ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

Конспект лекций

Динамика точки.

1. Предмет динамики.
2. Аксиомы (законы Ньютона).
3. Диф. уравнения движения материальной точки.
4. Две основные задачи динамики материальной точки.

I. Предмет динамики.

Динамика- раздел теоретической механики, изучающий движение материальных объектов с учетом сил, вызывающих это движение.

Две основные задачи динамики:

1.по заданному движению точки определить силы, вызывающие это движение.

2. по заданным силам определить движение точки.

В динамике рассматриваются различные модели материальных объектов. Простейшая модель - материальная точка (тело, формами и размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи).

Более сложные материальные объекты – система материальных точек и твердое тело.

II. Аксиомы (законы Ньютона).

1.Закон инерции.

Существуют инерциальные системы отсчета, относительно которых материальная точка, не испытывающая действия или находящаяся под действием уравновешенной системы сил, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Возможно существование тел и систем отсчёта, связанных с ними, которые движутся без ускорения. Любая из таких систем может быть принята условно за неподвижную.

Часто за инерциальную систему отсчёта принимается система отсчёта, связанная с Землёй, пренебрегая суточным временем Земли.

2. $m\vec{w} = \vec{F};$

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Ускорение точки прямо пропорционально силе и направленно в сторону этой силы.
Масса- мера инертности точки.

3. Всякому действию есть противодействие, равное по величине и противоположное по направлению.

5. Закон независимости действия ил.

Если к точке приложена система сил, то ускорение точки равно векторной сумме ускорений, получаемых от каждой силы в отдельности.

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \cdots + \vec{W}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{W}_k$$

Следствие: $m\vec{W} = \underbrace{m\vec{W}_1}_{F_1} + m\vec{W}_2 + \cdots + \underbrace{m\vec{W}_n}_{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$

$$m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

III. Диф.уравнения движения материальной точки.

. $m\vec{w} = \vec{F};\ \vec{W} = \dfrac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}$

$\vec{F}(const; t; \vec{r}; \vec{V})$

$m\ddot{r} = \vec{F}(c; t; \vec{r}; \vec{V})$

В проекциях на декартовы оси кординат :

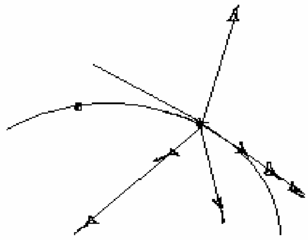
$$m\ddot{x} = F_x(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$$
$$m\ddot{y} = F_y(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$$
$$m\ddot{z} = F_z(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$$

При плоском движении точки:

$$m\ddot{x} = F_x(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$$
$$m\ddot{y} = F_y(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$$

Если тело движется прямолинейно, то $m\ddot{x} = F_x(c; t; x; y; z; \dot{x}; \dot{y}; \dot{z})$

В проекциях на естественные оси координат:



$$m\vec{W}_\tau = F_\tau$$
$$m\vec{W}_n = \vec{F}_n$$
$$m\vec{W}_b = \vec{F}_b$$

$W_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \ddot{S}$, где S- закон движения точки по траектории.

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}$$
$$W_b = 0$$
$$m\ddot{S} = F_\tau$$
$$m\frac{V^2}{\rho} = F_n$$
$$0 = F_b$$

IV. Две основные задачи динамики.

Первая задача динамики.
По заданному движению точки определить силу.

$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}\right\}$ - уравнения движения точки

$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$
$$m\ddot{y} = F_z$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Решается методом дифференцирования.

Вторая задача динамики.
Решение второй задачи динамики составляет основное содержание всех разделов динамики.
По заданным силам определить движение точки. Задача решается методом интегрирования.
Если сила зависит только от t или только от x или V, то можно пользоваться следующими указаниями:
1) составить диф.уравнение движения точки:
а) начало координат совмещать с началом движения точки (или с её равновесным положением);
б) если движение по прямой, то одну из осей направить в сторону движения точки;
в) точку изобразить с приложенными силами в произвольном положении;
г) составить диф.уравнение в проекции на ось.
2) интегрирование диф.уравнения.
Замена переменных.

$\frac{dV_x}{dt}$, если $F(t), F(V)$

$\frac{VdV}{dx}$, если $F(x)$

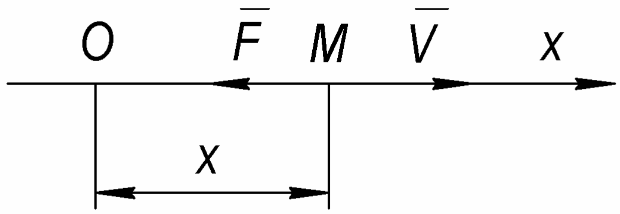
Диф.уравнение решать методом разделения переменных(кроме задач на колебания).
3) интегралы брать неопределёнными, учитывая постоянные интегрирования, найденные из начальных условий.
4) анализ движения точки.

Теория колебаний

1) Свободное колебание материальной точки
2) Затухающее колебание материальной точки

1) Свободное колебание материальной точки

Свободными или гармоническими колебаниями точки называется колебательное движение под действием только восстанавливающей силы. Эта сила при движении точки всегда стремиться вернуть ее в положение равновесия. По модулю восстанавливающая сила пропорциональна расстоянию от точки до ее равновесного положения.



Т.О – положение равновесия т.М

Составим дифференциальное уравнение движения точки:

$m \cdot \ddot{x} = F_x = -c \cdot x,$

где c – коэффициент упругости (коэффициент жесткости)

$F = c \cdot x,$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0,$$

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0 \qquad (1)$$

(1) – дифференциальное уравнение свободных колебаний (линейное однородное уравнение второго порядка),

где k – круговая частота свободных колебаний.

Составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + k^2 = 0,$$

$$r^2 = -k^2,$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{k^2} = \pm ik,$$

$$x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt \qquad (2)$$

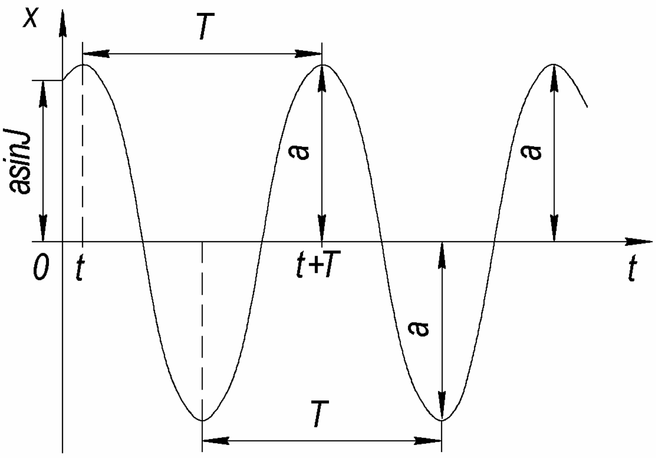
(2) - решение дифференциального уравнения.

Выразим решение дифференциального уравнения в более компактном виде:

$$c_1 = a \cdot \sin(kt + \alpha) \qquad (3),$$

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Где a – амплитуда колебаний,
$kt + \alpha$ – фаза колебаний,
α – начальная фаза колебаний.



Решением дифференциального уравнения является гармонические колебания с амплитудой а и начальной фазой α.

Постоянные c_1 и c_2 или α и а определяются из начальных условий.

Т.к. функции синус и косинус периодические и в одинаковой фазе находятся через 2π, то определяем за период разность фаз:

$$k \cdot (t + T) + \alpha - (kt + \alpha) = 2\pi,$$

$$kt = 2\pi, \qquad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$$

Величина, обратная периоду Т, называется частотой колебания ʋ.

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

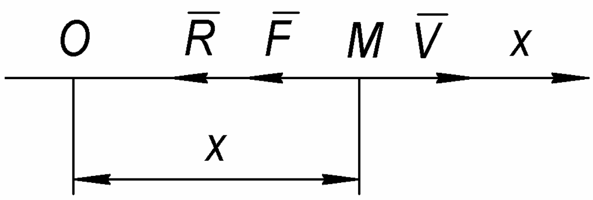
Частота – время одного полного колебания.

$k = 2\pi\upsilon$ - количество полных колебаний за время 2π секунд

2) *Затухающее колебание материальной точки*

При затухающих колебаниях кроме восстанавливающей силы учитывается сила сопротивления.

$\overline{R} = -\mu\overline{V}$, где μ – коэффициент сопротивления



Дифференциальное уравнение:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_{kx} = -F - R,$$

$$F = c \cdot x,$$

$$R = \mu \cdot V_x = \mu \cdot \dot{x},$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x},$$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0 \qquad (4)$$

$$где\ \ 2n = \frac{\mu}{m}, \qquad \frac{c}{m} = k^2$$

(4) - дифференциальное уравнение затухающего колебания.

Запишем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0$$

Корни: $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$.

Возможны 3 случая:

1) 1-ый случай, когда n<k (малое сопротивление)

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2} = -n \pm ik,$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

$$x = e^{-nt}(c_1 \cdot \cos k_1 t + c_2 \cdot \sin k_1 t),$$

$$\textit{или} \quad x = a \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha)$$

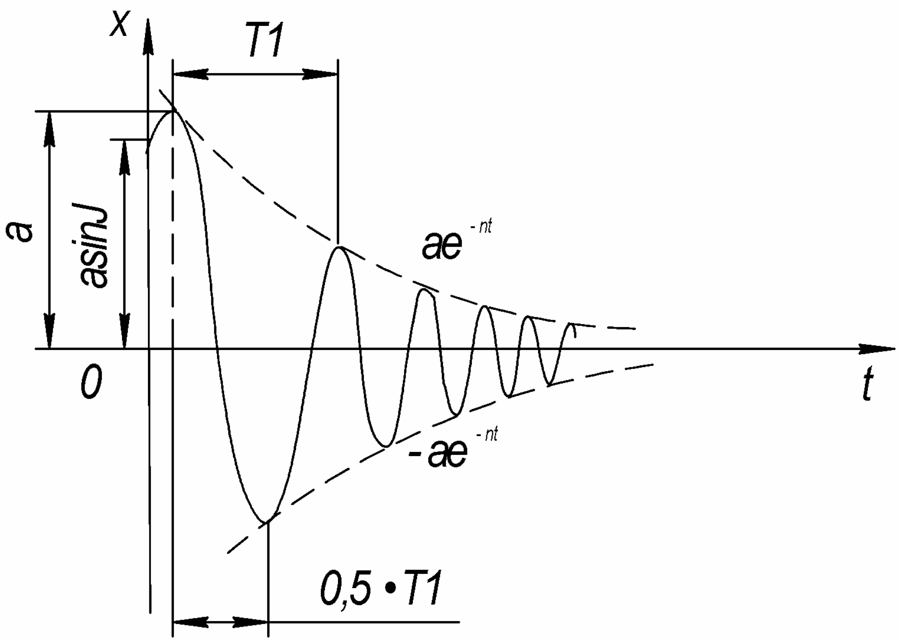
$$\textit{где } c_1 = a \cdot \sin\alpha, \quad c_2 = a \cdot \cos\alpha.$$

Это колебательное периодическое движение,

где k_1 – круговая частота затухающих колебаний,

a - амплитуда, α - начальная фаза.

Постоянные c_1 ,c_2 или α и а определяются из начальных условий.



T1 – период затухающих колебаний

В случае малого сопротивления получаем затухающее колебание точки с периодом T1:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Максимальное отклонение точки от равновесного положения через период или через половину периода подчиняется закону геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $D = e^{nt_1}$ или $D = e^{\frac{nt_1}{2}}$. Этот знаменатель геометрической прогрессии называется декрементом затухающих колебаний и показывает, во сколько раз отличаются амплитуды колебаний, взятые через период или через половину периода.

$$D = \frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{nt_1}{2}}$$

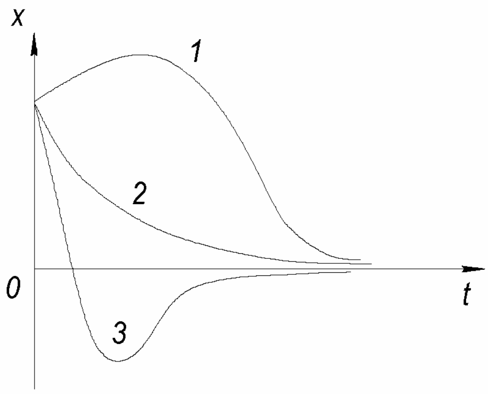
Логарифмический декремент затухания: $\ln D = \dfrac{nT_1}{2}$ или $\ln D = nT_1$.

2) 2-ой случай, когда n>k (большое сопротивление)

$r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$,

$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$.

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий.
В этом случае движение апериодическое.



1 – толчок вперед;
2 – слабый толчок назад;
3 – сильный толчок назад.

3) 3-ий случай, когда n=k (предельный случай)
Движение апериодическое.

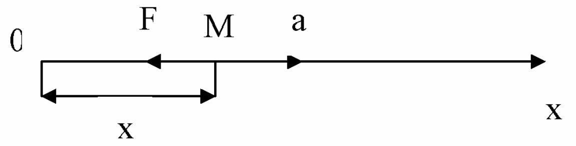
$r_{1,2} = -n,$

$x = e^{-nt}(c_1 + c_2 t).$

Постоянные c_1 и c_2 определяются из начальных условий.

Лекция №3.
Вынужденные колебания.

1. Вынужденные колебания без учёта сил сопротивления:



Проекция сил на ось OX:

$m\ddot{x} = -cx + H\sin pt$

где $F = cx$ – восстанавливающая сила, (н); $Q = H\sin pt$ – возмущающая сила, (н); H – амплитуда вынуждающей силы, (н); p – круговая частота вынуждающей силы, (1/с).

Получили линейное неоднородное диференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (1.1)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$ – квадрат круговой частоты свободных колебаний, (1/с);

$h = \dfrac{H}{m}$ – относительная величина амплитуды вынуждающей силы(н/кг).

Общее решение уравнения (1.1) находим в виде:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения; x_2 – частное решение.

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cos kt$$

или $x_1 = a\sin(kt + \alpha)$

$$x_2 = A\sin pt + B\cos pt$$

Найдём $\ddot{x}_2$ и подставим в уравнение (1.1):

$$\dot{x}_2 = A \cdot p \cdot \cos pt - B \cdot p \cdot \sin pt$$

$$\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt$$

$$-Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt + k^2 A\sin pt + k^2 B\cos pt = h\sin pt$$

Из уравнения следует, что $A(k^2 - p^2) = h$, т.е. $A = \dfrac{h}{(k^2 - p^2)}$;

$B(k^2 - p^2) = 0$, т.е. B=0.

Рассмотрим случай, когда $k \neq p$:

B=0

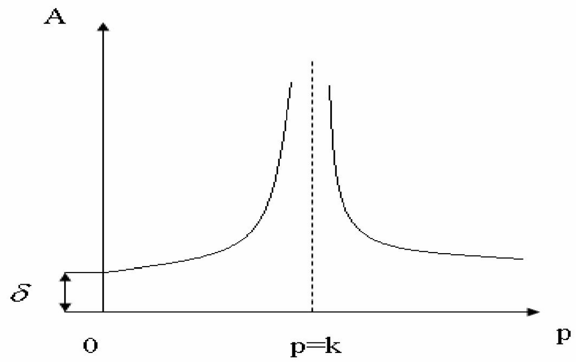
$$x_2 = \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin pt$$

В окончательном виде общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cos kt + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin pt \qquad (1.2)$$

C_1 и C_2 определяются по начальным условиям, которые следует подставить в уравнение (1.2).

График амплитудно- частотной характеристики (АЧХ):



При p=0 $A = \frac{h}{k^2} = \delta$, где δ - статическое отклонение точки под действием постоянной силы H.

Случай, когда $k = p$ (резонанс).

$$x_2 = At\sin pt + Bt\cos pt$$

$$\dot{x}_2 = A\sin pt + Btp\cos pt + B\cos pt - Btp\sin pt$$

$$\ddot{x}_2 = Ap\cos pt + Ap\cos pt - Atp^2\sin pt - Btp^2\cos pt - Bp\sin pt - Bp\sin pt$$

Найденное значение $\ddot{x}_2$ подставим в уравнение (1.1):

$$2Ap\cos pt - Atp^2\sin pt - Btp^2\cos pt - 2Bp\sin pt + Ak^2t\sin pt + Bk^2t\cos pt = h$$

В результате сокращений получим, что

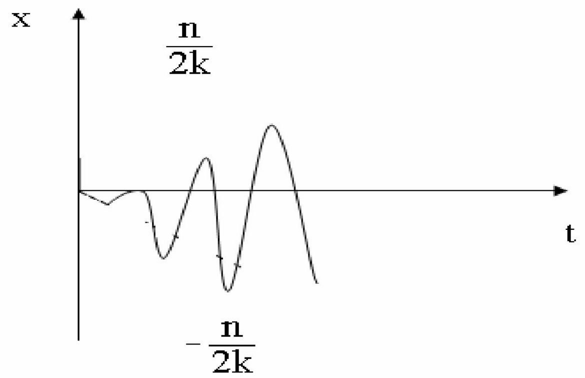
$2Ap\cos pt - 2Bp\sin pt = h\sin pt$, отсюда следует: $-2Bp = h$, т.е.

$$B = -\frac{h}{2p} = -\frac{h}{2k}$$

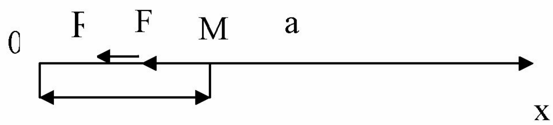
и $2Ap = 0$, т.е. $A = 0$

$$x_1 = -\frac{ht}{2k}\cos pt$$

Амплитудно-частотная характеристика(АЧХ):



2. Вынужденные колебания с учётом сил сопротивления.



Проекция сил на ось OX:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + H\sin pt$$

где $F = cx$ – восстанавливающая сила, (н); $Q = H\sin pt$ – возмущающая сила, (н); H – амплитуда вынуждающей силы, (н); p – круговая частота вынуждающей силы, (1/с); $R = \mu v = \mu\dot{x}$ – сила сопративления, (н).

Получили линейное неоднородное диференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin pt, \qquad (2.1)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$ – квадрат круговой частоты свободных колебаний, (1/с);

$h = \frac{H}{m}$ – относительная величина амплитуды вынуждающей силы(н/кг); $2n = \frac{\mu}{m}$, где n – коэффициент затухания, (1/с).

Общее решение уравнения (2.1) находим в виде:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения; x_2 – частное решение.

При затухающих колебаниях в случае малого сопротивления($n < k$):

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) = a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – круговая частота собственных колебаний с учётом сил сопративления

В случае большого сопротивления($n > k$):

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{\sqrt{n^2-k^2}t}) = a \cdot e^{-nt} sh(\sqrt{n^2 - k^2}\, t + \beta)$$

В случае, когда $n = k$:

$$x_1 = e^{-nt}(C_1 t + C_2)$$

После подстановки $\ddot{x}_2$, $\dot{x}_2$, x_2 в (2.1) и после приравнивания коэффициентов перед синусами и косинусами в обоих частях тождества получим:

$$E(k^2 - p^2) - 2npD = h$$

$$D(k^2 - p^2) + 2npE = 0,$$

т.е. $E = \dfrac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}$

$$D = -\frac{2hnp}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}$$

$$x_2 = \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\Big[(k^2 - p^2)\sin pt - 2np\cos pt\Big]\frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}} =$$

$$\cos\varepsilon \frac{-2np}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}} = \sin\varepsilon,$$

где ε - сдвиг фаз.

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}} \sin(pt - \varepsilon)$$

Амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$B=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)+4n^2p^2}} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}=\mathrm{tg}\varepsilon\text{, т.е. } \varepsilon=\mathrm{arctg}\frac{2np}{k^2-p^2}$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид:

$$x=a\cdot e^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\varepsilon),$$

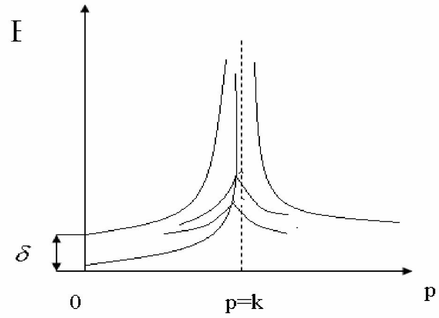
где a и ε определяются по начальным условиям.

Разделим числитель и знаменатель выражения (2.2) на k^2:

$$B=\frac{\frac{h}{k^2}}{\sqrt{(1-\frac{p^2}{k^2})^2+4\frac{n^2p^2}{k^2}}},$$

где $\frac{h}{k^2}=\delta$ - статическое отклонение точки под действием силы H; $\frac{n}{k}=\beta$ - коэффициент затухания; $\frac{p}{h}=z$ - коэффициент расстройки.

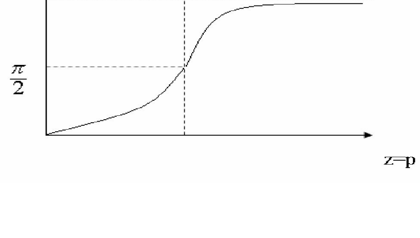
$$B=\frac{\delta}{\sqrt{(1-z)^2+4z^2\beta^2}}$$



Максимумы вынужденных колебаний происходят не на резонансной частоте, когда $z=\frac{p}{k}=1$, а при критическом коэффициенте расстройки:

$$z_{\text{кр.}}=\sqrt{1-2\beta^2}\ .$$

График фазо-частотных характеристик(ФЧХ):



Лекция №4. Общие теоремы динамики

1. Теорема о движении центра масс системы

2. Теорема об изменении количества движения точки и системы

1. *Механическая система* - совокупность взаимодействующих между собой материальных точек или тел. Выбор механической системы зависит от условий и вопроса задачи.

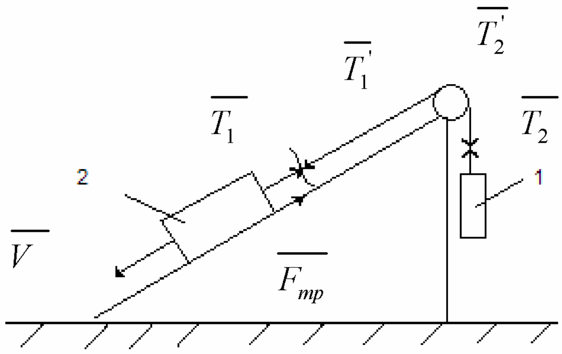
Силы, действующие на любую точку механической системы, делятся на внутренние и внешние.

F^i – внутренняя сила

F^e – внешняя сила

Внутренними называются силы, с которыми точки, входящие в систему, действуют друг на друга.

Внешними называются силы, которые прикладываются к точкам извне, то есть от других точек или тел, не входящих в систему. Разделение сил на внутренние и внешние условное.



mg – внешняя сила

$F_{тр}$ – внутренняя сила

Свойства внутренних сил системы

Главный вектор внутренних сил системы равен нулю

$$\overline{R^i} = \sum_{k=1}^{n} F^i_k = 0$$

Главный момент внутренних сил системы относительно некоторого неподвижного центра равен нулю.

$$\overline{M_0^i}=\overline{m_0}(\overline{F_k^i})=0$$

Движение системы характеризуется не только силами, действующими на нее, но и характером распределения масс в этой системе.

Центр масс системы – геометрическая точка, положение которой определяется радиус-вектором $\overline{r_c}$.

$$\overline{r_c}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{r_k}}{M}\ \text{, где } \mathrm{M}=\sum_{k=1}^{n} m_k \qquad (1)$$

Координаты центра масс по осям равны:

$$x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M};\ y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M};\ z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M} \qquad (2)$$

Пусть в систему входят n точек, для каждой точки запишем второй закон Ньютона:

$$m_1\overline{a_1}=\overline{F_1^e}+\overline{F_1^i}\ ;\ m_2\overline{a_2}=\overline{F_2^e}+\overline{F_2^i}\ ;\ldots;\ m_n\overline{a_n}=\overline{F_n^e}+\overline{F_n^i}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k^e}+\sum_{k=1}^{n}\overline{F_k^i} \qquad (3)$$

$$\sum\overline{F_k^i}=0$$

Выясним выражение в левой части равенства:

Возьмем от выражения (1) первую и вторую производные:

$$\overline{\dot{r}_c}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{\dot{r}_k}}{M}\ ;\ \overline{\ddot{r}_c}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{\ddot{r}_k}}{M}\ ;\ \overline{a_c}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\overline{a_k}}{M}\ ;\ \sum_{k=1}^{n} m_k\overline{a_k}=M\overline{a_c}$$

Полученный результат подставляем в (3):

$$M\overline{a_c}=\overline{F^e} \qquad (4)$$

- ***теорема о движении центра масс системы***: центр масс системы движется также, как точка, масса которой равна массе всей системы под действием сил, приложенных к системе.

Для решения задач запишем теорему в проекциях на оси координат:

$M\ddot{x}_c=F_x^e;\ M\ddot{y}_c=F_y^e;\ M\ddot{z}_c=F_z^e.$

Рассмотрим частный случаи теоремы:

Если в выражении (4) $\overline{F^e}$=0, тогда и $\overline{a_c}$=0;

$$\overline{v_c}=const=\overline{v_{c0}}\ \text{(начальная скорость центра масс)}$$

Вывод: в этом случае центр масс движется равномерно и прямолинейно.

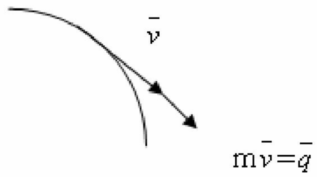
Если $\overline{v_{c0}} = 0$, тогда $\overline{v_c} = \dfrac{d\overline{r_c}}{dt} = 0$, где $\overline{r_c} = const = \overline{r_{c0}}$.

Частные случаи через проекции на оси координат:

Если $F_x^e = 0$, тогда $\ddot{x}_c = 0$; $\dot{x}_c = const = \dot{x}_{c0}$.

Если $\dot{x}_{c0} = 0$, тогда $\dot{x}_c = \dfrac{d\,x_c}{dt} = 0$; $x_c = const = x_{c0}$ - *закон сохранения координат центра масс относительно данной оси.*

2. 1)*Теорема для точки*



$m\bar{v}$ -количество движения точки

$d\overline{S} = \overline{F}dt$ – элементарный импульс силы

$\overline{S} = \int_0^t \overline{F}dt$ – полный импульс силы

Если $\overline{F} = const$, то $\overline{S} = \overline{F}t$; $m\overline{a} = \overline{F}$; $\overline{a} = \dfrac{d\overline{v}}{dt}$;

$$\frac{d(m\overline{v})}{dt} = \overline{F} \qquad (5)$$

Теорема об изменении количества движения точки и системы : производная по времени от количества движения точки равна приложенной силе.

$$d(m\overline{v}) = \overline{F}dt \qquad (6)$$

Дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы.

$$\int_{\overline{v_0}}^{\overline{v}} d(m\overline{v}) == \int_0^t \overline{F}\ dt$$

$$m\overline{v} - m\overline{v_0} = \int_0^t \overline{F}\ dt = S \text{ (полный импульс силы)} \qquad (7)$$

– ***теорема в интегральной форме***: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равен импульсу силы за этот промежуток времени.

Частный случай теоремы: $\overline{S}=0$, тогда $m\overline{v}=m\overline{v_0}$ - закон сохранения количества движения точки.

Следствие: $v=v_0$, точка движется равномерно и прямолинейно.

Спроецируем (7) на оси координат:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x = \int_0^t F_x dt$$

$$mv_y - mv_{0y} = S_y = \int_0^t F_y dt$$

Частный случай через проекции на оси координат : если $S_x=0$, тогда $mv_x = mv_{0x}$; $v_x = v_{0x}$; точка движется равномерно относительно *0x*, тогда если $v_{0x}=0$, $x = const = x_{c0}$, то есть относительно оси *0x* координата точки не изменяется.

2)*Теорема для системы*

Пусть система состоит из n точек, запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{aligned} m_1\overline{a_1} &= \overline{F_1^e} + \overline{F_1^i} \\ m_2\overline{a_2} &= \overline{F_2^e} + \overline{F_2^i} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n\overline{a_n} &= \overline{F_n^e} + \overline{F_n^i} \\ \sum_{k=1}^n m_k\overline{a_k} &= \sum_{k=1}^n \overline{F_k^e} + \sum_{k=1}^n \overline{F_k^i} \\ \sum_{k=1}^n \overline{F_k^i} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Выясним левую часть равенства (8), для этого возьмем производную по времени от выражения (1): $\overline{\dot{r}_c} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k\overline{\dot{r}_k}}{M}$, следовательно $\overline{v_c} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k\overline{v_k}}{M}$;

$$\sum_{k=1}^n m_k\overline{v_k} = M\overline{v_c} \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{d(m\overline{v_k})}{dt} = \frac{d\sum_{k=1}^n m\overline{v_k}}{dt};\ \overline{a_k} = \frac{d\overline{v_k}}{dt};\ \frac{d(M\overline{v_c})}{dt} = \overline{F^e};$$

$$Q = M\overline{v_c} \tag{10}$$

– количество движения системы.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=\overline{F^e} \tag{11}$$

– ***теорема об изменении количества системы в дифференциальной форме.*** Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

$$dQ=\overline{F^e}dt \tag{12}$$

Дифференциал от количества движения системы равен элементарному импульсу внешних сил за определенный промежуток времени. Проинтегрируем (12):

$$\int_{\overline{Q_0}}^{\overline{Q}} d\overline{Q}=\int_0^t \overline{F^e}dt$$

$$\overline{Q}-\overline{Q_0}=\overline{S} \tag{13}$$

– ***теорема в интегральной форме***. Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно импульсу внешних сил, приложенных к системе за этот промежуток времени.

Вывод: так как внутренние силы в теорему не входят, то состояние системы нельзя изменить с помощью внутренних сил.

Частный случай теоремы: Пусть $\overline{S}=0$, тогда $\overline{Q}-\overline{Q_0}=0$; $\overline{Q}=\overline{Q_0}$, количество движения системы не изменится, закон сохранения количества движения системы.

Проекции на оси координат:

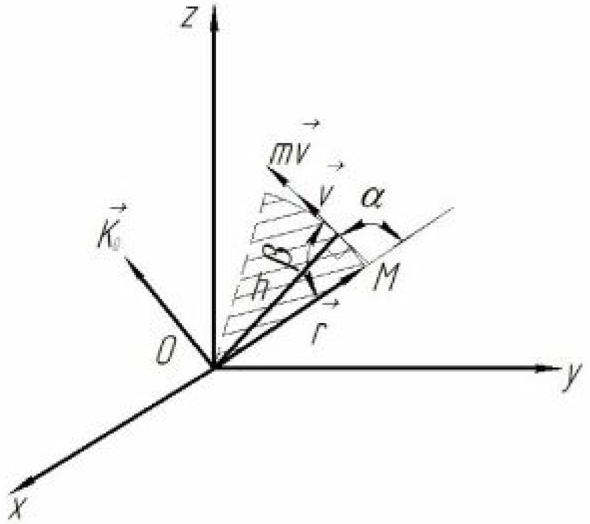
$$\begin{aligned} Q_x-Q_{0x}&=S_x\\ Q_y-Q_{0y}&=S_y\\ Q_z-Q_{0z}&=S_z \end{aligned} \tag{14}$$

Частный случай (14) на ось *0x*: если $S_x=0$, тогда $Q_x=Q_{0x}$, следовательно если $Q_{0x}=0$, то $Q_x=0=Mv_{cx}$; $v_{cx}=0$.

Теорема об изменении момента количества движения точки и системы

(кинетического момента)

Кинетическим моментом точки относительно центра называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора, проведенного в точку из неподвижного центра на количество движения точки.



$\vec{k}_0 = \vec{r} \times m\vec{V}$ (1) - кинетический момент точки относительно центра O или момент количества движения относительно центра O.

Модуль $k_0 = rmV \sin\alpha = rmV \sin(\pi - \beta) = rmV \sin\beta = mVh$

Найдем производную по времени от выражения (1):

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = (\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V}) + (\vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} = \vec{V} \times m\vec{V} = 0; \quad \vec{r} \times \underbrace{m\frac{d\vec{V}}{dt}}_{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0(\vec{F})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F})}$$ (2), где M_o - момент относительно т. О.

Формулировка: производная по времени от момента количества движения точки относительно неподвижного центра равна моменту силы относительно этого центра.

В проекциях на оси координат:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dk_x}{dt} &= M_x(\vec{F}) \\ \frac{dk_y}{dt} &= M_y(\vec{F}) \\ \frac{dk_z}{dt} &= M_z(\vec{F}) \end{aligned}} \quad (3)$$

Частные случаи теоремы:

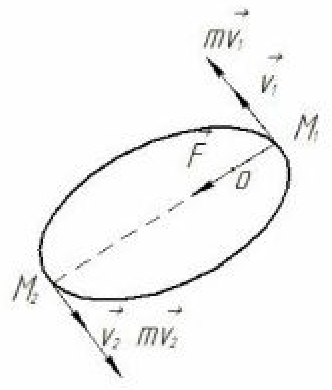
1. $\vec{M}_0(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \vec{k}_0 = const = \vec{k}_{0\,нач.}$ - закон сохранения кинетического момента.
2. $\vec{M}_0(\vec{F}) = 0 \Rightarrow k_x = const = k_{x\,нач.}$ - закон сохранения кинетического момента в проекции на ось X.

Примеры:

1. Движение точки под действием центральной силы

m, V_1

Определить скорость точки M_2 в положении, наиболее удаленном от точки О.



$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) = 0$$

$$\vec{k}_{01} = \vec{k}_{02} = \vec{k}_{Онач.}$$

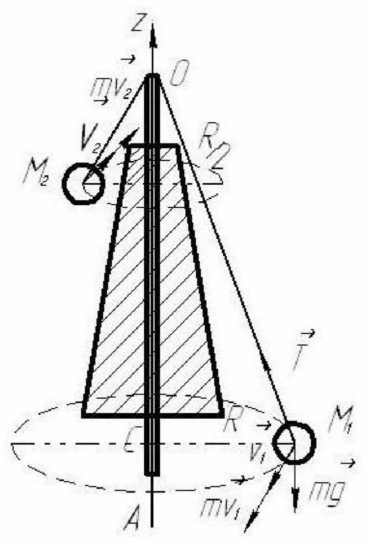
$$k_{01} = k_{02}$$

$$\underbrace{mv_1 \cdot OM_1}_{K_{01}} = \underbrace{mv_2 \cdot OM_2}_{K_{02}}$$

$$V_2 = \frac{V_1 OM_1}{OM_2}$$

В данном примере выполняется закон сохранения момента количества движения точки.

2. Гирька *M* привязана к концу нерастяжимой нити M_1OA часть которой *OA* пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $M_1C = R$, делая 120 об/мин. Медленно втягивая нить *OA* в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_2. Определить скорость гирьки, когда она описывает окружность радиусом *R/2*.



$$\frac{dk_0}{dt} = M_z(\vec{F}) = 0, \quad k_z = const = k_{z\,нач.}$$

$$k_{z\,нач.} = mV_1h_1 = mV_2h_2$$

$$V_2 = \frac{V_1h_1}{h_2}$$

Кинетический момент системы.

Для системы кинетический момент равен векторной сумме кинетических моментов всех точек, входящих в систему.

$$\vec{K} = \sum \vec{M}_0(m_i \vec{V}_i)$$

Запишем для произвольной точки, входящей в систему, теорему об изменении кинетического момента.

$$\frac{d}{dt}\vec{M}_0(m_i\vec{V}_i) = \vec{M}_0(\vec{F}_i^e) + \vec{M}_0(\vec{F}_i^i) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum\left[\vec{M}_0(m_i\vec{V}_i)\right] = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i^e) + \underbrace{\sum \vec{M}_0(F_i^i)}_{0}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e, \quad где\ \vec{M}_0^e = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i^e)} \qquad (4)$$

Формулировка: производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна главному моменту внешних сил относительно этого центра.

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e;$$

$$\frac{dK_y}{dt} = M_y^e; \qquad (5)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e;$$

Частные случаи теоремы:

1. Если $\vec{M}_0^e = 0, \quad то \quad \vec{K}_O = const = \vec{K}_{Онач.}$

2. Если $M_x^e = 0, \quad то \quad K_x = const = K_{Онач.}$

В этих случаях выполняется закон сохранения кинетического момента системы.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$K_{zk} = m_k V_k h_k \quad - \quad \textit{для точки}$$

Для твердого тела:

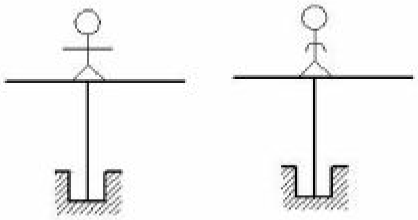
$$K_z = \sum m_k V_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2 = \omega \underbrace{\sum m_k h_k^2}_{J_z} = \omega J_z$$

$$K_z = J_z \omega, \quad \textit{где } J_z - \textit{момент инерции} \qquad (6)$$

Формулировка: при вращении тела вокруг оси кинетический момент равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на его угловую скорость.

Примеры:

1. Человеку, стоящему на скамейке Жуковского, в то время, когда он протянул руки в стороны, сообщают начальную угловую скорость, соответствующую 15 об/мин; при этом момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен 0,8 кг•м^2. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, если, приблизив руки к туловищу, он уменьшит момент инерции системы до 0,12 кг•м^2?



$$n_1 = 15\frac{об}{мин};\quad J_1 = 0{,}8кг\cdot м^2$$

$$J_2 = 0{,}12кг\cdot м^2$$
$$n_2 - ?$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = 0$$

$K_z = const = K_{z\,нач.}$ - выполняется закон сохранения кинетического момента.

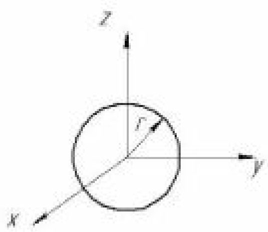
$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

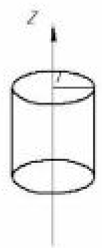
$$J_1\frac{\pi n_1}{30} = J_2\frac{\pi n_2}{30}$$

$$n = \frac{J_1 n_1}{J_2} = 100\frac{об}{мин}$$

Моменты инерции некоторых тел

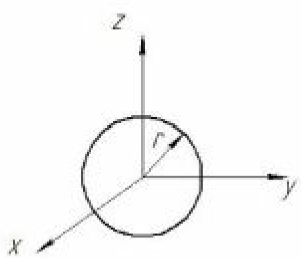
1. Однородный круглый диск или цилиндр





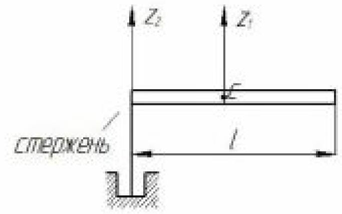
$$J_z = \frac{mr^2}{2}$$

2. Обод (кольцо)



$$J_z = mr^2$$

3.



$$J_{z_1} = \frac{ml^2}{12}$$

$$J_{z_2} = \frac{ml^2}{3}$$

3. Любое тело

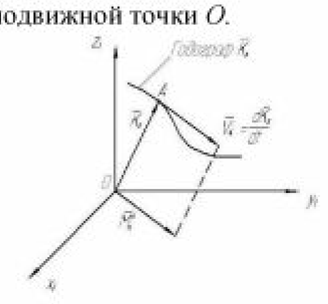
$J_z = m\rho^2$, *где* ρ – *радиус инерции тела* .

Теорема Резаля в приложении к гироскопу

Для изучения движения гироскопа удобно пользоваться теоремой Резаля, которая представляет собой геометрическую интерпретацию теоремы об изменении кинетического момента системы материальных точек [1 -2, 5, 7 -8]. Согласно последней имеем

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_o^e, \qquad (2)$$

где $\vec{M}_o^e$ - главный момент внешних сил, приложенных к механической системе, относительно неподвижной точки *O*.



Производная от вектора $\vec{K}_o$ по времени представляет собой "скорость" $\vec{V}_A$ конца этого вектора (рис.). Поэтому формулу (2) можно прочесть и таким образом: "скорость" конца вектора кинетического момента $\vec{K}_o$ механической системы, взятого относительно неподвижной точки *O*, геометрически равна взятому относительно той же точки главному моменту $\vec{M}_o^e$, действующих на систему внешних сил.

Слово "скорость" взято в кавычки, так как $\vec{V}_A$ не является обычной скоростью точки. Кинетический момент имеет иную размерность, чем радиус-вектор. В дальнейшем, помня условность этого понятия, кавычки опускаем. Придерживаясь прецессионной теории, перепишем равенство (2) в виде

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}_o^e. \qquad (3)$$

Так как производная от вектора $\vec{H}$ по времени представляет собой скорость $\vec{V}_A$ конца этого вектора, то

$$\vec{V}_A = \vec{M}_o^e \qquad (4)$$

и теорему Резаля применительно к гироскопу можно сформулировать так: *скорость конца вектора собственного кинетического момента гироскопа равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к гироскопу.* При этом предполагается, что кинетический момент $\vec{H}$ и главный момент $\vec{M}_o^e$ определяются относительно точки *O* подвеса гироскопа.

Лекция № 6. Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы

Для точки:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \qquad \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$ Умножим обе части равенства скалярно на $d\bar{r}$ (дифференциал радиус-вектора)

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot d\bar{r} = \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

$$m\bar{v}d\bar{v} = \bar{F}d\bar{r}$$

$$d\left(\frac{m\bar{v}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\cdot 2\bar{v}dv$$

$$\bar{v}^2 = \bar{v}\cdot\bar{v} = v\cdot v\cos 0^\circ = v^2$$ Квадрат вектора скорости равен квадрату модуля скорости

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{r} \qquad (1)$$

Дифференциал от кинетической энергии точки равен элементарной работе силы на перемещение точки.

$$T = \frac{mv^2}{2}$$ - кинетическая энергия

$$dA = \bar{F}d\bar{r}$$ - элементарная работа силы

$$dT = dA$$

Интегрируем выражение (1)

$$\int_{v_0}^{v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{(M_0)}^{(M)} \bar{F}d\bar{r}$$

$$\left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = \int_{(M_0)}^{(M)} \bar{F}d\bar{r}$$

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$ (2) теорема об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме.

Изменение кинетической энергии точки на ее перемещение равно работе силы на этом перемещении.

$T - T_0 = A$

Обе части выражения (1) делим на dt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \overline{F}\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v}$$

$$\frac{dT}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = N (3)$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности силы.

Для системы

Для произвольной точки системы запишем теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \overline{F}_k^e \cdot d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i \cdot d\overline{r}_k$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$d\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ - кинетическая энергия системы

$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$ (4) – теорема в дифференциальной форме для системы.

Интегрируем:

$$\int_{T_0}^{T} dT = \sum \int_{(M_0)}^{(M)} dA_k^e + \sum \int_{(M_0)}^{(M)} dA_k^i$$

$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ (5) – теорема в интегральной форме

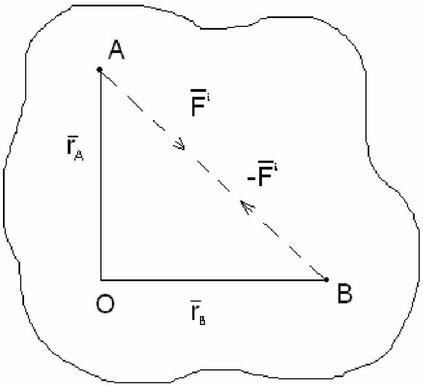
Обе части выражения (4) делим на dt

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i (6)$$

2

Производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме внешних и внутренних мощностей этой системы.

Рассмотрим выражение:



$$\sum dA_k^i = \overline{F}^i \cdot d\overline{r}_A - \overline{F}^i \cdot d\overline{r}_B = \overline{F}^i \left(d\overline{r}_A - d\overline{r}_B\right) = \overline{F}^i d\left(\overline{r}_A - \overline{r}_B\right) = \overline{F}^i d(\overline{AB})$$

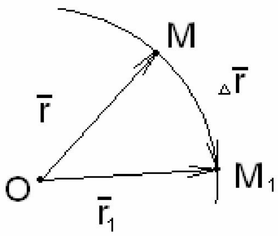
Если система неизменяема (например, твердое тело), то сумма работ внутренних сил равна нулю.

Если система изменяема, то сумма работ внутренних сил не равна нулю.

Вычисление работы сил

$c = \overline{a} \cdot \overline{b} = ab\cos\alpha$ или $c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Элементарная работа силы равна:



$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F \cdot dr \cdot \cos(\overline{F}, d\overline{r}) = F \cdot dS \cdot \cos(\overline{F}, d\overline{S})$$

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Полная работа силы вычисляется через интеграл

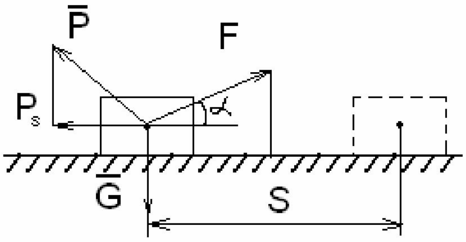
$$A = \int_{S_0}^{S} F dS \cos(\overline{F}, d\overline{S})$$

или

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Работа силы в некоторых случаях

1. Сила постоянна по величине. Точка или тело движется прямолинейно.



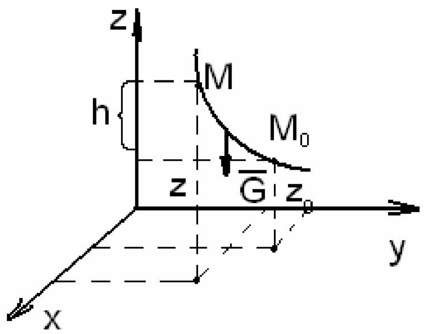
$$dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

$$A = \int_{S_0}^{S} dA = F\cos\alpha \int_{S_0}^{S} dS = F \cdot \cos\alpha \cdot S$$

Знаки работы:
при α < 90°; A > 0
при α = 90°; A = 0
при 90° < α < 180°; A < 0

2. Работа силы тяжести.

$$G = mg$$



$$dA = G_x dx + G_y dy + G_z dz$$

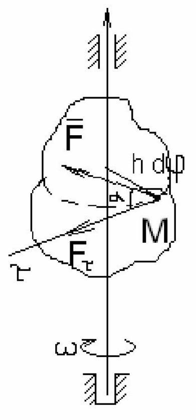
$$dA = -mgdz$$

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dA = -mg\int_{z_0}^{z} dz = -mg(z - z_0)$$

$$a = \pm mgh$$

3. Работа силы при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси.

$$dA = F_\tau \cdot dS = F_\tau \cdot R \cdot d\varphi = Md\varphi$$

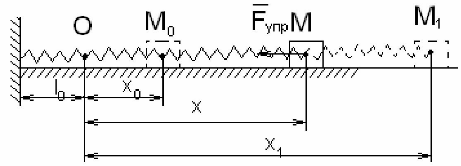


$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} Md\varphi$$

Если M = const, то $A = M\varphi$

4

4. Работа силы упругости пружины.



$$dA_{упр} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$dA_{упр} = -cxdx$$

$$A = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} dA_{упр} = -c\int\limits_{x_0}^{x} xdx = -\left.\frac{cx^2}{2}\right|_{x_0}^{x_1} = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2)$$

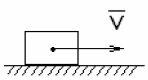
Если $x_0 = 0$, то $A = -\dfrac{cx_1^2}{2} = -\dfrac{c\lambda^2}{2}$

Вычисление кинетической энергии

Для системы:

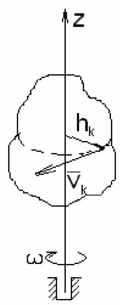
1. $T = \sum \dfrac{m_k v_k^2}{2}$

2. Поступательное движение твердого тела.



$T = \dfrac{v^2}{2}\sum m_k = \dfrac{Mv^2}{2}$, где $M = \sum m_k$

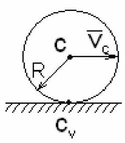
3. Вращение тела вокруг неподвижной оси.



$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2 J_z}{2}$$

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

4.Тело движется плоско-параллельно.



$$T = \frac{J_{c_v}\omega^2}{2}$$

$$J_{c_v} = J_c + MR^2$$

$$T = \frac{J_{c_v}\omega^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2}$$

$$R\omega = v_c$$

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$$

При плоско-параллельном движении тела кинетическая энергия состоит из суммы двух слагаемых: кинетическая энергия в поступательном движении вместе с центром масс и кинетическая энергия тела при вращении вокруг центра масс.

Уравнения Лагранжа второго рода

Уравнения Лагранжа второго рода представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы, составленные в обобщённых координатах:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

где j – количество уравнений (j = 1, 2, …, n), n – число степеней свободы механической системы, T – кинетическая энергия системы, q_j – обобщённая координата, $\dot{q}_j$ – обобщённая скорость, Q_j – обобщённая сила. Если $q_j = x$ (м), то $\dot{q}_j=\dot{x}=v$ (м/с); если $q_j = \varphi$ (рад), то $\dot{q}_j=\dot{\varphi}=\omega$ (рад/с).

Вычисление обобщённых сил

Если система имеет n степеней свободы, то у неё n обобщённых координат, независимых друг от друга (q_1, q_2, …, q_n) и n возможных перемещений (δq_1, δq_2, …, δq_n). Сумма элементарных работ, приложенных к системе сил, на возможные перемещения системы равна

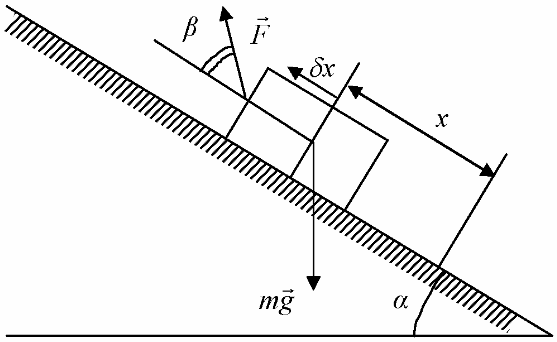
$$\sum\delta A_k=\sum\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k=Q_1\cdot\delta q_1+Q_2\cdot\delta q_2+\ldots+Q_n\cdot\delta q_n.$$

Обобщёнными силами называются коэффициенты, стоящие перед соответственными возможными перемещениями. Так как обобщённые координаты не зависят друг от друга, то для определения обобщённой силы системе необходимо сообщить возможные перемещения, соответствующие координатам, а все остальные возможные перемещения принять за нуль, то есть для определения Q_1 необходимо, чтобы $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = 0$, $\delta q_3 = 0$, …, $\delta q_n = 0$, тогда

$$\sum\delta A_k=Q_1\cdot\delta q_1,\ Q_1=\frac{\sum\delta A_k}{\delta q_1}.$$

Размерность обобщённых сил зависит от размерности обобщённых координат: если $q_j = x$ (м), то Q_j – сила (Н); если $q_j = \varphi$ (рад), то Q_j – момент (Н·м).

Пример 1.
Составить дифференциальное уравнение груза, перемещаемого вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы $\vec{F}$.
Дано: m, α, β.
Решение:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

$$T=\frac{mv^2}{2},\ n=j=1,\ q=x,\ \dot{q}=\dot{x}=v,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial T}{\partial v}=mv,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)=ma,$$

определим обобщённую силу Q; для этого составим сумму элементарных работ приложенных сил на возможное перемещение груза:

$$\sum\delta A_k=F\cdot\delta x\cos\beta-mg\cdot\delta x\sin\alpha=\delta x(F\cos\beta-mg\sin\alpha)=\delta x\cdot Q,$$

$$Q=F\cos\beta-mg\sin\alpha,$$

подставляем в уравнение Лагранжа:

$$ma=F\cos\beta-mg\sin\alpha,$$

дифференциальное уравнение движения груза имеет вид:

$$m\ddot{x}=F\cos\beta-mg\sin\alpha.$$

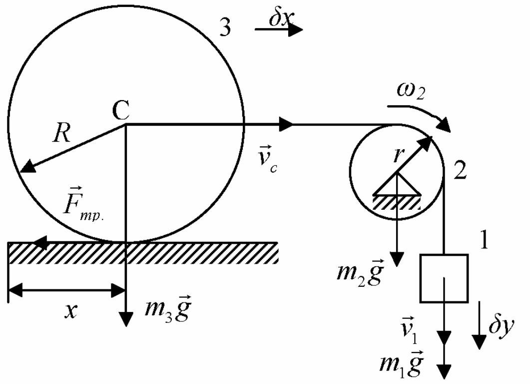
План решения задач с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

1. Определить число степеней свободы механической системы и выбрать удобные обобщённые координаты.
2. Вычислить кинетическую энергию системы в её абсолютном движении и выразить её через обобщённые координаты q_j, $\dot{q}_j$.
3. Вычислить все производные в левой части уравнений.

4. Определить обобщённые силы Q_j, соответствующие выбранным координатам.
5. Подставить всё в уравнения Лагранжа.

Пример 2.

Составить дифференциальное уравнение движения механической системы и определить закон движения этой системы при заданных массах тел: m_1, m_2, m_3. Считать, что каток катится без скольжения и пренебречь трением качения.



Решение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,$$

$n = j = 1$, $q = x$, $\dot{q} = \dot{x} = v$, $v_1 = v_c$,

$T = T_1 + T_2 + T_3$,

$$T_1=\frac{m_1 v_c^2}{2},\ T_2=\frac{J_2\omega_2^2}{2}=\frac{m_2 r^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{v_1^2}{r^2}=\frac{m_2 v_c^2}{4},$$

$$T_3=\frac{m_3 v_c^2}{2}+\frac{J_3\omega_3^2}{2}=\frac{m_3 v_c^2}{2}+\frac{m_3 R^2}{2\cdot 2}\cdot\frac{v_c^2}{R^2}=\frac{3m_3 v^2}{4},$$

$$T=\frac{m_1 v_c^2}{2}+\frac{m_2 v_c^2}{4}+\frac{3m_3 v_c^2}{4}=\frac{v_c^2}{4}\left(2m_1+m_2+3m_3\right),$$

находим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{v_c}{2}\left(2m_1+m_2+3m_3\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{2}\left(2m_1+m_2+3m_3\right)\right)=\ddot{x}\cdot\left(m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{2}\right),$$

определим обобщённую силу Q, составляя сумму элементарных работ всех сил на возможные перемещения системы:

$$\sum\delta A_k=m_1 g\cdot\delta y,\ \delta y=\delta x,\ \sum\delta A_k=m_1 g\cdot\delta x=Q\cdot\delta x,\ Q=m_1 g,$$

подставляем в уравнение Лагранжа:

$$\ddot{x}\cdot\left(m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{2}\right)=m_1 g,$$

получали дифференциальное уравнение движения механической системы; для определения закона движения данной системы полученное выражение необходимо дважды проинтегрировать.

Пример 3.

Определить ускорение груза 1, применяя общие уравнения динамики.

Дано: m_1, m_2, m_3.

Решение:

общее уравнение динамики:

$$\sum\left(\delta A_k^a+\delta A_i^{ин.}\right)=0,$$

зададим системе возможные перемещения:

$$m_1 g\cdot\delta y-\Phi_1^{ин.}\cdot\delta y-M_2^{ин.}\cdot\delta\varphi_2-\Phi_c^{ин.}\cdot\delta x-M_3^{ин.}\cdot\delta\varphi_3=0,$$

$$\Phi_1^{ин.}=m_1a_1,\ M_2^{ин.}=J_2\varepsilon_2,\ \Phi_c^{ин.}=m_3a_c,\ M_3^{ин.}=J_3\varepsilon_3,$$

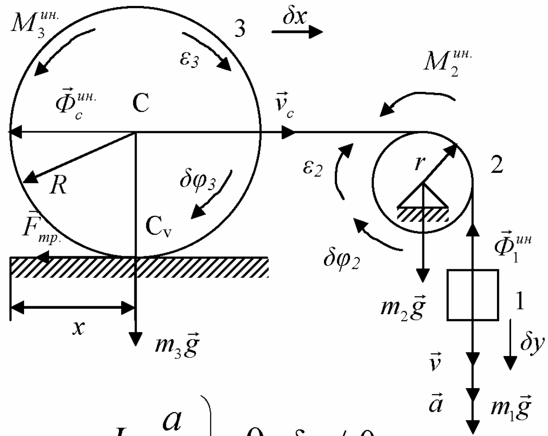
найдём уравнения связи между всеми возможными перемещениями и другие связи между всеми ускорениями; связи между ними точно такие же, как и между соответствующими скоростями:

$$\omega_2=\frac{v}{r},\ \omega_3=\frac{v_c}{R},\ v_c=v,$$

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta y}{r},\ \delta\varphi_3=\frac{\delta x}{R},\ \delta x=\delta y,$$

$$\varepsilon_2=\frac{a}{r},\ \varepsilon_3=\frac{a_c}{R},\ a_c=a,$$

$$J_2=\frac{m_2r^2}{2},\ J_3=\frac{m_3R^2}{2},$$



$$\delta y\cdot\left(m_1g-m_1a-J_2\frac{a}{r^2}-m_3a-J_3\frac{a}{R^2}\right)=0,\ \delta y\neq 0,$$

$$m_1g-m_1a-J_2\frac{a}{r^2}-m_3a-J_3\frac{a}{R^2}=0,$$

$$a\cdot\left(m_1+m_3+\frac{m_2r^2}{2r^2}+\frac{m_3R^2}{2R^2}\right)=m_1g,$$

$$a=\frac{m_1g}{m_1+\frac{m_2}{2}+\frac{3m_3}{2}}.$$