

**ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**  
**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ «ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ»**  
Учебное пособие для студентов физического факультета

## СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 2. Измерение скорости пули методом баллистического маятника . . . . .	4
Лабораторная работа № 4. Изучение движения маятника Максвелла . . . . .	16
Лабораторная работа № 7. Изучение вращательного движения твёрдого тела на маятнике Обербека . . . . .	27
Лабораторная работа № 10. Изучение физического маятника . . . . .	38
Лабораторная работа № 11. Определение момента инерции твёрдого тела методом крутильных колебаний . . . . .	48
Рекомендуемая литература. . . . .	61

## РАБОТА № 2. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: практическое применение законов сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости полета пули.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Полное описание физической системы возможно с помощью уравнений движения, которые детально определяют изменение параметров системы с течением времени. Однако при анализе процессов, протекающих в физических системах, интерес представляет не только изучение изменения физических величин, но и выявление в них того общего, что не изменяется. Законы сохранения отвечают на вопрос о том, что в последовательности физических ситуаций, описываемых уравнениями движения, остается постоянным.

Рассмотрим пример одномерного уравнения Ньютона, которое запишем в виде двух уравнений:

$$\text{а) } m_0 \cdot \frac{dv_x}{dt} = F_x; \quad \text{б) } \frac{dx}{dt} = v_x. \quad (1)$$

Задача считается полностью решенной, если известно положение движущейся точки в любой момент времени. Поэтому для решения необходимо сначала проинтегрировать уравнение (1, а) и найти  $v_x$ , а затем, рассматривая  $v_x$  как известную величину, интегрированием уравнения (1, б) найти  $x(t)$ .

Для широкого класса сил первое интегрирование удастся произвести в общем виде и представить результат как постоянство числового значения определенной комбинации физических величин. Это и есть закон сохранения. Таким образом, *в механике законы сохранения в математическом смысле сводятся к первым интегралам уравнений движения.*

Идея сохранения появилась сначала как чисто философская догадка о наличии стабильного в изменяющемся мире. Еще античные философы пришли к понятию материи – неуничтожимой и несотворимой основы всего

существующего. С появлением математической формулировки механики на этой основе сформулированы законы сохранения массы, механической энергии и импульса. Наряду с принципом относительности законы сохранения выделяются среди других физических законов своей всеобщностью.

Своим происхождением законы сохранения обязаны свойствам симметрии природы. Однородность пространства, то есть симметрия к преобразованию сдвига начала координат, приводит к закону сохранения импульса. Симметрия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, то есть свойство однородности времени, обуславливает закон сохранения энергии. Изотропность пространства, то есть симметрия по отношению к поворотам, приводит к закону сохранения момента импульса. Перечисленные законы сохранения могут быть получены из второго закона Ньютона, если его дополнить свойствами симметрии пространства и времени. Покажем это на примере закона сохранения импульса.

### *Закон сохранения импульса*

Для вывода закона сохранения импульса введем понятие изолированной системы. *Изолированной или замкнутой называется система, на которую не действуют внешние тела или поля.* Понятие замкнутой системы применимо только к инерциальным системам отсчета, поскольку в неинерциальных системах всегда действуют силы инерции, играющие роль внешних сил.

Рассмотрим изолированную систему двух частиц, способных перемещаться в направлении оси  $x$ . Обозначим координаты частиц символами  $x_1$  и  $x_2$ , а потенциальную энергию их взаимодействия символами  $U_1$  и  $U_2$ . Закон сохранения импульса следует из однородности пространства, которая проявляется в том, что при изменении координат частиц на одну и ту же величину  $x_0 = const$  (рис. 1) потенциальная энергия взаимодействия частиц не

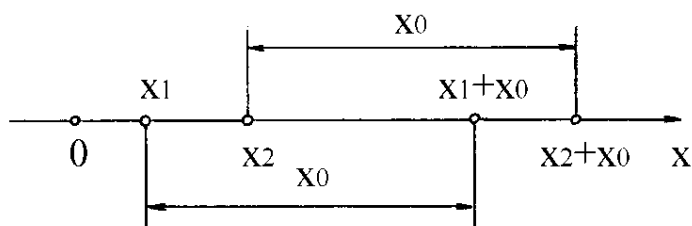


Рис. 1

изменяется:  $U(x_1+x_0, x_2+x_0) = U(x_1, x_2)$ . При любом виде функции  $U$  последнее равенство выполняется только в

том случае, если  $U$  зависит не от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  порознь, а только от их разности  $x = x_1 - x_2$ :

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 - x_2) = U(x).$$

При этом условии силы, действующие на первую и вторую частицу, равны соответственно:

$$\begin{cases} F_{1,2} = -\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ F_{2,1} = -\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_2} = +\frac{\partial U}{\partial x}, \end{cases}$$

где  $F_{1,2}$  – сила, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2,  $F_{2,1}$  – сила, действующая на частицу 2 со стороны частицы 1. Из полученных соотношений следует, что в соответствии с третьим законом Ньютона  $F_{1,2} = -F_{2,1}$ .

Складывая уравнения движения частиц  $d\vec{p}_1 / dt = \vec{F}_{1,2}$  и  $d\vec{p}_2 / dt = \vec{F}_{2,1}$ , где  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  – импульсы частиц, получим:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{p}_1 + \dot{p}_2) = \dot{F}_{1,2} + \dot{F}_{2,1} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_i \dot{p}_i = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) выражает закон сохранения импульса: *если на систему не действуют внешние силы или их векторная сумма равна нулю, то суммарный импульс системы с течением времени не изменяется.* Для материальной точки закон сохранения импульса означает, что в отсутствие внешних сил она движется прямолинейно с постоянной скоростью. Для системы материальных точек закон сохранения импульса утверждает, что в отсутствие внешних сил центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

Уравнение (2) может быть представлено в виде суммы трех скалярных уравнений:

$$\sum_i p_{xi} = \text{const}_1, \quad \sum_i p_{yi} = \text{const}_2, \quad \sum_i p_{zi} = \text{const}_3,$$

то есть не только сумма векторов импульсов, но и *сумма проекций этих векторов на координатные оси остаются постоянными.* Возможна ситуация, когда система материальных точек или отдельная материальная точка

не изолирована, но внешние силы действуют лишь в определенных направлениях, а в других направлениях отсутствуют. Тогда можно так выбрать систему координат, чтобы одна или две проекции внешних сил обратились в нуль. Рассмотрим частный случай, когда внешние силы, действующие на составные части системы, перпендикулярны некоторому направлению, например, осям  $OX$  и  $OY$ , то есть  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $F_z \neq 0$ . В этом случае уравнение движения  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ , записанное в компонентах величин по координатным осям, примет следующий вид:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0; \quad \frac{dp_y}{dt} = 0; \quad \frac{dp_z}{dt} = F_z. \quad (3)$$

Интегрируя первые два уравнения системы (3), получим:

$$p_x = \text{const}; \quad p_y = \text{const}. \quad (4)$$

Из уравнений (4) следует, что в направлениях, параллельных плоскости  $X-Y$ , система ведет себя как изолированная. Например, вблизи поверхности Земли силы тяготения направлены вертикально, а горизонтальные составляющие отсутствуют. Поэтому в данном случае систему материальных точек относительно движения в горизонтальном направлении можно рассматривать как изолированную, если учитывать только силы тяготения.

### *Потенциальное силовое поле*

Если в каждой точке пространства на частицу действует определенная сила, это означает, что частица находится в *силовом поле*. Примерами силового поля являются поле сил тяжести, поле упругих сил, поле сил сопротивления в потоке жидкости или газа. Таким образом, *часть пространства, в которой действуют силы на внесенные в нее тела, называется силовым полем*.

*Поле, не изменяющееся во времени, называется стационарным*. Поле, стационарное в одной системе отсчета, может оказаться нестационарным в другой системе отсчета.

Различают два вида силовых полей: поле консервативных сил и поле неконсервативных сил. *Сила, работа которой не зависит от пути, по которому точка ее приложения переходит из начального положения в конеч-*

ное, называется консервативной. Работа консервативных сил не зависит от траектории, по которой движется точка приложения силы. Это означает, что работа перемещения точки из положения 1 в 2 по пути 1–3–2 и по пути 1–4–2 (рис. 2) одинакова, если она совершается консервативными силами, то есть  $A_{132} = A_{142}$ . Так как силы зависят от конфигурации системы, то  $A_{132} = -A_{241}$ , где  $A_{241}$  – работа, совершаемая при переходе из положения 2 в положение 1 по пути 2–4–1. Таким образом,  $A_{132} + A_{241} = 0$ . Но сумма  $A_{132} + A_{241}$

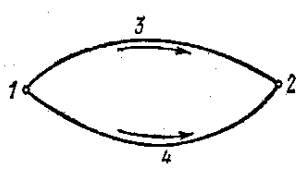


Рис. 2

равна работе, совершенной силами при перемещении точки по замкнутому контуру. Следовательно, работа консервативных сил при перемещении по замкнутому контуру равна нулю. Векторное поле, циркуляция которого по произвольному замкнутому контуру равна нулю, называется потенциальным. Поэтому поле, в котором действуют только консервативные силы, называется потенциальным. Консервативными являются, например, электростатические силы, упругости, тяготения.

### Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему  $N$  материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_N$ , между которыми действуют только консервативные силы. Запишем для каждой точки уравнение второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1N} = \sum_{j=2}^N \vec{F}_{1j} = \vec{F}_1; \\ m_2 \cdot \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2N} = \sum_{j=1, (j \neq 2)}^N \vec{F}_{2j} = \vec{F}_2; \\ \dots \\ m_N \cdot \frac{d\vec{v}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \dots + \vec{F}_{N, N-1} = \sum_{j=1}^{N-1} \vec{F}_{Nj} = \vec{F}_N; \end{cases} \quad (5)$$

где  $\vec{F}_{ij}$  – консервативная сила, действующая на  $i^{to}$  точку со стороны  $j^{to}$  точки. Суммарная сила, действующая на  $i^{to}$  точку со стороны всех остальных точек системы, равна  $\vec{F}_i = \sum_{j=1, (j \neq i)}^N \vec{F}_{ij}$ .

Пусть за время  $dt$  радиус-векторы точек системы изменились на  $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \dots, d\vec{r}_N$ . Умножая уравнения системы (5) скалярно на соответствующие перемещения и учитывая, что  $\frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i$ , получим:

$$\begin{cases} m_1(\dot{v}_1 \cdot d\dot{v}_1) - \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = 0; \\ m_2(\dot{v}_2 \cdot d\dot{v}_2) - \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ m_N(\dot{v}_N \cdot d\dot{v}_N) - \vec{F}_N \cdot d\vec{r}_N = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$  – консервативные силы, то работа каждой такой силы, взятая с обратным знаком, равна изменению потенциальной энергии соответствующей материальной точки в силовом поле всех остальных точек. Например, работа силы  $\vec{F}_i$  при перемещении  $i$ -й точки на  $d\vec{r}_i$  равна:

$$-\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = dU_i, \quad (7)$$

где  $dU_i$  – изменение потенциальной энергии  $i$ -й материальной точки. Учитывая равенство (7), а также соотношение  $m_i \cdot \dot{v}_i \cdot d\dot{v}_i = d\left(m_i \cdot \frac{\dot{v}_i^2}{2}\right) = d\left(\frac{m_i \cdot v_i^2}{2}\right) = dE_{ki}$ , систему уравнений (6) можно записать в виде:

$$\begin{cases} dE_{k1} + dU_1 = 0; \\ dE_{k2} + dU_2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ dE_{kN} + dU_N = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Суммируя уравнения системы (8), получим:  $\sum_{i=1}^N dE_{ki} + \sum_{i=1}^N dU_i = 0$ . Поскольку  $dE_{ki}$  и  $dU_i$  в данном случае – полные дифференциалы функции, вынося знак дифференциала за знак суммы, получим:

$$d\left(\sum_{i=1}^N E_{ki} + \sum_{i=1}^N U_i\right) = 0. \quad (9)$$



Здесь сумма  $\sum_{i=1}^N E_{ki} = E_k$  обозначает полную кинетическую энергию системы, а сумма  $\sum_{i=1}^N U_i = U$  – полную энергию взаимодействия всех частиц между собой, то есть полную потенциальную энергию системы. Тогда соотношение (9) можно записать в виде:  $d(E_k + U) = 0$ , следовательно:

$$E_k + U = E = \text{const.} \quad (10)$$

Уравнение (10) выражает закон сохранения механической энергии системы материальных точек: *полная механическая энергия изолированной системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, какие бы механические изменения не происходили внутри системы.* Полная механическая энергия системы материальных точек равна сумме ее полной кинетической энергии и полной потенциальной энергии.

Если изолированная система не консервативна, то есть в ней действуют диссипативные силы, то механическая энергия такой системы убывает: уменьшение механической энергии обусловлено тем, что она расходуется на работу против диссипативных сил, действующих в системе. При этом механическая энергия не исчезает бесследно: она переходит в другую форму – во внутреннюю энергию тел. Опыт показывает, что увеличение внутренней энергии замкнутой системы равно убыли полной механической энергии системы. Поэтому, опираясь только на опыт, можно сформулировать универсальный закон сохранения энергии: *энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.*

Закон сохранения механической энергии в общей формулировке есть исключительно опытный закон. Из него следует как частный случай закон сохранения механической энергии в изолированных системах, в которых действуют только консервативные силы. Закон сохранения механической энергии в изолированных системах можно получить как следствие законов Ньютона. Однако в общем случае закон сохранения энергии является опытным и не может быть выведен из законов динамики.

## *Соударение двух тел*

Использование законов сохранения энергии и импульса позволяет решать многие задачи механики, не используя непосредственно законы Ньютона. Используем эти законы для исследования столкновения тел.

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформацию. При этом кинетическая энергия, которой обладают тела перед ударом, на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара происходит перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

Прямая линия, проходящая через точку соприкосновения соударяющихся тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется линией удара. Удар называется прямым, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара. Удар называется центральным, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

Различают два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. Абсолютно упругим называется такой удар, при котором механическая энергия не переходит в другие, немеханические виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела восстанавливают первоначальную форму, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются двумя условиями – сохранением полной механической энергии и полного импульса системы тел.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает; кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После неупругого удара тела движутся с одинаковой скоростью или покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса, закон сохране-

ния механической энергии не выполняется – имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух частиц, образующих замкнутую систему. Обозначим массы частиц  $m_1$  и  $m_2$ , скорости до удара  $\vec{v}_{01}$  и  $\vec{v}_{02}$ . Согласно закону сохранения импульса можно записать:

$$m_1 \cdot \vec{v}_{01} + m_2 \cdot \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v},$$

где  $\vec{v}$  – одинаковая для обеих частиц скорость после удара. Из последнего соотношения можно получить:

$$\vec{v} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_{01} + m_2 \cdot \vec{v}_{02}}{(m_1 + m_2)}. \quad (11)$$

Для практических расчетов необходимо спроектировать соотношение (11) на выбранные направления.

## II. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Баллистическим маятником называется тело, подвешенное на длинных тонких нитях, которое может колебаться вокруг горизонтальной оси. В данной работе для определения скорости пули используется баллистический маятник, представляющий собой цилиндр, частично заполненный пластином и подвешенный в горизонтальной плоскости на четырех длинных и легких нитях (рис. 3). Масса цилиндра с пластином равна  $M$ . Пуля массой  $m$ , летящая горизонтально со скоростью  $\vec{v}$ , попадает в маятник и застревает в нем. При этом происходит неупругий удар. После удара маятник совершает колебания так, что его продольная ось остается параллельной

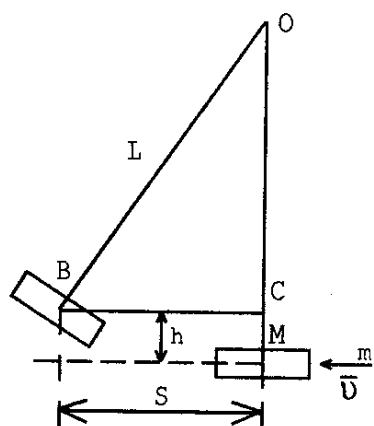


Рис. 3

самой себе, а центр масс движется по дуге окружности. Вследствие большой длины нитей маятника при ударе угол отклонения нитей от вертикали невелик, и приближенно можно считать, что сила тяжести уравновешивается силой натяжения нитей. Поэтому систему «пуля–маятник» можно считать изолированной, что позволяет использовать закон сохранения импульса:

$$m \cdot \vec{v} = (m + M) \cdot \vec{u}, \quad (12)$$

где  $\vec{u}$  – скорость системы «пуля–маятник» после удара. Проектируя уравнение (12) на горизонтальную плоскость, получим:  $m \cdot v = (m + M) \cdot u$ .

Следовательно, скорость пули до удара определяется выражением:

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot u. \quad (13)$$

Для определения скорости маятника с пулей после удара можно воспользоваться законом сохранения механической энергии, который выполняется при колебаниях маятника после неупругого столкновения с пулей, если пренебречь сопротивлением воздуха. Кинетическая энергия, полученная системой при столкновении пули с маятником, находящимся в положении равновесия, переходит в потенциальную энергию после отклонения маятника на высоту  $h$ :

$$(m + M) \cdot \frac{u^2}{2} = (m + M) \cdot g \cdot h,$$

следовательно,  $u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ . Подстановка выражения для скорости  $u$  в уравнение (13) позволяет выразить скорость пули до удара:

$$v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (14)$$

Величину  $h$  можно выразить через отклонение  $S$  маятника от положения равновесия. Из треугольника  $OBC$  (рис. 3) следует:

$$S^2 = L^2 - (L - h)^2,$$

откуда:

$$S^2 = 2Lh - h^2. \quad (15)$$

Поскольку  $h \ll L$  и  $h^2 \ll L^2$ , в уравнении (15) можно пренебречь слагаемым  $h^2$ , высоту  $h$  подъема маятника можно выразить в виде:

$$h = \frac{S^2}{2L}. \quad (16)$$

Подставляя равенство (16) в уравнение (14) с учетом того, что  $m \ll M$ , можно получить окончательное выражение скорости полета пули до удара:

$$v = \frac{M}{m} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (17)$$

### III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Приборы и принадлежности: баллистический маятник, отсчетная шкала, пружинный пистолет, набор пуль, весы, разновесы.

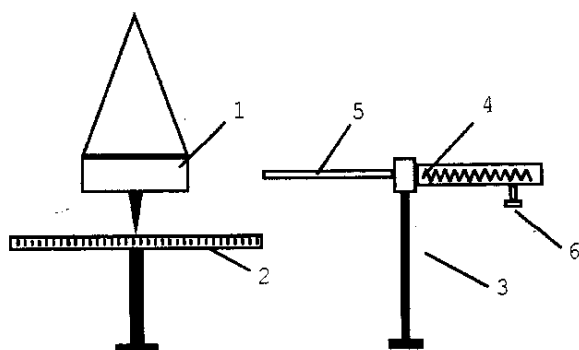


Рис. 4

Установка для определения скорости пули состоит из баллистического маятника 1, отсчетной шкалы 2, пружинного пистолета 3 (рис. 4). Баллистический маятник представляет собой металлический цилиндр, наполовину заполненный пластилином, подвешенный на

длинных нитях.

Данные установки: масса маятника  $M = (469,50 \pm 0,02)$  г, длина нити от точки подвеса до центра масс маятника  $L = (218,0 \pm 0,5)$  см.

### IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Взвесить пулю на лабораторных весах. Повторить взвешивание, поместив пулю на другую чашку весов. Вычислить среднее значение массы и определить погрешность определения массы.

2. Установить шкалу 2 параллельно отсчетной стрелке (рис. 4) на расстоянии 5–6 мм от нее.

3. Подготовить пистолет к выстрелу. Для этого отвести рычаг 4 в крайнее правое положение, вставить пулю в дуло 5 пистолета, задвинуть ее шомполом до отказа, нацелить пистолет на центр цилиндра маятника и произвести выстрел, отводя курок 6 вертикально вниз.

4. Измерить с помощью стрелки по шкале 2 максимальное смещение  $S$  маятника от положения равновесия.

5. Опыт повторить 10 раз, записывая данные в таблицу.

6. С помощью формулы (17) рассчитать скорость полета пули.

7. Вывести формулу для расчета погрешности определения скорости пули и вычислить погрешность. Записать результат с погрешностью.
8. Выполнить аналогичные измерения для другой пули.
9. Сделать выводы.

## V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие силы называются консервативными? Приведите примеры таких сил. Какое поле называется потенциальным?
2. Получить и сформулировать закон сохранения механической энергии. Обосновать возможность его применения в данной работе.
3. Какая система называется изолированной? Получить закон сохранения импульса исходя из свойства однородности пространства.
4. Сформулировать и записать закон сохранения импульса для вектора импульса и отдельных его проекций. Получить законы сохранения импульса и механической энергии как первые интегралы движения.
5. Рассмотреть виды удара, особенности неупругого удара.
6. Вывести рабочую формулу для определения скорости пули.

## РАБОТА № 4. ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

Цель работы: ознакомление с плоским движением твердого тела на примере маятника Максвелла и определение его момента инерции.

### I. ВВЕДЕНИЕ

При решении разнообразных задач прикладной механики возникает необходимость рассматривать движение тел, размерами которых нельзя пренебречь, то есть такие тела нельзя рассматривать как материальные точки. Все реально существующие тела в большей или меньшей степени деформируются под действием приложенных к ним сил. Для упрощения описания движения вводится понятие абсолютно твердого тела. *Абсолютно твердым телом* называется идеализированная система, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными. Здесь под материальными точками понимают не отдельные атомы или молекулы, а достаточно малые макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемую систему. Представление твердого тела как системы материальных точек позволяет применять для описания движения твердого тела результаты, полученные для произвольной системы материальных точек.

Для однозначного описания движения материальной точки необходимо задать три функции, характеризующие зависимость ее координат от времени. Для описания системы  $N$  материальных точек, движущихся независимо друг от друга, необходимо задать  $3N$  функций, характеризующих зависимость координат этих точек от времени. Число независимых параметров, которыми описывается движение системы материальных точек, называется *числом ее степеней свободы*.

Чтобы однозначно задать положение твердого тела в пространстве, необходимо зафиксировать три произвольные точки этого тела, не лежащие на одной прямой. Положение этих трех точек однозначно описывается девятью координатами, которые связаны тремя соотношениями. Следовательно-

но, положение абсолютно твердого тела характеризуется шестью независимыми параметрами, то есть твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Различают пять видов движения абсолютно твердого тела: поступательное, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение, вращение вокруг неподвижной точки и свободное движение. Первые два вида движения – поступательное и вращение вокруг неподвижной оси – являются основными видами движения твердого тела. Основные формы движения можно свести к одному из основных видов движения или к их совокупности. Поступательное движение в пространстве можно рассматривать как сумму независимых движений по трем координатным осям, а вращательное движение – как сумму вращательных движений около этих осей. Таким образом, из шести степеней свободы твердого тела три степени свободы являются поступательными, а три – вращательными.

*Плоским* называется такое движение, при котором все точки твердого тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, неподвижной в данной системе отсчета. При плоском движении положение твердого тела полностью определяется положением отрезка прямой, жестко связанной с точками тела в одном из сечений. На рис. 1 рассмотрим перемещение отрезка из положения  $A_0B_0$  в положение  $AB$  за промежуток времени  $dt$ . Это перемещение может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного из положения  $A_0B_0$  в  $A'B'$ , при котором тело перемещается параллельно самому себе, и вращательного, при котором тело поворачивается на угол  $\alpha$  вокруг оси, проходящей через точку  $O'$  перпендикулярно плоскости движения твердого тела. Существует множество способов раз-

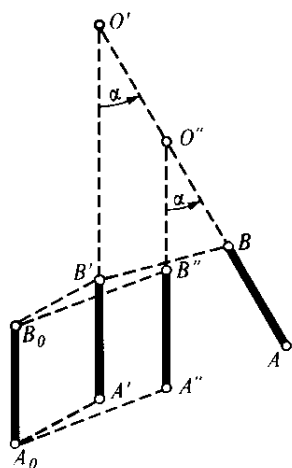


Рис. 1

ложения плоского движения на поступательное и вращательное. Например, тело могло переместиться из положения  $A_0B_0$  в  $A''B''$ , а затем, повернувшись на угол  $\alpha$  вокруг оси  $O''$ , занять положение  $AB$ . Таким образом, разложение плоского движения на поступательное и вращательное неоднозначно, однако угол поворота  $\alpha$  при данном перемещении неизменен.



В целом плоское движение может быть представлено как сумма двух перемещений:  $d\vec{r} = d\vec{\ell} + d\vec{r}_B$ ; где  $d\vec{\ell}$  – поступательное перемещение всех точек тела из положения  $A_0B_0$  в положение  $A'B'$  или в  $A''B''$ ;  $d\vec{r}_B$  – элементарное перемещение, обусловленное вращением тела вокруг неподвижной оси  $O'$  или  $O''$  на угол  $d\alpha$ , причем  $d\vec{r} = d\vec{\ell} + [d\vec{\alpha}, \vec{r}]$ , здесь  $\vec{r}$  – радиус вращения. Разделив обе части полученного равенства на элементарное время перемещения  $dt$ , можно получить формулу скорости при плоском движении:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad (1)$$

где  $\vec{v}_0 = d\vec{\ell}/dt$  и  $\vec{\omega} = d\vec{\alpha}/dt$ . Изменение соотношения между  $d\vec{\ell}$  и  $\vec{r}$  приводит к изменению положения оси вращения и скоростей  $\vec{v}_0$  и  $\vec{\omega}$ . Следовательно, можно выбрать такую ось вращения, когда скорость поступательного движения  $\vec{v}_0$  равна нулю. Ось вращения, относительно которой скорость поступательного движения равна нулю, называется мгновенной осью вращения. Таким образом, при плоском движении твердое тело может быть переведено из одного положения в любое другое положение с помощью одного поворота вокруг некоторой оси. Это положение является частным случаем теоремы Эйлера.

Произвольное плоское движение можно представить в виде ряда следующих друг за другом бесконечно малых перемещений. В результате получится ряд бесконечно близких положений 1, 2, 3, 4, ..., последовательно проходимых телом. Согласно теореме Эйлера переход из положения 1 в положение 2 может быть осуществлен поворотом вокруг некоторой оси  $O_1$ , из положения 2 в положение 3 – поворотом вокруг оси  $O_2$  и так далее. Поэтому произвольное плоское движение твердого тела можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве.

Таким образом, плоское движение полностью определяется движением одного из сечений в какой-либо из параллельных плоскостей, а положение сечения – координатами двух его точек. Положение двух точек в плоскости характеризуется четырьмя координатами, которые связаны одним со-

отношением, выражающим постоянство расстояния между двумя точками. Поэтому плоское движение описывается однозначно с помощью трех степеней свободы.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные элементарные части тела массами  $m_i$  описывают окружности различных радиусов  $r_i$  и имеют различные линейные скорости  $v_i$ . Однако угловая скорость вращения  $\omega$  всех этих точек (если тело при вращении не деформируется) одинакова, то есть

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots$$

Кинетическая энергия вращающегося тела  $W_k$  может быть рассчитана как сумма кинетических энергий его составных частей:

$$W_k = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} + \dots = \frac{m_1 \cdot r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 \cdot r_2^2 \omega^2}{2} + \dots = \frac{\omega^2}{2} \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots).$$

Сумма произведений масс элементарных частей тела на квадраты их расстояний до определенной оси называется *моментом инерции тела* относительно этой оси:

$$J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots = \sum_i m_i \cdot r_i^2.$$

или более точно

$$J = \int_V r^2 \cdot dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Тогда выражение для кинетической энергии вращающегося твердого тела можно записать в виде:

$$W_k = \frac{J \cdot \omega^2}{2}.$$

Момент инерции тела зависит от распределения массы рассматриваемого тела относительно заданной оси (от формы, размеров тела и расположения оси, относительно которой определяется момент инерции).

Кинетическая энергия тела при плоском движении относительно оси вращения, проходящей через центр масс, определяется соотношением:

$$W_k = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + \frac{J_0 \cdot \omega^2}{2}, \quad (2)$$

где  $v_0$  – скорость центра масс,  $J_0$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости, параллельно которой движутся все точки тела.

## II. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ И ПРИБОРА

Принцип работы основан на фундаментальном законе физики – законе сохранения механической энергии, который гласит, что полная механическая энергия изолированной системы, в которой действуют только консервативные силы, с течением времени не изменяется.

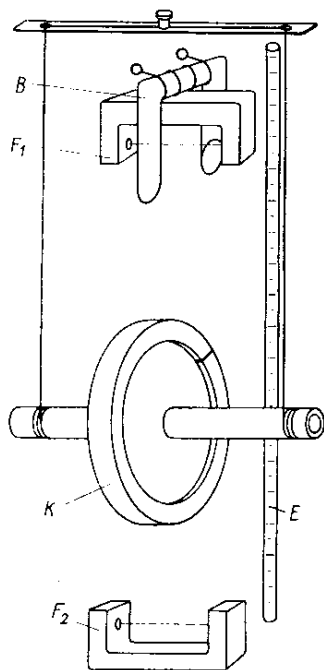


Рис. 2

Маятник Максвелла представляет собой однородный металлический диск, в середине которого укреплен металлический стержень (рис. 2). К концам этого стержня прикреплены две капроновые нити (маятник подвешен бифилярно), которые виток к витку наматываются на стержень от его концов к диску. При освобождении маятника он начинает движение: поступательное – вниз и вращательное – вокруг своей оси симметрии. По мере движения маятника вниз увеличивается кинетическая энергия вращательного движения маятника (второе слагаемое уравнения (2)), поэтому вращение, продолжаясь по инерции, в низшей точке движения, когда нити уже размотаны, вновь приводит к наматыванию нитей на стержень, а,

следовательно, и к подъему маятника. Движение маятника после этого замедляется, маятник останавливается и вновь начинает движение вниз и так далее.

Пренебрегая силами трения и сопротивлением воздуха, для маятника можно записать уравнение закона сохранения механической энергии:

$$W_p = W_k' + W_k'', \quad (3)$$

где  $W_p$  – потенциальная энергия системы, поднятой на высоту  $h$ ,  $W_k'$  – кинетическая энергия поступательного движения системы,  $W_k''$  – кинетическая энергия вращательного движения системы в низшей точке. Используя соотношение (2), уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$mgh = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + \frac{J_0 \cdot \omega^2}{2}. \quad (4)$$

Используя известные формулы равноускоренного движения  $v_0 = at$  и  $h = at^2/2$ , где  $a$  – ускорение центра масс, а также связь линейной скорости центра масс  $v_0$  и угловой скорости  $\omega$  маятника  $v_0 = \omega \cdot r$ , где  $r$  – радиус стержня маятника, уравнение (4) можно записать в виде:

$$mgh = \frac{2 \cdot m \cdot h^2}{t^2} + \frac{2 \cdot J_0 \cdot h^2}{r^2 \cdot t^2}.$$

Из данного уравнения можно выразить момент инерции диска (вместе со

стержнем и нитью):  $J = m \cdot r^2 \cdot \left( \frac{g \cdot t^2}{2h} - 1 \right)$ , или

$$J = \frac{m \cdot D^2}{4} \cdot \left( \frac{g \cdot t^2}{2h} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $D$  – внешний диаметр стержня маятника,  $h$  – высота, на которую была поднята ось маятника,  $m$  – масса маятника вместе с кольцом, определяемая по формуле:

$$m = m_0 + m_d - m_k, \quad (6)$$

где  $m_0$  – масса стержня маятника,  $m_d$  – масса самого маятника (диска),  $m_k$  – масса надетого на диск кольца.

Движение маятника Максвелла является примером плоского движения. Плоское движение любого твердого тела, при котором все точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости, может быть сведено к движению некоторой неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости. Такое движение складывается из поступательного движения какой-либо точки этой фигуры и ее вращения относительно этой точки. Если в кинематике это может быть любая точка тела, то в динамике в качестве такой точки удобно использовать центр масс тела. Это позволяет применить теорему

о движении центра масс и уравнение моментов для описания движения маятника Максвелла.

Поскольку движение маятника Максвелла происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нитей, то устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно только, если нити находятся в вертикальной

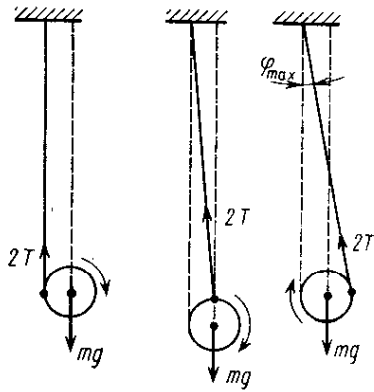


Рис. 3

плоскости (рис. 3). При отклонении нитей от вертикальной плоскости у силы натяжения возникает горизонтальная составляющая, возвращающая маятник к положению, когда нити были вертикальны, то есть возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это явление наблюдается во время подъема маятника, когда нити отклоняются от вертикальной плоскости. Перед опусканием маятника в правильном

исходном положении нити должны находиться в вертикальной плоскости, поэтому движение маятника вниз происходит без колебаний.

Без учета сил трения о воздух и отклонения нитей от вертикали уравнения движения маятника Максвелла вверх и вниз одинаковы и имеют вид:

$$ma = mg - 2T, \quad (7)$$

$$J \cdot \varepsilon = 2 \cdot r \cdot T, \quad (8)$$

$$a = \varepsilon \cdot r, \quad (9)$$

где  $m$  – масса маятника (6),  $J$  – момент инерции маятника относительно его оси,  $r$  – радиус стержня маятника,  $T$  – сила натяжения одной нити,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $a$  – ускорение поступательного движения центра масс маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника. Выражая из формулы (9) угловое ускорение  $\varepsilon = a/r$ , уравнение (8) можно преобразовать:

$$J \cdot a = 2 \cdot r^2 \cdot T. \quad (10)$$

Подстановка произведения  $2T = m \cdot (g - a)$  из уравнения (7) в формулу (10) дает:

$$J \cdot a = r^2 \cdot m \cdot (g - a). \quad (11)$$

Используя уравнение равноускоренного движения  $h = at^2/2$ , а также учитывая, что  $D = 2r$ , из соотношения (11) можно получить формулу для расчета момента инерции, совпадающую с выражением (5).

Общий вид (сбоку) установки представлен на рис. 4. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют привести прибор в строго вертикальное положение. В основании закреплена колонка 3, к которой

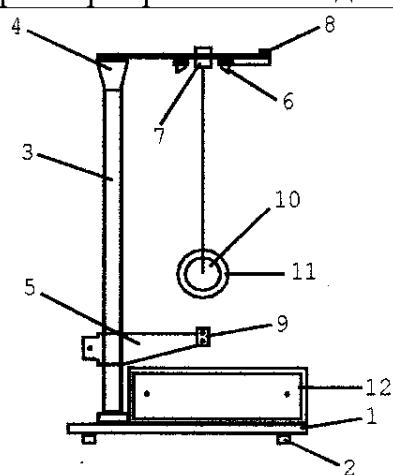


Рис. 4

прикреплён неподвижный верхний кронштейн 4 и подвижный нижний кронштейн 5. На верхнем кронштейне находится электромагнит 6, фотоэлектрический датчик 7 и вороток 8 для закрепления и регулирования длины бифилярной подвески маятника. Нижний кронштейн вместе с прикрепленным к нему фотоэлектрическим датчиком 9 можно перемещать вдоль колонки и фиксировать в произвольно выбранном положении. Сам маятник Максвелла – это закрепленный на стержне диск 10, подвешенный бифилярным способом, на который

накладываются сменные кольца 11. Маятник с надетым на него кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Высота  $h$  определяется по миллиметровой шкале на колонке прибора. Для облегчения измерения  $h$  на нижнем кронштейне имеется черный указатель на высоте оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика.

Электронная схема установки включает схему измерителя времени – миллисекундомера, помещенного в основании прибора, схемы фотоэлектрических датчиков и электромагнита. Элементы текущего обслуживания установки – клавиши «сеть», «пуск», «сброс» – размещены на передней панели миллисекундомера.

При нажатии клавиши «сеть» загораются осветители фотодатчиков и индикатор миллисекундомера. Нажатие клавиши «пуск» приводит к выключению электромагнита и маятник начинает двигаться, открывая окошко верхнего фотодатчика. При этом включается миллисекундомер. При достижении нижней точки маятник перекрывает окошко нижнего фотоэлектрического датчика и этим выключает миллисекундомер.

Нажатие клавиши «сброс» приводит к обнулению индикатора.

### III. ПАРАМЕТРЫ УСТАНОВКИ

1. Масса стержня маятника  $m_0 = (0,0330 \pm 0,0005)$  кг;
2. Масса диска первой установки  $m_{Д1} = (0,1260 \pm 0,0005)$  кг; второй установки  $m_{Д2} = (0,1200 \pm 0,0005)$  кг;
3. Массы заменяемых колец  $m_{К1} = (0,2590 \pm 0,0005)$  кг;  $m_{К2} = (0,3890 \pm 0,0005)$  кг;  $m_{К3} = (0,5240 \pm 0,0005)$  кг;
4. Диаметр оси маятника  $D = (10,00 \pm 0,05)$  мм.

### IV. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

#### *Подготовка установки к измерениям*

Нижний кронштейн прибора зафиксировать в крайнем нижнем положении. На диск маятника осторожно надеть кольцо, прижимая его до упора. Нажать клавишу «сеть».

Перед началом измерений необходимо убедиться, что длины нитей маятника одинаковы. При необходимости их длина может быть уравнена при помощи регулировочного винта 8 (рис. 4). Намотав нити на стержень, установить маятник в наивысшем положении, где он фиксируется с помощью электромагнитов  $B$ , притягивающих сменное кольцо  $K$  (рис. 2). Проверить, отвечает ли нижняя поверхность кольца нулю шкалы на колонке. Если нет, обратитесь к лаборанту. Проследить за тем, чтобы нижний край стального кольца после опускания маятника находился на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика. Одновременно скорректировать параллельность оси маятника основанию прибора и расположение диска точно в середине установки.

При нажатии клавиши «пуск» цепь питания электромагнитов разрывается и маятник освобождается. Электронный секундомер включается при пересечении верхним краем сменного кольца  $K$  маятника светового пучка фотоэлектрического датчика  $F_1$  (рис. 2), установленного вблизи верхней точки движения. Выключение секундомера происходит, когда нижний край

сменного кольца пересекает световой пучок нижнего фотодатчика  $F_2$ . Время опускания маятника  $t$  считывается с цифрового табло электронного секундомера. Записав показания секундомера, нажимают клавишу «сброс», отжимают клавишу «пуск» и повторяют измерения.

### Измерения

1. Тщательно, виток к витку, намотать на стержень нить подвески и зафиксировать маятник при помощи электромагнита.
2. Повернуть маятник в направлении его движения на угол около  $5^\circ$ .
3. Нажать клавишу «сброс».
4. Нажать клавишу «пуск».
5. Прочитать измеренное значение времени на экране миллисекундомера. Повторить измерение времени 5 раз. Результаты измерений занести в таблицу.

Таблица

№ кольца	m, кг	h, м	t <sub>1</sub> , с	t <sub>2</sub> , с	t <sub>3</sub> , с	t <sub>4</sub> , с	t <sub>5</sub> , с	$\langle t \rangle$ , с	J, кг·м <sup>2</sup>
1									
2									
3									

6. По шкале на вертикальной колонке прибора определить высоту  $h$  падения оси маятника.
7. Повторить все измерения с двумя другими кольцами.
8. С помощью формул (5) и (6) вычислить момент инерции маятника.
9. Рассчитать погрешности измерения момента инерции маятника Максвелла.
10. Представить результаты измерений с погрешностями. Сделать выводы.



## V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется абсолютно твердым телом, числом степеней свободы? Сколько степеней свободы имеет абсолютно твердое тело?
2. Охарактеризуйте плоское движение абсолютно твердого тела. Сформулируйте и докажите теорему Эйлера для плоского движения.
3. Получите выражение кинетической энергии твердого тела при плоском движении.
4. Выведите рабочую формулу для определения момента инерции маятника Максвелла, используя закон сохранения механической энергии.
5. Выведите рабочую формулу для определения момента инерции маятника Максвелла, используя уравнения движения системы.
6. Каковы возможные погрешности при определении момента инерции маятника Максвелла?
7. Выведите формулу для расчета погрешности определения момента инерции маятника Максвелла.

## РАБОТА № 7. ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА

Цель работы: экспериментальная проверка основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Любое сложное движение твердого тела сводится к поступательному движению и вращению. При поступательном движении все точки твердого тела движутся с одинаковыми скоростями и ускорениями. В каждом теле существует такая точка, что при описании движения всю массу тела  $m$  можно считать сосредоточенной в этой точке, а все внешние силы – приложенными к ней. Данная точка называется центром масс или инерции. Поступательное движение тел обычно рассматривается как движение материальной точки массой  $m$ , находящейся в центре инерции.

Вращательное движение твердого тела можно рассматривать как вращение в системе координат, начало которой совпадает с центром инерции.

Рассмотрим твердое тело  $A$  (рис. 1), которое может вращаться вокруг неподвижной оси. Для того, чтобы вызвать вращение тела, необходимо внешнее воздействие. Однако сила  $F'$ , продолжение которой проходит через ось вращения, или сила  $F''$ , параллельная оси, не могут изменить угловую скорость. Поэтому из при-

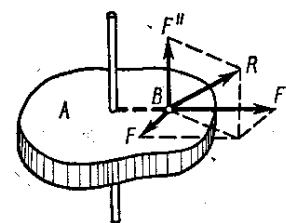


Рис. 1

ложенной к телу силы  $\vec{R}$  можно выделить составляющие  $F'$  и  $F''$ , не вызывающие вращения. Вращение может быть вызвано только силой  $F$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направленной по касательной к окружности, которую описывает точка ее приложения.

Одной из основных характеристик движения является момент импульса. Рассмотрим движение частицы, положение которой характеризуется радиусом-вектором  $\vec{r}$  относительно произвольной точки  $O$  выбранной системы отсчета в некоторый момент времени (рис. 2). Импульс частицы в данный момент времени  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ .

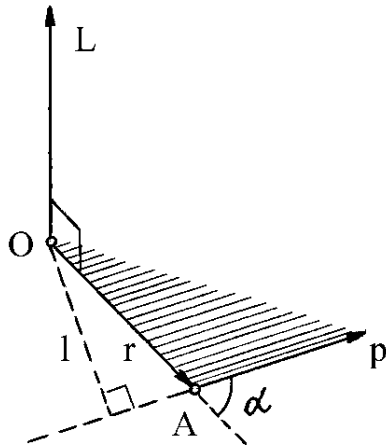


Рис. 2

Моментом импульса частицы  $A$  относительно точки  $O$  называется вектор  $\vec{L}$ , равный векторному произведению векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \quad (1)$$

Из определения следует, что вектор  $\vec{L}$  перпендикулярен плоскости, в которой находятся векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ , и образует с ними правую тройку векторов. Это значит, что если

вектор  $\vec{r}$  вращать в направлении, указанном вектором  $\vec{p}$ , то вектор  $\vec{L}$  должен совпадать с направлением поступательного движения правого винта. Модуль вектора момента импульса равен:

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot \ell, \quad (2)$$

где  $\ell = r \cdot \sin \alpha$  – плечо вектора  $\vec{p}$  относительно точки  $O$ .

Дифференцирование уравнения (1) по времени дает:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Поскольку вектор скорости  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  и вектор импульса  $\vec{p}$  коллинеарны, первое слагаемое правой части последнего равенства равно нулю. Поэтому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right],$$

Где, согласно второму закону Ньютона,  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , следовательно,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3)$$

Векторное произведение  $[\vec{r}, \vec{F}]$  называется *моментом силы*  $\vec{M}$ , действующей на частицу, относительно точки  $O$ , то есть

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (4)$$

Вектор  $\vec{M}$ , как и вектор  $\vec{L}$ , является аксиальным. Векторы  $\vec{M}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  образуют правую тройку векторов, и направление вектора  $\vec{M}$  определяется из правила правого винта. Модуль момента силы равен:  $M = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = F \cdot \ell$ , где  $\ell = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}})$  – плечо силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ .

Подстановка формулы (4) в уравнение (3) дает:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5)$$

то есть, производная по времени от момента импульса частицы относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета равна моменту действующей силы относительно той же точки  $O$ . Соотношение (5) называется *уравнением моментов*. Если точку  $O$  считать началом декартовой системы координат, то векторное уравнение (5) эквивалентно трем уравнениям:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  – проекции вектора  $\vec{L}$  на оси координат. Их называют моментами импульса твердого тела относительно неподвижных осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  соответственно.

Из уравнения моментов (5), в частности, следует, что если  $\vec{M} = 0$ , то  $\vec{L} = const$ , то есть если относительно некоторой точки  $O$  выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение некоторого промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого промежутка времени.

Умножив обе части уравнения моментов (5) на  $dt$ , можно получить выражение  $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ , определяющее элементарное приращение вектора  $\vec{L}$ . Интегрирование данного выражения по времени позволяет получить приращение вектора  $\vec{L}$  за конечный промежуток времени:

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M} \cdot dt.$$

Величину  $\int_0^t \vec{M} \cdot dt$  называют *импульсом момента силы*. Таким обра-

зом, приращение момента импульса частицы за произвольный промежуток времени равно импульсу момента силы за этот же временной интервал.

Рассмотрим вращение частицы массой  $m$  под действием силы  $\vec{F}$  по окружности радиусом  $r$ . Тогда радиус-вектор частицы относительно центра  $O$  окружности в любой момент времени равен  $\vec{r}$ . Если линейная скорость частицы равна  $\vec{v}$ , то импульс частицы равен  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ .

Подстановка последнего выражения в формулу (1) дает:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}] = m [\vec{r} [\vec{\omega}, \vec{r}]] = mr^2 \vec{\omega}. \quad (6)$$

Скалярная физическая величина  $J$ , равная произведению массы частицы на квадрат ее расстояния до оси вращения частицы, называется *моментом инерции* частицы относительно оси вращения:

$$J = mr^2. \quad [кг \cdot м^2] \quad (7)$$

Уравнение (6) с учетом формулы (7) принимает вид:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (8)$$

Подстановка формулы (8) в уравнение моментов (5) дает:

$$\frac{d(J\vec{\omega})}{dt} = \vec{M},$$

окончательно:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (9)$$

где  $\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение.

Соотношение (9) называется основным уравнением динамики вращательного движения. Из уравнения (9), которое называют также вторым законом Ньютона для вращательного движения, следует, что момент вращающей силы относительно центра вращения, приложенный к телу, равен произведению момента инерции тела относительно центра вращения на угловое ускорение. Таким образом, угловое ускорение, сообщаемое телу вращающим моментом  $\vec{M}$ , зависит от момента инерции тела  $J$ : чем больше момент инерции, тем меньше угловое ускорение. Следовательно, момент

инерции характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении подобно тому, как масса характеризует инерционные свойства при поступательном движении. Однако в отличие от массы момент инерции тела может иметь множество значений, соответствующих различным положениям центра вращения. Поэтому при рассмотрении момента инерции необходимо указывать, относительно чего он рассчитан.

## II. ОПИСАНИЕ ПРИБОРА

Для изучения вращательного движения используют маятник Обербека (рис. 3). Маятник состоит из четырех спиц 1, укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива 4 диаметрами  $d_1 = 2r_1$  и

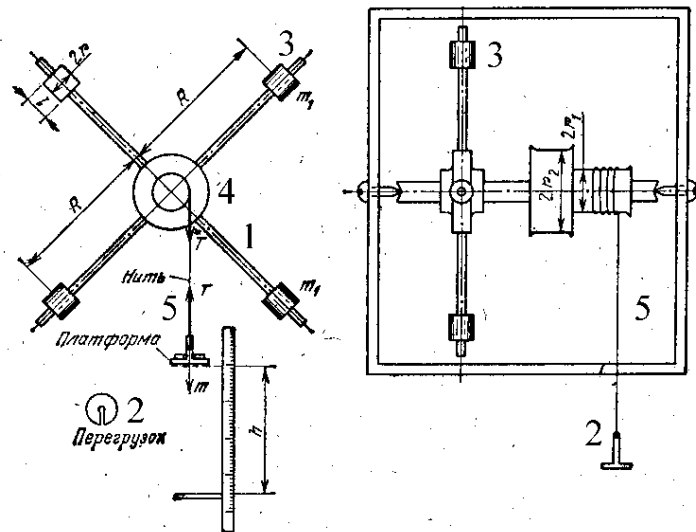


Рис. 3

$d_2 = 2r_2$  насажены на общую ось. На спицы маховика надеты одинаковые цилиндры 3, положение которых можно изменять, перемещая их вдоль спиц. Ось закреплена в игольчатых подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К концу нити 5, намотанной на шкив 4, привязана платформа известной массы, которая служит для размещения грузов 2.

Если, намотав нить на шкив, поднять платформу с грузами на высоту  $h$ , а затем отпустить, позволив ему свободно двигаться, то под действием вращающего момента силы натяжения  $\vec{T}$  нити маховик начнет вращаться. Пренебрегая силами трения и массой блока, можно записать уравнения движения груза и маятника соответственно:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{T}, \quad (10)$$

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (11)$$

Спроектировав равенство (10) на ось координаты, направленную вниз, а равенство (11) на ось координаты, направленную вдоль оси вращения, получим:

$$m \cdot a = m \cdot g - T, \quad (10')$$

$$J \cdot \varepsilon = M. \quad (11')$$

Здесь  $M = R \cdot T$ , где  $R$  – радиус шкива,  $T$  – сила натяжения нити,  $a$  – ускорение груза,  $m$  – масса груза,  $\varepsilon$  – угловое ускорение крестообразного маятника,  $J$  – момент инерции маховика.

Решение системы уравнений (10') и (11'), выполненное с учетом соотношений  $a = \varepsilon \cdot R$ ,  $R = d/2$ ,  $h = a \cdot t^2/2$ , где  $t$  – время движения груза, приводит к следующим выражениям:

$$M = m \cdot \left( g - \frac{2 \cdot h}{t^2} \right) \cdot \frac{d}{2}, \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot h}{t^2 \cdot d}. \quad (13)$$

При выполнении работы на приборе, закрепленном на стене, груз, висящий на нити, располагается так, чтобы нижний край платформы был на уровне глаз. Проектируя нижний край платформы на шкалу, определяют деление, означающее величину высоты  $h$ , отсчитываемой от пола. Секундомер включают одновременно с освобождением груза и выключают при ударе груза о пол.

Если работа выполняется на настольном приборе, то высота измеряется по шкале на стойке прибора как расстояние между кронштейнами фотоэлементов, причем нижний кронштейн неподвижно установлен на нулевом делении. С помощью регулируемых ножек приводят стойку прибора в вертикальное положение, одновременно проверяя, не задевает ли платформа с грузами во время движения корпус верхнего и нижнего фотоэлектрического датчика. Платформу с грузами в верхнем положении устанавливают так, чтобы ее нижний край совпал с чертой на корпусе верхнего фотоэлектрического датчика, не перекрывая его окошка.

При нажатии кнопки «сеть» загорается осветитель фотодатчиков и индикатор секундомера. В верхнем положении вся система удерживается

механическим тормозом в виде фрикционной муфты, которую электромагнит прижимает к маховику.

Нажатие кнопки «пуск» приводит к выключению электромагнита, и платформа с грузом начинает двигаться, перекрывая окошко верхнего фотодатчика. При этом включается секундомер. В конце своего движения платформа с грузами перекрывает окошко нижнего фотодатчика. При этом выключается секундомер и включается тормозящее устройство.

Нажатие кнопки «сброс» приводит к обнулению индикатора и выключению тормоза, чтобы можно было поднять платформу с грузом в верхнее положение. Отжатие кнопки «пуск» включает тормоз, и прибор готов к очередному эксперименту.

### III. ПАРАМЕТРЫ УСТАНОВКИ

1. Настенный прибор: диаметр шкива  $d = (0,0340 \pm 0,0001)$  м; расстояние от оси вращения до цилиндра, расположенного вплотную к шкиву  $\ell_1 = (0,032 \pm 0,001)$  м; расстояние от оси вращения до центра цилиндра, расположенного на дальнем конце стержня  $\ell_2 = (0,218 \pm 0,001)$  м; масса цилиндра  $m_0 = (0,1420 \pm 0,0001)$  кг; массы грузов  $m_1 = (0,1000 \pm 0,0001)$  кг и  $m_2 = (0,1500 \pm 0,0001)$  кг.

2. Настольный прибор: диаметры шкивов  $d = (0,0838 \pm 0,0001)$  м и  $d = (0,0418 \pm 0,0001)$  м; расстояние от оси до центра цилиндра, расположенного на минимальном расстоянии от оси  $\ell_1 = (0,0595 \pm 0,0001)$  м; расстояние от оси до центра цилиндра, расположенного на максимальном расстоянии от оси  $\ell_2 = (0,2395 \pm 0,0001)$  м; масса одного цилиндра  $m_0 = (0,1890 \pm 0,0001)$  кг; масса платформы  $m_1 = (0,0053 \pm 0,0001)$  кг; масса каждого добавочного груза  $m = (0,0410 \pm 0,0001)$  кг.

Абсолютную погрешность массы составного груза рассчитывают по формуле:

$$\Delta m = \sqrt{\sum_i (\Delta m_i)^2}.$$



#### IV. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

*Задание 1. Проверка пропорциональности углового ускорения моменту силы (при постоянном моменте инерции)*

##### Упражнение 1

1. Расположить цилиндры на стержнях на минимальном расстоянии от оси вращения.
2. Установить указанное преподавателем значение высоты  $h$ .
3. Используя пустую платформу в качестве груза, измерить время ее движения с этой высоты  $h$ .
4. Повторить опыт 5 раз и вычислить среднее значение времени движения платформы.
5. Добавляя на платформу грузы, повторить измерения для пяти значений массы.

Результаты измерений и расчетов занести в табл. 1.

Таблица 1

$m, \text{ кг}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$
$m_1 \quad \text{кг}$						
$m_1 + m, \text{ кг}$						
$m_1 + 2m, \text{ кг}$						
$m_1 + 3m, \text{ кг}$						
$m_1 + 4m, \text{ кг}$						

6. Вычислить угловое ускорение и момент силы для каждого значения массы. Данные занести в табл. 2.

Таблица 2

$m_b, \text{ кг}$	$\varepsilon, \text{ с}^{-2}$	$M, \text{ Н}\cdot\text{м}$

7. На миллиметровой бумаге построить график зависимости углового ускорения от момента силы. Вычислить котангенс угла наклона ( $\text{ctg}\alpha_1$ ) графика.

## Упражнение 2

1. Расположить цилиндры на стержнях на максимальном расстоянии от оси.

2. Повторить все измерения, описанные в первом упражнении, для тех же масс груза и той же высоты  $h$ .

3. Вычислить значения углового ускорения и момента силы для каждой массы груза. Данные занести в таблицы (аналогичные таблицам 1 и 2).

4. На миллиметровой бумаге построить график зависимости углового ускорения от момента силы. Вычислить котангенс угла наклона ( $ctga_2$ ) графика.

5. Вычислить разность ( $ctga_2 - ctga_1$ ).

6. Учитывая, что момент инерции маятника в первом упражнении был равен

$$J_1 = J_0 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_1^2,$$

а во втором случае он был

$$J_2 = J_0 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_2^2,$$

вычислить изменение момента инерции системы:

$$\Delta J = 4 \cdot m_0 \cdot (\ell_2^2 - \ell_1^2).$$

7. Рассчитать погрешность изменения момента инерции и разности котангенсов углов наклона графиков. Сравнить значения ( $ctga_2 - ctga_1$ ) и  $\Delta J = 4 \cdot m_0 \cdot (\ell_2^2 - \ell_1^2)$ . Сделать выводы.

*Задание 2. Проверка пропорциональности углового ускорения моменту силы при постоянном моменте инерции*

## Упражнение 1

Произвести проверку соотношения

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^1} = \frac{M_1}{M_1^1}$$

для цилиндров, расположенных на минимальном расстоянии от оси.

1. Сдвинуть цилиндры на стержнях на минимальное расстояние от оси.
2. Установить на платформе груз, масса которого указана преподавателем, и установить платформу на высоте  $h$ .
3. Нажав кнопку «пуск», измерить время движения платформы до нижней точки. Опыт повторить 5 раз.
4. Вычислить среднее время движения платформы.
5. Используя формулы (12) и (13), рассчитать угловое ускорение  $\varepsilon_1$  и момент  $M_1$  силы. Данные занести в табл. 3.

Таблица 3

$m, \text{ кг}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$\langle t \rangle, \text{ с}$	$h, \text{ м}$	$\varepsilon_1, \text{ с}^{-2}$	$M_1, \text{ Н}\cdot\text{м}$

6. Повторить все измерения для груза с другой массой.
7. Рассчитать угловое ускорение  $\varepsilon_1^1$  и момент  $M_1^1$  силы.
8. Вычислить

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^1} \quad \text{и} \quad \frac{M_1}{M_1^1}.$$

9. Рассчитать погрешности определения этих отношений.
10. Сравнить отношения и сделать выводы.

## Упражнение 2

Произвести проверку соотношения

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^1} = \frac{M_1}{M_1^1}$$

для цилиндров, расположенных на максимальном расстоянии от оси.

1. Расположить цилиндры на максимальном расстоянии от оси.
2. Прodelать измерения, рассмотренные в пунктах 2–6 упражнения 1 для тех же грузов и той же высоты  $h$ .
3. Вычислить угловое ускорение  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_2^1$  и момент силы  $M_2$  и  $M_2^1$ . Данные записать в таблицу (аналогичную таблице 3).

4. Рассчитать отношения

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^1} \quad \text{и} \quad \frac{M_2}{M_2^1}.$$

5. Рассчитать погрешности определения этих отношений.

6. Сравнить отношения и сделать выводы.

### Упражнение 3

Вычислить моменты инерции маятника и проверить соотношение:

$$J_{2cp} - J_{1cp} = 4 \cdot m_0 \cdot (\ell_2^2 - \ell_1^2).$$

1. Используя результаты первого упражнения, вычислить моменты инерции крестообразного маятника при сдвинутых цилиндрах:

$$J_1 = \frac{M_1}{\varepsilon_1} \quad J_1^1 = \frac{M_1^1}{\varepsilon_1^1} \quad \text{и} \quad J_{1cp} = \frac{J_1 + J_1^1}{2}.$$

2. Используя результаты второго упражнения, вычислить моменты инерции крестообразного маятника при раздвинутых цилиндрах:

$$J_2 = \frac{M_2}{\varepsilon_2} \quad J_2^1 = \frac{M_2^1}{\varepsilon_2^1} \quad \text{и} \quad J_{2cp} = \frac{J_2 + J_2^1}{2}.$$

3. Вычислить изменение момента инерции крестообразного маятника  $J_{2cp} - J_{1cp}$  и погрешность этого измерения.

4. Вычислить теоретическое значение изменения момента инерции  $\Delta J = 4 \cdot m_0 \cdot (\ell_2^2 - \ell_1^2)$  и погрешность этого измерения.

5. Сравнить теоретическое и экспериментальное значение  $\Delta J$  и сделать выводы.

### V. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется моментом импульса? Как он направлен? В каких единицах измеряется?

2. Вывести уравнение моментов.

3. Получить выражение импульса момента силы.

4. Что называется моментом силы? Как он направлен? В каких единицах измеряется?

5. Вывести основное уравнение динамики вращательного движения.
6. Привести описание прибора. Вывести рабочие формулы.
7. Вывести формулы для расчета погрешностей результатов измерений, выполненных в данной работе.

## РАБОТА № 10. ИЗУЧЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы: исследование законов колебаний физического маятника.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Физическим маятником называется твердое тело произвольной формы, которое может совершать колебания вокруг неподвижной оси (рис. 1).

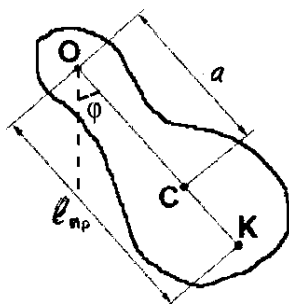


Рис.1.

Составим уравнение движения маятника. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси вращения  $O$ ,  $\varphi$  – угол поворота из положения равновесия,  $M$  – суммарный момент вращения внешних сил относительно оси вращения. Обозначив символом  $a$  расстояние  $OC$  между осью вращения и центром масс  $C$ , момент силы тяжести можно записать в виде:  $M = -m \cdot g \cdot a \cdot \sin\varphi$  или для малых углов отклонения:  $M = -m \cdot g \cdot a \cdot \varphi$ . Момент силы реакции опоры, очевидно, равен нулю. Моментом силы сопротивления в первом приближении можно пренебречь. Тогда уравнение (1) можно преобразовать:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot a \cdot \varphi = 0, \quad (2)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0, \quad (3)$$

где

$$\omega^2 = m \cdot g \cdot a / J. \quad (4)$$

Решение линейного однородного дифференциального уравнения (3) имеет вид:

$$\varphi = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha). \quad (5)$$

Решение (5) уравнения движения маятника содержит две постоянные интегрирования:  $A$  – амплитуду и  $\alpha$  – начальную фазу, которые определяются из начальных условий, то есть зависят от того, как возбуждаются колебания маятника. Частота  $\omega$  согласно уравнению (4) определяется только параметрами самого маятника.

Период колебаний маятника характеризуется уравнением

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}} \quad (6)$$

и также не зависит ни от амплитуды, ни от начальной фазы колебаний. Последнее утверждение справедливо только для колебаний, подчиняющихся уравнению движения (3), которое получено для малых углов отклонения маятника.

Величина  $J/m \cdot a$  имеет размерность длины и называется приведенной длиной физического маятника:

$$\ell_{np} = \frac{J}{m \cdot a}. \quad (7)$$

С учетом формулы (7) уравнение (6) можно записать в виде:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\ell_{np}}{g}}. \quad (8)$$

Сравнивая формулу (8) с выражением периода колебаний математического маятника, можно сделать вывод, что приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника.

Отложив от точки  $O$  отрезок, длина которого равна  $\ell_{np}$ , вдоль прямой  $OC$ , получим точку  $K$ , называемую центром качаний. Можно доказать, что точки  $O$  и  $K$  обратимы, то есть если маятник подвесить в точке  $K$ , период его останется таким же, как и при подвешивании в точке  $O$ .

Рассмотрим физический маятник, представляющий собой однородный стержень длиной  $\ell$ , вдоль которого может перемещаться опорная приз-

ма небольшой массы, что позволяет подвешивать маятник в разных точках. Вычислим его приведенную длину. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J = J_C + m \cdot a^2, \quad (9)$$

где  $J_C = \frac{1}{12} \cdot m \cdot \ell^2$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню. С учетом последнего равенства выражение (9) преобразуется:

$$J = m \cdot \left( a^2 + \frac{\ell^2}{12} \right).$$

Приведенная длина маятника определяется выражением:

$$\ell_{np} = \frac{J}{m \cdot a} = a + \frac{\ell^2}{12 \cdot a}. \quad (10)$$

Сравнение приведенной длины, рассчитанной с помощью формулы (10), с экспериментально найденным значением, проверка свойства обратимости и отсутствия зависимости периода колебаний от амплитуды составляют хорошую экспериментальную основу для подтверждения изложенной выше теории физического маятника.

#### *Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника*

Возможность точного измерения периода колебаний физического маятника позволяет определить ускорение свободного падения  $g$  в любой точке земного шара. Эти методы определения  $g$  основаны на зависимости периода колебаний  $T$  от  $g$  по формуле:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}} = \sqrt{\frac{J_0 + m \cdot a^2}{m \cdot g \cdot a}}, \quad (11)$$

где  $T$  – период колебаний маятника,  $J$  – момент инерции маятника относительно точки подвеса маятника,  $J_0$  – момент инерции маятника относительно центра масс,  $a$  – расстояние от центра масс до точки подвеса,  $m$  – масса маятника.

При определении абсолютного значения  $g$  с помощью формулы (11) возникают трудности, связанные с невозможностью точного определения

момента инерции маятника. Это затруднение можно устранить, если использовать метод обратного маятника, в котором из расчетных формул исключить величину момента инерции маятника  $J_0$ . Этот метод основан на свойстве физического маятника, заключающемся в том, что период колебаний физического маятника не изменяется при перемещении точки подвеса в центр качаний, то есть в точку, удаленную от точки подвеса на расстояние, равное приведенной длине маятника  $\ell_{np}$ .

Таким образом, если у физического маятника известны две сопряженные точки, относительно которых периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  точно совпадают, то для определения  $g$  необходимо точно измерить  $T_0 = T_1 = T_2$  и  $\ell_{np}$ , равное расстоянию между этими точками:

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2}{T_0^2} \cdot \ell_{np}. \quad (12)$$

Однако экспериментально найти эти точки с необходимой точностью достаточно сложно, и практически всегда  $T_1 \neq T_2$ .

В этом случае:

$$T_1 = \sqrt{\frac{J_0 + m \cdot a_1^2}{m \cdot g \cdot a_1}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{J_0 + m \cdot a_2^2}{m \cdot g \cdot a_2}}. \quad (13)$$

Из соотношений (13) можно получить:

$$T_1^2 \cdot g \cdot a_1 - T_2^2 \cdot g \cdot a_2 = 4 \cdot \pi \cdot (a_1^2 - a_2^2),$$

откуда

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{a_1 \cdot T_1^2 - a_2 \cdot T_2^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T_0^2}, \quad (14)$$

где

$$L = a_1 - a_2,$$

$$T_0^2 = \frac{a_1 \cdot T_1^2 - a_2 \cdot T_2^2}{a_1 - a_2} = T_1^2 + \frac{a_2}{a_1 - a_2} \cdot (T_1^2 - T_2^2). \quad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что ошибка в измерении  $g$  будет минимальной, если  $T_1$  и  $T_2$  близки друг к другу, а значения  $a_1$  и  $a_2$  существенно отличаются друг от друга.



*Зависимость ускорения свободного падения от широты места  
и высоты над поверхностью Земли*

Из закона всемирного тяготения следует, что у поверхности Земли все тела должны падать с одинаковым ускорением. Согласно второму закону Ньютона, ускорение тела равно:

$$a = \frac{F}{m}, \quad (16)$$

где  $F$  – сила, с которой тело массой  $m$  притягивается земным шаром:

$$F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}, \quad (17)$$

где  $M_3$  и  $R_3$  – соответственно масса и радиус Земли. Подстановка выражения (17) в формулу (16) позволяет найти ускорение:

$$a = \frac{F}{m} = \gamma \cdot \frac{M_3}{R_3^2}. \quad (18)$$

Поскольку  $M_3$ ,  $R_3$  и  $\gamma$  – постоянные величины, то у поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением

$$g_0 = \gamma \cdot \frac{M_3}{R_3^2}, \quad (19)$$

если не учитывать сил сопротивления, то есть рассматривать свободное падение тел, поэтому  $g_0$  называется ускорением свободного падения.

Ускорение свободного падения зависит от широты места и высоты тела над поверхностью Земли. Если тело находится на высоте  $h$  над поверхностью Земли, то заменяя  $R_3$  в уравнении (19) на  $R_3 + h$ , получим:

$$\frac{g_0}{g(h)} = \left( \frac{R_3 + h}{R_3} \right)^2 = \left( 1 + \frac{h}{R_3} \right)^2.$$

Вблизи поверхности Земли  $h \ll R_3$ , поэтому последнее отношение преобразуется:

$$\frac{g_0}{g(h)} \approx 1 + \frac{2 \cdot h}{R_3},$$

то есть при подъеме на 1 км величина  $g(h)$  уменьшается приблизительно на 0,03 %.

Отличие формы Земли от шарообразной и вращение Земли приводят к тому, что величина  $g_0$  зависит от географической широты места, изменяясь от  $9,83 \text{ м/с}^2$  на полюсе до  $9,78 \text{ м/с}^2$  на экваторе. На широте  $\varphi = 45^\circ$   $g_0 = 9,80665 \text{ м/с}^2$  и называется нормальным ускорением.

Вес тела  $P$  в точке  $A$  (рис. 2) на географической широте  $\varphi$  равен:

$$P = F - F'_{\text{ц}} = F - F_{\text{ц}} \cdot \cos \varphi,$$

следовательно,

$$m \cdot g_0 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_3}{R_3^2} - m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos \varphi,$$

поскольку

$$R_3 \cdot \cos \varphi = r,$$

то последнее выражение преобразуется:

$$g_0 = \gamma \cdot \frac{M_3}{R_3^2} - \omega^2 \cdot R_3 \cdot \cos^2 \varphi$$

Таким образом, вследствие вращения Земли вокруг оси, ускорение свободного падения уменьшается от полюсов к экватору.

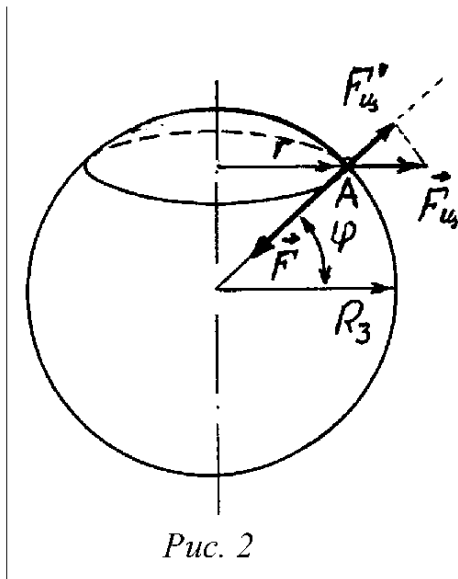


Рис. 2

## II. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

В данной работе используется обратный маятник. На массивном основании закреплена вертикальная стойка, на которой фиксируются два кронштейна – верхний и нижний, снабженный фотоэлектрическим датчиком. Верхний кронштейн можно поворачивать вокруг вертикальной оси и фиксировать в любом положении. С одной стороны этого кронштейна подвешен математический маятник, с другой – физический. Длину нити математического маятника можно регулировать при помощи воротка (рис. 3), а для определения ее длины

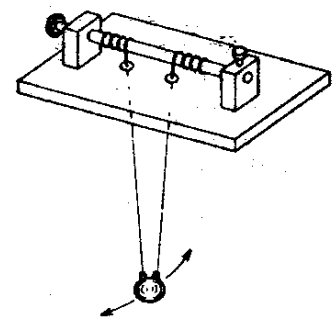


Рис. 3

служит шкала, нанесенная на вертикальной стойке. Нижний кронштейн вместе с фотодатчиком можно перемещать вдоль стойки вверх и вниз и закреплять в произвольном положении.

Физический маятник (рис. 4) представляет собой стальной стержень 1, по которому можно перемещать и при помощи винтов фиксировать в любом положении два одинаковых груза 2 и 3 и две призмы 4 и 5, служащие для подвеса маятника на верхнем кронштейне. На стержне через 10 мм с высокой точностью нанесены кольцевые нарезания, которые можно использовать для определения расстояния между острями призм.

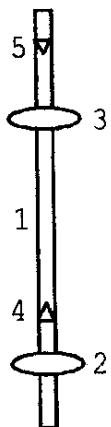


Рис. 4

Фотоэлектрический датчик соединен с расположенным в основании прибора миллисекундомером. Рядом с табло миллисекундомера расположен счетчик полных колебаний, совершенных физическим или математическим маятником.

Каждый студент выполняет задание по указанию преподавателя.

### III. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

#### *Задание 1. Изучение особенностей движения физического маятника*

Приборы и принадлежности: физический маятник в виде однородного стержня, опорная призма, математический маятник, миллисекундомер с фотоэлектрическим датчиком.

#### Упражнение 1. Определение приведенной длины физического маятника

1. Снять со стержня грузы 2 и 3 и одну из призм 4 или 5. Оставшуюся призму зафиксировать на одном из нарезаний вблизи конца стержня (по указанию преподавателя). Определить по нарезаниям расстояние  $a$  между точкой подвеса и центром масс, считая, что последний находится на середине стержня. Подвесить маятник на опорную призму.

2. Нижний кронштейн переместить таким образом, чтобы нижний конец стержня пересекал оптическую ось фотодатчика.

3. Отклонить маятник на небольшой угол и отпустить. Нажать клавишу «сброс», которая обеспечивает запуск секундомера.

4. После подсчета счетчиком числа колебаний 49-ти полных колебаний нажать клавишу «стоп». На табло счетчика высветится число 50, а на табло секундомера – время 50-ти полных колебаний.

5. Измерения произвести 5 раз, результаты записать в табл. 1. Найти среднее время и период колебаний. Оценить погрешность определения периода.

Таблица 1

$t_1, c$	$t_2, c$	$t_3, c$	$t_4, c$	$t_5, c$	$t_{cp}, c$	$T_{cp}, c$

6. Повернуть верхний кронштейн на  $180^\circ$ , помещая перед фотодатчиком математический маятник. Вращая вороток (рис. 3), варьировать длину  $L$  нити и определить ту длину, при которой период математического маятника равен периоду физического маятника в пределах погрешности измерений. Это удобно сделать, построив по нескольким ( $n = 6 - 8$ ) точкам график зависимости  $T - T(L)$ . Для каждого значения  $L$  не менее 3 раз измерить время 50 колебаний. Длина математического маятника отсчитывается по шкале на вертикальной стойке. При измерениях следует обращать внимание на то, чтобы черта на шарике маятника была продолжением черты на корпусе фотодатчика. Далее для каждого значения  $L$  определить средний период. Результаты занести в табл. 2.

7. На миллиметровой бумаге построить график зависимости  $T - T(L)$ . Цена наименьшего деления графика должна соответствовать погрешности измерений.

8. Определив по графику приведенную длину, сравнить ее с вычисленной по формуле (10). Сделать вывод о соответствии этих величин.

Таблица 2

№ измерения	1	2	$i$	$n$
$L_i, m$				
$t_i, c$				

$t_2, c$				
$t_3, c$				
$t_{cp}, c$				
$T_{cp}, c$				

### Упражнение 2. Проверка свойства обратимости

1. Отсчитав от точки подвеса расстояние, равное экспериментально определенной приведенной длине, найти центр качаний  $K$  физического маятника.

2. Закрепить опорную призму в точке  $K$  так, чтобы ее острое было обращено к центру масс и повесить маятник.

3. Определить так же, как и в упражнении 1, период колебаний. Оценить погрешность.

4. Сравнить периоды при прямом и обратном положении. Сделать выводы.

### *Задание 2. Определение ускорения свободного падения методом обратного маятника*

Приборы и принадлежности: физический маятник в виде стержня с двумя грузами, две опорные призмы, секундомер с фотоэлектрическим датчиком.

1. Снять физический маятник с кронштейна. Груз 2 закрепить на одном из делений вблизи конца стержня. Груз 3 фиксировать на другой половине стержня, несколько ближе к его середине. Призму 4 закрепить около груза 2, непосредственно над ним, а призму 5 – над грузом 3 ближе к концу стержня (рис. 4). При этом призмы должны быть обращены остриями друг к другу. Определить расстояние  $L$  между остриями призм. Подвесить маятник на призме 5. Такое положение маятника назовем прямым. Тогда положение маятника при подвешивании на призме 4 называется обратным.

2. Нижний кронштейн переместить таким образом, чтобы нижний конец стержня пересекал оптическую ось фотодатчика. Отклонить маятник на небольшой угол и отпустить. Нажать клавишу «сброс», которая обеспечит за-

пуск секундомера. После подсчета счетчиком 49-ти полных колебаний, нажать клавишу «стоп». На табло счетчика высветится число 50, а на табло секундомера – время 50-ти полных колебаний.

3. Измерения повторить 5 раз для 6–8 значений  $L$ . Определить среднее время и средний период колебаний. Результаты занести в табл. 3. Оценить погрешность.

Таблица 3

*Прямое положение*

$L_i, \text{мм}$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_4, \text{с}$	$t_5, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$T_{\text{ср}}, \text{с}$

4. Подвесить маятник на призме 4. Выполнить описанные выше измерения для обратного положения маятника.

5. Сохраняя неизменным положение призмы 5, перемещать призму 4 на интервалы по 10 мм, и при каждом расстоянии  $L$  между призмами определить средний период колебаний. Опыт повторить для 6–8 значений  $L$ . Результаты занести в табл. 4.

Таблица 4

*Обратное положение*

$L_i, \text{мм}$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_4, \text{с}$	$t_5, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$T_{\text{ср}}, \text{с}$

6. На миллиметровой бумаге построить график зависимости  $T(L)$  в прямом и в обратном положении. Цена наименьшего деления графика должна соответствовать погрешности измерений.

7. В точке пересечения кривых определить значение приведенной длины и соответствующий ей период колебаний.

8. По формуле (12) рассчитать ускорение свободного падения и оценить погрешность его определения. Записать окончательный результат и сделать выводы.

## V. НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ УСТАНОВКИ

Длина стержня маятника – 590 мм.

Максимальная длина математического маятника – 530 мм.

Погрешность измерения расстояния между остриями, не более 0,3 мм.

Погрешность определения длины математического маятника, не более 2 мм.

Рабочая погрешность измерения времени, не более 0,02 %.

## VI. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое физический маятник?
2. Составьте уравнение движения физического маятника, запишите закон движения, подстановкой докажете, что он является решением уравнения движения.
3. Что называется приведенной длиной физического маятника?
4. Докажите, что приведенная длина всегда больше расстояния между центром масс и точкой подвеса.
5. В чем состоит свойство обратимости физического маятника? Докажите его.
6. Как определить ускорение свободного падения при помощи оборотного маятника?
7. Как зависит ускорение свободного падения от широты местности и высоты над уровнем моря?

## **РАБОТА № 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Цель работы: экспериментальное определение моментов инерции некоторых твердых тел относительно оси, проходящей через центр масс. Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Моментом инерции  $J$  материальной точки относительно некоторой оси называется физическая величина, равная произведению массы этой точки на квадрат расстояния  $r$  до этой оси:

$$J = m \cdot r^2. \quad (1)$$

Для системы  $n$  материальных точек момент инерции определяется выражением:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2.$$

Для сплошного твердого тела, заменяя суммирование интегрированием, получим:

$$J = \int_m r^2 \cdot dm = \int_x \int_y \int_z \rho \cdot r^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz, \quad (2)$$

где  $dm$  – масса элементарного объема  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , равная  $dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ,  $\rho$  – плотность тела,  $r$  – расстояние рассматриваемого элементарного объема до оси вращения. Аналитическое выражение интеграла (2) возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы.

Вычисление моментов инерции относительно оси в некоторых случаях можно упростить, вычислив предварительно момент инерции тела относительно точки.

Моментом инерции тела относительно точки  $O$  называется сумма произведений масс материальных точек, из которых состоит тело, на квадраты их расстояний  $r$  до точки  $O$ :

$$\theta = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$\theta = \int r^2 \cdot dm.$$

Не следует смешивать момент инерции  $\theta$  относительно точки с моментом инерции  $J$  относительно оси. В случае момента инерции  $J$  элемен-



тарные массы  $dm$  умножают на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента инерции  $\theta$  элементарные массы  $dm$  умножают на квадраты расстояний до неподвижной точки.

Рассмотрим материальную точку массой  $m$  с координатами  $(x, y, z)$  относительно прямоугольной системы координат (рис. 1). Квадраты ее расстояния до координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  равны соответственно: до оси  $x$ :  $b_x =$

$$y^2 + z^2; \text{ до оси } y: b_y = x^2 + z^2, \text{ до оси } z: b_z = x^2 + y^2.$$

Моменты инерции точки  $m$  относительно этих осей:  $J_x = m \cdot (y^2 + z^2)$ ,  $J_y = m \cdot (x^2 + z^2)$ ,  $J_z = m \cdot (x^2 + y^2)$ .

Суммирование этих равенств дает:

$$J_x + J_y + J_z = 2 \cdot m \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$$

Учитывая, что  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , где  $r$  – расстояние точки до начала координат  $O$ ,

получим  $J_x + J_y + J_z = 2 \cdot m r^2$ . Так как  $m r^2 = \theta$ , то последнее выражение можно

записать в виде:

$$J_x + J_y + J_z = 2 \cdot \theta. \quad (3)$$

Соотношение (3) справедливо не только для отдельной материальной точки, но и для произвольного тела, которое можно рассматривать как совокупность материальных точек. Таким образом, сумма моментов инерции точки относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке  $O$ , равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.

Если повернуть координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ , в общем случае, изменятся. Однако их сумма останется неизменной, поскольку она равна  $2 \cdot \theta$ , а величина  $\theta$  не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, сумма моментов инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой точки и не меняется при изменении ориентации осей.

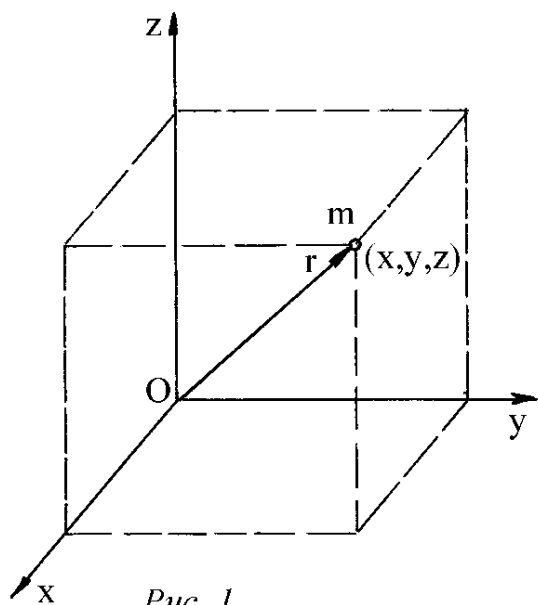


Рис. 1

Рассмотрим случай плоского распределения масс: пластинку произвольной формы с произвольным распределением вещества по ее объему. Если пластинка очень тонкая, то можно считать, что вещество распределено в некоторой плоскости, например, в плоскости  $x$ - $y$ . Тогда координаты  $z$  всех материальных точек пластинки равны нулю. Поэтому момент инерции пластинки относительно начала координат равен:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2),$$

то есть, равен моменту инерции пластинки относительно оси  $z$ . Таким образом, в случае плоского распределения масс:

$$J_x + J_y + J_z = 2 \cdot J_z,$$

окончательно:

$$J_x + J_y = J_z. \quad (4)$$

Из равенства (3) следует, что величина  $\theta$  не может быть меньше каждого из моментов инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$  относительно осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то есть

$$\theta \geq J_x; \quad \theta \geq J_y; \quad \theta \geq J_z. \quad (5)$$

Уравнение (4) указывает на то, что знак равенства в формуле (5) возможен только в случае плоского распределения масс. Вычитая неравенство  $2 \cdot J_z \leq 2 \cdot \theta$  из соотношения (3), можно получить:  $J_x + J_y - J_z \geq 0$ , то есть:

$$J_x + J_y \geq J_z. \quad (6)$$

В случае плоского распределения масс в плоскости  $x$ - $y$  неравенство (6) переходит в равенство (4).

Использование формул (1)–(4) позволяет упростить расчет моментов инерции некоторых тел. Моменты инерции твердых тел зависят от распределения массы тела относительно заданной оси. Наиболее просто вычисляются моменты инерции тел, симметричных относительно оси симметрии, проходящей через центр масс. Ниже рассмотрены примеры вычисления моментов инерции некоторых часто встречающихся тел.

### Момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца

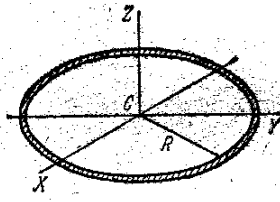


Рис. 2

На рис. 2 изображено тонкое круглое кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$ . В выбранной на рисунке системе координат кольцо расположено в плоскости  $x$ - $y$ . Тогда в соответствии с формулой (1) момент инерции кольца относительно оси  $z$  равен:

$$J_z = m \cdot R^2, \quad (7)$$

ввиду симметрии кольца  $J_x = J_y$ . Поскольку распределение масс в кольце можно считать плоским (в плоскости  $x$ - $y$ ), возможно применение формулы (4), что позволяет определить моменты инерции кольца относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$J_x + J_y = m \cdot R^2,$$

следовательно,

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_z = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \quad (8)$$

### Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра

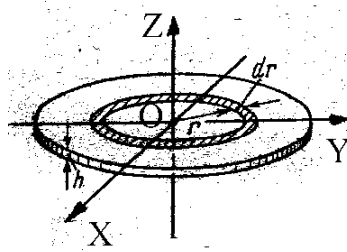


Рис. 3

На рис. 3 изображен бесконечно тонкий диск массой  $m$  и радиусом  $R$ . Предполагается, что цилиндр однородный, то есть вещество распределено в нем с постоянной плотностью. Ось  $z$  проходит через центр  $O$  диска перпендикулярно его плоскости. Оси  $x$  и  $y$  расположены в плоскости диска. Для расчета  $J_z$  нельзя непосредственно применить формулу (1), так как различные точки диска удалены на разные расстояния от оси вращения. Формулу (1) можно применить, если мысленно разделить диск на множество бесконечно тонких кольцевых слоев, являющихся геометрическим местом точек, равноудаленных от оси вращения на расстояние  $r$ . Ширина кольцевого слоя  $dr$ , толщина диска  $h$ , тогда объем такого слоя  $dV = h \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ . Масса слоя равна:

$$dm = m \cdot \frac{dV}{V} = m \cdot \frac{h \cdot dS}{h \cdot S} = m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr}{\pi \cdot R^2} = \frac{2 \cdot m \cdot r \cdot dr}{R^2}.$$

Момент инерции кольцевого слоя относительно оси  $z$  равен:  
 $dJ_z = dm \cdot r^2$ .

Тогда момент инерции всего диска:

$$J_z = \int dJ_z = \int dm \cdot r^2. \quad (9)$$

Подстановка в уравнение (9) выражения для  $dm$  позволяет определить момент инерции всего диска относительно оси  $z$ :

$$J_z = \int_0^R \frac{2 \cdot m \cdot r \cdot dr}{R^2} \cdot r^2 \cdot dr = \frac{2 \cdot m}{R^2} \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2. \quad (10)$$

Поскольку распределение массы кольца является плоским, можно применить формулу (4)  $J_x + J_y = J_z$ , которая с учетом симметрии задачи ( $J_x = J_y$ ) дает:

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} \cdot J_z = \frac{m \cdot R^2}{4}. \quad (11)$$

Формула (10) определяет также момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

### *Теорема Гюйгенса-Штейнера*

Вычисление момента инерции относительно оси во многих случаях упрощается применением теоремы Гюйгенса-Штейнера, связывающей моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела. Теорема Гюйгенса-Штейнера формулируется следующим образом: момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_C$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$J = J_C + m \cdot a^2. \quad (12)$$

Таким образом, теорема Гюйгенса-Штейнера, по существу, сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к определе-

нию момента инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела.

Для доказательства теоремы Гюйгенса-Штейнера рассмотрим ось  $C$ , проходящую через центр инерции тела, и параллельную ей ось  $O$ , отстоящую от оси  $C$  на расстояние  $a$  (рис. 4; обе оси перпендикулярны плоскости чертежа). Обозначим символом  $\vec{R}_i$  перпендикулярный оси  $C$  вектор, проведенный от этой оси к элементарной массе  $\Delta m_i$ , а символом  $\vec{R}_i'$  – аналогичный вектор, проведенный от оси  $O$ . Вектор, перпендикулярный осям  $O$  и  $C$ , соединяющий эти оси, обозначим символом  $\vec{a}$ . Для любой пары противоположащих точек этот вектор имеет одинаковую величину, равную расстоянию  $a$  между осями и одинаковое направление. Указанные векторы связаны соотношением:  $\vec{R}_i' = \vec{a} + \vec{R}_i$ .

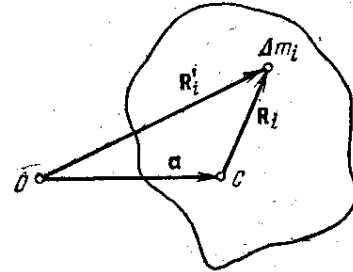


Рис. 4

Квадрат расстояния элементарной массы  $\Delta m_i$  от оси  $C$  равен  $R_i^2 = \vec{R}_i^2$ , а от оси  $O$  равен  $\vec{R}_i'^2 = (\vec{a} + \vec{R}_i)^2 = a^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{R}_i + R_i^2$ .

С учетом последнего соотношения момент инерции тела относительно оси  $O$  можно представить в виде:

$$J = \sum_i \Delta m_i \cdot R_i'^2 = a^2 \cdot \sum_i \Delta m_i + 2 \cdot \vec{a} \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot \vec{R}_i + \sum_i \Delta m_i \cdot R_i^2. \quad (13)$$

Здесь постоянные множители вынесены за знак суммы. Последнее слагаемое правой части выражения (13) представляет собой момент инерции относительно оси  $C$   $\left( J_C = \sum_i \Delta m_i \cdot R_i^2 \right)$ . Сумма элементарных масс равна массе тела:  $\sum_i \Delta m_i = m$ . Сумма  $\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{R}_i$  равна произведению массы тела на вектор  $\vec{R}$ , проведенный от оси  $C$  к центру инерции тела. Поскольку центр инерции лежит на оси  $C$ , этот вектор  $\vec{R}$ , а следовательно, и второе слагаемое правой части уравнения (13) равны нулю. Таким образом, уравнение (13) преобразуется:

$$J = m \cdot a^2 + J_C, \quad (14)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример применения теоремы Гюйгенса-Штейнера для вывода формулы момента инерции тонкого стержня длиной  $\ell$  массой  $m$  относительно осей, перпендикулярных стержню, проходящих через его середину и один из концов стержня (рис. 5). Момент инерции относительно точки  $A$  можно выразить в виде:  $J_A = k \cdot m \cdot \ell^2$ . Точка  $C$  является центром инерции стержня. Согласно теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J_A = J_C + m \cdot (\ell/2)^2. \quad (15)$$

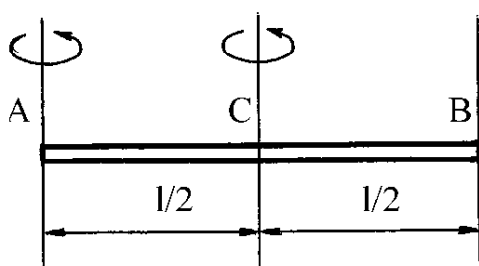


Рис. 5

Величину  $J_C$  можно представить как сумму моментов инерции двух стержней  $CA$  и  $CB$ , длина каждого из которых равна  $\ell/2$ , масса  $m/2$ , а следовательно, момент инерции равен  $k \cdot (m/2) \cdot (\ell/2)^2$ . Таким образом,  $J_C = k \cdot m \cdot (\ell/2)^2$ . Подстановка этих выражений в формулу (15) дает:

$$k \cdot m \cdot \ell^2 = k \cdot m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2,$$

следовательно,  $k = 1/3$ . Таким образом, моменты инерции стержня относительно осей, проходящих через точки  $A$  и  $C$ , равны соответственно:

$$J_A = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \ell^2, \quad (16)$$

$$J_C = \frac{1}{12} \cdot m \cdot \ell^2. \quad (17)$$

## II. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ

Приборы и принадлежности: трифилярный подвес, набор тел, секундомер, осветитель.

Трифиллярный подвес (рис. 6) состоит из трех нерастяжимых нитей длиной  $\ell$ , на которых подвешено два диска радиусами  $r$  и  $R$  ( $R > r$ ). Нижний диск – платформа  $A'B'C'$  может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси  $OO'$ , перпендикулярной платформе и проходящей через

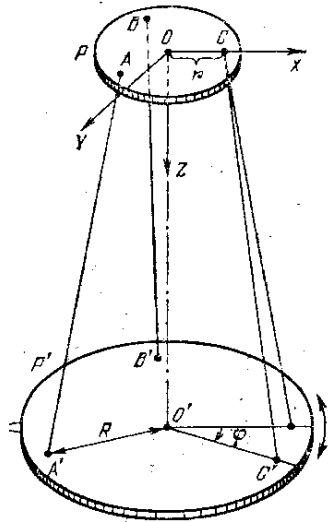


Рис.6.

ее центр масс, который при колебаниях перемещается вдоль оси вращения. Положение трифилярного подвеса можно однозначно задать углом поворота  $\varphi$  платформы  $A'B'C'$  вокруг оси  $OO'$ . При малых углах отклонения от положения равновесия платформа совершает гармонические колебания по закону:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{T} t, \quad (18)$$

где  $\varphi_0$  – максимальный угол отклонения платформы (амплитуда колебаний),  $T$  – период колебаний.

Если пренебречь работой сил трения, то можно записать закон сохранения механической энергии для колеблющейся платформы: потенциальная энергия, которую платформа приобретает при отклонении от положения равновесия за счет поднятия центра масс на высоту  $h$ , переходит в кинетическую энергию вращения при прохождении положения равновесия:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega_0^2, \quad (19)$$

где  $\omega_0$  – максимальное значение угловой скорости  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Из уравнения (18)

находим:  $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} t\right) = \max$  при  $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} t\right) = 1$ , то есть  $\omega_0 = \varphi_0 \cdot (2\pi/T)$ . Подстановка полученного выражения для  $\omega_0$  в уравнение (19) дает:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot \varphi_0^2}{T^2} \cdot J. \quad (20)$$

Высоту  $h$  можно найти из условия нерастяжимости нитей  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ .

При колебаниях платформы длина нитей  $\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  не изменяется. Для выражения длины нити удобно связать прямоугольную систему координат с неподвижным диском, поместив начало координат в центр диска  $O$  и направив ось  $x$  вдоль радиуса  $OA$ , ось  $z$  – вдоль оси вра-

щения вниз, ось  $y$  – перпендикулярно к ним. Тогда для нити  $AA'$  координаты точки  $A$ , которые в процессе колебаний не изменяются, равны:  $x_A = r$ ,  $y_A = 0$ ,  $z_A = 0$ . Координаты точки  $A'$  в направлении вращения равны:  $x_{A'}^{(0)} = R$ ,  $y_{A'}^{(0)} = 0$ ,  $z_{A'}^{(0)} = \ell$ .

При повороте нижней платформы на максимальный угол  $\varphi_0$  координаты точки  $A'$  равны:  $x_{A'} = R \cdot \cos\varphi_0$ ,  $y_{A'} = R \cdot \sin\varphi_0$ ,  $z_{A'} = \ell - h$ . Условие постоянства длины нити  $AA'$  можно записать в виде:

$$(x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2 + (z_{A'} - z_A)^2 = (x_{A'}^{(0)} - x_A)^2 + (y_{A'}^{(0)} - y_A)^2 + (z_{A'}^{(0)} - z_A)^2.$$

Подстановка значений координат дает:

$$(R \cdot \cos\varphi_0 - r)^2 + R^2 \cdot \sin^2\varphi_0 + (\ell - h)^2 = (R - r)^2 + \ell^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, можно получить:

$$2 \cdot R \cdot r \cdot (1 - \cos\varphi_0) = (2 \cdot \ell - h) \cdot h,$$

откуда можно выразить величину  $h$ :

$$h = \frac{2 \cdot R \cdot r \cdot (1 - \cos\varphi_0)}{2 \cdot \ell - h} = \frac{4 \cdot R \cdot r \cdot \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{2 \cdot \ell - h}.$$

При малых углах отклонения  $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2$ , а  $h \ll 2 \cdot \ell$ , поэтому

$$H = R \cdot r \cdot \varphi_0^2 / (2 \cdot \ell). \quad (21)$$

Подстановка выражения (21) в уравнение (10) позволяет получить рабочую формулу для вычисления момента инерции:

$$J = \frac{m \cdot g \cdot R \cdot r}{2 \cdot \pi^2 \cdot \ell} \cdot T^2. \quad (22)$$

Здесь  $m = m_{пл} - m_m$ , где  $m_{пл}$  – масса платформы,  $m_m$  – масса тела, которое находится на платформе,  $J$  – момент инерции платформы с телом. Используя свойство аддитивности момента инерции, можно определить момент инерции тела  $J_m = J - J_{пл}$ , измерив предварительно момент инерции ненагруженной платформы  $J_{пл}$ . В соответствии с уравнением (22) момент инерции ненагруженной платформы равен:

$$J_{пл} = \frac{m_{пл} \cdot g \cdot R \cdot r}{2 \cdot \pi^2 \cdot \ell} \cdot T_{пл}^2. \quad (23)$$



Из полученных соотношений следует, что погрешность момента инерции может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta J_m = \sqrt{\Delta J_{ni}^2 + \Delta J^2}, \quad (24)$$

где погрешность  $\Delta J$  определения момента инерции системы из платформы и тела вычисляется по формуле:

$$E_J = \sqrt{\frac{\Delta m_{ni}^2 + \Delta m_m^2}{(m_{ni} + m_m)^2} + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{\ell}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2}, \quad (25)$$

$$\Delta J = E_J \cdot J. \quad (26)$$

### III. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

*Задание 1. Определить момент инерции ненагруженной платформы*

1. Включить осветитель и установить световой зайчик в центре шкалы.
2. Привести платформу во вращательное движение, для чего плавно потянуть шнур, расположенный слева от установки, а затем резко его отпустить. Колебания должны быть такими, чтобы смещение светового зайчика не превышало 40–50 см в каждую сторону шкалы.
3. Измерить время  $n = 30\text{--}50$  полных колебаний. Опыт повторить 5 раз. Вычислить среднее время колебаний  $\langle t \rangle$ .
4. Определить период колебаний  $T = \langle t \rangle / n$ .
5. По формуле (23) вычислить момент инерции платформы.
6. Определить погрешность измерения момента инерции платформы.

*Задание 2. Определить момент инерции кольца (или другого тела по указанию преподавателя) относительно оси симметрии*

1. На платформы трифилярного подвеса положить кольцо так, чтобы центр кольца совпал с центром масс платформы. Для этого воспользоваться нанесенными на платформе концентрическими окружностями, центры которых совпадают с центром масс платформы.

2. Повторить операции, описанные в задании 1 для нагруженной платформы. Момент инерции нагруженной платформы вычислить по формуле (22), а момент инерции кольца  $J_\kappa$  рассчитать по формуле  $J_\kappa = J - J_{ni}$ .

### Задание 3. Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера

1. Определить момент инерции стержня  $J_0$  относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно продольной геометрической оси. Для этого положить стержень на платформу так, чтобы его центр масс совпадал с центром платформы, используя нанесенные на платформе концентрические окружности.

2. Повторить операции, описанные в задании 2 и вычислить момент инерции стержня  $J_0$  и погрешность  $\Delta J_0$  его измерения, используя соответственно формулы  $J_0 = J - J_{cm}$ , (24) и (25), где  $m_m = m_{cm}$ .

3. Определить момент инерции  $J_a$  стержня относительно оси, находящейся на расстоянии  $a$  от центра масс стержня. Для этого на платформу трифилярного подвеса положить два одинаковых стержня, для которых уже определен момент инерции  $J_0$ , симметрично относительно платформы на расстоянии  $2 \cdot a$  друг от друга. Расстояние между центрами масс стержней определяется линейкой так, чтобы она проходила через центр платформы,  $2 \cdot a = 15\text{--}20$  см (по указанию преподавателя).

4. Повторить действия, описанные в задании 2, и вычислить момент инерции двух стержней относительно оси вращения платформы по формуле:

$$J_{2cm} = \frac{R \cdot r \cdot g}{4 \cdot \pi^2 \cdot \ell} \cdot (m_{nl} + 2 \cdot m_{cm}) \cdot T^2 - J_{nl}.$$

5. Вычислить момент инерции  $J_a$  одного стержня, находящегося на расстоянии  $a$  от оси вращения:  $J_a = J_{cm}/2$ . Рассчитать погрешность  $\Delta J_a$ .

6. Вычислить погрешность определения суммы  $J_0 + m \cdot a^2$ . Представить отдельно левую и правую часть проверяемого равенства  $J_a = J_0 + m \cdot a^2$  с указанием их погрешностей. Если указанные доверительные интервалы пересекаются, то справедливость теоремы Гюйгенса-Штейнера подтверждена экспериментально.

7. Сделать выводы.

#### IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение момента инерции относительно оси вращения:  
а) материальной точки; б) системы материальных точек; в) сплошного твердого тела.
2. Установить связь моментов инерции тела относительно оси и точки.
3. Вывести формулу момента инерции тонкого сплошного диска относительно оси вращения, проходящей через его центр: а) перпендикулярной плоскости диска, б) расположенной в плоскости диска.
4. Доказать теорему Гюйгенса-Штейнера. Как проверить ее экспериментально?
5. Вывести формулу момента инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной оси симметрии стержня, проходящей: а) через его центр; б) через один из концов.
6. Какие физические законы применяются при выводе рабочей формулы для определения момента инерции? Обосновать возможность их применения.
7. Вывести рабочие формулы для расчета момента инерции.
8. Вывести формулы для вычисления погрешностей определения момента инерции.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 2003. – Т. I. Механика. – 576 с.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики : в 5 т. / И.В. Савельев. – М. : Астрель, 1998. – Т. 1. Механика. – 336 с.