ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА.
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

КИНЕМАТИКА

Предмет изучения *механики* – механическое движение, т.е. изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве.

Движение происходит в пространстве и во времени.

Существует *два вида движения*:

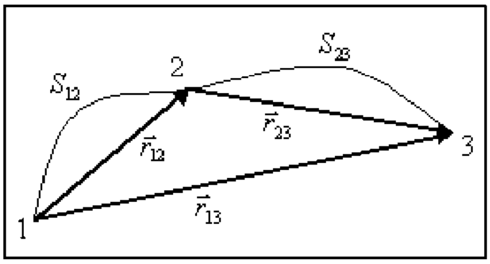
1. *поступательное* (любая прямая, жестко скрепленная с телом, при движении перемещается параллельно самой себе);
2. *вращательное* (любая прямая, жестко скрепленная с телом, при движении поворачивается на некоторый угол).

Для описания движения необходимо ввести *систему отсчета*, представляющую собой систему координат и систему отсчета времени.

Кинематика – раздел механики, изучающий способы описания механического движения независимо от вызывающих его причин.

1. Кинематика поступательного движения

Траектория – линия, которую описывает тело или материальная точка, при своем движении в пространстве. По виду траектории движение бывает прямолинейным или криволинейным. Частным случаем криволинейного движения есть движение по окружности.



Путь s – расстояние, отсчитанное вдоль траектории. Путь измеряется в метрах, выражается положительным числом и складывается арифметически. $[s] =$ м.

$$s_{13} = s_{12} + s_{23}.$$

Перемещение $\vec{r}$ – вектор, начало которого находится в начальной точке, а конец – в конечной точке движения. Как любой вектор, перемещение характеризуется численным значением (модулем) и направлением, складываются перемещения по правилам сложения векторов, т.е. геометрически. $[r] =$ м.

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23}.$$

Если материальная точка за равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt, проходит равные участки пути Δs, то движение называют равномерным.

Скорость в этом случае $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s}{t}$.

В случае неравномерного движения в рассмотрение вводится *средняя скорость* $\langle v \rangle = \dfrac{s}{t} = \dfrac{\text{путь}}{\text{время}}$.

Скорость в данный момент времени (*мгновенная скорость*):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v_{мгн}$$

Поскольку при описании движения необходимо учитывать не только численное значение скорости, но и ее направление, то под *скоростью* понимают векторную величину

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

$[v] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

Для модуля скорости:

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z = \dot{x} \cdot \vec{e}_x + \dot{y} \cdot \vec{e}_y + \dot{z} \cdot \vec{e}_z = v \cdot \vec{e}_v,$$

где v_x, v_y, v_z - составляющие скорости, а $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

Ускорение – векторная величина, характеризующая изменение скорости во времени..

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

$[a] = \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Учитывая, что $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_v$, рассмотрим три вида движения.

1. $v = \mathrm{const}; \vec{e}_v \neq \mathrm{const}$ (движение *прямолинейное неравномерное*)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot e_v) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_v = \dot{v} \cdot \vec{e}_v = \vec{a}_\tau .$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует изменение скорости по модулю.

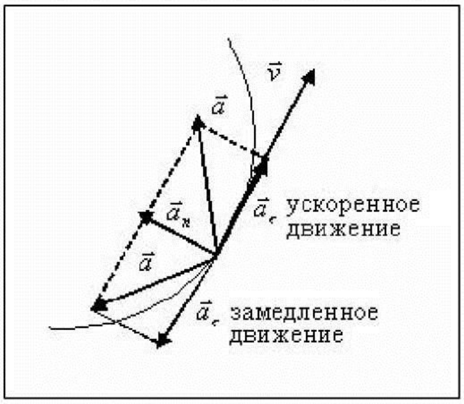
2. $v \neq \mathrm{const}$; $\vec{e}_v = \mathrm{const}$ (движение *криволинейное равномерное*)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{e}_v) = v \cdot \frac{d\vec{e}_v}{dt} = v \cdot \dot{\vec{e}}_v = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \vec{a}_n$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

3. $v \neq \mathrm{const}$; $\vec{e}_v \neq \mathrm{const}$ (движение *неравномерное криволинейное*)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v \cdot e_v) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_v + v \cdot \frac{d\vec{e}_v}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$



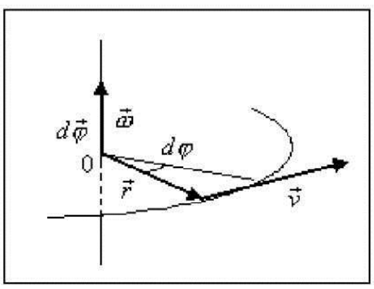
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Равноускоренное движение описывается формулами:

$$\begin{cases} s = v_0 t \pm \dfrac{at^2}{2} \\ v = v_0 \pm at \end{cases} .$$

2. Кинематика вращательного движения

Для равномерного прямолинейного движения скорость характеризует быстроту изменения перемещения. Для вращательного движения угловая скорость определяет быстроту изменения *углового перемещения* $\Delta\vec{\varphi}$. Угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ есть векторная величина, модуль которой равен углу поворота, направленный вдоль оси вращения так, чтобы из его конца поворот тела был виден происходящим против часовой стрелки.



Тогда *угловая скорость* $\vec{\omega} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}$

$[\varphi] =$ радиан, $[\omega] = \dfrac{\text{радиан}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

Направление вектора $\vec{\varphi}$ и $\vec{\omega}$ совпадают. Кроме того, направление $\vec{\omega}$ выбирается так, чтобы, если смотреть с вершины $\vec{\omega}$, то движение должно казаться происходящим против часовой стрелки, т.е. векторы линейной скорости $\vec{v}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и радиус вектор точки $\vec{r}$ должны образовывать правовинтовую систему.

Изменение угловой скорости характеризуется *угловым ускорением* $\vec{\varepsilon}$.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}},$$

$$[\vec{\varepsilon}] = \frac{\text{радиан}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}.$$

Для ускоренного движения направления векторов угловой скорости и углового ускорения совпадают, а для замедленного – противоположны.

Следует отметить, что векторы $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ являются *псевдовекторами*, т.к. их направления выбираются условно.

3. Связь между величинами, характеризующими поступательное и вращательное движение

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \cdot R}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega, \qquad \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right]$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R,$$

$$v = \omega \cdot R \qquad \Rightarrow \qquad \dot{v} = \dot{\omega} \cdot R = \varepsilon \cdot R = a_\tau, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right]$$

Часто вместо угловой скорости ω, которую иногда называют круговой (угловой, циклической) частотой, используют *частоту* n, связанную с круговой частотой соотношением $\omega = 2\pi n$.

$$[n] = \frac{\text{об}}{\text{с}} = \text{с}^{-1} = \text{Гц}.$$

В этом случае угол поворота φ обычно выражают в *количестве оборотов* N, при этом, $\varphi = 2\pi N$.

Равноускоренное движение по окружности описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\pi N = 2\pi n_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 2\pi n t = 2\pi n_0 t \pm \varepsilon t \end{cases}.$$

ЗАДАЧИ

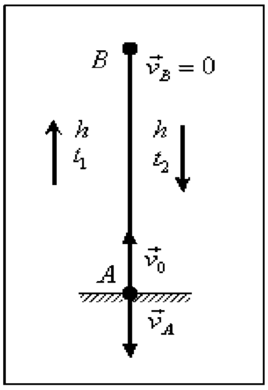
Задача 1

Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через $t = 3$ с. Найти высоту подъема тела и его начальную скорость.

Решение

Движение тела вверх является равнозамедленным с ускорением $-g$ и происходит в течение времени t_1, а движение вниз – равноускоренным с ускорением g и происходит в течение времени t_2. Уравнения, описывающие движение на участках АВ и ВА, образуют систему:

$$\begin{cases} h = v_0 t_1 - \dfrac{g t_1^2}{2}, \\ v_B = v_0 - g t_1, \\ h = \dfrac{g t_2}{2}, \\ v_A = g t_2, \\ t = t_1 + t_2. \end{cases}$$



Поскольку $v_B = 0$, то $v_0 = g t_1$. Подставив v_0 в первое уравнение системы, получим $h = \dfrac{g t_2^2}{2}$. Если сравнить это выражение с третьим уравнением системы, то можно сделать вывод о том, что время подъема равно времени спуска $t_1 = t_2 = \dfrac{t}{2} = 1,5$ с. Начальная скорость и скорость при приземлении равны друг другу и составляют $v_0 = v_A = g t_1 = 9,8 \cdot 1,5 = 14,7$ м/с.

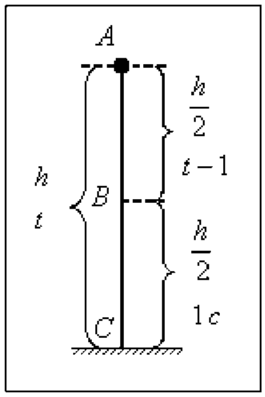
Высота подъема тела

$$h = \frac{g t_1^2}{2} = \frac{9,8 \cdot 1,5^2}{2} = 22,05 \text{ м}.$$

Задача 2

Свободно падающее тело в последнюю секунду движения прошло половину пути. Найти высоту, с которой оно брошено и время движения.

Решение.



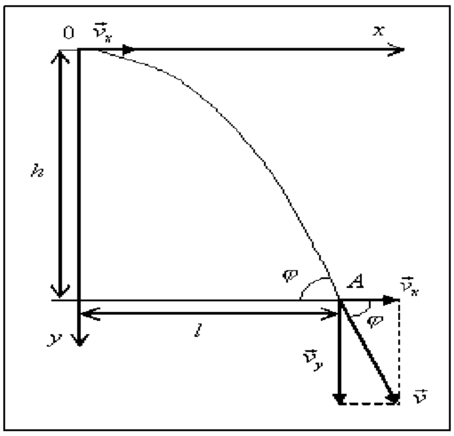
Зависимость пройденного пути от времени для свободно падающего тела $h=\frac{gt^2}{2}$. Поскольку участок ВС, составляющие половину всего пути, пройден за время, равное 1 с, то первая половина пути АВ пройдена за время $(t-1)$с. Тогда движение на участке ВС может быть описано как $\frac{h}{2}=\frac{g(t-1)^2}{2}$.

Решая систему $\begin{cases} h=\frac{gt^2}{2} \\ \frac{h}{2}=\frac{g(t-1)^2}{2} \end{cases}$ получим $t^2-4t+2=0$. Корни этого уравнения $t_1=3{,}41$с и $t_2=0{,}59$с. Второй корень не подходит, т.к. время движения, исходя из условия задачи, должно превышать одну секунду. Следовательно, тело падало в течение 3,41 с и прошло за это время путь $h=\frac{gt^2}{2}=\frac{9{,}8\cdot 3{,}41^2}{2}\approx 57$м.

Задача 3

С башни высотой 25 м горизонтально со скоростью $v_x=10$ м брошено тело. Найти: 1) время t падения тела, 2) на каком расстоянии l от основания башни оно упадет, 3) скорость v в конце падения, 4) угол, который составит траектория тела с землей в точке его приземления.

Решение



Движение тела является сложным. Оно участвует в равномерном движении по горизонтали и равноускоренном с ускорением g по вертикали. Поэтому участок АВ описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = v_x t \\ v_x = const \\ y = \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y = gt \end{cases}$$

Для точки А эти уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} l = v_x t \\ h = \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{9,8}} = 2,26\,\text{с}$$

Тогда $l = 10 \cdot 2,26 = 22,6$ м, а $v_y = 9,8 \cdot 2,26 = 22,15$ м/с.

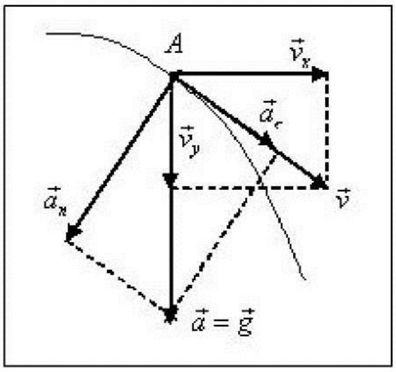
Поскольку $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$, то $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{100 + 490,5} = 24,3$м/с.

Угол, который траектория составляет с землей, равен углу φ в треугольнике скоростей в т. А, тангенс которого $\text{tg}\varphi = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{22,15}{10} = 2,215$, поэтому $\varphi = 68,7°$.

Задача 4

Для тела, брошенного с горизонтальной скоростью $v_x = 10$ м/с, через время $t = 2$ с после начала движения найти: нормальное, тангенциальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории в этой точке.

Решение



Вертикальная составляющая скорости $v_y = gt = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ м/с

Скорость в точке А:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y,\ v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{10^2 + 19,6^2} = 22\ \text{м/с}.$$

Векторы $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}$ образуют треугольник скоростей, а векторы $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a} = \vec{g}$ - треугольник ускорений. Как видно из рисунка, эти треугольники подобны, а это означает, что их стороны пропорциональны: $\dfrac{a}{v} = \dfrac{a_\tau}{v_y} = \dfrac{a_n}{v_x}$.

Отсюда, $$a_\tau = a\frac{v_y}{v} = g\frac{v_y}{v} = 9{,}8\cdot\frac{19{,}6}{22} = 8{,}73\text{м/с}^2,$$

$$a_n = a\frac{v_x}{v} = g\frac{v_x}{v} = 9{,}8\cdot\frac{10}{22} = 4{,}45\text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$, поэтому радиус кривизны траектории

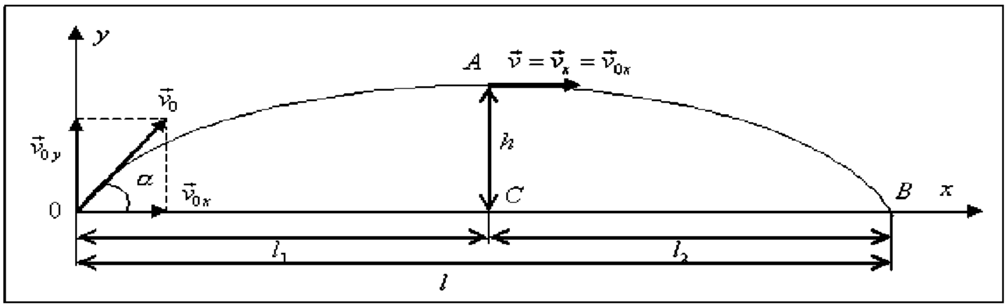
$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{22^2}{4{,}45} = 108{,}8\text{м}.$$

Задача 5

Тело брошено со скоростью $v_0 = 10м/с^2$ под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. На какую высоту тело поднимется. На каком расстоянии от места бросания оно упадет на землю? Какое время он будет в движении?

Решение

Горизонтальная и вертикальная составляющие начальной скорости



$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Движение на участке ОА можно разложить на два простых движения: равномерное по горизонтали и равнозамедленное по вертикали:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t_1 \\ v_x = v_{0x} \\ y = v_{0y}t - \dfrac{gt_1^2}{2} \\ v_y = v_{0y} - gt_1 \end{cases} \quad \text{В точке А} \quad \begin{cases} l_1 = v_{0x}t_1 \\ h = v_{0y}t - \dfrac{gt_1^2}{2} \\ 0 = v_{0y} - gt_1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Тогда $h = \dfrac{gt_1^2}{2} = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ и $l_1 = \dfrac{v_{0x} v_y}{g} = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g}$.

Если тело участвует одновременно в нескольких движениях, то в каждом из них оно участвует независимо от другого, следовательно, время движения на участке AB определяется временем движения вниз - t_2. На основании вывода, сделанного в задаче 4, время движения вверх равно времени движения вниз, а, значит, $t_2 = t_1 = \dfrac{v_0 \sin \alpha}{g} = \dfrac{10 \cdot \sin 30°}{9{,}8} = 0{,}51\,\text{с} \quad \Rightarrow \quad t = 2t_1 = 1{,}02\,\text{с}$.

При равномерном движении по горизонтали за равные промежутки времени тело проходит равные участки пути, следовательно,

$$l_1 = l_2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{2g} = \frac{10^2 \sin 60°}{2 \cdot 9{,}8} = 4{,}42\,\text{м}.$$

Дальность полета $l = 2l_1 = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = 8{,}84\,\text{м}$.

Высота подъема тела $h = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \dfrac{10^2 \sin^2 30°}{2 \cdot 9{,}8} = 1{,}28\,\text{м}$.

Задача 6

Колесо вращается равноускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Определить, какой угловой скорости достигнет тело после $t = 3$ с своего вращения? Сколько оборотов N оно при этом совершит?

Решение

Если тело вращается равноускоренно, то его движение описывает следующая система уравнений $\begin{cases} \varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t \end{cases}$

В начальный момент тело покоилось, значит, $\omega_0 = 0$. Тогда $\begin{cases} \varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega = \varepsilon t \end{cases}$.

Следовательно, $\omega = \varepsilon t = 3 \cdot 3 = 9$ рад/с.

Количество оборотов $N=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{\varepsilon t^2}{4\pi}=\frac{3\cdot 3^2}{4\pi}=2{,}15$ оборота.

Задача 7

Вентилятор вращался с частотой $n_0=900$ об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки $N=75$ об. Какое время t прошло с момента выключения до остановки вентилятора? С каким угловым ускорением ε он двигался?

Решение

Равнозамедленное движение вентилятора описывается следующей системой уравнений $\begin{cases} 2\pi N=2\pi n_0 t-\frac{\varepsilon t^2}{2} \\ 2\pi n=2\pi n_0-\varepsilon t \end{cases}$

Поскольку вентилятор остановился, то его конечная частота $n=0$. Тогда выразим $t=\frac{2\pi n_0}{\varepsilon}$ из второго уравнения и, подставив его в первое уравнение, а также учитывая, что $n_0=900$ об/мин $=15$ об/с, получим

$$\varepsilon=\frac{\pi n_0^2}{N}=\frac{\pi\cdot 15^2}{75}=9{,}42\text{ рад/с}^2.$$

Время движения равно $t=\frac{2\pi n_0}{\varepsilon}=\frac{2\pi\cdot 15}{9{,}42}=10$ с.

Задача 8

Точка вращается по окружности радиусом $R=20$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau=5$ см/с^2. Через какое время после начала вращения нормальное ускорение точки будет вдвое больше тангенциального?

Решение

Угловая скорость точки при равноускоренном движении может быть найдена из соотношения $\omega=\omega_0+\varepsilon t$. Так как $\omega_0=0$, то $\omega=\varepsilon t$. Нормальное ускорение $a_n=\omega^2 R=(\varepsilon t)^2 R$. Тангенциальное ускорение $a_\tau=\varepsilon R$. По условию задачи $a_n=2a_\tau$, тогда $(\varepsilon t)^2 R=2\varepsilon R$, следовательно, $\varepsilon t^2=2$ и $t=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{2R}{a_\tau}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}2}{0{,}05}}=2{,}83$ с.

Задача 9

Точка движется по окружности радиусом $R = 2$ *см. Зависимость пути от времени дается уравнением* $s(t) = Ct^3$, *где* C – 0,1 *см/с*^{3}. *Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки в тот момент, когда линейная скорость точки* $v = 0{,}3$ *м/с.*

Решение

Зависимость пути от времени позволяет найти зависимости от времени скорости и тангенциального ускорения.

$$v = \frac{ds}{dt} = 3Ct^2, \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt} = 6Ct.$$

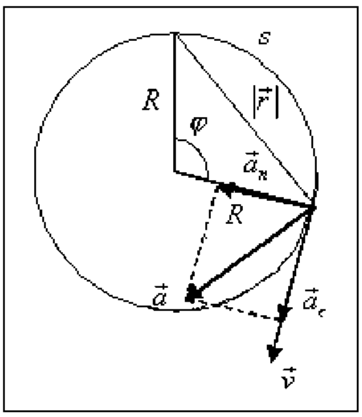
Отсюда, $$t = \sqrt{\frac{v}{3C}} = \sqrt{\frac{0{,}3}{3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-2}}} = 10\ \text{с}.$$

Тогда тангенциальное ускорение $a_\tau = 6 \cdot Ct = 6 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 10 = 0{,}06\ \text{м/с}^2$.

Нормальное ускорение $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{0{,}3^2}{2 \cdot 10^{-2}} = 4{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Задача 10

Точка движется по окружности радиусом R – 4 *м. Начальная скорость точки равна* 3 *м/с, тангенциальное ускорение* a_τ – *1 м/с*^{2}. *Для момента времени* t – 2 *с определить: а) длину пути, пройденного точкой, б) модуль перемещения; в) линейную и угловую скорости; г) нормальное, полное и угловое ускорения.*



Решение

Уравнение зависимости пути, пройденного точкой, от времени имеет вид $s(t) = v_0 t + \dfrac{a_\tau t^2}{2}$ (м). Это позволяет найти длину пути $s = 3 \cdot 2 + \dfrac{1 \cdot 2^2}{2} = 8$ м. Если учесть, что за один оборот точка проходит путь, равный длине окружности $s_1 = 2\pi R = 8\pi$ м, то можно найти угловое перемещение точки из пропорции $\frac{2\pi}{\varphi} = \frac{8\pi}{8}$, $\varphi = 2$(рад) = 114,7^0. Тогда модуль перемещения может быть найден по теореме косинусов как хорда, стягивающая этот угол φ.

$$|\vec{r}| = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\varphi} = R\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 4\sqrt{2(1+0,418)} = 6,73 \text{ м}.$$

Линейная скорость точки $v = v_0 + a_\tau t = 3 + 1\cdot 2 = 5$ м/с.

Угловая скорость $\omega = vR = 5\cdot 4 = 20$ рад/с.

Нормальное ускорение $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{4} = 6,25$ м/с^2.

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{6,25^2 + 1^2} = 6,33 \text{ м/с}^2.$$

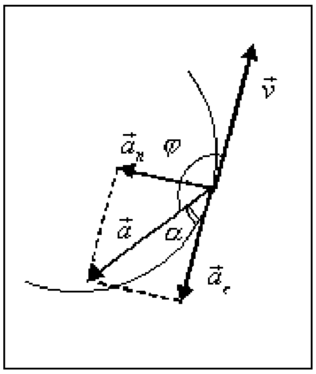
Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{1}{4} = 0,25$ рад/с^2.

Задача 11

Автомобиль, движущийся со скоростью 36 км/ч, проходит закругленное шоссе с радиусом кривизны 200 м. На повороте шофер тормозит машину, сообщая ей ускорение 0,3 м/с^2. Найти нормальное и полное ускорения автомобиля на повороте. Найти угол между вектором полного ускорения автомобиля на повороте и вектором его скорости. Каковы угловые скорость и ускорение автомобиля в момент вхождения машины в поворот?

Решение

Зная скорость автомобиля $v = 36$ км/ч = 10 м/с, найдем его нормальное ускорение



$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{200} = 0,5 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение автомобиля

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,3^2} = 0,58 \text{ м/с}^2.$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{0,3}{200} = 1,5\cdot 10^{-3} \text{ рад/с}^2.$$

Угловая скорость

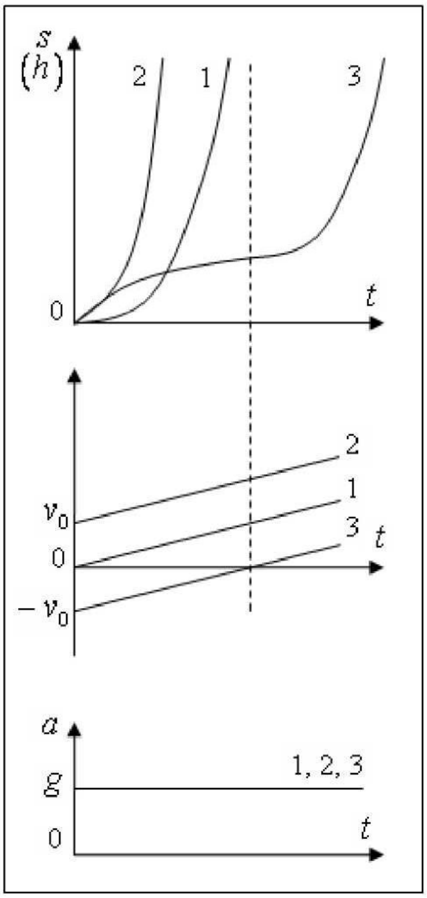
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{200} = 0,05\,\text{рад/с}.$$

Поскольку движение автомобиля замедленное, то векторы скорости и тангенциального ускорения направлены в противоположные стороны, поэтому вектор скорости и вектор полного ускорения образуют тупой угол φ. Для нахождения этого угла определим вначале угол α, дополняющий искомый угол до 180^0.

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{0,5}{0,3} = 1,67 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 59° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 180° - \alpha = 121°.$$

Задача 12

Из вертолета, находящегося на высоте $h = 300$ м, сбросили груз. Через какое время груз достигнет земли, если: а) вертолет неподвижен; б) вертолет опускается со скоростью $v_0 = 5$ м/с; 3) вертолет поднимается со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Описать графически соответствующие движения груза в осях $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$.



Решение

а) Груз, покинувший неподвижный вертолет, свободно падает, т.е. движется равноускоренно с ускорением свободного падения g. Время движения найдем из соотношения $h = \frac{gt^2}{2}$. Откуда $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,8}} = 7,8\,\text{с}$. Графики движение объекта отмечены 1 на рисунке.

б) Движение груза, покинувшего вертолет, который опускается с постоянной скоростью $v_0 = 5$ м/с, является равноускоренным движением с постоянным ускорением g и описывается уравнением $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

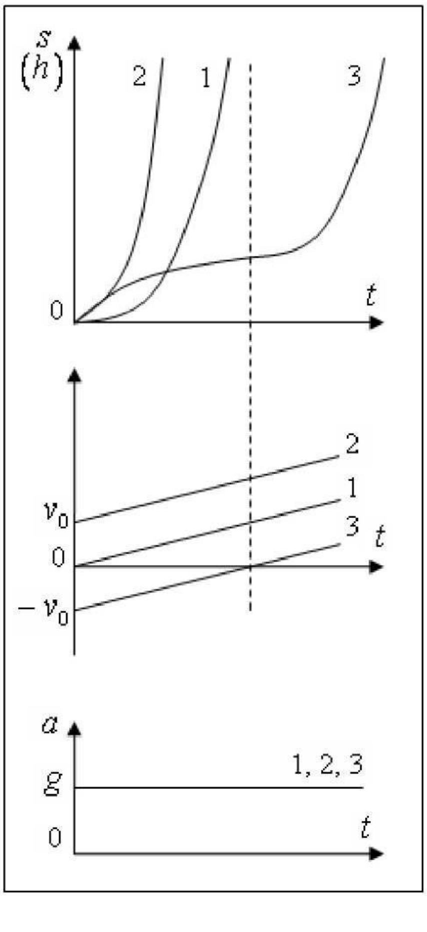
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{200} = 0,05\,\text{рад/с}.$$

Поскольку движение автомобиля замедленное, то векторы скорости и тангенциального ускорения направлены в противоположные стороны, поэтому вектор скорости и вектор полного ускорения образуют тупой угол φ. Для нахождения этого угла определим вначале угол α, дополняющий искомый угол до 180^0.

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{0,5}{0,3} = 1,67 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 59° \quad \Rightarrow \quad \varphi = 180° - \alpha = 121°.$$

Задача 12

Из вертолета, находящегося на высоте h = 300 м, сбросили груз. Через какое время груз достигнет земли, если: а) вертолет неподвижен; б) вертолет опускается со скоростью $v_0 = 5$ м/с; 3) вертолет поднимается со скоростью $v_0 = 5$ м/с. Описать графически соответствующие движения груза в осях $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$.



Решение

а) Груз, покинувший неподвижный вертолет, свободно падает, т.е. движется равноускоренно с ускорением свободного падения g. Время движения найдем из соотношения $h = \frac{gt^2}{2}$. Откуда $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,8}} = 7,8\,\text{с}$. Графики движение объекта отмечены 1 на рисунке.

б) Движение груза, покинувшего вертолет, который опускается с постоянной скоростью $v_0 = 5$ м/с, является равноускоренным движением с постоянным ускорением g и описывается уравнением $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

ДИНАМИКА

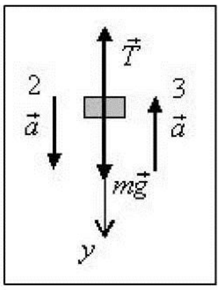
ЗАДАЧИ

Задача 1

К нити подвешен груз массой $m = 1$*кг. Найти силу натяжения нити T, если 1) нить с грузом покоится; 2) двигается вниз с ускорением* $a = 5$ *м/с*^{2}*; 3) двигается вверх с ускорением* $a = 5$ *м/с*^{2}.

Решение

На тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}$. Уравнение движения тела (второй закон Ньютона) в данном случае имеет вид:



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Выберем направление оси y вниз и спроецируем на нее векторы сил и ускорения:

1) $\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow 0 = mg - T \Rightarrow T = mg = 1 \cdot 9{,}8 = 9{,}8$ Н.

2) $\vec{a}$ направлено вниз $\Rightarrow ma = mg - T \Rightarrow T = m(g - a) = 1(9{,}8 - 5) = 4{,}8$ Н

3) $\vec{a}$ направлено вверх $\Rightarrow -ma = mg - T \Rightarrow T = m(g + a) = 1(9{,}8 + 5) = 14{,}8$ Н.

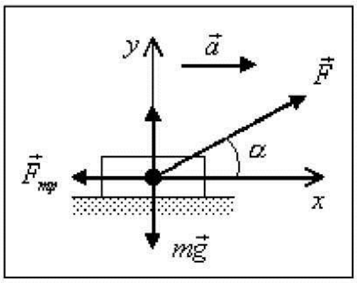
Задача 2

Груз массой $m = 50$ *кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы* $F = 300$ *Н, направленной под углом* $\alpha = 30^0$ *к горизонтали. Коэффициент трения груза о плоскость* $k = 0{,}1$. *Определить ускорение, с которым движется груз.*

Решение

Уравнение движения тела $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{тр}$.

Выберем направления осей x и y и спроецируем на них силы и ускорение:



$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - F_{тр} \\ 0 = -mg + N + F\sin\alpha \end{cases},$$

Поскольку $F_{тр} = kN$, а из второго уравнения

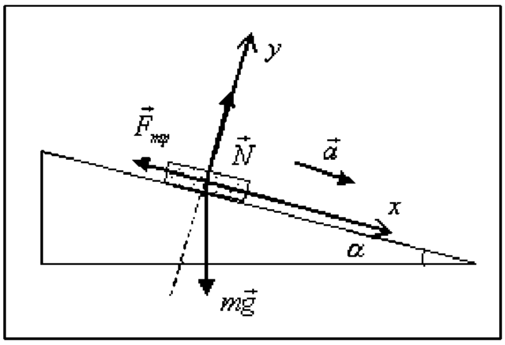
$N = mg - F\sin\alpha$, то $F_{тр} = k\left(mg - F\sin\alpha\right)$. Тогда из первого уравнения ускорение

$$a = \frac{1}{m}\cdot\left[F\cos\alpha - k\left(mg - F\sin\alpha\right)\right] =$$
$$= \frac{300\cdot 0,87 - 0,1\left(50\cdot 9,8 - 300\cdot 0,5\right)}{50} = 4,54 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3

Тело лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 5°$. При каком предельном коэффициенте трения $k_{пр}$ тело начнет скользить по наклонной плоскости? С каким ускорением будет двигаться тело, если коэффициент трения $k = 0,02$? Какое время t понадобиться для прохождения при этих условиях пути $s = 10$ м. Какую скорость тело будет иметь в конце наклонной плоскости?

Решение



Запишем II закон Ньютона для данного тела $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}$.

Выбрав оси x и y, спроецируем на них силы и ускорение: $\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - F_{тр} \\ 0 = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$

1) Для первого случая, когда $k = k_{пр}$ и $a = 0$, имеем $0 = mg\sin\alpha - k_{пр}mg\cos\alpha$,

откуда $k_{пр} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = tg5° = 0,08$.

2) Во втором случае $k < k_{пр}$, поэтому тело будет скользить по наклонной плоскости с ускорением

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha) = 9,8\left(0,087 - 0,02\cdot 0,996\right) = 0,66 \text{м/с}^2.$$

Поскольку тело движется равноускоренно из состояния покоя, то время прохождения им расстояния $s = 10$ м и скорости в конце этого пути можно найти из уравнений кинематики

$$\begin{cases} s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}, \\ v = v_0 + at \end{cases}$$

положив $v_0 = 0$. Получим:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,66}} = 5,5\,\text{с}$$

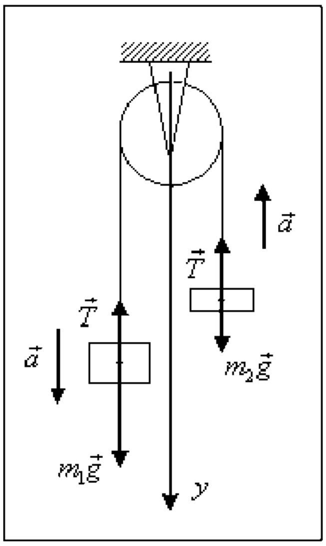
$$v = at = 0,66 \cdot 5,5 = 3,6\,\text{м/с}.$$

Задача 4

Две гири массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти ускорение, с которым движутся гири, и силу натяжения нити. Трением в блоке пренебречь.

Решение

Условие невесомости и нерастяжимости нити позволяет сделать вывод о том, что сила натяжения нити на всех участках одинакова и грузы движутся с одинаковым ускорением, т.е. $T = T_1 = T_2$; $a = a_1 = a_2$.



Запишем законы движения для каждого груза.

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} \end{cases}.$$

Выберем направление оси y вниз и спроецируем на нее силы и ускорения:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ -m_2 a = m_2 g - T \end{cases}$$

Отсюда

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{9,8(2-1)}{2+1} = 3,27\,\text{м/с}^2.$$

$$T = m_1(g - a) = m_1 g\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9,8}{2+1} = 13,07\,\text{Н}.$$

Задача 5

Автомобиль массой m *5 тонн проходит по выпуклому мосту со скоростью* $v = 36$ *км/ч. С какой силой* F *он давит на середину моста, если радиус кривизны моста* $R = 100$ *м? Какова будет сила давления, если мост будет вогнутый с тем же радиусом кривизны?*

Решение

На основании II закона Ньютона запишем уравнение движения автомобиля:

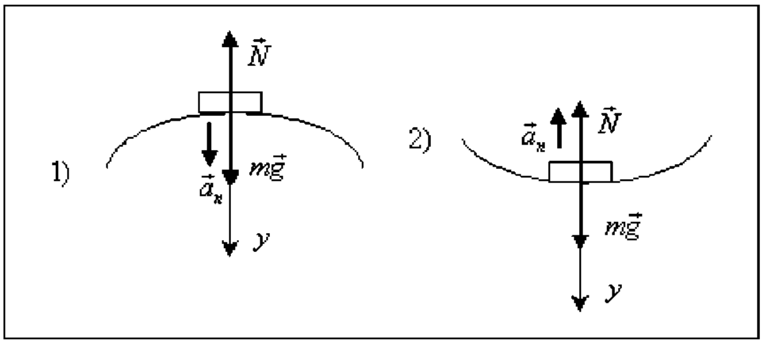
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}\,.$$

Выберем направление оси y и спроецируем на нее силы и ускорение. Обратим внимание на то, что поскольку движение автомобиля равномерное криволинейное, то ускорение

$$a = a_n = \frac{v^2}{R}\,.$$

По III закону Ньютона сила, с которой автомобиль давит на мост, равна по модулю силе, с которой мост давит на автомобиль, т.е. силе нормальной реакции опоры N.

1) Уравнение движения в проекциях для первого случая имеет вид



$$ma_n = mg - N \quad \Rightarrow \quad F = N = m\left(g - a_n\right) = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) =$$

$$= 5 \cdot 10^3 \left(9{,}8 - \frac{10^2}{100}\right) = 4{,}4 \cdot 10^4\,\text{Н}.$$

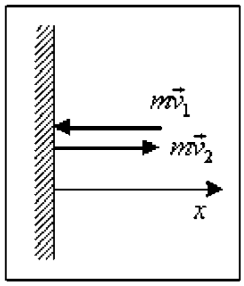
2) Для второго случая

$$-ma_n = mg - N \quad \Rightarrow \quad F = N = m(g + a_n) = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) =$$

$$= 5 \cdot 10^3 \left(9{,}8 + \frac{10^2}{100}\right) = 5{,}4 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Задача 6

Стальной шарик массой $m = 10$ г, летящий со скоростью $v = 100$ м/с по нормали к стенке, ударяется о нее и упруго отскакивает без потери скорости. Найти импульс, полученный стенкой за время удара.



Решение

Из II закона Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}.$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ называется *импульсом силы*. Видно, что по модулю импульс силы равен

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v} = \Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p},$$

т.е. изменению импульса шарика.

Выберем ось x и спроецируем импульсы шарика: $F\Delta t = mv_2 - (-mv_1) = mv_2 + mv_1$.

Поскольку по условию задачи $v_1 = v_2 = v$, то $F\Delta t = 2mv = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 2$ кг·м/с

Задача 7

На рельсах стоит платформа массой $m_1 = 10$ т. На платформе закреплено орудие массой $m_2 = 5$ т, из которого производится импульс вдоль рельсов. Масса снаряда $m_3 = 100$ кг; его начальная скорость относительно орудия $v_0 = 500$ м/с. Найти скорость $\vec{u}$ платформы в первый момент после выстрела, если: 1) платформа стояла неподвижно ($v = 0$); 2) платформа двигалась со скоростью $v = 18$ км/ч, а выстрел был произведен в направлении ее движения; 3) платформа двигалась со скоростью $v = 18$ км/ч, а выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

Решение

Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса, утверждающим, что импульс замкнутой системы остается постоянным.

Запишем импульс системы, состоящей из пушки, орудия и снаряда, до выстрела ($\vec{p}$) и после него $(\vec{p}')$, в результате которого этот импульс меняется. Напомним, что суммарный импульс системы представляет собой векторную сумму импульсов тел, входящих в систему.

1). Импульс системы до выстрела

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = m_1\vec{v} + m_2\vec{v} + m_3\vec{v} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = 0,$$

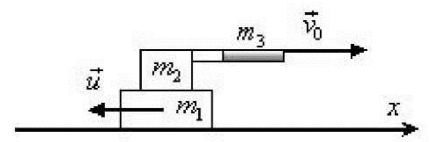
т.к. вначале платформа с орудием покоилась ($v = 0$).

После выстрела импульс системы

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \vec{p}_3' = m_1\vec{u} + m_2\vec{u} + m_3\vec{v}_0 = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{v}_0.$$

По закону сохранения импульса $\vec{p} = \vec{p}'$, следовательно,

$$0 = (m_1 + m_2)\vec{u} + m_3\vec{v}_0.$$



1)

Спроецируем это уравнение на выбранную ось x:

$$0 = (m_1 + m_2)u + m_3v_0.$$

Обратим внимание на следующий факт. Из опыта мы знаем, что в результате выстрела платформа с орудием откатится в сторону, противоположную выстрелу, поэтому при проецировании мы сразу можем учесть это, поставив знак «минус» перед скоростью u платформы. Тогда мы получим

$$(m_1 + m_2)u = m_3v_0,$$

откуда

$$u = \frac{m_3v_0}{m_1 + m_2} = \frac{100 \cdot 500}{10000 + 5000} = 3{,}33 \text{ м/с}.$$

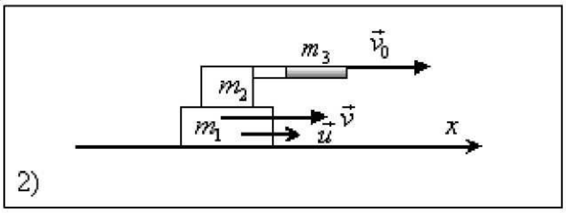
В ряде случаев, когда заранее нет ясности в том, в какую сторону будет двигаться объект, считаем, что скорость направлена вдоль оси x. В этом случае положительное значение полученного результата вычислений подтвердит наше предположение, а отрицательное – укажет на то, что движение происходит в направлении, противоположном выбранному.

2) Закон сохранения импульса в случае, когда платформа движется со скоростью $v = 18$км/ч = 5м/с, имеет вид

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u} + m_3\left(\vec{v}_0 + \vec{v}\right).$$

В проекциях на ось x:

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = -\left(m_1 + m_2\right)u + m_3\left(v_0 + v\right)$$



Отсюда

$$u = \frac{m_3\left(v_0 + v\right) - (m_1 + m_2 + m_3)v}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{100 \cdot (500 + 5) - (10000 + 5000 + 100) \cdot 5}{10000 + 5000} = -1,67 \text{ м/с}.$$

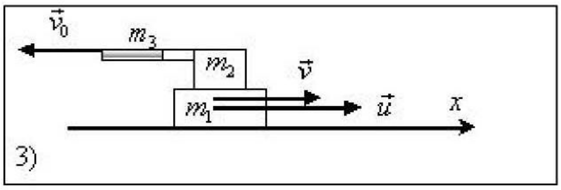
Обратим внимание на то, что, посчитав, как в предыдущем случае, что платформа после выстрела начнет двигаться в обратную сторону, мы ошиблись, на что указывает знак «минус» в полученном ответе. Значит, направление движения платформы осталось прежним, но скорость ее уменьшилась.

3) Закон сохранения импульса в третьем случае имеет вид, аналогичным тому, что был записан для второго случая, т.е.

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{v} = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u} + m_3\left(\vec{v}_0 + \vec{v}\right),$$

с той лишь разницей, что при проецировании на ось x, получим другие знаки для скоростей:

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = \left(m_1 + m_2\right)u + m_3\left(-v_0 + v\right)$$



Это даст

$$u = \frac{-m_3\left(-v_0 + v\right) + (m_1 + m_2 + m_3)v}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{-100 \cdot (-500 + 5) + (10000 + 5000 + 100) \cdot 5}{10000 + 5000} = -8,33 \text{м/с}.$$

Таким образом, платформа будет двигаться в том же направлении со скоростью большей, чем первоначальная.

Задача 8

Человек массой $m_1 = 60$ *кг, бегущий со скоростью* $v_1 = 2$ *м/с, впрыгивает на тележку массой* $m_2 = 80$ *кг, движущуюся со скоростью* $v_2 = 1$ *м/с. С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком на ней, если: 1) человек догоняет тележку; 2) тележка и человек двигаются навстречу друг другу?*

Решение

Закон сохранения импульса в данном случае имеет вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{u}\,.$$

1) Когда человек догоняет тележку, то их скорости направлены в одну сторону, следовательно, при проецировании на горизонтальную ось имеем

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right)u\,,$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{60\cdot 2 + 80\cdot 1}{60 + 80} = 1{,}43\,\text{м/с}.$$

2) Когда человек и тележка движутся навстречу друг другу, то их скорости имеют разные знаки. Тогда уравнение в проекциях на ось x имеет вид

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right)u\,,$$

откуда

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{60\cdot 2 - 80\cdot 1}{60 + 80} = 0{,}29\,\text{м/с}.$$

Тележка с человеком на ней будет двигаться в сторону, противоположную тому, куда двигалась тележка без человека.

Задача 9

Шар массой $m_1 = 2$ *кг движется со скоростью* $v_1 = 3$ *м/с и нагоняет шар массой* $m_2 = 8$ *кг, движущийся со скоростью* $v_2 = 1$ *м/с. Считая удар центральным и абсолютно упругим, найти скорости* u_1 *и* u_2 *шаров после удара.*

Решение

В случае абсолютно упругого удара выполняются законы сохранения импульса и энергии:

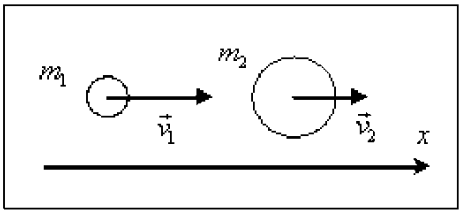
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$
$$\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2} = \frac{m_1\vec{u}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{u}_2^2}{2},$$
$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2),$$
$$\left[m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1)\right](\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = \left[m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)\right](\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

Отсюда следует, что $\vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$.

Умножив это выражение на m_2 и вычтя результат из $m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)$, а затем, умножив это выражение на m_1 и сложив результат с $m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2)$, получим скорости шаров после абсолютно упругого удара

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2},$$
$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Спроецировав скорости на ось x и подставив данные задачи, получим



$$u_1 = \frac{2\cdot 8\cdot 1 + (2-8)\cdot 3}{2+8} = -0,2 \text{ м/с}$$
$$u_2 = \frac{2\cdot 2\cdot 3 + (8-2)\cdot 1}{2+8} = 1,8 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» в первом выражении означает, что в результате абсолютно упругого удара первый шар начал двигаться в обратном направлении. Второй шар продолжил движение в прежнем направлении с большей скоростью.

Задача 10

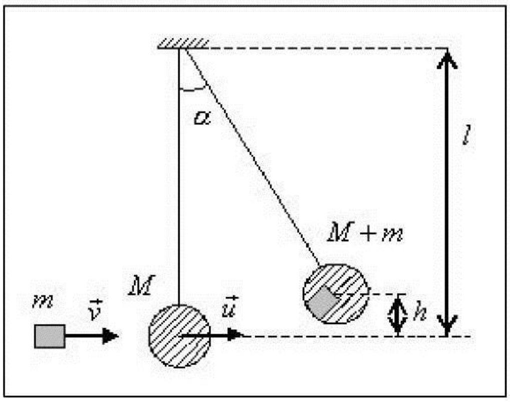
Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 *раз меньше массы шара. Расстояние от центра шара до точки подвеса стержня* l – 1 *м. Найти скорость* v *пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол* $\alpha = 10°$.

Решение

Для решения задачи необходимо использовать законы сохранения. Запишем закон сохранения импульса для системы «шар-пуля», полагая, что их взаимодействие подпадает под описание так называемого неупругого удара, т.е. взаимодействия, в результате которого два тела движутся как единое целое:

$$m\vec{v} + M\vec{V} = (m+M)\vec{u}.$$

Учтем, что шар покоился и движение пули, а затем шара с пулей внутри происходило в одну сторону, получим уравнение в проекциях на горизонтальную ось в виде: $mv = (m+M)u$.



Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh.$$

Поскольку $h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$, то $u = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, и, тогда

$$v = \frac{(m+M)u}{m} = \frac{(m+M)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}{m}.$$

Учитывая, что $M = 1000m$, получим

$$v = 1001\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)} = 1001\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 1(1-\cos 10^\circ)} = 546 \text{ м/с}.$$

Задача 11

Конькобежец массой M = 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой m = 3 кг со скоростью v= 8 м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $k = 0{,}02$?

Решение

Импульс системы «конькобежец-камень» сохраняется, поэтому

$$(M+m)\vec{v}_0 = M\vec{u} + m\vec{v}.$$

С учетом того, что $v_0 = 0$, получим в уравнение в проекциях на горизонтальную ось

$$Mu = mv,$$

откуда скорость конькобежца $u = \dfrac{mv}{M}$. Из закона сохранения энергии кинетическая энергия конькобежца расходуется им на работу против силы трения, поэтому $A_{тр} = \Delta W_{кин}$.

$$A_{тр} = \left(\vec{F}_{тр}, \vec{s}\right) = \vec{F}_{тр} \cdot s \cdot \cos\alpha = -\vec{F}_{тр} \cdot s,$$

т.к. $\cos\alpha = -1$ (сила трения направлена в сторону, противоположную скорости). Приращение кинетической энергии

$$\Delta W_{кин} = 0 - \frac{Mu^2}{2} = -\frac{Mu^2}{2}.$$

Тогда

$$-\vec{F}_{тр} \cdot s = -\frac{Mu^2}{2}.$$

Расстояние

$$s = \frac{Mu^2}{2F_{тр}} = \frac{Mu^2}{2kMg} = \frac{u^2}{2kg} = \frac{m^2v^2}{2kM^2g} = \frac{9 \cdot 64}{2 \cdot 0,02 \cdot 4900 \cdot 9,8} = 0,3 \text{ м}.$$

Задача 12

К ободу однородного диска радиусом $R = 0,2$ м приложена касательная сила $R - 100$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M_{тр} = 5$ Н·м. Определить массу диска, если он вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100$ рад/с^2.

Решение

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс, равен

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент сил, действующих на диск, равен

$$M = F \cdot R - M_{тр}.$$

Подставляя это в основное уравнение динамики вращательного движения $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$, получим

$$\frac{mR^2\varepsilon}{2} = F \cdot R - M_{тр}.$$

Откуда

$$m = \frac{2(F \cdot R - M_{тр})}{R^2\varepsilon} = \frac{2(100 \cdot 0,2 - 5)}{0,04 \cdot 100} = 7,5\,\text{кг}.$$

Задача 13

Две гири массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири, и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Решение

Отличие этой задачи от задачи 4 состоит в том, что блок вращается и его вращение обусловлено разностью сил натяжения нитей по обе стороны блока. Поэтому для решения задачи необходимо записать уравнения движения для трех движущихся тел, два из которых (гири) движутся поступательно, а третье (блок) - вращательно. Для вращающегося тела используем II закон Ньютона для вращающего движения. Получим

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \\ I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \end{cases}$$

Учитывая то, что $I = \dfrac{mR^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ и $M = T_1R - T_2R$, запишем в проекциях на вертикальную ось

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \\ \dfrac{mR^2}{2} \cdot \dfrac{a}{R} = (T_1 - T_2) R \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \\ \dfrac{ma}{2} = (T_1 - T_2) \end{cases}$$

Решая систему, найдем ускорение, с которым движутся гири

$$a = \frac{(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + m/2} = \frac{(2-1) \cdot 9,8}{2 + 1 + 0,5} = 2,8 \text{ м/с},$$

а также силы натяжения нитей

$$T_1 = \frac{m_1 g (2m_2 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2} = 14 \text{ Н},$$

$$T_2 = \frac{m_2 g (2m_1 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2} = 12,6 \text{ Н}.$$

Задача 14

Шар массой $m = 1$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 2$ м/с. Найти кинетическую энергию шара.

Решение

Кинетическая энергия шара в случае качения без скольжения складывается из кинетической энергии поступательного движения центра масс шара и кинетической энергии его вращательного движения, т.е.

$$W_{кин} = W_{\substack{кин \\ пост}} + W_{\substack{кин \\ вр}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

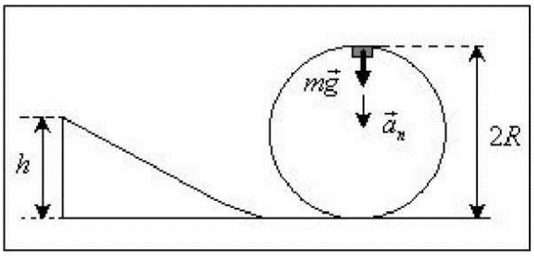
Поскольку момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mR^2$, а $\omega = \frac{v}{R}$, то

$$W_{кин} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\cancel{2} m \cancel{R^2} v^2}{5 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{R^2}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{5} = 0,7mv^2 = 0,7 \cdot 1 \cdot 4^2 = 11,2 \text{ Дж.}$$

Задача 15

С какой наименьшей высоты должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом $R = 3$ м и не сорваться в верхней точке петли? Масса велосипедиста с велосипедом $m = 75$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

Решение



На вершине наклонной плоскости велосипедист обладает потенциальной энергией $W_{пот} = mgh$. По закону сохранение энергии этой энергии должно хватить на подъем на высоту $2R$ $(W'_{пот} = mg \cdot 2R)$ и на движение со скоростью v. Эту скорость найдем, записав II закон Ньютона для верхней точки «мертвой петли»,

$$m\vec{a}_n = m\vec{g}\,.$$

Тогда $m\frac{v^2}{R} = mg$. Откуда $v = \sqrt{gR}$. Обратим внимание на то, что кинетическая энергия велосипедиста складывается из кинетической энергии поступательного движения его центра масс и кинетической энергии вращательного движения двух колес его велосипеда, т.е.

$$W_{кин} = W_{\substack{кин\\пост}} + W_{\substack{кин\\вр}} = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{I\omega^2}{2}.$$

Поскольку колеса – обручи массой $\frac{m_0}{2}$ каждое, то их моменты инерции равны $I = \left(\frac{m_0}{2}\right)R^2$, а кинетическая энергия каждого колеса

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{m_0 \cdot \cancel{R^2} \cdot gR}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{R^2}} = \frac{m_0 \cdot gR}{2 \cdot 2}.$$

Отсюда

$$mgh = \frac{m \cdot gR}{2} + mg \cdot 2R + \cancel{2}\,\frac{m_0 gR}{\cancel{2} \cdot 2},$$

$$h = \frac{R}{2} + 2R + \frac{m_0}{m} \cdot \frac{R}{2} = \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{3}{75} \cdot \frac{3}{2} = 7{,}56\,\text{м}.$$

Задача 16

Найти линейные скорости и ускорения центров шара, диска и обруча, скатившихся с наклонной плоскости высотой h – 1 м и углом наклона $\alpha = 30°$. Начальная скорость всех тел $v_0 = 0$. Сравнить найденные значения со скоростью и ускорением бруска, соскользнувшего с той же наклонной плоскости при отсутствии трения.

Решение

Для всех перечисленных в условии задачи тел закон сохранения энергии записывается в виде $W_{пот} = W_{кин}$. Различие состоит в том, что для шара, диска и обруча кинетическая энергия

$$W_{кин} = W_{\substack{кин\\пост}} + W_{\substack{кин\\вр}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

а для бруска

$$W_{кин} = W_{\substack{кин\\пост}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Учитывая, что моменты инерции перечисленных тел $I_{шар} = \frac{2}{5}mR^2$, $I_{диск} = \frac{1}{2}mR^2$, $I_{об} = mR^2$, а $\omega = \frac{v}{R}$, запишем:

$$W_{пот} = W_{кин} = \begin{cases} W_{\substack{кин \\ шар}} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{\cancel{2} m \cancel{R^2} v^2}{5 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{R^2}} = 0,7mv^2 & \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{gh}{0,7}} = 3,74\,м/с \\ W_{\substack{кин \\ диск}} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{m \cancel{R^2} v^2}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{R^2}} = 0,75mv^2 & \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{gh}{0,75}} = 3,61\,м/с \\ W_{\substack{кин \\ обруч}} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{m \cancel{R^2} v^2}{2 \cdot \cancel{R^2}} = mv^2 & \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh} = 3,13\,м/с \\ W_{\substack{кин \\ брусок}} = \dfrac{mv^2}{2} & \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 4,43\,м/с \end{cases}$$

Ускорения найдем, воспользовавшись формулой $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2s}$, где $v_0 = 0$, а $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Тогда

$$a = \frac{v^2 \cdot \sin\alpha}{2h} = \begin{cases} a_{шар} = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{0,7 \cdot 2} = \dfrac{9,8 \cdot 0,5}{1,4} = 3,5\,м/с^2 \\ a_{диск} = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{0,75 \cdot 2} = \dfrac{9,8 \cdot 0,5}{1,5} = 3,27\,м/с^2 \\ a_{обруч} = \dfrac{g \cdot \sin\alpha}{2} = \dfrac{9,8 \cdot 0,5}{2} = 2,45\,м/с^2 \\ a_{брусок} = \dfrac{\cancel{2} \cdot g \cdot \sin\alpha}{\cancel{2}} = 9,8 \cdot 0,5 = 4,9\,м/с^2. \end{cases}$$

Задача 17

Колесо, вращаясь равнозамедленно, уменьшило за время $t = 60$ *сек. частоту вращения с* $n_1 = 5$ *об/с до* $n_2 = 3$ *об/с. Колесо считать тонкостенным обручем массой m –1 кг и радиусом R – 0,2 м. Найти угловое ускорение колеса* ε*, момент сил торможения M, работу сил торможения A и число оборотов N, сделанных колесом за время t – 60 с.*

Решение

Поскольку движение колеса является равнозамедленным, то оно описывается формулами

$$\begin{cases} 2\pi N = 2\pi n_1 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \\ 2\pi n_2 = 2\pi n_1 - \varepsilon t \end{cases}$$

Отсюда модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{2\pi\left(n_1 - n_2\right)}{t} = \frac{2\pi\left(5-3\right)}{60} = 0,21\text{рад/с}^2.$$

Количество оборотов $N = n_1 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{4\pi} = 5 \cdot 60 - \dfrac{0,21 \cdot 60^2}{4\pi} = 240$ об.

Момент инерции обруча $I = mR^2 = 1 \cdot 0,2^2 = 0,04$ кг·м^2.

Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

найдем момент сил торможения

$$M = I\varepsilon = 0,04 \cdot 0,21 = 8,4 \cdot 10^{-3}\text{ Н·м}.$$

Работа сил торможения может быть найдена из соображений, что она пошла на изменение кинетической энергии вращающегося колеса.

Тогда,

$$A = W_{кин2} - W_{кин1} =$$
$$= \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{I4\pi^2}{2}\left(n_2^2 - n_1^2\right) =$$
$$= 2 \cdot I\pi^2\left(n_2^2 - n_1^2\right) = 2 \cdot 0,04 \cdot \pi^2\left(5^2 - 3^2\right) = 12,63\text{ Дж}.$$

Задача 18

Маховое колесо начинает вращаться с угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через время t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса L_1 = 70 кг·м^2/с. Найти кинетическую энергию W колеса и его момент импульса L_2 через время t_2 = 20 с после начала движения.

Решение

Угловая скорость махового колеса через время t_1 после начала вращения $\omega_1 = \varepsilon t_1$. Поскольку момента импульса колеса $L_1 = I\omega_1$, то его момент инерции

$$I = \frac{L_1}{\omega_1} = \frac{L_1}{\varepsilon t_1}.$$

Угловая скорость через время t_2 после начала вращения $\omega_2 = \varepsilon t_2$.

Кинетическая энергия через время t_2 после начала вращения колеса равна

$$W_{кин} = \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{L_1(\varepsilon t_2)^2}{2\varepsilon t_1} = \frac{L_1 \varepsilon t_2^2}{2t_1} = \frac{70 \cdot 0,5 \cdot 20^2}{2 \cdot 15} = 467 \text{ Дж}.$$

Момент импульса колеса через время t_2 после начала его вращения

$$L_2 = I\omega_2 = \frac{L_1 \cancel{\varepsilon} t_2}{\cancel{\varepsilon} t_1} = \frac{L_1 t_2}{t_1} = \frac{70 \cdot 20}{15} = 9,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задача 19

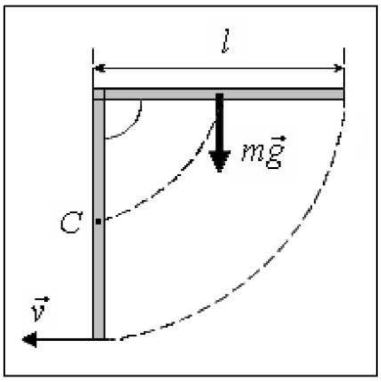
Тонкий однородный стержень длиной l может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. Стержень отклонили на 90° от положения равновесия и отпустили. Определить скорость v нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

Решение

При движении стержня выполняется закон сохранения энергии

$W_{пот} = W_{кин}$,

где $W_{пот}$ - потенциальная энергия стержня в начальном (поднятом) положении, а $W_{кин}$ - кинетическая энергия в момент прохождения положения равновесия. Обратим внимание на тот факт, что в качестве «нулевого» уровня потенциальной энергии принимается уровень центра масс С стержня в положении равновесия.



Потенциальная энергия

$$W_{пот} = mgl/2.$$

Поскольку стержень вращается, то его кинетическая энергия

$$W_{кин} = I\omega^2/2.$$

Для нахождения момента инерции I стержня относительно оси, проходящей через его конец, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Угловая скорость стержня

$$\omega = \frac{v}{l}.$$

Кинетическая энергия

$$W_{кин} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{3}\cdot\frac{v^2}{l^2} = \frac{mv^2}{6}.$$

Отсюда

$$\frac{mgl}{2} = \frac{mv^2}{6},$$

и скорость нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия

$$v = \sqrt{3gl}.$$

Задача 20

Горизонтальная платформа массой $m = 100$ кг вращается вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_0 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

Решение

Воспользуемся для решения задачи законом сохранения момента импульса для замкнутой системы «человек-платформа»:

$$\vec{L} = \vec{L}'.$$

В первом состоянии момент импульса системы состоял из момента импульса платформы и момента импульса, человека, стоящего на краю платформы, т.е.

$$L = L_{пл} + L_{чел} = I_{пл}\omega_1 + I_{чел}\omega_1 = 2\pi n_1\left(I_{пл} + I_{чел}\right).$$

Во втором состоянии момент импульса системы изменился за счет того, что момент импульса человека стал равным нулю, т.к. он перешел в центр платформы, где его момент инерции как материальной точки равен нулю, поскольку ось вращения проходит через него. Поэтому

$$L' = 2\pi n_2 I_{пл}.$$

Отсюда

$$\cancel{2\pi} n_1 \left(I_{пл} + I_{чел} \right) = \cancel{2\pi} n_2 I_{пл}.$$

Частота вращения платформы станет

$$n_2 = \frac{n_1 \left(I_{пл} + I_{чел} \right)}{I_{пл}} = \frac{n_1 \left(mR^2 + m_0 R^2 \right)}{mR^2} = \frac{n_1 \left(m + m_0 \right)}{m} = \frac{10(100+60)}{100} = 16 \text{ об/мин.}$$

Задача 21

Обруч радиусом $R = 1$ м висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает колебания в вертикальной плоскости. Найти период колебаний обруча.

Решение

Обруч представляет собой физический маятник, период колебаний которого можно найти по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}},$$

где m - масса обруча, I - момент инерции обруча относительно точки подвеса, x - расстояние между точкой подвеса и центром масс.

Момент инерции I найдем по теореме Штейнера

$$I = I_0 + mx^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Расстояние $x = R$. Тогда период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\cancel{R}}} = \sqrt{\frac{2R}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5}{9,8}} = 0,32 \text{ с.}$$

<u>КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</u>

1. Механические колебания

Колебаниями или колебательными движениями являются движения или изменения состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Физическая система, совершающая колебание около положения равновесия, называется *осциллятором.*

Колебания называются *периодическими,* если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. *Периодом колебаний T* называется тот наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение. За это время совершается одно *полное колебание. Частотой периодических колебаний ν* называется величина, равная числу полных колебаний, совершаемых в единицу времени. *Циклической (круговой) частотой ω* периодических колебаний называется величина, равная числу полных колебаний, которые совершаются за 2π единиц времени.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1)$$

Механические колебания происходят в системе, в которой на тело (или материальную точку) действуют в общем случае упругая (или *квазиупругая*) сила (kx), сила сопротивления (трения) ($r\dot{x}$) и вынуждающая периодическая сила ($F_0 \cos\omega t$). Тогда уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t\,, \qquad (2)$$

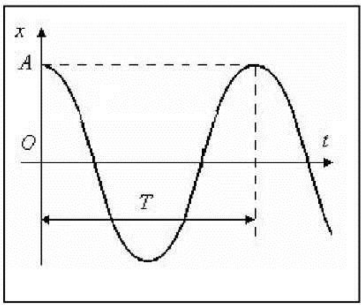
где $\dot{x}$, $\ddot{x}$ – скорость и ускорение тела (точки) массы m; k – коэффициент упругости; r – коэффициент сопротивления; ω – циклическая частота вынуждающей силы; F_0 – амплитудное значение вынужающей силы.

1.1. Свободные незатухающие колебания

Колебания системы, выведенной из положения равновесия и далее предоставленной самой себе, называются *свободными.* В этом случае при отстутствии сил сопротивления уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx\,. \qquad (3)$$

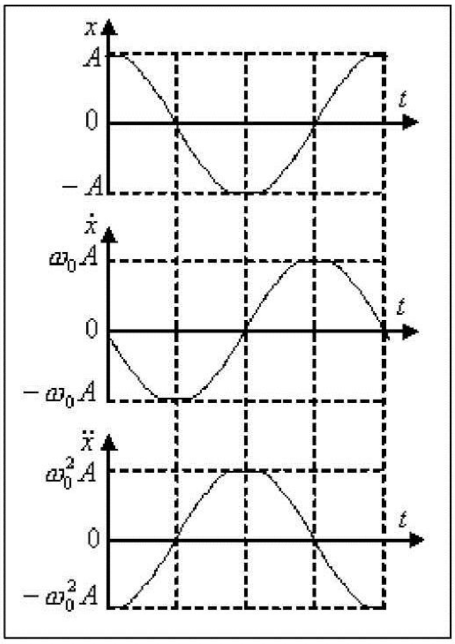
Действующая сила пропорциональна смещению (k – коэффициент пропорциональности, а в случае пружинного маятника, коэффициент жесткости пружины) и всегда направлена к положению равновесия. Такой силой является, например, сила упругости. Любая другая сила, неупругая по природе, но удовлетворяющая соотношению $F = -kx$, называется *квазиупругой.*



Решение уравнения (3) имеет вид

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{4}$$

где x – величина, периодически меняющаяся во времени (для механических колебаний это *смещение* точки от положения равновесия); A – модуль ее максимального значения (*амплитуда*); t – время; $(\omega_0 t + \alpha)$ – *фаза* колебаний; ω_0 – *циклическая* (*собственная или круговая*) частота; α – *начальная фаза*.



Простейший вид колебаний, происходящих по закону косинуса или синуса, называется гармоническими, а система в этом случае называется *гармоническим осциллятором.*

Скорость и *ускорение* гармонического осциллятора находят, взяв первую, а затем вторую производные от смещения x:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}) = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{5}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha) = \\ = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi) = -\omega_0^2 x. \tag{6}$$

Тогда сила

$$F = ma = m\ddot{x} = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -F_{\max} \cos(\omega_0 t + \alpha) = -m\omega_0^2 x = -kx, \tag{7}$$

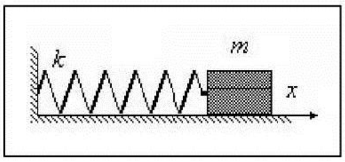
При гармонических колебаниях происходят периодические взаимные превращения энергии, в частности, для механической системы – превращения *кинетической* энергии в *потенциальную.*

$$W_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0{}^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha)}{2}, \tag{8}$$

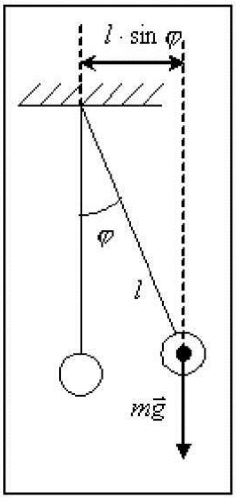
$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0{}^2 A^2 \sin^2(\omega_0^2 t + \alpha)}{2}. \tag{9}$$

Полная энергия гармонического осциллятора:

$$W_{\text{полн}} = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}. \tag{10}$$



Пружинный маятник – система, состоящая из груза массы m, прикрепленного к пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с массой груза. Уравнение движения этой системы (по II закону Ньютона): $m\ddot{x} = -kx$, или $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где циклическая частота и период:



$$\omega_0^2 = k/m; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{11}$$

а решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

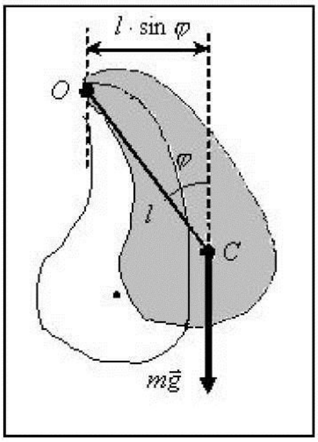
Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая движение по дуге окружности в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Уравнение движения этой системы на основании основного уравнения динамики вращательного движения имеет вид: $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \cdot \sin\varphi$. Для случая малых колебаний $(\sin\varphi \approx \varphi)$ уравнение принимает вид $\ddot{\varphi} + (g/l)\varphi = 0$. Решением его является функция

$$\varphi = \varphi_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{12}$$

где $\varphi_{\max}$ – амплитуда колебаний, т.е. наибольший угол, на который отклоняется маятник, а циклическая частота и период колебаний:

$$\omega_0^2 = g/l, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(13)



Физический маятник – твердое тело, совершающее колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса, расположенную выше его центра масс. Уравнение движения этого тела имеет вид: $I\ddot{\varphi} = -mgx \cdot \sin\varphi$ (I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса). Для случая малых колебаний уравнение $\ddot{\varphi} + (mgx/I)\varphi = 0$ имеет решение

$$\varphi = \varphi_{\max}\cos(\omega_0^2 t + \alpha),$$

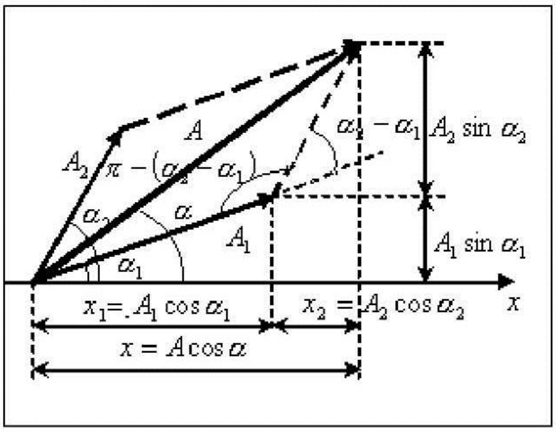
где циклическая частота и период колебаний:

$$\omega_0^2 = mgx/I, \qquad T = 2\pi\sqrt{I/mgx}. \tag{14}$$

Приведенная длина физического маятника ($l_{пр}$) – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника:

$$l_{пр} = I/mx. \tag{15}$$

При *сложении* двух гармонических колебаний *одного* направления и одинаковой частоты $x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \alpha_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \alpha_2)$ получается гармоническое колебание $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$, где амплитуда результирующего колебания находится из выражения:



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{16}$$

а начальная фаза – из выражения:

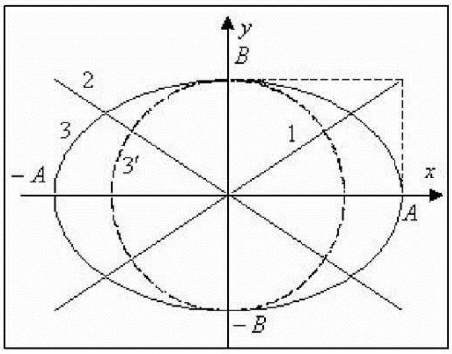
$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}. \tag{17}$$

При *сложении* двух *взаимно перпендикулярных* колебаний, заданных уравнениями $\begin{cases} x = A\cos\omega_0 t \\ y = B\cos(\omega_0 t + \alpha) \end{cases}$

где α имеет смысл разности фаз складываемых колебаний в общем случае движение происходит по кривой, уравнений которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha = \sin^2\alpha . \tag{18}$$

Это уравнение эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей. В зависимости от разности фаз α могут быть следующие частные случаи:



1). $\alpha = 0$. Результирующее движение происходит по прямой 1 на рисунке, уравнение которой

$$y = (B/A)x , \tag{19}$$

с частотой ω_0 и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$.

2). $\alpha = \pm\pi$. Результирующее движение происходит по прямой 2, уравнение которой

$$y = -(B/A)x , \tag{20}$$

с частотой ω_0 и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$.

3). $\alpha = \pm\pi/2$. Траектория результирующего движения – эллипс (кривая 3), приведенный к главным осям, уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 . \tag{21}$$

Полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний *A* и *B*.

При $A = B$ эллипс вырождается в окружность (кривая $3'$).

1.2. Свободные затухающие колебания

Если свободные колебания происходят в системе, в которой действует сила трения $F_{тр} = -rv$, где r – коэффициент трения (сопротивления среды), то уравнение (2) движения тела имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{22}$$

где коэффициент затухания

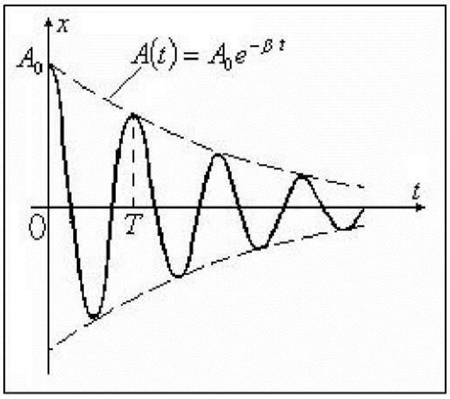
$$\beta = r/2m, \tag{23}$$

а собственная частота колебательной системы, т.е. та частота, с которой система совершала бы колебания в отсутствие трения:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{24}$$

Решение уравнения (22) – функция

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{25}$$



представляющая собой *уравнение свободных затухающих* колебаний.

Частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{26}$$

Декрементом затухания называется величина, равна отношению амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \tag{27}$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\delta = \ln D = \beta T. \tag{28}$$

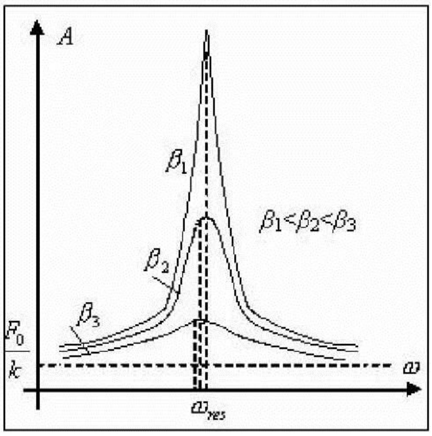
Добротность колебательной системы:

$$Q = \pi/\delta. \tag{29}$$

Время релаксации τ – время, за которое амплитуда убывает в e раз:

$$\tau = 1/\beta. \tag{30}$$

1.3. Вынужденные колебания



Если система совершает колебания под внешним воздействием, изменяющимся периодически, то такие колебания называются *вынужденными.* Уравнение движения в этом случае имеет вид (2) $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos\omega t$. Введя обозначения (23) и (24), получим уравнение

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\cos\omega t, \qquad (31)$$

решение которого и есть *уравнение вынужденных колебаний*

$$x = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}), \qquad (32)$$

где ω – частота вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. При приближении частоты вынуждающей силы (ω) к частоте собственных колебаний (ω_0) наблюдается *резонанс* – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний. *Амплитуда* при резонансе

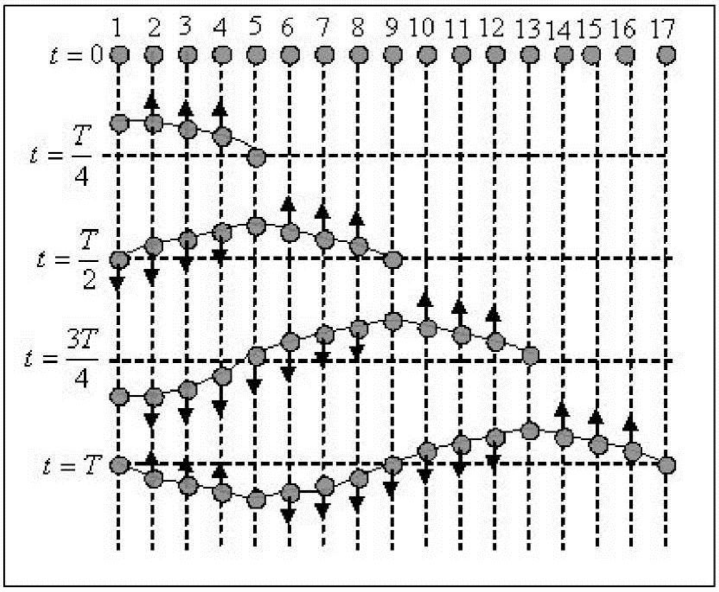
$$A_{рез} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \qquad (33)$$

а *резонансная частота*

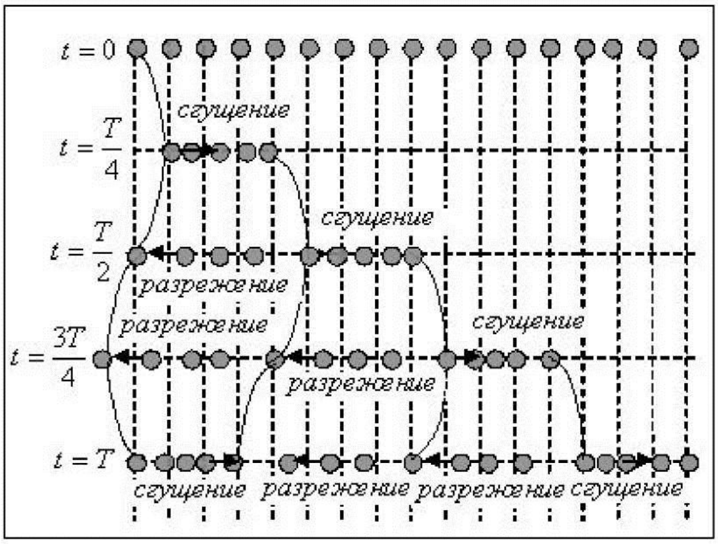
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (34)$$

2. Упругие волны.

Волна – процесс распространения колебаний в упругой среде. Линия, указывающая направление распространения волны, называется *лучом.* Если колебания частиц среды происходят перпендикулярно лучу, то волна является *поперечной.* Если же частицы колеблются вдоль луча, то волна называется *продольной.*



Геометрическое место точек пространства, до которых дошел волновой процесс к данному моменту времени, называется *фронтом волны*. *Волновой поверхностью* называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. В то время как волновых поверхностей для данной волны можно провести сколь угодно много, волновой фронт один. Волна называется *плоской*, если волновые поверхности – плоскости, и *сферической*, если они являются сферами



Волновой фронт перемещается со скоростью $\vec{v}$ (*фазовая скорость*) и за время, равное периоду T колебаний частиц, проходит расстояние λ (*длина волны*).

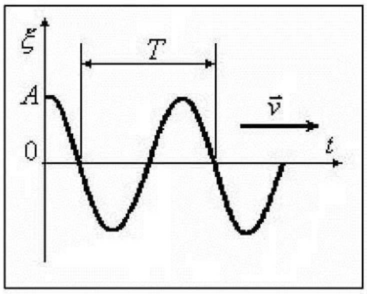
$$\lambda = vT = v/\nu, \tag{35}$$

где $\nu = 1/T$ – частота колебаний частиц.

Уравнение плоской бегущей волны:

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \tag{36}$$

где $\xi(\vec{r},t)$ – смещение колеблющейся точки; $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота; $\vec{k}$ – волновой вектор, модуль которого $k = 2\pi/\lambda$, а направление перпендикулярно волновой поверхности.



Уравнение волны, распространяющейся вдоль оси x, имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \alpha), \tag{37}$$

Волновое уравнение, решением которого является уравнение волны (36), представляет собой дифференциальное уравнение вида:

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{38}$$

где $\Delta\xi = \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Для плоской волны (37), распространяющейся вдоль оси x, волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (39)$$

Разность фаз ($\Delta\varphi$) колебаний двух точек, отстоящих от источника на расстояниях x_1 и x_2, соответственно, определяется из соотношения:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x, \qquad (40)$$

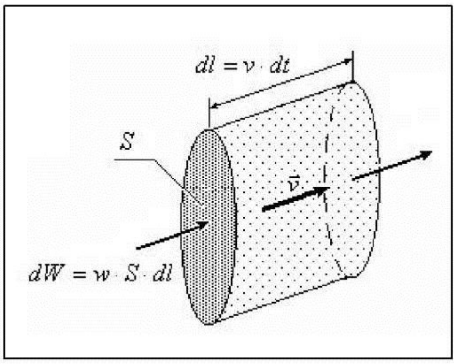
где $\Delta x = x_2 - x_1$ – *разность хода* двух волн.

Волновое движение сопровождается переносом энергии, которая складывается из кинетической энергии колеблющихся частиц и потенциальной энергии деформированных участков среды. Энергия, переносимая волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *потоком энергии* через эту поверхность. *Плотностью потока энергии* называется количество энергии (ΔW), переносимое волной в среднем за единицу времени (Δt) через единичную площадку (S), перпендикулярную направлению распространения волны:

$$I = \frac{\Delta W}{S\cdot\Delta t} = wv, \qquad (41)$$

где w – плотность энергии – средняя энергия частиц, содержащихся в единичном объеме.

Вектор Умова – вектор, направленный перпендикулярно фронту волны, указывающий направление распространения энергии и по модулю равный плотности потока энергии:



$$\vec{j} = w\vec{v}. \qquad (42)$$

Плотность энергии, представляющую собой энергию единицы объема, можно выразить через энергию каждой частицы и количество частиц n в единице объема:

$$w = \frac{W}{V} = n\frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}, \tag{43}$$

где $\rho = mn$ – плотность среды.

Тогда *интенсивность волны:*

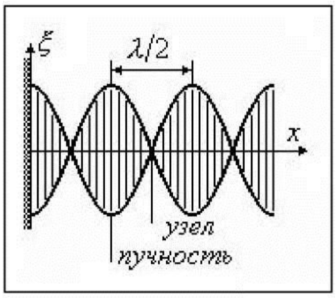
$$I = j_{ср} = w_{ср} v = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2} v. \tag{44}$$

Эффект Доплера: в случае движения источника и приемника волн относительно среды, в которой распространяется волна, частота, воспринимаемая приемником υ, и частота колебаний источника υ_0 отличаются:

$$\upsilon = \upsilon_0 \frac{v + v_{пр}}{v \pm v_{ист}}, \tag{45}$$

где v – скорость волн в среде, а $v_{пр}, v_{ист}$ – скорости движения приемника и источника, соответственно.

При одновременном распространении нескольких волн колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности, т.е., накладываясь, волны не возмущают друг друга (*принцип суперпозиции*). Если волны *когерентны* (имеют постоянную во времени разность фаз), то при их сложении наблюдается явление *интерференции* – перераспределение интенсивности волн, при котором в одних точках колебания усиливают друг друга, а в других – ослабляют. Если интерферируют две встречные плоские волны с одинаковой амплитудой и частотой, то возникающий при этом колебательный процесс называется *стоячей волной*. Уравнение стоячей волны:



$$\xi = (2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda})\cos\omega t. \tag{46}$$

Выражение, стоящее в скобках, – *амплитуда стоячей волны* (как видно, зависящая от координаты).

Пучности наблюдаются в точках, координаты которых:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi, \qquad (n = 1,2,3...), \qquad x_{пучн} = \pm n\frac{\lambda}{2}, \tag{47}$$

Узлы наблюдаются в точках, координаты которых:

$$2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(n+\frac{1}{2})\pi, \quad (n = 1,2,3...), \qquad x_{узл} = \pm(n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}. \qquad (48)$$

ЗАДАЧИ

Задача 1

За какую часть периода точка, совершающая гармонические колебания по закону косинуса, сместится на половину амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия?

Решение

Колебания точки описываются уравнением (4) $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$. Поскольку при $t = 0$ смещение $x = 0$, то начальная фаза φ должна равняться $\pi/2$, т.е. уравнение имеет вид:

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -A\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

По условию смещение $x = A/2$, следовательно, $\sin\frac{2\pi}{T}t = \frac{1}{2}$ (знак «минус» не учитываем, т.к. нас интересует первое попадание колеблющейся частицы в данное положение). Отсюда $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$ и $t = \frac{T}{12}$.

Задача 2

Точка совершает колебания по закону $x = 5\cos\omega_0 t$ (м), где $\omega_0 =\ 2$ с$^{-1}$. Определить ускорение точки в момент времени, когда ее скорость равна 8 м/с.

Решение

Зависимости скорости и ускорения колеблющейся точки от времени задаются уравнениями (5) и (6). Из (5) $a = \dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \alpha)$ и при $\alpha = 0$

$$\sin\omega_0 t = -\frac{v}{A\omega} = -\frac{8}{5\cdot 2} = -0,8.$$

Следовательно, $\cos\omega_0 t = \sqrt{1-\sin^2\omega_0 t} = 0,6$. Тогда по (6) $a = \ddot{x} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha)$ и с учетом того, что $\alpha = 0$, получаем $a = -A\omega_0{}^2\cos\omega_0 t = -5\cdot 4\cdot 0,6 = -12\,\text{м/с}^2$.

Задача 3

Максимальная скорость точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение равно 100 см/с². Найти циклическую частоту колебаний, их период и амплитуду.

Решение

Из сравнения формул (4), (5) и (6)

$x = A\cos(\omega_0 t+\alpha)$,

$v = -A\omega_0\sin(\omega t+\alpha) = -v_{\max}\sin(\omega_0 t+\alpha)$,

$a = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\alpha) = -a_{\max}\cos(\omega_0 t+\alpha)$

видно, что $x_{\max} = A$; $v_{\max} = A\omega$; $a_{\max} = A\omega^2$.

Тогда $\dfrac{a_{\max}}{v_{\max}} = \dfrac{A\omega_0{}^2}{A\omega_0} = \omega_0$. Откуда $\omega_0 = 10\,\text{с}^{-1}$. Период $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 0,2\pi = 0,628\,\text{с}$.

Амплитуда $A = \dfrac{v_{\max}}{\omega_0} = \dfrac{0,1}{10} = 0,01\,\text{м}$.

Задача 4

Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 0,02$ м, полная энергия колебаний $W = 3\cdot 10^{-7}$ Дж. При каком смещении от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2,25\cdot 10^{-5}$ Н?

Решение

Из (10) $W_{\text{полн}} = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}} = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{2}$ можно выразить $m\omega^2 = 2W/A^2$. Тогда, используя выражение (7), получим

$F = -m\omega^2 x = -2Wx/A^2$.

Искомое смещение $x = -\dfrac{FA^2}{2W} = -\dfrac{2{,}25\cdot10^{-5}\cdot4\cdot10^{-4}}{2\cdot3\cdot10^{-7}} = -1{,}5\cdot10^{-2}$ м.

Задача 5

В качестве физического маятника используется стержень, подвешенный за один из его концов. Чему равен период колебаний при длине стержня 1 м?

Решение

Для того, чтобы воспользоваться формулой (14) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgx}}$, необходимо по теореме Штейнера посчитать момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку подвеса:

$$I = I_0 + mx^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Тогда, учитывая, что $x = l/2$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{3\cdot mg(l/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 1{,}63\,\text{с}.$$

Задача 6

Два одинаково направленных гармонических колебания заданы уравнениями $x_1 = A_1\sin\omega_0 t$ и $x_2 = A_2\cos\omega_0 t$, где A_1 – 1 см; A_2 – 2 см; ω_0 – 1 c^{-1}. Определить амплитуду результирующего колебания А, его частоту ν и начальную фазу α. Найти уравнение этого движения.

Решение

Преобразуем первое уравнение, заданное в условии задачи, к виду $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ и получим

$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда по формуле (16) $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ амплитуда результирующего колебания:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1 + 4 + 2\cdot 2\cdot \cos 0{,}5\pi = 5\,\text{см}^2.$$

$$A = \sqrt{5} = 2{,}24\ \text{см} = 2{,}24\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Частота результирующего колебания равна частоте складывающихся колебаний $\nu = \omega/2\pi = 1/2\pi = 0{,}16$ Гц.

Начальную фазу находим по формуле (17):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} = \frac{1\cdot\sin(-0{,}5\pi)}{2\cdot\cos(-0{,}5\pi)} = -0{,}5.$$

Начальная фаза $\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}5) = -26{,}6° = -0{,}46$ рад.

Уравнение результирующего колебания имеет вид $x = 2{,}24\cdot 10^{-2}\cos(t - 0{,}46)$ (м).

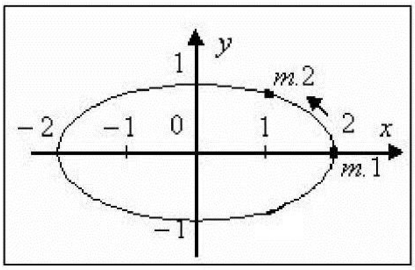
Задача 7

Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos\omega_0 t$ *(см) и* $y = \sin\omega_0 t$ *(см). Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения, если* $\omega_0 = \pi/3\,(c^{-1})$.

Решение

Преобразуем второе уравнение к виду (4) $y = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ и получим:

$$y = 1\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$



Как видно, разность фаз складывающихся колебаний $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ и это соответствует частному случаю (21), когда уравнение траектории имеет вид: $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$. Траекторией движения в этом случае является эллипс, приведенный к главным осям, уравнение которого $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Для того, чтобы указать направление движения точки, необходимо проследить, как меняется ее положение с течением времени. Для этого найдем координаты точки для двух ближайших моментов времени. Период результирующих колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi/3}=6\,\text{с}$. Поэтому моменты времени, отличающиеся на одну секунду, можно считать достаточно близкими.

При $t=0$: $x_1=2\cos 0=2$; $y_1=1\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$;

При $t=1\,\text{с}$: $x_2=2\cos\frac{\pi}{3}=1$; $y_2=1\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=1\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0{,}86$.

Следовательно, точка 1 имеет координаты (2 ; 0), а точка 2 – (1; 0,86). Это означает, что движение происходит против часовой стрелке.

Задача 8

Амплитуда колебаний математического маятника длиной 1 м за время 10 мин уменьшилась в 2 раза. Определить коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания колебаний и количество колебаний, совершенных за это время. Записать уравнение колебаний, если в начальный момент маятник был отведен из положения равновесия на 5 см и отпущен.

Решение

Период и частоту колебаний математического маятника найдем из (13):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\ \text{с},\quad \text{а}\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\ (\text{с}^{-1}).$$

Запишем отношение амплитуд (начальной $A_0=5\,\text{см}$ и через время t = 10 мин = 600 с):

$$\frac{A_0}{A_t} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta t}} = e^{\beta t} = 2,$$

следовательно, $\beta t = \ln 2$, отсюда $\beta = \frac{\ln 2}{t} = \frac{0,693}{600} = 10^{-3}\,\text{с}^{-1}$.

Количество колебаний N, совершенных за время t, найдем из того, что $t = NT$, а, значит, $\beta NT = \ln 2$, и тогда

$$N = \frac{\ln 2}{\beta T} = \frac{0,693}{2 \cdot 10^{-3}} = 346,6\,.$$

Логарифмический декремент затухания определим по (28):

$$\delta = \beta T = 2 \cdot 10^{-3}\,.$$

Выбор гармонической функции для написания уравнения колебаний проведем на основании того, что в начальный момент смещение точки от положения равновесия равно амплитуде, а этому условию удовлетворяет функция косинус. Тогда уравнение данных затухающих колебаний имеет вид: $x = 5 \cdot 10^{-2} e^{-0,001t} \cos \pi t$ (м).

Задача 9

Пружинный маятник, (жесткость пружины которого равна k = 10 Н/м, а масса груза m = 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r = 0,02 кг/с. Определить коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, *если амплитудное значение вынуждающей силы* F_0 *= 10 мН.*

Решение

Коэффициент затухания по (23):

$$\beta = \frac{r}{2m} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,1} = 0,1\ \text{с}^{-1}.$$

Собственная частота по (24):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10\,\text{с}^{-1}.$$

Тогда резонансная частота по (33):

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{10\cdot 10^{-3}}{2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{100-0{,}01}} = 0{,}05\,\text{м}.$$

Задача 10

Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда – 2 м. Определить фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей не расстоянии 45 м от источника колебаний в момент времени t – 4 с. Начальная фаза равна нулю.

Решение

Длина волны по (35):

$$\lambda = vT = 15\cdot 1{,}2 = 18\ \text{м}.$$

Смещение точки определим из уравнения волны (36):

$$\xi(45,4) = 2\cos(\frac{2\pi}{1{,}2}\cdot 4 - \frac{2\pi}{18}\cdot 45) = 1\text{м}.$$

Фаза колебаний (аргумент косинуса) $\varphi = 5\pi/3 = 300^0 = 5{,}23\,\text{рад}.$

Для нахождения скорости точки продифференцируем $\xi(x,t)$ по времени:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\cdot\frac{2\pi}{T}\sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x) = -2\cdot\frac{2\pi}{1{,}2}\cdot\sin\frac{5\pi}{3} = 9{,}07\ \text{м/с}$$

Дифференцирование скорости по времени позволяет найти ускорение:

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -A\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 2\cdot\left(\frac{2\pi}{1{,}2}\right)^2\cdot\cos\frac{5\pi}{3} - 27{,}4\,\text{м/с}^2.$$

Задача 11

Волна распространяется в упругой среде со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту колебаний.

Решение

По определению длиной волны называется наименьшее расстояние между точками, фазы которых одинаковы. Поэтому расстояние между точками, колеблющимися в противофазе, соответствует $\lambda/2$.

Отсюда длина волны $\lambda = 2$ м.

К этому же выводу можно прийти, используя формулу (40), определяющую связь между разностью фаз и разностью хода: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$, положив $\Delta\varphi = \pi$, а $\Delta x = 1$ м.

Из формулы (35) частота:

$$\upsilon = \frac{v}{\lambda} = \frac{100}{2} = 50\,\text{Гц}.$$

Задача 12

Мимо железнодорожной платформы проходит электропоезд. Наблюдатель, стоящий на платформе, слышит звук сирены поезда. Когда поезд приближается, кажущаяся частота звука υ_1 – 1100 Гц; когда удаляется, кажущаяся частота υ_2 900 Гц. Найти скорость поезда и частоту звука, издаваемого сиреной υ_0. Скорость звука 332 м/с.

Решение

В соответствии с формулой (45) для эффекта Доплера обозначим скорость наблюдателя $v_{пр} = 0$, скорость поезда, подающего сигнал, $v_{ист}$, а скорость звука v = 332 м/с. Тогда

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}} = \upsilon_0 \frac{v}{v - v_{ист}};$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_{ист}} = \upsilon_0 \frac{v}{v + v_{ист}}.$$

Отсюда

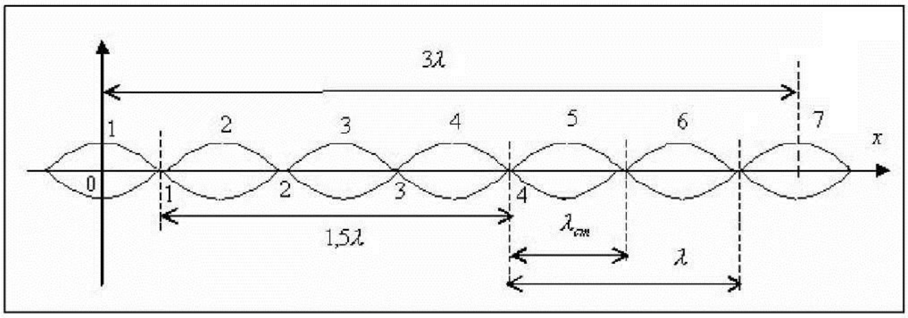
$$v_{ист} = v\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = 332\frac{200}{2000} = 33{,}2 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_0 = \upsilon_1 \frac{v - v_{ист}}{v} = \frac{1100\cdot(332 - 33{,}2)}{332} = 990\,\text{Гц}.$$

Задача 13

Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между:
1) *первой и седьмой пучностями равно 15 см; 2) между первым и четвертым узлами равно 15 см.*

Решение



Координаты пучностей стоячей волны задаются формулой (47): $x_{пучн} = \pm n\dfrac{\lambda}{2}$.

Тогда расстояние между первой и седьмой пучностями $\Delta x = (7-1)\dfrac{\lambda}{2} = 3\lambda = 15\,см$.

Отсюда $\lambda = 5\,см$.

Координаты узлов стоячей волны задаются формулой (48) $x_{узл} = \pm\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$.

Тогда расстояние между четвертым и первым узлом

$$\Delta x = \left(4 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2} = 15\,см.$$

Отсюда $\lambda = 10\,см$.

Задача 14

По цилиндрической трубе диаметром d = 20 см и длиной l = 5 м, заполненной сухим воздухом, распространяется звуковая волна со средней за период интенсивностью I = 50 мВт/м^2. Найти среднюю энергию W звукового поля, заключенного в трубе. Скорость звука v = 332 м/с.

Решение

По определению средняя плотность энергии (43) $w_{ср} = \dfrac{W_{ср}}{V}$, а интенсивность (42) $I = w_{ср} v$.

Тогда средняя энергия звукового поля

$$W_{ср} = \frac{I \cdot V}{v} = \frac{I \cdot \pi d^2 \cdot l}{4v} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 0{,}04 \cdot 5}{4 \cdot 332} = 2{,}36 \cdot 10^{-5}\ Дж.$$