ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ

Методические указания для студентов
механико-математического факультета

В настоящих указаниях даны необходимые сведения о применении уравнения возможной мощности для решения динамических задач теоретической механики. На примерах решения таких задач для материальной точки и системы материальных точек показана эффективность данного метода. Рассмотрена взаимосвязь уравнения возможной мощности с уравнениями Лагранжа второго рода и с уравнениями более высоких порядков, таких как уравнения Аппеля, Ценова, Манжерона-Деленау и др. Кратко указаны преимущества использования уравнения возможной мощности по сравнению с другими методами решения задач теоретической механики. Метод может применяться как альтернатива вариационным методам, широко распространенным в аналитической механике.

Указания предназначены для студентов механико-математических факультетов университетов (специальность «механика»), и может быть полезным для аспирантов и специалистов в области механики.

Введение.

Уравнение возможной мощности позволяет расширить возможности теоремы об изменении кинетической энергии для решения более сложных задач динамики. Более того, уравнение возможной мощности может быть применено для решения большого круга задач аналитической механики с голономными и неголономными связями, причем, в ряде случаев, более эффективно, чем с помощью известных методов [2].

Уравнение возможной мощности не использует вариационных методов, как они обычно трактуются в аналитической механике. Основной исходной характеристикой здесь являются параметры скорости, с помощью которых решение задач проводится при минимальном числе параметров. Решение проводится в векторном виде с использованием базисных векторов для параметров скорости. Можно отметить, что такой подход с применением векторного исчисления ведет к упрощению решений многих задач механики.

В настоящем пособии ставится целью изложить данный метод и дать студентам примеры решения некоторых задач механики с использованием уравнения возможной мощности.

Прежде чем приступить к выводу уравнения возможной мощности, раскроем понятие возможной скорости.

Примем следующие обозначения: m_i – масса; $\vec{r}_i$ – радиус-вектор; $v_i = \dot{\vec{r}}_i$ – вектор скорости; $\vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i$ – вектор ускорения; $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}$ – сумма внешних и внутренних сил; T_i – кинетическая энергия; N_i – мощность действующих сил; n – число обобщенных координат; l – число уравнений связей; s – число степеней свободы; q^i – обобщенные координаты, в том числе $q^0 = t$ – время.

Обобщенные скорости $\dot{q}^j$ являются производными от обобщенных координат по времени. Скорость i-ой точки механической системы выразится в виде:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} \dot{q}_j . \qquad (0.1)$$

Введем кроме обобщенных скоростей $\dot{q}^j$ другие параметры скорости v^j, которые не являются производными от обобщенных координат по времени, и назовем их квазискоростями. В дальнейшем будем обозначать все параметры скорости через v^j, не делая различия между обобщенными скоростями и квазискоростями. Независимые параметры скорости v^j будут основными исходными величинами в нашем изложении. При решении задач аналитической механики, согласно указанному выше, следует начинать с выбора независимых параметров v^j. При любом выборе обобщенных координат q^j можно параметры v^j выбрать так, что обобщенные скорости $\dot{q}^j$ выразятся линейно через v^j:

$$\dot{q}^j = \sum_{k=0}^{s} A_k^j v_k, \qquad j = 0,1,\ldots n\ , \tag{0.2}$$

где коэффициенты $A_k^j = A_k^j\left(q^0, q^1, \ldots, q^n\right)$.

Заменим в равенстве (0.1) $\dot{q}^j$ выражением (0.2) и получим

$$\vec{v}_i = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} A_k^j v^k\ . \tag{0.3}$$

Обозначая

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} A_k^j = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \pi^k}, \tag{0.4}$$

где π^k – квазикоординаты, связанные с квазискоростями соотношением

$$v^j = \frac{d\pi^j}{dt}; \qquad v^j = \dot{\pi}^j, \tag{0.5}$$

можно (0.1) переписать в виде

$$\vec{v}_i = \sum_{k=0}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \pi^k} v^k\ . \tag{0.6}$$

Частную производную от радиус-вектора i-ой точки по координате π^k назовем базисным вектором и обозначим

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \pi^k} = \vec{u}_{ik} \ \text{или}\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \pi^j} = \vec{u}_{ij}\ . \tag{0.7}$$

Тогда выражение для вектора скорости любой i-ой точки можно записать так:

$$\vec{v}_i = \sum_{j=0}^{s} v^j \vec{u}_{ij}\ . \tag{0.8}$$

Возможная скорость материальной точки есть совокупность векторов скоростей, которые материальная точка могла бы иметь в данный момент времени при наличии всех наложенных на систему связей, и обозначается в виде [5, 6]:

$$\left\{\vec{v}\right\} = \left\{\dot{x}\right\}\vec{i} + \left\{\dot{y}\right\}\vec{j} + \left\{\dot{z}\right\}\vec{k}, \tag{0.9}$$

где $-\infty \le \left\{\dot{x}\right\}; \left\{\dot{y}\right\}; \left\{\dot{z}\right\} \le \infty$.

Тогда, на основании формулы (0.8), в общем случае возможную скорость можно представить как

$$\{\vec{v}_i\} = \sum_{j=0}^{s} \{v^j\} \vec{u}_{ij} . \tag{0.10}$$

1. Уравнение возможной мощности для материальной точки.

Известно, что для системы с одной степенью свободы при стационарных и голономных связях уравнения движения могут быть получены на основе теоремы об изменении кинетической энергии [1]. Это обстоятельство является исходным фактором для вывода уравнения возможной мощности.

Кинетическая энергия материальной точки будет

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} , \tag{1.1}$$

откуда

$$\dot{T} = m\vec{a} \cdot \vec{v} . \tag{1.2}$$

Мощность действующей на точку силы

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} , \tag{1.3}$$

тогда получим уравнение

$$\dot{T} = N \text{ или } m\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} , \tag{1.4}$$

которое назовем ***уравнением мощности материальной точки***.

Заменим в уравнении (1.4) вектор скорости $\vec{v}$ вектором возможной скорости $\{\vec{v}\}$, т.е.

$$m\vec{a} \cdot \{\vec{v}\} = \vec{F} \cdot \{\vec{v}\}. \tag{1.5}$$

Покажем допустимость замены вектора скорости на вектор возможной скорости и получим из (1.5) основной закон динамики. Перепишем (1.5) в виде

$$\left(m\vec{a} - \vec{F}\right) \cdot \{\vec{v}\} = 0 , \tag{1.6}$$

а учитывая, что

$$\{\vec{v}\} = \{v^j\} \vec{u}_j , \qquad \text{(см. (0.10))} \tag{1.7}$$

имеем

$$\left(m\vec{a} - \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_j \{v^j\} = 0 . \tag{1.8}$$

Считая, что все $\{v^j\}$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$, независимы, получим

$$\left(m\vec{a} - \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_j = 0, \quad (j = 0, 1, \ldots, s). \tag{1.9}$$

Доказательство. Так как все $\{v^j\}$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$, независимы, то можем допустить, что все они равны нулю, а $\{v^0\} \neq 0$. Тогда по уравнению (1.8) имеем, что

$\left(m\vec{a} - \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_0 = 0$.

После этого можем выбирать любую из $\{v^j\} \neq 0$, откуда вытекает (1.9).

Выражения (1.9) есть проекции вектора $\left(m\vec{a}-\vec{F}\right)$ на направления базисных векторов, помноженные на $\left|\vec{u}_j\right|$. Если все $\vec{u}_j$ при $j=1,2,\ldots,s$ независимы, то (1.9) дает нам s независимых уравнений для определения v^j, $(j=1,2,\ldots,s)$, вместе с $\left(m\vec{a}-\vec{F}\right)\cdot\vec{u}_0=0$, служащим для определения реакции нестационарной связи.

В дальнейшем уравнение (1 .8) будем учитывать в виде

$$m\vec{a}\cdot\vec{u}_j\left\{v^j\right\}=\vec{F}\cdot\vec{u}_j\left\{v^j\right\}. \tag{1.10}$$

Докажем, что $\vec{u}_j$, $(j=1,2,\ldots,s)$, независимы. Для этого допустим, что между ними существует связь

$$b^j\vec{u}_j=0, \quad j=1,2,\ldots,s, \tag{1.11}$$

где $b^j=b^j\left(q^0,q^1,\ldots,q^n\right)$. Тогда мы можем любой из $\vec{u}_j$ при условии $b^j\neq 0$ выразить через остальные и подставить его значение в (1.7), вследствие чего число параметров v^j уменьшится на единицу. Но это противоречит тому, что s есть минимальное число независимых параметров, равное числу степеней свободы системы. Поэтому следует, что все $\vec{u}_j$ независимы.

В уравнение (1.5) внесем обозначения

$$m\vec{a}\cdot\{\vec{v}\}=\{T\}; \qquad \vec{F}\cdot\{\vec{v}\}=\{N\}, \tag{1.12}$$

или в компактном виде

$$\left\{\dot{T}\right\}=\{N\}. \tag{1.13}$$

Назовем (1.5) или (1.13) ***уравнением возможной мощности материальной точки.***

Уравнение возможной мощности можно получить и из основного закона динамики. Для материальной точки всегда верно

$$m\vec{a}=\vec{F}, \tag{1.14}$$

следовательно, всегда верно и

$$m\vec{a}\cdot\vec{u}_j=\vec{F}\cdot\vec{u}_j, \tag{1.15}$$

а отсюда следует

$$m\vec{a}\cdot\vec{u}_j\left\{v^j\right\}=\vec{F}\cdot\vec{u}_j\left\{v^j\right\}. \tag{1.16}$$

Если теперь учтем равенства

$$\vec{v}=v^j\vec{u}_j \text{ и } \{\vec{v}\}=\left\{v^j\right\}\vec{u}_j, \tag{1.17}$$

то получим

$$m\vec{a}\cdot\{\vec{v}\}=\vec{F}\cdot\{\vec{v}\}. \tag{1.18}$$

Пример 1-1. Составить дифференциальные уравнения движения математического маятника с упругим стержнем. l_0 – нормальная длина стержня, c – жесткость стержня.

1. Выберем для скорости точки М независимые параметры и соответствующие им базисные векторы, т.е. выразим скорости точки в виде $\vec{v}=v^j\vec{u}_j$. Имеем (см. рис. 1.1)

$$\vec{v}=\dot{\varphi}l\vec{u}_\varphi+\dot{l}\vec{u}_l;\quad v^1=\dot{\varphi};\quad v^2=\dot{l}.$$

2. Выразим ускорение точки: $\vec{a}=\dot{\vec{v}}$,

$$\vec{a}=\ddot{\varphi}l\vec{u}_\varphi+\dot{\varphi}\dot{l}\vec{u}_\varphi+\dot{\varphi}_l l\dot{\vec{u}}_\varphi+\ddot{l}\vec{u}_l+\dot{l}\dot{\vec{u}}_l,$$

учтем, что $\dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}\vec{u}_l$; $\dot{\vec{u}}_l=\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$, получим

$$\vec{a}=\left(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l}\right)\vec{u}_\varphi+\left(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2\right)\vec{u}_l.$$

3. Образуем возможную скорость. Это делается механически путем прибавления фигурных скобок к выражению скорости:

$$\{\vec{v}\}=l\{\dot{\varphi}\}\vec{u}_\varphi+\vec{u}_l\{\dot{l}\}.$$

4. Определим действие на точку силы

$$\vec{F}=mg\vec{i}-c(l-l_0)\vec{u}_l,\qquad \text{(рис. 1.1).}$$

5. Запишем уравнение возможной мощности в виде

$$m\vec{a}\cdot\{\vec{v}\}=\vec{F}\cdot\{\vec{v}\},$$

получим

$$m\left(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l}\right)l\{\dot{\varphi}\}+m\left(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2\right)\{\dot{l}\}=$$
$$=-mgl\sin\varphi\{\dot{\varphi}\}+\left[mg\cos\varphi-c(l-l_0)\right]\{\dot{l}\}.$$

6. Пользуясь независимостью $\{v^j\}$, можно предположить, что $\{\dot{\varphi}\}\neq 0$, а $\{\dot{l}\}=0$, получим

$$m\left(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l}\right)l=-mgl\sin\varphi.\qquad(1.1.1)$$

Повторим это рассуждение в случае, если $\{\dot{\varphi}\}=0$, а $\{\dot{l}\}\neq 0$, получим

$$m\left(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2\right)=mg\cos\varphi-c(l-l_0).\qquad(1.1.2)$$

Окончательно получим систему уравнений движения математического маятника с упругим стержнем

$$\begin{cases}\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l}+g\sin\varphi=0;\\ m\ddot{l}-m\dot{\varphi}^2-mg\cos\varphi+c(l-l_0)=0.\end{cases}$$

Такова схема решения задач с помощью уравнения возможной мощности.

Пример 1-2. Невесомый круговой конус с углом 2α при вершине может свободно двигаться вдоль своей вертикальной оси. По поверхности конуса свободно движется материальная точка М с массой m. Конус подвешен к пружине с жесткостью c. Найти дифференциальные уравнения движения материальной точки.

По схеме решения задач, подробно рассмотренной в предыдущей задаче, имеем:

1. $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$;

2. $\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + r\sin\alpha\,\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + r\sin\alpha\,\dot{\varphi}\,\dot{\vec{u}}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$;

$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{u}_r = \dot{\varphi}\sin\alpha\,\vec{u}_\varphi$; $\qquad \dot{\vec{u}}_\varphi = \dot{\varphi}\vec{u}$;

$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \left(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\alpha + r\ddot{\varphi}\sin\alpha\right)\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}^2\sin\alpha\,\vec{u} + \ddot{z}\vec{k}$;

3. $\{\vec{v}\} = \{\dot{r}\}\vec{u}_r + \{\dot{\varphi}\}r\sin\alpha\,\vec{u}_\varphi + \{\dot{z}\}\vec{k}$, где $\{\dot{r}\}$, $\{\dot{\varphi}\}$ и $\{\dot{z}\}$ независимы.

Изменим несколько схему решения, воспользовавшись уравнениями (1.12) и (1.13).

$$\{\dot{T}\} = m\vec{a}\cdot\{\vec{v}\} = m\Big[\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + \ddot{z}\cos\alpha\right)\{\dot{r}\} + $$
$$+ r\sin^2\alpha\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\{\dot{\varphi}\} + \left(\ddot{r}\cos\alpha + \ddot{z}\right)\{\dot{z}\}\Big],$$

здесь использованы следующие зависимости: $\vec{k}\cdot\vec{u}_r = \cos\alpha$; $\vec{k}\cdot\vec{u}_\varphi = \vec{k}\cdot\vec{u} = 0$; $\vec{u}\cdot\vec{u}_r = -\sin\alpha$; $\vec{u}\cdot\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r\cdot\vec{u}_\varphi = 0$.

Возможная мощность силы веса и силы упругости пружины $\vec{F}\cdot\{\vec{v}\} = \{N\} = -mg\cos\alpha\{\dot{r}\} - mg\{\dot{z}\} - cz\{\dot{z}\}$.

Окончательно получим уравнения движения материальной точки:

$$\begin{cases} 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0; \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha + \ddot{z}\cos\alpha = -g\cos\alpha; \\ m\ddot{r}\cos\alpha + m\ddot{z} = -mg - cz. \end{cases}$$

Здесь из двух действующих сил учитывается вес материальной точки, который приложен к этой точке, а другая сила – жесткость пружины – непосредственно к этой точке не приложена, и точка приложения последней имеет совсем другую скорость (не $\vec{v}$, а $\dot{z}\vec{k}$).

2. Уравнение возможной мощности для механической системы.

Аналогично выводу для материальной точки, для материальной системы имеем:

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i;$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i; \quad N = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i;$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i\,. \qquad (2.1)$$

(2.1) – уравнение мощности механической системы, а равенство

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\{\vec{v}_i\}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\{\vec{v}_i\} \qquad (2.2)$$

называется ***уравнением возможной мощности системы***, состоящей из N материальных точек.

По (0.10) $\{\vec{v}_i\}=\{v^j\}\vec{u}_{ij}$, что дает уравнение возможной мощности в развернутом виде:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_{ij}\{v^j\}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{u}_{ij}\{v^j\}. \qquad (2.3)$$

Это равенство остается справедливым как в случае независимых, так и в случае зависимых возможных параметров $\{v^j\}$. Только в случае независимости всех $\{v^j\}$ (за исключением v^0) уравнения (2.3) можно выписать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_{ij}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{u}_{ij}\,;\ (j=1,2,\ldots,s). \qquad (2.4)$$

В случае идеальных связей уравнение для $j=0$ можно отбросить, если не понадобится вычисление реакции нестационарной связи.

Схема решения задач для механической системы остается такая же, как и для задач на движение материальной точки.

Перейдем к рассмотрению некоторых примеров.

Пример 2-1 [4]. Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна массой m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массой m_2, соединенного с ползуном стержнем АВ длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси А. Массой стержня пренебречь. (См. также [1]).

1. Выбираем скорости – независимые параметры и соответствующие им базисные векторы

$\vec{v}_1=\dot{y}\vec{j}$; $\vec{v}_2=\dot{y}\vec{j}+l\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$.

2. Вычисляем ускорения точек

$\vec{a}_1=\ddot{y}\vec{j}$; $\vec{a}_2=\ddot{y}\vec{j}+l\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi+l\dot{\varphi}\dot{\vec{u}}_\varphi$;

здесь $\dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}\vec{u}_l$; $\vec{u}_\varphi\cdot\vec{u}_l=0$; $\vec{j}\cdot\vec{u}_\varphi=\cos\varphi$; $\vec{j}\cdot\vec{u}_l=\sin\varphi$; $\vec{j}\cdot\dot{\vec{u}}_\varphi=-\dot{\varphi}\sin\varphi$; $\vec{i}\cdot\vec{u}_l=\cos\varphi$; $\vec{i}\cdot\vec{u}_\varphi=-\sin\varphi$.

3. Записываем возможные скорости

$\{\vec{v}_1\}=\{\dot{y}\}\vec{j}$; $\{\vec{v}_2\}=\{\dot{y}\}\vec{j}+l\{\dot{\varphi}\}\vec{u}_\varphi$.

4. На систему действуют внешние силы $\vec{P}_1 = P_1\vec{i} = m_1 g\vec{i}$; $\vec{P}_2 = P_2\vec{i} = m_2 g\vec{i}$ и $\vec{N} = -N\vec{i}$. Внутренние силы здесь не учитываются, так как они сокращаются по свойству их парности.
5. Выписываем уравнение возможной мощности

$m_1\vec{a}_1 \cdot \{\vec{v}_1\} + m_2\vec{a}_2 \cdot \{\vec{v}_2\} = \vec{P}_1 \cdot \{\vec{v}_1\} + \vec{N}\{\vec{v}_1\} + \vec{P}_2 \cdot \{\vec{v}_2\}.$

6. Подставим вычисленные значения возможных скоростей и ускорений и перегруппируем члены.

Мощности сил P_1 и N равны нулю.

$$m_1\ddot{y}\,\{\dot{y}\} + m_2\left(\ddot{y}\vec{j} + l\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi - l\dot{\varphi}^2\vec{u}_l\right)\cdot\left(\{\dot{y}\}\vec{j} + \{\dot{\varphi}\}l\,\vec{u}_\varphi\right) = m_2 g l\,\{\dot{\varphi}\}\vec{u}_\varphi \cdot \vec{i};$$

$$\left[(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\right]\{\dot{y}\} +$$
$$+\left[m_2\ddot{y}\cos\varphi + m_2 l\ddot{\varphi}\right]l\,\{\dot{\varphi}\} = -m_2 g\,l\sin\varphi\,\{\dot{\varphi}\}.$$

7. Пользуясь независимостью параметров в фигурных скобках $\{v^j\}$, дадим им значения: $\{v^1\} \neq 0$; $\{v^2\} = 0$, затем $\{v^1\} = 0$; $\{v^2\} \neq 0$, и получим систему уравнений

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = 0; \\ \ddot{y}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

3. Другой вид уравнения возможной мощности.

Возьмем частную производную от кинетической энергии для механической системы по v^j

$$\frac{\partial T}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \vec{u}_{ij} \qquad (3.1)$$

и берем производную по времени

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{ij}. \qquad (3.2)$$

Из (3.2) получаем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{ij}. \qquad (3.3)$$

Выражение (2.3) можем теперь переписать так:

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v^j} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{ij}\right]\{v^j\} = Q_j\{v^j\}, \qquad (3.4)$$

где

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij} \qquad (3.5)$$

является обобщенной силой.

Введем обозначения

$$E_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij}; \quad \{\dot{T}\} = E_j \{v^j\} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} \{v^j\};$$
$$\{N\} = Q\{v^j\} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij} \{v^j\}. \quad (3.6)$$

Тогда уравнение возможной мощности получит следующий вид:

$$E_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\}, \quad (3.7)$$

а уравнения движения будут

$$E_j = Q_j. \quad (3.8)$$

Рассмотрим некоторые приемы, позволяющие упрощать решение задач.

Допустим, что для решения задачи мы выбрали некоторое число параметров $v^{k'}$, которые назовем переходными параметрами скорости, причем безразлично, обобщенные они или квазискорости, зависимые или независимые. Выразим через них скорость i-ой точки

$$\vec{v}_i = v^{k'} \vec{u}_{ik'} \quad (3.9)$$

и вычислим

$$\{\dot{T}\} = E_{k'} \{v^{k'}\}. \quad (3.10)$$

Выбираем теперь новые параметры, через которые прежние параметры выражаются линейно

$$v^{k'} = a_j^{k'} \{v^j\}, \quad (3.11)$$

где $a_j^{k'} = a_j^{k'}\left(q^0, q^1, \ldots, q^n\right)$.

Пусть

$$\{v^{k'}\} = a_j^{k'} \{v^j\} \quad (3.12)$$

и

$$\dot{v}^{k'} = \dot{a}_j^{k'} v^j + a_j^{k'} \dot{v}^j. \quad (3.13)$$

Подставив (3.11) – (3.13) в (3.10), получим выражение вида

$$E_j \{v^j\}, \quad (3.14)$$

и будет справедливо равенство

$$\{\dot{T}\} = E_j \{v^j\}. \quad (3.15)$$

Следовательно, равенство $\{\dot{T}\} = E_{k'} \{v^{k'}\}$ есть инвариант в данной системе координат и можно поставить знак равенства

$$E_{k'} \{v^{k'}\} = E_j \{v^j\}. \quad (3.16)$$

Пример 3-1 [3]. Двухколесный скат состоит из трех частей: 1) центральное тело, C_1 – центр масс, $AC_1 = r$, масса M, силы действуют, как показано на чертеже; 2) левое колесо, центр масс C, $AC = l$, масса m; колесо центрально-симметричное, моменты инерции J_y и J_{z_1}; 3) правое колесо такое же, как левое, $AD = l$. Радиусы колес a. Составить уравнения движения.

1. Полагая $y_{C_1} = 0$ и $x_{C_1} = r$, имеем $\vec{v}_i = v\vec{i} + \omega\vec{k}\times\vec{\rho}_i$; $\{\vec{v}_i\} = \{v\}\vec{i} + \{\omega\}\vec{k}\times\vec{\rho}_i$, учитывая, что $\dot{\vec{i}} = \omega\vec{j}$; $\vec{k}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i) = = (\vec{k}\cdot\vec{\rho}_i)\,\omega\vec{k} - \omega\vec{\rho}_i$, получим

$$\vec{a}_i = \dot{v}\vec{i} + v\omega\vec{j} + \dot{\omega}\vec{k}\times\vec{\rho}_i + \omega^2\left[z_i\vec{k} - \vec{\rho}_i\right].$$

Откуда

$$\{\dot{T}_1\} = \left(M\dot{v} - Mr\omega^2\right)\{v\} + \left(J_z\dot{\omega} + Mrv\omega\right)\{\omega\}.$$

2. Левое колесо. Скорость центра

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times l\vec{j} = v\vec{i} - l\omega\vec{i} = (v - l\omega)\vec{i};\quad \vec{v}_A = v\vec{i};\quad \vec{\omega} = \omega\vec{k};$$

вектор угловой скорости колеса C:

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega} = \omega_1\vec{j} + \omega\vec{k};\quad \omega_1 = \frac{v_C}{a} = \frac{v - l\omega}{a};$$

$$\dot{\vec{\omega}}_C = \frac{\dot{v} - l\dot{\omega}}{a}\vec{j} - \frac{v - l\omega}{a}\omega\vec{i} + \dot{\omega}\vec{k};\quad \dot{\vec{j}} = -\omega\vec{i};$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}_C\times\vec{C}_i;\quad \{\vec{v}_i\} = \{\vec{v}_C\} + \{\vec{\omega}_C\}\times\vec{C}_i;$$

$$\vec{a}_C = (\dot{v} - l\dot{\omega})\vec{i} + (v - l\omega)\,\omega\vec{j};$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}}_C\times\vec{C}_i + \vec{\omega}_C\times\left(\vec{\omega}_C\times\vec{C}_i\right);$$

$$\{\vec{v}_C\} = \{v\}\vec{i} - \{\omega\}l\vec{i};\quad \{\vec{\omega}_C\} = \{v\}\frac{1}{a}\vec{j} + \{\omega\}\left(\vec{k} - \frac{1}{a}\vec{j}\right).$$

$$\{\dot{T}_2\} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\{\vec{v}_i\} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\{\vec{v}_C\} + \{\vec{\omega}_C\}\cdot\sum_{i=1}^{N}\vec{C}_i\times m_i\vec{a}_i =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot\vec{i} + \frac{1}{a}\vec{j}\cdot\sum_{i=1}^{N}\vec{C}_i\times m_i\vec{a}_i\right]\{v\} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i\cdot l\vec{i}\,\{\omega\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{C}_i\times m_i\vec{a}_i\right)\cdot\left(\vec{k} - \frac{l}{a}\vec{j}\right)\{\omega\}.$$

После простых преобразований получим

$$\{\dot{T}_2\} = \left[m(\dot{v} - l\dot{\omega}) + \frac{1}{a}J_y\frac{\dot{v} - l\dot{\omega}}{a}\right]\{v\} +$$

$$+ \left[-lm(\dot{v} - l\dot{\omega}) + J_{z_1}\dot{\omega} - \frac{l}{a}J_y\frac{\dot{v} - l\dot{\omega}}{a}\right]\{\omega\};\qquad (3.1.1)$$

а $\{\dot{T}_3\}$ получается из $\{\dot{T}_2\}$ заменой l на $-l$ и их сумма

$$\{\dot{T}_2\}+\{\dot{T}_3\}=\left[2m\dot{v}+\frac{2J_y\dot{v}}{a^2}\right]\{v\}+\left[2l^2m\dot{\omega}+2J_{z_1}\dot{\omega}+2\frac{l^2}{a^2}J_y\dot{\omega}\right]\{\omega\}.$$

Учтя $\{\dot{T}_1\}$, получим

$$\{\dot{T}\}=\left[\left(M+2m+2\frac{2J_y}{a^2}\right)\dot{v}-Mr\omega^2\right]\{v\}+$$

$$+\left[\left(J_z+2J_{z_1}+2l^2m+2\frac{l^2}{a^2}J_y\right)\dot{\omega}+Mrv\omega\right]\{\omega\}.$$

Возможная мощность

$$\{N\}=\vec{F}\cdot\{\vec{v}_A\}+M_z\vec{k}\cdot\{\vec{\omega}\}=F\{v\}+M_z\{\omega\}.$$

В результате, получим дифференциальные уравнения движения двухколесного ската:

$$\begin{cases}\left(M+2m+2\dfrac{J_y}{a^2}\right)\dot{v}-Mr\omega^2=F;\\ \left(J_z+2J_{z_1}+2l^2m+2\dfrac{l^2}{a^2}J_y\right)\dot{\omega}+Mrv\omega=M_z.\end{cases}$$

Вычисление $\{\dot{T}_2\}$ можно упростить, если пользоваться переменной параметров скорости. Возьмем переходными параметрами v_C, ω_1 и ω. Тогда

$$\vec{v}_i=v_C\vec{i}+\omega_C\times\vec{C}_i=v_C\vec{i}+\left(\omega_1\vec{j}+\omega\vec{k}\right)\times\vec{C}_i;$$

$$\vec{a}_i=\dot{v}_C\vec{i}+v_C\omega\vec{j}+\dot{\vec{\omega}}_C\times\vec{C}_i+\vec{\omega}_C\times\left(\vec{\omega}_C\times\vec{C}_i\right);$$

$$\{\vec{v}_i\}=\{v_C\}\vec{i}+\left(\{\omega_1\}\vec{j}+\{\omega\}\vec{k}\right)\times\vec{C}_i.$$

$$\{\dot{T}_2\}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\{\vec{v}_i\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\dot{v}_C\vec{i}+v_C\omega\vec{j}+\dot{\vec{\omega}}_C\times\vec{C}_i+\left(\vec{\omega}_C\cdot\vec{C}_i\right)\vec{\omega}_C-\omega_C^2\vec{C}_i\right]\cdot\vec{i}\{v_C\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\left[m_i\vec{C}_i\times\left(\dot{v}_C\vec{i}+v_C\omega\vec{j}+\dot{\vec{\omega}}_C\times\vec{C}_i+\left(\vec{\omega}_C\cdot\vec{C}_i\right)\vec{\omega}_C\right)\right]\cdot\left[\{\omega_1\}\vec{j}+\{\omega\}\vec{k}\right].$$

В этом равенстве многие члены отпадают вследствие того, что $\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{C}_i=0$, и после несложных преобразований получим

$$\{\dot{T}_2\}=m\dot{v}_C\{v_C\}+J_y\dot{\omega}_1\{\omega_1\}+J_{z_1}\dot{\omega}\{\omega\}. \qquad (3.1.2)$$

Но

$$\dot{v}_C=\dot{v}-l\dot{\omega};\ \{v_C\}=\{v\}-l\{\omega\};\ \dot{\omega}_1=\frac{\dot{v}-l\dot{\omega}}{a};\ \{\omega_1\}=\frac{1}{a}\left[\{v\}-l\{\omega\}\right].$$

Подставив полученные выражения в равенство (3.1.2) и собирая члены с $\{v\}$ и $\{\omega\}$, получим выражение $\{\dot{T}_2\}$, совпадающее с формулой (3.1.1).

Еще проще вычисление $\{\dot{T}_2\}$ проводится с помощью равенства (3.3).

$$T_2 = \frac{1}{2}\left[mv_C^2 + J_y\omega_1^2 + J_{z_1}\omega^2\right].$$

Как показывают вычисления, для всех переходных параметров скорости $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{ik} = 0$ и (3.3) вместе с (3.6) дает сразу (3.1.1).

С помощью формул для твердого тела [6] решение задачи проводится значительно проще. Однако, в настоящем реферате мы не касаемся вывода уравнения возможной мощности для твердого тела.

4. Уравнения Лагранжа второго рода.

Уравнения Лагранжа второго рода есть дифференциальные уравнения движения для голономных механических систем с использованием обобщенных координат. Однако, если записать соответствующее этим уравнениям уравнение возможной мощности, то их можно применить и для решения неголономных систем с использованием обобщенных координат в случае, когда неголономные уравнения связей линейны относительно обобщенных скоростей. В этом случае можно или исключить число l возможных скоростей $\{\dot{q}^{s+1}\},\dots\{\dot{q}^{n}\}$, или воспользоваться множителями Лагранжа.

Сделаем преобразования в уравнении возможной мощности, исходя из (3.4), которое теперь можем переписать в виде

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \dot{\vec{u}}_{ij}\right]\{\dot{q}^j\} = Q_j\{\dot{q}^j\}, \quad (4.1)$$

где $\vec{v}_i = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j$, или $\vec{v}_i = \vec{u}_{ij}\cdot\dot{q}^j$, $\dot{\vec{u}}_{ij} = \dfrac{\partial \vec{u}_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k$, так как $\vec{u}_{ij}$ есть функция обобщенных координат.

Учитывая, что $\dfrac{\partial \vec{u}_{ij}}{\partial q^k} = \dfrac{\partial \vec{u}_{ik}}{\partial q^j}$, имеем

$$\dot{\vec{u}}_{ij} = \frac{\partial \vec{u}_{ik}}{\partial q^j}\dot{q}^k = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}, \quad (4.2)$$

так как $\vec{v}_i = \dot{q}^k\vec{u}_{ik}$.

Подставляя (4.2) в (4.1), имеем

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial T}{\partial q^j}, \quad (4.3)$$

и (4.1) получит вид

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial T}{\partial q^j}\right]\left\{\dot{q}^j\right\}=Q_j\left\{\dot{q}^j\right\}, \quad (4.4)$$

откуда в случае независимых $\left\{\dot{q}^j\right\}$ получаются уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial T}{\partial q^j}=Q_j. \qquad (4.5)$$

Пример 4-1 [4]. Однородный диск радиусом R и массой M вращается относительно своей горизонтальной оси O. К диску на нити AB длиной l подвешена материальная точка массой m. Составить уравнения движения.

Выбираем за обобщенные координаты углы φ и ψ. Тогда

$$T=\frac{MR^2}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{mv_B^2}{2}.$$

Но $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{BA}=\dot{\varphi}R\vec{u}_\varphi+\dot{\psi}l\vec{v}_\psi$ и, следовательно,

$$v_B^2=\dot{\varphi}^2R^2+\dot{\psi}^2l^2+2\dot{\varphi}\dot{\psi}Rl\cos(\varphi-\psi),$$

так как $\vec{u}_\varphi\cdot\vec{u}_\psi=\cos(\varphi-\psi)$.

Составим следующие производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}+mR^2\dot{\varphi}+mRl\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\varphi}+mRl\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)-mRl\dot{\psi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-mRl\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=ml^2\dot{\psi}+mRl\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi);\quad \frac{\partial T}{\partial \psi}=mRl\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}=ml^2\ddot{\psi}+mRl\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)-mRl\dot{\varphi}(\dot{\varphi}-\dot{\psi})\sin(\varphi-\psi);$$

Возможная мощность системы при $\{\dot{\varphi}\}\neq 0$ и $\{\dot{\psi}\}=0$ имеет вид $\{N_\varphi\}=-mgR\sin\varphi\{\dot{\varphi}\}$, откуда обобщенная сила

$$Q_\varphi=-mgR\sin\varphi.$$

Аналогично при $\{\dot{\varphi}\}=0$ и $\{\dot{\psi}\}\neq 0$ имеем $\{N_\psi\}=-mgl\sin\psi\{\dot{\psi}\}$; и

$$Q_\psi=-mgl\sin\psi.$$

Уравнения Лагранжа дают следующие уравнения движения системы

$$\left(\frac{M}{2}+m\right)R\ddot{\varphi}+ml\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+ml\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)=-mg\sin\varphi;$$

$$R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)+l\ddot{\psi}-R\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)=-g\sin\psi.$$

5. Уравнения Аппеля [10].

В аналитической механике при составлении дифференциальных уравнений движения механической системы применяют уравнения Аппеля [7 – 10], вид которых не зависит от учета обобщенных скоростей или квазискоростей.

Выведем уравнения Аппеля для независимых параметров скорости, которые могут быть и обобщенными скоростями, и квазискоростями.

Учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \dot{v}^k} = \vec{u}_{ik}\,;\ \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \dot{v}^j} = \vec{u}_{ij}\,; \qquad (5.1)$$

так как выражения $\vec{u}_{ik}$, v^k и $\dot{\vec{u}}_{ik}$ не содержат $\dot{v}^k$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial \dot{v}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{v}^j}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i\,. \qquad (5.2)$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij}\,;\ Q_j = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij}$$

и обозначая

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = S\,, \qquad (5.3)$$

получим

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}^j} = Q_j; \quad \left(j = 1, 2, 3, \ldots, s\right), \qquad (5.4)$$

которые являются уравнениями Аппеля для голономной системы.

Выражение S в (5.3) называют энергией ускорения.

Выражение S можно вычислять не полностью, учитывая, что в равенстве $\vec{a}_i = \dot{v}_k\vec{u}_{ik} + v_k\dot{\vec{u}}_{ik}$ второе слагаемое в правой части не содержит множителя $\dot{v}_k$.

Если в выражении кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$ вместо скорости $\vec{v}_i$ воспользоваться ее производными любого порядка, то получаются функции

$$V^{l,r} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i^{(l)} \cdot \vec{v}_i^{(r)}; \quad \left(l = 0, 1, 2, \ldots; r = 0, 1, 2, \ldots\right),$$

(где $\vec{v}_i^{(l)} = \frac{d^{(l)}\vec{v}_i}{dt^l}$; $\vec{v}_i^{(r)} = \frac{d^{(r)}\vec{v}_i}{dt^r}$ – производные l-ого и r-ого порядка по времени от $\vec{v}_i$), которые можно называть аналогами кинетической энергии, имея в виду внешний вид записи. Действительно, при $l = r = 0$ функция $V^{l,r}$ соответствует кинетической энергии T. Очевидно, что при таком обозначении уравнения Аппеля (5.4) являются частным случаем более общих уравнений

$$\frac{\partial\left(AV^{1,r}\right)}{\partial v^{(r)j}}=Q_j;\quad \left(j=0,1,\ldots,s;r=1,2,\ldots\right), \tag{5.5}$$

где $A=1$, если $r=1$ и $A=2$ при $r>1$, а $V^{1,r}$ определяются как аналоги кинетической энергии

$$V^{1,r}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}^{(r)}. \tag{5.6}$$

Действительно, $\dfrac{\partial\vec{v}_i^{(r)}}{\partial v^{(r)j}}=\vec{u}_{ij}$, аналогично (5.1) и

$$\frac{\partial\left(2V^{1,r}\right)}{\partial v^{(r)j}}=\frac{\partial}{\partial v^{(r)j}}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i^{(r)}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i^{(r)}}{\partial v^{(r)j}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_{ij}.$$

6. Уравнения высших порядков.

В 1935 году Нильсен [2,3] опубликовал для голономных систем уравнения вида

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}^j}-2\frac{\partial T}{\partial q^j}=Q_j;\quad \left(j=1,2,\ldots,n\right), \tag{6.1}$$

содержащие наряду с кинетической энергией T ее первую производную по времени $\dot{T}$. С этого момента многие механики стали заниматься уравнениями высших порядков. К сегодняшнему дню известны многие виды уравнений высших порядков, например, уравнения Ценова второго рода для голономных систем [6]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ddot{T}}{\partial\ddot{q}^j}-3\frac{\partial T}{\partial q^j}\right)=Q_j;\quad \left(j=1,2,\ldots,n\right), \tag{6.2}$$

и уравнения наиболее общего вида [6]

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial T^{(h)}}{\partial q^{j(h)}}-\left(h+1\right)\frac{\partial T}{\partial q^j}\right)=Q_j;\quad \left(j=1,2,\ldots,n\right), \tag{6.3}$$

которые были получены Манжероном и Деленау.

Уравнения высших порядков находят применение в практике. Развитие техники, например, теории автоматического управления, требует учета зависимости не только между скоростями, но и ускорениями и даже еще более высокими производными [2].

Рассмотрим некоторые виды уравнений высших порядков, возникающих непосредственно при изучении уравнения возможной мощности.

Введем величины

$$V^{l,r}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i^{(l)}\cdot\vec{v}_i^{(r)}, \tag{6.4}$$

как это было сделано в предыдущем параграфе при выводе уравнения Аппеля. Наиболее практически важными являются случаи $l=0$ и $l=1$ показателя степени в формуле (6.4). Значения $l>1$ дают уравнения, не являющиеся дифференциальными уравнениями движения в обычном смысле. Показатель r может иметь все конечные значения $r=0,1,2,\ldots$. Рассмотрим случай $l=0$, т.е.

$$V^{0,r}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i^{(r)}, \qquad (6.5)$$

где

$$\vec{v}_i^{(r)}=\frac{d^r}{dt^r}\left(v^j\vec{u}_{ij}\right)=v^{j(r)}\vec{u}_{ij}+rv^{j(r-1)}\dot{\vec{u}}_{ij}+\ldots+v^j\vec{u}_{ij}^{(r)}. \qquad (6.6)$$

Без доказательства дадим окончательный вид уравнений с $V^{0,r}$:

$$A\left[(r+1)\frac{d}{dt}\frac{\partial V^{0,r}}{\partial v^{j(r)}}-\frac{\partial V^{0,r}}{\partial v^{j(r-1)}}+\frac{\partial V^{0,r}}{\partial v^{s(r)}}\gamma_{ik}^{s}v^k\right]=Q_j, \qquad (6.7)$$

которые являются обобщением уравнений Больцмана-Гамеля, и

$$A\left[\frac{r+1}{h}\frac{\partial V^{0,r(h)}}{\partial v^{j(h+r-1)}}-\frac{h+r-1}{h}\frac{\partial V^{0,r}}{\partial v^{j(r-1)}}+\frac{\partial V^{0,r}}{\partial v^{s(r)}}\gamma_{jk}^{s}v^k\right]=Q_j, \qquad (6.8)$$

где

$$A=\begin{cases}1, & r=0,\\ 2, & r=1,\\ \dfrac{2}{r+1}, & r=2,3,\ldots,\end{cases} \qquad (6.9)$$

γ_{jk}^{s} – коэффициенты объекта неголономности или трехиндексные символы Больцмана [6]

$$\gamma_{jk}^{s}\vec{u}_{is}=\frac{\partial\vec{u}_{ik}}{\partial\pi^j}-\frac{\partial\vec{u}_{ij}}{\partial\pi^k}, \qquad (6.10)$$

π^j – квазикоординаты (неголономные координаты).

Если в голономной системе в качестве параметров скорости выбраны обобщенные скорости $\dot{q}^j$, тогда все $\gamma_{jk}^{s}=0$ и (6.7) и (6.8) упрощаются:

$$A\left[(r+1)\frac{d}{dt}\frac{\partial V^{0,r}}{\partial q^{j(r+1)}}-\frac{\partial V^{0,r}}{\partial q^{j(r)}}\right]=Q_j, \qquad (6.11)$$

$$\frac{A}{h}\left[(r+1)\frac{\partial V^{0,r(h)}}{\partial q^{j(h+r)}}-(h+r-1)\frac{\partial V^{0,r}}{\partial q^{j(r)}}\right]=Q_j. \qquad (6.12)$$

Уравнения (6.11) представляют собой обобщение уравнений Лагранжа второго рода и при $r=0$ равны им. Уравнения (6.12) при $r=0$ дают уравнения Манжерона-Деленау (6.3).

Рассмотрим случай, когда $l=1$, т.е.

$$V^{1,r}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{v}_i^{(r)}, \qquad (6.13)$$

выбирая $r=2,3,\ldots$, так как при $r=1$ получим известные уравнения Аппеля (5.4).

Учитывая выражение (6.6), найдем из функции $2V^{1,r}$ частную производную

$$\frac{\partial 2V^{1,r}}{\partial v^{j(r)}}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_{ij}=E_j, \quad (j=0,1,\ldots,n;r=2,3,\ldots). \qquad (6.14)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения движения в виде

$$\frac{\partial 2V^{1,r}}{\partial v^{j(r)}}=Q_j; \quad (j=0,1,\ldots,n;r=2,3,\ldots), \qquad (6.15)$$

которые дают обобщение уравнений Аппеля. Уравнения (6.15) не изменяют своего вида, если в качестве скорости v^j использовать обобщенные скорости $\dot{q}^j$.

Составим теперь новые функции

$$W^{1,r}=V^{1,r}-\frac{1}{2}Q_\varphi v^{\varphi(r)}. \qquad (6.16)$$

Тогда вместо уравнений (6.15) получим уравнения

$$\frac{\partial 2W^{1,r}}{\partial v^{j(r)}}=0; \quad (r>1;j=0,1,\ldots,n). \qquad (6.17)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим составление дифференциальных уравнений движения маятника на упругой нити (см. пример 1-1).

$$\vec{v}=\dot{\varphi}l\vec{u}_\varphi+\dot{l}\vec{u}_l;\ v^1=\dot{\varphi};\ v^2=\dot{l};$$

$$\vec{a}=(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l})\vec{u}_\varphi+(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2)\vec{u}_l.$$

$$\vec{v}^{(r)}=\frac{d^r}{dt^r}(v^j\vec{u}_j)=l\varphi^{(r+1)}\vec{u}_\varphi+\vec{u}_l l^{(r+1)}+(\ldots),$$

где $(\ldots)$ не зависит от $\varphi^{(r+1)}$ и $l^{(r+1)}$. Следовательно

$$2V^{1,r}=m\vec{a}\cdot\vec{v}^{(r)}=m(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l})l\varphi^{(r+1)}+m(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2)l^{(r+1)}+(\ldots);$$

$$\frac{\partial(2V^{1,r})}{\partial\varphi^{(r+1)}}=m(\ddot{\varphi}l+2\dot{\varphi}\dot{l})l;$$

$$\frac{\partial(2V^{1,r})}{\partial l^{(r+1)}}=m(\ddot{l}-\dot{\varphi}^2).$$

Последние два выражения дают левые части уравнений движения маятника (1.1.1) и (1.1.2).

На вопрос, зачем применять такие уравнения к исследованию движения обычной механической системы, можно частично ответить, что здесь мы можем учесть уравнения связей

$$f_\alpha\left(q^k, v^j, \dot{v}^j, \ldots, v^{j(h_\alpha)}\right) = 0; \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, l; l < s),$$

где h_α – наивысший порядок производной по времени от v^j, путем непосредственной подстановки их (без помощи неопределенных множителей Лагранжа) в уравнения (6.15) или (6.16).

7. Место уравнения возможной мощности среди приемов динамики.

Уравнение возможной мощности является геометрическим способом решения задач динамики. При составлении дифференциальных уравнений движения выбирают параметры скорости и базисные векторы, в процессе составления уравнений исключаются возможные скорости и остаются те кинематические параметры, которые содержатся в ускорениях точек системы и базисные векторы, то есть характеристики геометрии пространства.

Уравнение возможной мощности можно сравнить с общим уравнением динамики. В развернутом виде первое выглядит так:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} \left\{v^j\right\} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij} \left\{v^j\right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, s. \qquad (7.1)$$

Пользуясь теми же обозначениями, запишем общее уравнение динамики

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} \, \delta q^j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij} \, \delta q^j; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.2)$$

где δq^j – вариации обобщенных координат, и виртуальное перемещение i-ой точки

$$\delta \vec{r}_i = \delta q^j \vec{u}_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (7.3)$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \qquad (7.4)$$

Уравнение возможной мощности близко также по виду записи принципу Суслова-Журдена [7]

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \delta \vec{v}_i = 0 \qquad (7.5)$$

и принципу Гаусса [9]

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i\right) \cdot \delta \vec{a}_i = 0. \qquad (7.6)$$

Заметим, что символ $\left\{\vec{v}_i\right\}$ в уравнении возможной мощности и символ $\delta \vec{v}_i$ в принципе Суслова-Журдена выражают принципиально разные понятия. В уравнении возможной мощности используется понятие возможной скорости, т.е. возможные значения истинной скорости. Поэтому здесь отпадает необходимость в вариационных методах механики. Другими словами – уравнение возможной мощности использует более простые понятия, чем другие методы динамики.

При составлении уравнений движения с помощью уравнения возможной мощности исходят не из выбора координат, а из выбора параметров скорости и соответствующих им базисных векторов. Это дает возможность в случае линейных относительно скоростей неголономных уравнений связей всегда выбрать параметры скорости так, чтобы их число равнялось числу степеней свободы системы и таким образом позволяет избавиться от уравнений связей.

Из уравнения возможной мощности выводятся, как частные случаи, уравнения Лагранжа второго рода и уравнения Аппеля. Из них также можно вывести уравнения движения в квазикоординатах (уравнения Больмана-Гамеля), уравнения Гамильтона, уравнения Манжерона-Деленау и т.д.

В заключение отметим, что для тел и систем тел с неголономными связями данный метод во многих случаях является более эффективным по сравнению с существующими.

Литература.

1. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. Физматгиз, М., 1971, 264 стр.
2. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. Высшая школа, М., 1970, 270 стр.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. Госиздат, М.,1961, 824 стр.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Физматгиз, М., 1975, 447 стр.
5. Гольст Г.К., Рольвик Х.А., Сильде О.Г. Уравнение возможной мощности в теоретической механике. Ротапринт ТПИ, Таллинн, 1978, 98 стр.
6. Гольст Г.К., Рольвик Х.А., Сильде О.Г. Основные вопросы аналитической механики. Валгус, Таллинн, 1979, 168 стр.
7. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Гостехиздат, М., 1944, 655 стр.
8. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. ОНТИ, М., 1937, 500 стр.
9. Парс Л. Аналитическая динамика. Наука, М., 1971, 636 стр.
10. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2, Физматгиз, М., 1960, 487 стр.

Содержание.