ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ
Учебное пособие

Содержит оригинальные задачи и задачи повышенной сложности по динамике, предложенные на всесоюзных, всероссийских и других олимпиадах по теоретической механике различного уровня с 1981 по 2008 годы, сведения об истории олимпиадного движения. Приведены ответы и указания для самооценки решения задач.

Рекомендовано для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 151000 – Технологические машины и оборудование и 222000 – Инноватика, по дисциплине «Механика», а также может быть использовано в процессе самостоятельной работы при углублённом изучении механики, при подготовке к участию в студенческих олимпиадах и в системе непрерывного профессионального образования.

ВВЕДЕНИЕ

Приоритет инновационных изменений в социально-экономических системах является одной из характерных особенностей современной эпохи. Постиндустриальное общество характеризуется наукоёмким производством, в котором процессы создания и распространения знаний становятся ключевыми. В настоящее время в стране и мире происходит смена технологического уклада с пятого, ориентированного на электронную промышленность и роботостроение, на шестой, зарождающийся в малых инновационных организациях, занимающихся созданием искусственного интеллекта или разрабатывающих технологические процессы на основе биоинженерии и нанотехнологий. Всё это предопределяет ведущую роль творческой деятельности специалиста на современном предприятии.

В процессе инновационной деятельности, направленной на использование и коммерциализацию результатов научных исследований и разработок для расширения и обновления номенклатуры и улучшения качества выпускаемой продукции, специалист сталкивается с производственными ситуациями, в которых действуют неопределённые, вероятностные условия, излишние, противоречивые и недостающие данные, когда нужно принимать решения в экстремальных условиях ограничения времени и(или) использования материальных и финансовых ресурсов. Производственные ситуации такого рода неизбежно возникают в условиях конкурентной рыночной борьбы, в процессе освоения или разработки новых производственных технологий, современного экономически выгодного и экологически надёжного оборудования, ведения предпринимательской и коммерческой деятельности.

Творческая деятельность студента технического профиля в процессе образовательной деятельности в олимпиадном движении, предполагающая решение профессионально-ориентированных творческих олимпиадных задач, благотворно сказывается на развитии как его интеллектуальных способностей и креативности, так и на качестве сугубо профессиональных знаний, формирует у него готовность к реализации задач инновационной экономики.

Механика, являясь научной основой важнейших областей техники, продолжает интенсивно развиваться. Это стимулируется появлением новых прогрессивных технологий и инновационных производств, автоматизацией производственных процессов, созданием новых высокотехнологичных машин и механизмов, освоением макро- и микромира. Перечень проблем, рассматриваемых в механике, практически необъятен и с развитием этой науки он непрерывно пополняется, образовывая подчас самостоятельные области, связанные с изучением механики твёрдых деформируемых тел, жидкостей и газов. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных дисциплин, посвящённых проектированию и расчёту различных статических и динамических конструкций, сооружений, механизмов, машин, аппаратов, необходимых для развития инновационного производства.

Однако всё это многообразие опирается на ряд основных понятий, законов, принципов, методов, общих для всех областей механики. Рассмотрение этих общих закономерностей движения материальных тел и методов их применения и составляет предмет теоретической (или общей) механики.

В данном пособии изложены рекомендации студентам по организации творческой деятельности, собран банк уникальных творческих задач по динамике, даны методические указания по решению задач и ответы для самоконтроля. Студенты, заинтересованные в углублённом изучении отдельных вопросов динамики и более широкой практике по решению задач, необходимые материалы могут найти в учебной литературе, список которой даётся в конце книги.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений дневных и заочных форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки 222000 – Инноватика, 151000 – Технологические машины и оборудование, а также для тех, кто изучает механику самостоятельно. Материал книги изложен так, что им можно пользоваться при изучении механики по полной и сокращённым программам других специальностей втузов, входящих в УМО по университетскому политехническому образованию.

Организация самостоятельной работы с использованием данного пособия предполагает несколько этапов:

1. Самостоятельное изучение студентом раздела дисциплины по источникам (из списка рекомендованной литературы).
2. Самостоятельное решение студентом творческих задач в соответствии с собственным уровнем креативности при использовании ответов и указаний. Базовый уровень подготовки соответствует творческим задачам обычной сложности.
3. Совместная творческая деятельность группы студентов при решении олимпиадных задач повышенной и высокой сложности в рамках факультативных занятий по дисциплине и в студенческих кружках.
4. Использование задач пособия или их модификаций в качестве конкурсных заданий при проведении вузовского тура Всероссийской студенческой олимпиады.

1. РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

В процессе самообразования и развития своей креативности Вы последовательно проходите три уровня готовности к решению творческих профессиональных задач, предполагающих:

- на первом уровне решение задач обычной и повышенной трудности, требующих глубокого понимания изучаемого курса, нестандартной комбинации имеющихся знаний, способности к анализу субъективно существующего информационного поля и определение условий его достаточности;
- на втором уровне постановка и решение типовых ситуационных производственных задач, в том числе и в экстремальных внешних условиях;
- на третьем уровне решение творческих задач, основанных на исследовании профессионально ориентированных ситуаций и предполагающих самостоятельное формулирование проблемы и её решение.

Творческие задачи, включённые в пособие, отражают в себе профессиональный и социальные контексты будущей профессиональной деятельности, и предполагают не только хорошее знание изучаемой дисциплины и умения пользоваться этими знаниями, но и требует от Вас творческого акта, т.е. построения некоторой неочевидной цепочки рассуждений, приводящей к созданию субъективно нового.

В творческих задачах можно выделить:

1. Предметную область – совокупность фиксированных и предполагаемых объектов разного характера, о которых явно или неявно идёт речь в задаче.
2. Отношения, которыми связаны объекты предметной области.
3. Требование или вопрос – указание о цели задачи.
4. Оператор задачи – совокупность тех действий, которые надо произвести над условиями задачи, чтобы выполнить её требование. Решение задачи и состоит в том, чтобы найти оператор.

Решение Вами творческой задачи должно включать следующие этапы:

- погружение в информационное поле предлагаемой задачи через постановку проблемы, восприятие условий и описание проблемы;
- разработка информационно-логической модели задачи через установление взаимосвязи между исходными данными, выявление основных законов и границ их применения при решении данной задачи;
- проверка адекватности разработанной модели условиям постановки задачи;
- разработка алгоритмической структуры задачи, определение её оптимальности;

- разработка технологии реализации алгоритмической структуры задачи, проведение анализа адекватности технологии предложенным средствам реализации;
- проведение анализа полученных результатов с позиции корректности постановки проблемы, адекватности разработанной информационно-логической модели постановке проблемы, оптимальности алгоритмической структуры и эффективности технологии реализации.

Самостоятельно решая творческие задачи, Вы должны учитывать, что авторы этих задач могут использовать следующие методы их составления:

- метод новых вариантов – требуется выполнить задания принципиально иначе, найти новые варианты его выполнения, когда уже имеется несколько вариантов решения;
- метод информационной недостаточности применяется для активизации деятельности студентов, при этом условие задачи представляется с явным недостатком данных;
- метод информационной насыщенности, заключающийся во включении в исходное условие задачи заведомо излишних сведений, что позволяет формировать у студентов готовность к критическому анализу предоставленной информации;
- метод абсурда, заключающийся в том, что предлагаемая задача заведомо невыполнима.

Представляется возможным выделить несколько основных классов творческих познавательных задач:

1. Задачи, в основе которых лежит знакомая (например, по школе) проблемная ситуация.
2. Задачи на знание базового курса и рассчитанные на комбинирование известных способов решения задач в новый способ.
3. Информационно-перегруженные, неполнопоставленные, с размытыми условиями, требующие способности к «видению проблемы».
4. С парадоксальной формулировкой, «провоцирующие» на ошибку, с неопределённым, неоднозначным ответом.
5. Задачи, обеспечивающие междисциплинарные связи.

При организации самостоятельной работы по дисциплине «Механика» на основе данного пособия Вам необходимо повторить темы:

1. Динамика материальной точки.
- Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
- Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.

2. Динамика механической системы.
- Теорема о движении центра масс.
- Теорема об изменении количества движения.

- Теорема об изменении кинетического момента механической системы.
- Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.
- Динамика твёрдого тела.
- Принцип Даламбера.

3. Основы аналитической механики.

- Принцип возможных перемещений.
- Общее уравнение динамики.
- Уравнения Лагранжа второго рода.
- Малые колебания механической системы.

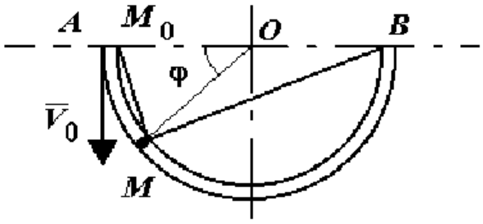
В каждом блоке задач данного пособия есть задачи высокого уровня сложности, повышенной сложности, обычной сложности. Для некоторых задач в разделе «Ответы и указания» приведены также указания по поиску решения. В случае невозможности найти решение в процессе самостоятельной работы даже после анализа указаний и ответа, приведённых в учебном пособии, Вам необходимо обратиться за консультацией к своему преподавателю.

2. ТВОРЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В данном разделе приведены задачи, предлагавшиеся на Межзональных олимпиадах студентов технических вузов Северо-Западной, Центральной и Центрально-чернозёмной зон (Тамбов, 1993, 1995, 1996).

Задача Д1-93 (8 баллов). Тяжёлая материальная точка M массой m движется в трубке, выполненной в виде полуокружности радиусом R и расположенной в вертикальной плоскости. На точку действуют силы $F_1 = kAM$ и $F_2 = kBM$, направленные соответственно к точкам A и B, k = const. Определить силу реакции трубки как функцию угла $\varphi = \widehat{AOM}$. Начальная скорость точки M равна V_0. Трение не учитывать.



Решение:

Рассмотрим движение точки M:

$$\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F}_2; \quad F = k2R;$$

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N} + \overline{F};$$

$$m\frac{V^2}{R} = N + F - P\sin\varphi;$$

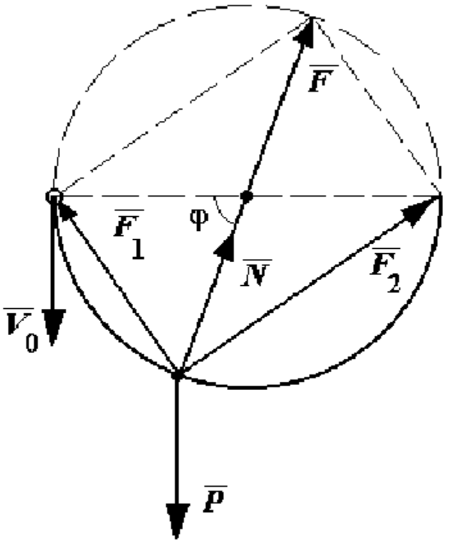
$$N = \frac{mV^2}{R} + P\sin\varphi - F;$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = mgR\sin\varphi;$$

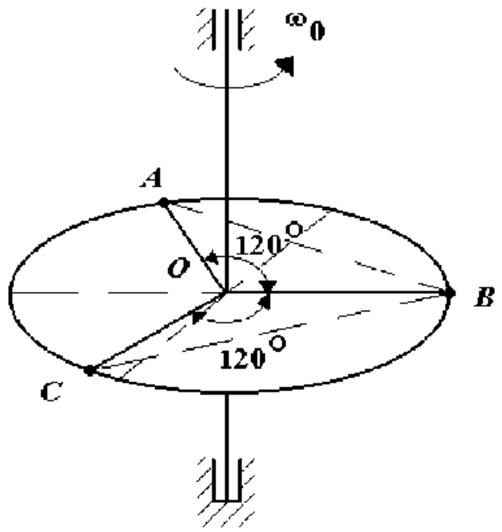
$$V^2 = V_0^2 + 2gR\sin\varphi;$$

$$N = \frac{mV_0^2}{R} + 3mg\sin\varphi - 2kR.$$



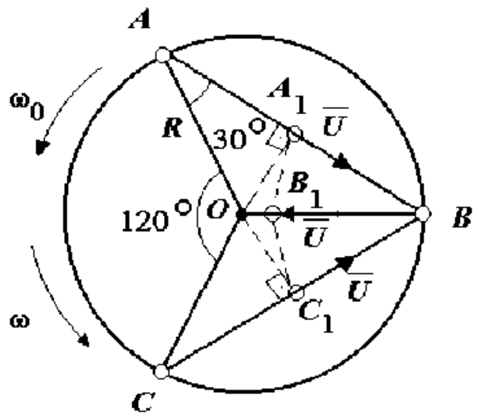
Ответ: $N = \dfrac{mV_0^2}{R} + 3mg\sin\varphi - 2kR.$

Задача Д2-93 (6 баллов). На однородном диске массой m и радиусом R, вращающемся с угловой скоростью ω_0, находятся в относительном покое в точках A, B, C три человека одинакового веса P. В некоторый момент времени люди одновременно пошли с одинаковыми относительными скоростями U в направлениях: из A в B, из C в B, из B в O. Найти угловую скорость диска в тот момент, когда люди из точек A и C окажутся на серединах отрезков AB и CB соответственно.



Решение:

По теореме о сохранении момента количества движения



$$K_{Z_0} = K_{Z_1}; \ \frac{mR^2}{2}\omega_0 + 3\frac{P}{g}R^2\omega_0 =$$

$$= \frac{mR^2}{2}\omega + \left(2\frac{P}{g}OA_1^{\,2} + \frac{P}{g}OB_1\right)\omega;$$

$$OA_1 = R\sin 30^\circ = \frac{R}{2};$$

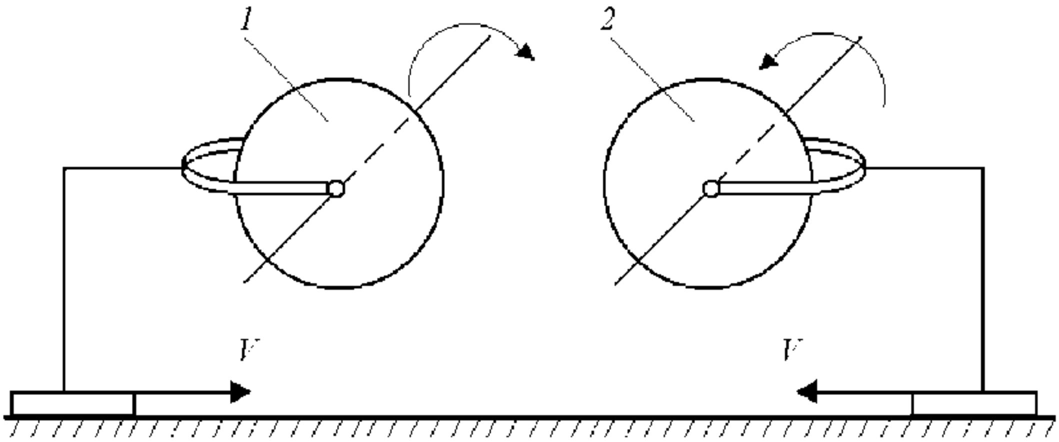
$$OB_1 = R - R\cos 30^\circ = R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Угловая скорость платформы

$$\omega = \frac{\left(\frac{m}{2} + 3\frac{P}{g}\right)\omega_0}{\frac{m}{2} + \left(\frac{9}{4} - \sqrt{3}\right)\frac{P}{g}}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{\left(\frac{m}{2} + 3\frac{P}{g}\right)\omega_0}{\frac{m}{2} + \left(\frac{9}{4} - \sqrt{3}\right)\frac{P}{g}}.$

Задача Д3-93 (10 баллов). Два однородных диска *1* и *2* массами m_1 и m_2, радиусами R_1 и R_2 свободно вращаются вокруг своих горизонтальных осей с равными угловыми скоростями ω в противоположные стороны. Диски сближаются с малыми скоростями до соприкосновения боковыми поверхностями и остаются в сцепленном состоянии. Определить угловые скорости дисков при установившемся движении и найти работу сил трения между соприкасающимися поверхностями. Трение в осях не учитывать.



Решение:

По закону о сохранении момента количества движения

$$K_1 = K_2; \quad \omega\left(\frac{m_1R_1^2}{2} - \frac{m_2R_2^2}{2}\right) = \frac{m_1R_1^2}{2}\omega_1 - \frac{m_2R_2^2}{2}\omega_2,$$

где ω_1 и ω_2 – угловые скорости дисков после сцепления:

$$\omega_1R_1 = \omega_2R_2; \quad \omega_2 = \frac{\omega_1R_1}{R_2}; \quad \omega\left(\frac{m_1R_1^2}{2} - \frac{m_2R_2^2}{2}\right) = \frac{m_1R_1^2}{2}\omega_1 - \frac{m_2R_2R_1\omega_1}{2};$$

$$\omega_1 = \frac{\omega\left(m_1R_1^2 - m_2R_2^2\right)}{R_1\left(m_1R_1 - m_2R_2\right)}; \quad \omega_2 = \frac{\omega\left(m_1R_1^2 - m_2R_2^2\right)}{R_2\left(m_1R_1 - m_2R_2\right)}.$$

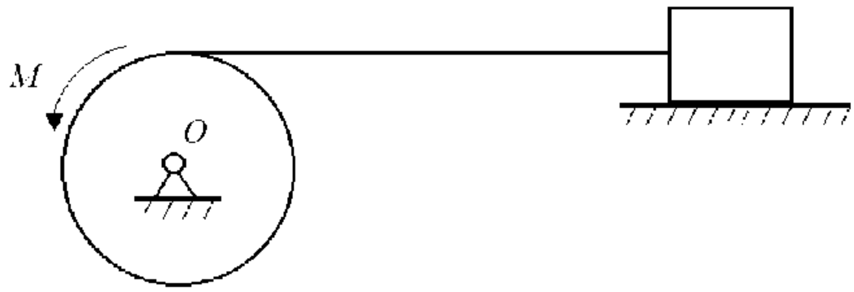
По закону об изменении кинетической энергии

$$A_{\text{тр}} = T_0 - T = \frac{m_1R_1^2}{2}\frac{\omega^2}{2} + \frac{m_2R_2^2}{2}\frac{\omega^2}{2} - \frac{m_1R_1^2}{2}\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{m_2R_2^2}{2}\frac{\omega_2^2}{2} =$$

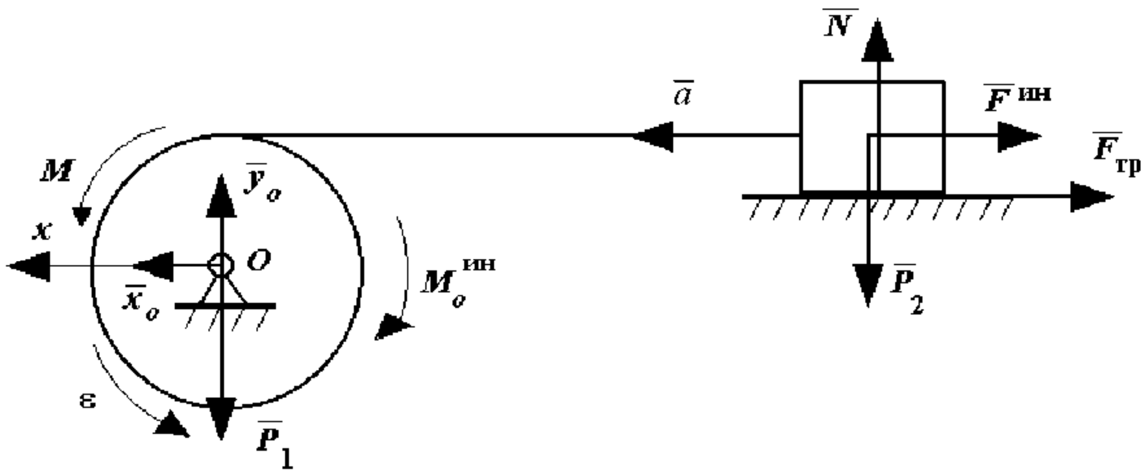
$$= \frac{\omega^2}{4}\left(m_1R_1^2 + m_2R_2^2\right) - \frac{(m_1 + m_2)\omega^2}{4}\frac{\left(m_1R_1^2 - m_2R_2^2\right)^2}{\left(m_1R_1 - m_2R_2\right)^2}.$$

Ответ: $A_{\text{тр}} = \frac{\omega^2}{4}\left(m_1R_1^2 + m_2R_2^2\right) - \frac{(m_1 + m_2)\ \omega^2}{4}\frac{\left(m_1R_1^2 - m_2R_2^2\right)^2}{\left(m_1R_1 - m_2R_2\right)^2}.$

Задача Д4-93 (10 баллов). Однородный диск массой m_1 и радиусом R, вращаясь вокруг неподвижной оси O под действием момента M, с помощью нерастяжимой нити приводит в движение груз массой m_2. Определить горизонтальную составляющую реакции шарнира O, если коэффициент трения скольжения для груза равен f. Трением в оси диска пренебречь.



Решение:



Применим принцип Даламбера:

$$\sum m_0\left(\overline{F}_K\right)=0;$$

$$M - M_0^{\text{ин}} - F^{\text{ин}}R - F_{\text{тр}}R = 0;$$

$$M_0^{\text{ин}} = I_0\varepsilon; \quad I_0 = \frac{m_1R^2}{2}; \quad \varepsilon = \frac{a}{R}; \quad F^{\text{ин}} = m_2a; \quad F_{\text{тр}} = P_2f;$$

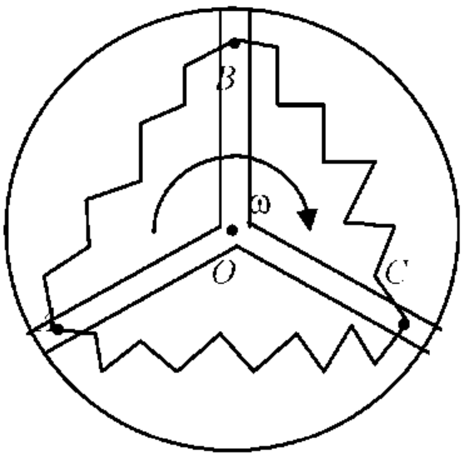
$$M - \frac{m_1R^2}{2}\frac{a}{R} - m_2aR - m_2gfR = 0;$$

$$a = \frac{M - m_2gfR}{\frac{m_1R}{2} + m_2R};$$

$$\sum x = 0; \quad x_0 - F^{\text{ин}} - F_{\text{тр}} = 0;$$

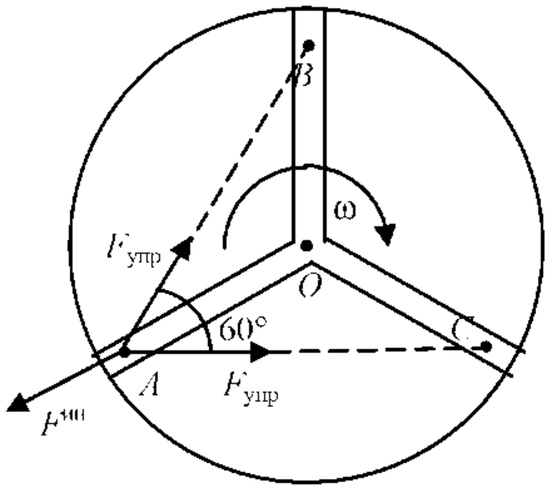
$$x_0 = F^{\text{ин}} + F_{\text{тр}} = m_2\left(\frac{M - m_2 gfR}{\frac{m_1 R}{2} + m_2 R} + gf\right) = \frac{m_2\left(M + \frac{m_1 Rgf}{2}\right)}{\frac{m_1 R}{2} + m_2 R} = \frac{m_2\left(\frac{2M}{R} + m_1 gf\right)}{m_1 + 2m_2}.$$

Ответ: $x_0 = \dfrac{m_2\left(\frac{2M}{R} + m_1 gf\right)}{m_1 + 2m_2}$.



Задача Д1-95 (4 балла). На диске имеются три симметрично расположенных паза, в которых находятся материальные точки A, B, C массой m каждая, соединённые друг с другом одинаковыми пружинами жёсткостью c. Система находится в горизонтальной плоскости, длина недеформированной пружины l, трение не учитывается. Диск вращается с некоторой постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O. Найти зависимость $x = f(\omega)$, где $x = OA = OB = OC$.

Решение:



Согласно принципа Даламбера, на каждую материальную точку действуют в горизонтальной плоскости силы инерции и упругости пружин:

$$F^{\text{ин}} = 2F_{\text{упр}} \cos 30°;\quad F^{\text{ин}} = m\omega^2 x;$$

$$F_{\text{упр}} = c\lambda;\ \lambda = AB - l;\ AB = x\sqrt{3}.$$

$$m\omega^2 x = c\sqrt{3}(x\sqrt{3} - l).$$

$$x = \frac{cl\sqrt{3}}{3c - m\omega^2}.$$

Задача имеет смысл при $3c > m\omega^2$.

Ответ: $x = \dfrac{cl\sqrt{3}}{3c - m\omega^2}$.

Задача Д2-95 (8 баллов). В кольцевой паз радиусом R и массой M, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси z, в верхней точке A поместили с небольшой начальной скоростью шарик B массой m. Найти угловую скорость кольца в тот момент, когда шарик покинет кольцо. Трение не учитывается, кольцо однородно.

Решение:

Применим теорему о кинетическом моменте:

$$I\omega_0 = I\omega + m(R^2 \sin^2 \alpha)\omega;$$

$$I = MR^2.$$

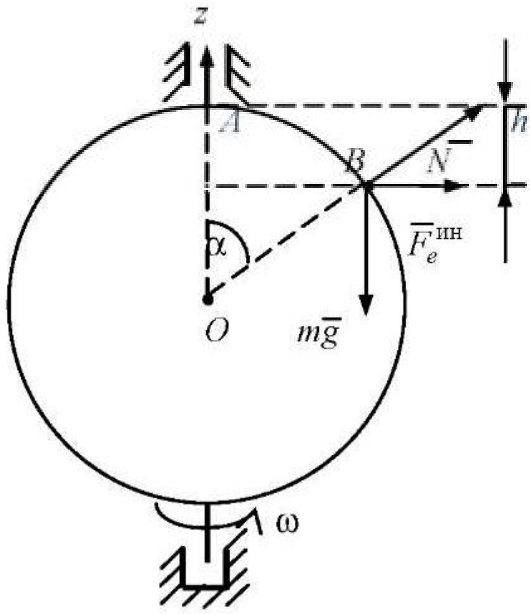
$$\omega = \frac{MR^2\omega_0}{MR^2 + mR^2 \sin^2 \alpha} = \frac{M\omega_0}{M + m\sin^2 \alpha}. \quad (1)$$

Для определения угла отрыва воспользуемся уравнением динамики относительного движения:

$$m\overline{a}_r = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_e^{\text{ин}} + \overline{F}_k^{\text{ин}}. \quad (2)$$

Спроектируем (2) на нормаль и учтём, что в момент отрыва $N = 0$:

$$\frac{mV_r^2}{R} = mg\cos\alpha - m\omega^2 R\sin^2\alpha. \quad (3)$$



Примечание: показаны силы, расположенные в плоскости рисунка.

По теореме об изменении кинетической энергии:

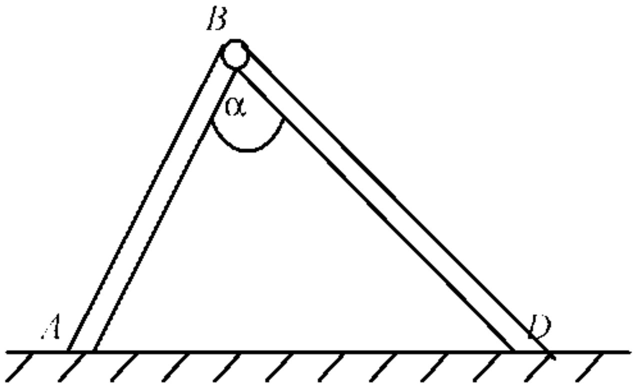
$$\left.\begin{aligned} &\frac{I\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = mgh; \\ &h = R - R\cos\alpha; \\ &V^2 = V_r^2 + \omega^2 R^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Из (3), (4):

$$\cos\alpha = \frac{MR(\omega_0^2 - \omega^2) + 2mg}{3mg}. \qquad (5)$$

Формулы (1) и (5) можно принять за ответ.

Ответ: $\omega = \dfrac{M\omega_0}{M + m\sin^2\alpha}$, $\cos\alpha = \dfrac{MR(\omega_0^2 - \omega^2) + 2mg}{3mg}$.



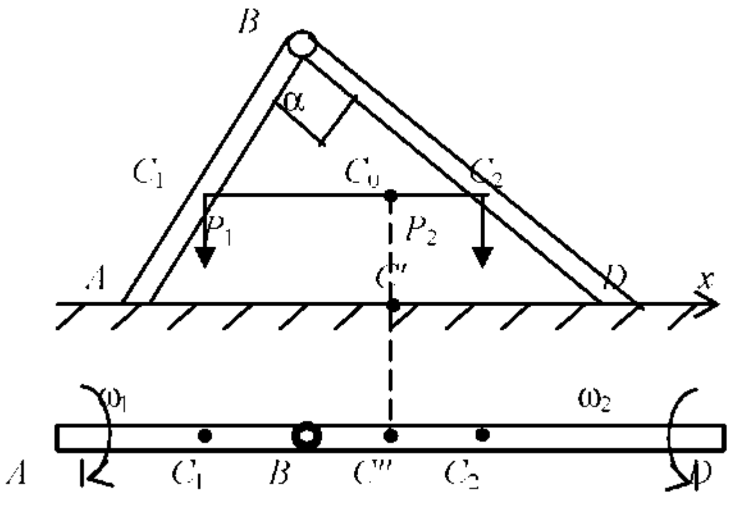
Задача Д3-95 (6 баллов). Два однородных стержня AB и BD, шарнирно соединённые в точке B, падают в вертикальной плоскости из указанного на рисунке положения. Найти угловые скорости стержней в тот момент, когда точка B коснётся горизонтальной плоскости. Принять $AB = l$, $BD = 2l$; $\alpha = 90°$; $m_{AB} = m$, $m_{BD} = 2m$; $V_A^0 = V_D^0 = 0$; трения нет.

Решение:

По теореме о движении центра масс следует, что при $a_{C_x} = 0$ точка C_0 движется вдоль вертикали. При горизонтальном расположении стержней

$$V_A = V_D = 0;$$

$$V_B = \omega_1 l = \omega_2 2l;\ \omega_1 = 2\omega_2;\ V_{C_1} = \omega_1 \frac{l}{2},\ V_{C_2} = \omega_2 l;$$



По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{I_{1A}\omega_1^2}{2}+\frac{I_{2D}\omega_2^2}{2}=(P_1+P_2)C_0C';$$

$$C_0C'=\frac{l}{\sqrt{5}}.$$

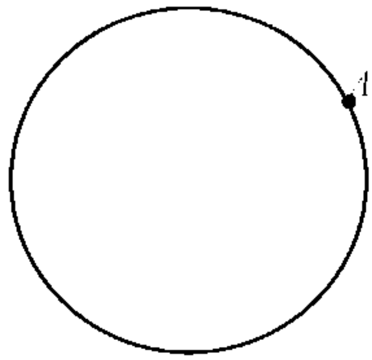
$$P_1=m_1g;\quad P_2=m_2g.$$

$$I_{1A}=\frac{m_1l^2}{3};\quad I_{2D}=\frac{m_2(2l)^2}{3}.$$

После преобразований: $\omega_2^2=\dfrac{3g}{2\sqrt{5}l}$.

Ответ: $\omega_1=2\omega_2=2\sqrt{\dfrac{3g}{2\sqrt{5}l}}$.

Задача Д4-95 (6 баллов). На гладкой горизонтальной плоскости лежит свободно кольцо массой m и радиусом R несущее тело A той же массы. Система вначале покоилась. В некоторый момент времени тело A за счёт внутренних сил системы начинает двигаться по кольцу и вскоре достигает относительной скорости U, которая в дальнейшем сохраняется постоянной.

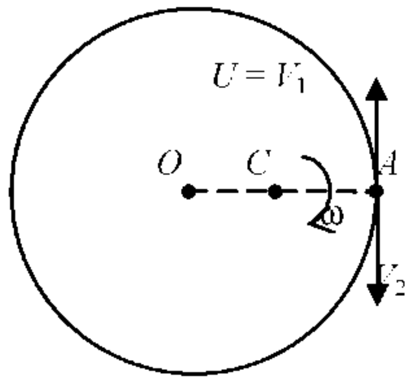


Найти установившуюся угловую скорость кольца. Трение в системе не учитывается.

Решение:

На систему не действуют силы в горизонтальной плоскости. Применим теорему о движении центра масс:

$$V_C=0;\quad \left(OC=CA=\frac{R}{2}\right).$$



По закону сохранения момента количества движения:

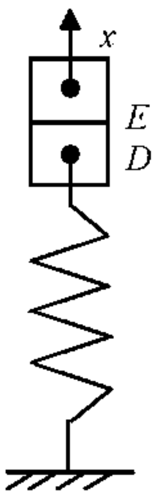
$$I\omega + mV_e\frac{R}{2} - mU\frac{R}{2} = 0;$$

$$V_e = \frac{\omega R}{2}; \quad I = mR^2 + m\,OC^2 = \frac{5}{4}mR^2.$$

После преобразования:

$$\frac{5}{4}mR^2\omega + m\frac{R^2\omega}{4} - mU\frac{R}{2} = 0;$$
$$\frac{3}{2}\omega R^2 = U\frac{R}{2};$$
$$3\omega R = U;$$
$$\omega = \frac{U}{3R}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{U}{3R}$.



Задача Д1-96 (4 балла). Два груза D и E с одинаковой массой m удерживаются в положении равновесия пружиной жёсткостью c, нижний конец которой закреплён неподвижно, и верхний прикреплён к грузу D. Груз E свободно лежит на грузе D. Грузы отклонили из положения равновесия вниз на некоторую величину λ и отпустили без начальной скорости. Чему должно быть равно максимальное значение λ, чтобы при движении системы груз E не отрывался от груза D? Найти также закон колебаний грузов $x = f(t)$ (относительно положения равновесия).

Решение:

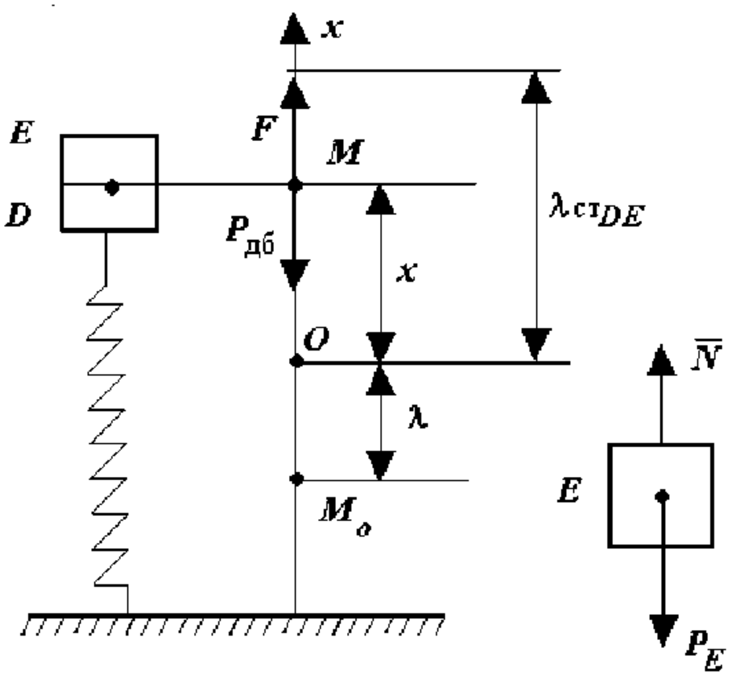
Уравнение движения системы двух грузов:

$$m_{DE}\ddot{x} = -P_{DE} + F, \quad F = c(\lambda_{DE} - x);$$

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad k^2 = \frac{c}{2m};$$

$$t = 0, \quad x_0 = -\lambda, \quad \dot{x} = 0;$$

$$x = -\lambda\cos kt.$$



Уравнение движения груза E:

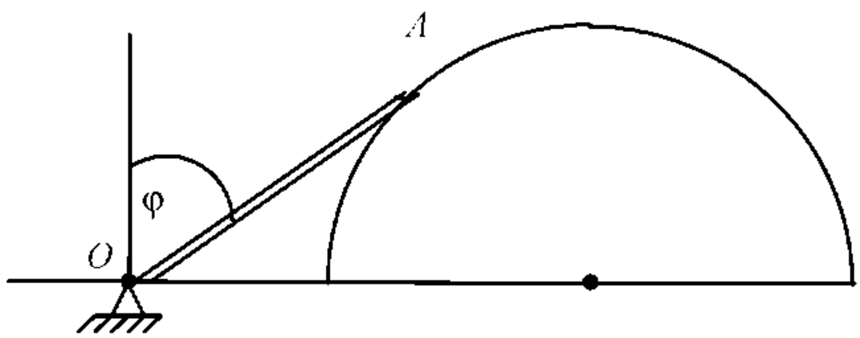
$$m_E\ddot{x} = -P_E + N,\quad N = P_E + m_E\ddot{x};$$

$$N = 0 \quad \text{при} \quad \ddot{x}_{\max} = -k^2 x_{\max} = -k^2\lambda;$$

$$k^2\lambda = g,\quad \lambda_{доп} = \frac{g}{k^2} = \frac{2mg}{c}.$$

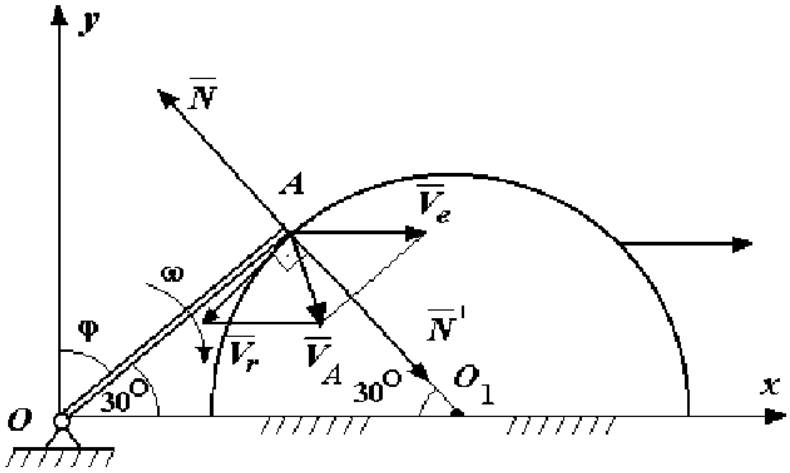
Ответ: $\lambda_{доп} = \dfrac{2mg}{c}$, $x = -\lambda\cos\left(\sqrt{\dfrac{c}{2m}}t\right)$.

Задача Д2-96 (10 баллов). Кривошип OA длиною R и массой m может вращаться в вертикальной плоскости вокруг неподвижной точки O и своим концом A свободно касается полуцилиндра массой M и радиусом R, который может перемещаться по горизонтальной плоскости, проходящей через точку O. Система приходит в движение из состояния покоя при



угле φ = π/4. Найти скорость и ускорение полуцилиндра и реакцию N полуцилиндра в точке A в тот момент, когда его скорость равна по модулю скорости точки A. Трение не учитывать.

Решение:



1) Абсолютная скорость точки A

$$\overline{V}_A = \overline{V}_e + \overline{V}_r . \tag{1}$$

Спроектируем (1) на $A\overline{O}_1$:

$$V_A \cos(V_A,\ AO_1) = V_e \cos(V_e,\ AO_1).$$

В конечный момент времени $\overline{V}_A = \overline{V}_e$.

$$\angle V_A AO_1 = \angle V_e AO_1 = \angle AO_1O = \angle AOO_1 .$$

Так как

$$\overline{V}_A \perp OA,$$

то

$$\angle V_A AO_1 + \angle V_e AO_1 + \angle AOO_1 = 90° ;$$

$$3 \cdot \angle AOO_1 = 90°, \quad \angle AOO_1 = 30°.$$

2) По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mR^2\omega^2}{3} + MV^2 = mgR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\varphi\right). \tag{2}$$

При $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad V_e = V_A = \omega R = V$;

$$V = \sqrt{\frac{3mgR\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(m+3M\right)}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{3mg\left(\sqrt{2}-1\right)}{2R\left(m+3M\right)}}.$$

3) Продифференцируем (2) по t:

$$\frac{mR^2}{3} 2\omega\varepsilon + 2MVa = mgR\sin\varphi\ \omega;$$

при $\varphi = \pi/3 \quad R\omega = V$;

$$\frac{2mR\varepsilon}{3} + 2Ma = mg\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (3)$$

4) Из рисунка

$$x_{O_1} = 2R\sin\varphi, \quad \ddot{x}_{O_1} = a = 2R\left(\varepsilon\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right).$$

При

$$\varphi = \pi/3 \quad a = R\left(\varepsilon - \omega^2\sqrt{3}\right). \qquad (4)$$

Решая систему уравнений (3)–(4), имеем

$$a = \frac{m\sqrt{3}}{4}\frac{\left(3g - 4R\omega^2\right)}{\left(m+3M\right)}$$

или

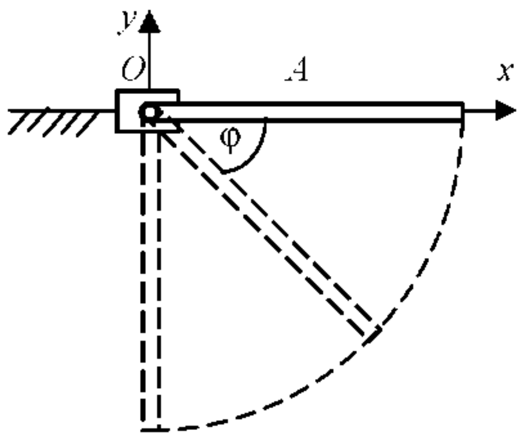
$$a = \frac{3mg}{4}\frac{\left(m\left(3-2\sqrt{2}\right)+3M\right)\sqrt{3}}{\left(m+3M\right)^2}.$$

5) Уравнение движения полуцилиндра:

$$N^{|}\cos 30^\circ = Ma;$$

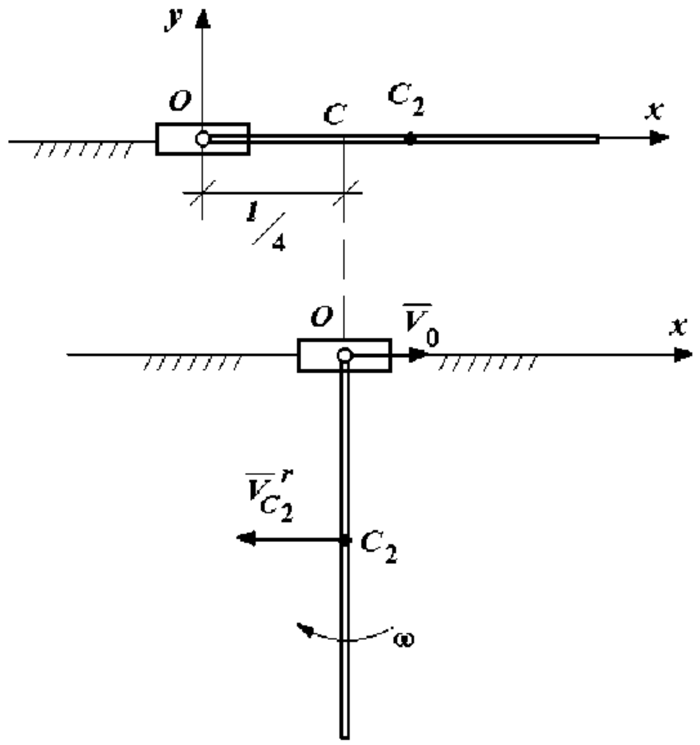
$$N = \frac{3mMg}{2}\frac{\left(m\left(3-2\sqrt{2}\right)+3M\right)}{\left(m+3M\right)^2}.$$

Ответ: $N = \dfrac{3mMg}{2}\dfrac{\left(m\left(3-2\sqrt{2}\right)+3M\right)}{\left(m+3M\right)^2}$.



Задача Д3-96 (8 баллов). Однородный стержень OA длиной l шарнирно соединён в точке O с ползуном, который может двигаться вдоль горизонтальной оси OX. Масса каждого тела m. Стержень из горизонтального состояния покоя под действием силы тяжести начинает падать, приводя в движение и ползун. Определить угловую скорость стержня в тот момент, когда он займёт вертикальное положение ($\varphi = 90°$). Определить также перемещение S ползуна к этому моменту времени. Трение не учитывать.

Решение:



1) По теореме об изменении кинетической энергии: $T = A$:

$$T = \frac{mV_{C_2}^2}{2} + \frac{I_{C_2}\omega^2}{2} + \frac{mV_0^2}{2};$$

$$\overline{V}_{C_2} = \overline{V}_0 + \overline{V}_{C_2}^r, \quad V_{C_2} = V_0 - \frac{\omega l}{2};$$

$$A = mg\frac{l}{2}; \quad I_{C_2} = \frac{ml^2}{12};$$

$$6V_0^2 - 3\omega l V_0 + l^2\omega^2 = 3gl. \qquad (1)$$

2) По теореме о движении центра масс:

$$2ma_{C_x} = 0; \quad V_{C_x} = \frac{mV_0 + m\left(V_0 - \frac{\omega l}{2}\right)}{2m} = 0;$$

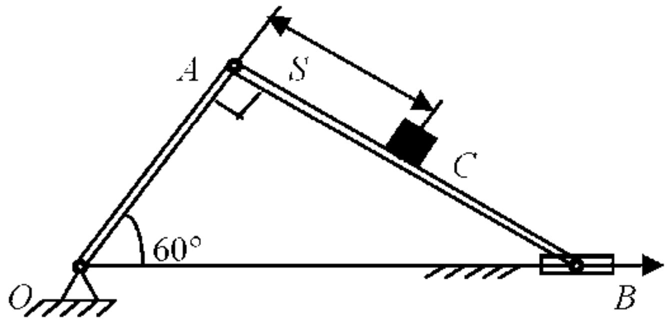
$$V_0 = \frac{\omega l}{4}; \qquad (2)$$

$$dx_C = 0; \quad mS_0 + m\left(S_0 - \frac{l}{2}\right) = 0; \quad S_0 = \frac{l}{4}.$$

Из (1)–(2):

$$6\frac{\omega^2 l^2}{16} - 3\frac{\omega^2 l^2}{4} + l^2\omega^2 = 3gl; \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{6g}{5l}}.$$

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\frac{6g}{5l}}, \; S_0 = \frac{l}{4}.$



Задача Д4-96 (8 баллов). Кривошипно-шатунный механизм занимает положение в вертикальной плоскости, указанной на рисунке. Из точки A вдоль шатуна за счёт внутренних сил начинает двигаться груз C без начальной скорости. Найти такой закон движения $S = f(t)$ груза C, чтобы положение кривошипа и шатуна не изменилось, пока груз не дойдёт до точки B. Длина кривошипа OA равна l, массы тел $m_{OA} = m_1$, $m_{AB} = m_2$, $m_B = m_3$, $m_C = m$. Какому условию должна при этом удовлетворять масса груза m? Трение не учитывать.

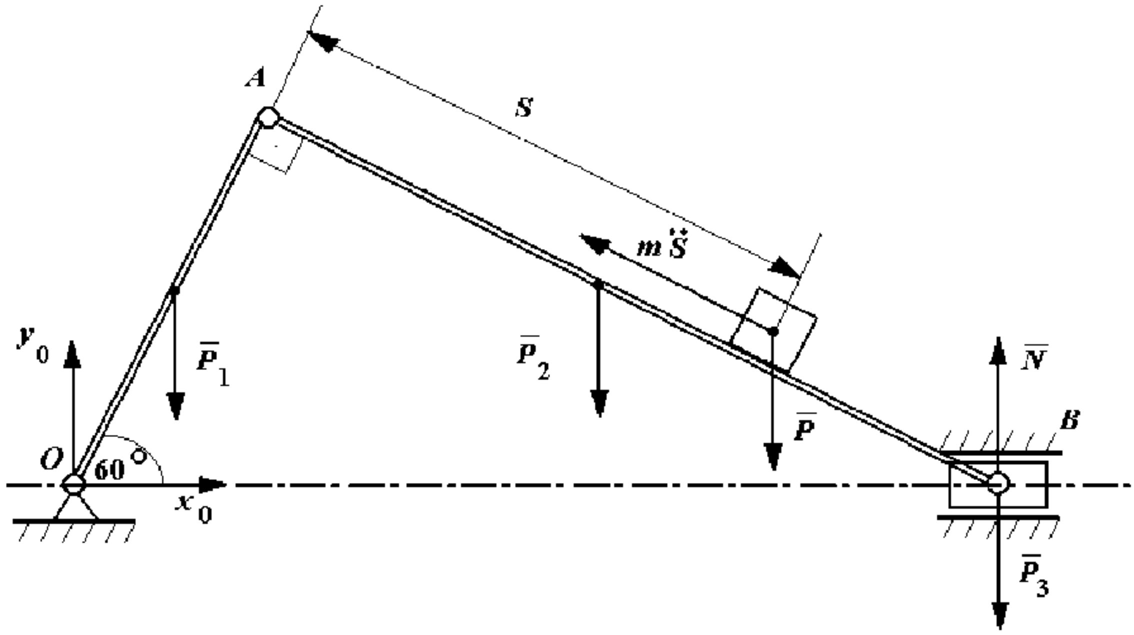
Решение:

Применим принцип Даламбера для всей системы:

$$\sum M_0 = 0;$$

$$-P_1\frac{l}{2}\cos 60° - P_2\left(l\cos 60° + \frac{l\,\mathrm{tg}60°}{2}\cos 30°\right) - P_3\left(l\cos 60° + l\,\mathrm{tg}60°\cos 30°\right) +$$

$$+ N\left(l\cos 60° + l\,\mathrm{tg}60°\cos 30°\right) + m\ddot{S}l - P\left(l\cos 60° + S\cos 30°\right) = 0. \qquad (1)$$



Применяя принцип Даламбера для звена AB:

$$\sum M_A = 0;$$

$$Nl\,\mathrm{tg}60°\cos 30° - P_3 l\,\mathrm{tg}60°\cos 30° - P_2\frac{1}{2}l\,\mathrm{tg}60°\cos 30° - PS\cos 30° = 0. \quad (2)$$

Из (2):

$$N = \frac{PS\sqrt{3} + P_2 l\dfrac{3}{2} + P_3 3l}{3l}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$\ddot{S} + k^2 S = a,$$

где $a = \dfrac{(m_1 + m_2 + 2m)g}{4m}$, $k^2 = \dfrac{g\sqrt{3}}{6l}$.

Начальные условия движения: $t = 0$, $S = 0$, $\dot{S} = 0$;

$$S = \frac{(m_1 + m_2 + 2m)\sqrt{3}l}{2m}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{6l}}t\right).$$

Найдём знак $\ddot{S}$ при $S = AB = l\sqrt{3}$;

$$\ddot{S} = -k^2 S + a = \frac{g(m_1 + m_2)}{2m} > 0$$

при любых m_1, m_2, $m > 0$.

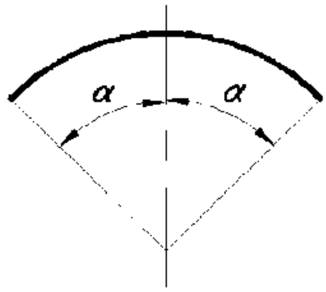
Значит, груз C успевает соскользнуть по неподвижному шатуну AB.

2.2. ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ К ОЛИМПИАДАМ

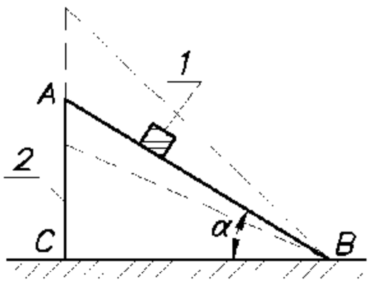
2.2.1. Динамика точки

Задачи обычной сложности

Д1.1 (Тадж. ССР, 1987). Автомобиль движется по выпуклому мосту с постоянной скоростью V_0. Дуга моста, выраженная в радианах, равна 2α. Определить допустимый радиус кривизны моста так, чтобы автомобиль не взлетел над мостом и проходил его без отрыва.



Д1.2 (Лат. ССР, 1988). Деталь *1* скользит в вертикальной плоскости из состояния покоя от точки A вдоль шероховатой призмы *2*. Коэффициент трения f. Принимая, что основание $BC = l = \text{const}$, определить такой угол α скоса призмы, при котором время движения из точки A в точку B наименьшее, если $f = 0{,}2$; $l = 1$ м.

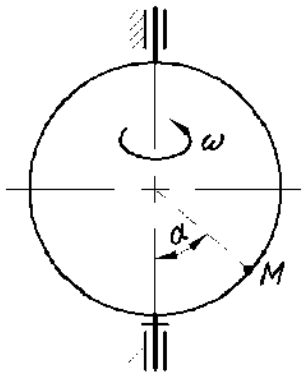


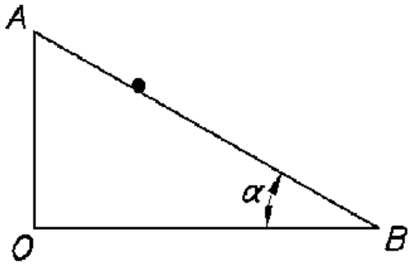
Д1.3 (МАТИ, 1982). Гимнаст падает с высоты $H = 12$ м на упругую сетку, которая прогибается при этом на величину 1 м.

Оценить, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше силы тяжести. Размеры сетки много больше, а масса сетки мала по сравнению с размерами и массой человека. Сетку считать абсолютно упругой, сопротивлением воздуха пренебречь.

Д1.4 (Тадж. ССР, 1988). Пуля, пробив доску толщиной h, изменяет свою скорость от значения V_1 до значения V_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, определить время движения пули в доске.

Д1.5 (Иркутск. политех. ин-т, 1988). Тяжёлая материальная точка M может скользить без трения по окружности радиусом r, вращающейся вокруг вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Найти положение относительного равновесия точки (угол α).

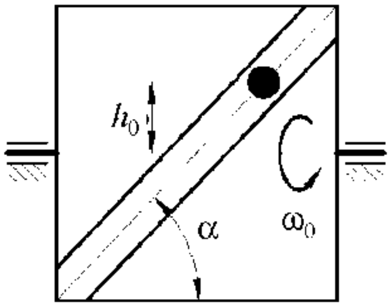




Д1.6 (Архангельск. лесотехн. ин-т, 1977). Тяжёлая материальная точка спускается по гладкой плоскости, выходя из точки A без начальной скорости.

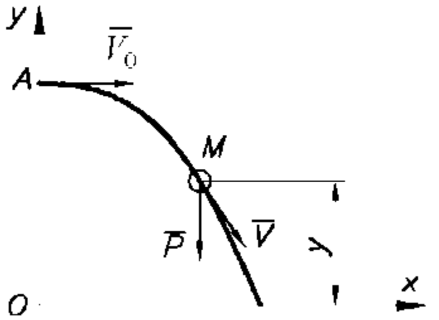
При каком угле α наклона плоскости время, в течение которого точка пройдёт путь AB, будет наименьшим, если $OB = b = \mathrm{const}$?

Задачи повышенной сложности



Д1.7 (МАТИ, 1981). Гладкая трубка расположена по диагонали прямоугольной рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей горизонтальной оси симметрии. Угол между осью вращения и трубкой равен α. В трубке на расстоянии h_0 от оси закреплён тяжёлый шарик. В момент, когда плоскость рамки вертикальна, шарик отпускают.

Существует ли такое значение h_0, при котором в процессе движения шарик никогда не достигнет концов трубки?



Д1.8 (МИИТ, 1980). Гладкая проволока, изогнутая по параболе, уравнение которой имеет вид $y = b - ax^2$, расположена в вертикальной плоскости. Из вершины параболы A начинает перемещаться с начальной скоростью V_0 кольцо M весом P.

Определить импульс сил, действующих на кольцо, за время перемещения кольца до оси O_x. Какую начальную скорость V_0 нужно сообщить кольцу, чтобы оно не оказывало давление на проволоку?

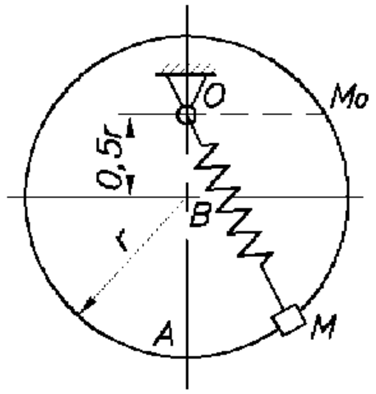
Д1.9 (Каз. ССР, 1987). Точка M движется по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ускорение точки параллельно оси y. При $t = 0$ координаты точки были $x = 0$, $y = b$, начальная скорость V_0.

Определить силу, действующую на движущуюся точку в каждой точке её траектории. Масса точки M равна m.

Д1.10 (Омск. политех. ин-т, 1982). Тяжёлое кольцо массой m надето на неподвижную горизонтальную проволочную окружность радиусом r.

Определить, какую минимальную начальную скорость нужно сообщить кольцу, чтобы оно совершило полный оборот по окружности, если коэффициент трения между кольцом и проволокой равен f.

Д1.11 (Омск. политех. ин-т, 1984). Груз M весом P, соединённый пружиной жёсткости c с неподвижной точкой O, может скользить без трения по кольцу радиусом r, расположенному в вертикальной плоскости. В положении OM_0 пружина не деформирована: M_0 лежит на одном уровне с O, $OB = 0{,}5r$.

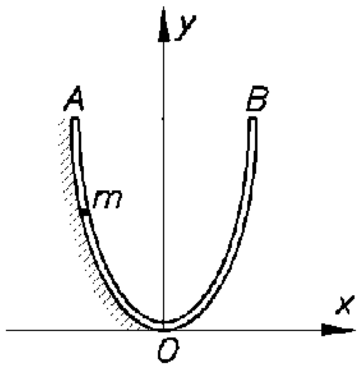


Найти давление груза на кольцо в момент, когда груз проходит через точку A, если движение началось из M_0 без начальной скорости.

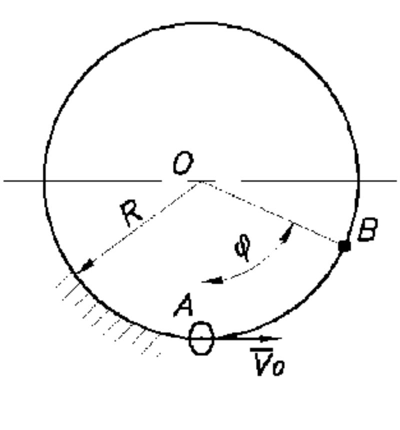
Д1.12 (Томск. политех. ин-т, 1986). Из одного центра брошены одновременно по всевозможным направлениям материальные точки. Начальные скорости всех точек одинаковы.

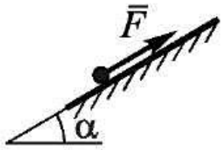
Найти геометрическое место их положений в момент времени t.

Д1.13 (Брянск, 1986). В вертикальной плоскости xoy расположена неподвижная трубка AOB, изогнутая в форме параболы $y = x^2$ (x и y в метрах). Из точки A с координатами (–2, 4) без начальной скорости опускают шарик m весом P. Пренебрегая трением, определить давление шарика на трубку в её наинизшей точке O.



Д1.14 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). По неподвижному кольцу с центром O и радиусом R, расположенному в вертикальной плоскости, из нижней точки A пускается с начальной скоростью V_0 маленькое колечко массой m. Определить давление колечка в точке B, положение которой определяется углом φ. Коэффициент трения колечка о кольцо равен f.

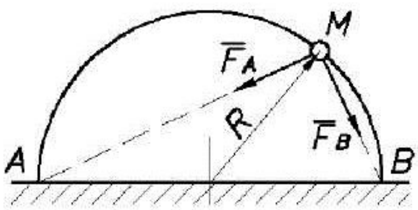




Д1.15 (Междунар. Олимпиада, Гомель, 2005). К материальной точке массой m, находящейся на наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонталью, приложена параллельная плоскости переменная сила, изменяющаяся по закону $F = \dfrac{mg}{\tau} t$, где τ – некоторая константа. Коэффициент трения точки о плоскость $f = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. Определить, на каком расстоянии от начального положения будет находиться точка через τ (с) после начала действия силы F, если в начальный момент скорость точки была равна нулю.

Задачи высокого уровня сложности

Д1.16 (МВТУ). Доказать, что если через концы вертикального диаметра окружности провести ряд хорд, то в среде, оказывающей сопротивление движению с силой, пропорциональной скорости, время движения материальной точки из состояния покоя вдоль любой хорды будет одинаковым. Доказать, что то же свойство имеет место при отсутствии сопротивления.



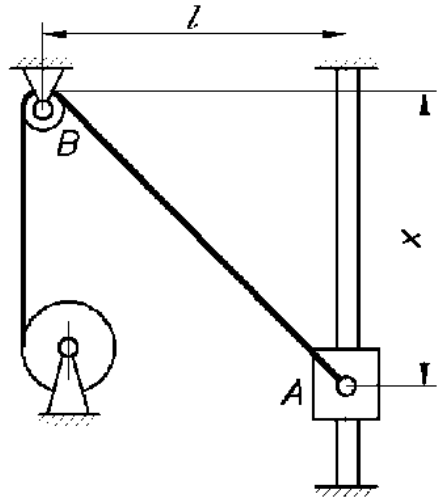
Д1.17 (Тульск. политех. ин-т, 1989). Колечко M, которое можно рассматривать как материальную точку, движется по проволочной полуокружности и притягивается к точкам A и B силами, пропорциональными расстоянию до этих точек. Коэффициент пропорциональности для обеих сил одинаков и равен K. В начальный момент точка находится в положении A и имеет начальную скорость V_0. Трение не учитывать. Определить реакцию связи для произвольного положения колечка. Масса колечка m, радиус полуокружности R.

2.2.2. Динамика твёрдого тела

Задачи обычной сложности

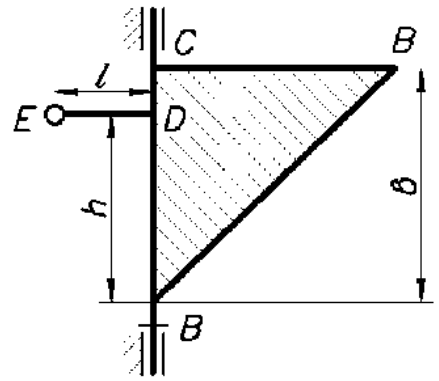
Д2.1 (МАТИ, 1981). Реактивная тележка массой m описывает мёртвую петлю по вертикальной круговой дорожке радиусом R с постоянной линейной скоростью V. Определить работу сил трения при перемещении тележки из самого нижнего положения в самое верхнее. Коэффициент трения скольжения между тележкой и дорожкой равен f.

Д2.2 (Каз. ССР, 1988). Груз A массой m поднимается по гладкому вертикальному стержню при помощи троса, перекинутого через малый идеальный блок B, отстоящий от стержня на расстоянии l. Определить натяжение T нити в зависимости от расстояния x, если трос наматывается с линейной скоростью V_0 на равномерно вращающийся барабан.



Д2.3 (Молд. ССР, 1982). Тонкая однородная пластинка ABC массой M в форме прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом b вращается вокруг вертикальной оси. К оси на невесомом горизонтальном стержне прикреплён точечный груз E массой m.

Какими должны быть длина стержня $DE = l$ и расстояние $BD = h$, чтобы реакции опор не зависели от угловой скорости?

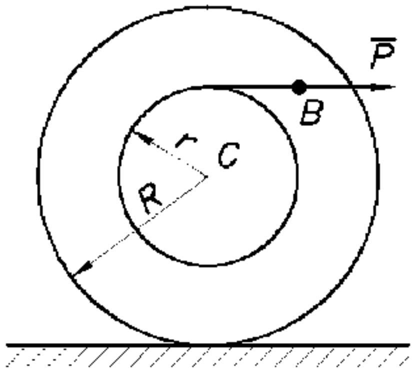


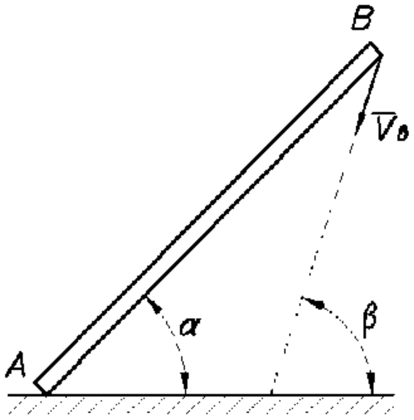
Д2.4 (Свердловск, 1982). На вертикально поставленный и закреплённый винт, шаг которого h, надета гайка весом P, которую можно рассматривать как однородный полый цилиндр с радиусами r и R. Будучи предоставлена сама себе, она движется вниз. Трение отсутствует.

Определить главный вектор и главный момент реакций винта.

Д2.5 (Свердловск, 1985). К концу нити, намотанной на барабан радиусом r, жёстко связанный с катком радиусом R, приложена горизонтальная сила P. Радиус инерции катка с барабаном относительно общей оси симметрии равен ρ. Трение качения отсутствует.

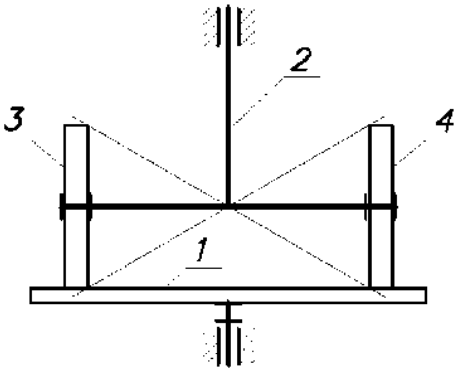
Выяснить, при каком соотношении между радиусами R и r, и радиусом инерции ρ каток будет катиться по горизонтальной поверхности без скольжения, независимо от величины силы P, при любом отличном от нуля значении коэффициента трения скольжения.



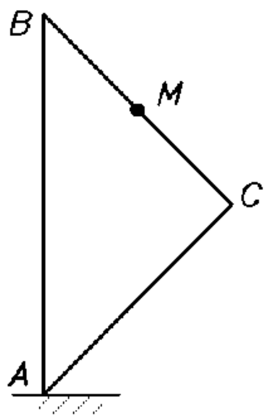


Д2.6 (Свердловск, 1986). Однородный стержень длиной 2 м движется в вертикальной плоскости, скользя концом A по гладкой горизонтальной прямой. Начальное положение стержня изображено на рисунке.

Определить угловую скорость стержня в момент, когда он займёт горизонтальное положение, если в начальный момент времени точка B имеет $V_B = 2$ м/с, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.



Д2.7 (Поволжск. зона, 1986). Во фрикционном механизме диск *1* за каждую секунду совершает 1 оборот, а водило *2* вращается вдвое медленнее. Определить кинетическую энергию ролика *3* (или *4*), считая ролик диском массой m и радиусом r. Скольжением пренебречь.

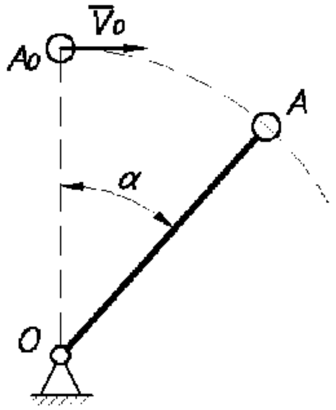


Д2.8 (Омск. политех. ин-т, 1981). Тонкая пластина, имеющая форму прямоугольного равнобедренного треугольника, гипотенуза которого равна 12 см, поставлена вершиной A на абсолютно гладкую плоскость так, что в начальный момент гипотенуза AB вертикальна. Предоставленная самой себе пластина падает под действием силы тяжести.

Определить траекторию точки M – середины катета BC.

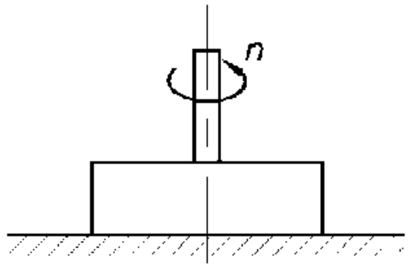
Д2.9 (Омск. политех. ин-т, 1981). Однородный стержень массой m и длиной $2b$ может свободно скользить по гладкой горизонтальной плоскости. Каждый элемент стержня притягивается неподвижной прямой, принадлежащей этой плоскости, силой, прямо пропорциональной массе элемента и его расстоянию от прямой. Составить дифференциальные уравнения движения стержня и найти закон движения его центра масс.

Д2.10 (Омск. политех. ин-т. 1985). Из положения неустойчивого равновесия OA_0 маятник движется после толчка, сообщившего точечному грузу A скорость V_0.

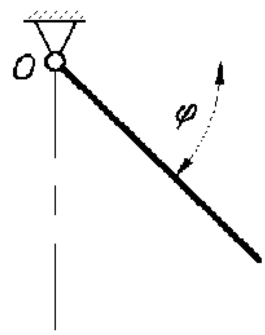


Определить давление маятника на опору в момент, когда стержень составляет с вертикалью угол α. Стержень OA невесомый, $OA = l$.

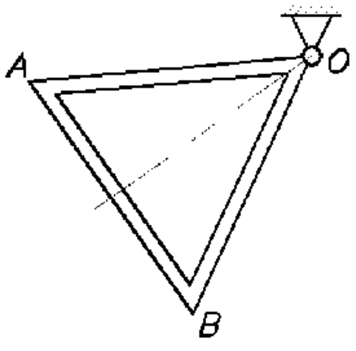
Д2.11 (Омск. политех. ин-т, 1987). Цилиндрическое тело радиусом R, вращающееся около своей вертикальной оси со скоростью n оборотов в минуту, опускают до тех пор, пока оно нижней стороной не коснётся негладкой горизонтальной плоскости. Какое число N оборотов сделает тело с момента касания до остановки? Коэффициент трения между соприкасающимися поверхностями равен f.

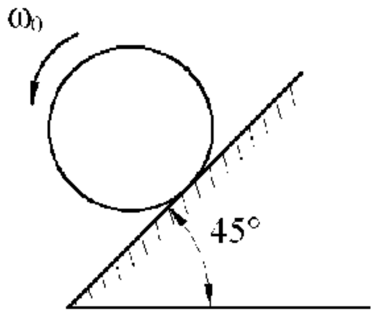


Д2.12 (Тульск. политех. ин-т. 1989). Тяжёлый однородный стержень шарнирно закреплён в точке O. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Найти угол между направлением стержня и направлением реакции шарнира для некоторого угла φ. Трением пренебречь.

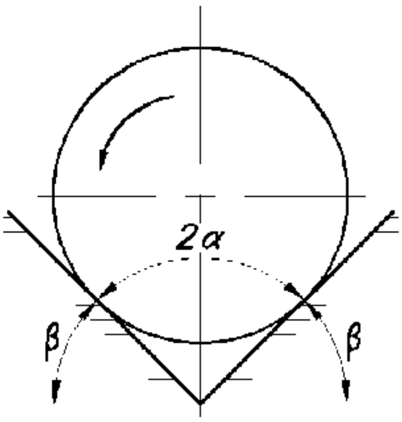


Д2.13 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1984). Треугольник OAB, стороны которого представляют собой однородные тонкие стержни равной длины, массы m каждый, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через вершину O перпендикулярно плоскости OAB. Из положения, когда сторона OA горизонтальна, треугольник отпускают без начальной скорости. Определить давление на ось O в начальный момент движения и в момент, когда сторона AB станет горизонтальной.

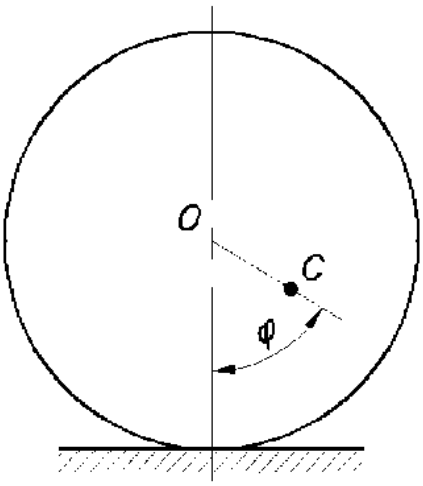




Д2.14 (М., 1988). Однородный обруч радиусом r = 1 м, которому сообщена угловая скорость $\omega_0 = 5\sqrt{2}$, рад/с, поставлен на наклонную плоскость и предоставлен самому себе. Коэффициент трения обруча о плоскость f. Определить дальнейшее движение обруча, считая его плоским. (Трением качения пренебречь, принять g = 10 м/с^2).



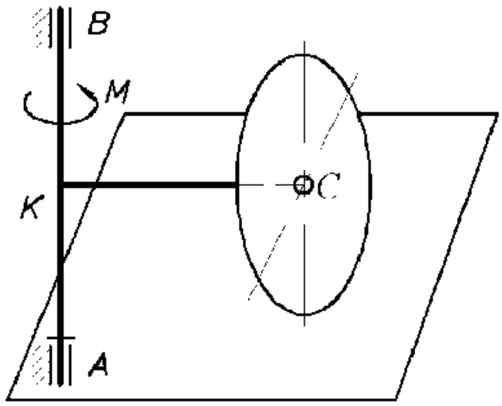
Д2.15 (МАТИ, 1981). Тяжёлый маховик радиусом R раскрутили до угловой скорости ω_0 и поместили между двумя стенками, расположенными под углом 2α одна к другой. Коэффициент трения между маховиком и стенками равен f. Углы между стенками и горизонтальной плоскостью одинаковы. Масса маховика распределена по ободу. Определить число оборотов n маховика до его остановки.



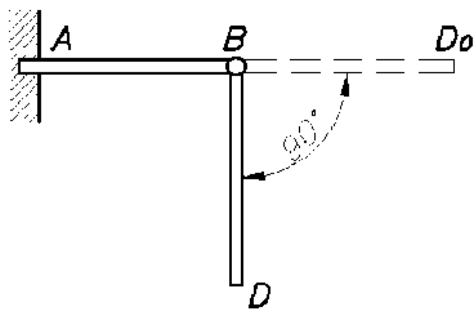
Д2.16 (МИИТ, 1980). Цилиндр радиусом r может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости; его центр тяжести находится в точке C на расстоянии $OC = l$ от центра O. Радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости чертежа, равен ρ. Определить угловую скорость ω цилиндра в функции угла φ, образованного прямой OC с вертикалью, если в начальный момент цилиндр находится в покое и угол $\varphi = \varphi_0$.

Д2.17 (Аз. ССР, 1985). Тонкий однородный диск радиусом R и весом Q вращается вокруг вертикальной оси AB, катаясь при этом без скольжения по горизонтальной плоскости. К оси AB приложен постоянный вращающий момент M. Длина стержня KC равна l, его вес – P.

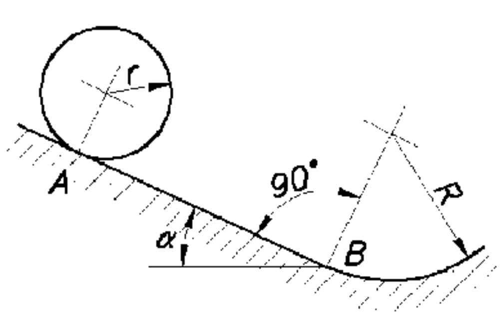
Найти угловую скорость вращения диска вокруг оси AB, считая стержень KC тонким и однородным.



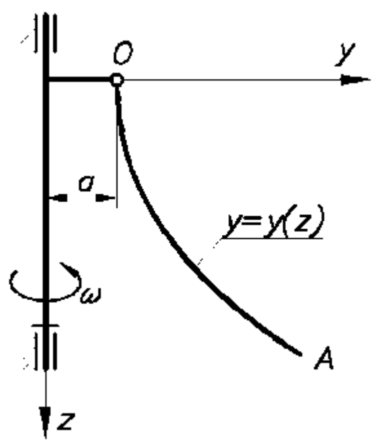
Д2.18 (Зап.-Сиб. зона, 1988). Два однородных прямолинейных стержня AB и BD массой m и длиной l каждый, связаны посредством шарнира B. Определить момент в заделке A стержня AB, когда отпущенный без начальной скорости из горизонтального положения BD_0 стержень BD повернётся на угол $90°$ под действием силы тяжести. Трением в шарнире B пренебречь.



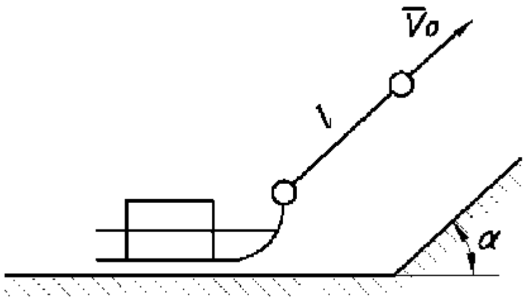
Д2.19 (Горьковск. политех. ин-т, 1984). Однородный сплошной цилиндр весом P и радиусом r скатывается из точки A без начальной скорости по прямолинейному наклонному участку AB $(AB = l)$ и переходит в точке B на участок в виде дуги радиусом R. Определить изменение давления цилиндра на опору при переходе через точку B.



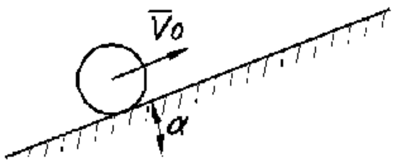
Д2.20 (Горьковск. политех. ин-т, 1984). Однородная гибкая цепь OA длиной l, подвешенная в точке O, вращается с постоянной угловой скоростью ω около вертикальной оси Z. Найти уравнение кривой, которую образует цепь, и натяжение цепи $T = f(z)$. Масса цепи равна m.



Д2.21 (Зап.-Сиб. зона, 1990). Человек поднимается в гору с углом подъёма α с постоянной скоростью V_0 и тянет за собой на жёсткой тяге длиной l сани массой m, находящиеся на горизонтальном участке дороги. Найти натяжение тяги в тот момент, когда она составит угол α с горизонтом. Трением саней о поверхность дороги пренебречь.

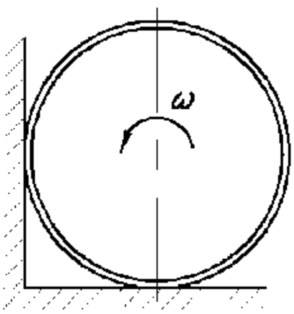


Д2.22 (Зап.-Сиб. зона, 1989). Цилиндрический каток радиусом R начинает катиться без скольжения вверх по наклонной плоскости со скоростью V_0.

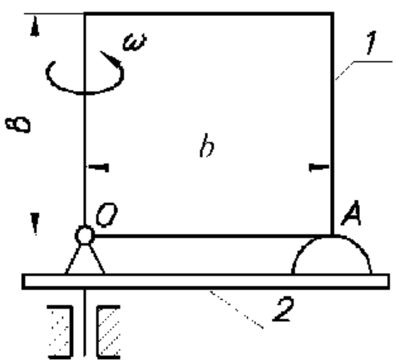


Какова будет скорость центра катка по возвращении его в первоначальное положение, если угол наклона плоскости равен α, а коэффициент трения качения δ ?

Д2.23 (Омск. политех. ин-т, 1982). Тонкостенный цилиндр радиусом R раскрутили до скорости ω и поставили в угол. Определить, сколько оборотов сделает цилиндр до остановки, вызванной трением о стенки с коэффициентом f.

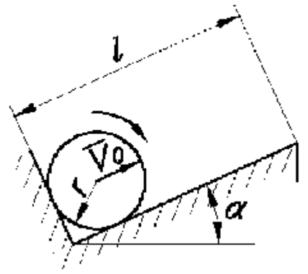


Д2.24 (Омск. политех. ин-т, 1986). Однородная пластинка 1 весом P, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке O шарниром, а в точке A свободно опирается на выступ платформы 2. Платформа вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью.



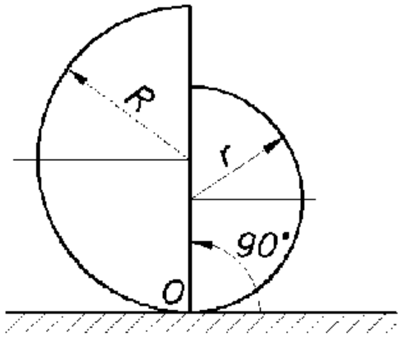
Определить давление пластинки на опору A.

Д2.25 (Омск. политех. ин-т, 1986). Тяжёлый однородный цилиндр радиусом r катится вверх по наклонной плоскости без скольжения. Начальная скорость центра масс цилиндра равна V_0. Известна длина l наклонного участка плоскости и угол α наклона к горизонту. Силы сопротивления движению цилиндра малы.



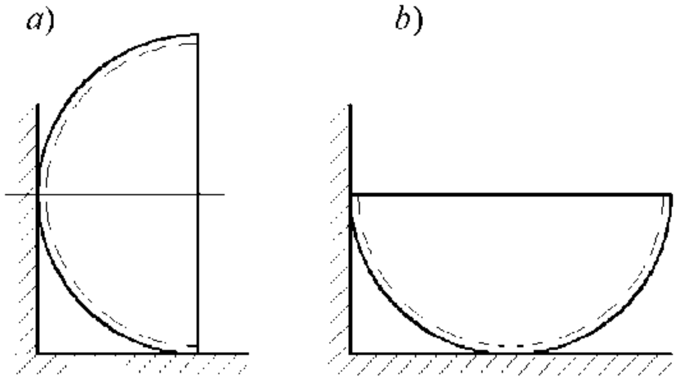
Определить движение цилиндра после отрыва его от опоры. Указать условие, при котором такое движение возможно.

Д2.26 (Омск. политех. ин-т, 1987). Тело, составленное из двух однородных полуцилиндров и расположенное на горизонтальной плоскости, как показано на чертеже, предоставлено силе тяжести. Каким будет его угловое ускорение в начале движения?

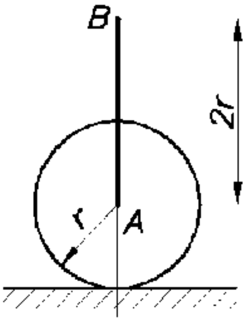


Д2.27 (Томск. политех. ин-т, 1986). Тонкая однородная полусфера радиусом r опирается на гладкую горизонтальную плоскость и гладкую вертикальную стенку. В начальном положении полусфера находится в покое, а основание её параллельно вертикальной стенке (рис. a).

Определить скорость движения центра масс полусферы под действием силы тяжести в тот момент, когда её основание займёт горизонтальное положение (рис. b).

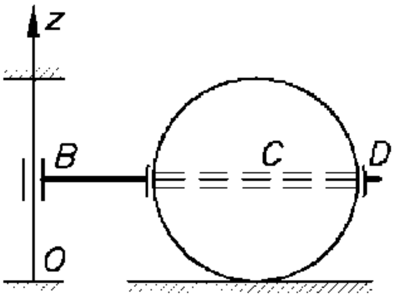


Д2.28 (Брянск, 1986). Тяжёлая однородная цепочка длиной $2l$ и массой M лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина её свешивается со стола. Определить время, в течение которого цепочка полностью соскользнёт со стола.

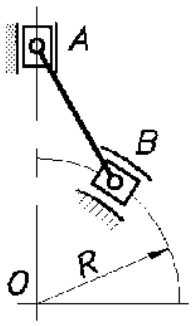


Д2.29 (Владимирск. политех. ин-т, 1977). Однородный диск радиусом r скреплён с тонким однородным стержнем AB. В положении, показанном на рисунке, диск находится в покое и начинает катиться по плоскости без скольжения.

Определить скорость конца B стержня в момент перед ударом о плоскость. Диск и стержень имеют одинаковый вес. $AB = 2r$.

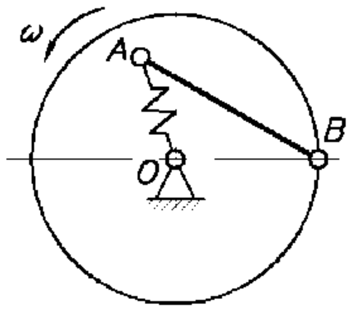


Д2.30 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1983). Тяжёлый однородный шар связан с вертикальной осью тонким невесомым стержнем BD, относительно которого шар может вращаться. Длина стержня BD, перпендикулярного оси OZ, в три раза превышает радиус шара. Какую начальную горизонтальную скорость V перпендикулярно стержню BD необходимо сообщить центру C покоившегося шара, чтобы шар сделал три полных оборота вокруг оси OZ, если коэффициент трения качения шара по горизонтальной плоскости равен k? Проскальзыванием шара по плоскости и трением в осях пренебречь.



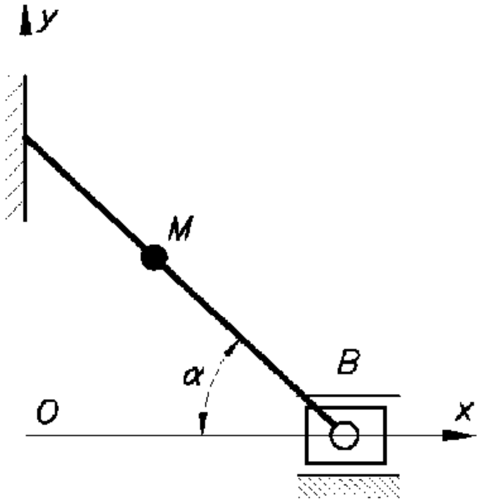
Д2.31 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1985). В механизме, расположенном в вертикальной плоскости, однородный стержень AB длиной l и массой M имеет на концах ползуны, один из которых скользит по вертикальной направляющей, а другой по дуге окружности радиусом $R = l$ с центром в точке O, лежащей на одной вертикали с ползуном A. Стержень начинает движение из вертикального положения; начальная скорость ползуна B ничтожно мала. Определить скорость ползуна B в тот момент, когда угол OAB будет равен $30°$. Ползуны считать материальными точками массой m, трением пренебречь.

Д2.32 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1985). На гладком горизонтальном диске радиусом R и массой M с помощью шарнира B и пружины AO закреплён однородный тонкий прямолинейный стержень AB массой m и длиной $l = R\sqrt{2}$. Длина недеформированной пружины равна $R/2$, а жёсткость – c. Диск равномерно вращается вокруг центральной оси O, перпендикулярной его плоскости; при этом удлинение пружины $\lambda = \frac{1}{2}R$.

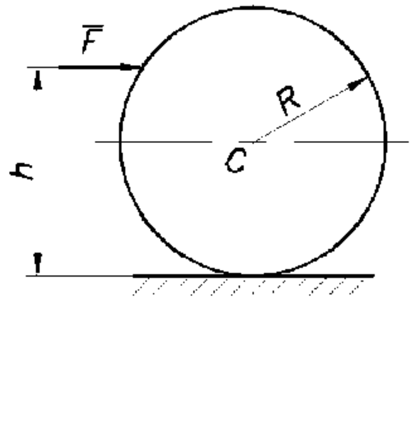


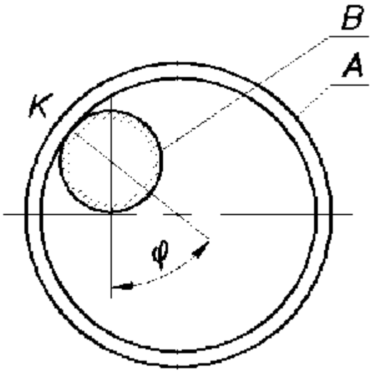
Определить угловую скорость диска. Найти горизонтальную составляющую R_0 реакции опоры O.

Д2.33 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1987). Лёгкий стержень, на середине которого укреплён груз M массой m_1, одним концом может скользить по гладкой вертикальной стене, а другим шарнирно прикреплён к ползуну B массой m_2, который может двигаться без трения в горизонтальных направляющих. Найти модуль ускорения ползуна в начальный момент движения из состояния покоя, если стержень образует в этот момент с горизонтом угол α. Массой стержня и размерами груза пренебречь.

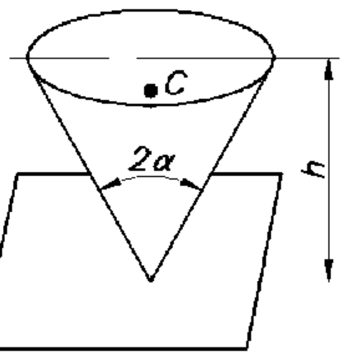


Д2.34 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1988). На каком расстоянии h от горизонтальной плоскости должна быть приложена к однородному сплошному диску радиусом R горизонтальная постоянная сила F, чтобы диск перекатывался без проскальзывания по этой плоскости, а коэффициент трения скольжения в месте контакта диска и плоскости при этом был равен нулю? Трением качения пренебречь.

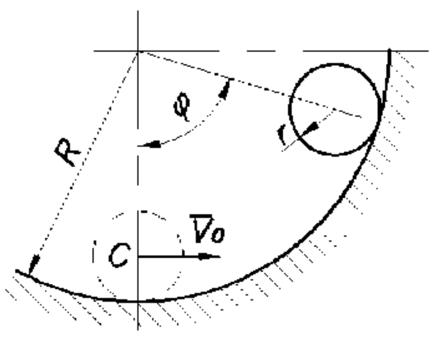




Д2.35 (МВТУ, 1980). Тонкое однородное кольцо A весом P движется в вертикальной плоскости, перекатываясь без скольжения по неподвижному цилиндрическому валу B. Ось вала B – горизонтальна. Определить силу трения в контактной точке K в зависимости от её положения.



Д2.36 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1986). Однородный прямоугольный конус высотой h с углом 2α при вершине поставлен вершиной на гладкую горизонтальную плоскость. Найти расстояние S, на которое переместится вершина конуса к моменту его падения на плоскость. Определить также скорость центра тяжести C конуса в момент его падения на плоскость. Принять: m – масса конуса; J – момент инерции конуса относительно оси, проходящей через точку C параллельно плоскости основания конуса; движение конуса плоское.



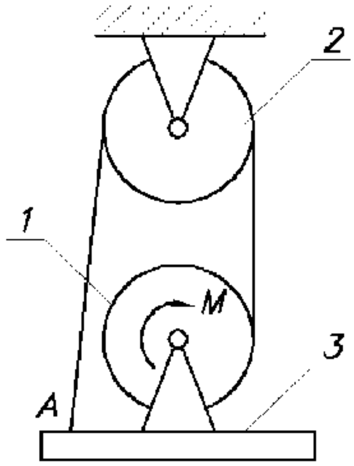
Д2.37 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Однородный цилиндр радиусом r находился в нижнем положении внутри цилиндрической полости радиусом R с горизонтальной образующей. Из этого положения цилиндру сообщили плоское движение без скольжения с начальной скоростью оси C $V_0 = \sqrt{\frac{4}{3}(R-r)g}$.

Определить, до какого значения угла φ цилиндр будет катиться внутри полости без скольжения, если коэффициент трения скольжения равен 1/7. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

2.2.3. Динамика системы

Задачи обычной сложности

Д3.1 (МВТУ, 1977). Верёвка, закреплённая одним концом на барабане *1*, несколько раз наматывается на него, перебрасывается через блок *2* и прикрепляется в точке A к платформе *3*. Барабан и блок – однородные цилиндры радиусом r и весом P, вес платформы равен Q. К барабану приложен момент M. При решении задачи считать, что платформа движется поступательно и верёвка не проскальзывает по блоку.

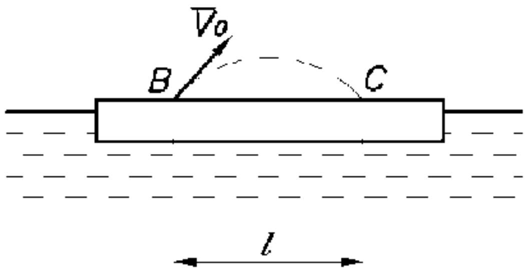


Найти ускорение, с которым будет подниматься платформа.

Д3.2 (МИИТ, 1979). На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный диск радиусом R. На него осторожно (без удара) опустили точно такой же диск, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси.

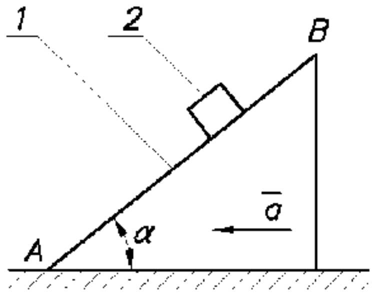
Считая коэффициент трения f постоянным, определить, через какое время оба диска будут вращаться с одной и той же угловой скоростью. При решении считать, что нормальное давление равномерно распределено по поверхности диска.

Д3.3 (Киевск. автомоб.-дор. ин-т, 1977). Лягушка сидит на доске в точке B; доска свободно плавает на поверхности воды. Лягушка прыгает, попадая в точку C доски. Какой должна быть наименьшая начальная скорость V_0 лягушки относительно воды? Даны: расстояние $BC = l$, масса лягушки m, масса доски M; сопротивление воды не учитывать.



Д3.4 (Свердловск, 1982). Доска весом P установлена на двух опорах под углом α к горизонту. Трение между доской и опорами отсутствует.

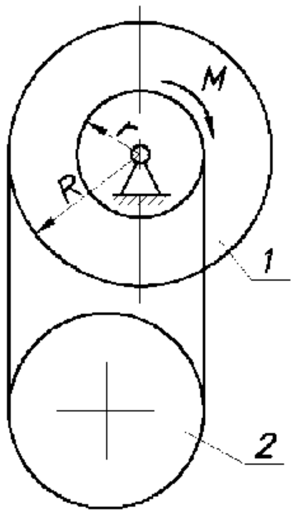
С каким ускорением должна бежать по доске собака весом Q, чтобы доска не соскальзывала вниз?



Д3.5 (Свердловск, 1983). С каким ускорением a должна двигаться призма 1 с острым углом α, чтобы груз 2 поднимался вверх по AB? Коэффициент трения груза о призму равен f (движение начинается из состояния покоя).

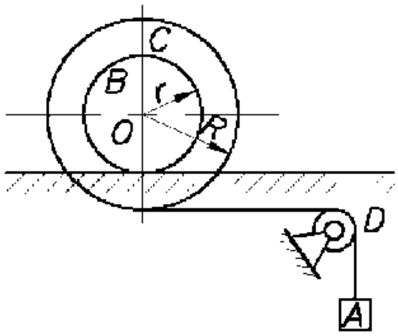
Д3.6 (Свердловск, 1985). (Задача Чаплыгина). На гладкой горизонтальной плоскости лежит круглый однородный диск. По ободу диска начинает двигаться из состояния покоя жук массой m с постоянной относительной скоростью U. Масса диска M, радиус R.

Определить абсолютное движение диска и жука.



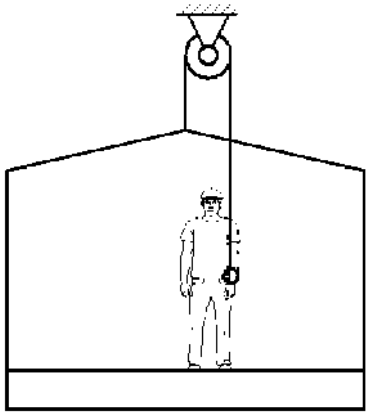
Д3.7 (Свердловск, 1986). Механическая система состоит из ступенчатого барабана 1, однородного диска 2 и гибкой нерастяжимой нити.

При каком соотношении между радиусами r и R натяжение правой ветви нити не зависит от закона движения системы? Свободные участки нити вертикальны, нить не скользит по поверхности диска.



Д3.8 (Зап.-Сиб. зона, 1988). Груз A весом P, опускаясь вниз, посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок D и намотанной на колесо C, заставляет катиться барабан B без скольжения по горизонтальному рельсу. Коэффициент трения качения f_k. Барабан B радиусом r жёстко связан с колесом C радиусом R; их общий вес Q, а радиус инерции относительно горизонтальной оси равен ρ. Весом блока D и трением в оси блока пренебречь. Найти ускорение груза A.

Д3.9 (Зап.-Сиб. зона. 1989). Маляр работает в подвесном кресле. Вес его 72 кг. Ему понадобилось срочно подняться вверх. Он принимается тянуть за верёвку с такой силой, что его давление на кресло уменьшается до 40 кг. Само кресло весит 12 кг.

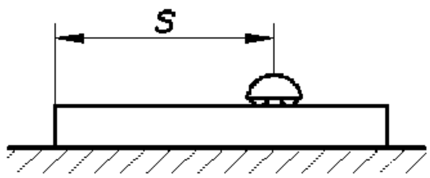


а) Чему равно ускорение маляра и кресла?

б) Чему равна полная нагрузка на блок?

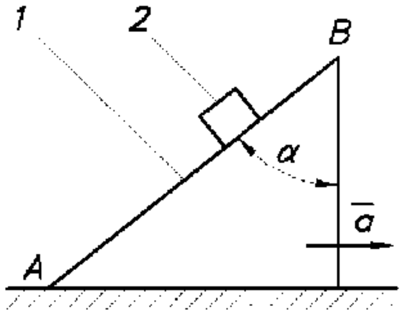
Трением на блоке и его массой пренебречь.

Д3.10 (Омск. политех. ин-т, 1983). По доске, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, движется заводная игрушка согласно закону: $S = bt^2$ (b – постоянное число). Движение началось из состояния покоя.



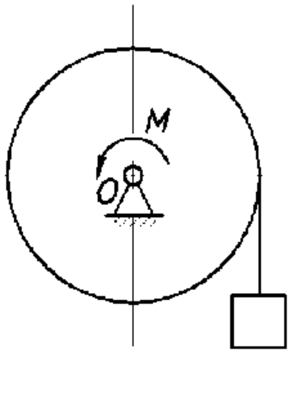
Определить скорость и ускорение доски в момент, когда игрушка достигнет конца доски. Известны масса m_1 и длина доски l, масса игрушки m_2.

Д3.11 (Омск. политех. ин-т, 1985). На шероховатой грани AB призмы 1 покоится тело 2 весом P, удерживаемое силой трения. Коэффициент трения равен f.

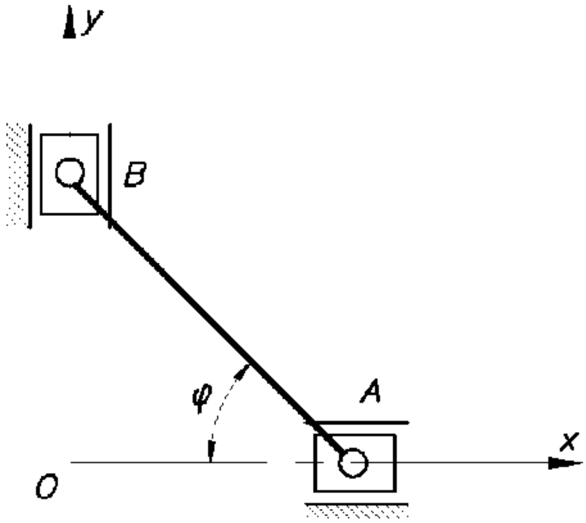


С каким наибольшим ускорением a можно перемещать призму вправо, чтобы тело оставалось в покое относительно призмы? Указать зависимость между f и α, при которой тело придёт в движение при любом ускорении.

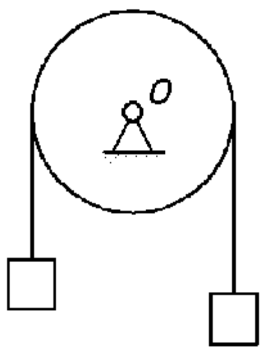
Д3.12 (Томск. политех. ин-т, 1985). На блок радиусом R с моментом инерции J относительно оси O намотана нить с грузом на конце. Система приходит в движение из состояния покоя под действием веса P груза и момента $M = kt$.



Через какое время произойдёт остановка системы? Какой путь пройдёт за это время груз?



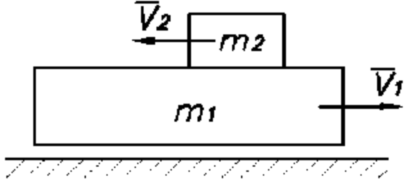
Д3.13 (Брянск. ин-т транспорт. машиностр.). Два ползуна A и B, имеющие одинаковый вес P и связанные невесомым стержнем AB, могут скользить без трения соответственно вдоль осей OX и OY. В начальный момент времени система находилась в покое, а $\varphi_0 = \pi/3$. Определить усилие S в стержне AB в тот момент, когда $\varphi = \pi/6$.



Д3.14 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1988). На шкив, вращающийся без сопротивления вокруг горизонтальной оси O с угловой скоростью ω_0, накинули длинный ремень с двумя грузами на концах. Шкив – однородный диск массой m и радиусом r, масса каждого из грузов $M = 2m$.

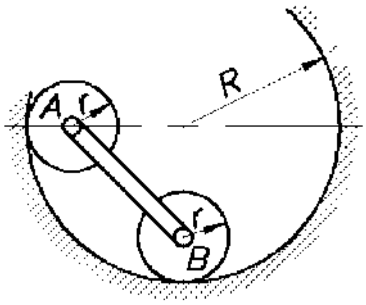
Считая начальные скорости грузов равными нулю, определить, с какой скоростью они будут двигаться после того, как скольжение ремня по шкиву прекратится. Найти работу сил трения.

Задачи повышенной сложности



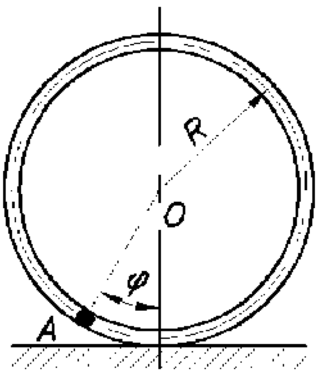
Д3.15 (Узб. ССР, 1988). Платформа массой m_1 движется вправо без сопротивления со скоростью V_1. На платформе стоит человек массой m_2. Определить приращение скорости платформы, если человек будет бежать со скоростью V_2 относительно платформы, а затем спрыгнет с её левого конца. Предполагая теперь, что на неподвижной платформе стоит n человек массой m каждый, доказать, что если люди будут поочередно бежать с относительной скоростью V и спрыгивать, то они сообщат платформе большую скорость, чем, если бы они бежали, а затем спрыгнули одновременно.

Д3.16 (МВТУ, 1986). Два однородных цилиндрических катка радиусом r и массой m каждый, оси которых шарнирно связаны однородным стержнем AB длиной $l = 2\sqrt{2}r$ и массой $m_1 = 0{,}5m$, могут катиться без скольжения внутри цилиндра радиусом $R = 3r$ с горизонтальной образующей. Пренебрегая трением качения, определить скорости осей катков в тот момент, когда стержень AB займёт горизонтальное положение, если в начальный момент катки были отведены в положение, показанное на рисунке, и отпущены без начальной скорости.

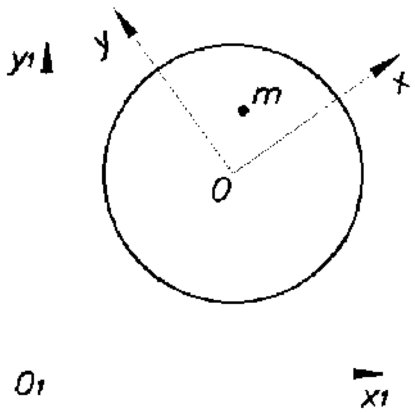


Д3.17 (МАТИ, 1982). Тонкий обруч массой M и радиусом R поставлен на горизонтальную плоскость. По гладкому каналу внутри обруча соскальзывает из верхней точки без начальной скорости шарик массой m.

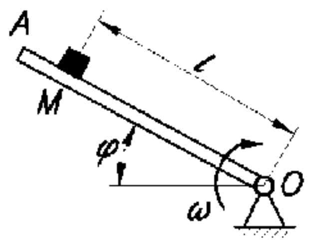
Определить скорость центра обруча в тот момент времени, когда шарик находится в точке A обруча, положение которой определяется углом φ. В начальный момент времени обруч покоился. Трение между обручем и плоскостью отсутствует.

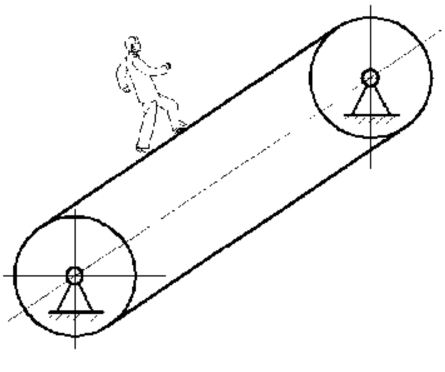


Д3.18 (Молд. ССР, 1988). Однородный круглый диск радиусом R и массой M может скользить без трения по горизонтальному столу. По диску движется материальная точка массы m по закону $x = x(t)$; $y = y(t)$. Определить угловую скорость диска, если в начальный момент времени он покоился.

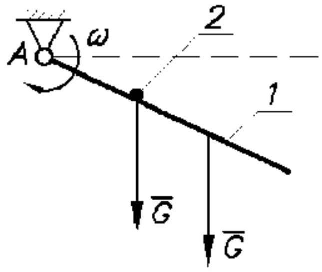


Д3.19 (Лит. ССР, 1988). Плита OA равномерно вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости рисунка. На плите на расстоянии $OM = l$ от оси вращения находится тело M. Определить величину угла поворота φ плиты, при котором тело начнёт скользить, если коэффициент трения между телом и плитой $f = 0{,}5$, а $\omega^2 = (\sqrt{2}/4)(g/l)$.



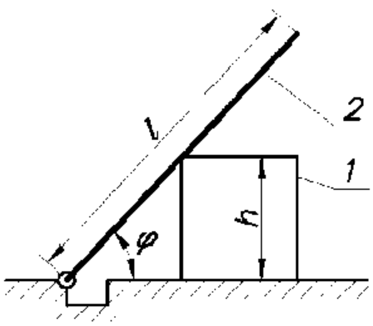


Д3.20 (Зап.-Сиб. зона, 1990). Лента транспортёра имеет массу M и наклонена к горизонту под углом α, а шкивы имеют радиусы r и моменты инерции J (относительно осей вращения). Человек массой m ступил на транспортёр и стремится на нём удержаться. Максимальная мощность, которую может развить человек, равна N. Определить время, в течение которого он удержится на одном уровне. Какую работу совершит человек за это время? Трением в подшипниках, сопротивлением воздуха, проскальзыванием и прогибом ленты пренебречь.



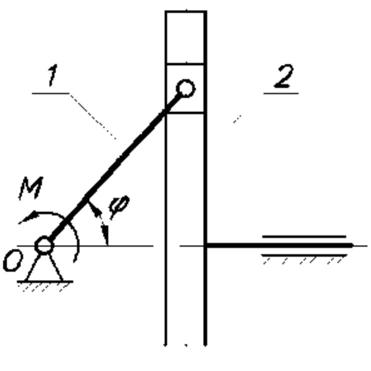
Д3.21 (Омск. политех. ин-т, 1981). Однородный стержень *1* длиной b шарнирно закреплён в точке A. От точки A по стержню начинает двигаться материальная точка *2*, масса m которой равна массе стержня. В начальный момент стержень занимал горизонтальное положение; получив толчок, он начал вращаться в вертикальной плоскости по часовой стрелке.

Определить, за какое время материальная точка достигнет конца стержня, если она движется таким образом, что угловая скорость стержня остаётся постоянной.



Д3.22 (Омск. политех. ин-т, 1982). Однородный тонкий стержень из состояния покоя опускается под действием собственного веса и приводит в движение по гладкой горизонтальной плоскости прямоугольный брусок.

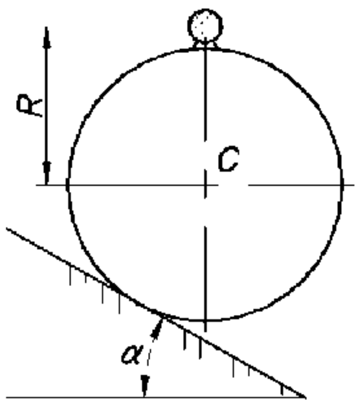
Определить угловую скорость стержня. Известны массы стержня и бруска, размеры h, l, φ_0.



Д3.23 (Омск. политех. ин-т, 1988). К кривошипу *1* механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен постоянный момент M, при движении кулисы *2* возникает постоянная по величине сила сопротивления F. Движение начинается из состояния покоя в положении, когда $\varphi = 0$. Кривошип – однородный стержень длиной l, известны массы кривошипа и кулисы.

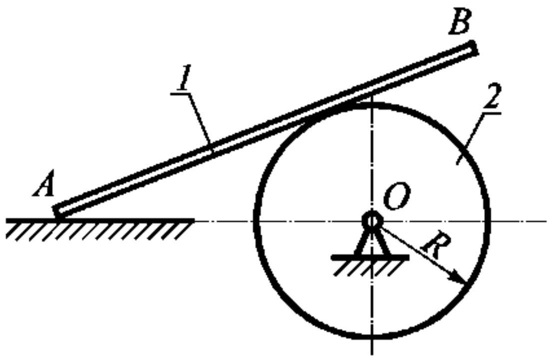
Найти скорость кулисы в момент, когда $\varphi = 60°$.

Д3.24 (Воронежск. политех. ин-т. 1977). Однородный цилиндр массой M и радиусом R скатывается без скольжения по плоскости, наклонённой к горизонту под углом α. «Бегущая» по цилиндру материальная точка массой m остаётся всё время в наивысшем положении.



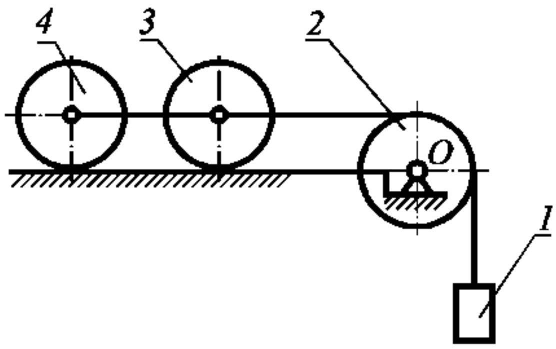
Найти ускорение центра C цилиндра.

Д3.25 (Международ. олимпиада, Гомель, 2005). Система состоит из стержня *1*, имеющего длину $2l$ и массу m_1, и однородного цилиндра *2* массой m_2 и радиусом R. Под действием силы тяжести стержня его конец A скользит по гладкой горизонтальной плоскости, а цилиндр вращается вокруг горизонтальной оси O. Проскальзывание между стержнем и цилиндром отсутствует. В начальный момент времени стержень касается цилиндра средней точкой, и тела неподвижны.

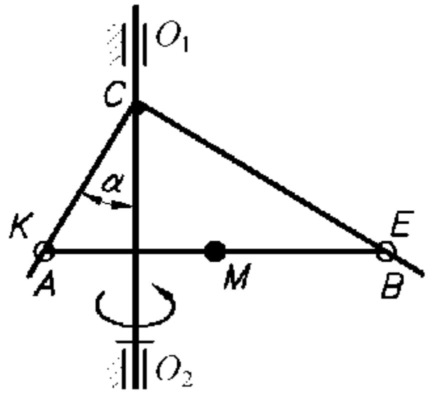


Определить угловую скорость цилиндра в момент, когда его коснётся точка B стержня.

Д3.26 (Международ. олимпиада, Гомель, 2005). Груз *1* подвешен к невесомой нити, переброшенной через блок *2*, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Он приводит в движение катки *3* и *4*, перемещающиеся по горизонтальной плоскости. Массы тел *2*, *3* и *4* одинаковы и равны m каждая. Блок *2* и каток *3* – сплошные однородные диски, масса катка *4* равномерно распределена по ободу. Коэффициент трения между катками и поверхностью f.

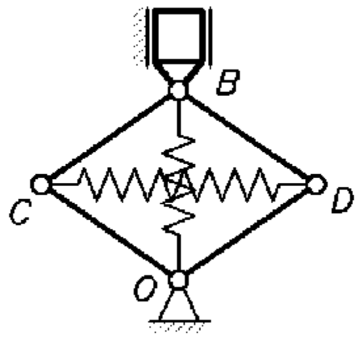


Пренебрегая сопротивлением качению, определить, при какой максимальной массе груза *1* качение обоих катков по поверхности будет происходить без проскальзывания. Найти также минимальную массу груза, при которой оба катка будут проскальзывать.



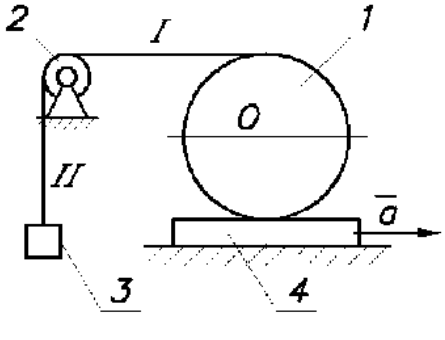
Д3.27 (МАТИ, 1960). Жёсткая конструкция состоит из стержней AC и BC и вертикальной оси O_1O_2, причём $\angle ACB = \pi/2$, $\angle ACO_2 = \alpha$. По стержням могут свободно скользить невесомые кольца, соединённые невесомым стержнем KE длины l. К середине этого стержня прикреплён тяжёлый грузик M.

При какой угловой скорости вращения конструкции стержень KE займёт горизонтальное положение?



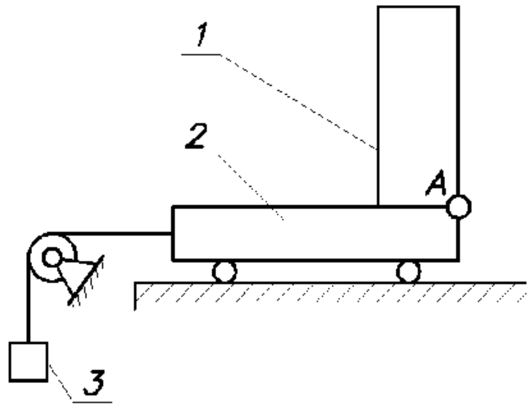
Д3.28 (УССР, 1987). Ползун массой M, движущийся в вертикальном направлении в направляющих, связан с ромбом, образованным стержнями длиной l и массой m. Пружина с коэффициентом жёсткости c_1 связывает вершины C и D, пружина с жёсткостью c_2 связывает вершины O и B. В положении равновесия углы между стержнями составляют 90°.

Какую начальную скорость нужно сообщить ползуну, чтобы он прошёл половину диагонали OB? Трение в шарнирах и направляющих не учитывать. Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы.



Д3.29 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1978). Массы тел *1*, *2*, и *3* соответственно равны m_1, m_2 и m_3, причём тела *1* и *2* – однородные диски. Диск *1* катится по бруску *4* без скольжения, а брусок движется с постоянным ускорением a вправо. Определить ускорение a_r центра O диска *1* по отношению к телу *4* и натяжение нити на участках I и II.

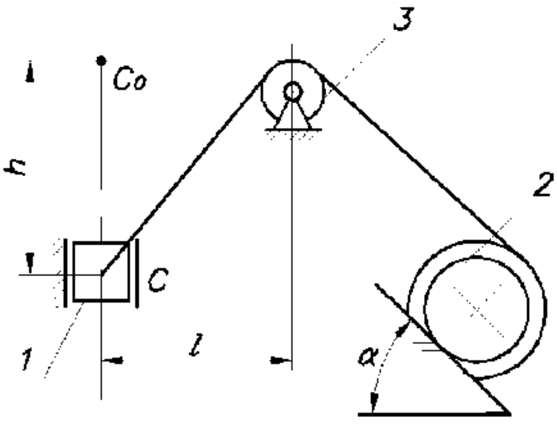
Д3.30 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Однородный прямоугольный брусок *1* массой m_1, с помощью шарнира A закреплён на тележке *2* массой m_2. К тележке на невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, привязан груз *3*, который, опускаясь вниз, приводит систему в движение из состояния покоя. Определить вес груза P_3, при котором брусок опрокинется. Высота бруска втрое превышает его ширину. Определить также реакцию шарнира A в момент начала опрокидывания. Трением всюду пренебречь. Массу колёс тележки не учитывать.



2.2.4. Законы сохранения

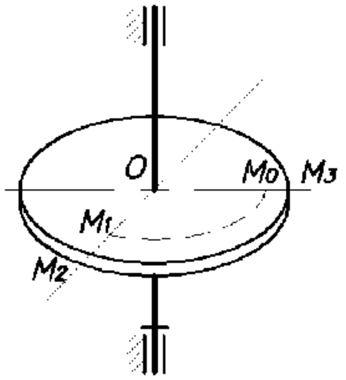
Задачи обычной сложности

Д4.1 (Каз. ССР, 1985). Механизм состоит из груза *1*, который может скользить без трения в вертикальных направляющих, ступенчатого катка *2*, перекатывающегося без проскальзывания по наклонному рельсу, малого идеального блока *3* ($R_3 << l$) и нерастяжимой нити. Трение качения отсутствует. Из начального положения груз опускается без начальной скорости под действием силы тяжести.



Найти скорость груза, когда он пройдёт путь h. Известны l, α, массы m_1, m_2, радиусы R_2, r_2, радиус инерции катка ρ.

Д4.2 (Тольяттинск. политех. ин-т, 1986). Фигурист с разведёнными горизонтально руками вращается вокруг центральной вертикальной оси с начальной угловой скоростью ω_0. Определить угловую скорость ω_k фигуриста после опускания рук вниз (к туловищу) и совершённую им при этом работу. Руку схематизировать как тонкий стержень массой m и длиной l. Ширина плеч $2a$. Момент инерции тела (без рук) относительно оси вращения J_t. Трением пренебречь.

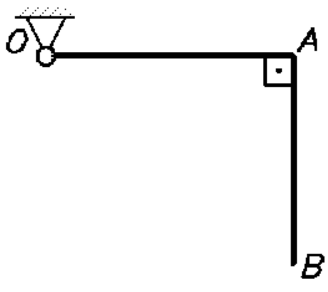


Д4.3 (Омск. политех. ин-т, 1987). Однородный диск радиусом R и весом P может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На диске по концентрической окружности радиусом $OM_0 = r$ идёт человек, проходя от начального положения M_0 по стрелке часов дугу M_0M_1, соответствующую углу $\pi/2$. Затем он идёт по радиусу до края диска (точка M_2). Потом – по краю диска проходит четверть окружности (дуга M_2M_3) против стрелки часов и, наконец, по радиусу возвращается в исходное положение (в точку M_0). Зная, что вес человека равен весу диска, определить угол φ поворота диска. Принять $r = 0{,}5R$.

Д4.4 (Брянск, 1986). Горизонтальная платформа, масса M которой равномерно распределена по окружности радиусом R, может вращаться без трения вокруг вертикальной оси z, проходящей через её центр C. На платформе находится материальная точка массой m, которая в некоторый момент начинает двигаться вдоль края платформы с постоянной по модулю относительной скоростью U. Определить кинетическую энергию системы, если вначале она находилась в покое.

Д4.5 (Тульск. политех. ин-т, 1985). Студент стоит на скамье Жуковского, которая вращается с угловой скоростью ω_0. Прижав руки к туловищу, он уменьшил момент инерции системы относительно оси вращения в два раза. Сопротивление вращению мало.

Изменится ли кинетическая энергия системы? Если изменится, то во сколько раз и по какой причине?

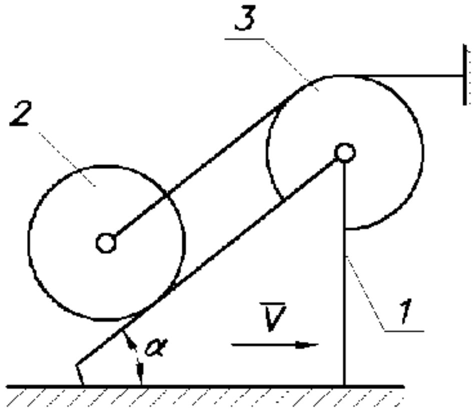


Д4.6 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1987). Угольник OAB, состоящий из двух тонких однородных стержней массой m и длиной l каждый, отпущен без начальной скорости из положения, указанного на рисунке, и движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести.

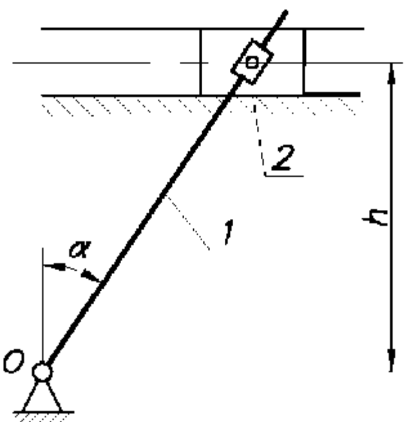
Определить наибольшую угловую скорость угольника. Трением пренебречь.

Д4.7 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Круглая горизонтальная платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр. На краю платформы стоит человек. Какую работу необходимо совершить человеку, чтобы, двигаясь по радиальному пути, дойти до центра платформы, если момент инерции платформы относительно оси вращения равен J, радиус R, её начальная угловая скорость ω_0? Человека считать точечной массой m.

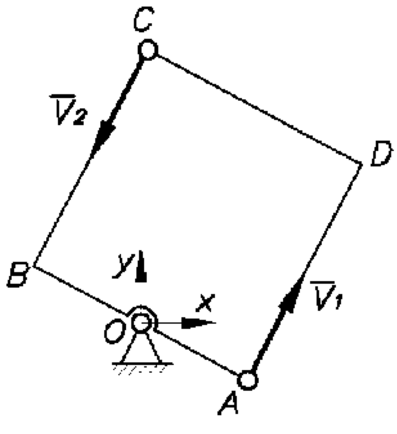
Д4.8 (Омск. политех. ин-т, 1986). Призма *1* массой M движется по гладкой горизонтальной плоскости в направлении, указанном вектором скорости $\overline{V}$, под действием силы тяжести катка *2*. Каток *2* и блок *3* – однородные цилиндры с одинаковыми массами и радиусами ($m_2 = m_3 = m$, $R_2 = R_3 = R$). Нить по блоку и каток по призме не проскальзывают. Определить ускорение призмы.

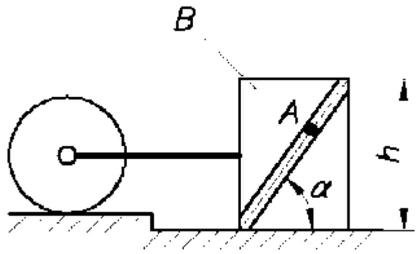


Д4.9 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1984). В кулисном механизме однородный стержень *1* длиной 1,2 м массой 5 кг приводит в движение по горизонтальному пазу ползун *2* массой 15 кг. В начальном положении угол отклонения стержня от вертикали $\alpha = 30°$ и механизм находится в покое. Определить угловую скорость ω, которую надо сообщить стержню, чтобы он достиг вертикального положения. Расстояние от оси вращения стержня O до оси паза $h = 0{,}9$ м. Рассеянием энергии за счёт сил трения пренебречь.

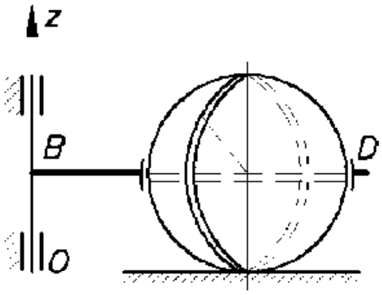


Д4.10 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1987). Квадратная пластинка $ABCD$ может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной оси OZ. Из вершин квадратов – точек A и O по сторонам квадрата начинают двигаться две материальные точки, имеющие равные массы $m_1 = m_2 = m$ и одинаковые по величине постоянные относительные скорости $V_1 = V_2 = V$. Определить давление пластины на ось OZ для указанного на рисунке положения, пренебрегая массой пластины и трением в шарнире, если $AO = OB = l$. В начальный момент времени система находилась в покое.



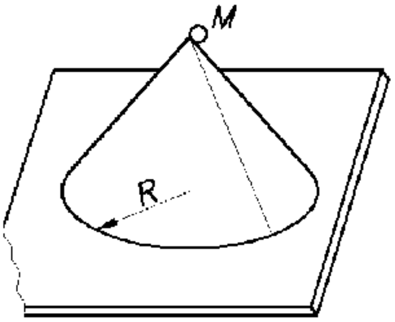


Д4.11 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1988). Материальная точка A массой m, опускаясь вниз по прямолинейному пазу тела B, наклонённому к горизонту под углом $\alpha = 60°$, приводит в движение тело B массой $4m$, которое может двигаться по горизонтальной гладкой плоскости. С телом B связан нерастяжимой нитью однородный сплошной цилиндр массой $2m$, который может катиться по шероховатой горизонтальной плоскости без скольжения. Пренебрегая трением качения и сопротивлением движению материальной точки в пазе, определить скорость тела B в тот момент, когда точка A опустится в крайнее нижнее положение. В начальный момент времени точка занимала крайнее верхнее положение, и вся система находилась в покое. Высота тела B равна h.



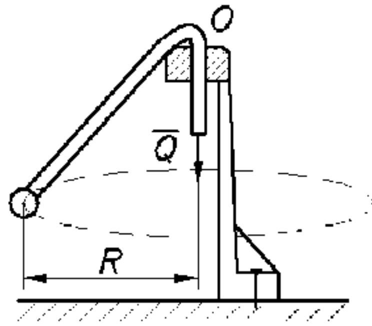
Д4.12 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Тяжёлый однородный шар радиусом R и массой M опирается на горизонтальную плоскость и в то же время связан с вертикальной осью OZ тонким стержнем BD массой $2m$, относительно которого шар может вращаться. Длина стержня BD, перпендикулярного оси OZ, в три раза превышает радиус шара. На поверхности шара имеется закрытый кольцевой желоб, расположенный в плоскости, перпендикулярной к BD. С вершины покоящегося шара в желоб с ничтожно малой начальной скоростью опускается груз массой m. Определить угловую скорость вращения стержня BD вокруг оси OZ в тот момент времени, когда груз займёт нижнее положение на желобе. Качение шара происходит без проскальзывания. Трением качения пренебречь.

Задачи высокого уровня сложности



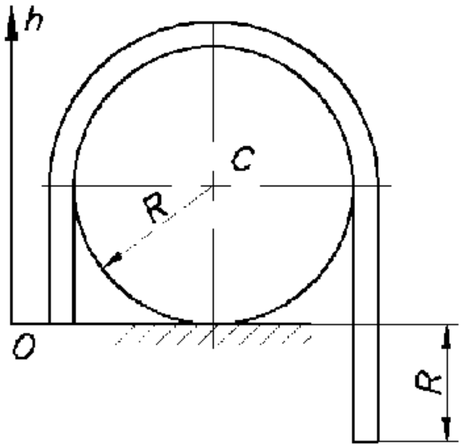
Д4.13 (М., 1967). Однородный круговой конус массой m стоит на гладком горизонтальном столе. На очень малом расстоянии от вершины находится шарик M массой $m/4$, который может двигаться без трения по образующей конуса. Высота конуса равна радиусу основания R, его момент инерции относительно оси симметрии $0{,}3mR^2$. Конусу сообщается начальная угловая скорость ω_0 так, что скорости точек его оси симметрии равны 0. Чему будет равна скорость шарика, когда он достигнет основания конуса?

Д4.14 (Омск. политех. ин-т, 1988). Гирька массой m привязана к концу нерастяжимой нити, пропущенной через кольцо; гирька движется по окружности радиусом R вокруг вертикальной оси кольца, делая n об./мин. Медленно втягивая нить в кольцо, укорачивают наружную часть нити до длины, при которой гирька описывает окружность радиусом $r = 0{,}5R$.

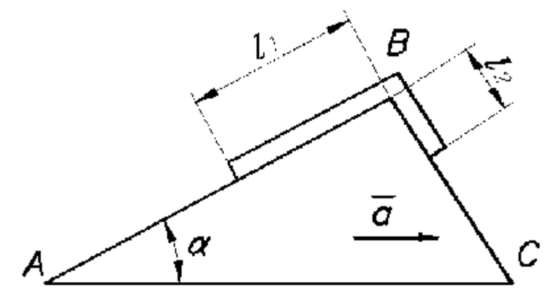


Определить работу силы $\overline{Q}$, переместившей гирьку из первого положения во второе.

Д4.15 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1978). Однородная цепочка массой m может скользить без трения по однородному диску массой M и радиусом R. В начальный момент система находится в покое; её положение указано на рисунке. Определить скорость центра C диска в момент, когда левый конец цепочки поднимется на высоту $h = R$. Диск катится без скольжения. Трение качения не учитывать. В расчётах положить $m = M$ и $\pi = 3$.

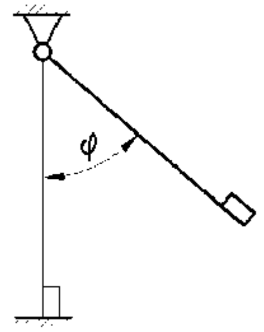


Д4.16 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1984). Прямоугольный клин ABC с углом $\alpha = 30°$ положен на горизонтальную плоскость. Через верхнее ребро клина перекинута тяжёлая однородная цепочка так, что $l_1 = 2l$ и $l_2 = l$. Как только цепочка предоставлена самой себе, клин начинают двигать с постоянным ускорением a. Найти ускорение a_r цепочки по отношению к клину в начальный момент времени. При вычислениях принять $a = 0{,}5g$. Трение не учитывать.



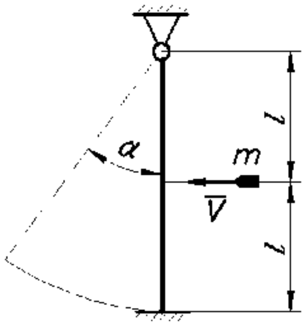
2.2.5. Удар

Задачи обычной сложности



Д5.1 (Поволжск. зона, 1986). Однородный стержень массой $M = 3m$ и длиной l с шарнирно закреплённым концом падает без начальной скорости из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет свободным концом по неподвижной точечной массе m и захватывает её.

Определить угол φ отклонения стержня после удара.



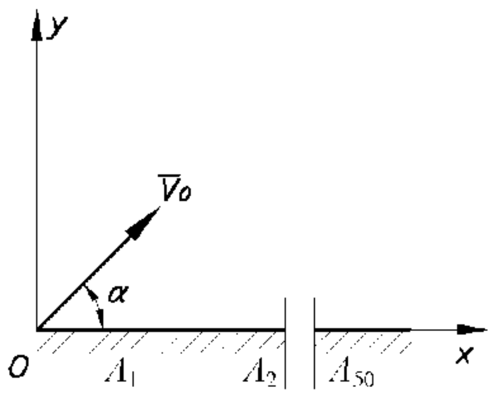
Д5.2 (Тольяттинск. политех. ин-т, 1986). Пуля массой m попадает в центр висящей на петлях прямоугольной доски и застревает в ней. Доска массой M и длиной $2l$ от удара отклоняется на угол α. Определить скорость V пули. Трением в петлях и сопротивлением воздуха пренебречь.

Задачи повышенной сложности

Д5.3 (М., 1987). С высоты h_m падает без начальной скорости шарик массой m и ударяется о горизонтальный пол с коэффициентом восстановления k. Движение шарика происходит в среде, сила сопротивления которой пропорциональна квадрату скорости.

После какого числа ударов высота отскока станет меньше h_k?

Задачи высокого уровня сложности

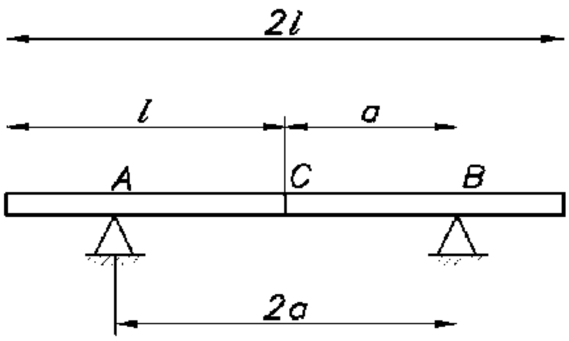


Д5.4 (М., 1988). С края горизонтальной гладкой полуплоскости вылетает тяжёлый шарик с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Полуплоскость состоит из 50 участков конечной длины с различными коэффициентами восстановления при ударе $k_i > 0$. Остальная часть полуплоскости имеет коэффициент восстановления $k = 0$. Заданы координаты x_i границ участков A_i. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какое расстояние переместится шарик через n ударов.

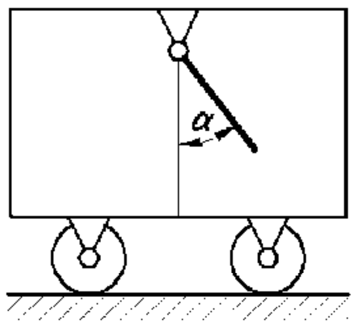
2.2.6. Динамика тела при моментальном изменении связей

Задачи обычной сложности

Д6.1 (МАТИ, 1977). Однородный тонкий стержень длиной $2l$ и весом ρ лежит на двух опорах A и B. Центр тяжести стержня находится на одинаковых расстояниях от опор, причём $CA = CB = a$, давление на каждую опору равно $P/2$. Определить давление на опору A в тот момент, когда опора B будет мгновенно удалена.



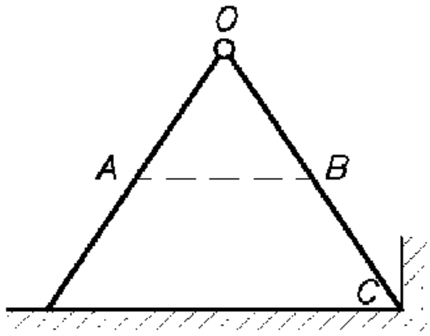
Д6.2 (МАТИ, 1983). В вагоне висит стержень длиной l. Вагон движется с постоянной скоростью $\overline{V}$, а затем мгновенно останавливается. На какой угол отклонится стержень?



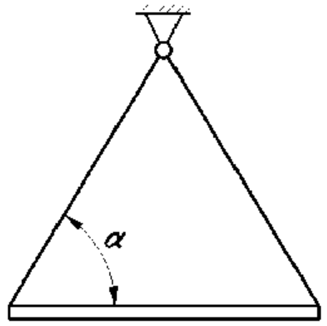
Д6.3 (Свердловск, 1982). Стремянка стояла на гладком горизонтальном полу. Один её конец упирался в угол C. $\angle AOB = 2\alpha_0$.

Вследствие обрыва стяжки AB стремянка падает.

Определить давление на вертикальную стену в точке C в момент перед ударом стремянки о пол. Стремянку рассматривать как два одинаковых однородных стержня весом P каждый, скреплённые шарниром O.

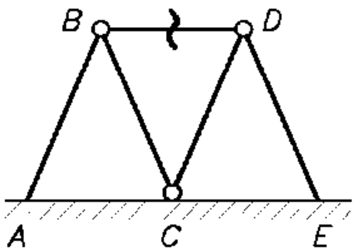


Д6.4 (Зап.-Сиб. зона, 1990). На доске, установленной горизонтально на двух опорах, расположенных по её краям, стоит человек. Внезапно он приседает. Что произойдёт в первый момент: увеличится или уменьшится прогиб доски? Что произойдёт, если человек сидел на корточках и внезапно выпрямился? Дать обоснование.

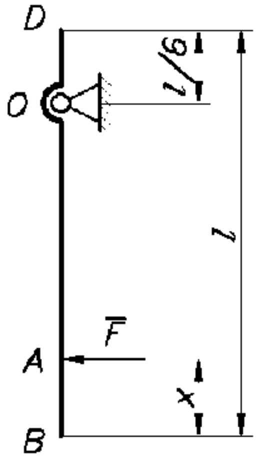


Д6.5 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Однородный стержень весом P подвешен в горизонтальном положении на двух нитях, $\alpha = 60°$. Найти натяжение одной из нитей в первый момент после перерезания другой.

Задачи повышенной сложности

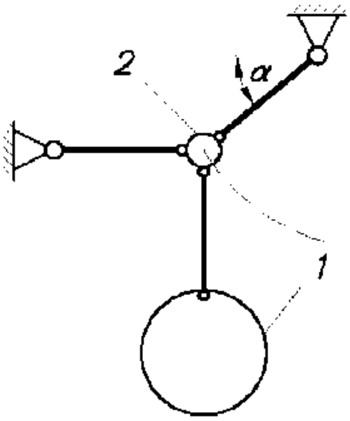


Д6.6 (Груз. ССР, 1986). «Гармошка» $ABCDE$ из четырёх шарнирно закреплённых однородных стержней длиной l и массой m каждый стоит на гладком горизонтальном полу и удерживается в равновесии стяжкой BD. После разрыва стяжки гармошка начинает падать. Найти зависимость скорости точки B от её высоты h над полом, если в начальный момент эта высота была равна h_0.



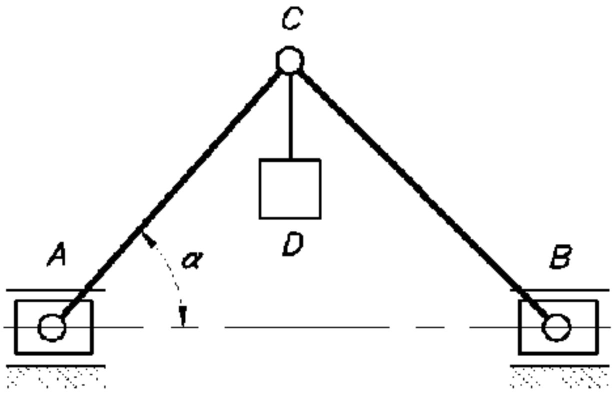
Д6.7 (Свердловск, 1983). Однородный стержень длиной l и весом P свободно подвешен на горизонтальной оси $O\left(OD = l/6\right)$. В положении устойчивого равновесия к стержню в точке A прикладывают силу F.

Определить: 1) Давление стержня на ось O в начальный момент движения, если $AB = x_0 = l/6$. 2) Расстояние x, на котором следует приложить силу, чтобы в опоре O не возникало добавочных динамических реакций.



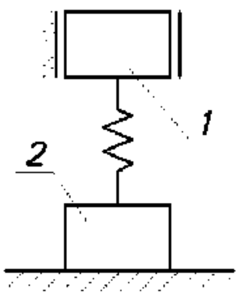
Д6.8 (Томск. политех. ин-т, 1986). Люстра *1* массой $m_1 = m$ подвешена на цепи к плафону *2* массой $m_2 = 0{,}2m$. Плафон удерживается двумя растяжками. Неожиданно лопнула горизонтальная растяжка. Определить ускорение люстры в первый момент; $\alpha = 30°$.

Д6.9 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1986). Два ползуна A и B массой m каждый шарнирно скреплены с двумя одинаковыми стержнями, которые соединены шарниром в точке C. Ползуны могут скользить по горизонтальной направляющей без трения. К точке соединения стержней подвешен груз D массой m_1 и отпущен без начальной скорости. Каково ускорение груза D в начальный момент движения, если стержни образуют в этот момент угол α с горизонтом и движутся в вертикальной плоскости? Массой стержней пренебречь.

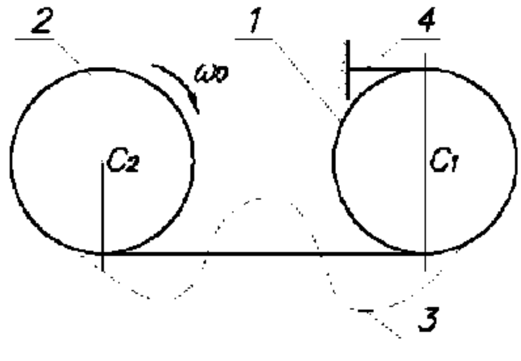


Задачи высокого уровня сложности

Д6.10 (Омск. политех. ин-т, 1981). Грузы *1* и *2* массами m_1 и m_2 соединены пружиной. С какой силой следует надавить по вертикали вниз на верхний груз, чтобы после мгновенного прекращения действия этой силы верхний груз, подпрыгнув, приподнял нижний? Массу пружины не учитывать.



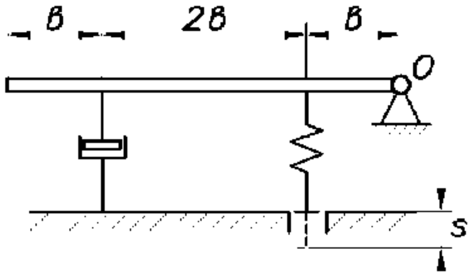
Д6.11 (Томск. политех. ин-т, 1985). На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых однородных диска *1* и *2*. Концы нити *3* намотаны на диски. Нить *4* одним концом прикреплена к диску *1*, второй её конец закреплён неподвижно. В исходном состоянии диск *1* неподвижен, нить *4* натянута, нить *3* свободно лежит на плоскости, диск 2 вращается с угловой скоростью ω_0, причём его центр масс C_2 неподвижен. Нити нерастяжимы.



Определить скорость центра масс диска *1* после того, как нить *3* натянется, если все дальнейшее движение происходит при натянутых нитях.

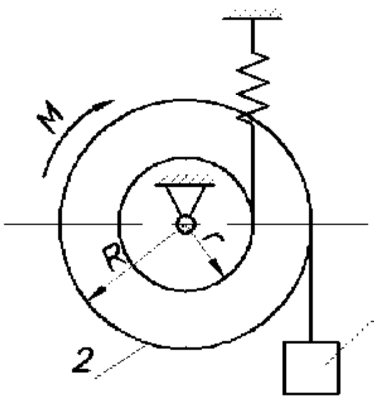
2.2.7. Колебания

Задачи обычной сложности



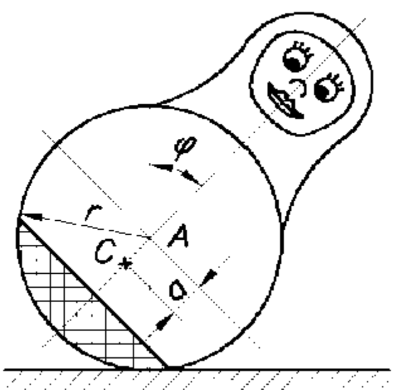
Д7.1 (Свердловск, 1982). Однородный стержень длиной $l = 4b$ $(b = 0{,}49$ м$)$ и массой $m = 30$ кг закреплён шарнирно в точке O. Стержень удерживается в равновесии в горизонтальном положении пружиной жёсткостью $c = 78{,}4$ Н/см, прикреплённой к стержню на расстоянии b от опоры O. На расстоянии $3b$ от опоры прикреплён гидравлический демпфер с линейно-вязким сопротивлением $\overline{R} = -\mu\overline{V}$, $\mu = 0{,}8$ Н с/см.

Определить закон малых вынужденных колебаний стержня, если нижний конец пружины начнёт двигаться по закону $S = 7\sin 7t$ (см).



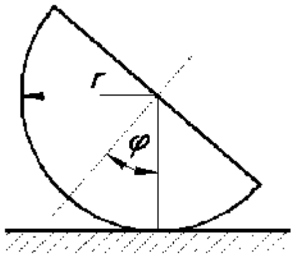
Д7.2 (Свердловск, 1983). Механическая система содержит груз *1* весом $P = 100$ Н, ступенчатый блок *2* весом $Q = 50$ Н с радиусом инерции $i = 2$ м и невесомую пружину с коэффициентом жёсткости $c = 2000$ Н/м. Система находится в покое под действием упругой силы пружины, силы тяжести и момента $M = 200$ Н·м. Система приходит в движение вследствие того, что момент мгновенно исчезает $(M = 0)$.

Определить амплитуду и период колебаний груза, если $R = 2r = 4$ м.



Д7.3 (Поволжск. зона, 1986). «Неваляшка» массой m с центром тяжести в точке C и моментом инерции $J_A = mi_A^2$ качается на идеально гладкой горизонтальной плоскости. Определить период малых колебаний около положения равновесия.

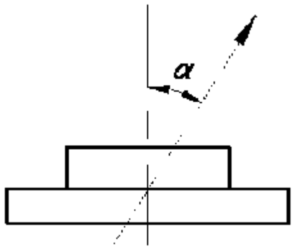
Д7.4 (Тольяттинск. политех. ин-т, 1986). Тяжёлый сплошной однородный полуцилиндр радиусом r качается на горизонтальной плоскости без скольжения. Составить дифференциальное уравнение для определения угла φ. Определить период малых колебаний около положения равновесия.



Задачи повышенной сложности

Д7.5 (УССР, 1987). Куб с длиной ребра $a = 10$ см подвешен к пружине с коэффициентом жёсткости $c = 3$ Н/см. В положении статического равновесия груза в воде куб погружён на 5 см, а пружина недеформирована. Погрузив куб так, чтобы верхняя грань находилась на уровне воды, куб отпускают из состояния покоя. Считая, что действие воды сводится к архимедовой силе, определить уравнение движения куба.

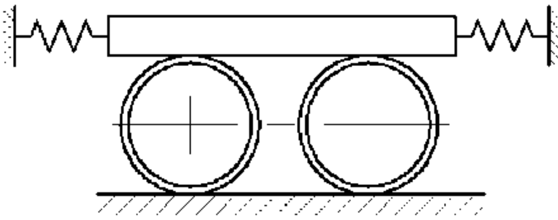
Д7.6 (Зап.-Сиб. зона, 1990). Цилиндрический поплавок массой m постоянного поперечного сечения S плавает в бассейне, заполненном жидкостью с удельным весом ρ. Уровень жидкости меняется по закону $\xi = a \sin pt$. Получить, пренебрегая сопротивлением жидкости, уравнения абсолютных и относительных (по отношению к поверхности жидкости) вертикальных колебаний тела.



Д7.7 (Зап.-Сиб. зона, 1989). Горизонтальная площадка, на которой лежит брусок, вибрирует по гармоническому закону с частотой ν (Гц) в направлении, составляющем угол α с вертикалью.

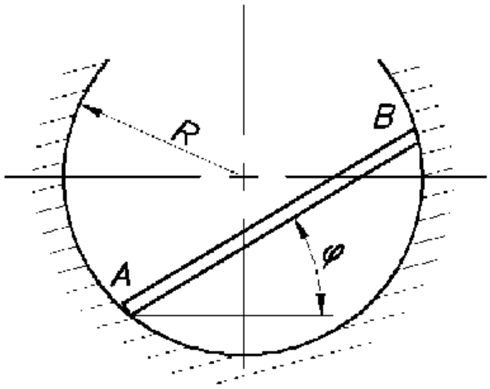
При какой минимальной амплитуде вибраций брусок «поползёт» по площадке, если коэффициент трения равен f?

Д7.8 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1977). Два одинаковых однородных стержня длиной l каждый соединены между собой в точке A шарнирно, а концами B и C могут скользить без трения по горизонтальной направляющей. К шарниру A присоединена вертикальная пружина, длина которой в недеформированном состоянии равна l, а жёсткость такова, что равновесие системы имеет место при $\varphi = 30°$. Определить период малых колебаний системы около этого положения равновесия, пренебрегая массами ползунов.



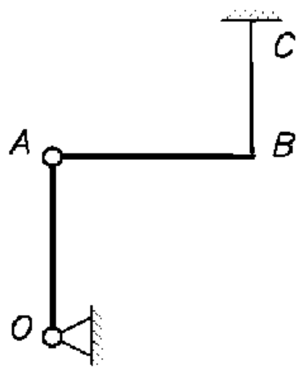
Д7.9 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1989). Доска, к которой прикреплены две одинаковые пружины жёсткостью c каждая, лежит на двух одинаковых тонкостенных цилиндрах. Считать, что скольжение между доской и цилиндрами, а также между цилиндрами и горизонтальной плоскостью отсутствует. Определить период колебаний системы, если масса каждого цилиндра равна m, а масса доски M.

Задачи высокого уровня сложности



Д7.10 (Свердловск, 1984). Тяжёлый однородный стержень массой m и длиной $2l$ скользит по гладкой цилиндрической поверхности, оставаясь в вертикальной плоскости. Движение началось из состояния покоя в положении, определяемом углом $\varphi = \varphi_0$ между стержнем и горизонтальной плоскостью.

Найти период малых колебаний стержня около положения равновесия. Определить величины нормальных давлений концов стержня на опорную поверхность в момент, когда стержень проходит положение равновесия.

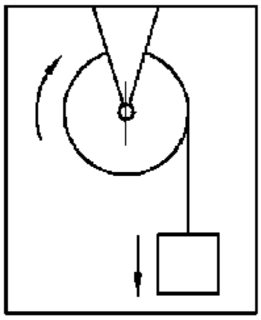


Д7.11 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1977). Два одинаковых однородных стержня OA и AB длиной b каждый соединены между собой шарнирно и могут перемещаться в вертикальной плоскости. Конец O стержня OA закреплён шарнирно, а конец B стержня AB поддерживается нитью BC длиной l. Определить, при каком соотношении длин b и l положение системы, показанное на рисунке, устойчиво. Найти период малых колебаний системы около положения равновесия.

2.2.8. Принцип Даламбера

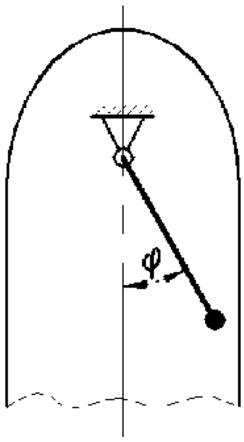
Задачи обычной сложности

Д8.1 (МАТИ, 1982). Внутри лифта установлен массивный горизонтальный вал, приводимый во вращение с помощью груза и невесомой нити. Когда лифт был неподвижен, груз опускался с ускорением 2 м/с^2.



Как будет двигаться груз относительно Земли, если лифт станет подниматься с ускорением $a = 2$ м/с^2?

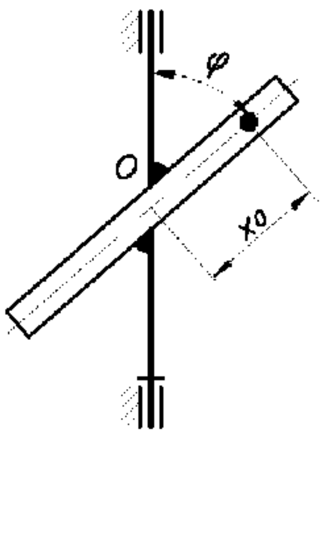
Д8.2 (УССР, 1985). Нить маятника, установленного в ракете, находящейся на старте, отклонили до горизонтального положения и отпустили. В тот момент, когда маятник проходил положение равновесия, ракета стала подниматься вертикально вверх, вследствие чего максимальный угол отклонения маятника от вертикали оказался равным 45°.

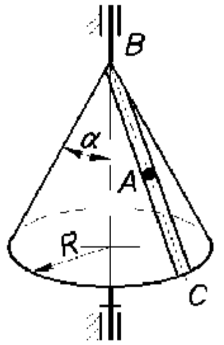


Какое постоянное ускорение сообщили ракете в момент старта?

Задачи повышенной сложности

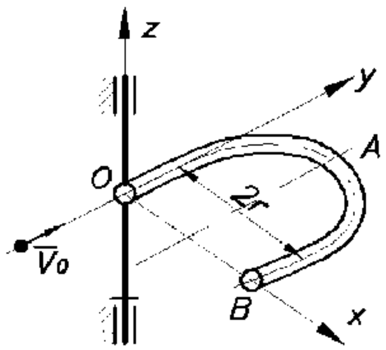
Д8.3 (МИИТ, 1982). В невесомой трубке, вращающейся вокруг неподвижной вертикальной оси при фиксированном значении угла φ находится шарик массой m. В начальный момент времени шарик находился на расстоянии x_0 от точки O, скорость его относительно трубки была равна нулю, угловая скорость трубки равнялась ω_0. Определить, при каком соотношении между величинами φ, x_0, ω_0 шарик будет двигаться относительно трубки: вверх, вниз, оставаться в покое. Определить max и min удаления шарика от точки O.





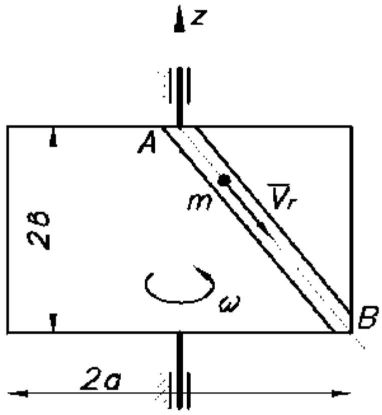
Д8.4 (УССР, 1986). Однородный сплошной круговой конус массой m с углом при вершине 2α и радиусом основания R вращается вокруг своей оси, имея начальную угловую скорость ω_0. Из вершины конуса по желобу BC, имеющему направление образующей, скатывается без начальной скорости шарик A массой $0{,}1m$.

Определить относительное ускорение шарика в момент, когда он достигает основания конуса. Трением пренебречь.

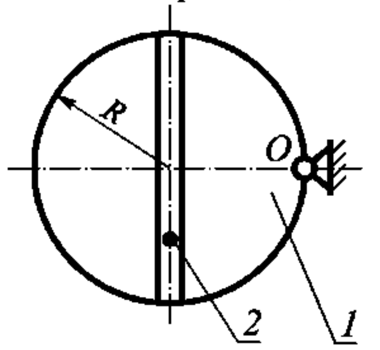


Д8.5 (Молд. ССР, 1982). Гладкий шарик массой $m = 5$ кг запускают в точке O со скоростью $V_0 = 3$ м/с в покоящуюся горизонтально расположенную изогнутую трубку OAB, прикреплённую к вертикальной оси. Момент инерции трубки относительно оси вращения $J = 40$ кг·м^2, $r = 4$ м.

С какой относительной скоростью шарик вылетит из трубки?

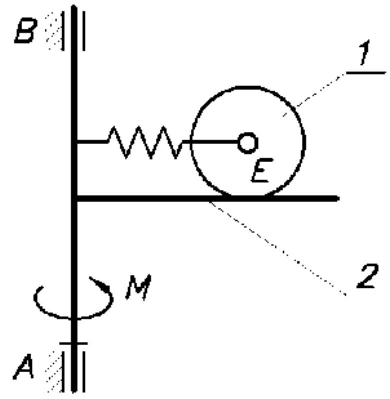


Д8.6 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1986). Прямоугольная однородная пластинка массой m вращается по инерции с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси z, лежащей в её плоскости и проходящей через центр масс пластины. В некоторый момент времени из точки A, расположенной на оси z, начинает опускаться по желобу AB материальная точка массы m. Определить скорость V_r точки относительно пластины в тот момент времени, когда точка достигнет положения B.



Д8.7 (Междунар. олимпиада, Гомель, 2005). Сплошной однородный диск 1 массой m_1 и радиусом R расположен в горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг вертикальной оси O. Силы сопротивления при этом пренебрежимо малы. Из центра покоящегося диска по расположенному вдоль его диаметра пазу начинает ползти жук 2 с постоянной относительной скоростью $V_{отн}$.

Определить работу, которую выполнил жук к моменту, когда он оказался на ободе диска. Масса жука m_2.

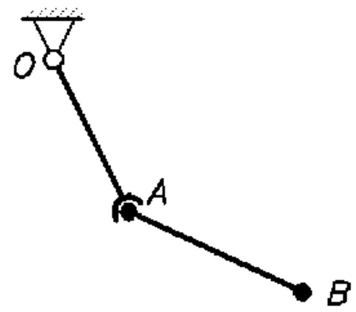


Д8.8 (Аз. ССР, 1986). Сплошной однородный диск *1* массой m_1 и радиусом R соединён с концом пружины жёсткостью c. Другой конец пружины прикреплён к вертикальной оси AB. Диск установлен на полку *2*, которая соединена с осью AB под прямым углом, и может катиться по полке без скольжения, оставаясь в плоскости, содержащей полку и ось AB. Из состояния покоя конструкция мгновенно приводится во вращение вокруг оси AB с постоянной угловой скоростью ω. В начальный момент пружина не деформирована и её длина равна l_0.

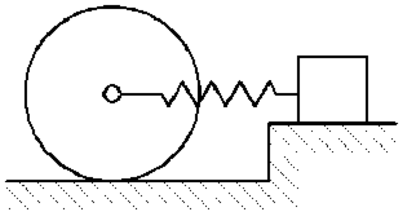
Найти уравнение относительного движения центра E диска.

2.2.9. Уравнения Лагранжа

Задачи обычной сложности

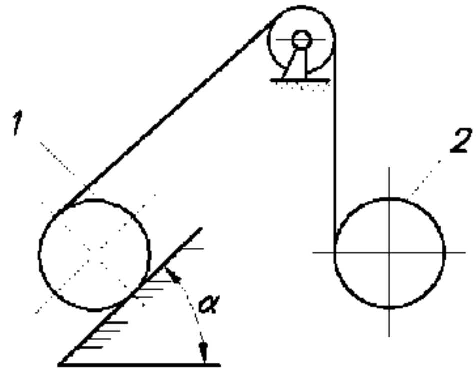


Д9.1 (М., 1984). Для двойного математического маятника найти все начальные условия, при которых движение будет происходить так, что точки O, A, B будут всё время лежать на одной прямой.



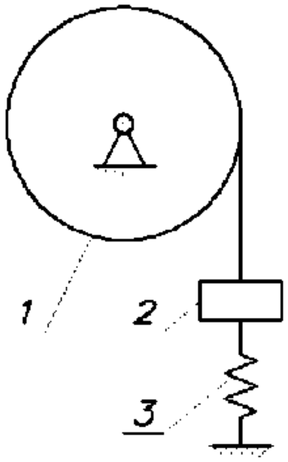
Д9.2 (МВТУ, 1980). Ось однородного сплошного цилиндра массой $2m$, катящегося без скольжения по горизонтальной шероховатой плоскости, связана посредством пружины жёсткости c с грузом массой m, лежащим на горизонтальной гладкой плоскости. В начальный момент цилиндр и груз развели таким образом, что пружина растянулась на величину λ, и отпустили без начальной скорости.

Определить скорость центра цилиндра в тот момент, когда пружина сожмётся до первоначальной длины. Трением качения пренебречь.



Д9.3 (Свердловск, 1982). Два одинаковых однородных цилиндра *1* и *2* весом P и радиусом R соединены невесомой нитью, переброшенной через невесомый блок; концы нити намотаны на цилиндры. Система движется под действием сил веса. Цилиндр *1* катится без скольжения по плоскости, наклонённой под углом α к горизонту.

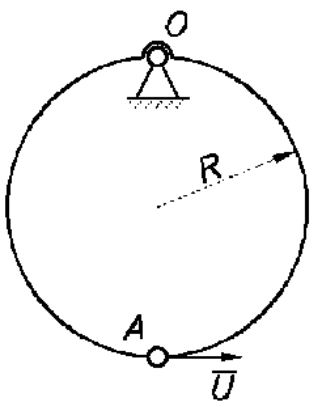
Определить ускорения центров цилиндров и натяжение нити, если коэффициент трения качения равен k. При каком значении коэффициента k цилиндр *1* будет опускаться?



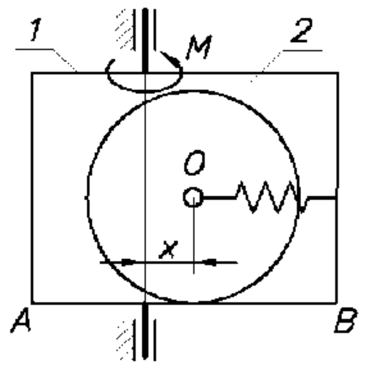
Д9.4 (Омск. политех. ин-т, 1984). На однородный диск *1* радиусом R с неподвижной осью вращения намотана нить с грузом *2* на конце. К грузу снизу прикреплена пружина *3*. Массы диска и груза равны m_1 и m_2, жёсткость пружины c. Диск повернули против хода часовой стрелки так, что пружина получила удлинение λ, и отпустили без начальной скорости.

Определить угловую скорость диска в момент, когда деформация пружины будет равна нулю.

Задачи повышенной сложности



Д9.5 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1985). Однородное тонкое кольцо массой M и радиусом R подвешено шарнирно в верхней своей точке (точке O). В нижней точке кольца (точке A) находится колечко массой m. В некоторый момент времени при неподвижном кольце колечку сообщают скорость относительно кольца и систему предоставляют самой себе. Составить дифференциальные уравнения движения системы. Трение не учитывать.

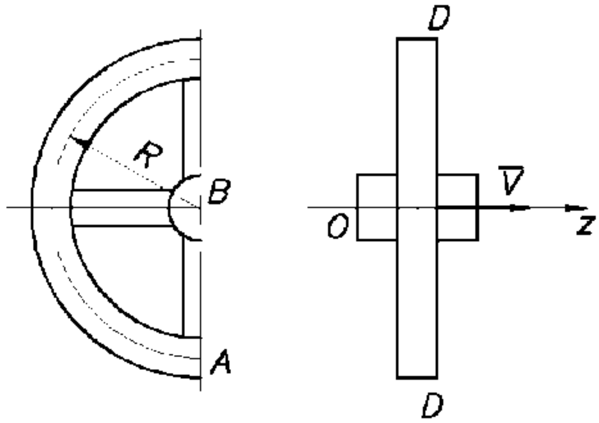


Д9.6 (Ижевск. механич. ин-т, 1981). К раме *1* приложена пара сил с моментом M. Тонкий однородный диск *2* массой m и радиусом r может катиться без скольжения по горизонтальной направляющей AB рамы, оставаясь в её плоскости. Момент инерции рамы относительно оси вращения равен J, пружина имеет жёсткость c и при $x = 0$ не напряжена.

Составить дифференциальные уравнения движения механической системы, приняв за обобщённые координаты угол φ поворота рамы и координату x центра диска.

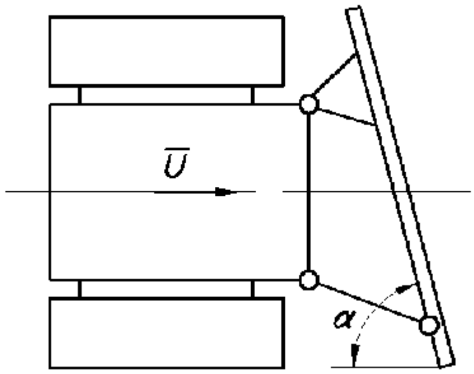
2.2.10. Профессионально ориентированные задачи

Задачи обычной сложности



Д10.1 (МВТУ, 1986). Космическая станция с кольцевым и радиальным коридорами движется поступательно со скоростью $\overline{V}$, перпендикулярной к плоскости DD. Космонавт, находящийся в точке A, начинает двигаться по кольцевому коридору с относительной скоростью U. Определить величину угловой скорости, которую приобретает в результате этого станция. Станцию считать симметричным телом массой M с центром тяжести в точке B. Радиус инерции станции относительно оси O_z $\rho = 0{,}8R$. Космонавта считать материальной точкой массой $m = 0{,}005M$. Определить также приращение скорости центра масс станции (точки B).

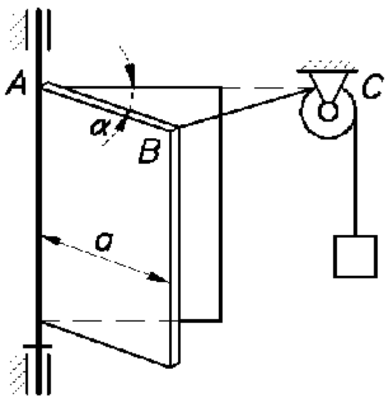
Д10.2 (Свердловск, 1984). Бульдозер с ножом, установленным под углом α к направлению движения, движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\overline{U}$ по горизонтальной плоскости. Камень массой m, встретившись с ножом, мгновенно приобретает переносную скорость, равную $\overline{U}$, и одновременно скользит вдоль ножа $(V_r(0) = 0)$. Сила сопротивления движению камня по горизонтальной плоскости $\overline{R} = -\mu\overline{V}$, где



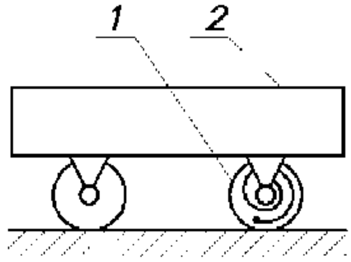
$\mu = \text{const} > 0$, $\overline{V}$ – абсолютная скорость камня. Коэффициент трения скольжения между камнем и ножом равен f; $f < \text{ctg}\alpha$.

Найти скорость движения камня относительно ножа, полагая, что камень движется поступательно.

Д10.3 (Иркутск. политех. ин-т, 1988). Два диска с заданными моментами инерции J_1 и J_2 вращаются вокруг одной и той же оси с заданными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. В некоторый момент времени диски соединяются с помощью фрикционной муфты, после чего начинают вращаться с общей скоростью. Определить работу сил трения фрикционной муфты. Массой муфты пренебречь.



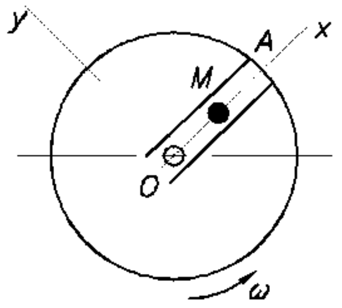
Д10.4 (Омск. политех. ин-т, 1985). Дверь закрывается при помощи верёвки с гирей на конце, переброшенной через лёгкий блок. Вес двери Q, вес гири P, $AB = AC = a$. В начальный момент дверь была открыта на угол $\alpha = 60°$ и находилась в покое. Определить угловую скорость двери в момент закрытия. Трение не учитывать.



Д10.5 (Омск. политех. ин-т, 1988). Спиральная пружина жёсткости c одним концом прикреплена к колесу *1*, другим – к корпусу тележки *2*. Тележку после закручивания пружины на угол φ_0 поставили на пол и отпустили без начальной скорости. Пружина, раскручиваясь, приводит тележку в движение. Колёса (четыре однородных диска) катятся по полу без скольжения.

Определить максимальную скорость тележки, считая известными массы тележки и колёс. Спиральная пружина развивает момент $M = c\varphi$.

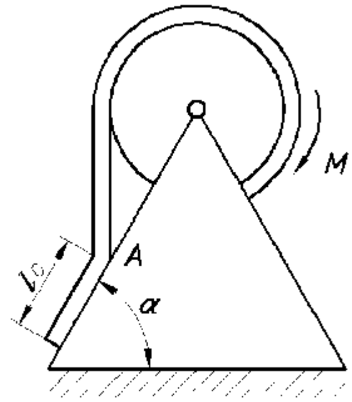
Д10.6 (МВТУ, 1986). Горизонтальная платформа вращается вокруг вертикальной оси O_z с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль гладкого паза OA, расположенного на платформе, может двигаться точка M массой m. В начальный момент времени точка находилась в центре O платформы и ей сообщили начальную скорость V_0. Какая сила, приложенная к точке M обеспечит ей движение по пазу с постоянной скоростью V_0? Каким механическим устройством можно обеспечить эту силу?



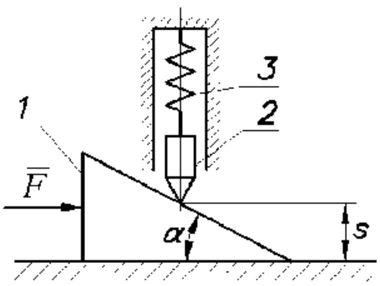
Д10.7 (МАТИ, 1981). Трубке радиусом r придана форма кольца радиусом R. Внутри трубки со скоростью V пропускается вода.

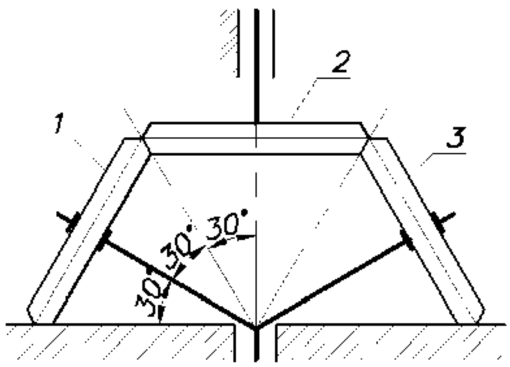
Определить продольное натяжение трубки. Радиус трубки много меньше радиуса кольца. Вязкостью воды пренебречь.

Д10.8 (Аз. ССР, 1986). Цепь, наматываясь на барабан, скользит по наклонной плоскости. Угол наклона $\alpha = 60°$, длина всей цепи L (м), коэффициент трения цепи о плоскость $f = 0{,}1$. В начальный момент цепь прилегала к плоскости на длине $l_0 = 30\pi$, барабан не вращался. К барабану приложен постоянный вращающий момент M (кНм). Найти угловую скорость барабана в момент, когда конец цепи оторвётся от наклонной плоскости; считать, что точка отрыва звеньев цепи от плоскости во всё время движения находится в точке A. Барабан принять за сплошной однородный цилиндр. Радиус барабана $R = 0{,}5$ м, масса m (кг). Вес погонного метра цепи $q =$ $= 1$ кН/м. Толщину цепи, намотанной на барабан, не учитывать.

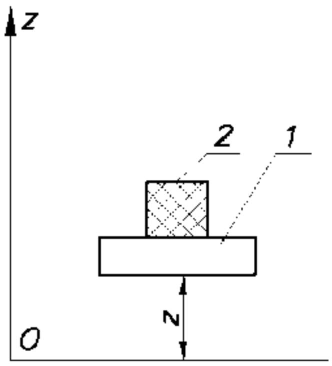


Д10.9 (Туркм. ССР, 1987). Кулачок *1* массой M скользит по горизонтальной плоскости под действием силы F и перемещает толкатель *2* массой m. Толкатель движется в вертикальных направляющих. Пружина *3*, коэффициент жёсткости которой c, прижимает толкатель к кулачку. В начальный момент времени система находилась в покое и пружина не деформирована. Определить закон движения толкателя $S = S(t)$, полагая $S(0) = 0$.

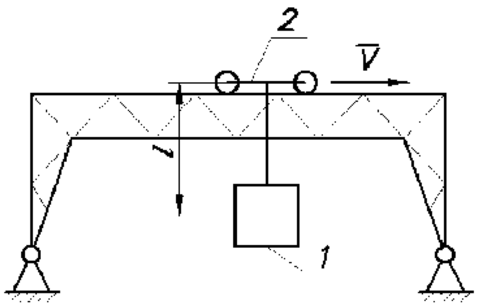




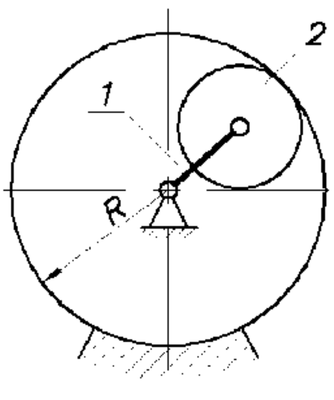
Д10.10 (Тольяттинск. политех. ин-т, 1986). Фрикционный механизм состоит из трёх одинаковых роликов (дисков) массой m и радиусом r. Ролики *1* и *3* меняются местами каждую секунду. Определить суммарную кинетическую энергию роликов.



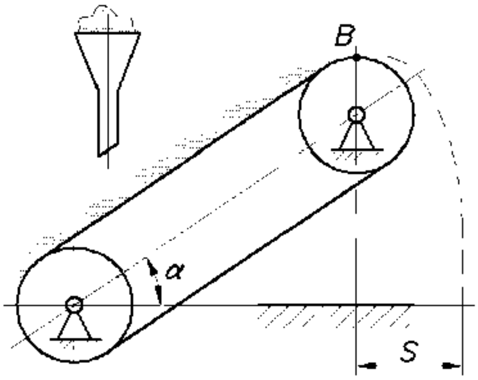
Д10.11 (Омск. политех. ин-т, 1983). Платформа *1* движется поступательно по вертикали. Закон движения платформы: $z = b\cos\omega t$. Здесь ω – круговая частота. На платформу положен кубик массой m. Определить частоту ω, при которой кубик начнет отделяться от платформы (подпрыгивать).



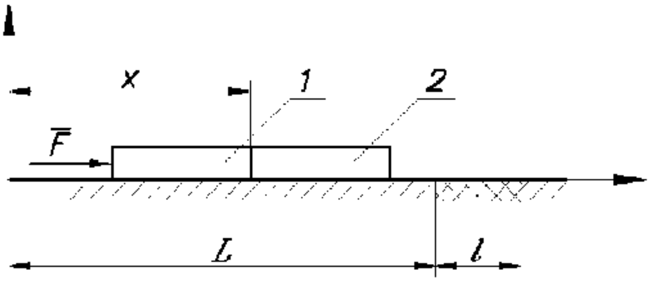
Д10.12 (Омск. политех. ин-т, 1984). Груз *1* перемещается вместе с тележкой *2* по горизонтальной ферме мостового крана со скоростью V. Расстояние от центра тяжести груза до точки привеса равно l. При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнёт качаться около точки привеса. Определить наибольшее натяжение троса и наибольшую высоту подъёма груза.



Д10.13 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1986). Кривошип *1* гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращался с постоянной угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени двигатель был отключён и под действием постоянного момента $M_{\text{тр}}$ сил трения на оси сателлита *2* механизм остановился. Определить время τ торможения и угол φ поворота кривошипа за это время, если его масса равна m_1, m_2 – масса сателлита, R, r – радиусы большого и малого колёс. Кривошип принять за однородный тонкий стержень, а сателлит – за однородный диск.

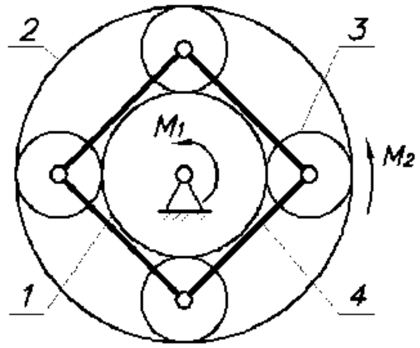


Д10.14 (УССР, 1986). Под каким углом α к горизонту нужно установить транспортёр для разделения фракций сыпучего материала, если коэффициент трения о ленту транспортёра для одной фракции равен 0,45, а для другой – 0,35? С какой минимальной скоростью должна двигаться лента транспортёра, чтобы частицы материала отделялись от ленты в точке B ? Расстояние между центрами барабанов равно l, их радиусы равны R . Определить место падения частиц сыпучего материала, рассматривая их как материальные точки массой m .



Д10.15 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1977). На гладкой горизонтальной плоскости имеется шероховатая зона длиной l . Коэффициент трения в зоне равен f . По плоскости движутся под действием постоянной силы $F = \dfrac{1}{4} fmg$ два соприкасающихся торцами бруска массой m и длиной $2l$ каждый. Известно, что брусок 1 остановился в положении $x = L + 2l$.

Определить: а) Силу взаимодействия между брусками в момент, когда $x = L$; б) Скорость брусков в положении $x = L - 2l$. Считать, что сила давления бруска на плоскость равномерно распределена по его длине.

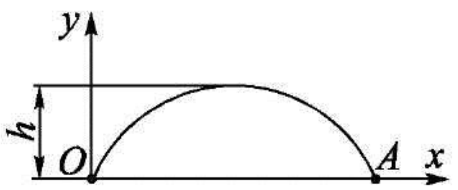


Д10.16 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1978). В дифференциальном механизме Джеймса, расположенном в горизонтальной плоскости, к зубчатым колёсам *1* и *2* приложены пары сил с моментами M_1 и M_2 . Массы колёс *1*, *2*, *3* равны m_1 , m_2 , m_3 соответственно, массой водила *4* пренебречь. Зубчатое колесо *2* считать тонким кольцом, колёса *1* и *3* – сплошными однородными дисками. Определить угловые ускорения колёс *1* и *2*, если их радиусы равны r_1 и r_2 соответственно. При вычислениях полагать $m_1 = m_2 = 4m_3$; $r_2 = 2r_1$; $M_1 = M_2$.

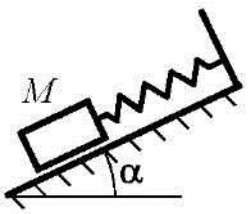
Д10.17 (Тамб. ин-т хим. машиностр., 1987). По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, катятся под действием сил тяжести тонкостенная труба и однородный цилиндр, имеющие одинаковые массы m и одинаковые радиусы R. Труба катится впереди, цилиндр касается трубы, коэффициент трения скольжения между ними равен f. Качение по плоскости происходит без проскальзывания.

Определить угловое ускорение трубы и давление цилиндра на трубу.

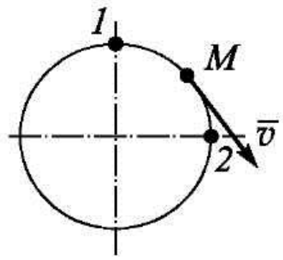
2.2.11. Задачи конкурса «Брейн-ринг» (Междунар. олимпиада, Гомель, 2005)



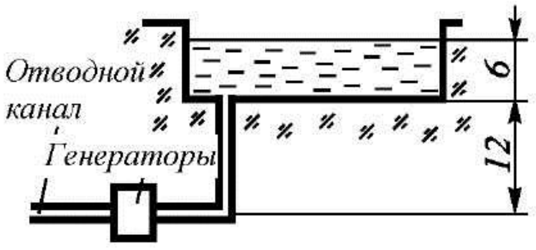
1. Пуля, имеющая массу m, выпущена из орудия под углом α к горизонту. Двигаясь по своей траектории, она поднимается на высоту h. Пренебрегая силами сопротивления, определить минимальную скорость пули в течение полёта.



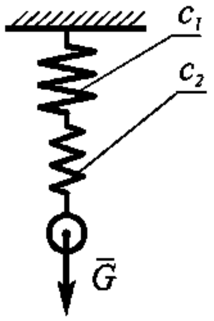
2. Груз M массой m помещён на негладкую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α, и прикреплён к концу пружины с коэффициентом жёсткости c, другой конец которой закреплён неподвижно. Определить максимальное растяжение пружины Δl, если в начальный момент пружина была не деформирована, а груз отпущен без начальной скорости. Коэффициент трения тела о плоскость равен f, причём $f < \mathrm{tg}\alpha$.



3. Материальная точка M массой 1 кг равномерно движется по окружности со скоростью $v = 4$ м/с. Определить импульс равнодействующей всех сил, действующих на эту точку, за время её движения из положения *1* в положение *2*.



4. Водохранилище при гидростанции имеет площадь 2 км^2 и глубину 6 м. Дно водохранилища лежит на высоте 12 м выше уровня воды в отводном канале за гидростанцией. Определить работу, которую может совершить сила тяжести запасённой в водохранилище воды.



5. Груз подвешен на двух последовательно соединённых пружинах с коэффициентами жёсткости c_1 и c_2. Каково отношение потенциальных энергий пружин?

6. Уравнение колебаний материальной точки $2\ddot{x}+b\dot{x}+18{,}5x=0$, причём их период $T = 2\pi/3$ (с). Определить значение коэффициента сопротивления упругой среды b.

7. Шарик массой m_1, двигающийся со скоростью v_1, совершает неупругий удар по покоящемуся шарику массой m_2. Определить, какое количество энергии выделяется за время удара.

8. Однородный диск вращается с постоянной угловой скоростью в собственной плоскости вокруг геометрического центра. Затем вращение повторили, но уже вокруг одной из точек его обода. Определите отношение кинетических энергий диска в двух описанных движениях.

9. Лодка стоит неподвижно в стоячей воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка, если масса человека $m_1 = 60$ кг, масса лодки $m_2 = 120$ кг, длина лодки $l = 3$ м? Сопротивление воды не учитывать.

10. Тонкий обруч радиусом r без проскальзывания скатывается в яму, имеющую форму полусферы радиусом R. На какой глубине давление обруча на стенку ямы станет равно его силе тяжести?

2.3. ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Динамика точки

Д1.1. $R \ge \dfrac{V_0^2}{g\cos\alpha}$.

Д1.2. $\alpha = \dfrac{1}{2}(\pi - \operatorname{arctg}5)$.

Д1.3. В 26 раз.

Д1.4. $t = \dfrac{h(V_1 - V_2)}{V_1 V_2 \ln\dfrac{V_1}{V_2}}$.

Д1.5. $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 r}$.

Д1.6. $\alpha = 45^\circ$.

Д1.7. $h_0 = \dfrac{g}{\omega_0^2}\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$.

Д1.8. $S = m\sqrt{2}\left(V_0^2 + gb - V_0\sqrt{\dfrac{V_0^2+2gb}{1+4ab}}\right)^{\frac{1}{2}}$; $V_0 = \sqrt{\dfrac{g}{2a}}$.

Д1.9. $F = mabV_0^2\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

Д1.10. $V_{0\min}^2 = 4gr\pi f$.

Д1.11. $N = 4P + Cr\left(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$.

Д1.12. $x^2+y^2+\left(z+\dfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = V_0^2t^2$.

Д1.13. $N_0 = 9P$.

Д1.14. $N = \dfrac{3mg}{1+4f^2}(\cos\varphi - 2f\sin\varphi) + \left(\dfrac{mV_0^2}{R} + \dfrac{mg\left(4f^2-2\right)}{4f^2+1}\right)e^{-2f\varphi}$.

Д1.15. $S = 0{,}004g\tau^2$

Д1.17. $N = 2KR - \dfrac{1}{R}mV_0^2$.

Динамика твёрдого тела

Д2.1. $A = -\pi fmV^2$ Указание: определить нормальную реакцию, затем силу трения и работу (интегрированием).

Д2.2. $T = mg\left(1+\dfrac{V_0^2l^2}{gx^3}\right)\sqrt{1+\dfrac{l^2}{x^2}}$.

Д2.3. $h = \dfrac{3}{4}b$; $l = \dfrac{1}{3}b\dfrac{M}{m}$.

Д2.4. $R = P\dfrac{2\pi^2\left(R^2+r^2\right)}{h^2+2\pi^2\left(R^2+r^2\right)}$; $M_R = Ph\dfrac{\pi\left(R^2+r^2\right)}{h^2+2\pi^2\left(R^2+r^2\right)}$.

Д2.5. $\rho^2 = rR$.

Д2.6. $\omega = 3{,}36$ рад/с.

Д2.7. $T = \dfrac{19}{8}\pi^2 mr^2$.

Д2.8. Эллипс с полуосями: $a=\sqrt{10}$ см; $b=3\sqrt{10}$ см.

Д2.9. Введём на плоскости систему координат Oxy, совместив ось Ox с притягивающей прямой. Пусть сила, действующая на элемент стержня длиной dS, равна $dF=\mu^2\dfrac{m}{2b}ydS$. Тогда дифференциальные уравнения движения стержня: $\ddot{x}_C=0$; $\ddot{y}_C+\mu^2 y_C=0$; $2\ddot{\varphi}+\mu^2\sin 2\varphi=0$. Закон движения центра масс: $x_C=k_1t+k_2$; $y_C=K_3\sin(\mu t+K_4)$; здесь K_i – произвольные постоянные.

Д2.10. $R=mg(3\cos\alpha-2)-\dfrac{mV_0^2}{l}$; $V_0>\sqrt{gl}$.

Д2.11. $N=\dfrac{\pi Rn^2}{4800gf}$.

Д2.12. $\cos\alpha=-\dfrac{10\sin\varphi}{\sqrt{1+99\sin^2\varphi}}$.

Д2.13. $R_1=\sqrt{3}mg$; $R_2=5mg$.

Д2.14. Движение обруча определяются уравнениями:

при $0\le t\le t_1=(1+2f)^{-1}$ $x_c=\dfrac{5}{\sqrt{2}}(1+f)t^2$, $\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{2}}(2t-ft^2)$;

при $t>t_1$ $x_c=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\left[(1+f)t_1^2+2(1+f)(t-t_1)t_1+\dfrac{1}{2}(t-t_1)^2\right]$,

$\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\left[(2+3f)t_1^2+2(1+f)(t-t_1)t_1+\dfrac{1}{2}(t-t_1)^2\right]$, если $f\ge 0{,}5$,

$x_c=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\left[(1+f)t_1^2+2(1+f)(t-t_1)t_1+(1-f)(t-t_1)^2\right]$,

$\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{2}}\left[(2+3f)t_1^2+2(1+f)(t-t_1)t_1+f(t-t_1)^2\right]$, если $f<0.5$.

Д2.15. $n=\dfrac{R\omega_0^2(1+f^2)\sin\alpha}{4\pi fg}$.

Д2.16. $\omega^2=2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\left(r^2+\rho^2+l^2-2rl\cos\varphi\right)^{-1}$.

Д2.17. $\omega=\omega_0+Mg\left[\dfrac{1}{3}Pl^2+\dfrac{1}{2}Q\left(3l^2+\dfrac{1}{2}R^2\right)\right]^{-1}t$.

Д2.18. $M=3mgl$.

Д2.19. $\Delta N = \dfrac{4mgl\sin\alpha}{3(R-r)}$.

Д2.20. $y = \exp\left(\dfrac{\omega^2}{g}z\right)$.

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2\omega^4} + \frac{1}{2l}\omega^2 ma^2\left[1 - \exp\left(\frac{2}{g}\omega^2 z\right)\right] - \frac{1}{l}mgz.$$

Д2.21. $T = -m\dfrac{V^2}{l}\operatorname{tg}\alpha$.

Д2.22. $V = V_0(R\operatorname{tg}\alpha - \delta)^{\frac{1}{2}}(R\operatorname{tg}\alpha + \delta)^{-\frac{1}{2}}$.

Д2.23. $n = \dfrac{\omega^2 R}{4\pi g}\dfrac{1+f^2}{f(1+f)}$.

Д2.24. $R = \dfrac{1}{2}P + \dfrac{1}{4}\dfrac{P}{g}\omega^2 b$

Д2.25. После отрыва от опоры цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью $\omega^2 = \dfrac{V_0^2}{r^2} - \dfrac{4}{3}\dfrac{g}{r^2}\left[(l-r)\sin\alpha + r(\cos\beta - \cos\alpha)\right]$; здесь β – угол между вертикалью и диаметром, проходящим через опору, в момент отрыва $\cos\beta = \dfrac{3}{7}\dfrac{V_0^2}{gr} + \dfrac{4}{7}\left(1 - \dfrac{l}{r}\right)\sin\alpha + \dfrac{4}{7}\cos\alpha$.

Закон движения центра масс: $x_C = V_1\sin\beta t + \dfrac{1}{2}gt^2$; $y_C = V_1\cos\beta t$.

Условие осуществимости движения: $V_0^2 > \dfrac{4}{3}g\left[(l-r)\sin\alpha + r(1-\cos\alpha)\right]$.

Д2.26. $\varepsilon = \dfrac{8}{9}g\dfrac{R^3 - r^3}{R^4 - r^4}$.

Д2.27. $V^2 = \dfrac{3}{8}gr$.

Д2.28. $\tau = \sqrt{\dfrac{2l}{g}}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Д2.29. $V = 3\sqrt{\dfrac{6}{17}gr}$.

Д2.30. $V = 4\sqrt{\pi g k}$.

Д2.31. $V = 6\sqrt{\frac{M+2m}{10M+24m} gl\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Д2.32. $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $R_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} cR$.

Д2.33. $a = \frac{gm_1 \sin 2\alpha}{m_1 \cos^2\alpha + 4m_2 \sin^2\alpha}$.

Д2.34. $h = 1{,}5R$.

Д2.35. $F = \frac{1}{2} P \sin\varphi$.

Д2.36. $S = \frac{3}{4} h\cos\alpha$; $V^2 = \frac{3}{2} gh(1-\sin\alpha)\left(1+\frac{16}{9}\frac{J}{mh^2\cos^2\alpha}\right)^{-1}$.

Д2.37. $\varphi = 45^\circ$.

Динамика системы

Д3.1. $a = 2g\frac{2M - r(P+Q)}{r(7P+2Q)}$.

Д3.2. $\tau = \frac{3\omega_0 R}{8gf}$.

Д3.3. $V_0 = \sqrt{gl\frac{M}{M+m}}$.

Д3.4. $a = g\frac{P+Q}{Q}\sin\alpha$.

Д3.5. $a > g\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$, $f < \operatorname{ctg}\alpha$.

Д3.6. Абсолютная скорость центра диска $V = \frac{2Um^2}{(M+m)(M+3m)}$; абсолютная угловая скорость диска $\omega = -\frac{U}{R}\frac{2m}{M+3m}$.

Д3.7. $R = 3r$.

Д3.8. $a = g\frac{P(R-r)^2 - f_k Q(R-r)}{Q\left(\rho^2 - r^2\right) + P(R-r)^2}$.

Д3.9. $a = \frac{1}{3}g$; $N = 112$ кг.

Д3.10. $V = 2\sqrt{bl}\,\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$; $a = 2b\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$.

Д3.11. $a = g\dfrac{f\sin\alpha - \cos\alpha}{f\cos\alpha + \sin\alpha}$; $f \le \operatorname{ctg}\alpha$.

Д3.12. $\tau = 2\dfrac{PR}{k}$; $l = \dfrac{2gR^4P^3}{3k^2\left(gJ + PR^2\right)}$.

Д3.13. $S = 0{,}23P$, стержень растянут.

Д3.14. $V = \dfrac{1}{9}\omega_0 r$; $A = -\dfrac{2}{9}mr^2\omega_0^2$.

Д3.15. $\Delta V_1 = V_2\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Д3.16. $V = \sqrt{\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)gr}$.

Д3.17. $V_0 = 2m\cos\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi\sqrt{\dfrac{gr}{M^2 + m^2\sin^2\varphi + 2Mm}}$.

Д3.18. $\omega = \left(\dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}_0x_0 - \dot{x}_0y_0\right)\left(\dfrac{m+M}{m}\dfrac{R^2}{2} + x^2 + y^2\right)^{-1}$.

Д3.19. $\varphi \ge 45^\circ$.

Д3.20. $\tau = \dfrac{N\left(2J + Mr^2\right)}{m^2r^2g^2\sin^2\alpha}$; $A = \dfrac{1}{2}N\tau$.

Д3.21. $\tau = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\left[\dfrac{1}{g}\omega^2 b\left(2 - \ln 3\right)\right]$.

Д3.22. $\omega^2 = \dfrac{3m_2gl\sin^4\varphi(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}{3m_1h^2 + m_2l^2\sin^4\varphi}$.

Д3.23. $V^2 = 3\dfrac{2\pi M - 3Fl}{4m_1 + 9m_2}$.

Д3.24. $a = 2g\dfrac{(M+m)\sin\alpha}{3M + 2m(1+\cos\alpha)}$.

Д3.25. $\omega_2 = 4m_1gl\left(\dfrac{1}{\sqrt{l^2 - r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4l^2 - r^2}}\right)\Bigg/ R\left(\dfrac{m_1}{2} + \dfrac{m_1R^2}{6l^2} + m_2\right)$.

Д3.26. $m_1 = \dfrac{4mf}{1-f}$, $m_1' = \dfrac{7mf}{1-2f}$.

Д3.27. $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{l \sin 2\alpha}}$.

Д3.28. Длина недеформированной пружины $a = l\sqrt{2} + g(M+2m)\times$ $\times(c_1+c_2)^{-1}$, $V^2 = \left[3\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)lac_1 - t^2(10{,}5c_1 + 1{,}5c_2)\right](3M+5m)^{-1}$.

Д3.29. $a_r = \dfrac{4m_3 g + 2a(m_1+m_2+2m_3)}{3m_1+4m_2+8m_3}$; $T_1 = \dfrac{1}{2}m_1 \dfrac{2m_3(3g-a) - m_2 a}{3m_1+4m_2+8m_3}$;

$T_2 = m_3 \dfrac{m_1(3g-a) + 4m_2 g}{3m_1+4m_2+8m_3}$.

Д3.30. $P_3 > \dfrac{1}{2}(m_1+m_2)g$; $R = \dfrac{\sqrt{10}}{3}m_1 g$.

Законы сохранения

Д4.1. $$V_1^2 = 2\frac{m_1 gh - m_2 g\dfrac{r_2}{r_2+R_2}\left(\sqrt{h^2+l^2}-l\right)}{m_1 + m_2\dfrac{h^2\left(r_2^2+\rho^2\right)}{\left(h^2+l^2\right)(r_2+R_2)^2}}.$$

Д4.2. $$\omega_k = \omega_0 \frac{J_t + 2m\left(a^2 + al + \dfrac{l^2}{3}\right)}{J_t + 2ma^2};\quad A = ml\left[\omega_0\omega_k\left(a+\frac{l}{3}\right) - g\right].$$

Д4.3. $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

Д4.4. $T = \dfrac{mMU^2}{2(m+M)}$.

Д4.5. $T_1 = 2T_0$. Вследствие работы внутренних сил.

Д4.6. $\omega^2 = \dfrac{3}{10}gl\left(\sqrt{10}-1\right)$.

Д4.7. $A = mR^2\left(J+mR^2\right)\omega_0^2/2J$.

Д4.8. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{M + 2m(2-\cos\alpha)}$

Д4.9. $\omega = 0{,}573$ рад/с.

Д4.10. $F = \dfrac{4mV^2}{9l}$.

Д4.11. $V = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{gh}{31}}$.

Д4.12. $\omega = 10m\sqrt{g\big/\left(2R\left(121M^2 + 480mM + 375m^2\right)\right)}$.

Д4.13. $V^2 = (0{,}48R\omega_0)^2 + \dfrac{41}{45}\left(0.48R^2\omega_0^2 + 2gR\right)$.

Д4.14. $A = \dfrac{3}{2}mR^2\omega_0^2 + \dfrac{15}{16}\dfrac{mg^2}{\omega_0^2}$; $\omega_0 = \dfrac{\pi n}{30}$.

Д4.15. $V = \sqrt{\dfrac{8}{645}gR}$.

Д4.16. $a_r = \dfrac{5}{12}g$.

Удар

Д5.1. $\varphi = 45°$.

Д5.2. $V = \dfrac{1}{m}\sqrt{\dfrac{2}{3}(M+m)\,(4M+3m)gl\,(1-\cos\alpha)}$.

Д5.3. $h_{i+1} = \dfrac{m}{2b}\ln\left[1 + k^2\left(1 - \exp\left(-2\dfrac{b}{m}h_1\right)\right)\right]$; здесь b – коэффициент сопротивления ($F_c = bV^2$).

Д5.4. Необходимо составить программу для ПЭВМ для решения задачи.

Динамика тела при моментальном изменении связей

Д6.1. $N = P\dfrac{l^2}{l^2 + 3a^2}$.

Д6.2. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{3V^2}{4gl}$.

Д6.3. Перед падением на пол стремянка отходит от стены.

Д6.4. 1) уменьшится; 2) увеличится.

Д6.5. $T = \dfrac{2\sqrt{3}}{13}mg$.

Д6.6. $V_B = l\sqrt{6g\left(h-h_0\right)\left(l^2+3h^2\right)^{-1}}$.

Д6.7. $R=\sqrt{P^2+\frac{F^2}{49}}$; $x=\frac{1}{4}l$.

Д6.8. $a=\frac{18}{19}g$.

Д6.9. $a=g\frac{m_1 g}{m_1+2m\,\mathrm{tg}\alpha}$.

Д6.10. $F>\left(m_1+m_2\right)g$.

Д6.11. $V_1=\frac{4}{17}\omega_0 R$.

Колебания

Д7.1. $\varphi=\frac{2}{9}\cos 7t$.

Д7.2. $A=0{,}1$ м; $T=0{,}95$ с.

Д7.3. $\tau=2\pi\sqrt{\frac{i_A^2-a^2}{ag}}$.

Д7.4. $(9\pi-16\cos\varphi)\ddot{\varphi}+8\sin\varphi\left(\dot{\varphi}^2+\frac{g}{r}\right)=0$; $\tau=\pi\sqrt{\frac{(9\pi-16)r}{2g}}$.

Д7.5. $y=5\cos(\sqrt{796}t)$ (см).

Д7.6. $x_a=\frac{a\rho S}{\rho S-mp^2}\sin pt$; $x_r=\frac{map^2}{\rho S-mp^2}\sin pt$.

Д7.7. $A>\frac{fg}{4\pi^2\nu^2\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)}$.

Д7.8. $\tau=\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Д7.9. $\tau=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{2c}}$.

Д7.10. $T=\frac{2\pi}{k}$. $k^2=\frac{3g\sqrt{R^2-l^2}}{3R^2-2l^2}$; $N=\frac{1}{2}mR\left(\frac{g}{\sqrt{R^2-l^2}}+k^2\varphi_0^2\right)$.

Д7.11. $b>2l$; $\tau=4\pi\sqrt{\frac{2bl}{3g\left(b-2l\right)}}$.

Принцип Даламбера

Д8.1. $a_{абс}=\frac{a^2}{g}\cong 0{,}4$ м/с^2; направлено вниз.

Д8.2. $a=\left(1+\sqrt{2}\right)g$.

Д8.3. При $\omega_0=\Omega$ – равновесие; при $\omega_0>\Omega$ – движение вверх; при $\omega_0<\Omega$ – движение вниз; здесь $\Omega^2=\frac{x_0}{g}\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

$$x_{\substack{\max\\ \min}}=\frac{x_0^2\omega_0^2\sin\varphi\pm\sqrt{x_0^2\omega_0^4\sin^2\varphi+4gx_0^3\omega_0^2\sin 2\varphi}}{4g\cos\varphi}.$$

Д8.4. $a_r=g\cos\alpha+\frac{9}{16}R\omega_0^2\sin\alpha$.

Д8.5. $V_r=9$ м/с.

Д8.6. $V_r=\frac{1}{2}\sqrt{16bg+\omega_0^2a^2}$.

Д8.7. $A=\frac{3m_1m_2^2V_{отн}^2}{4(1{,}5m_1+2m_2)^2}+\frac{m_2}{2}\left(V_{отн}^2+\frac{2m_2^2V_{отн}^2}{(1{,}5m_1+2m_2)^2}-\frac{2m_2V_{отн}^2}{(1{,}5m_1+2m_2)}\right)$.

Д8.8. $x=\left(l_0-\frac{2cl_0}{3m_1k^2}\right)\cos kt+\frac{2cl_0}{3m_1k^2}$, если $k^2=\frac{2c}{3m_1}-\frac{2}{3}\omega^2>0$; $x=\frac{cl_0}{3m_1}t^2$, если $k^2=\frac{2c}{3m_1}-\frac{2}{3}\omega^2=0$; $x=\frac{l_0}{2}\left(1+\frac{2c}{3m_1k_1^2}\right)\left(e^{k_1t}+e^{-k_1t}\right)-\frac{2cl_0}{3m_1k_1^2}$, если $k_1^2=\frac{2}{3}\left(\omega^2-\frac{c}{m_1}\right)>0$.

Уравнения Лагранжа

Д9.1. В качестве обобщённых координат задать углы отклонения стержней от вертикали. Они всё время должны быть равны.

Д9.2. $V=\frac{1}{2}\lambda\sqrt{\frac{c}{3m}}$.

Д9.3. $a_1=\frac{2g}{17}\left(3\sin\alpha-\frac{3k}{R}\cos\alpha-2\right)$; $a_2=\frac{2}{17}g\left(7-2\sin\alpha+\frac{2k}{R}\cos\alpha\right)$; $a_1>0$ при $k<R\left(\mathrm{tg}\alpha-\frac{2}{3\cos\alpha}\right)$, $\alpha>\arcsin\frac{2}{3}$; $T=\frac{P}{17}\left(3+4\sin\alpha-\frac{4k}{R}\cos\alpha\right)$.

Д9.4. $\omega^2 = \dfrac{2\lambda}{R^2}\dfrac{2m_2 g + c\lambda}{m_1 + 2m_2}$.

Д9.5. В качестве обобщённых координат выбрать угол поворота кольца и относительное перемещение колечка по кольцу.

Д9.6. $$\begin{cases} \left(J + \dfrac{1}{4}mr^2 + mx^2\right)\ddot{\varphi} + 2m\,x\,\dot{x}\,\dot{\varphi} = M, \\ \dfrac{3}{2}m\,\ddot{x} - m\,x\dot{\varphi}^2 + cx = 0. \end{cases}$$

Профессионально ориентированные задачи

Д10.1. $\omega = \dfrac{U}{R}\left(\dfrac{M+m}{m}\dfrac{\rho^2}{R^2} + 1\right)^{-1}$; $\Delta V = U\left(\dfrac{M+m}{m} + \dfrac{R^2}{\rho^2}\right)^{-1}$.

Д10.2. $V_r = U\left(\cos\alpha - f\sin\alpha\right)\left[1 - \exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right)\right]$.

Д10.3. $A = -\dfrac{J_1 J_2\left(\omega_1 - \omega_2\right)^2}{2\left(J_1 + J_2\right)}$.

Д10.4. $\omega_1^2 = \dfrac{6gP}{a\left(Q + 3P\right)}$.

Д10.5. $V = \varphi_0\sqrt{\dfrac{c}{6m_1 + m_2}}$

Д10.6. $F_x = -m\omega^2 V_0 t$. Пружиной с коэффициентом жёсткости $c = m\omega^2$.

Д10.7. $T = \pi\rho r^2 V^2$; ρ – плотность.

Д10.8. $\omega^2 = \dfrac{60\pi M - 22{,}5\pi^2 - 15\pi\left(15\pi + 2R\right)\sqrt{3}}{m\,200L}\cdot 1000$ (рад/с).

Д10.9. $S = \dfrac{F - mg\,\mathrm{tg}\alpha}{c\,\mathrm{tg}\alpha}\left(1 - \cos\sqrt{\dfrac{c\,\mathrm{tg}^2\alpha}{M + m\,\mathrm{tg}^2\alpha}}\,t\right)$.

Д10.10. $T = \dfrac{75}{8}\pi^2 mr^2$.

Д10.11. $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{b}}$.

Д10.12. $T = m\left(g + \frac{V_0^2}{R}\right)$; $h = \frac{V_0^2}{2g}$.

Д10.13. $\tau = \frac{rJ_{\text{пр}}\omega_0}{RM_{mp}}$; $\varphi = \frac{rJ_{\text{пр}}\omega_0^2}{2RM_{\text{тр}}}$, где $J_{\text{пр}} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{3}{2}m_2\right)(R-r)^2$.

Д10.14. $0{,}35 < \operatorname{tg}\alpha < 0{,}45$; $V = \sqrt{gR}$; $S = \sqrt{2R(R + l\sin\alpha)}$.

Д10.15. а) $N = \frac{3}{8} fmg$; б) $V^2 = \frac{75}{32} fgl$.

Д10.16. $\varepsilon_1 = \frac{23M_1}{19m_1r_1^2}$; $\varepsilon_2 = \frac{9M_1}{38m_1r_1^2}$.

Д10.17. $a = 4\frac{g}{R}\frac{\sin\alpha}{7+f}$; $N = mg\frac{\sin\alpha}{7+f}$.

Задачи конкурса «Брейн-ринг»

Д11.1. $V_{\min} = \sqrt{2gh}\operatorname{ctg}\alpha$.

Д11.2. $\Delta l = \frac{2mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{c}$.

Д11.3. $P = 4\sqrt{2}$ кг·м/с.

Д11.4. $A = 1{,}764 \cdot 10^{12}$ Дж.

Д11.5. $\frac{H_1}{H_2} = \frac{c_2}{c_1}$.

Д11.6. $b = 2$.

Д11.7. $E = \frac{m_1m_2V_1^2}{2(m_1+m_2)}$.

Д11.8. $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{3}$.

Д11.9. $S = 1$ м.

Д11.10. $h = \frac{R-r}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Профессиональное творчество становится неотъемлемой составной частью деятельности конкурентоспособного специалиста в условиях формирования в стране инновационной экономики.

Выпускник вуза помимо сугубо профессиональных знаний должен обладать и общекультурными творческими компетенциями, включающими:

– знания в области психологии творчества, менеджмента творческой деятельности;
– умения организации деятельности как собственной, так и руководимого коллектива по решению творческих задач;
– опыт творческой профессиональной деятельности в условиях инновационной экономики;
– навыки творческой деятельности в условиях психологического напряжения, стресса и ограниченности временных, финансовых, материальных и трудовых ресурсов;
– креативность.

Собранные в учебном пособии рекомендации по организации самостоятельного изучения учебной дисциплины, оригинальные задачи и указания к их решению помогут студентам почувствовать красоту механики как науки, оценить её огромные возможности для исследования проблемных ситуаций в различных технических системах и для создания новых машин, аппаратов, сооружений.

Решение творческих задач динамики не только позволит на более высоком уровне изучить механику, но и сформирует у студентов готовность к высокоэффективной инновационной деятельности, характеризующуюся высоким уровнем сформированности творческих компетенций, позволит обучающимся почувствовать радость творчества на этапе обучения в вузе.

Мы рассчитываем на то, что данное учебное пособие, ориентированное прежде всего на самообразование и сопровождение олимпиадного движения, будет полезно для студентов, аспирантов и молодых учёных, от которых во многом зависит будущее инновационного вектора развития машиностроения нашей страны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Мерлин. – СПб. : Лань, 2004.

2. Курс теоретической механики : учеб. для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. ; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.

3. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб. : Лань, 1998. – 448 с.

4. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики : учеб. для вузов / Н.Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 2003. – 719 с.

5. Попов, А.И. Введение в специальность. Олимпиадное движение как инструмент саморазвития бакалавра инноватики : учеб. пособие / А.И. Попов, Н.П. Пучков. – Тамбов : Изд-во тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 112 с.

6. Попов, А.И. История становления и тенденции развития олимпиадного движения по теоретической механике : монография / А.И. Попов ; под науч. ред. д-ра пед. наук Н.П. Пучкова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 136 с.

7. Попов, А.И. Теоретическая механика. Сборник задач для творческого саморазвития личности студента : учеб. пособие. Рекомендовано УМО по университетскому политехническому образованию / А.И. Попов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 188 с.

8. Попов, В.И. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике / В.И. Попов, В.А. Тышкевич, М.П. Шумский. – Тамбов : Тамб. ин-т хим. машиностр., 1992. – Ч. 1. – 124 с.; Ч. 2. – 104 с.

9. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для втузов / С.М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2004. – 416 с.

10. Цывильский, В.Л. Теоретическая механика : учеб. для втузов / В.Л. Цывильский. – М. : Высшая школа, 2004. – 343 с.

11. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учеб. для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ