетой, была максимальной? Какова величина этой максимальной кинетической энергии?

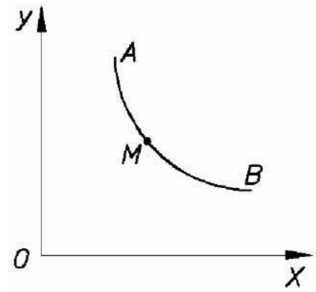


2 (СССР, 1988, 6 баллов). Тонкая проволока изогнута в форме винтовой линии и закреплена неподвижно. Ось винтовой линии вертикальна. Радиус винта равен R, α – угол подъёма винтовой линии (угол между касательной и горизонтальной плоскостью). На проволоку одето колечко массой m и отпущено без начальной скорости. Коэффициент трения между колечком и проволокой равен f. Определить максимальную скорость движения колечка. (Справка: радиус кривизны винтовой линии $\rho = R/\cos\alpha$; центр кривизны находится в плоскости, перпендикулярной оси винта).

3 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Материальная точка M скользит под действием силы тяжести по шероховатому жёлобу AB, расположенному в вертикальной плоскости; уравнение кривой AB $y = f(x)$, коэффициент трения равен k. Точка M начинает движение из точки A желоба с начальной скоростью V_0.

Найти закон изменения скорости точки M в зависимости от её положения на кривой AB. Масса точки равна m.

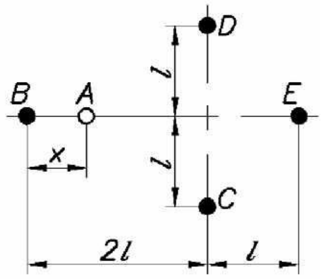




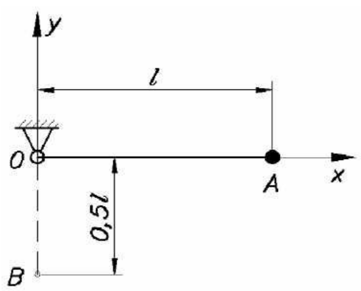
4 (РСФСР, 1982, 3 балла). Определить минимальную скорость V_0, которую надо сообщить монете в верхнем положении M_0 с тем, чтобы она не остановилась на сферической поверхности радиуса R вследствие трения. Коэффициент трения равен f. Монету считать материальной точкой.

5 (РСФСР, 1983, 3 балла). Неподвижные точки B, C, D с массами m и неподвижная точка E массой $2m$ притягивают свободную точку A массой m. Силы притяжения, действующие между каждыми двумя точками, пропорциональны расстоянию между точками и сумме их масс (K – коэффициент пропорциональности). В начале движения точка A находилась в точке B и была неподвижна.

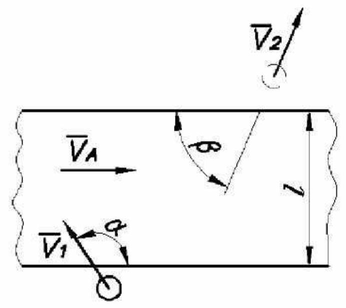
С какой скоростью точка A придёт на прямую CD? Определить максимальную скорость точки.



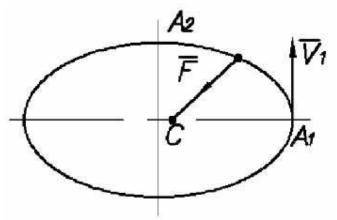
6 (РСФСР, 1987, 7 баллов). Маленький шарик A прикреплён к оси O нерастяжимой нитью длиной l, в начальном положении он находится на горизонтальной оси Ox. В вертикальную стенку xOy вбита тонкая игла B на оси y ($OB = 0{,}5l$). Шарик из состояния покоя отпущен без толчка. Трение в системе отсутствует. Определить координату y_c шарика в его верхнем положении в момент, когда он снова начнёт опускаться.



7 (РСФСР, I990, 5 баллов). Шайба, имеющая скорость V_1, въезжает на горизонтальную ленту шириной l, движущуюся со скоростью $V_л$, $V_1 = V_л$, $\alpha = 120°$. После схода с ленты шайба продолжает движение по направлению, составляющему угол $\beta = 60°$ с направлением движения ленты. Определить коэффициент трения шайбы о ленту.



8 (БССР, 1982, 4 балла). Материальная точка массой m движется по эллипсу под действием центральной силы F, направленной к фокусу C. Полуоси $a = 5d$, $b = 4d$. В положении A_1 точка имеет скорость V_1. Определить работу силы F при перемещении её из положения A_1 в положение A_2 и её импульс за время этого перемещения.

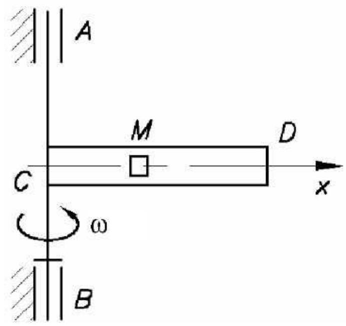


9 (БССР, 1985, 5 баллов). Две материальные точки с одинаковыми массами m, находящиеся на одной вертикали на расстоянии l друг от друга, одновременно начинают двигаться в среде, сила сопротивления которой $R = kmV$. При этом начальная скорость верхней точки равна нулю, а нижней – V_0. Определить время движения до встречи, путь, пройденный верхней точкой, а также указать условие возможности встречи.

10 (Белорусский политехнический ин-т, 1982, 3 балла). Материальная точка массой M движется прямолинейно под действием силы $F = H\sin kt$. Начальная скорость точки равна нулю. Определить импульс силы и её работу за время $\tau = \pi/k$ от начала движения.

11 (Кирг. ССР, I988, 5 баллов). Горизонтальная гладкая трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M.

Определить скорость V тела относительно трубки в момент его вылета и время движения тела в трубке, если в начальный момент $V = 0$; $x = x_0$; длина трубки равна L.

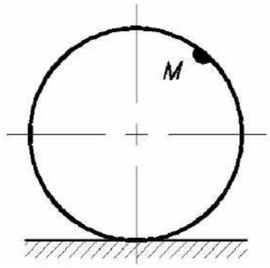


12 (М., 1984, 3 балла). В экваториальной плоскости Земли установлена старинная пушка так, что ствол её вертикален и конец ствола находится на уровне поверхности Земли.

Куда упадёт ядро после выстрела – впереди (по ходу вращения Земли), сзади или в жерло пушки? Сопротивлением воздуха пренебречь.

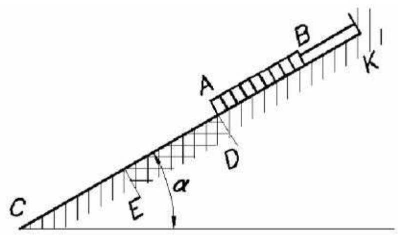
3.2. ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

1 (СССР, 1981, 7 баллов). К однородному кольцу радиусом R и весом Q прикреплён в точке M груз веса P. Кольцо движется в вертикальной плоскости, перекатываясь без проскальзывания по горизонтальной опоре. Движение началось из состояния покоя, начальное положение кольца близко к положению неустойчивого равновесия (точка M при этом занимает крайнее верхнее положение). Определить реакцию опоры в момент, когда точка M коснётся опоры.



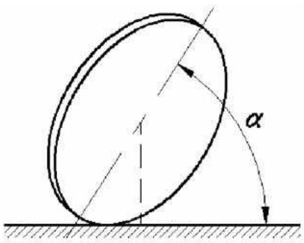
2 (СССР, 1983, 8 баллов). Гусеничная цепь (однородная лента) AB весом P и длиной l удерживается верёвкой на плоскости, наклонённой к горизонту под углом α. На участках DK и CE трение пренебрежимо мало, на участке ED, длина которого равна l, коэффициент трения значителен и равен f.

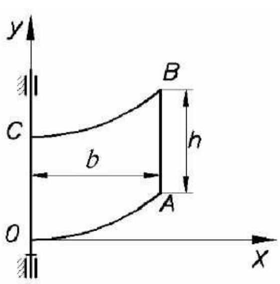
Каким должен быть минимальный угол наклона плоскости к горизонту, чтобы после перерезания верёвки цепь смогла преодолеть шероховатый участок ED. При решении задачи толщиной цепи пренебречь.



3 (СССР, 1986, 6 баллов). Однородный шар радиусом R положен на плоскость, наклонённую к горизонту под углом α. Коэффициенты трения скольжения и качения равны соответственно f и k, при этом $k/R < f$, $C = \frac{k}{R}$. Определить ускорение a центра шара.

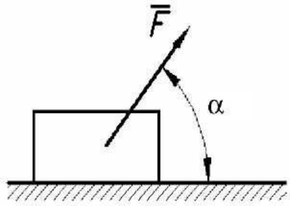
4 (СССР, 1988, 8 баллов). Тонкий однородный обруч радиуса r поставлен на горизонтальную шероховатую плоскость под наклоном α к ней и предоставлен самому себе. При каких значениях коэффициента трения между обручем и плоскостью обруч начнёт падать без проскальзывания?



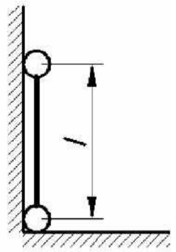


5 (СССР, 1989, 6 баллов). Однородная пластинка $OABC$ может вращаться вокруг вертикальной оси y. Границы OA и CB пластинки криволинейны и описываются соответственно уравнениями $y = f(x)$ и $y = h + f(x)$, где $f(x)$ – некоторая заданная функция. $AB \parallel OC$, расстояние между сторонами OC и AB – b. К покоящейся пластинке приложили вращающийся момент $M_{вр} = \alpha t$ (α = const). Масса пластинки равна m. Определить работу момента как функцию времени t.

6 (СССР, 1990, 3 балла). Груз массой m покоится на горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен f. Определить ускорение a груза в момент приложения к нему силы F, наклонённой под углом α к горизонту.

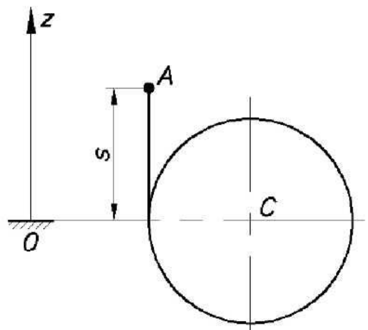


7 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Два шарика массами m каждый (их размерами пренебречь) соединены невесомым стержнем длины l. В начальный момент времени стержень стоит вертикально в углу, образованном гладкими плоскостями. Нижний шарик без толчка смещают вдоль горизонтальной плоскости на небольшое расстояние, и тело начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости.

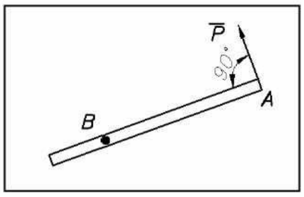


8 (РСФСР, 1982, 3 балла). Определить отношение ускорений однородных шара и цилиндра, скатывающихся без проскальзывания по наклонной плоскости. Трение качения отсутствует.

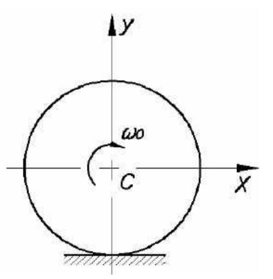
9 (РСФСР, 1983, 5 баллов). На однородный диск массой m намотана невесомая нить. Её конец A движется вверх по закону $S = 0{,}5t^3$ м. Определить закон движения центра диска и натяжение нити T. При $t = 0$ диск неподвижен, $Z_C(0) = 0$.



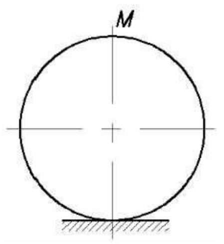
10 (РСФСР, 1983, 7 баллов). К концу неподвижного однородного стержня массой m и длиной l, лежащего на горизонтальной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f, приложена перпендикулярно к стержню горизонтальная сила P. Давление стержня на плоскость равномерно распределено по его длине. Определить положение мгновенного центра ускорений B на стержне в момент начала его движения.



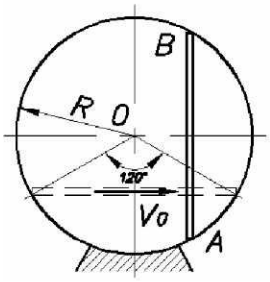
11 (РСФСР, I984, 3 балла). Однородный диск радиусом R, вращающийся вокруг оси CZ с угловой скоростью ω_0, поставили на негладкую горизонтальную плоскость. Коэффициент трения равен f. Определить закон изменения угловой скорости и наименьшую угловую скорость диска, не учитывая сопротивления качения.



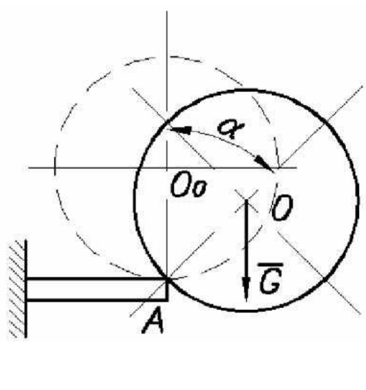
12 (РСФСР, I984, 5 баллов). Однородный диск радиусом R и весом P катится без скольжения в вертикальной плоскости по горизонтальному рельсу из состояния покоя. К диску прикреплена материальная точка M весом P. Начальное положение системы показано на рисунке. Определить наибольшее давление на рельс и соответствующую силу сцепления. Сопротивление качению не учитывать.



13 (РСФСР, 1985, 7 баллов). Однородный тонкий стержень движется в вертикальной плоскости, внутри гладкой трубы радиусом R. Определить начальную скорость V_0, которую нужно сообщить центру масс стержня при его горизонтальном положении, чтобы один из концов стержня начал отходить от трубы при вертикальном положении AB.

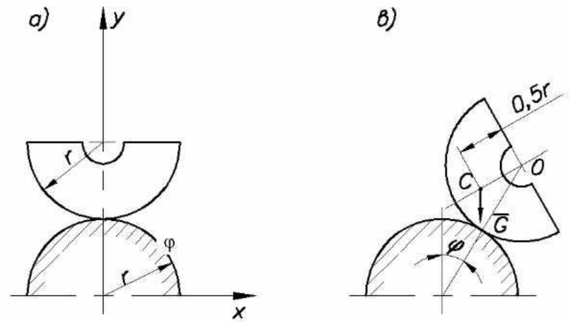


14 (РСФСР, 1986, 5 баллов). Тяжёлый однородный шар, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки. Найти угол α, определяющий положение шара в момент отрыва от опоры.

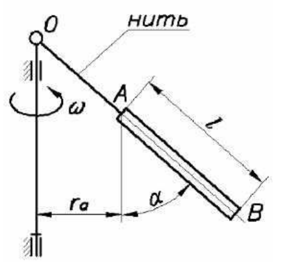


15 (РСФСР, 1987, 5 баллов). Однородный диск радиусом r и весом G, вращающийся с угловой скоростью ω_0, медленно опустили (без толчка) на горизонтальную шероховатую плоскость и в момент касания освободили. Определить работу сил трения за время проскальзывания диска по плоскости. Коэффициент трения скольжения f, трение качения мало.

16 (РСФСР, 1988, 5 баллов). Тяжёлый полуцилиндр находится в покое в верхнем положении и после приложения весьма малого импульса силы перекатывается по неподвижному цилиндру без проскальзывания и сопротивления качению. Исходные данные: $r = 0{,}025 \cdot 9{,}81$ м, $OC = 0{,}5r$ (C – центр масс тела), радиус инерции тела относительно центральной оси инерции z_c $i = 0{,}5 \cdot \sqrt{3r}$ м. Определить угловую скорость полуцилиндра в положении, когда $\varphi = 30°$.

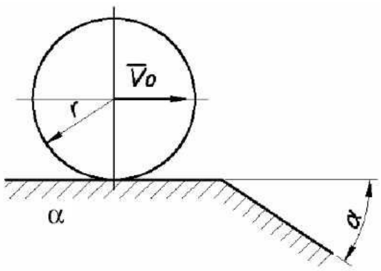


17 (РСФСР, 1989, 5 баллов). Тонкий однородный тяжёлый стержень AB длиной l прикреплён невесомой нитью к равномерно вращающейся вертикальной оси. Определить: чему равен угол OAB (на рисунке он равен 180°)? Дано: угол α и радиус r_a.



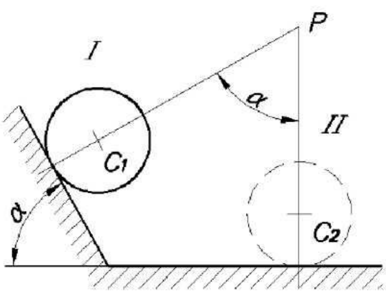
18 (РСФСР, 1989, 5 баллов). По горизонтальной плоскости катится без скольжения однородный шар радиусом r со скоростью V_0 и переходит на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α.

Какое наибольшее значение можно придать углу α, чтобы при переходе на наклонную плоскость шар не оторвался от опоры?



19 (Эст. ССР, 1985, 5 баллов). Однородное колесо радиусом r скатывается по наклонной плоскости из состояния покоя (положение I) на горизонтальную плоскость. Колесо движется без отрыва от горизонтальной плоскости, угол α известен, $PC_1 = PC_2 = l$. Колесо не проскальзывает.

Найти скорость центра колеса в положении II.

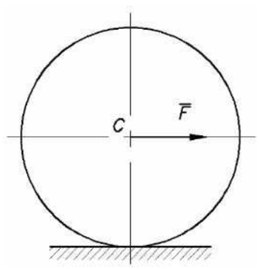


20 (БССР, 1983, 4 балла). Маховик, имеющий угловую скорость ω_0, тормозится силами, момент сопротивления которых пропорционален корню квадратному из угловой скорости. Определить среднюю угловую скорость за время торможения.

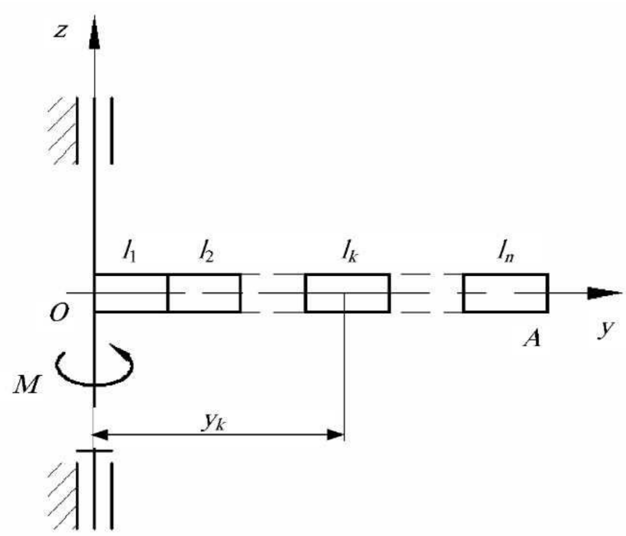
21 (БССР, 1984, 5 баллов). Однородный сплошной цилиндр положен на шероховатую плоскость, наклонённую под углом 45° к горизонту, коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью равен 5/12. Будет ли цилиндр скатываться без скольжения? Как будет происходить движение в случае однородного тонкостенного цилиндра. Ось цилиндра перпендикулярна линии наибольшего ската.

22 (БССР, 1985, 5 баллов). Однородная квадратная пластина со стороной $l\sqrt{2}$ после воздействия импульса силы движется по инерции по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость одной из вершин квадрата равна U, ускорение этой точки равно a и их направления совпадают. Определить скорость центра масс пластины.

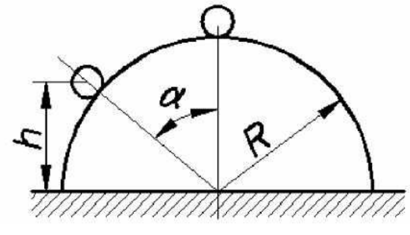
23 (БССР, 1986, 5 баллов). К оси C покоящегося на горизонтальной шероховатой плоскости диска приложили силу $F = kmt$ (m – масса диска, t – время, $k = \text{const}$). Коэффициент трения скольжения равен f. Определить время τ, в течение которого диск катится без проскальзывания, и перемещение S оси диска за это время. Трением качения пренебречь.



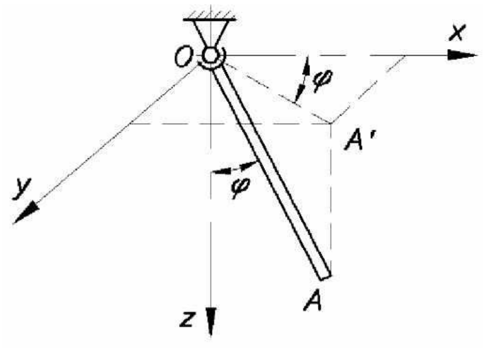
24 (БССР, 1988, 4 балла). Стержень OA вращается вокруг вертикальной оси под действием постоянного вращающего момента M. Определите угловое ускорение ε стержня, если стержень составлен из жёстко соединённых между собой однородных стержней, длины которых равны l_k, а массы – m_k соответственно ($k = 1, 2, 3, ..., N$).



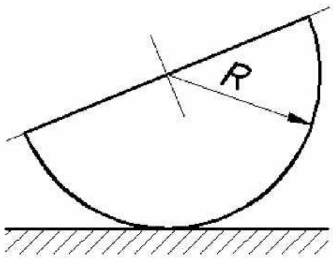
25 (Л., 1982, 6 баллов). Тяжёлый шарик радиусом r скатывается без скольжения с вершка полусферы радиусом R. В начальный момент скорость шарика равна нулю. Определить, на какой высоте h шарик оторвётся от поверхности полусферы.



26 (М., 1982, 7 баллов). Положение однородного тонкого стержня OA длиной $2l$ (в точке O шаровой шарнир без трения) определяется углами φ и ψ (A' – проекция точки A на горизонтальную плоскость XY). В начальный момент $\psi = \psi_0 < \pi/2$, $\dot\psi = 0$, $\dot\varphi = \omega_0$. Определить, при каком значении ω_0 (зависящем от ψ_0) угол ψ будет сохраняться ($\psi = \psi_0$). Обозначим найденное значение ω_*. Пусть теперь $\omega_0 > \omega_*$. Определить, при каких значениях ω_0 будет достигаться значение $\psi = \pi/2$.



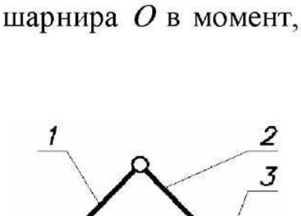
27 (М., 1983, 4 балла). Однородный полуцилиндр радиусом R совершает плоскопараллельное движение, касаясь своей цилиндрической поверхностью гладкой горизонтальной плоскости. Какова будет при этом траектория МЦС, если иные силы, кроме сил тяжести и реакции опоры, на него не действуют?



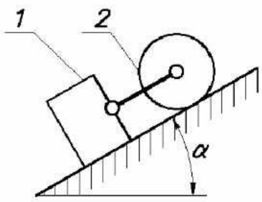
28 (М., 1984, 5 баллов). Вверх по шероховатой (коэффициент трения скольжения k), наклонённой к горизонту под углом α плоскости пущен однородный обруч. Начальная скорость его центра равна V, начальная угловая скорость равна O. Чему равно время подъёма центра обруча?

3.3. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

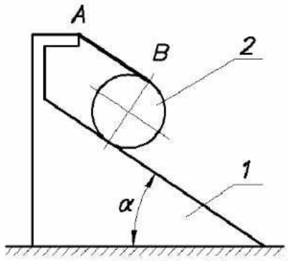
1 (СССР, 1982, 6 баллов). В кривошипно-ползунном механизме, движущемся в вертикальной плоскости, кривошип *1* и шатун *2* – однородные стержни длиной l и массой m, ползун также имеет массу m. Механизм начинает двигаться из состояния покоя, когда $\varphi = \varphi_0 < 0{,}5\pi$. Определить горизонтальную составляющую реакции цилиндрического шарнира O в момент, когда угол φ становится равным нулю. Трение не учитывать.

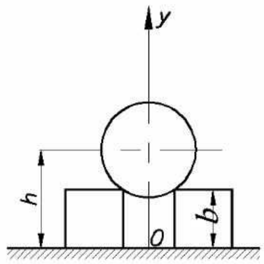


2 (СССР, 1984, 7 баллов). Брусок *1* и диск *2*, соединённые невесомым стержнем, движутся из состояния покоя по шероховатой наклонной плоскости. Диск катится без проскальзывания. Каким условием должны быть связаны угол наклона плоскости α, коэффициент трения скольжения f между плоскостью и бруском, коэффициент трения качения δ диска по плоскости и радиус диска R, чтобы стержень не был нагружен?

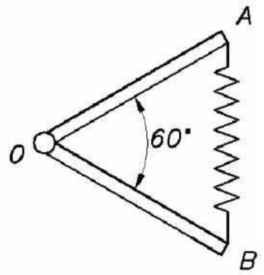


3 (СССР, 1986, 8 баллов). Призма *1* массой $m_1 = 5{,}1$ кг может скользить по горизонтальной плоскости. По наклонной грани призмы, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скользит однородный круглый цилиндр *2* массой $m_2 = 2m_1$. Цилиндр обмотан посредине нерастяжимой нитью, конец которой прикреплён в точке A к кронштейну, жёстко связанному с призмой. Ось цилиндра перпендикулярна, а участок AB нити параллелен линии наибольшего ската наклонной грани призмы. Найти ускорение призмы и ускорение центра цилиндра, а также натяжение нити.





4 (СССР, 1987, 9 баллов). Цилиндр радиусом r и весом P расположили так, чтобы он касался двух одинаковых параллелепипедов весом $Q = 0{,}5P$ и высотой b каждый, и отпустили без начальной скорости ($b > r$). Определить скорость V падающего цилиндра в зависимости от высоты y его оси, если в начальный момент эта высота была равна h. Параллелепипеды не опрокидываются, трение отсутствует.

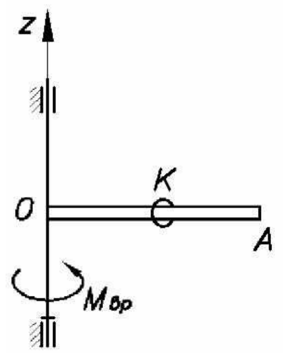


5 (СССР, 1988, 7 баллов). Два одинаковых однородных стержня OA и OB массой m каждый соединены шарнирно в точке O и расположены на гладкой горизонтальной плоскости под углом 60° друг к другу. Затем концы стержней A и B соединили сжатой пружиной AB ($OA = OB = l$, длина ненапряжённой пружины равна $1{,}1l$). Определите максимальное перемещение S_{max} шарнира O в процессе движения системы, если в начальный момент стержни покоились.

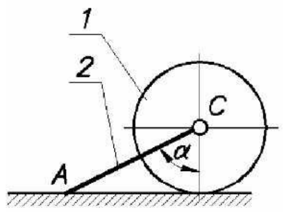
6 (СССР, 1990, 9 баллов). Гладкий стержень OA, момент инерции которого относительно оси z равен J, вращается вокруг этой оси. При этом колечко K массой m скользит по стержню с постоянным относительным ускорением a. В начальный момент времени $OK_0 = l$ и относительная скорость колечка равна нулю.

Определить:

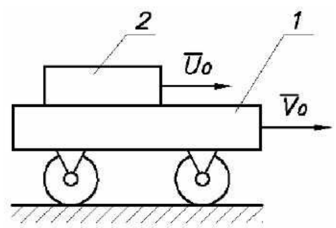
1. Угловую скорость, угловое ускорение стержня как функции времени; закон вращения стержня.
2. Составляющие действующих на колечко реакций стержня.
3. Вращающий момент $M_{вр}$.



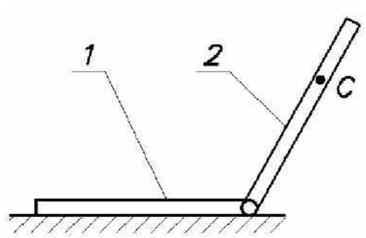
7 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Однородный цилиндрический каток *1* радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Рукоятка *2* (однородный стержень) скользит концом A по плоскости. Коэффициент трения скольжения равен f, коэффициент трения качения $\delta = 0{,}5 \cdot fR$. Массы катка и рукоятки одинаковы: $m_1 = m_2 = m$. Рукоятка составляет угол α с вертикалью. Определить путь, пройденный центром катка от положения, в котором его скорость была равна V_0, до остановки.



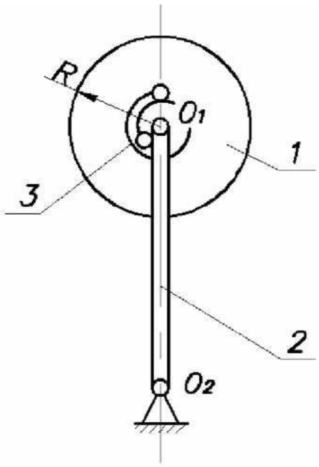
8 (РСФСР, 1982, 5 баллов). По горизонтальной платформе *1*, движущейся по инерции со скоростью V_0, перемещается тело *2* с относительной скоростью U_0. При торможении тела между ним и платформой возникают силы трения. Платформа имеет массу m_1, тело *2* – массу m_2. Определить работу сил трения от момента начала торможения до остановки тела относительно платформы. Масса колёс мала.



9 (РСФСР, 1984, 7 баллов). Два одинаковых однородных тонких стержня длиной l каждый соединены идеальным шарниром и движутся из состояния покоя в вертикальной плоскости. Стержень *1* перемещается без трения по горизонтальной плоскости. Стержень *2* в начале движения занимал вертикальное положение. Точка C – центр масс стержня *2*. Определить траекторию точки C и её скорость в момент падения стержня на плоскость.

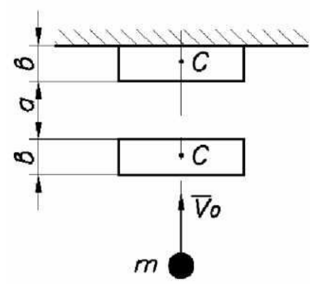


10 (РСФСР, 1985, 5 баллов). Механизм, содержащий однородный диск *1*, однородный стержень *2* и пружину *3*, расположен в горизонтальной плоскости. Пружина, концы которой прикреплены к стержню и диску, сообщает диску угловое ускорение ε_1 относительно стержня. Трение отсутствует. Определить угловое ускорение стержня. Считать известными массы $m_1 = m_2 = m$, радиус R, $O_1O_2 = 2R$.

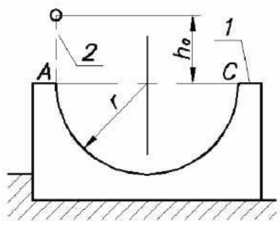


11 (РСФСР, 1987, 5 баллов). Пуля (материальная точка массой m), летящая со скоростью V_0, пробивает сквозь центры масс C сложенные вместе ($a = 0$) и опирающиеся на неподвижный выступ две одинаковые пластины толщиной b каждая. Скорость пули при выходе из второй пластины пренебрежимо мала. Сила F, действующая на пулю при пробивании пластины, постоянна. Внешние сопротивления малы.

Каким должны быть минимальное расстояние $a_{\min}$ между пластинами и масса первой пластины, чтобы вторая пластина не была повреждена пулей?

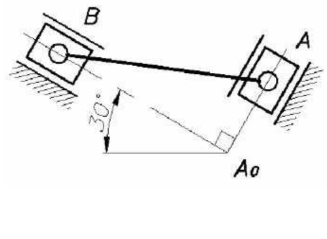


12 (РСФСР, I990, 5 баллов). Прямоугольный брусок 1 массой $m_1 = 2m$, имеющий гладкую цилиндрическую выемку радиусом $r = 0{,}2$ м, стоит на гладкой поверхности вплотную к упору. С какой высоты h_0 надо опустить без толчка шарик 2 массой $m_2 = m$, чтобы он, коснувшись выемки в точке A, поднялся до точки C? Шарик считать материальной точкой.

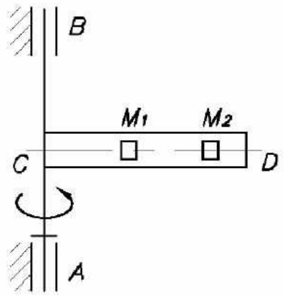


13 (Эст. ССР, 1985, 5 баллов). Ползуны A и B одинаковой массы m, шарнирно соединённые однородным стержнем длиной l, имеющим также массу m, могут скользить без трения по направляющим, расположенным в вертикальной плоскости. В положении A_0 ползуну A сообщается начальная скорость V_0.

Какой должна быть начальная скорость, чтобы стержень достиг горизонтального положения?

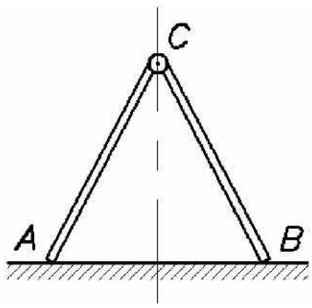


14 (БССР, 1982, 4 балла). Горизонтальная трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находятся два тела M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью длиной l. Определить натяжение нити и давление тел на трубку в зависимости от их скорости V относительно трубки. Трением пренебречь.

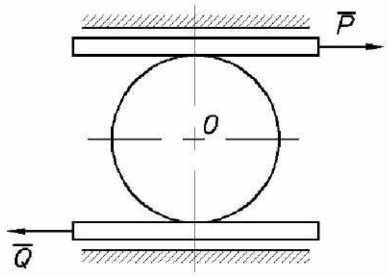


15 (БССР, 1982, 5 баллов). Два одинаковых однородных стержня весом P и длиной l каждый соединены шарнирно в точке C. В начальном положении стержни стояли на горизонтальной плоскости; шарнир C находился на высоте h над плоскостью. Вследствие скольжения концов A и B стержни падают, оставаясь в вертикальной плоскости.

Определить скорость V шарнира перед ударом о горизонтальную плоскость.

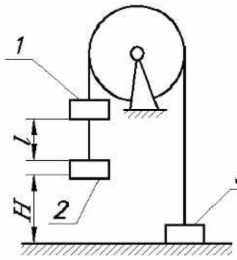


16 (БССР, 1982, 4 балла). Зубчатое колесо радиусом r с массой m, распределённой по ободу, находится между двумя параллельными зубчатыми рейками массой m_1 каждая. К рейкам приложены силы P и Q, направленные в противоположные стороны вдоль реек. Найти ускорение a_0 оси колеса, угловое ускорение ε и ускорения a_1 и a_2 реек.



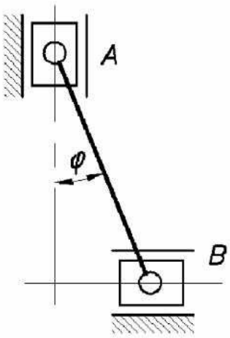
17 (БССР, 1983, 3 балла). На шкив, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотана веревка, к концу которой привязан груз. Найти ускорение груза, если известно, что груз втрое большей массой спускался бы с вдвое большим ускорением.

18 (БССР, 1986, 6 баллов). Три одинаковых груза связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый, неподвижный блок. Грузы отпущены без начальной скорости из указанного на рисунке положения. На какую максимальную высоту поднимется груз 3? Грузы 1 и 2 после достижения пола останутся неподвижными.

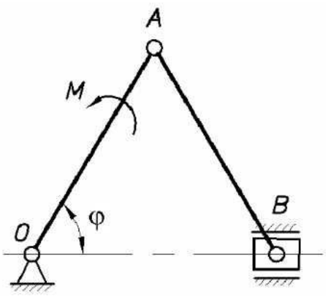


19 (БССР, 1985, 5 баллов). Ползуны A и B одинаковой массы соединены невесомым стержнем AB длиной l. Ползун A движется по вертикальной, а ползун B по горизонтальной направляющим.

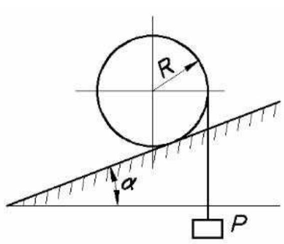
Определить ускорения ползунов в начальный момент времени, когда $\varphi = \varphi_0$ и скорости ползунов равны нулю.



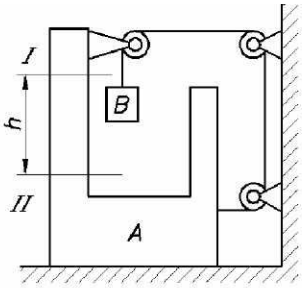
20 (БССР, 1985, 4 балла). Механизм расположен в горизонтальной плоскости; OA и AB – невесомые стержни длиной l, ползун имеет массу m. Механизм движется под действием момента M, приложенного к кривошипу OA, при этом угловая скорость ω кривошипа постоянна. Определить момент M. Трение не учитывать.



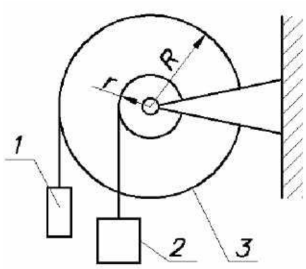
21 (Л., 1982, 6 баллов). Однородный цилиндр массой M и радиусом R катится без скольжения по наклонной плоскости при помощи груза весом P, подвешенного на намотанной на цилиндр нити. Определить, при каком угле наклона плоскости к горизонту цилиндр будет двигаться вверх.



22 (Л., 1982, 5 баллов). Задана механическая система, состоящая из тела A и груза B, связанных между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через систему блоков. Вес тела A равен P, тела B равен Q, в начальный момент система находилась в покое, а груз B – в положении I. Определить скорость тела A в момент, когда тело B, опускаясь, займёт положение II. Массой блоков и трением пренебречь.



23 (Л., 1982, 4 балла). Определить момент инерции ступенчатого блока *3* относительно его оси вращения из условия, чтобы натяжение нити, к концу которой подвешен груз *1*, равнялось нулю. Известны масса груза *2* – m и радиусы блока R и r. Нити считать невесомыми, сопротивление движению не учитывать.

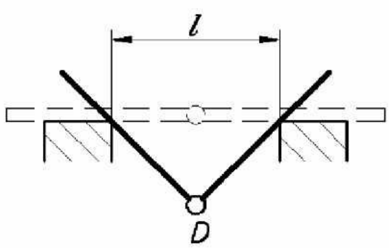


24 (Л., 1983, 4 балла). Через блок перекинут однородный канат длиной l. На одном конце каната подвешен груз, а за другой конец ухватилась обезьяна A.

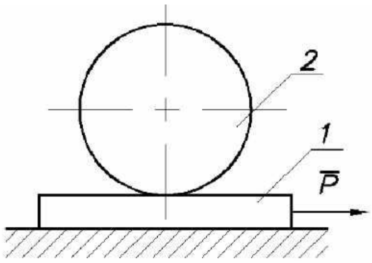
Определить закон движения блока, если обезьяна станет подниматься по канату согласно закону $S_r = at^2/2$. Массы груза, обезьяны и блока одинаковы; масса троса равна половине массы груза. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом r. В начальный момент времени система покоилась, концы троса находились на одинаковом расстоянии от блока.

25 (Л., 1987, 6 баллов). Однородные стержни одинаковой длины l, соединённые шарниром, лежат на гладких поверхностях. В начальный момент стержни горизонтальны и находятся относительно опор симметрично. После пренебрежимо малого толчка начинается движение стержней так, что точка D движется вертикально вниз.

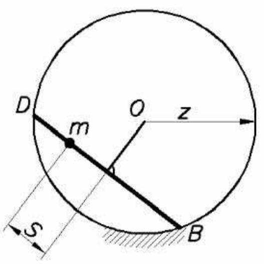
Найти скорость точки D в момент времени, когда концы стержней находятся на углах опор.



26 (Ленинградский кораблестроительный ин-т, 1977, 6 баллов). Доска *1* весом Q_1 движется по негладкой горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы P. Коэффициент трения между доской и плоскостью равен f. На доске лежит однородный сплошной круглый цилиндр *2* весом Q_2, который может катиться по доске без скольжения. Определить ускорение доски.



27 (М., 1982, 5 баллов). Однородный тонкий стержень DB длиной $2l$ и массой M двигается в горизонтальной плоскости, скользя концами по абсолютно гладкой неподвижной округлости радиусом r. Определить работу, которую совершит за время t ползущий по стержню жук массой m, если $S = at^2/2$ и при $t = 0$ стержень находился в покое.

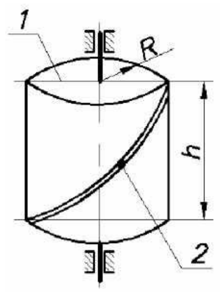


28 (М., I983, 7 баллов). Из одной точки на дне горизонтального абсолютно гладкого кругового жёлоба радиусом R разлетаются несколько маленьких шариков, которые могут двигаться только по поверхности жёлоба. Проекции V_{ox} начальных скоростей шариков на образующую жёлоба одинаковы для всех шариков. Приняв, что отклонения шариков от нижней образующей (оси x) малы, определить, через какое время и где встретятся шарики.

3.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

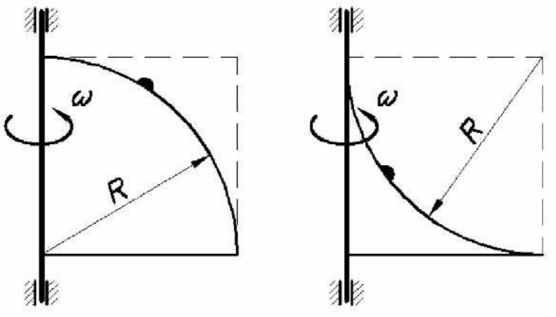
1 (СССР, 1981, 6 баллов). Однородный цилиндр *1* массой $m_1 = m$, радиусом R и высотой $h = 2R$, имеющий на боковой поверхности винтовой желоб, может вращаться вокруг вертикальной оси. В жёлоб цилиндра, находящегося в покое, сверху опущен шарик *2* массой $m_2 = m$ без начальной скорости.

Определить угловую скорость ω и скорость U движения шарика относительно жёлоба в момент, когда шарик достигнет середины цилиндра. Трение в системе не учитывать; шарик считать материальной точкой. Угол наклона оси жёлоба к образующей цилиндра постоянен и равен 45°.

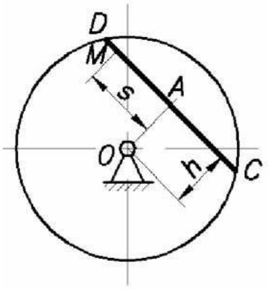


2 (СССР, 1982, 6 баллов). Две пластины с желобами, по которым может скользить грузик (материальная точка), изготовлены из листовых квадратных заготовок. Материал и толщина листа одинаковы. В начальный момент обе пластины вращаются с угловой скоростью ω_0, а грузики одинаковой массы находятся в желобах в наивысших точках.

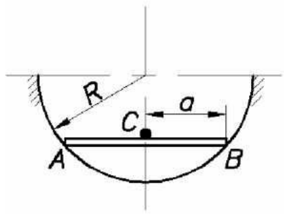
Указать и строго обосновать соотношение (равны; не равны) между абсолютными скоростями грузиков в момент отделения от пластины. Трение не учитывать.



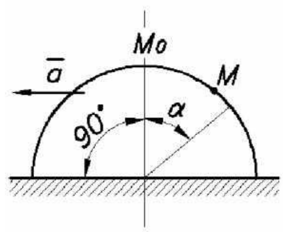
3 (СССР, 1988, 6 баллов). Горизонтальный диск может свободно вращаться вокруг вертикальной оси O. Трение в опорах отсутствует. J – момент инерции диска относительно оси O. Диск, находившийся в покое, начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = B\sin kt$ после того, как материальная точка M массой m приходит в движение из состояния покоя от точки A по хорде CD (движение точки M происходит за счёт внутренних сил системы). Определите закон движения точки $AM = S = f(t)$.



4 (РСФСР, 1982, 5 баллов). Однородный стержень имеет длину $2a$ и массу m. Его концы могут скользить без трения по горизонтальной окружности радиусом R. В начальный момент времени, когда стержень находился в покое, из его середины C к концу B начинает двигаться с достоянной скоростью V относительно стержня материальная точка массой m. Определить угол, на который повернется стержень от своего исходного положения, когда материальная точка достигнет конца B стержня.

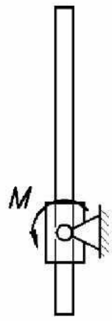


5 (РСФСР, 1984, 3 балла). Тяжёлая материальная точка движется из положения M_0 без начальной относительной скорости по гладкому цилиндру радиусом R, который перемещается поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением a. Определить ускорение a, если известен угол α, определяющий место отрыва точки от цилиндра.

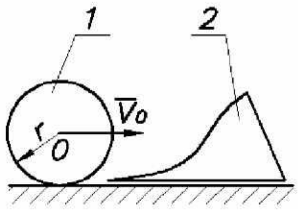


6 (РСФСР, 1985, 7 баллов). Однородный гладкий стержень массой m и длиной l может свободно скользить во втулке, вращающейся вокруг вертикальной оси. На втулку действует момент, обеспечивающий вращение с постоянной угловой скоростью ω. В начале движения центр масс стержня был неподвижен и находился почти на оси вращения.

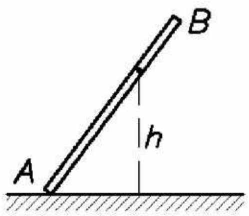
Определить работу момента за время от начала движения до момента вылета стержня из втулки. Массу и размеры втулки не учитывать.



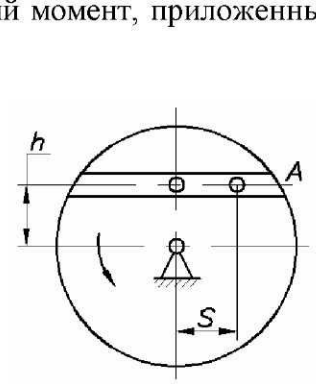
7 (РСФСР, 1985, 3 балла). Однородный цилиндр *1* накатывается на неподвижную подставку *2*, которая может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Качение цилиндра происходит без проскальзывания. Зная начальную скорость V_0 оси цилиндра и массы тел $m_1 = m_2 = m$, определить наибольшую высоту подъёма цилиндра.



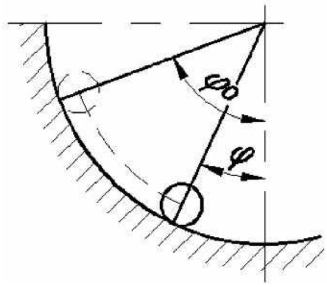
8 (БССР, 1983, 3 балла). Стержень длиной $2l$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом.



9 (БССР, I983, 5 баллов). Диск вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. На поверхности диска прорезана щель, на которую помещён шарик массой m на кратчайшем расстоянии h от оси вращения. Первоначальное положение шарика является положением неустойчивого относительного равновесия. При небольшом смещении шарик начинает двигаться по щели в направлении точки A. Определить в зависимости от S вращающий момент, приложенный к диску, если угловая скорость диска, остаётся постоянной.



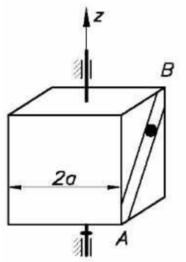
10 (БССР, 1986, 4 балла). Сплошной однородный цилиндр массой m, катится без скольжения по цилиндрической поверхности из положения, определяемого углом φ_0. Определите величину нормального давления N цилиндра на поверхность как функцию угла φ, если в начальный момент цилиндр был в покое.



11 (Белорусский политехнический ин-т, 1984, 4 балла). Однородный цилиндр, получив начальную скорость центра равную V_0, катится без скольжения по наклонной плоскости вверх, а затем скатывается. Через какое время τ после начала движения цилиндр вернётся в первоначальное положение? Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь. Наклон плоскости к горизонту равен α.

12 (Л., 1982, 5 баллов). Горизонтальная пластинка может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. По пластинке движется с постоянной по величине скоростью U материальная точка M с массой m. Траектория точки M – окружность радиуса r с центром на расстоянии l от оси вращения. Положение точки M определяется углом φ. Момент инерции пластинки равен J.

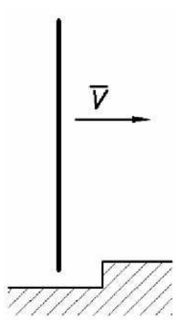
Найти зависимость угловой скорости ω пластинки от угла φ, если её угловая скорость в момент, когда точка M дальше всего отстоит от оси вращения, равна нулю.



13 (М., 1977, 5 баллов). Определить угловую скорость куба в момент, когда частица массой m, помещённая в жёлобе на диагонали AB грани куба, достигнет точки A. В начальный момент частица была в точке B, а вся система находилась в покое. Момент инерции куба относительно центральной оси z (вертикальной) равен $J = 8ma^2$. Силы трения не учитывать.

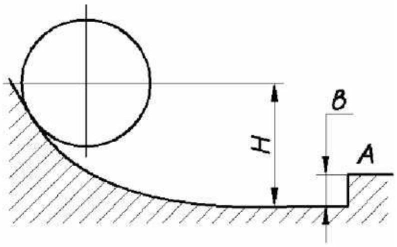
14 (М., 1977, 4 балла). Однородный диск массой m и радиусом r своей плоскостью лежит на гладкой горизонтальной плоскости. По контуру диска движется частица той же массы m с заданной относительной скоростью $U(t)$. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость центра диска V_0.

3.5. УДАР

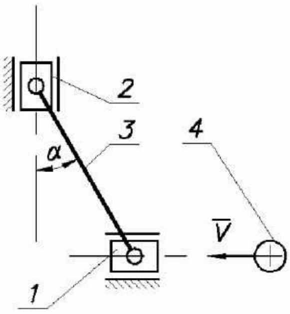


1 (СССР, 1981, 9 баллов). Человек массой m, бегущий со скоростью V, спотыкается о малую неподвижную преграду. В качестве модели бегущего человека рассмотреть поступательно перемещающийся вертикальный однородный стержень. Рассматривая взаимодействие с преградой, пренебречь скоростью и перемещением нижней точки стержня и отклонением его от вертикали (абсолютно неупругий удар). Определить работу сил ударного взаимодействия ноги человека и преграды за время удара. Какова будет эта работа, если посредине стержня установить идеальный шарнир?

2 (СССР, 1983, 6 баллов). С какой минимальной высоты *H* должен скатиться без начальной скорости на горизонтальную плоскость однородный цилиндр радиусом *R* и весом *Q*, чтобы он преодолел выступ высотой *b* на горизонтальной плоскости. При решении считать, что проскальзывание цилиндра отсутствует на всех участках его движения, удар цилиндра о выступ в точке *A* абсолютно неупругий (не происходит отрывания цилиндра от выступа после удара).



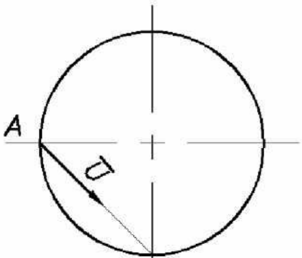
b



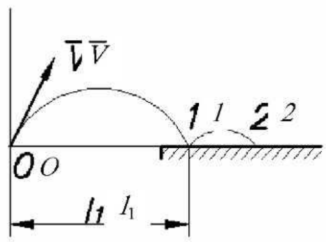
3 (СССР, 1984, 7 баллов). В плоском механизме масса ползунов *1* и *2* пренебрежимо мала, линейка *3* (тонкий однородный стержень длиной $2l$) имеет массу *m*. Шар *4* массой *m*, движущийся поступательно со скоростью *V*, ударяется о ползун *1*, находящийся в покое. Коэффициент восстановления при ударе равен *k*. При каких значениях угла α, шар после удара будет двигаться в обратном направлении?

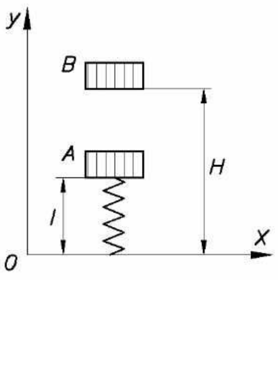
4 (СССР, 1986, 8 баллов). Однородный диск массой *m* покоился на гладкой горизонтальной плоскости. В некоторой момент времени к диску в точке *A* приложена ударная сила, и точка *A* приобрела скорость *U*, направление которой указано на рисунке.

Определить кинетическую энергию диска в дальнейшем его движении.



5 (СССР, I987, 5 баллов). Тяжёлый шарик брошен под наклоном к горизонту. Дальность полёта шарика до первого соударения с горизонтальной плоскостью равна l_1. Коэффициент восстановления при ударе равен *k*. Определите максимальную дальность полёта шарика. Трение и сопротивление воздуха не учитывать. Определить расстояние между точками контакта шарика с плоскостью, соответствующими соударениям с порядковыми номерами $n-1$ и *n*.

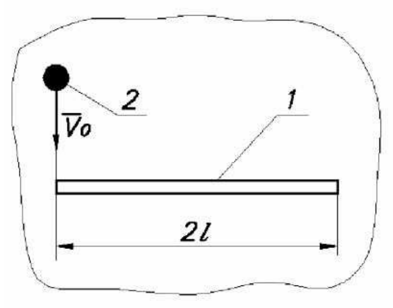




6 (СССР, 1988, 10 баллов). Груз *A* покоится на вертикальной пружине на высоте *l* над горизонтом. Длина ненапряжённой пружины равна $1{,}2l$. С высоты $H = 6l$ падает без начальной скорости груз *B*, расположенный на одной вертикали с грузом *A*. Размеры грузов малы по сравнению с высотой *H*. Определите в зависимости от времени *t* высоту *y* груза *B* над горизонтом, если массы грузов одинаковы и их соударение неупругое; *t* отсчитывается от начала движения груза *B*.

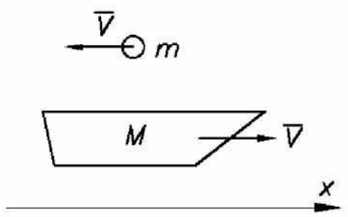
7 (РСФСР, 1986, 5 баллов). На горизонтальной гладкой плоскости неподвижно лежит тонкий однородный стержень *1* длиной $2l$. Перпендикулярно к нему движется со скоростью V_0 шайба (материальная точка) *2*. Шайба ударяется абсолютно упруго в конец стержня. После первого удара стержень другим концом снова соударяется с шайбой.

Определите отношение масс тел $\mu = = m_1/m_2$, при котором произойдёт их второе соударение, путь S центра масс стержня между ударами и укажите движение стержня после второго удара.



8 (Л., 1983, 4 балла). Две одинаковые лодки, в каждой из которых находится почтальон с грузом почты, движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями V по инерции. Масса каждой лодки вместе с почтальоном M, масса груза почты в каждой лодке m. При встрече почтальоны обмениваются грузами (одновременно).

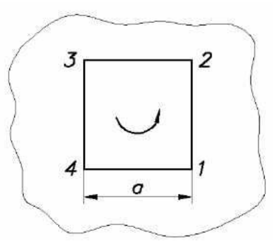
Определить, какова будет скорость лодок после встречи.



3.6. ДИНАМИКА ТЕЛА (СИСТЕМЫ ТЕЛ) ПРИ МОМЕНТАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ СВЯЗЕЙ

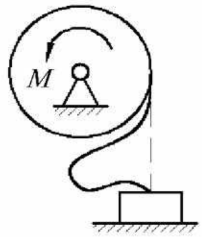
1 (РСФСР, 1983, 7 баллов). Четыре шарика (материальные точки) массами m закреплены в вершинах невесомой квадратной пластинки со сторонами a, лежащей на горизонтальной гладкой плоскости. Эта механическая система равномерно вращается вокруг неподвижного центра масс с периодом T секунд. Вдруг шарик *1* оторвался от пластинки.

На каком расстоянии от ближайшего шарика он будет через T секунд?

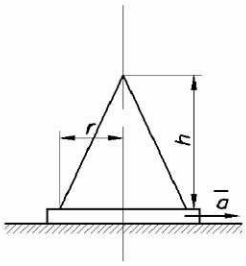


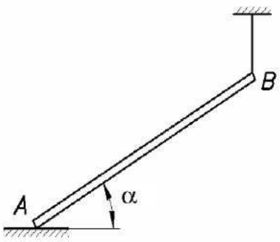
2 (СССР, 1982, 6 баллов). Механическая система, состоящая из однородного цилиндра радиусом R и массой m_1, груза массой m_2 и нерастяжимой нити, приводятся в движение из состояния покоя постоянным вращающим моментом M. В начальный момент времени нить, связывающая цилиндр и груз, не была натянута, и её провисающий излишек был равен l.

Найти угловую скорость цилиндра в первый момент после того, как груз оторвётся от пола, считая, что в дальнейшем движении системы нить натянута.



3 (СССР, 1987, 7 баллов). Однородный конус с радиусом основания r и высотой h стоят на горизонтальной доске. Масса конуса равна m, коэффициент трения между доской и конусом равен f. Доска внезапно приведена в движение с ускорением a. При каком условии конус будет двигаться поступательно? Определите ускорение конуса в поступательном движении.



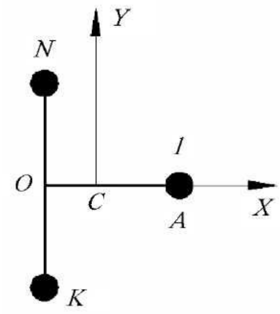


4 (СССР, 1986, 7 баллов). Однородный стержень в состоянии покоя опирается концом A на гладкий пол. Конец B удерживается вертикальной нитью. Стержень составляет угол α с горизонтальным полом, его масса равна m, длина $2l$.

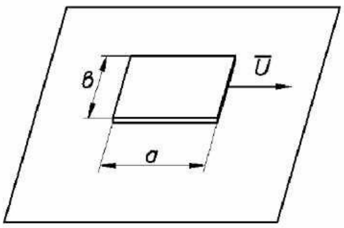
Определить давление стержня на пол в момент после перерезания нити.

5 (РСФСР, 1987, 7 баллов). Свободная система из трёх одинаковых точных масс m, расположенных в углах равностороннего треугольника ANK со стороной l и связанных жёстко невесомыми стержнями, равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижного центра масс C. В изображённом на рисунке положении масса в точке A освободилась без толчка (оборвался стержень OA).

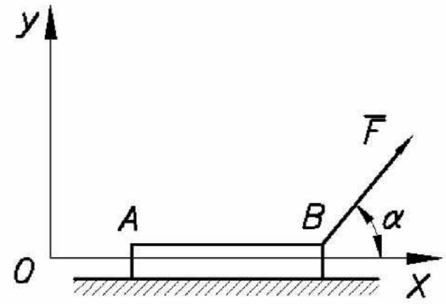
На каком расстоянии S одна от другой окажутся точки A и N после прихода прямой NK в положение, параллельное оси y, когда точка N впервые после отрыва окажется над точкой K?



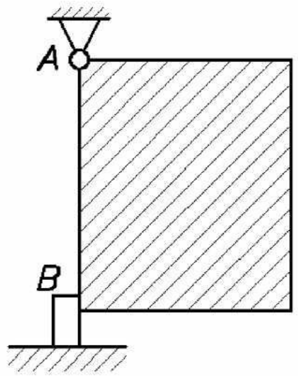
6 (СССР, 1989, 6 баллов). Однородная прямоугольная пластинка движется по гладкой горизонтальной плоскости прямолинейно и поступательно с постоянной скоростью U. В некоторый момент времени одна из вершин пластинки шарнирно закрепляется. Определить реакцию шарнира при её дальнейшем движении. Размеры пластинки и направление U указаны на рисунке. Масса пластинки равна m.



7 (СССР, 1989, 10 баллов). Однородный стержень длиной l и массой m покоится на гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент к концу стержня приложена сила F под углом α к горизонту (сила F и стержень расположены в одной вертикальной плоскости). Определить проекции ускорения центра масс стержня C на оси координат OX и OY в начальный момент его движения.

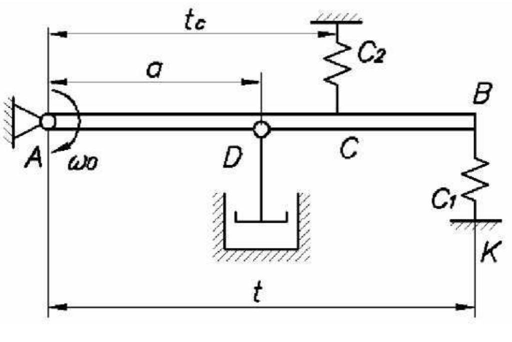


8 (БССР, 1987, 6 баллов). Однородная, тонкая пластина, имеющая форму квадрата, закреплена шарниром A и удерживается упором B так, что сторона AB вертикальна. Определить реакцию шарнира A сразу после того, как упор убран. Масса пластины равна m.

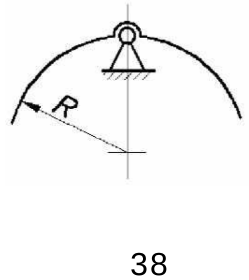


3.7. КОЛЕБАНИЯ

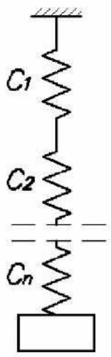
1 (СССР, 1986, 8 баллов). Жёсткая балка совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси A. Вес балки Q. Момент инерции относительно оси A равен J. Точка C – центр тяжести балки. Жёсткости пружин, прикреплённых к балке в точках B и C, равны C_1 и C_2. В точке D балка связана с поршнем, оказывающим сопротивление движению, пропорциональное скорости; α – коэффициент пропорциональности. В положения равновесия балка горизонтальна и пружина жёсткости C_2 не напряжена. Определить максимальное давление пружин в точке K, если в начальный момент времени горизонтальной балке была сообщена угловая скорость ω_0.



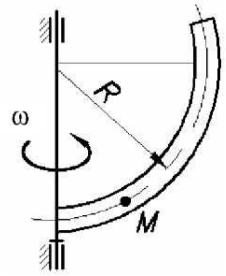
(СССР, 1987, 5 баллов). Однородная тяжёлая дуга окружности, обращённая выпуклостью вверх, колеблется в вертикальной плоскости около своей средней точки. Радиус дуги равен R. Докажите, что период малых колебаний дуги не зависит от её длины.

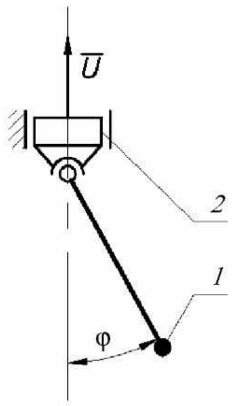


3 (СССР, 1989, 8 баллов). Груз массой m подвешен на вертикальной пружине, составленной из n пружин с жёсткостями C_1, C_2, …, C_n соответственно. Определите период T малых колебаний груза на пружине.



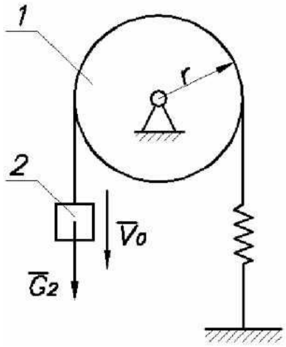
4 (РСФСР, 1984, 7 баллов). Трубка, изогнутая по дуге окружности радиусом R, вращается равномерно вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω (ω > $(g/R)^{1/2}$), где g – ускорение свободного падения. Внутри трубки может двигаться без трения шарик M. Определить закон малых колебаний шарика около положения относительного равновесия. Шарик считать материальной точкой.

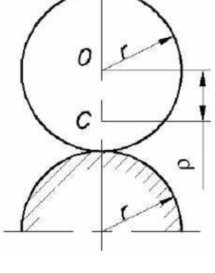




5 (РСФСР, 1985, 5 баллов). Тяжёлый грузик *1* прикреплён к телу *2* при помощи идеального шарового шарнира и невесомого стержня длиной l. Движение происходит на горизонтальной негладкой плоскости (коэффициент трения скольжения между грузиком и плоскостью равен f). Стержень не касается плоскости, а тело имеет постоянную скорость U. Определить период малых колебании грузика. При каких значениях U возможны периодические колебания?

6 (РСФСР, 1988, 7 баллов). Однородный сплошной диск *1* весом G_1 охвачен гибкой лентой; один её конец соединён с пружиной, имеющей жёсткость C, а ко второму прикреплён груз *2* весом G_2. Лента по диску не проскальзывает. Грузу сообщена скорость V_0 из положения покоя. Определить период колебании и закон движения груза. Массы пружины и ленты не учитывать.

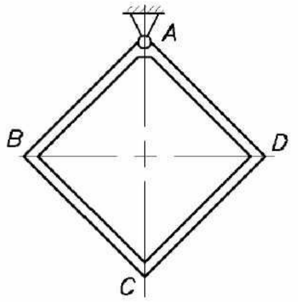




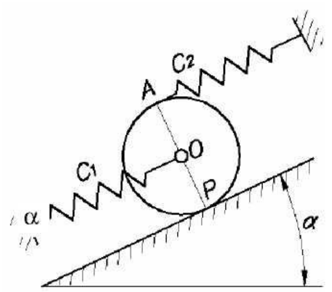
7 (РСФСР, 1986, 7 баллов). Цилиндр со смещённым с оси центром тяжести опирается на негладкую цилиндрическую поверхность таким же, как у цилиндра, радиусом r. Коэффициент сцепления (трения покоя) равен f.

Определить область устойчивости цилиндра (максимальный угол поворота) и смещение ρ его центра тяжести, при котором цилиндр, отклонённый от положения равновесия, показанного на рисунке, будет к нему возвращаться. Трение качения не учитывать.

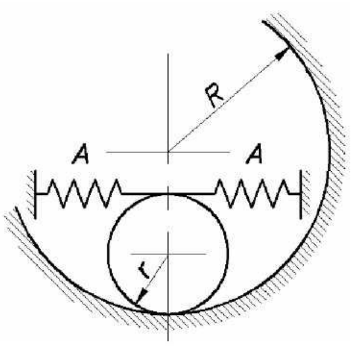
8 (БССР, 1985, 4 балла). Квадратная рамка *ABCD*, сваренная из тонких однородных стержней длиной *l* каждый, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *A*. Рамку отклонили от положения равновесия на угол φ_0 и опустили без начальной скорости. Найти уравнение малых колебаний рамки.



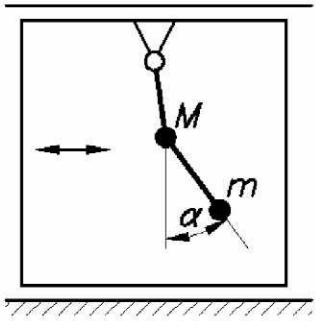
9 (Л., 1982, 7 баллов). Однородный диск массой *m* и радиусом *R* может катиться без скольжения по плоскости, наклонённой под углом α к горизонту. Две пружины с коэффициентами жёсткости C_1 и C_2 удерживают диск в положении равновесия; в этом положении радиус *OA* перпендикулярен опорной плоскости. В начальный момент диск повернули вокруг точки *P* на малый угол φ_0 против хода часовой стрелки и отпустили без начальной скорости. Определить дальнейшее движение диска.



10 (Л., 1983, 6 баллов). Тяжёлый цилиндр массой *m* и радиусом *r* лежит на вогнутой поверхности, имеющей радиус кривизны *R*. К верхней точке цилиндра прикреплены пружины-растяжки жёсткостью *C* каждая. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний цилиндра, считая, что он катится по опорной поверхности без скольжения. Определить период собственных колебаний цилиндра в случае, когда опорная поверхность является горизонтальной плоскостью.

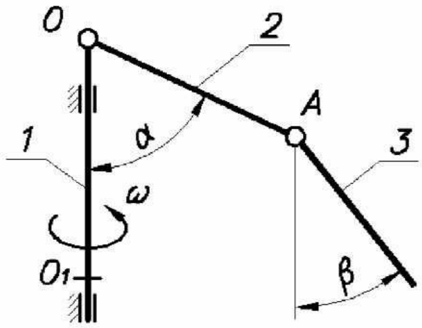


11 (М., 1983, 6 баллов). Двойной математический маятник подвешен в кабине, совершающей гармонические колебания с периодом *T* по прямолинейным горизонтальным направляющим. Масса маятников: верхнего – *M*, нижнего – *m*. При какой длине *l* низшего маятника возможно отсутствие качаний верхнего маятника? Углы α отклонений низшего маятника полагать малыми.

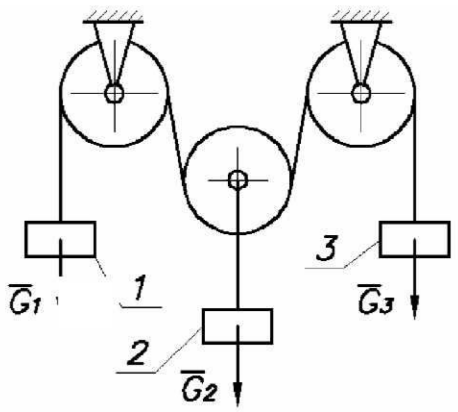


3.8. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1 (СССР, 1984, 5 баллов). Вал *1*, установленный вертикально, вращается с постоянной угловой скоростью ω. В точке *O* вала с помощью цилиндрического шарнира, ось которого перпендикулярна оси вала *1*, прикреплён невесомый стержень *2*, с которым соединён цилиндрическим шарниром тяжёлый однородный стержень *3*. Оси шарниров *A* и *O* параллельны. При движении системы стержни *2* и *3* располагаются в вертикальной плоскости, проходящей через ось O_1O, $0 < \alpha < 0{,}5\pi$. Указать, какое из соотношений ($\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$, $\beta > \alpha$) справедливо для состояния относительного равновесия системы. Ответ аргументировать.

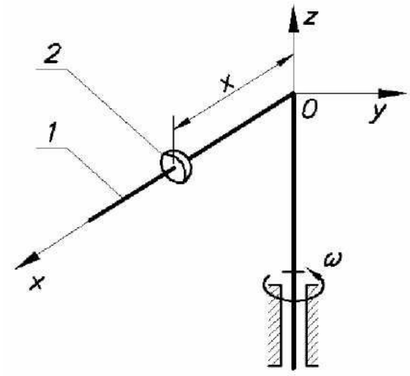


2 (РСФСР, 1989, 5 баллов). Чему должен быть равен вес груза G_3, чтобы груз *3* был неподвижен в механической системе, у которой $G_1 = G_2 = G$. Массами блоков и нитей и трением пренебрегаем.

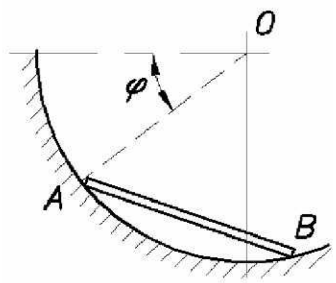


3 (СССР, 1985, 4 балла). Идеально гладкий тонкий стержень *1* вращается равномерно вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω. Вдоль стержня скользит кольцо *2* массой m. В начальный момент $x_0 = a$, $\dot{x} = 0$. Кольцо принять за материальную точку.

Найти силу, с которой кольцо давит на стержень, в зависимости от координаты x.

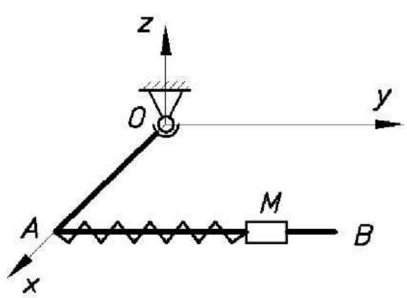


4 (СССР, 1983, 6 баллов). Тонкий однородный стержень массой m и длиной r скользит, оставаясь всё время в одной вертикальной плоскости, по внутренней поверхности гладкого цилиндра радиусом r. Найти реакции цилиндра в точке A для произвольного угла φ, если в начальный момент этот угол был равен 30° и стержень покоился.



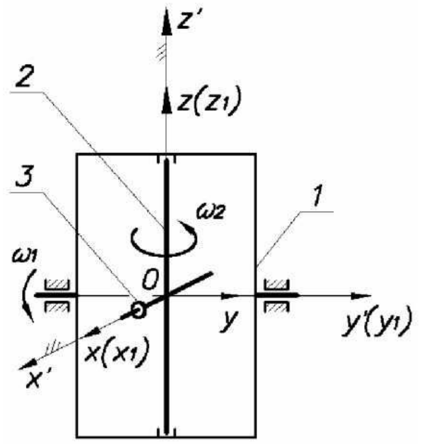
5 (БССР, 1984, 5 баллов). Гладкий Г-образный стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O. Маленькая муфта M массой m прикреплена к стержню в точке A с помощью пружины с жёсткостью C. Муфта не движется вдоль стержня. Длина пружины в 1,2 раза больше её длины в нерастянутом состоянии.

Найти силу, с которой кольцо давит на стержень, в зависимости от координаты x. С какой угловой скоростью вращается стержень?

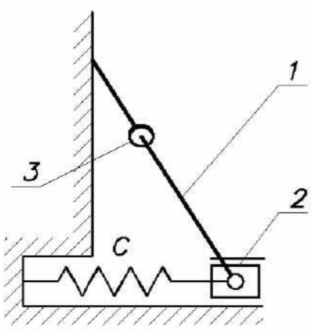


3.9. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

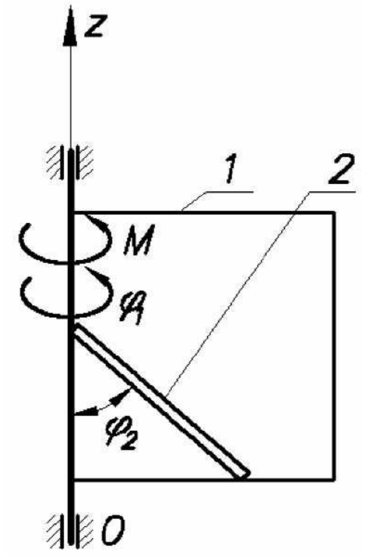
1 (СССР, 1981, 10 баллов). На рисунке показано начальное положение механической системы. Система координат $Ox'y'z'$ неподвижна. Система координат $Ox_1y_1z_1$ связана с невесомой рамкой *1*, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг горизонтальной оси Oy'. Система координат $Oxyz$ связана с невесомой крестовиной *2*, образованной двумя соединёнными под прямым углом стержнями. Крестовина вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 относительно рамки. Кольцо массой m надето на стержень и может перемещаться по нему без трения. Составить дифференциальное уравнение движения кольца по стержню.



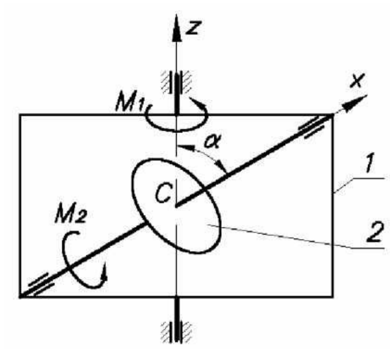
2 (СССР, 1981, 6 баллов). Тонкий однородный стержень *1* массой m_1 и длиной l движется в вертикальной плоскости, опираясь верхним концом на вертикальную стенку, а нижним концом толкает ползун *2* массой m_2, растягивая пружину с коэффициентом жёсткости C. При вертикальном положении стержня пружина не деформирована. По стержню движется кольцо *3* массой m_3. Составить дифференциальные уравнения движения механической системы, используя уравнения Лагранжа второго рода. Трение не учитывать.



3 (СССР, 1982, 6 баллов). Тяжёлая рамка *1*, момент инерции которой относительно вертикальной оси Oz равен J, движется под действием пары сил с моментом M. Концы однородного тяжёлого стержня *2* длиной l и массой m скользят без трения по сторонам рамки. Составить дифференциальные уравнения движения данной механической системы в обобщённых координатах φ_1 и φ_2. Трением пренебречь.



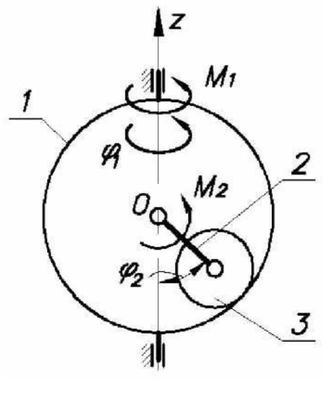
4 (СССР, 1983, 10 баллов). Жёсткая рамка *1* вращается вокруг вертикальной оси Cz под действием пары сил с моментом M_1. Момент инерции рамки относительно оси Cz равен J. Тонкий однородный диск *2* массой m и радиусом R жёстко закреплён на невесомом валу, установленном в подшипниках, находящихся в углах рамки. Центр масс C диска находится в точке пересечения осей Cz и Cx, угол между осями равен α. На вал действует пара сил с моментом M_2. Момент M_2 создаёт двигатель, установленный на рамке. Найти угловое ускорение рамки. Трение не учитывать.



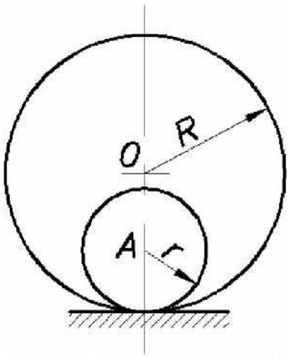
5 (СССР, 1984, 10 баллов). Зубчатое колесо *1* вращается вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через его центр. Водило *2* вращается вокруг оси, проходящей через центр O колеса *1* перпендикулярно его плоскости. Водило несёт ось зубчатого колеса *3*, находящегося в зацеплении с колесом *1*. На колесо *1* действует пара сил с моментом M_1, а на водило – пара сил с моментом M_2. Масса $m_1 = 2m$ колеса *1* распределена по окружности радиусом $R = 3r$, водило невесомо, колесо *3* – тонкий однородный диск массой m и радиусом r.

Какими должны быть моменты $M_1(\varphi_1, \varphi_2)$, $M_2(\varphi_1, \varphi_2)$, чтобы имели место равномерные вращения с заданными постоянными угловыми скоростями $\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \text{const}$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \text{const}$?

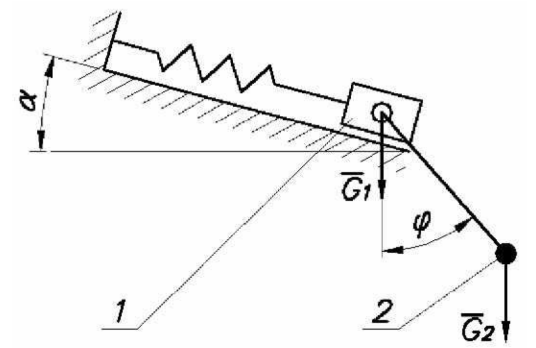
Трение не учитывать.



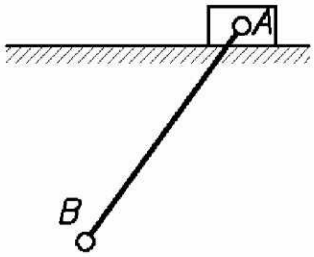
6 (РСФСР, 1982, 5 баллов). Тонкостенная однородная труба массой M и радиусом R может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Внутри этой трубы может катиться без проскальзывания тонкостенная однородная труба массой m и радиусом r. Составить дифференциальные уравнения движения системы из состояния покоя, если в начальном положении прямая AO, соединяющая центры труб, отклонена от вертикали на малый угол.



7 (РСФСР, I986, 7 баллов). Ползун 1 массой m_1, соединённый с опорой пружиной с жёсткостью C, совершает колебания на плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К ползуну шарнирно прикреплён математический маятник 2 массой m_2, имеющий длину l. Трения нет. Составить дифференциальные уравнения движения системы.



8 (БССР, 1984, 6 баллов). Эллиптический маятник состоит из ползуна массой m, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика той же массой m, соединённого с ползуном невесомым стержнем AB длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости чертежа. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости, предоставив маятник самому себе. Определить угловую скорость стержня в момент, когда шарик будет находиться в нижнем положении. Каким будет решение, если AB – однородный стержень массой $m_1 = 2m$?

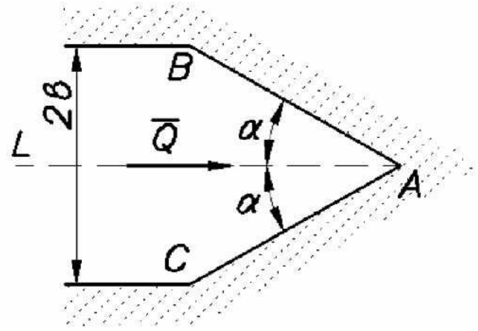


3.10. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

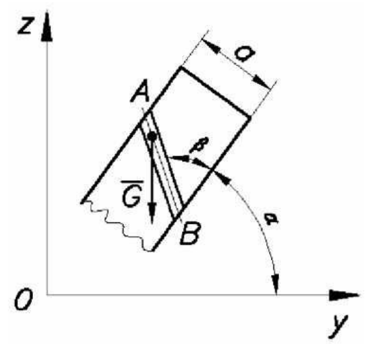
1 (СССР, 1990, 10 баллов). Впереди трактора, движущегося с постоянной скоростью U, установлены отвалы AB и AC под углом α к оси трактора, $BC = 2b$. Отвалы перемещают земляную насыпь по поверхности горизонтальной площадки вправо и влево от направления движения трактора. Коэффициент трения частиц грунта о поверхность площадки f_1, о поверхность отвала f_2. Частицы грунта скользят вдоль отвалов, а после схода с отвалов в точках B и C движутся по поверхности площадки до полной остановки.

Определить:

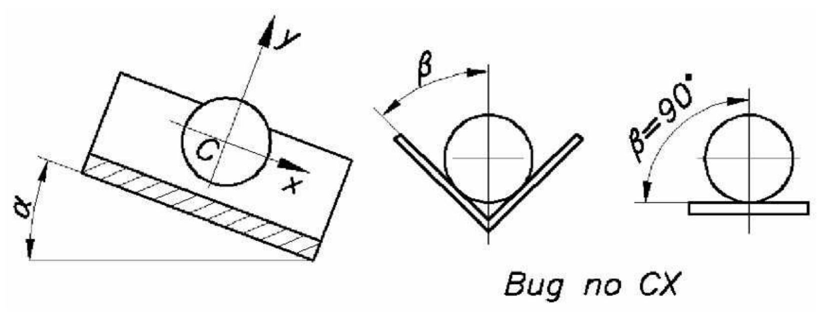
1. При каких значениях α частицы грунта будут скользить вдоль отвалов;
2. Расстояние h частиц грунта до прямой L после их остановки (L – траектория точки A);
3. Усилие Q, необходимое для перемещения грунта, если масса грунта, перемещаемая одним отвалом, равна M.



2 (РСФСР, 1983, 5 баллов). В доске, установленной в вертикальной плоскости под углом α к горизонту, необходимо просверлить наклонное отверстие, так, чтобы материальная точка, опущенная в отверстие в точке A без начальной скорости, прошла сквозь доску под действием силы тяжести в кратчайшее время. Коэффициент трения равен f. Определить угол β наклона отверстия.



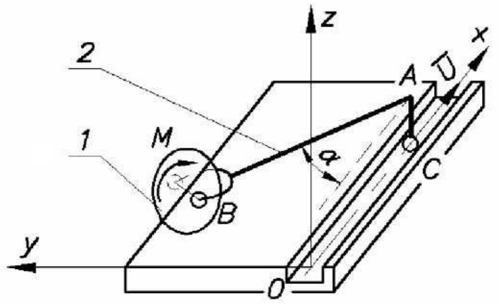
3 (РСФСР, 1988, 7 баллов). Шарик скатывается по V-образному жёлобу (β = 90º). Может ли угол α наклона жёлоба к горизонту, при котором начнётся скольжение шарика, быть меньше, чем у плоской (β = 90°), опоры? Коэффициент трения скольжения f не зависит от величины угла β. Для шарика J_{cz} = $0{,}4mr^2$.



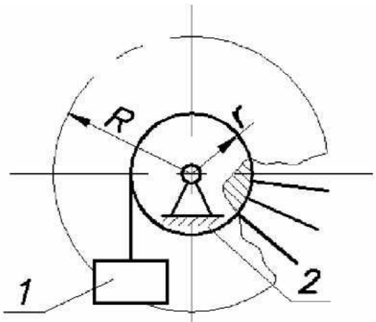
4 (РСФСР, 1988, 3 балла). Материальная точка массой m движется по горизонтальной шероховатой плоскости в вязкой среде. Во сколько раз увеличится время движения точки до её остановки, если вязкого трения не будет?

Исходные данные: начальная скорость V_0 = 33,7 м/с, коэффициент трения скольжения f = 0,2 = const, модуль силы вязкого сопротивления $F = m\beta V$, где β = 0,1 $с^{-1}$ и m = 1 кг.

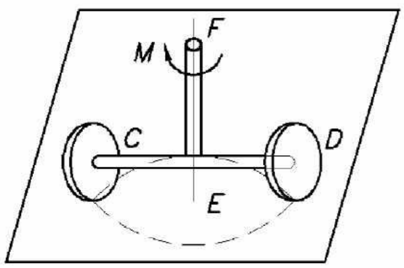
5 (СССР, 1985, 10 баллов). Тонкий однородный диск *1* массой m и радиусом R, закреплённый цилиндрическим шарниром B на оси водила *2*, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Во время движения плоскость диска и водила сохраняет вертикальное положение. Длина AB водила равна l, а масса пренебрежимо мала. На диск в его плоскости действует момент M; $AB \| xoy$. Трение качения, трение верчения и трение в шарнире B отсутствуют. Найти зависимость момента M от угла α при условии, что конец C водила движется вдоль идеально гладкого паза со скоростью U = const.



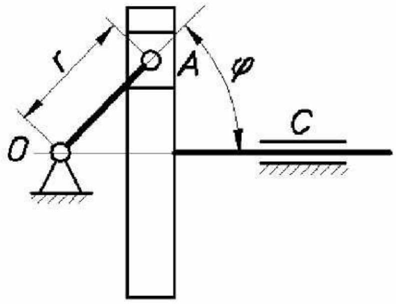
6 (СССР, 1987, 5 баллов). Груз *1* массой m, подвешенный к концу нити, намотанной на барабан *2*, опускается. Барабан имеет n радиально расположенных лопастей шириной b. При вращении барабана лопасти испытывают сопротивление воздуха, давление которого в каждой точке лопасти пропорционально скорости этой точки; α – коэффициент пропорциональности, J – момент инерции барабана с лопастями относительно оси вращения, r – радиус барабана, $L = R - r$ – длина лопастей. Определить максимальную угловую скорость вращения барабана.



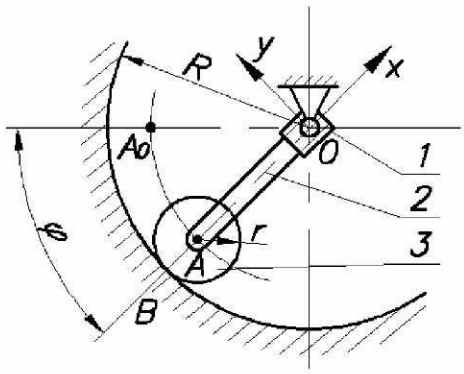
7 (СССР, 1988, 8 баллов). Однородные тонкие диски массой m каждый насажены на горизонтальную ось CD длиной $2l$. Радиусы дисков равны r. Диски опираются на горизонтальную плоскость. Ось CD приводится во вращение вокруг вертикальной оси EF после приложения постоянного момента M. Определить время τ, за которое ось CD повернётся на 90°, если в течение этого времени качение дисков по опорной плоскости происходит без скольжения. Массой оси CD пренебречь.



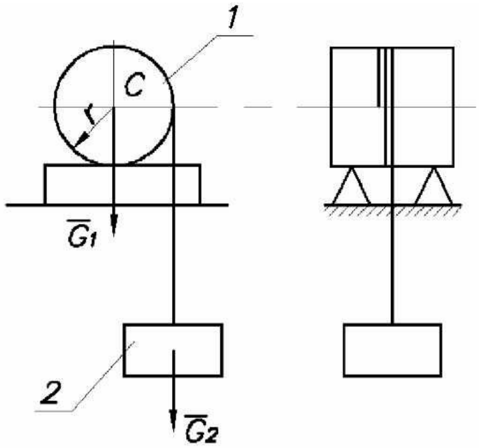
8 (СССР, 1990, 6 баллов). Кулисный механизм расположен в горизонтальной плоскости. Масса кулисы равна m, момент инерции кривошипа относительно оси O равен J, длина кривошипа r. В положении механизма, определяемом углом $\varphi_1 = 45°$, угловая скорость кривошипа равна ω_1, а его угловое ускорение $\varepsilon_1 = \omega_1^2$. Определить для этого положения вращающий момент M_1, приложенный к кривошипу, и динамические реакции подшипника C. Трением пренебречь.



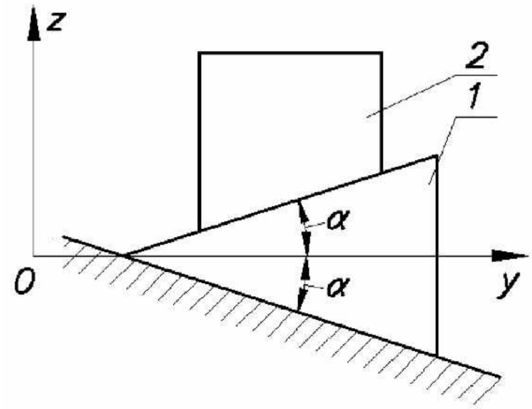
9 (РСФСР, 1983, 7 баллов). Механизм расположен в вертикальной плоскости и состоит из муфты 1, вращающейся на оси O однородного стержня 2, один конец которого может скользить в муфте, а на втором имеется ось A, соединяющая стержень с однородным диском 3. Диск массой m_3 и радиусом r катится без скольжения по неподвижному кольцу радиусом R. Длина стержня $l = R - r$, масса m_2. Потерями на трение в связях пренебрегаем. В начальный момент центр диска находится в положении A_0 и неподвижен. Силы тяжести приводят механизм в движение. Определить скорость центра диска V_A, реакции его связей как функцию угла φ ($0 < \varphi < 90°$).



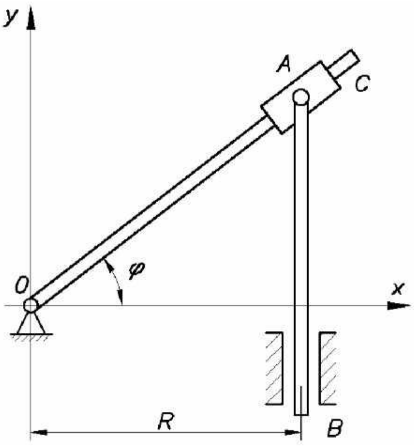
10 (РСФСР, 1989, 7 баллов). На горизонтальных направляющих лежит однородный цилиндр 1 весом G_1. На него намотана невесомая нить с грузом G_2 на конце. Цилиндр катится без проскальзывания; сопротивлением перекатыванию пренебрегаем. При каком отношении $K = G_1/G_2$ центр масс C цилиндра будет двигаться с постоянным ускорением $a = (2/3)g$?



11 (РСФСР, I990, 7 баллов). Определить ускорения тел плоской механической системы, движущейся под действием сил тяжести. Ось *OZ* вертикальна. Массы тел: $m_1 = m$, $m_2 = 0{,}5m$; угол $\alpha = 30^o$. Трение отсутствует.

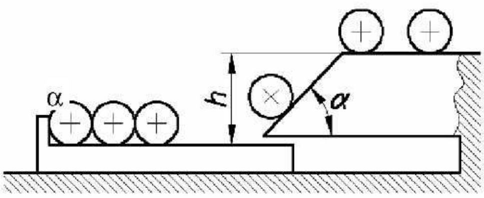


12 (Киргизская ССР, 1986, 5 баллов). Определить угловую скорость кривошипа *OC* длиной *l* и весом *P* в момент прохождения через ось *OX*, если вес ползуна *A* равен *Q*, вес стержня *AB* также равен *Q*. В начальный момент кривошип был отклонён на угол φ от горизонтали и отпущен без начальной скорости. Расстояние от точки *O* до стержня *AB* равно *R*. Механизм расположен в вертикальной плоскости.



13 (Л., 1985, 6 баллов). Шары массой *m* и радиусом *r* скатываются с горизонтальной площадки один за другим без скольжения и начальной скорости по наклонной плоскости на горизонтальную платформу, лежащую на гладкой поверхности, и движутся поступательно вместе с платформой.

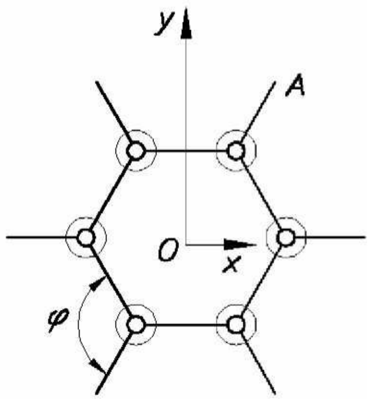
Определить скорость системы «шары – платформа» после скатывания на платформу *n*-го шара. Масса платформы – *M*. В начале движения шаров платформа находилась в состояния покоя.



14 (М., I983, 8 баллов). Спутник имеет форму правильной шестигранной призмы. Створки A радиатора системы охлаждения спутника в исходном положении прилегают к боковым граням корпуса спутника, ширина грани – R. На орбите (в условиях невесомости) после отделения спутника створки освобождаются и под действием пружинных двигателей синхронно поворачиваются вокруг осей. Полагаем створки однородными пластинами массой m и длиной R.

1. Найти соотношение между угловой скоростью вращения корпуса спутника вокруг оси симметрии (OZ) и относительной угловой скоростью $\dot\varphi$ створок для момента, когда створки повернутся относительно корпуса на углы 120°.

2. Для того же момента времени найти угловую скорость корпуса спутника. Принять, что момент инерции корпуса $J_z = 86mR^2$, двигатели створок представляют собой спиральные пружины (или торсионы), коэффициенты жёсткости которых равны C и которые в начальном положении имеют угол закручивания 120°.



3.11. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Динамика точки

1. $m = \dfrac{m_0}{e^2}$; $T = \dfrac{2m_0U^2}{e^2}$.

2. $V = \sqrt{\dfrac{gR}{f} \cdot (\mathrm{tg}^2\alpha - f^2)}$.

3. Вначале рекомендуется рассмотреть движение точки для случая: кривая AB – дуга окружности.

4. Обозначим $\alpha = \mathrm{arctg}\, f$;

$$V_0^2 > \frac{2gR}{1+4f^2} \cdot \left\{\left[3f\sin\alpha + \left(1-2f^2\right)\cos\alpha\right] \cdot e^{-2f\alpha} + 2f^2 - 1\right\}.$$

5. $V^2 = 28Kl^2$; $V_{\max}^2 = \dfrac{225}{8}Kl^2$.

6. $y_c = -\dfrac{2}{27}l$.

7. $f = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{V_л^2}{gl}$.

8. Работа $A=-\frac{3}{8}mV_1^2$; импульс $S=\frac{\sqrt{5}}{2}mV_1$.

9. $\tau=\frac{1}{k}\cdot\ln\frac{V_0}{V_0-lk}$; $S=\frac{g\tau}{k}-\frac{gl}{kV_0}$; $V_0>kl$.

10. Импульс $S=2\frac{H}{k}$; работа $A=2\cdot\frac{H^2}{mk^2}$.

11. $V=\omega\sqrt{L^2-x_0^2}$; $t=\frac{1}{\omega}\cdot\ln\frac{L+\sqrt{L^2+x_0^2}}{x_0}$.

12. Сзади.

2. Динамика твёрдого тела

1. $N=P+Q+\frac{2P^2}{Q}$; $F_{сц}=0$.

2. $\mathrm{tg}\alpha_{\min}=\left(2-\sqrt{2}\right)f$.

3. Равновесие: $\mathrm{tg}\alpha\le C$.

Качение без скольжения:

$a=\frac{5}{7}g(\sin\alpha-C\cos\alpha)$ при $C<\mathrm{tg}\alpha<3{,}5\,f-2{,}5\,C$.

Качение со скольжением: $a=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)$.

4. $f>\frac{\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}$.

5. $A=\frac{3\alpha^2t^4}{8mb^2}$.

6. При $F\sin\alpha\le mg$ $a=\frac{F}{m}\cdot(\cos\alpha+f\sin\alpha)-fg$;

при $F\sin\alpha>mg$ $a=\sqrt{\left(\frac{F}{m}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{F}{m}\sin\alpha-g\right)^2}$.

7. $V=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}gl}$.

8. $\frac{15}{14}$.

9. $Z_c=\frac{1}{6}t^2(t-2g)$; $T=m\left(\frac{1}{3}g+t\right)$.

10. $AB=l\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)$, где $\lambda\supset\left(\frac{1}{6},\sqrt{2}-1\right)$ является корнем уравнения $12\,fmg\lambda^3+(6P-fmg)\lambda-P=0$.

11. $\omega=\omega_0-\frac{2\,fgt}{R}$; $\omega_{\min}=\frac{\omega_0}{3}$.

12. $N=\frac{14}{3}\cdot P$; $F_{сц}=0$.

13. $V_0^2=gR\cdot\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}$.

14. $\cos\alpha=\frac{10}{17}$.

15. $A=\frac{Gr^2\omega_0^2}{6g}$.

16. $\omega=5{,}184\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

17. $\angle OAB=180^\circ-\alpha+\beta$;

18. $\cos\alpha \ge \frac{10\,gr + 7V_0^2}{17\,gr}$; $V_0^2 \le gr$.

19. $V = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\frac{\alpha}{2} \cdot (1 + 2\cos\alpha) \cdot \sqrt{gl}$.

20. $\omega_{ср} = \frac{1}{3}\omega_0$.

21. Сплошной цилиндр будет катиться без скольжения, тонкостенный – со скольжением.

22. $V = \sqrt{U^2 + al}$.

23. $\tau = 3 \cdot \frac{fg}{k}$; $S = 3 \cdot \frac{f^3 g^3}{k^2}$.

24. $\varepsilon = \frac{M}{J}$; $J = \frac{1}{12} \cdot \sum_{K=1}^{N} m_K l_K^2 + \sum_{K=1}^{N} m_K y_K^2$; $y_K = \sum_{i=1}^{K} l_i - \frac{l_K}{2}$.

25. $h = \frac{10}{17} \cdot (R + r)$.

26. $\omega_0^2 = \frac{3g}{2\,l\cos\psi_0 \sin^2\psi_0}$.

27. $x^2 + (y - R)^2 = r^2$.

28. $T = \frac{V}{g(\sin\alpha + 2k\cos\alpha)} \cdot B$;

$B = 1 + 2k\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha \le 2k$; $B = \frac{2k\cos\alpha - \sin\alpha}{k\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha > 2k$.

3. Динамика системы

1. $X_0 = -12\,mg\sin\varphi_0$.

2. $f \ge \frac{\delta}{R}$; $\mathrm{tg}\alpha = 3\,f - 2\frac{\delta}{R}$.

3. $a_1 = \frac{g}{2\cdot\sqrt{3}}$; $a_2^r = \frac{1}{2}g$; $T = \frac{1}{2}m_1 g$ (25 Н).

4. $V = \sqrt{2\,g(h - y)\left[1 - \left(\frac{y - b}{r}\right)^2\right]}$, если $h - \frac{h - b}{3} < y \le h$;

$V = \sqrt{2g\left[h - \frac{4(h - b)^3}{27\,r^2} - y\right]}$, если $r \le y < h - \frac{h - b}{3}$.

5. $S_{max} = \frac{1}{2} \cdot (\cos 30° - 0{,}8) = 0{,}0335\,l$.

6. $\omega_z = \dot\varphi = \sqrt{\frac{2a}{2l + at^2}}$;

$\varepsilon_z = \ddot\varphi = -\sqrt{2} \cdot \left(2\frac{l}{a} + t^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot t$;

$\varphi = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{1 + \frac{at^2}{2l}} + \sqrt{\frac{2l}{a}}\,t\right)$; $M = \left(\frac{3}{4}m - \frac{J}{(2\,l + a\,t^2)^2}\right) \cdot a \cdot \sqrt{2a(2\,l + at^2)} \cdot t$.

Составляющие реакции стержня:

$R_x = 0$; $R_y = -\frac{5 \cdot \sqrt{2}\,ma\sqrt{a}\,t}{2 \cdot \sqrt{2l + at^2}}$; $Rz = mg$.

7. $S = \frac{V_0^2}{2\,fg} - \frac{10\,\mathrm{tg}\alpha + 9\,f}{5\,\mathrm{tg}\alpha + 4\,f}$.

8. $A=-\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}U_0^2$.

9. Траектория точки C – эллипс с полуосями $\frac{l}{4}$; $\frac{l}{2}$; $V=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$.

10. $\varepsilon_2=\frac{1}{11}\varepsilon_1$.

11. $a_{\min}=\frac{1}{2}b$; $m_1=m$.

12. $h_0=0.1$ м.

13. $V_0^2=\frac{9}{8}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)gl$.

14. $T=\frac{m_1 m_2\omega^2 l}{m_1+m_2}$;

$N_1=m_1\cdot\sqrt{g^2+4\omega^2V^2}$; $N_2=m_2\cdot\sqrt{g^2+4\omega^2V^2}$.

15. $V=\sqrt{3gh}$.

16. $a_0=\frac{P-Q}{m+2m_1}$; $a_1=\frac{2P}{m+2m_1}$; $a_2=\frac{-2Q}{m+2m_1}$; $\varepsilon=\frac{P+Q}{(m+2m_1)r}$.

17. $a=\frac{1}{4}g$.

18. $H_{\max}=l+\frac{4}{3}H$.

19. $a_A=g\sin^2\varphi_0$; $a_B=\frac{1}{2}g\sin 2\varphi_0$.

20. $M(\varphi)=2\omega^2l^2m\sin 2\varphi$.

21. $\alpha<\arcsin\frac{P}{P+Mg}$.

22. $V_A=\sqrt{\frac{2ghQ}{P+2Q}}$.

23. $J=m_2r(R-r)$.

24. $\varphi=\frac{al}{2rg}\cdot\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)-\frac{al}{rg}$; $k=\sqrt{\frac{g}{3l}}$.

25. $V=\sqrt{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{5}gl}$.

26. $a_1=3g\cdot\frac{P-f(Q_1+Q_2)}{3Q_1+Q_2}$.

27. $J_0=M\left(r^2-\frac{2}{3}l^2\right)$; $\omega=\frac{m\sqrt{r^2-l^2}\,at}{J_0+m\left(r^2-l^2+S^2\right)}$;

$A=\frac{1}{2}\cdot\left(J_0+mS^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}m\left(at-\omega\sqrt{r^2-l^2}\right)^2$.

28. $\tau=\pi\cdot\sqrt{\frac{R}{g}}$; $x=V_{0x}\tau$.

4. Законы сохранения

1. $\omega=\sqrt{\frac{2g}{3R}}$, $U=\sqrt{3gR}$.

2. $V_{\text{лев.}}>V_{\text{прав.}}$.

3. $S=\frac{1}{6}\cdot\operatorname{arctg}\frac{B}{kbh}\cdot(1-\cos kt)$; здесь $b=\sqrt{\frac{m}{J+mh^2}}$.

4. $\varphi = \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}}{b} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{a}{b}$; здесь $b = \sqrt{2R^2 - \dfrac{5}{3}a^2}$.

5. $a = g \cdot \dfrac{\cos\alpha - \dfrac{2}{3}}{\sin\alpha}$.

6. $A = \dfrac{1}{4} m l^2 \omega_0^2$.

7. $h = \dfrac{V_0^2}{2g}$.

8. $V = \sqrt{3gh}$.

9. $M = m\omega^2 S(2S - h)$.

10. $N = \dfrac{1}{3} mg(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0)$.

11. $\tau = \dfrac{3V_0}{g\sin\alpha}$.

12. $\omega = \dfrac{mUl(1-\cos\varphi)}{J + m\left(l^2 + r^2 + 2lr\cos\varphi\right)}$.

13. $\omega^2 = \dfrac{2g}{95a}$.

14. $V_0 = \dfrac{1}{4} U$.

5. Удар

1. Для первой модели $A = \dfrac{1}{8} mV^2$; для второй $A = \dfrac{1}{14} mV^2$.

2. $H = R \cdot \dfrac{9R^2 - 3Rb + 4b^2}{(3R - 2b)^2}$; $b < R$.

3. $\cos^2\alpha < \dfrac{1}{3} k$.

4. $T = \dfrac{1}{3} mU^2$.

5. ∞; $I_n = k^{n-1} I_1$.

6. $y = 6l - \dfrac{gt^2}{2}$ при $t \le \tau$;

$y = l\left[0{,}2\cos K(t-\tau) - \sin K(t-\tau) + 0{,}8\right]$ при $t > \tau$;

здесь $K = \sqrt{\dfrac{5g}{2l}}$, $\tau = \sqrt{\dfrac{10l}{g}}$.

7. $\mu = 2$; $S = \dfrac{1}{3}\pi l$; после второго удара стержень неподвижен.

8. $V_1 = \dfrac{M - m}{M + m} \cdot V$.

6. Динамика тела (системы тел) при моментальном изменении связей

1. $l_{1-2} = a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{32}{9}\pi^2 - \dfrac{8}{3}\pi}$.

2. $\omega = 2 \cdot (m_1 M l)^{\frac{1}{2}} \cdot (m_1 + 2m_2)^{-1} \cdot R^{-\frac{3}{2}}$.

3. 1) $\frac{r}{h} > \frac{f}{4}$.

2) Если $a \le fg$, то $a_{\text{конуса}} = a$; если $a > fg$, то $a_{\text{конуса}} = fg$.

4. $R_A = \frac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}$.

5. $S = \frac{1}{2} l \cdot \sqrt{3 \cdot (1 + 4\pi^2)}$.

6. $R = \frac{9}{8} mU^2 b^2 \left(a^2 + b^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

7. При $F \le \frac{mg}{2\sin\alpha}$ $a_{Cx} = \frac{F}{m}\cos\alpha$, $a_{Cy} = 0$;

при $F > \frac{mg}{2\sin\alpha}$ $a_{Cx} = \frac{F}{m} \cdot \cos\alpha$, $a_{Cy} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{m}\sin\alpha - \frac{3}{4} g$.

8. $R = \frac{\sqrt{34}}{8} mg$.

7. Колебания

1. Обозначим $b = \frac{\alpha a^2}{2J}$; $K = \sqrt{\frac{C_1 l^2 + C_2 l_c^2}{J}}$; $K_1 = \sqrt{K^2 - b^2}$;

тогда $F_{\max} = \frac{1}{2} Q + \frac{C_1 l\omega_0}{K} \cdot e^{-\frac{b}{K}\cdot \operatorname{arctg}\frac{K_1}{b}}$.

2. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$.

3. $T = 2\pi \cdot \sqrt{m \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{C_K}}$.

4. Гармонические колебания с периодом $T = \frac{2\pi R\omega}{\sqrt{R^2\omega^4 - g^2}}$.

5. Условный период малых затухающих колебаний $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{fg}}$; $U \to \infty$.

6. $T = \frac{2\pi}{K}$; $x = \frac{V_0}{K}\sin Kt$; здесь $K = \sqrt{\frac{2gC}{G_1 + 2G_2}}$.

7. $\cos\frac{\alpha}{2} > \left(1 + f^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\rho > \frac{r}{2}\left(1 + f^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

8. $\varphi = \varphi_0 \cos Kt$; $K = \sqrt{\frac{3g}{5l} \cdot \sqrt{2}}$.

9. $\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2 \cdot (C_1 + 4C_2)}{3m}} + \frac{\pi}{2}\right) t$.

10. $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$; здесь $K^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{g}{R - r} + \frac{16}{3} \cdot \frac{C}{m}$. Для цилиндра на горизонтальной плоскости период $T = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{3m}{C}}$.

11. $I = \frac{MT^4}{4\pi^2\left(MT^2 - 4\pi^2 m\right)}$.

8. Принцип Даламбера

1. Учесть, что стержень *2* – невесомый.

2. $G_3 = \frac{2}{3} G$.

3. $F = m \cdot \sqrt{g^2 + 4\omega^4\left(x^2 - a^2\right)}$.

4. $R_A = \frac{mg}{10}\cdot\left(\frac{28}{\sqrt{3}}\cdot\sin\psi - \cos\psi - 9\right)$; $\psi = \varphi + 30^\circ$.

5. $\omega = \sqrt{\frac{C}{6m}}$.

9. Уравнения Лагранжа

1. $\ddot{x} - \left(\omega_2^2 + \omega_1^2\cos(\omega_2 t)\right)\cdot x = g\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$.

2. $\ddot{s} + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\ddot{\varphi} + \left(l\cos^2\varphi - s\right)\cdot\dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi$,

$$\left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)l^2 + (2\,m_3 - m_2)\,l^2\sin^2\varphi + m_3\,s^2 - 2\,m_3\,l\,s\sin^2\varphi\right]\cdot\ddot{\varphi} +$$

$$+\frac{m_3}{2}l\sin(2\varphi)\ddot{s} + \left(\frac{3m_3 - m_2}{2}\sin 2\varphi - m_3 ls\right)\cdot\dot{\varphi}^2 - 2m_3\left(l\sin^2\varphi - s\right)\cdot\dot{s}\dot{\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{2}Cl^2\sin 2\varphi + \frac{1}{2}m_1 gl\sin\varphi + m_3 g(l - s)\cdot\sin\varphi.$$

3. $$\begin{cases} J\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3}ml^2\sin\varphi_2\,\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3}ml^2\sin 2\varphi_2\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2 = M; \\ \frac{1}{3}ml^2\,\ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{6}ml^2\sin 2\varphi_2\,\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2}mgl\sin\varphi_2. \end{cases}$$

4. $\varepsilon_1 = 4\frac{M_1 - M_2\cos\alpha}{mR^2\sin^2\alpha + 4J}$.

5. $M_1 = 4\,mr^2\omega_1\omega_2\sin 2\varphi_2$; $M_2 = 2\,mr\cdot\left(g\sin\varphi_2 - r\omega_1^2\sin 2\varphi_2\right)$.

6, 7. Составляются уравнения Лагранжа 2 рода для системы с 2-мя степенями свободы. Движение последовательное.

8. $\omega_1 = 2\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{6g}{l}}$.

10. Профессионально-ориентированные задачи

1. 1) $\alpha > 90^\circ - \varphi_2$; здесь $\varphi_2 = \mathrm{arctg}\, f_2$.

2) $h = b + \frac{U^2\sin^2\alpha\cos(\alpha + \varphi_2)}{2\,f_1 g\cos^2\alpha}$.

3) $Q = 2\,f_1 Mg\sin(\alpha + \varphi_2)$.

2. $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha + \varphi}{2}$; $\varphi = \mathrm{arctg}\, f$ – угол трения.

3. Может.

4. $t_2 = 1{,}72\,t_1$.

5. $M = mR\cdot\frac{6l^2 - R^2}{4l^2}\cdot U^2\sin^2\alpha$.

6. $\omega = \frac{3\,mgr}{n\alpha b\cdot\left(R^3 - r^3\right)}$.

7. $\tau = \sqrt{\frac{\pi m\cdot\left(3r^2 + 2l^2\right)}{2M}}$.

8. $M_1 = \left(J + mr^2\right)\omega_1^2$; $M_C = mr^2\omega_1^2$.

9. Обозначим $a = \frac{m_2}{m_3}$; $V_A^2 = 6g(R - r)\cdot\frac{a+2}{2a+9}\cdot\sin\varphi$;

$X_A = -5m_2 g\frac{a+3}{2a+9}\cdot\sin\varphi$;

$Y_A = -m_3 g \frac{2,5\,a}{2a+9} \cdot \cos\varphi$;

$X_B = m_3 g \cdot \frac{5a^2+23a+21}{2a+9} \cdot \sin\varphi$; $Y_B = \frac{3}{2} m_3 g \cdot \frac{a+2}{2a+9} \cdot \cos\varphi$.

10. $K = 0{,}238$.

11. Абсолютные ускорения: $a_1 = \frac{7}{11} g$, $a_2 = \frac{\sqrt{67}}{11} g$; ускорение тела *2* в его движении относительно тела *1* $a_2^r = \frac{9}{11} g$.

12. $\dot\varphi^2 = 3g\sin\varphi\cos^3\varphi\cdot(4QR + Pl\cos\varphi)/(6QR^2 + Pl^2\cos^4\varphi)$.

13. $V = \frac{mn}{M+mn} \cdot \sqrt{\frac{10}{7} gh} \cdot \frac{2+5\cos\alpha}{7}$.

14. $\phi = 20\omega$; $\omega = \frac{2\pi}{5R} \cdot \sqrt{\frac{C}{42m}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, В.И. Конкурентология : учебный курс для творческого саморазвития конкурентоспособности / В.И. Андреев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2004. – 468 с.

2. Барышева, Т.А. Креативность. Диагностика и развитие : монография. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2002. – 205 с.

3. Барышева, Т.А. Психолого-педагогические основы развития креативности : учебное пособие / Т.А. Барышева, Ю.А. Жигалов. – СПб. : СПГУТД, 2006. – 268 с.

4. Богоявленская, Д.Б. Психология творческих способностей : учебное пособие / Д.Б. Богоявленская. – М. : Издательский центр «Академия», 2002. – 320 с.

5. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики. В 2 т. : учебное пособие для вузов. Т.1. Статика и кинематика. Т 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Мерлин. – СПб. : Лань, 2004. – 736 с.

6. Гамидов, Г.С. Инновационная экономика: стратегия, политика, решения / Г.С. Гамидов, Т.А. Исмаилов, И.Л. Туккель. – СПб. : Политехника, 2007. – 356 с.

7. Диевский, В.А. Теоретическая механика : учебное пособие для вузов / В.А. Диевский. – СПб. : Лань, 2005. – 320 с.

8. Дружинин, В.Н. Когнитивные способности: структура, диагностика, развитие / В.Н. Дружинин. – М. : ПЕР СЭ ; СПб. : ИМАТОН-М, 2001. – 224 с.

9. Зиновкина, М.М. Креативное инженерное образование. Теория и инновационные креативные педагогические технологии : монография / М.М. Зиновкина. – М. : МГИУ, 2003. – 372 с.

10. Курс теоретической механики : учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин [и др.] ; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.

11. Малахова, И.А. Развитие личности. Ч.1. Способность к творчеству, одарённость, талант / И.А. Малахова. – Минск. : Бел. навука, 2002.– 158 с.

12. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб. : Лань, 1998. – 448 с.

13. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики : учебник для вузов / Н.Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 2003. – 719 с.

14. Полищук, Д.Ф. Техническое творчество в механике. Системно-операторная механика / Д.Ф. Полищук. – Ижевск : Изд-во Удм. ун-та, 1993. – 230 с.

15. Попов, А.И. Олимпиадные задачи по теоретической механике : учебное пособие / А.И. Попов, В.И. Галаев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. – 84 с.

16. Попов, А.И. Механика. Решение творческих профессиональных задач : учебное пособие / А.И. Попов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 108 с.

17. Примеры и задачи в теоретической механике : учебное пособие / Л.А. Булатов [и др.]. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. – 374 с.

18. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике. Статика : учебное пособие / А.И. Попов [и др.]. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 96 с.

19. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С.М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2004. – 416 с.

20. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учебник для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ