ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА (ДИНАМИКА)

Конспект лекций

Содержание

Динамика.

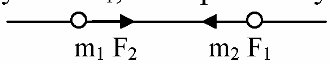
Динамика – это раздел теоретической механики изучающий движения материальных точек и твёрдых тел под действием приложенных к ним. В динамике решают две задачи. Эти задачи называются ***первой или прямой, второй или обратной.*** Обратная задача является ***основной.*** Прямой задачей, по заданным законам движения, определяют силы и моменты сил. Во второй задаче, по приложенным силам и моментам, вычисляют законы движения, Динамика ***базируется на трёх законах***.

Первый закон: Материальная точка находится в покое или движется равномерно и прямолинейно, если на неё не действуют силы или действующие силы на точку уравновешены.

Второй закон(второй закон Ньютона): Материальная точка массы m, движется ускоренно под действием приложенных к ней сил.

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$

Третий закон: Если одна материальная точка действует на другую силой F_1, то другая будет действовать с силой равной по модулю F_1, направленную противоположно вдоль прямой, соединяющей эти точки.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Силы.

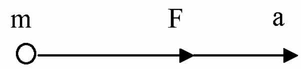
В динамике различают: внешние и внутренние, активные и реакции связей. Также различают силы постоянные, зависящие от координат, зависящая от времени и зависящая от скорости

$$F = const$$

$$\vec{F}(x); \quad F(t); \quad \vec{F}(\vec{V})$$

Дифференциальное уравнение движения.

Пусть на материальную точку m действует сила F. По второму закону эта точка получит ускорение, по модулю пропорциональное модулю силы в направление этой же силы. Запишем основное уравнение динамики.



$m\vec{a} = \vec{F}$ (1)

Проецируем это уравнение на оси координат $\begin{cases} ma_x = F_x \\ ma_y = F_y \\ ma_z = F_z \end{cases}$ (2), где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения на оси координат x, y, z, соответственно.

F_x, F_y, F_z – проекции сил. Учитывая: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2 r}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$ (3)

Перепишем систему (2) с учётом (3):

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} = F_x \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = F_y \\ m\dfrac{dV_z}{dt} = F_z \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \quad (5)$$

Системы (2), (4), (5) представляют собой дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси координат.

Решение прямой задачи.

Первая задача считается заданной, если известно уравнение движения материальной точки, массой m.

Дано:
m, r(t)
Найти: под действием какой силы движется эта точка по заданному закону.
Решение:
где
$x = r\cos\alpha \quad \alpha - \text{угол между осью } x \text{ и вектором } r$
$y = r\cos\beta \quad \beta - \text{угол между осью } y \text{ и вектором } r$
$z = r\cos\gamma \quad \gamma - \text{угол между осью } z \text{ и вектором } r$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$
$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$
$$m\ddot{z} = F_z$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_y^2}$$

Пример:

1. Материальная точка m=10 грамм движется ускоренно по прямой. Если ускорение a=5 м/с^2. Определить под действием какой силы эта точка получила ускорение.

Дано:
m= 10 г
a=5м/с^2
Найти: F=?

Решение:
$m\vec{a} = \vec{F} \qquad ma = 0.01*5 = 0.05$

2. Материальная точка m=10г движется в неподвижной плоскости по законам. Определить модуль силы приводящей эту точку в движение.

Дано:
$x = 2t^2$
$y = 2t^3$
$\text{Найти}: F = ?$

Решение:
$$m\vec{a} = \vec{F}_i \qquad \ddot{x} = 4$$
$$x: m\ddot{x} = F_x \qquad \ddot{y} = 12t$$
$$y: m\ddot{y} = F_y$$
$$m\cdot 4 = 0.01\cdot 4 = 0.04H$$
$$m\cdot 12 = 0.01\cdot 12\cdot t = 0.12t$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0.04^2 + (0.12\cdot t)^2}$$

Решение обратной задачи.

Решение обратной задачи на теории интегрального исчисления. Задача считается заданной, если задана масса материальной точки и силы, действующие на эту точку. По заданным силам и массе определяют уравнение движения. Используя дифференциальное уравнение в системах (2),(4),(5). Пусть задана масса и сила.

При решении обратной задачи вводятся понятия “начальное условие”. К начальному условию в механике относятся две величины “положение материальной точки и скорость”, в момент рассмотрения задачи, т.е. в момент рассмотрения задачи, т.е. в момент, когда время отсчёта равно 0, т.е. при $t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, V_x = V_{x0}, V_y = V_{y0}, V_z = V_{z0}$.- Начальное условие.

Задача: Найти траекторию движения точки массой m = 1кг, если на неё действует сила тяжести. В начальный момент эта точка находилась на высоте 10 м над землёй и имела начальную скорость 5 м/с направленную горизонтально.

Дано: **Решение:**

$y_0 = 10м$

$V_0 = 5м/с$

$m = 1кг$

$Найти:$

$x(t) = ?$

$y(t) = ?$

$$\begin{cases} ma_x = F_x = 0 \\ ma_y = F_y = -G \end{cases} \qquad m\frac{dV_x}{dt} = 0; \frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow V_x = const = V_{x0} = 5м/с \qquad V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 = 5$$

$$dx = 5dt \qquad \int dx = 5\int dt$$

$x = 5t + c_1; c_1 -$ *постоянная интегрирования, она находится используя начальное условие, т.е. при* $t = 0$, *чему равно* x_0

$$c_1 = x_0 - 5t_0 = x_0 - 0 = 0 \qquad x = 5t$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = -G = -mg; \ \frac{dV_y}{dt} = -g; \ dV_y = -gdt$$

$V_y = -gt + c_2$ *при* $t = 0$

$$c_2 = V_{y0} + g \cdot 0 = 0$$

$V_y = -gt; \ \frac{dy}{dt} = -gt; \ \int dy = -g\int tdt; \ y = -g\frac{t^2}{2} + c_3$ *при* $t = 0$

$$c_3 = y_0 + g\frac{0^2}{2} = y_0 = 10$$

$$y = -\frac{gt^3}{2} + 10$$

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = -\frac{gt^2}{2} + 10 \end{cases}$$

В динамике механическое движение изучается в такой же связи с силами, т.е. с телами, физическими величинами, которые вызывают движение.

Основные понятия динамики.

При изучении динамики используют принципы классической механики, т.е. это механика Ньютона.

Пространство: трёхмерное, евклидово. Время абсолютно, пологая, что скорости много меньше скорости света.

Сила – количественная мера механического взаимодействия между телами.

Масса – физическая величина, зависящая от количества вещества в теле и являющаяся мерой инертности. Масса является скалярной, положительной, постоянной величиной данного тела.

Инертность тела – свойство изменять свою скорость, под действием сил, не скачкообразно, а постепенно и тем медленнее, чем больше количество вещества заключено в данном теле.

Материальной точкой будем называть математическое тело, размерами которого, в условиях данной задачи, можно пренебречь (для которого различия в скоростях и ускорениях для отдельной его части, при условии данной задачи можно пренебречь).

Аксиомы динамики.

1. Закон Галилея: Изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного, прямолинейного движения. $\vec{V} = const$

Изолированной называют материальную точку не подверженную каким-либо внешним воздействиям:

а) Эта аксиома устанавливает, что единственной причиной, изменяющей скорость точки - является сила.

б) Первая аксиома выделяет из всех систем отсчёта ту, в которой верен закон Галилея.

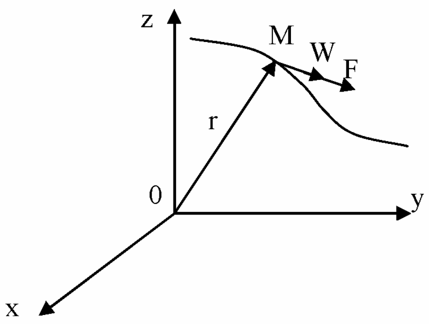
Система отсчёта, в которой изолированная точка сохраняет состояние покоя или равномерно-прямолинейного движения, называется ***инерциальной*** (Галилеевой) системой отсчёта. С высокой системной точностью является гелиоцентрическая система отсчёта.

В инженерной практике система отсчёта связана с Землёй (гелиоцентрическая система). За основную систему отсчёта принимают только инерциальную.

Абсолютным движением называется движение по отклонению к инерциальной системой отсчёта.

Относительное движение – это движение по отношению к инерциальной системе отсчёта.

2. Второй закон Ньютона (принцип ускорения сил). В инерциальной системе отсчёта, сила действующая на материальную точку, сообщает ей ускорение, направление которого совпадает с направлением действия силы и модуль которого прямо пропорционален модулю действия силы.



$$m\vec{w} = \vec{F} \quad -\text{Основное уравнение динамике}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

$$mw_1 = F_1 \qquad mw_2 = F_2$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

$$F = m_1 w_1 \qquad F = m_2 w_2$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Масса является мерой учения. Аксиома даёт способ измерения массы.

$$m\vec{w} = \vec{F}, F = p = mg, m = \frac{p}{g}$$

Аксиома 3. Закон о равенстве действия и противодействия.

Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по модулю и направленными по прямой, соединяющей эти точки с противоположными точками. $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| \qquad F_1 = -F_2$

Аксиома 1. Устанавливает, что не бывает одностороннего действия.

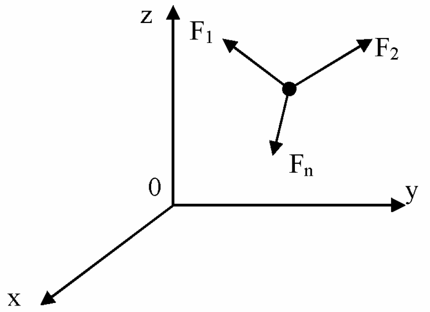
Аксиома 2. Устанавливает возможность дальнодействия (взаимодействие на расстояние)

В этой аксиоме рассматривается две точки, однако, с помощью этой аксиомы возможен переход к динамике материальной системы.

Аксиома 4 Закон независимости действия сил.

В инерциальной системе отсчёта, ускорение материальной точки при одновременном действии на неё нескольких сил равно геометрической сумме ускорений сообщающей каждой из этих сил по отдельности.

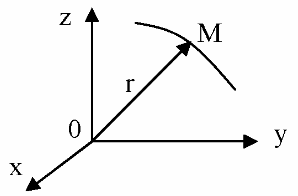
$W = W_1 + W_2 + \dots \dots + W_n, \qquad W_i = {F_i}/{m}$



Следствие 1. С помощью этого закона можно рассматривать точку, на которую действуют несколько сил.

Следствие 2. Совокупность нескольких сил одновременно приложенных к материальной точки эквивалентно одной силе равной их геометрической сумме и называемой ***равнодействующей.***

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.



$m\vec{w} = \vec{F}$ (1)

$m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ (2)

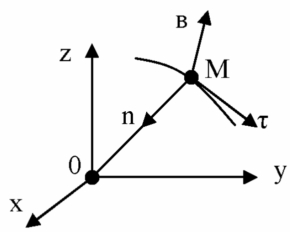
$\vec{w} = \dfrac{d^2r}{dt^2}; \vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dfrac{d\vec{r}}{dt})$

Уравнение (1), (2) являются дифференциальными уравнениями материальной точки в векторной форме. Спроектировав оба равенства (1) на оси координат:

$$mw_x = F_x; w_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad mw_y = F_y; w_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad mw_z = F_z; w_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z \end{aligned}\right\} (3) - \begin{array}{l} \textit{дифференциальное уравнение движения точки} \\ \textit{в координатной форме} \end{array}$$

Пусть траектория движения точки известна



$\vec{в} = \tau \times \vec{n}$

Если траектория точки известна, всегда можно построить естественные оси траектории.

$m\vec{w}_\tau = \vec{F}_\tau \qquad mw_n = F_n \qquad mw_b = F_b$

7

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau \\ & m\frac{v^2}{\rho} = F_n \\ & 0 = F_b \end{aligned}\right\} (4) -$$ *Дифференциальное уравнение движения материальной точки в естественных осях координат (в форме Эйлера)*

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = (\frac{dS}{dt})^2 \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$w_в = 0$$

Система единиц (СИ).

$$1м, 1с, 1кг \qquad 1H = 1кг \cdot 1\frac{м}{c^2} \qquad 1кг \approx 9{,}81H$$

Две основные задачи динамики точки.

Первая: Дано движения точки. Требуется определить силу F, вызывающую это движение. Приведём решение задачи в декартовой системе координат. В декартовых осях должны быть заданы следующие параметры в функции от времени t:

$x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$ $(*)$. Необходимо найти силы F, под действием которых происходит движение удовлетворяющее этим уравнениям. Задача решается при помощи дифференциальных уравнений.

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned}\right\} (1)$$. Из системы уравнений (1) находим проекции силы. Математически задача сводится к двух кратному дифференцированию функции (*)

$$\left.\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = m\ddot{x}(t) \\ F_y &= m\ddot{y} = m\ddot{y}(t) \\ F_z &= m\ddot{z} = m\ddot{z}(t) \end{aligned}\right\} (2).$$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ Направляющие косинусы по формулам: $$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{F}, \vec{i}) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(\vec{F}, \vec{j}) &= \frac{F_y}{F} \\ \cos(\vec{F}, \vec{k}) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned}\right\}.$$

Вторая: основная задача динамики точки.

Задача ставится обратно: дана сила F, требуется найти закон движения под действием заданной силы R.

Эта задача решается на основании дифференциальных уравнений (2). Математически решение задачи сводится к решению уравнения (1).

$$m\ddot{x} = F_x\,(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$
$$m\ddot{y} = F_y\,(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}).$$
$$m\ddot{z} = F_z\,(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$

Общее решение: $\left.\begin{aligned} x &= f_1\ (t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \\ y &= f_2\ (t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \\ z &= f_3\ (t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6) \end{aligned}\right\}(3).$

$c_1 \ldots c_6$ *– постоянные интегрирования*

В задачах, наряду с силами, задаются так называемые начальные условия, т.е. указывается начальное положение точки и начальная скорость.

$t = 0,\quad \vec{r} = \vec{r}\ (0),\qquad v = v\ (0)$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 & \dot{x} &= \dot{x}_0 \\ y &= y_0 & \dot{y} &= \dot{y}_0 \\ z &= z_0 & \dot{z} &= z_0 \end{aligned}\right\}(4)$$

Решение дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях (4) называется задача Каши. Как найти произвольные постоянные при помощи начальных условиях. Найдём производные от решения (3):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{f}_1\ (t, c_1, c_2 \ldots c_6) \\ \dot{y} &= \dot{f}_2\ (t, c_1, c_2 \ldots c_6) \\ \dot{z} &= \dot{f}_3\ (t, c_1, c_2 \ldots c_6) \end{aligned}\right\}(5).$$

Далее подставим начальные условия (4) в уравнение (3) и (5), тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f_1\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \\ y_0 &= f_2\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \\ z_0 &= f_3\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \end{aligned}\right\}(6)\left\{\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_1\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \\ \dot{y}_0 &= f_2\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \\ \dot{z}_0 &= f_1\ \ (0, c_1 \ldots c_6) \end{aligned}\right.$$

Решая последние уравнения, находим произвольные постоянные интегрирования:

$c_i = c_i\,(x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z});\ \ i = \overline{1{,}6}\quad (7).$

Подставляя постоянные (7) в общее решение (3) получим частное решение дифференциальных уравнений (1). При заданных начальных условиях (4). Это частное решение описывает конкретное движение точки.

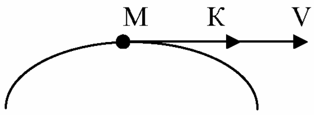
Общие уравнения динамики точки.

Многие задачи динамики эффективно решаются при помощи общих теорем динамики, которые получаются с применением второго закона Ньютона.

Теорема об изменении количества движения точки.

Теорема об изменении количества движения точки (K), называется векторная величина, равная произведению векторной скорости точки. $K = m * V$

$$\left.\begin{aligned} K_x &= mV_x \\ K_y &= mV_y \\ K_z &= mV_z \end{aligned}\right\}\quad K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$$



$$\left.\begin{aligned}\cos(\vec{K},\vec{i}) &= \frac{K_x}{K}\\ \cos(\vec{K},\vec{j}) &= \frac{K_y}{K}\\ \cos(\vec{K},\vec{k}) &= \frac{K_z}{K}\end{aligned}\right\}$$

$$[K] = кг\cdot\frac{м}{с} = \frac{Н\cdot с^2}{м}$$

Теорема (в дифференциальной форме)

Производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$

Доказательство:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \qquad d\frac{m\vec{V}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

Далее введём понятие: ***импульс силы.*** Импульс силы характеризует действие силы в течении определённого промежутка времени.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина dS, равная произведению силы F на элементарный промежуток времени dt: $dS = Fdt$. Импульс силы за промежуток времени t_1, вычисляется как векторная величина:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} F * dt \quad (2) \qquad \left.\begin{aligned}S_x &= \int_0^{t_1} F_x dt\\ S_y &= \int_0^{t_1} F_y dt\\ S_z &= \int_0^{t_1} F_z dt\end{aligned}\right\} \qquad S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}; \qquad \begin{aligned}\cos(\vec{S},\vec{i}) &= \frac{S_x}{S}\\ \cos(\vec{S},\vec{i}) &= \frac{S_y}{S}.\\ \cos(\vec{S},\vec{i}) &= \frac{S_z}{S}\end{aligned}$$

Замечание: если сила представляется суммой n – малое сил , то импульс сил определяется суммой S, то есть:

$$\sum S_i \qquad \begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\\ \vec{S} &= \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \ldots + \vec{S}_n\end{aligned} \qquad \left|\begin{aligned}S_x &= S_{1x}(\vec{F}_1) + \ldots + S_{nx}(\vec{F}_n)\\ S_y &= S_{1y}(\vec{F}_1) + \ldots + S_{ny}(\vec{F}_n)\\ S_z &= S_{1z}(\vec{F}_1) + \ldots + S_{nz}(\vec{F}_n)\end{aligned}\right..$$

$$[S] = Н\cdot с$$

Теорема в интегральной форме.

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени, равен импульсу силы, действующий на точку за тот же промежуток времени. $\vec{K} - \vec{K}_0 = \vec{S}$

Доказательство:

Запишем уравнение (1) умножая на dt: $d\vec{K} = \vec{F} * dt$

$$\int_{K_0}^{K} dK = \int_0^t Fdt \Rightarrow \vec{K} - \vec{K}_0 = S \quad (4) \text{ – теорема в конечном виде.}$$

В проекции на оси координат имеем:

$$\left.\begin{aligned}\vec{K}_x - K_{0x} = S_x\\ \vec{K}_y - K_{0y} = S_y\\ \vec{K}_z - K_{0z} = S_z\end{aligned}\right\} (5).$$

Следствие:

1. Если сила, действующая на точку равна нулю, то импульс S = 0 и если:

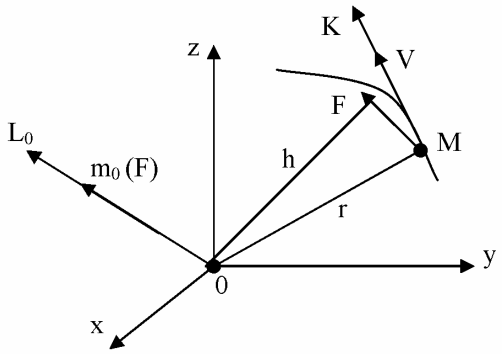
   $K = K_0;\quad \vec{V} = const = V_0$

   $F = 0 \Rightarrow S = 0$

   $V_x, V_y, V_z = const$

2. Если проекция силы $F_x = 0$, то и $V_x = const = V_{ox}$

Теорема об изменении момента количества энергии.



$m_0(F) = \vec{r} \times \vec{F}$

$m_0(F) \perp (\vec{r}, \vec{F})$

$m_0(F) = F \cdot h$

Иногда в качестве динамической характеристики точки в место количества движения (mV), рассматривают его момент относительно некоторого центра или оси, они определяются, так же как и момент силы.

Моментом количества движения точки относительно центра О, который обозначается $\vec{L}_0 = \vec{M}_0(\vec{K}) = M_0(m\vec{V})$ называется векторная величина $\vec{m}_0(m\vec{V})$ определения формулой: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{k} = \vec{r} \times m\vec{V}$ (1).

Аналогично можно ввести понятие момента K относительно оси, при этом момент количества движения точки относительно вычисляется так же, как момент относительно оси в статике, так же как и в статике имеется связь между моментами количества движения точки относительно точки и относительно оси.

Математическая запись:

$$\left.\begin{aligned}L_x = L_{0x}\\ L_y = L_{0y}\\ L_z = L_{0z}\end{aligned}\right\} \textit{где}\ \begin{aligned}&L_x, L_y, L_z - \textit{моменты сил относительно осей}\ X, Y, Z\\ &L_{0x}, L_{0y}, L_{0z} - \textit{проекции вектара}\ L_0\ \textit{на оси координат}\end{aligned}.$$

Приведём аналитические выражения для L_x, L_y, L_z. Исходя из того, что $L_0 = r \cdot m\vec{V}$. Запишем это векторное произведение в форме определителя третьего порядка:

$$L_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix}$$

$$L_{ox} = m(yV_z - zV_y) = L_x$$

$$L_{oy} = m(zV_x - xV_z) = L_y$$

$$L_{oz} = m(xV_y - yV_x) = L_z$$

$$[L] = H \cdot м \cdot c$$

Теорема

Производная по времени от момента количества движения точки относительно подвижного центра (оси) равно моменту силы, действующей на точку относительно этого центра (оси).

$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F})$ (2)

Доказательство:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{V})}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times mV\right)}_{=0} + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt}\right) = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0(F)$$

Проекция на оси координат, равенство (2) заменяется следующими тремя равенствами в координатной форме:

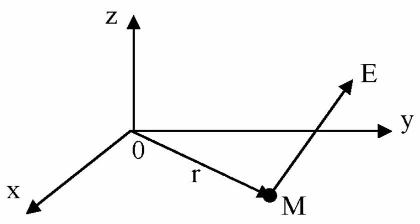
$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x(\vec{F}) \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y(\vec{F}) \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z(\vec{F}) \end{aligned}\right\}$$

Следствие:

1. Если момент силы относительно точки равен 0: $\begin{matrix} \vec{M}_0(\vec{F}) = 0; L_0 = const \\ L_x, L_y, L_z = const \end{matrix}$.
2. Если момент равнодействующей силы, приложенной к точке относительно x = 0, то момент количества движения, относительно оси x, тоже есть величина постоянная: $M_x(\vec{F}) = 0; \quad L_x = const$.

Потенциальное силовое поле.

Силовым полем называется область, в каждой точку которой, на помещённую в неё материальную точку действует сила однозначно определённая по величине и направлению в любой момент времени.



$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r})$

Силовое поле определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(t, x, y, z) \\ F_y &= F_y(t, x, y, z) \\ F_z &= F_z(t, x, y, z) \end{aligned}.$$

Силовое поле называется ***не стационарным***, если поле зависит явно от времени; и ***стационарным***, если не зависит от времени t явно.

Будем рассматривать только стационарные силовые поля.

$F_x = F_x(x, y, z)$

$F_y = F_y(x, y, z)$

$F_z = F_z(x, y, z)$

Стационарное силовое поле называется ***потенциальным***, когда существует однозначная скалярная функция $U = U(x, y, z)$, зависящая только от координат точки и такая, что проекция силы на декартовые оси координат равны соответствующим частным производным этой функции U:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; F_z = \frac{\partial U}{\partial z}; \ (*)$$

$$U = U(x, y, z) - \text{силовые функции поля.}$$

Свойства потенциального поля.

1. Находим dA – элементарную работу силы потенциального силового поля.
$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x}dz = dU.$$
$dA = dU(x, y, z)$ - элементарная работа силы потенциального силового поля равного полному дифференциалу силовой функции зависящую от координат.
2. Полная работа силы потенциального силового поля для некоторого перемещения.
$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = \int_{U_1}^{U_2} dU(x, y, z) = U_2 - U_1 = U_2(x, y, z) - U_1(x, y, z).$$
$$A = U_2 - U_1 \ (1)$$
где U_2 и U_1 – значения силового поля в конечной и начальной точке.
Работа силы потенциального силового поля не зависит не от закона движения точки, не от формы траектории точки, а определяется только начальным и конечным положением точки, т.е. значениями силового поля в этих положениях.
3. Работа силы на замкнутой траектории равна 0.

Потенциальная энергия материальной точки.

1. ***Потенциальной энергией точки*** называется скалярная функция, равная значению функции взятой с обратным знаком.

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$$

$$dA = -d\Pi, \Pi = -\int dA + c$$

$$A = U_2 - U_1 = \Pi_1 - \Pi_2$$

$$\Pi_1 \text{ и } \Pi_2 - \text{начальное и конечное значение потенциальной энергии}$$

Предположим, что между двумя точками происходит перемещение из M (xyz) в M*(0). U = П = 0

Найдём работу силы на этом перемещении.

$$A(M, M^*) = \Pi(x, y, z) - \underbrace{\Pi(M^*)}_{=0} = \Pi(x, y, z).$$

$$U = \Pi = 0$$

Потенциальная энергия равна работе, которую может совершить сила поля при перемещении из данного положения в нулевую точку.

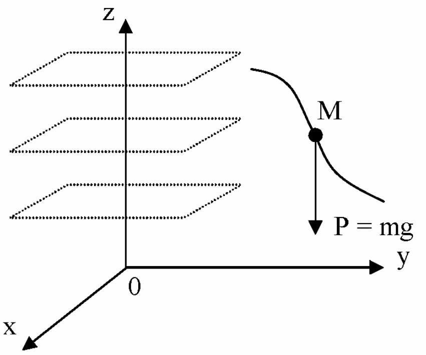
Некоторые геометрические свойства потенциального силового поля.

Геометрическое место точек, в которых силовая функция (потенциальная энергия) имеет одно и тоже постоянное значение, называют ***эквипотенциальной поверхностью*** или ***поверхностью уровня*** .

Обозначение $U(x, y, z) = c = const$

При разных значениях постоянных получаем разные поверхности уровня, когда с = 0, то это соответствует нулевой поверхности уровня, при этом через каждую точку поля можно провести только одну поверхность уровня, так как силовая функция однозначна.

Примеры потенциальных силовых полей.



1. U = П =0

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -mg \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

$$0 = 0 \qquad 0 = 0 \qquad 0 = 0$$

Это поле силы тяжести является потенциальным.

$dA = mgdz; \ U = -mg\int dz + c$

$U = -mgz + c \quad c = 0 \quad \Rightarrow \ U = -mgz \quad П = mgz$

Чем выше уровень, тем больше потенциальная энергия точки

2. Поле силы упругости, также являются потенциальным.

Закон сохранения полной механической энергии.

Полной механической энергией материальной точки называется сумма её кинетической Е, и потенциальной энергии П, а полной Е = Т + П

При движении материальной точки в потенциальном силовом поле её полная энергия сохраняется постоянно. Предположим, что механические силы, действующие на материальную точку потенциальны, тогда элементарная работа равна dU или –dП.

$dA = dU = -dП$

$dT = dA = -dП$

$d(T + П) = 0 \Rightarrow T + П = const$

$E = T + П = const$

$E = const = h - постоянная\ энергия$

Основные уравнения динамики.

Две основные задачи динамики для несвободной точки.

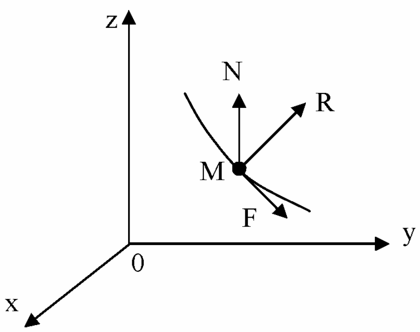
При исследовании движения не свободной точки, как и в статике, исследуют с помощью принципа освобождаемости от связей, то есть действие связей заменяют соответственно реакциями F – равнодействующих, всех активных сил приложенных к точке; R – равнодействующая всех реакций.

Основное уравнение динамики для несвободной точки $ma = F + R$ (1)

Задача динамики для не свободной точки.

1. Дано движение точки, требуется найти активные силы, обеспечивающие эти движения и реакции связей.
2. Даны активные силы. Нужно найти уравнение движения точки и реакции связей.

Движение точки по неподвижной поверхности.



Дана: активная сила F, под действием которой точка движется по поверхности $f\ (x,y,z)=0\ \ (2)$.

Найти: уравнение движения точки, то есть $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ и $R=?$

Решение: запишем уравнение (1) в проекции на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_x \\ m\ddot{y} &= F_y + R_y \\ m\ddot{z} &= F_z + R_z \end{aligned}\right\}\ (3).$$

Уравнение (2) и система (3) решаются совместно. Неизвестные x, y, z, а также R_x, R_y, R_z (шесть неизвестных). А уравнений четыре. Для решения задачи нужны ещё два уравнения. Эти уравнения составляются из физических соображений.

<u>Первый частный случай:</u>

Допустим, что поверхность гладкая (трения нет).

$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{N}\right|$$

Введём в рассмотрение градиент поверхности:

$$grad\ f = \frac{\partial f}{dx}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad grad \parallel \vec{N}$$

Условие параллельности:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda; \qquad \frac{R}{\Delta f} = \lambda$$

$\lambda -$ *множитель Лагранжа.*

$$R_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x};\ R_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y};\ R_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\ \ (4)$$

В уравнение (3) подставим (4).

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right\}\ (5)\ \textit{форма Эйлера}$$

Решая совместно уравнения (5) и (2), находят x, y, z, λ. После нахождения λ находятся R_x, R_y, R_z.

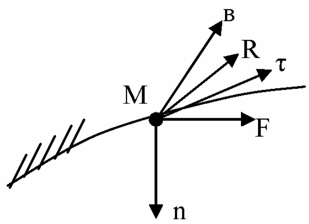
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

<u>Второй частный случай:</u>

Движение точки по неподвижной кривой.

Дано: F – уравнение кривой.

Найти: уравнение движения точки и реакцию R.



В этом случае удобно найти уравнение (1), записать в проекциях на естественные оси.

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau + R_\tau \\ & \frac{m}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = F_n + R_n \\ & 0 = F_b + R_b \end{aligned}\right\}$$

Неизвестные: S, R_τ, R_n, R_b - четыре неизвестных.

1). ***Частный случай:*** пусть кривая гладкая, тогда

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau \\ & \frac{m}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = F_n + R_n \\ & 0 = F_b + N_b \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} & \left|\vec{R}_n\right| = \left|\vec{N}\right| \\ & S = S(t) \\ & \textit{три неизвестных}: \quad S, R_n, R_b \end{aligned}$$

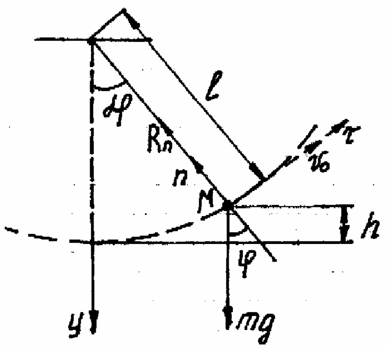
2). ***Частный случай:*** пусть кривая не гладкая, имеется сухое трение.

$$F_{mp} = f\,N\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau - f\,N\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad V_\tau = \frac{dS}{t}$$

$$\left.\begin{aligned} & \int m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau - f\,N\frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \\ & \frac{m}{\rho}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = F_n + R_n \\ & 0 = F_b + R_s \end{aligned}\right\}$$

Плоский математический маятник.

Плоским математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нити, и которая движется под действием силы тяжести в вертикальной плоскости.



$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{st} &= -mg\sin\varphi \\ m\frac{V^2}{\rho} &= R_n - mg\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$V = l\dot{\varphi}$$

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi \quad (1)$$

$$R_n = \frac{mV^2}{\rho} + mg\cos\varphi \quad (2)$$

Предположим, что углы маятника малы $\varphi \approx \sin\varphi,\ \varphi \le 10-15$

$$k^2 = -\frac{g}{l}$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

$$\varphi = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 e^{\lambda t} = 0 \qquad \lambda^2 + k^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm ki$$

$$\varphi = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt$$

$$t = 0, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad V_0 = 0$$

$$c_1 = A\cos\alpha$$

$$c_2 = A\sin\alpha$$

$$\varphi = A\sin(kt + \alpha)$$

Маятник совершает малые колебания по гармоническому закону.
Из формулы (2) реакция R_n известна.

$$R_n = \frac{mV^2}{l} + mg\cos\varphi \quad (2')$$

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A(P) + A(R) = mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$mV^2 = mV_0^2 + 2mgl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

$$R_n = \frac{mV_0^2}{l} + 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0$$

Реакция нити зависит только от V_0 и начального отклонения маятника φ_0.

Принцип Даламбера для материальной точки.

Рассмотрим движение для несвободной точки и запишем для неё второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0$$

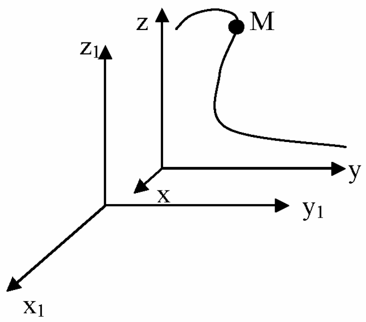
$$\vec{Q}_и = -m\vec{a} \ - \ \textit{сила инерции Даламбера}$$

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{Q}_и = 0 \quad (1) - \textit{принцип Даламбера}$$

Для материальной точки, векторная сумма активной силы F, реакций связи R и силы инерции Даламбера $Q_и$ в каждый момент времени равно нулю.

Замечание: значение принципа Даламбера в том, что уравнение динамики можно представить в виде уравнения статики.

Динамика относительного движения материальной точки.



Рассмотрим сложное движение материальной точки, т.е. движение относительно двух систем отсчёта.

Оси координат $O_1X_1Y_1Z_1$ будут считаться инерциальными, назовём их ***неподвижными.*** А систему $OXYZ$ - ***неинерциальными или подвижными.***

Движение относительно подвижных осей называется ***относительным***. Условие (1) выполняется только в инерциальной системе отсчёта. А в неинерциальной системе отсчёта не выполняется. В связи с этим возникает задача, требующая найти уравнение аналогичное (1), которое позволит изучать динамику точки в неподвижных осях. Исходя из теоремы Кориолиса: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t + \vec{a}_c$, можно перейти к виду уравнения движения: $m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{Q}_u^e + \vec{Q}_u^k$ (2).

$\vec{Q}_u^e = -m\vec{a}_e$ (*переносная сила инерции*)

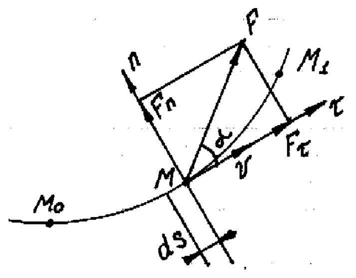
$\vec{Q}_u^k = -m\vec{a}_k$ (*сила инерции Кориолиса*)

Все уравнения, полученные в инерциальной системе отсчёта можно применить и для изучения динамики относительного движения, если к точке прибавить две силы инерции Кориолиса и переносную.

В проекцию на ось X: $m\ddot{x} = F_x + Q_{ux}^e + Q_{ux}^k$.

Работа силы. Мощность.

Для характеристики действия оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы. Элементарной работой силы F приложенной в точке M, называется величина:



$dA = F_\tau dS$ (3)

где F_τ – проекция силы F на касательную M_τ.

dS – модуль перемещения точки M

Работа есть мера действия силы, которая приводит к изменению модуля скорости точки. Если разложить силу F на составляющие F_τ и F_n, то изменять модуль скорости будет F_τ.

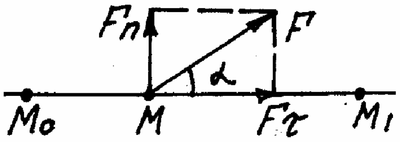
$F_\tau = F\cos\alpha$; α – *угол между* F *и* F_τ.

Из (3) получим выражение для dA: $dA = FdS\cos\alpha$ (4).

Ели угол α острый, то работа положительна; если угол α тупой, то работа отрицательная. Если $\alpha = 90^\circ$, то F направлена перпендикулярно перемещению. Знак работы имеет следующий смысл:

А>0, тогда составляющая F_τ направлена в сторону движения => сила замедляет движение.

Учитывая что $dS = |d\vec{r}|$ ($d\vec{r}$-вектор элементарного перемещения точки) и воспользовавшись понятием о скалярном сложении двух векторов, то выражение (4) можно представить в виде: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (5). Следовательно, элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на вектор элементарного перемещения точки её приложения. Если (5) взять проекции векторов $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на координатные оси с учётом: $r_x = x, r_y = y, r_z = z$, то получим: $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ (6) (где x, y, z – координаты точки приложения силы). Рассмотрим работу силы на конечном перемещении.



В этом случае работа вычисляется как придел интегральной суммы соответствующих элементарных работ:

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}_\tau dS \quad (7)$$

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) dS \quad (7')$$

Видим, что работы силы на любом перемещении равна, взятому вдоль этого перемещения интеграл от элементарной работы. Если $\vec{F}_\tau = const$, то из выражения (7) получим: $\vec{F}_\tau = const; A_{M_0M_1} = F_\tau \cdot S_1$ (8) (где S1 – перемещение M_0M_1).

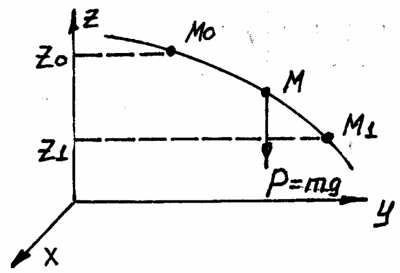
В частности, такой случай имеет место когда действующая сила постоянная по модулю ($F = const$), а точка движется прямолинейно (см. рисунок), в этом случае $F_\tau = F \cdot \cos\alpha = const$ и тогда работа будет равна: $A_{M_0M_1} = F \cdot S_1 \cdot \cos\alpha$ (8'). Размерность работы в СИ: 1 Дж=1Н·1м.

Мощность.

Мощностью называется величина, определяющая работу в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность равна: $N = \frac{A}{t_1} = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau V$ (9) (где t_1 – время в течении которого произведена работа А. Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость. Единицей измерения мощности в СИ, является Вт: 1 Вт = 1 Дж/1 с. В технике, за единицу мощности принимают 1 л.с.: 1 л.с.=736 Вт. Работу, произведённую машиной, можно измерять произведением её мощности на время: $1 кВт \cdot ч = 3{,}6 \cdot 10^6$ Дж. Из формулы: $N = F_\tau \cdot V$, видно, что у двигателя имеющую определённую мощность N, сила тяги F_τ будет тем больше, чем меньше V. Аналог: при подъёме автомобиля в гору, обычно включают низшую скорость, позволяющая при полной мощности двигателя с меньшей скоростью развивать при этом большую силу тяги.

Работа силы тяжести.

Пусть точка М, на которую действует сила тяжести Р, перемещается из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем ось OZ вертикально вверх.



$$P_x = 0, P_y = 0, P_z = -P = -mg$$

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz$$

А на любом перемещении M_0M_1 работа будет равна:

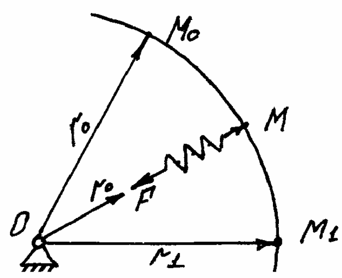
$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = -mg\int_{Z_0}^{Z_1} dz = -mg(Z_1 - Z_0)$$

$$|Z_1 - Z_0| = h$$

$$A = \pm mgh$$

Видно, что если $Z_0 > Z_1$, то точка опускается вниз и работа А положительна (А>0). Если точка поднимается вверх, то $Z_1 > Z_0$ и в этом случае работа отрицательна (А<0). Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а зависит от начального и конечного положения точки.

Работа силы упругости.



Точка М совершает движение на конце пружины соединённой с точкой О. По закону Гука: $F = C \cdot \Delta$(где С – коэффициент жёсткости пружины, а $\Delta = |r - l_0|$ - деформация пружины, или величина определяющая удлинение или укорочение пружины, r – радиус-вектор проведённый из точки О или длина деформирования пружины, r_0 – длина недеформируемой пружины). Если проекцию силы F на радиус вектор r, то она будет равна: $F_r = -C(r - l_0)$. Если $r > l_0$, то пружина растянута и сила F направлена противоположно радиус-вектору r, тогда $F_r < 0$.

Проведём $\vec{r}^{\,0}$ - единичный радиус-вектор по направлению r: $r^0 = \frac{\vec{r}}{r}$. Тогда силу F можно записать:

$$\vec{F} = F_r \cdot \vec{r}^{\,0} = -C(r - l_0) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$dA = F \cdot d\vec{r} = -C(r - l_0)\vec{r} d\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{r}^{\,2} = \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2; 2\vec{r}d\vec{r} = 2rdr$$

$$dA = -C(r - l_0)dr$$

Для того, чтобы найти полную работу пружины на перемещение M_0M_1 возьмём интеграл от элементарной работы:

$$A = -C\int_{r_0}^{r_1}(r - l_0)dr = -\frac{C}{2}\left[(r_1 - l_0)^2 - (r_0 - l_0)^2\right]$$

$\lambda_1 = |r_1 - l_0|; \lambda_0 = |r_0 - l_0|$ *где* λ_1 *– конечная деформация пружины*

$A = -\frac{C}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_0^2)$ λ_0 *– начальная деформация пружины*

Видим, что работа силы упругости пружины также не зависит от вида траектории, а зависит только начального и конечного состояния пружины.

Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Кинетической энергией точки, называется скалярная величина: $T = \frac{mV^2}{2}; [T] = 1\,Дж$.

Теорема в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии материальной точки равен работе равнодействующих сил, приложенных к точке: $dT = \Delta A$ (1)

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$

$\vec{F}$ – *равнодействующая сил приложенных к точке*

Умножим обе части равенства на dr:

$$md\vec{V}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}d\vec{r}$$

$$md\vec{V}\cdot V = \vec{F}d\vec{r}; md\vec{V}\cdot\vec{V} = \Delta A$$

Учитывая, что m = const:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \Delta A$$

$$dT = \Delta A$$

Теорема в интегральной форме: изменение кинетической энергии точки равно работе, совершённой равнодействующих сил приложенных к точке:.

T – кинетическая энергия конечного положения точки.

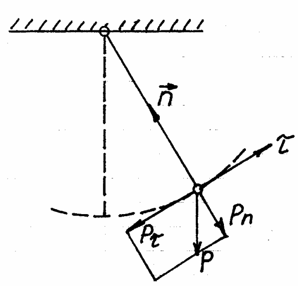
T_0 – кинетическая энергия начального положения точки.

А – работа, совершённая точкой при перемещении из начального положения в конечное.

Доказательство: Пусть точка переместится из точки M_0 в точку M_1, по какой то траектории. Равенство (1) проинтегрируем на перемещении M_0M: $\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{M_0}^{M} \Delta A$. В этом уравнение интеграл в правой части – это работа, совершённая силой F на перемещении M_0M, а полный интеграл из дифференциала кинетической энергии равен изменению кинетической энергии, значит: $T - T_0 = A$.

Прямолинейное колебание материальной точки.

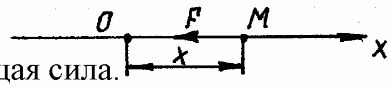
Колебания являются одним из распространённых видов движения. Колебания возникают при наличии так называемой восстанавливающей силы (это обязательное условие). Т.е. сила, которая стремится вернуть точку в положение равновесия. В роли восстанавливающей силы могут выступать силы различной физической природы, например силы упругости, составляющей силы тяжести, электромагнитные.



В зависимости от действующих сил, различают следующие виды колебания:

1) свободные или собственные
2) свободно затухающие колебания
3) вынужденные колебания.

Свободные колебания.



Рассмотрим прямолинейное движение точки.
Точка O в положении равновесия, F – восстанавливающая сила.
Рассмотрим простой, но часто встречающийся случай, когда сила F пропорциональна отклонению от положения равновесия. Пусть x – отклонение от положения равновесия: $F = c\cdot|x|$, где c – постоянная пропорциональности. В случае пружины, эта постоянная называется ***коэффициентом упругости.***

$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = -cx$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

$$k^2 = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) – ***дифференциальное уравнение свободных колебаний.***

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm k\,i, \qquad i = \sqrt{-1}$$

При мнимых корнях, характеристическое решение уравнения (1): $x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные.
Введём новые постоянные:

$$c_1 = A\sin\alpha, c_2 = A\cos\alpha$$

$$x = A\sin(kt+\alpha) \quad (2)$$

$$(1)\, t = 0, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

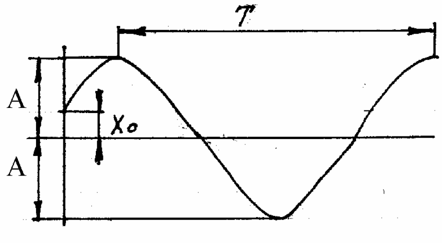
$$\dot{x} = Ak\cos(kt+\alpha)$$

$$Из\,(2)\,при\, t = 0 \quad x_0 = A\sin\alpha$$

$$Из\,(3)\,при\, t = 0 \quad x_0 = Ak\cos\alpha$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0}{k^2}}$$

A – амплитуда колебаний; $(kt+\alpha)$ - фаза колебаний; α - начальная фаза колебаний; k - круговая частота (определяет число колебаний за 2π секунд).
Таким образом, под действием одной только восстанавливающей силы, точка совершает гармонические колебания по синусоиде.



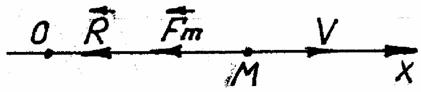
Колебания являются периодическими, т.е. $x(t) = x(t+T)$. Периодом T колебаний, называется время между двумя амплитудами колебаний (движение точки полностью повторяется).

$$k(t+T) + \alpha - (kt+\alpha) = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Круговая частота k и период колебаний T, от начальных условий не зависят, а определяются только параметрами системы, поэтому частота свободных колебаний называется ***собственной частотой.*** От начальных условий зависит амплитуда A.

Свободно затухающие колебания.



F – восстанавливающаяся сила.
R – сила сопротивления среды.
$\vec{R} = -\mu \vec{V}$, где μ - константа, характеризующая сопротивление среды.

$R_x = -\mu \cdot \dot{x}$

$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$

$k^2 = \dfrac{c}{m}; 2n = \dfrac{\mu}{m}$

$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$ (4)

Уравнение (4) – дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

Вид движения точки зависит от соотношения между параметрами n и k. Возможны несколько случаев:

1) $n < k$

$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i;\ k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$

В этом случае корни комплексные и решение уравнения (4) запишется в виде:

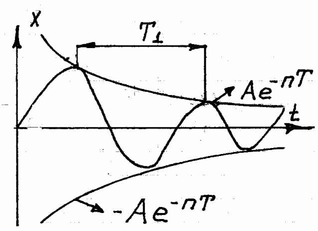
$x = e^{-nt}(c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_1 t)$

$c_1 = A\sin\alpha, \quad c_2 = A\cos\alpha$

$x = Ae^{-kt}\sin(k_1 + \alpha)$ (5)

Вывод:

1. Движение является гармоническим;
2. Колебания затухающие, т.к. при $t \to \infty,\ x \to 0$
3. Колебания не являются периодическими $x(t) \neq x(t+T)$



Под периодом t_1 затухающих колебаний условно будем называть промежуток времени между последующими максимальными отклонениями в одну и ту же сторону.

$[k_1 t + T_1) + \alpha] - (k_1 t + \alpha) = 2\pi$

$T_1 = \dfrac{2\pi}{k_1} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}};\ T_1 > T$

Если n мало, то $T_1 \approx T$, однако при n большом, амплитуда колебания T_1 уменьшается в несколько раз и характеризуется декрементом ψ.

$\psi = e^{-nT}$

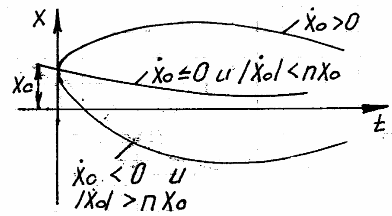
$|\ln\psi| = nT_1 - \textit{логарифмический декремент}$

2) $n \geq k$

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$

Корни действительные.

$x = e^{-nt}\left(c_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right)$



Вывод:

1. Движение будет не колебательное;
2. Движение затухает, т.к. при $t \to \infty, x \to 0$.

3) $n = k$

$\lambda_{1,2} = -n$

$x = e^{-nt}(c_1 + c_2 t)$

C_1, C_2 *– постоянные интегрирования*

Вывод:

1. Движение не колебательное
2. Движение затухающее

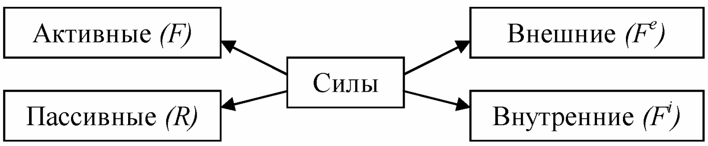
Снова получается апериодическое движение.

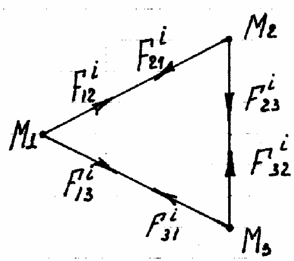
Динамика системы материальных точек.

Системой материальных точек или механической системы, называют систему взаимных между собой материальных точек. Твёрдое тело в механике рассматривается как совокупность материальных точек. Различают ***свободные*** и ***несвободные*** системы. ***Свободной,*** называется система точек, которые могут получить произвольное перемещение и скорости, в противном случае ***несвободная*** система.

Силы, действующие на систему.

С одной стороны силы, действующие на систему, различаются на ***активные и пассивные***, другой стороны – ***внешние и внутренние.***



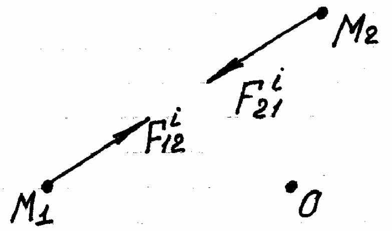


1) Геометрическая сумма внутренних сил равна нулю. Рассмотрим систему, состоящую их трёх точек. Согласно закону действия и противодействия, каждой внутренней силе соответствует сила, равная по величине, но противоположная по направлению.

$\sum F_s^i = 0$

$F^i = \sum \vec{F}_s^i$

2) Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил системы относительно любой точек нулю.



$$m_0(F^i_{12}) + m_0(F^i_{21}) = 0, т.к. F^i_{12} = -F^i_{21}$$

$$m_0(F^i_{12}) = m_0(F^i_{21})$$

Замечание: несмотря на выполнение свойств (1) и (2) внутренние силы не являются уравновешенной системой сил, так как ***уравновешенная система сил*** – это такая система под действием которой, каждая точки которой находится в равновесии. Равновесие точек системы нет. Внутренние силы будут уравновешены только в случае твёрдого тела, т.к. в этом случае взаимное перемещение исключено.

Дифференциальное уравнение движения системы.

Пусть имеется система, состоящая из n – точек.

$$m\vec{a}_S = \vec{F}^e_S + \vec{F}^i_S, S = 1, n$$

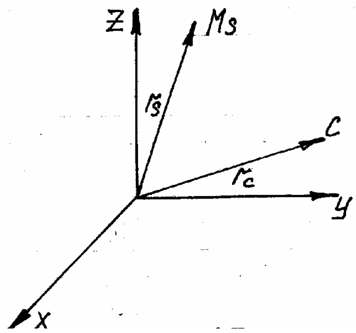
В проекциях на декартовые оси:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_S = F^e_{Sx} + F^i_{Sx} \\ m\ddot{y}_S = F^e_{Sy} + F^i_{Sy} \\ m\ddot{z}_S = F^e_{Sz} + F^i_{Sz} \end{cases}$$

Казалось бы, динамику любой системы можно получить, опираясь на эти уравнения. Однако такой подход применяется редко. Это связано, во-первых, с тем, что для большого количества точек порядок системы получается большим, во-вторых, эта система почти всегда оказывается незамкнутой. Поэтому что здесь реакции связи и внутренние силы также не известны. В большинстве задач установка движения каждой точки не требуется. Бывает достаточно найти законы изменения суммарных характеристик. Суммарными характеристиками меры механического движения является: 1) количество движения системы, 2) момент количества движения, 3) кинетическая энергия системы. Две первые меры являются ***векторными***, а последняя – ***скалярной***.

Центр масс системы.

Движение системы зависит не только от действия сил, но и от распределения масс системы. Первой характеристикой распределения масс является ***центр масс***. ***Центром масс*** системы называется геометрическая точка, радиус-вектор r_C которой, определяется формулой:



$$r_C = \frac{\sum m_S r_S}{2m_S}; \quad \begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_S x_S}{\sum m_S} \\ y_C = \dfrac{\sum m_S y_S}{\sum m_S} \\ z_C = \dfrac{\sum m_S z_S}{\sum m_S} \end{cases}$$

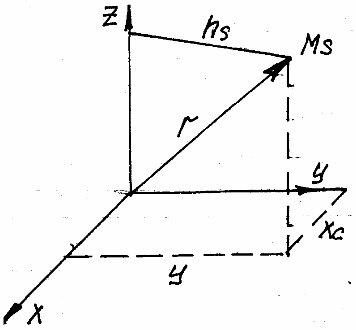
Моменты инерции системы.

Центр масс не полностью характеризует распределение масс. Вводятся моменты инерции системы как дополнительные характеристики распределения масс:

1. Осевой момент инерции (ОМИ)
2. Центробежный момент инерции (ЦМИ)

Рассмотрим осевой момент инерции.

Момент инерции точки M_S относительно оси Z называется величина $I_Z = m_S h_S^2$, где h_S - кратчайшее расстояние от точки до оси. Для всей системы:



$$I_Z = \sum_{1}^{n} m_S h_S^2 \quad (1)$$

$$h_S^2 = x_S^2 + y_S^2$$

$$\left.\begin{aligned} I_Z &= \sum m_S (x_S^2 + y_S^2) \\ I_Y &= \sum m_S (x_S^2 + z_S^2) \\ I_X &= \sum m_S (y_S^2 + z_S^2) \end{aligned}\right\} (2)$$

В случае сплошной среды, в частности твёрдого тела, суммы в формулах (1)приводит в интегралы:

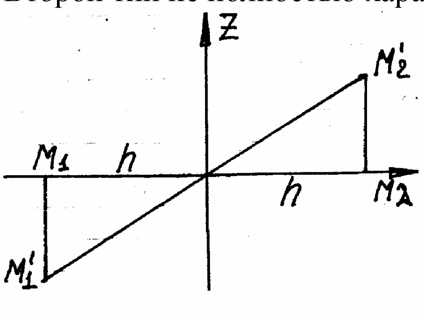
$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \quad (1')$$

$$\left.\begin{aligned} I_Z &= \int_{(V)} (x_S^2 + y_S^2) \\ I_Y &= \int_{(V)} (x_S^2 + z_S^2) \\ I_X &= \int_{(V)} (y_S^2 + z_S^2) \end{aligned}\right\} (2')$$

$$[I] = [кг \cdot м^2]$$

Центробежные моменты инерции.

Второй тип не полностью характеризует распределение масс.



Для учёта асимметрии, вводится понятие центробежный момент инерции. Центробежный момент инерции определяется по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I_{XY} &= \sum m_S x_S y_S \\ I_{XY} &= \sum m_S z_S y_S \\ I_{XY} &= \sum m_S x_S y_S \end{aligned}\right\} (3)$$

Центробежный момент инерции зависит не только от направления осей координат, но и от выбора начала осей координат.

Если центробежный момент инерции, содержащей в своих индексах наименование некоторой оси, например z=0, то эта ось называется ***главной осью инерции***.

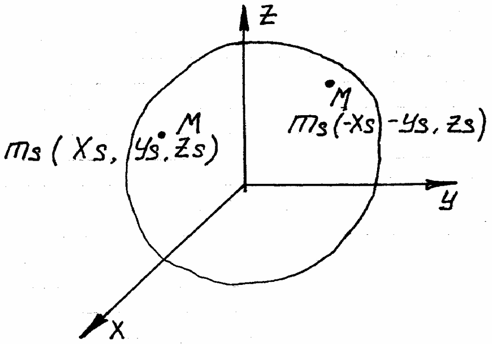
$I_{YZ} = I_{ZX} = 0$

Если же все три центробежных момента инерции равны нулю, т.е. $I_{XY} = I_{YZ} = I_{ZX} = 0$, то все три оси xyz являются ***главными осями инерции*** для точки О. Момент инерции системы относительно главной оси инерции, называется ***главным моментом инерции***.

Если главная ось инерции проходит через центр масс, то она называется ***центральной осью инерции***. Каждой точке тела можно построить три взаимно перпендикулярные направления, которые будут ***главными моментами инерции***.

Приведём два случая, когда положение главной оси инерции легко находится:

1. Если система или тело имеют плоскость (материальной) симметрии, то любая прямая перпендикулярная этой плоскости является главной осью инерции относительно точки пересечения этой прямой с плоскостью.
2. Если тело имеет ось (материальной) симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.



Из-за симметрии, в каждой точке тела с массой m_S, с координатами (x_S, y_S, z_S) соответствует такая же точка с координатами $(-x_S, -y_S, z_S)$.

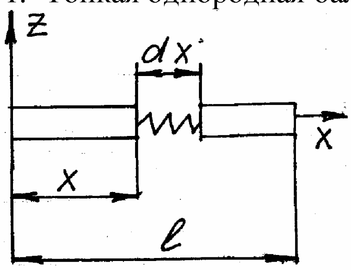
$$I_{XZ} = \sum_{S=1}^{n/2} m_S x_S z_S + \sum_{S=1}^{n/2} m_S(-x_S)z_S = 0$$

$$I_{YZ} = 0$$

Центр масс лежит в этом случае на оси Z, поэтому Z является главной центральной осью инерции.

Пример:

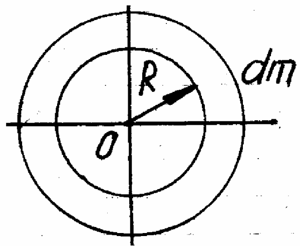
1. Тонкая однородная балка:



$$dm = \rho dx; \rho = \frac{M}{C}; \rho - масса\,единицы\,длины$$

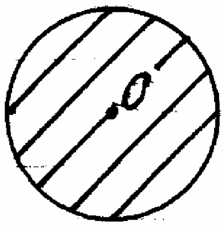
$$I_Z = \int_0^e x^2 dm = \rho \int_0^e x^2 dx = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_0^e = \frac{\rho e^3}{3} = \frac{Me^2}{3}$$

2. Тонкое однородное кольцо:



$$I_0 = \int R^2 dm = R^2 \int_{(V)} dm = MR^2$$

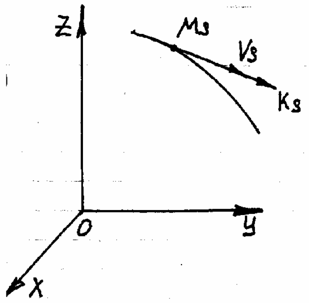
3. Круглая тонкая однородная пластина:



$$I_0 = \frac{MR^2}{2}$$

Основные теоремы динамики.

(Теорема об изменении количества движения системы) Движение системы рассмотрим относительно инерциальной системы отсчёта. Количество движения системы:



$$\vec{K}_S = m_S \vec{V}_S$$

$$K = \sum_1^n m_S V_S \quad (1)$$

$$\vec{K} = \int \vec{V} dm \, (\textit{для твёрдого тела})$$

Приведём другую формулу для количества движения, она будет иметь вид:

$$r_C = \frac{\sum m_S \vec{r}_S}{\sum m_S}$$

$$Mr_C = \sum m_S \vec{r}_S$$

$$mV_C = \sum m_S \vec{V}_C$$

Сравнивая последнюю формулу с (1), получаем:

$$K = MV_C \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} K_X &= MV_{CX} = \sum m_S V_{SX} \\ K_Y &= MV_{CY} = \sum m_S V_{SY} \\ K_Z &= MV_{CZ} = \sum m_S V_{SZ} \end{aligned}\right\}$$

(Теорема в дифференциальной форме) Первая производная по времени от количества движения системы, равна главному вектору, действующему на систему относительно них.

Доказательство:

$$\frac{dm_S \vec{V}_S}{dt} = \vec{F}_S^e + \vec{F}_S^i, S = 1, n$$

F_S^e *и* F_S^i - равнодействующих внешних внутренних сил действующих на точку M_S.

$$\sum_1^n \frac{dm_S \vec{V}_S}{dt} = \sum_1^n \vec{F}_S^e + \sum_1^n \vec{F}_S^i$$

$$\sum \vec{F}_S^e = \vec{F}^e$$
$$\sum F_S^i = 0$$
$$\sum \frac{dm_S\vec{V}_S}{dt} = \vec{F}^e$$
$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}^e \text{ (3)}$$

(3)- математическое выражении теоремы в дифференциальной форме.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_X}{dt} = F_X^e \\ \frac{dK_Y}{dt} = F_Y^e \\ \frac{dK_Z}{dt} = F_Z^e \end{aligned}\right\}$$

(Теорема в интегральной форме) Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени, равен геометрической сумме импульсов внешних сил на этом же промежутке времени.

<u>Доказательство:</u> Запишем теорему для отдельной точки движения:

$$m_S\vec{V}_S - m_S\vec{V}_{S0} = \int_0^t F_S^e dt + \int_0^t F_S^i dt$$
$$\sum_1^n m_S\vec{V}_S - \sum_1^n m_S\vec{V}_{S0} = \sum_1^n \int_0^t F_S^e dt + \sum_1^n \int_0^t F_S^i dt$$
$$\sum_1^n \int_0^t F_S^i = 0$$

$$\left.\begin{aligned} K - K_0 = \sum \int_0^t F_S^e dt \\ K_X - K_{0X} = \sum \int_0^t F_{SX}^e dt \\ K_Z - K_{0Z} = \sum \int_0^t F_{SZ}^e dt \end{aligned}\right\}$$

Следствие:

1. Внутренние силы не влияют на количество движения системы.
2. Если $F^i = 0$, то $\vec{K} = const$
3. Если $F_X^e = 0$, то $\vec{K}_X = const$

Теорема о движении центра масс.

Если выражение (2) поместить в (3), с учётом того что $M = const$, получим:

$$M\frac{dV_C}{dt} = F^e \qquad (4)$$
$$Ma_C = \vec{F}^e \qquad (4')$$

(4') – выражает теорему о движении центра масс системы: центр масс системы движется как материальная точка, на которую действуют все силы системы.

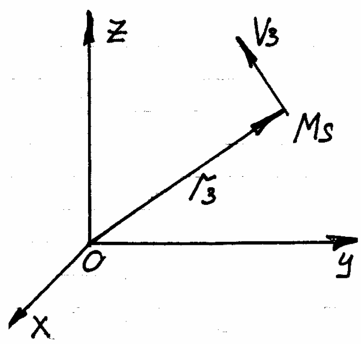
$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= F_x^e \\ M\ddot{y}_C &= F_y^e \\ M\ddot{z}_C &= F_z^e \end{aligned}\right\} (5)$$

Выводы:

1. Внутренние силы не оказывают влияния на движение центра масс системы.
2. Если $F^e = 0$, движение центра масс системы происходит с постоянной скоростью.
3. $F_X^e = 0$, то движение центра масс системы в проекции на ось X происходит с постоянной скоростью.

Теорема об изменении момента количества движения системы (кинетического момента).

Момент количества движения M_S относительно начала координат точки O, запишется:



$\vec{L}_{S0} = \vec{r}_S \times m_S \vec{V}_S$.

Для твёрдого тела: $L_0 = \int\limits_{(V)} \vec{r} \times \vec{V} dm$.

Также моментом количества движения системы относительно любой оси равняется сумме моментов количеств движения точек системы, относительно той же оси.

Первая производная по времени от момента количества системы относительно неподвижной точки, равна моменту всех действующих на систему внешних сил относительно той же точки.

Напишем теорему для отдельной точки: $\dfrac{d\vec{L}_{S0}}{dt} = \vec{m}_0(\vec{F}_S^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_S^i)$. Если сложить все равенства, то получим:

$$\sum_1^n \frac{d\vec{L}_{S0}}{dt} = \sum_1^n \vec{m}_0(\vec{F}_S^e) + \sum_1^n \vec{m}_0(F_S^i)$$

$$\sum \vec{m}_0(F_S^e) = \vec{M}_0^e$$

$\vec{M}_0^e$ - главный момент всех внешних сил.

$$\sum_1^n m_0(F_S^i) = 0$$

Окончательная формула:

$$\frac{d}{dt}\sum \vec{L}_{S0} = M_0^e$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^e \quad (6)$$

Равенство (6) на оси X имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_X}{dt} &= M_X^e \\ \frac{dL_Y}{dt} &= M_Y^e \\ \frac{dL_Z}{dt} &= M_Z^e \end{aligned}\right\} - \textit{теорема моментов относительно осей координат}$$

Выводы:

1. На изменение момента количества движения, внутренней силы влияния не оказывают.
2. Если $M_0^e = 0$, то $L_0 = const$
3. Если $M_X^e = 0$, то $L_X = const$

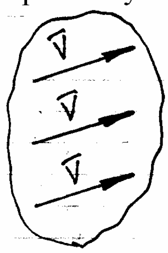
Кинетическая энергия твёрдого тела.

Для твёрдого тела имеет место формула: $T = \frac{1}{2}\int V^2 dm$ (1)

Нужно различать кинетическую энергию твёрдого тела при различных видах его движения.

1. Кинетическая энергия тела твёрдого движущегося поступательно.

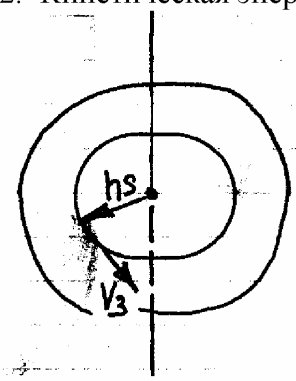
При поступательном движении, все скорости одинаковы. Тогда:



$$T = \frac{V^2}{2}\int dm \quad (2)$$

$$T = \frac{MV^2}{2} \quad (3)$$

2. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.



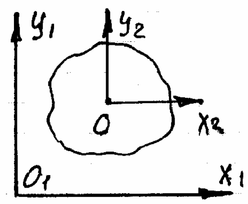
Модуль скорости любого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: $V_S = \omega \cdot h_S$.

Подставим это в (1):

$$T = \frac{1}{2}\int \omega^2 \cdot h_S dm = \frac{\omega}{2}\int h_S^2 dm$$

$$T = \frac{1}{2} I_Z \cdot \omega^2 \quad (4)$$

3. Кинетическая энергия твёрдого тела совершающего плоское движение.



При плоском движении тела, $\vec{\omega}$ всегда перпендикулярен плоскости движения и совпадают с осью CZ_2.

$$T = T^{пост} + T^{вращ}$$

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_{CZ}\omega^2$$

Заключение: если материальная система состоит из нескольких тел, то её кинетическая энергия будет равен сумме всех кинетических энергий.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Пусть система состоит из n точек, где F_S^i - равнодействующая внутренних сил, F_S^e - равнодействующая внешних сил.

1. Теорема об изменения кинетической энергии для S-ой точки в дифференциальной форме.

$$d\frac{m_S\vec{V}_S^2}{2} = dA(\vec{F}_S^e) + dA(\vec{F}_S^i)$$

$$\sum_1^n d\frac{m_S\vec{V}_S^2}{2} = \sum_1^n dA(\vec{F}_S^e) + \sum_1^n dA(\vec{F}_S^i)$$

$$dT = dA^e + dA^i \qquad (1)$$

Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних тел системы.

2. Теорема в интегральной форме.

Эта теорема для S-ой точки имеет вид: $\frac{m_S\vec{V}_S^2}{2} - \frac{m_S\vec{V}_{SO}^2}{2} = A(\vec{F}^e) + A(\vec{F}^i)$.

Просуммируем равенство по всем точкам:

$$\sum_1^n \frac{m_S\vec{V}_S^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_S\vec{V}_{SO}^2}{2} = \sum_1^n A(\vec{F}^e) + \sum_1^n A(\vec{F}^i)$$

$$T - T_O = A^e + A^i \qquad (2)$$

Равенство (2) выражает теорему в интегральной форме: изменение кинетической энергии системы на некотором её перемещении, равно сумме работ всех внешних и внутренних сил на этом же перемещении. В случае не изменяемых систем: $T = A$.

Динамика твёрдого тела. Динамика поступательного движения твёрдого тела.

Из кинематики известно, что при поступательном движении тела, все его точки движутся одинаково, поэтому динамика поступательного движения тела определяется динамикой центра масс тела, т.е. теоремой о движении центра масс.

$$M\vec{a}_C = \sum_1^n F_S^e$$

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum F_{SX}^e \\ M\ddot{y}_C &= \sum F_{SY}^e \\ M\ddot{z}_C &= \sum F_{SZ}^e \end{aligned}\right\} \textit{уравнение поступательного движения твёрдого тела}$$

$$\ddot{x}_C = \ddot{x}, \ddot{y}_C = \ddot{y}, \ddot{z}_C = \ddot{z}$$