ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ

Пособие для самостоятельной работы
для специальности 2014 «Механика»

§1. Импульс системы частиц и его изменение а процессе движения.

1) Как определяется импульс частицы в системе частиц?
2) Записать выражение для импульса сплошного тела.
3) Какую размерность имеет импульс системы частиц?
4) Является ли импульс системы частиц аддитивной величиной?
5) Показать, исходя непосредственно из определения, что импульс однородного диска, вращающегося вокруг оси, которая перпендикулярна его плоскости и проходит через его центр, равен нулю.
6) Как связаны между собой импульсы системы частиц в двух движущихся относительно друг друга системах координат?
7) Как формулируется теорема об изменении импульса системы частиц?
8) Почему в формулировку теоремы не входят внутренние силы?
9) Как формулируется эта теорема в неинерциальной системе координат?
10) Как определяется первый интеграл уравнений движения системы частиц?
11) Какие первые интегралы и при каких условиях можно получить из теоремы об изменении импульса системы частиц?
12) Сколько независимых первых интегралов можно получить из этой теоремы?
13) Какая система частиц называется изолированной?
14) Что можно сказать об импульсе изолированной системы частиц?
15) Влияют ли внутренние силы системы частиц на изменение ее импульса, если а) система частиц является изолированной, б) система частиц является неизолированной?
16) В любой ли системе координат импульс изолированной системы частиц остается постоянным?

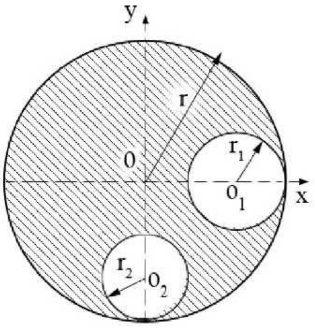
§2. Центр инерции системы частиц и его движение.

1) Как определяется центр инерции системы частиц?
2) Записать выражение для радиус-вектора центра инерции сплошного тела.
3) Зависит ли положение центра инерции от выбора начала отсчета радиус-векторов частиц системы?
4) Зависит ли положение центра инерции от выбора осей координат, по отношению к которым рассматривается движение системы частиц?
5) Как определяется ось и плоскость динамической симметрии системы частиц?
6) Что можно сказать о положении центра инерции системы частиц, имеющей ось и плоскость динамической симметрии?
7) Найти положение центра инерции системы двух частиц массы m_1 и m_2, расстояние между которыми равно ℓ
8) Найти положение центра инерции уголка, образованного двумя однородными стержнями длины ℓ_1 и ℓ_2, имеющими массы m_1 и m_2 соответственно. Угол между стержнями равен α.
9) Определить положение центра инерции однородной фигуры массы m, полученной из кругапутем врезания двух круговых отверстий (см. рис.). Радиус круга r, радиусы отверстий r_1 и r_2.

<u>Решение.</u>

Идея решения заключается в том, что призаполнении дырок веществом с плотностью исходного тела, получается однородный диск радиуса r, положение центра инерции которого известно. Поэтому задача сводится к нахождению центра инерции одного из тел системы, когда положения центров инерции остальных тел системы и всей системы, заданы.

Введем оси координат $x0y$ как показано на рисунке. Пусть X и Y - координаты центра инерции заданного тела. Весь сплошной диск, центр инерции которого находится в точке O, состоит из заданного тела и двух дисков с центрами в точках O_1 и O_2. Поэтому



$$O=\frac{mx+m_1x_{o1}+m_2x_{o2}+m_2x_{o2}}{m+m_1+m_2};\ O=\frac{my+m_1y_{o1}+m_2y_{o2}}{m+m_1+m_2}$$, где

$$m_1=\rho\pi r_1^{\ 2};\ m_2=\rho\pi r_2^{\ 2};\ \rho=\frac{m}{\pi\left(r^2-r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}\right)}.$$

Окончательно имеем

$$X=-\frac{(r-r_1)r_1^{\ 2}}{r^2-r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}};\ Y=-\frac{(r-r_2)r_2^{\ 2}}{r^2-r_1^{\ 2}-r_2^{\ 2}}$$

10) Как связан импульс системы чатиц со скоростью ее центра инерции?
11) Чему равен импульс твердого тела, вращающегося вокруг неподвижного центра инерции?
12) Как формулируется теорема о движении центра инерции системы частиц?
13) Какие первые интегралы и при каких условиях можно получить из этой теоремы?
14) Как движется центр инерции изолированной системы частиц?
15) В любой ли системе координат центр инерции изолированной системы частиц движется прямолинейно и равномерно или покоится?
16) В каком случае можно определить движение центра инерции, не находя закона движения каждой частицы системы?
17) Как движется центр инерции системы частиц, находящийся в поле сил тяжести?
18) На систему частиц действуют внешние силы $\vec{F}^{(e)}{}_i=-m_i\vec{r}_i\,(i=1,\ldots,N)$, где m_i - масса i-ой частицы. Что можно сказать о движении центра инерции этой системы?
19) Влияют ли внутренние силы на движение центра инерции
    а) изолированной системы частиц,
    в) неизолированной системы частиц?
20) Тяжелый стержень падает в вертикальной плоскости, скользя одним концом по гладкой горизонтальной прямой. Что можно сказать о движении его цетра инерции, если в начальный момент стержень покоился?

Ответ. Центр инерции движется по вертикали.

21) Показать, что перемещение центра инерции системы и частиц системы за один и тот же промежуток времени связан соотношением

$$\Delta\vec{r}_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\Delta\vec{r}_i}{m}.$$

22) Пусть в некоторый момент времени частицы M_1 и M_2 занимали положения А и В соответственно. За некоторый промежуток времени они поменялись местами. Как при этом переместился их центр инерции?

Ответ. $\Delta\vec{r}_c=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(AB)$

23) Герой пьесы Э. Ростана Сирано де Бержерак убеждал, что добраться до Луны можно следующим образом:

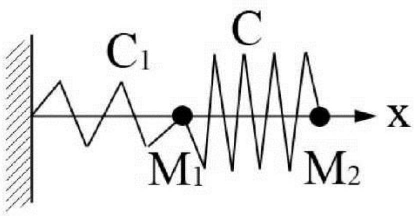
    Лечь на железный лист и сильными рывками
    Магнит подбрасывать, он лист железный с вами
    Подтянет к верху. Вы опять
    Так до Луны и упражняйтесь!

Почему это невозможно?

24) Определить движение центра инерции системы, состоящей из двух частиц равной массы при наличии пружин, имеющих жесткости C_1 и C

Решение

Пусть x_1 и x_2 - координаты частиц M_1 и M_2, отсчитываемые от их положений в состоянии, когда пружины нерастянуты.



Уравнение движения системы имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{1}$$

Будем искать частные решения этой системы уравнений в форме

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \lambda) \ ; \ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \lambda) \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{cases} (\frac{c+c_1}{m} - \omega^2)A_1 - \frac{c}{m}A_2 = 0 \\ -\frac{c}{m}A_1 + (\frac{c}{m} - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Так как ищутся нетривиальные решения, то определитель этой системы линейных однородных уравнений относительно A_1 и A_2 должен равняться нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{c+c_1}{m} - \omega^2 & -\frac{c}{m} \\ -\frac{c}{m} & \frac{c}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда находим возможные значения частоты ω :

$$\omega_1^2 = \frac{c_1 + 2c + \sqrt{c_1^2 + 4c^2}}{2m} \ ; \ \omega_2^2 = \frac{c_1 + 2c - \sqrt{c_1^2 + 4c^2}}{2m} \tag{4}$$

Поэтому имеется два линейно независимых решения системы (2):

$$x_1^{(1)} = A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \lambda_1) \ ; \ x_2^{(1)} = A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \lambda_1) \tag{5}$$

$$x_1^{(2)} = A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \lambda_2) \ ; \ x_2^{(2)} = A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \lambda_2) \tag{6}$$

Подставляя (5) в первое уравнение системы (3), получим

$$(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c^2})A_1^{(1)} - 2cA_2^{(1)} = 0$$

Следовательно,

$$A_1^{(1)} = 2cM \ ; \ A_2^{(1)} = (c_1 - \sqrt{c_1^{\ 2} + 4c^2})M, \text{ где } M \text{ - любое.}$$

Аналогично находим

$$A_1^{(2)} = 2cN \ ; \ A_2^{(2)} = (c_1 + \sqrt{c_1^{\ 2} + 4c^2})N, \text{ где N – любое.}$$

Тогда общее решение системы (1) имеет вид

$$x_1 = 2cM\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + 2cN\cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$x_2 = (c_1 - \sqrt{c_1^{\ 2} + 4c^2})M\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + (c_1 + \sqrt{c_1^{\ 2} + 4c^2})N\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Пусть для определенности при $t = 0$:

$x_1^{\ 0} = x_2^{\ 0} = 0; \ \dot{x}_1^{\ 0} = 0; \ \dot{x}_2^{\ 0} = V_0$

Решение, соответствующее этим начальным условиям следующее:

$$x_1 = -\frac{cV_0}{\omega_1\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2}}\sin\omega_1 t + \frac{cV_0}{\omega_2\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2}}\sin\omega_2 t;$$

$$x_2 = -\frac{(c_1-\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2})V_0}{2\omega_1\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2}}\sin\omega_1 t + \frac{(c_1+\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2})V_0}{2\omega_2\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2}}\sin\omega_2 t$$

Окончательно, положение центра инерции C исследуемой системы определяется его координатой

$$x_c = a + \frac{mV_0}{2\sqrt{c_1^{\ 2}+4c^2}}\left(-\frac{\omega_2^{\ 2}}{\omega_1}\sin\omega_1 t + \frac{\omega_1^{\ 2}}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right),$$

где λ - постоянная величина.

Отсюда видно, что с изменением характера внутреннего взаимодействия, т.е. жесткости пружины C, меняется закон движения центра инерции.

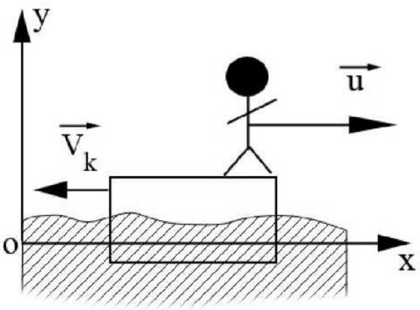
Рассмотренный пример еще раз подчеркивает то, что в неизолированной системе частиц внутренние силы влияют на характер движения центра инерции.

§3. Задачи

Задача1. На краю неподвижного плота массы M стоят n мальчиков одинаковой массы m, которые затем один за другим спрыгивают в воду со скоростью $\vec{u}$ относительно плота. Какую скорость приобретет плот после того, как с него спрыгнут все мальчики? Сопротивлением воды движению плота пренебречь.

<u>Решение</u>

Движение плота и мальчиков будем рассматривать в инерциальной системе координат $xoyz$, которая связана с неподвижной водой. Пусть они перемещаются вдоль оси Ox.



Для системы состоящей из плота и K мальчиков, проекция импульса на ось Ox постоянна, так как все внешние силы (силы тяжести и выталкивающая сила) направлены по вертикали. Обозначим через $\vec{V}_{k-1}$ и $\vec{V}_k$ скорости плота до и после спрыгивания k - того мальчика. Тогда импульс системы до спрыгивания равен $\{M+m(n-k-1)\}\vec{V}_{k-1}$, а после спрыгивания $-\{M+m(n-k)\}\vec{V}_k + m(\vec{V}_k+\vec{u})$.

Приравнивая проекции этих импульсов на ось Ox, получим

$$\{M+m(n-k+1)\}V_{k-1_x} = \{M+m(n-k)\}V_{k_x} + m(V_{k_x}+u).$$

Тогда

$$V_{k_x} = V_{k-1_x} - \frac{mu}{M+m(n-k-1)} \qquad (k=1,2,.......,n),$$

Где $V_0 = 0$. Поэтому скорость плота после спрыгивания мальчиков равна по величине

$$V_n = mu\left\{\frac{1}{M+m} + \frac{1}{M+2m} + \ldots + \frac{1}{M+nm}\right\}$$

И направлена противоположно скорости $\vec{u}$.

Замечания. 1) Найдем скорость $\vec{V}$, которую приобретет плот, если все мальчики спрыгнут одновременно. Имеем аналогично предыдущему

$$O = MV_x + mn(Vx+u).$$

Следовательно, $V_x = \dfrac{mnu}{M+mn}$

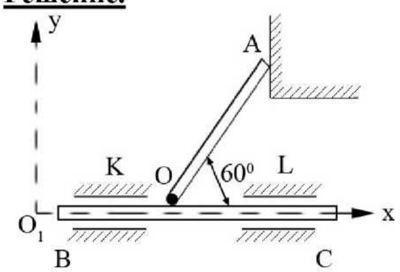
2) Сравним окончательно скорости плота в двух случаях.
Так как

$$\frac{1}{M+m}+\frac{1}{M+2m}+...+\frac{1}{M+nm} \triangleright \frac{1}{M+nm}+\frac{1}{M+nm}+...+\frac{1}{M+nm}=\frac{n}{M+nm},$$

то $V_n \triangleright V$, т.е. в случае последовательного спрыгивания мальчиков плот приобретает большую скорость, чем при одновременном спрыгивании.
3) Нужно помнить, что вычисляя импульс системы частиц в некоторой системе координат, необходимо находить импульс тел, составляющих систему, в той же системе координат.

Задача 2.
Однородный стержень OA длины l и массы m расположен в вертикальной плоскости и шарнирно связан со стержнем BC массы $3m$, имеющим возможность двигаться в горизонтальных направляющих K и L. Стержень OA срывается с выступа N и падает на стержень BC. Пренебрегая трением в опорах, определить смещение, которое получит при этом стержень BC.

<u>Решение.</u>



Движение системы, состоящей из стержней BC и OA, будем рассматривать в системе координат xo_1y, которая связана с неподвижными направляющими K и L.
Все внешние силы(силы тяжести и силы реакций направляющих K и L) вертикальны. Поэтому $F_x^{(e)}=0$. Тогда из теоремы о движении центра инерции следует, что $V_{Dx}=const$ (D – центр инерции системы). Так как в начальный момент стержни были неподвижны, то $V_{Dx}=0$ и во все время движения выполняется соотношение $x_D=const$.
Обозначим через Δx и Δx_1 смещения центров инерции стержней BC и OA вдоль оси O_1x за время падения стержня OA. Эти смещения связаны соотношением

$3m\Delta x+\Delta x_1 m=0$

В силу условия $x_D=const$

Стержень BC движется поступательно. Поэтому $\Delta x_1=\Delta x+(\frac{l}{2}-\frac{l}{2}\cos 60^0)$. Тогда

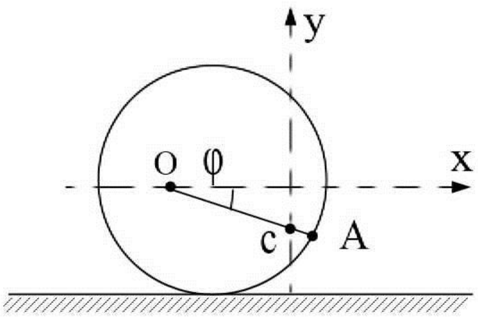
$$3m\Delta x+m(\Delta x+\frac{l}{4})=0$$

Окончательно $\Delta x=-\frac{l}{16}$,

т.е. стержень BC сместится влево на $\frac{l}{16}$.

Задача 3.
Найти траекторию колечка A массы m, которое скользит без трения АО обручу массы M и радиуса r, касающемуся гладкой горизонтальной прямой. В начальный момент времени система находилась в покое.

Решение.



Движение системы, состоящей из обруча и колечка, будем рассматривать в системе координат xO_1y (см. рис.), выбранной так, чтобы в начальный момент центр инерции находился на оси O_1y, и связанной с горизонтальной прямой.

Так как трение отсутствует, то проекция всех внешних сил(сил тяжести и нормальной реакции прямой), действующих на систему, на ось O_1x равна нулю. Отсюда, с учетом начальных условий имеем $x_c = const$, т.е.центр инерции C движется вдоль оси O_1y. Найдем CA из соотношений $M \cdot OC = mCA$ и $OC + CA = r$. Имеем $CA = \dfrac{Mr}{m+M}$. Обозначим угол между осью O_1x и прямой OA через φ.

Тогда $x_A = \dfrac{Mr}{m+M}\cos\varphi$; $y_A = -r\sin\varphi$.

Исключая из этих уравнений φ, получим

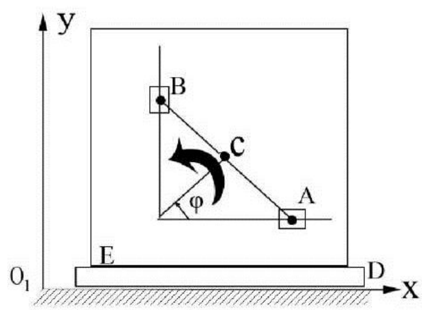
$$\frac{x_A^{\ 2}}{(Mr/(M+m))^2} + \frac{y_A^{\ 2}}{r^2} = 1.$$

Следовательно, колечко движется по эллипсу.

Задача 4.

На вертикальной пластине E, связанной с плитой D, лежащей на горизонтальной гладкой плоскости, укреплен механизм эллипсографа. Кривошип OC длины l начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω. Определить закон движения плиты, если массы ползунов A и B равны m, масса плиты с пластиной равна $16m$, а массы кривошипа и линейки пренебрежимо малы. В начальный момент плита D находилась в покое, ползун A занимал крайнее правое положение ($OC = BC = CA$).

Решение.



Движение системы, состоящей из пластины, плиты и эллипсографа, будем рассматривать в системе координат xO_1y, которая связана с горизонтальной плоскостью. Пусть в начальный момент точка O находилась на оси O_1y. Положение плиты и пластины в любой момент времени можно описать, задав абсциссу точки O - x_0. Для нахождения зависимости $x_0 = x_0(t)$ применим теорему о движении центра инерции. Так как все внешние силы, действующие на систему параллельно оси O_1y при $\ddot{x}_p = 0$ (точка p - центр инерции системы). Выразим x_p через x_0, учитывая, что центр инерции ползунов A и B совпадает с точкой C (по условиям задачи $BC = CA$),

$18mx_p = 16mx_0 + 2m(x_0 + l\cos\varphi) + const.$

Подставив выражение для x_p в соотношение $\ddot{x}_p = 0$, получим уравнение для нахождения x_0:

$\ddot{x}_0 = \frac{1}{9} l\omega^2 \cos\omega t \qquad (\varphi = \omega t)$.

Тогда $x_0 = -\frac{1}{9} l \cos\omega t + c_1 t + c_2$

Удовлетворяя начальным условиям
$x_0(0) = 0$, $\ddot{x}_0(0) = 0$,
окончательно имеем

$x_0 = \frac{l}{9}(1 - \cos\omega t)$.

Замечания 1) Пусть начальные условия в рассмотренной задаче изменены следующим образом: плита D покоится, а ползун B занимает крайнее верхнее положение. Тогда $\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega t$ и $x_0 = \frac{l}{9} \sin\omega t + C_1 t + C_2$.

Удовлетворяя начальным условиям $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, получим

$x_0 = \frac{l}{9} \sin\omega t - \frac{l\omega}{9} t$.

Таким образом, в этом случае движение плиты есть суперпозиция равномерного и колебательного движений, а центр инерции всей системы движется по закону:
$x_p = -\frac{l\omega}{9} t + const$. То, что $V_{px} = -\frac{l\omega}{9}$ следует из того, что при $t = 0$ $V_{Ax} = -2\omega l V_{Bx} = 0$, а при дальнейшем движении $F_x^{(e)} = 0$

Данное движение реализуется следующим образом: необходимо удерживать плиту внешней силой в покое, считая кривошип OC равномерно вращающимся вокруг точки O, а в тот момент времени, когда ползун B займет крайнее верхнее положение, эту силу убрать.

2) Так как плита D во время движения касается горизонтальной плоскости, то

$y_p = y_0 + \frac{l}{9} \sin\omega t + const \qquad$ (y_0 - постоянно).

Поэтому можно легко найти нормальную реакцию плоскости.

Проектируя соотношение $18m\vec{W}_p = \vec{F}^{(e)}$ на ось $O_1 y$, получим

$18m\ddot{y}_p = -18mg + R_y$.

Окончательно,

$R_y = 18mg(1 - \frac{l\omega^2}{9g} \sin\omega t)$.

Для того, чтобы движение плиты было безотрывным от горизонтальной плоскости, во все время должно выполняться условие $R_y \geq 0$. Это условие будет выполнено, если

$\omega^2 \leq \frac{9g}{l}$

В противном случае плита будет подпрыгивать над плоскостью.