ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
КИНЕМАТИКА. ДИНАМИКА

Задачник-практикум

ВВЕДЕНИЕ

“Курс общей физики” в педагогическом университете предназначен для будущего учителя. Поэтому важно изучение курса строить так, чтобы полученные знания можно было непосредственно использовать в процессе преподавания физики в средней школе. Настоящее методическое пособие предназначено для проведения аудиторных практических занятий по разделу “Механика”. Материал методического пособия включает необходимые теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для самостоятельной работы. Конкретная совокупность задач для решения в аудитории и домашних заданий определяется преподавателем, ведущим практические занятия. В конце многих разделов приведены и качественные задачи, которые могут обсуждаться как на практических, так и семинарских занятиях.

Пособие составлено с целью повышения эффективности организации самостоятельной работы и аудиторных занятий студентов очного и заочного отделений физико-математического факультета.. Кроме того, пособие может быть рекомендовано для использования при проведении факультативных занятий школьников.

Порядок решения задач.

1. Записать все данные (с их единицами) и искомые в задаче величины.
2. Записать все данные задачи в СИ.
3. Сделать чертеж, схему или рисунок с обозначением данных задачи (в зависимости от условий задачи).
4. Установить, какие физические законы отвечают содержанию данной задачи.
5. Решить задачу в общем виде (получить “рабочую формулу”), т.е. выразить искомую величину через заданные в задаче. При изучении движения точки (поступательного движения твердого тела) необходимо:

а) выбрать систему отсчета, относительно которой изучается движение;

б) связать с ней систему координат;

в) записать закон движения точки в векторном виде;

г) перейти к скалярной записи уравнений движения в проекциях на выбранные оси;

д) записать начальные данные и дополнительные условия рассматриваемого движения;

е) решить полученную систему уравнений и проанализировать ответ;

ж) если в движении участвует несколько тел, то удобно выбрать общие для всех начала отсчета перемещения и времени.

При изучении вращения тела вокруг неподвижной оси надо перейти к угловым характеристикам движения (угловому перемещению, угловой скорости, угловому ускорению), так как они одинаковы для всех точек тела, в то время как линейные характеристики различны.

6. Произвести вычисления.

7. Желательно произвести проверку единиц величин, подставив их в “рабочую формулу”. Полученная единица должна совпадать с единицей искомой в задаче величины.

КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел механики, изучающий движение тел без учета взаимодействия, то есть без учета причин, вызывающих это движение.

Кинематика поступательного движения

1. Прямолинейное движение.

Движение, при котором траектория – прямая линия, называется *прямолинейным* движением. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути, если направление движения не изменяется.

Скорость (мгновенная) прямолинейного движения в общем случае (когда $\vec{s} = f(t)$: $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, а мгновенное ускорение: $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$.

Средняя скорость за интервал времени t_2 - t_1 определяется выражением $\upsilon_{ср}=(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$.

Закон движения – это уравнение (или несколько уравнений), позволяющие определить в любой момент времени положение движущегося тела в заранее выбранной системе координат. Как правило, закон движения удобнее записать в координатной форме.

1) В случае прямолинейного равномерного движения:

$$\vec{a} = 0; \quad \vec{\upsilon} = \frac{\vec{s}}{t} = const; \quad \vec{s} = \vec{\upsilon}t;$$

В проекции на ось ОХ: $a_x = 0; \quad \upsilon_x = \frac{x - x_0}{t} = const; \quad x = x_0 + \upsilon_x t$

2) В случае прямолинейного равнопеременного движения

$$\vec{a} = const; \ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_o + \vec{a}t; \ \vec{s} = \vec{\upsilon}_o t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

В проекции на ось ОХ:

$$a_x = const; \quad \upsilon_x = \upsilon_{x0} \pm a_x t; \quad x = x_0 + \upsilon_{x0} t \pm \frac{a_x t^2}{2}$$

Любое равномерное движение, происходящее с постоянной скоростью $\vec{v}$ вдоль произвольной прямой, можно разложить на два независимых равномерных и прямолинейных движения вдоль осей ОХ и ОY v_x и

v_y. Скорость тела в любой точке траектории $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и направлена по касательной к траектории движения.

Примеры решения задач.

Задача 1. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где A=4 м, B=2м/с, C=-0,5 м/с^3. Для момента времени t_1=2 с определить:1) координату точки x_1 точки; 2) мгновенную скорость v_1; 3) мгновенное ускорение a_1.

<u>*Дано:* $x = A + Bt + Ct^3$, A=4 м, B=2м/с, C=-0,5 м/с^3, t_1=2 с.</u>

Найти: x_1; v_1; a_1.

Решение. 1.Подставим в уравнение движения вместо t заданное значение времени t_1 : $x_1 = A + Bt_1 + Ct_1{}^3$. Подставим в это выражение значения A, B, C, t_1 и произведем вычисления: $x_1 = 4$ м.

2. Мгновенная скорость: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$. Тогда в момент времени t_1 мгновенная скорость $\upsilon_1 = B + 3Ct_1{}^2$. Подставим сюда значения B,C, t_1: $\upsilon_1 = -4$ м/с.. Знак минус указывает на то, что в момент времени t_1=2 с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

3. Мгновенное ускорение: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 6Ct$. Мгновенное ускорение в момент времени t_1 равно $a_1 = 6Ct_1$. Подставим значения C, t_1: $a_1 = -6$ м/с^2. Знак минус указывает на то, что направление вектора ускорения совпадает с отрицательным направлением координатной оси, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Задача 2. Кинематическое уравнение движения материальой точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^2$, где A=5 м, B=4м/с, C=-1м/с^2. Определить среднюю скорость $v_{xср}$ за интервал времени от t_1=1 с до t_2=6 с.

<u>*Дано*: $x = A + Bt + Ct^2$, A=5м, B=4м/с, C=- 1м/с^2, t_1=1 с , t_2=6 с.</u>

Найти: $\upsilon_{xср}$ - ? $a_{xср}$ - ?

Решение. Средняя скорость за интервал времени t_2-t_1 определяется выражением $\upsilon_{ср}=(x_2-x_1)/(t_2- t_1)$.

$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1{}^2 = 8$ м, $x_2 = A + Bt_2 + Ct_2{}^2 = -7$ м.

Подставим значения x_1, x_2, t_1 , t_2 и произведем вычисления: $\upsilon_{xср} = -3$ м/с.

Задача 3. С вертолета, находящегося на высоте 300 м, сброшен груз. Через какое время груз достигнт земли, если вертолет: 1) неподвижен, 2) опускается со скоростью 5 м/с, 3) поднимается со скоростью 5 м/с?

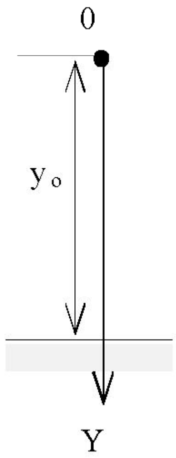
Дано: y_o=300 м, υ_o=5 м/с.

Найти: t - ?

Решение. Направим ось Y вертикально вниз, начало оси поместим в точке О на высоте y_o от поверхности земли.

1. Если вертолет неподвижен, то уравнение движения груза $y=gt^2/2$. (1)

Когда груз достигнет поверхности земли ($t=t_1$, $y=y_o$), уравнение (1) примет вид $y_o=gt_1^2/2$, откуда время падения груза на землю $t_1=\sqrt{\frac{2y_o}{g}}$; t_1=7,8 с.



2. Так как перед падением груз опускался вместе с вертолетом со скоростью v_o, то уравнение движения груза

$$y=\upsilon_o t+gt^2/2. \qquad (2)$$

Когда груз достигнет поверхности земли ($t=t_2$, $y=y_o$), уравнение (2) примет вид $y_o=\upsilon_o t_2+gt_2^2/2$, откуда $t_2^2+2\upsilon_o t_2/g - 2y_o/g=0$.

Решая полученное уравнение, находим

$$t_2=\frac{-\upsilon_0 \pm\sqrt{\upsilon_0^2+2gy_0}}{g};$$ $t_2\approx$7,3 с (отрицательный корень отбрасываем).

3. Составим уравнение движения груза:

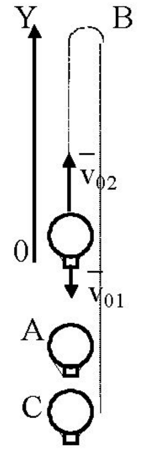
$$y= - \upsilon_o t + gt^2/2 \qquad (3)$$

(перед падением груз поднимается вместе с вертолетом со скоростью v_o). В момент достижения грузом земли ($t=t_3$, $y=y_o$) уравнение (3) примет вид

$$y_o= - \upsilon_o t_3+gt_3^2/2,$$ откуда $t_3^2 - 2v_o t_3/g-2y_o/g=0$.

$$t_3=\frac{v_0 \pm\sqrt{v_0^2+2gy_0}}{g};$$ $t_3\approx$8,3 с (отрицательный корень отбрасываем).

Задача 4. С воздушного шара, опускающегося вниз с постоянной скоростью 2м/с, бросили вертикально вверх груз со скоростью 18 м/с относительно земли. Определить расстояние между шаром и грузом в момент, когда груз достигает высшей точки своего подъема. Через какое время груз пролетит мимо шара, падая вниз.



Дано: υ_{01}= 2 м/с, υ_{02}=18 м/с

Найти: s-? τ - ?

Решение. Направим ось 0Y вертикально вверх, начало совместим с точкой 0, в которой находился шар в момент бросания груза. Тогда уравнения движения груза и воздушного шара:

$$y_1 = -\upsilon_{01}t; \qquad y_2 = \upsilon_{02}t - gt^2/2.$$

Скорость движения груза изменяется по закону $\upsilon_2 = \upsilon_{02} - gt$.

В наивысшей точке B подъема груза $v_2=0$. Тогда время подъема до этой точки $t_{под} = \upsilon_{02}/g$. Координата груза в точке B

$$y_{2B} = \upsilon_{02}t_{под} - gt^2_{под}/2 = \upsilon_{02}^2/2g.$$

За это время воздушный шар опустился до точки A; его координата

$$y_{1A} = -\upsilon_{01}t_{под} = -\upsilon_{01}.\,\upsilon_{02}/g.$$

Расстояние между точками A и B: $s = y_{2B} - y_{1A} = \upsilon_{02}^2/2g + \upsilon_{01}.\,\upsilon_{02}/g$.

Через промежуток времени τ, когда камень пролетит мимо шара, координаты тел будут одинаковы: $y_{1C} = y_{2C}$;

$$-\upsilon_{01}\tau = \upsilon_{02}\tau - g\tau^2/2. \qquad \text{Отсюда } \tau = 2(\upsilon_{01} + v_{02})/g \approx 4 \text{ с}.$$

Задача 5. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь на север 300 км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 27 км/ч?

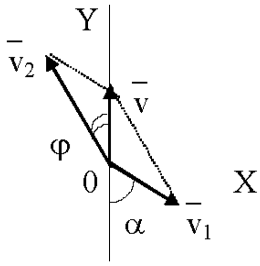
Дано: $t=7{,}2/10^3$с; $l=3.10^5$м; $\alpha=30° \approx 0{,}52$ рад; $v_2 \approx 7{,}2$ м/с.

Найти: υ_2 -? φ -?

Решение. Рассмотрим движение самолета в системе отсчета, связанной с землей.

Проведем ось OX в направлении на восток, а ось OY - на север. Тогда скорость движения самолета в выбранной системе отсчета $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$ (1),

где $\upsilon = l/t$ (2) .



Уравнение (1) в проекции на оси

OX: $0 = \upsilon_1 \sin\alpha - \upsilon_2 \sin\varphi$; OY: $\upsilon = \upsilon_2 \cos\varphi - \upsilon_1 \cos\alpha$, или $\quad \upsilon_1 \sin\alpha = \upsilon_2 \sin\varphi, \qquad \upsilon_2 \cos\varphi = \upsilon_1 \cos\alpha + \upsilon \qquad (3)$.

Разделив эти уравнения почленно, получим $\operatorname{tg}\varphi = \upsilon_1 \sin\alpha / (\upsilon_1 \cos\alpha + \upsilon)$,

или с учетом (2) $\qquad \operatorname{tg}\varphi = \upsilon_1 \sin\alpha / (\upsilon_1 \cos\alpha + l/t)$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \upsilon_1 \sin\alpha / (\upsilon_1 \cos\alpha + l/t) \approx 0{,}078 \text{ рад}.$$

Возводя в квадрат правые и левые части уравнений (3) и складывая полученные уравнения, находим

$$\upsilon_2^2 \sin^2\varphi + \upsilon_2^2 \cos^2\varphi = \upsilon_1^2 \sin^2\alpha + (\upsilon_1 \cos\alpha + \upsilon)^2,$$

откуда $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\upsilon_1 \upsilon \cos\alpha + \upsilon^2}$, или с учетом (2)

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2\upsilon_1 \upsilon \cos\alpha + (l/t)^2} \approx 48{,}4 \text{ (м/с)}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Координаты материальной точки изменяются со временем по закону $x=4t$, $y=3t$, $z=0$. Найти зависимость пройденного точкой пути от времени, отсчитывая расстояние от начального ее положения. Какой путь пройдет точка за 5 с?

1.2. Лодка движется перпендикулярно берегу со скоростью 7,2 км/ч. Течение относит ее на 150 м вниз по реке. Найти: 1) скорость течения реки, 2) время, затраченное на переезд через реку. Ширина реки 0,5 км.

1.3. Тело падает вертикально с высоты 19,6 м с нулевой начальной скоростью. Какой путь пройдет тело: 1) за первую 0,1 с своего движения, 2) за последнюю 0,1 с своего движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.4. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 3 с. 1) Какова начальная скорость тела? 2) На какую высоту поднялось тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.5. Камень бросают вертикально вверх. Некоторый начальный отрезок пути он пролетает за 1 с. Следующий такой же по величине отрезок пути он пролетает за 4 с. На какую максимальную высоту поднимется камен? В момент времени (t_1+t_2) камень движется вверх.

1.6. Дождевая капля в момент, когда она достигает поверхности земли, имеет конечную скорость 15 м/с. Одна из капель падает в колодец глубиной 10 м. Сколько времени нужно для того, чтобы человек, стоящий на земле, услышал удар капли о поверхность воды, если скорость звука в воздухе 340 м/с.

1.7. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $s=At-Bt^2+Ct^3$, где $A=2$ м/с, $B=3$ м/с^2, $C=4$ м/с^3. Найти: 1) зависимость скорости и ускорения от времени; 2) расстояние, пройденное телом, скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения. Построить график пути, скорости и ускорения для $0 \le t \le 3$ с через 0,5 с.

1.8. Зависимость пройденного телом пути от времени дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2$, где $A=3$ м, $B= 2$ м/с, $C= 1$ м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела за первую, вторую и третью секунду движения.

1.9. Определить траекторию движения точки, заданного уравнениями: $x=4t^2 + 2$; $y=6t^2 - 3$; $z=0$. Построить график зависимости пути, пройденного точкой, от времени.

1.10. Движение материальной точки задано уравнениями: $x=8t^2+4$; $y=6t^2-3$; $z=0$. Определить модули скорости и ускорения точки в момент времени $t=10$ с.

1.11. Какой путь пройдет тело за время $t=10$ с от начала движения, если уравнения его движения $x=2t^2+3t+4$; $y=3t^2+4t-2$; $z=0$?

1.12*. Определить зависимость пути от времени, если ускорение тела пропорционально квадрату скорости и направлено в сторону, противоположную ей.

1.13. Скорость материальной точки, движущейся вдоль оси X, определяется уравнением $v_x=0{,}2-0{,}1t$. Найти координату точки в момент времени $t=10$ с,если в начальный момент времени она находилась в точке $x_o=1$ м.

1.14. Скорость течения реки по ее ширине меняется по закону $v=-4x^2+4x+0{,}5$, где $x=a/b$ (*a*- расстояние от берега, *b*-ширина реки). На какое расстояние снесет лодку течением при переправе, если скорость ее относительно воды равна 2 м/с и направлена прямо к противоположному берегу. Ширина реки 420 м.

1.15. Самолет летит относительно воздуха со скоростью 800 км/ч. Ветер дует с запада на восток со скоростью 15 м/с. С какой скоростью будет двигаться самолет относительно земли на юг и под каким углом к меридиану надо держать при этом курс?

1.16. Дождевые капли, падающие отвесно, падают на окно автомобиля, движущегося со скоростью 45 км/ч, и оставляют на нем след под углом 30° к вертикали. Определить скорость падения капель.

1.17. Пассажир поезда, идущего со скоростью 40 км/ч, видит в течение 3 секунд встречный поезд длиной 75 м. С какой скоростью идет встречный поезд?

1.18. Исследуйте график скорости движения автомобиля (рис.1.18). Начертите график пути, соответствующий данному графику скорости.

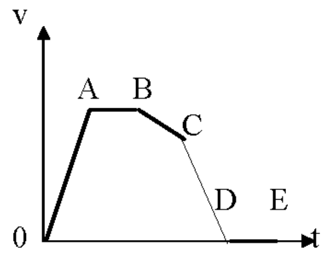


Рис.1.18

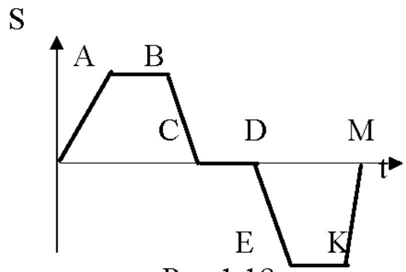


Рис.1.19.

1.19. Как двигался мотоцикл, график скорости движения которого изображен на рис. 1.19. Начертите график пути, соответствующий графику скорости. Площадь трапеции ОАВС равна площади трапеции ДЕКМ.

1.20. Тело прошло за первую секунду 1 м, за вторую секунду - 2 м, за третью секунду 3 м, за четвертую секунду - 4 м и т.д. Можно ли считать такое движение равноускоренным?

1.21. С крыши девятиэтажного дома уронили тяжелый предмет. Какие этажи пройдет предмет за последовательные равные промежутки времени?

2. Криволинейное движение.

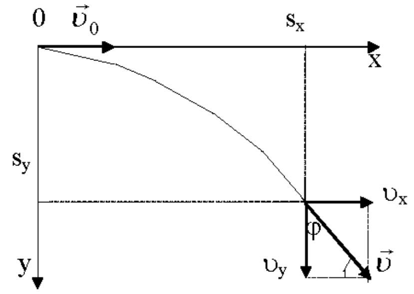
Криволинейное движение – движение, при котором траектория – кривая линия.

Примеры решения задач.

Задача 1. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти: 1) сколько времени камень будет в движении, 2) на каком расстоянии он упадет на землю, 3) с какой скоростью он упадет на землю, 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано: Н=25 м, v_o=15 м/с

Найти: t-? s_x- ? υ - ? φ- ?



Решение. Перемещение брошенного горизонтально камня можно разложить на два: горизонтальное s_x и s_y: $s_y=H=gt^2/2$, $s_x=\upsilon_0 t$,

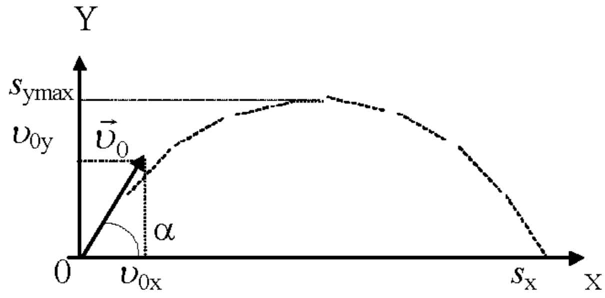
где t - время движения.

Отсюда: 1) $t = \sqrt{\dfrac{2s_y}{g}} = 2{,}26$ с;

2) $s_x=\upsilon_0 t= 33{,}9$ м; 3) $\upsilon_y=gt=22{,}1$м/с;

4) $\sin\varphi = \upsilon_y/\upsilon=0{,}827$; $\varphi=55°48'$.

Задача 2. Мяч бросили со скоростью 10 м/с под углом 40° к горизонту. Найти: 1) на какую высоту поднимется мяч; 2) на каком расстоянии от места бросания мяч упадет на землю, 3) сколько времени он будет в движении.



<u>*Дано:* υ_o=10 м/с, α=40°</u>.

Найти: s_y - ? s_x - ? t - ?

Решение. 1) Найдем наибольшую высоту $s_{y\ max}$, на которую поднимается тело, брошенное со скоростью v_o под углом α к горизонту. Имеем (см. рис.) :

$$\upsilon_y=\upsilon_o \sin\alpha - gt; \qquad (1)$$

$$s_y=\upsilon_o t \sin\alpha - gt^2/2. \qquad (2)$$

В верхней точке $\upsilon_y=0$ и из (1) получим $\upsilon_o \sin\alpha = gt_1$, отсюда время подъема мяча $t_1=\upsilon_o \sin\alpha /g$. Подставляя t_1 в (2), получим

$s_{y\ max}= \upsilon_o^2 \sin^2\alpha /(2 g)= 2{,}1$ м.

2) Найдем дальность полета $s_{x\ max}$ тела, брошенного под углом к горизонту. Имеем:

$$\upsilon_x=\upsilon_o \cos\alpha , \qquad (3)$$

$$s_x=\upsilon_x t=\upsilon_o t \cos\alpha. \qquad (4)$$

Тело упадет на горизонтальную плоскость через время $t_2=2t_1=2\upsilon_o\sin\alpha/g$.

Подставляя t_2 в (4), получим $s_{x\ max} = \upsilon_o^2 \sin2\alpha/g=10{,}0$ м.

3) $t_2=2t_1=2\upsilon_o\sin\alpha/g=1.3$ с.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1. Камень, брошенный горизонтально, упал на землю через 0,5 с на расстоянии 5 м по горизонтали от места бросания. 1) С какой высоты был брошен камень? 2) С какой начальной скоростью он был брошен? 3) С какой скоростью он упал на землю? 4) Какой угол составляет траектория камня с горизонтом в точке его падения на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

2.2. Камень брошен в горизонтальном направлении. Через 0,5 с после начала движения численное значение скорости камня стала в 1,5 раза больше его начальной скорости. Найти начальную скорость камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.3. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии 5 м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на 1 м меньше высоты, с которой брошен мяч. 1) С какой скоростью был брошен мяч? 2) Под каким углом мяч подлетает к поверхности стенки? Сопротивление воздуха не учитывать.

2.4. Бомбардировщик пикирует на цель под углом 60° к горизонту со скоростью 540 км/ч и бросает бомбу на высоте 600 м. На каком расстоянии надо освободить бомбу, чтобы она попала в цель?

2.5. Тело брошено со скоростью v_o под углом к горизонту. Продолжительность полета 2,2 с. Найти наибольшую высоту поднятия этого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.6. Камень, брошенный со скоростью 12 м/с под углом 45° к горизонту, упал на землю на расстоянии s от места бросания. С какой высоты надо бросить камень в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости он упал на то же место?

2.7. Камень брошен горизонтально со скоростью 15 м/с. Найти нормальное и тангенциальное ускорения камня через 1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.8. Камень брошен горизонтально со скоростью 10 м/с. Найти радиус кривизны траектории камня через три секунды после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.9. Тело брошено со скоростью 14,7 м/с под углом 30° к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения тела через 1, 25 с после начала движения.

2.10. Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту. Найти радиус кривизны траектории через 1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.11. С башни высотой 25 м бросили камень со скоростью 15 м/с под углом 30° к горизонту. Найти: 1) сколько времени камень будет в движении, 2) на каком расстоянии от основания башни он упадет на землю, 3) с какой скоростью он упадет на землю, 4) какой угол составит траектория камня с горизонтом в точке падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

2.12. Камень, брошенный с высоты 2,1 м под углом 45° к горизонту, падает на землю на расстоянии 42 м (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость камня, время полета и максимальную высоту подъема над уровнем земли. Определить также радиусы кривизны траектории в верхней точке и в точке падения камня на землю.

2.13. С вершины наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 36°, бросают камень под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 5 м/с. На каком расстоянии от точки бросания упадет камень?

2.14. Шарик бросают под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 14 м/с. На расстоянии 11 м от точки бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стенку. На каком расстоянии от стенки шарик упадет на землю?

2.15. Под каким углом к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна расстоянию, на которое бьет струя?

2.16. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью под разными углами к горизонту. Определить расстояние между телами спустя t=2 с после начала движения, если v_o=10 м/с, а α_1=30° и α_2=60°.

2.17. Через какое время вектор скорости тела, брошенного под углом α=60° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с, будет составлять с горизонтом угол β = 30°? Сопротивление воздуха не учитывать.

2.18 Парашютист, прыгнувший с горизонтально летящего самолета, даже при отсутствии ветра смещается от того места, над которым он покинул самолет. Почему?

3. Вращательное движение.

Кинематическое уравнение вращательного движения

$$\varphi = f(t),$$

где φ - угловое перемещение.

Мгновенная угловая скорость $\omega = d\varphi/dt$.

Угловое ускорение $\varepsilon = d\omega/dt$.

Угловая скорость и угловое ускорение являются аксивльными векторами, их направления совпадают с осью вращения.

Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_o + \omega t,$$

где φ_o- начальное угловое перемещение. При равномерном вращении

$$\omega = \text{const} \quad \text{и} \quad \varepsilon = 0,$$

Частота вращения $n=N/t$, или $n=1/T$,

где N - число оборотов, совершаемых телом за время t; T - период вращения (время одного полного оборота).

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (ε=const)

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \varepsilon t^2/2,$$

где ω_o - начальная угловая скорость.

Угловая скорость тела при равнопеременном вращении $\omega = \omega_o + \varepsilon t$.

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

Длина пути, пройденного точкой по дуге окружности радиусом R:

$$s = \varphi R$$

(φ - угол поворота тела).

Скорость точки линейная $\upsilon = \omega R$; $\omega = 2\pi n = 2\pi/T$

Ускорение точки: тангенциальное $a_\tau = \varepsilon R$; нормальное - $a_n = \omega^2 R$.

$$a_n = \upsilon^2/R = 4\pi^2 n^2 R = 4\pi^2 R/T^2.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Найти угловое ускорение колеса.

Дано: ω=20 рад/с , N=10 об

Найти: ε-?

Решение. При равномерном вращательном движении имеют место следующие два уравнения: $\varphi=\varphi_o+\ \omega_o t+\varepsilon t^2/2$ и $\omega = \omega_o+\varepsilon t$. По условию $\omega_o=0$, тогда эти уравнения примут вид: $\varphi=\varepsilon t^2/2$ и $\omega = \varepsilon t$. Решая их и учитывая, что $\varphi=2\pi N$, получим окончательно $\varepsilon=\omega^2/4\pi N=3{,}2$ рад/с.

Задача 2. Колесо радиусом 10 см вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с^2. Найти для точек на ободе колеса к концу первой секунды после начала движения: 1) угловую скорость, 2) линейную скорость, 3) тангенциальное ускорение, 4) нормальное ускорение, 5) полное ускорение и 6) угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса.

Дано: R= 0,1 м, ε=3,14 рад/с^2

Найти: ω - ? υ - ? a_τ - ? a - ?

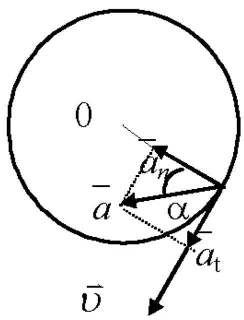
Решение. 1) При равнопеременном вращательном движении угловая скорость $\omega = \omega_o+\varepsilon t$. По условию $\omega_o=0$, тогда $\omega = \varepsilon t$, т.е. ω растет пропорционально времени. К концу первой секунды ω=3,14 рад/с.

2) Так как $\upsilon=\omega R$, то линейная скорость также пропорционально времени. К концу первой секунды υ = 3,14 м/с.

3) Тангенциальное ускорение $a_t=\varepsilon R$ не зависит от времени t. В нашем случае a_t=0,314 м/с^2.

4) Нормальное ускорение $a_n=\omega^2R=\varepsilon^2t^2R$, т.е. нормальное ускорение растет пропорционально квадрату времени: при t=1 с a_n=0,986м/с^2.

5) Полное ускорение растет со временем по закону (см. рис.10): $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=a_t\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}$. При t=1 с a=1,03 м/с^2.



6) Имеем $\sin\alpha=\dfrac{a_t}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}}$, где α - угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса. В начальный момент времени, т.е. при t=0, a =a_t - полное ускорение

направлено по касательной. При t=∞ $a = a_n$ (так как a_t=const и a_n пропорционально времени), т.е. при t=∞ полное ускорение направлено по нормали. К концу первой секунды $\sin\alpha = a_t/a_n = 0{,}314/1{,}03 = 0{,}305$, т.е. $\alpha = 17^\circ 46'$.

Задачи для самостоятельного решения.

3.1. Маховое колесо, спустя 1 минуту после начала вращения, приобретает скорость, соответствующую частоте 720 об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

3.2. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей частоте 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?

3.3. Вал вращается с постоянной скоростью, соответствующей частоте 180 об/мин. С некоторого момента вал тормозится и вращается равнозамедленно с угловым ускорением, численно равным 3 рад/с^2. 1) Через сколько времени вал остановится? 2)Сколько оборотов он сделает до остановки?

3.4. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет: 1) равно тангенциальному, 2) вдвое больше тангенциального?

3.5. Точка движется по окружности радиусом 10 см с постоянным тангенциальным ускорением. Найти тангенциальное ускорение точки, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равно 79,2 см/с.

3.6. Точка движется по окружности радиусом 2 см. Зависимость пути от времени дается уравнением $x=Ct^3$, где C=0,1 см/с^3. Найти нормальное и тангенциальное ускорение точки в момент, когда линейная скорость точки равна 0,3 м/с.

3.7. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол 60° с направлением линейной скорости этой точки.

3.8. Колесо радиусом 10 см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса, от времени движения дается уравнением $v=At+Bt^2$, где A=3 см/с^2 и B=1 см/с^3. Найти угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса в моменты времени t=0,1,2,3,4 и 5 с после начала движения.

3.9. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где B=1 рад/с, C=1 рад/с^2 и D=1 рад/с^3. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса, равно 346 м/с^2.

3.10. Найти, во сколько раз нормальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, больше ее тангенциального ускорения для того момента, когда вектор полного ускорения этой точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости.

3.11. Чтобы брызги от велосипедных колес не попадали на велосипедиста, над колесами велосипеда устанавливаются щитки. Изобразите схематически на рисунке наименьшие размеры щитков, при которых брызги не могут попасть в велосипедиста.

3.12. Когда резец токарного станка снимает за каждую минуту стружку длиннее - в начале обтачивания или в конце, когда радиус детали уменьшился? Угловую скорость считать постоянной.

3.13. Почему верхние спицы катящегося колеса иногда сливаются для глаз, в то время как нижние видны раздельно?

ДИНАМИКА

Динамика - раздел механики, в котором изучают закономерности механического движения материальных тел под действием приложенных к ним сил и причины возникновения у тел ускорения.

Основная задача механики состоит в том, чтобы по известным законам движения определить силы, действующие на тело.

4. Динамика прямолинейного движения.

Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

в *векторной* форме: $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i$, или $m\vec{a}=\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i$,

где $\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{F}_i$ - геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку массой *m*, $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$ – импульс; N – число сил, действующих на точку;

в *координатной* форме (скалярной):

$$ma_x=\Sigma F_{xi}\ ,\ ma_y=\Sigma F_{yi};\ ma_z=\Sigma F_{zi}\ ,$$

где под знаком суммы стоят проекции сил $\overline{F_i}$ на соответствующие оси координат.

Третий закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$,

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой (т.е. действие одного тела на другое носит взаимный характер).

Сила упругости определяется по закону Гука: $(F_{упр})_x = -kx$,
где k - жесткость тела (зависит от размеров тела и материала), x - удлинение тела.

Закон всемирного тяготения: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$,

где m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, находящихся на расстоянии r друг от друга, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.м^2/кг^2 - гравитационная постоянная.

Сила трения скольжения $F_{тр}=\mu F_д=\mu N$,
где μ - коэффициент трения, $F_д$ - сила нормального давления, N - сила реакции опоры. $F_д=N$ - по третьему закону Ньютона.

Примеры решения задач.

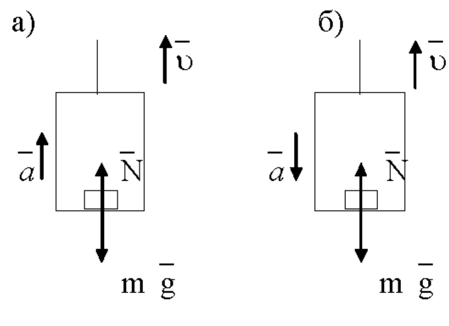
Задача 1. Тело массой 300 кг лежит на полу кабины грузового подъемника, поднимающегося вверх. Ускорение кабины 3 м/с^2. Определить силу давления тела на пол кабины.

<u>*Дано*: m=300 кг, a=3 м/с^2</u>

Найти: Р - ?

Решение. Основной закон динамики для тела запишется в виде: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

где $\overline{N}$ – сила реакции опоры.



Рассмотрим два случая (рис.4.1):

а) ускорение направлено вверх:

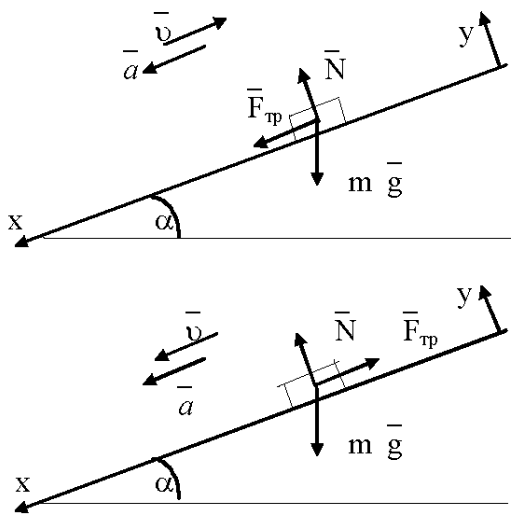
$$ma=N_1 - mg,$$

отсюда $N_1=ma+mg$.

По третьему закону Ньютона $P_1=N_1$, $P_1= ma + mg$, P_1=3,84 кН.

б) ускорение направлено вниз: - ma=N$_2$ - mg, следовательно N$_1$=mg-ma, т.е. $P_2=mg- ma$, P_2=2,04 кН.

Задача 2. Ледяная горка составляет с горизонтом угол α. По ней пускают вверх камень, который после подъема съезжает вниз. Чему равен коэффициент трения, если время спуска в n раз больше времени подъема (рис.12).



Дано: $t_2/t_1=n$.

Найти: μ -?

Решение. Уравнение движения камня $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{òð}$

При движении вверх – движение равнозамедленное. В проекциях на оси

OX: $ma_1=F_{тр}+mg\sin\alpha;$

OY: $N - mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N= mg\cos\alpha.$

Тогда сила трения $F_{тр} =\mu N =\mu mg\cos\alpha$, и окончательно уравнение движения $ma_1 =mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha.$ (1)

При движении вниз: $ma_2= mg\sin\alpha - F_{тр}$. Проведя аналогичные преобразования, получим уравнение движения в этом случае:

$$ma_2 =mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2): $a_1 = g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$; $a_2 =g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$.

При движении вверх камень проходит путь $s=v_o t_1-a_1t_1^2/2$; скорость в конце подъема $v=0$, следовательно $v_o= a_1t_1$, тогда

$$s= a_1t_1^2/2 \qquad (3).$$

При движении вниз камень проходит путь $s= a_1t_1^2/2$ (4).

Из (3) и (4) получим $a_1/a_2= (t_2/t_1)^2=n^2$.

Используя (1) и (2) : $(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)= n^2$, отсюда

$$\mu=\frac{n^2-1}{n^2+1}\,\mathrm{tg}\alpha.$$

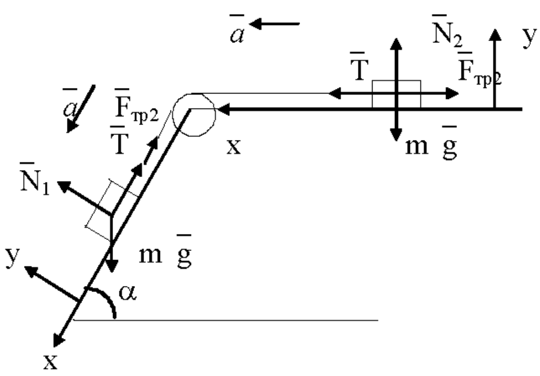
Задача 3. Наклонная доска, составляющая с горизонтом угол 60°, приставлена к горизонтальному столу. Два груза массой по 1 кг каждый соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, и могут перемещаться соответственно по доске и столу. Найти силу натяжения нити и ускорение системы, если коэффициент трения тел о поверхность доски и стола одинаков и равен 0,3.

Дано: $m_1=m_2=m=1$ кг, $\alpha=60°$, $\mu=0{,}3$

Найти: a - ? T - ?

Решение. На рисунке укажем все силы, действующие на каждое тело. Уравнение движения для любого тела

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$



В проекциях на оси X и Y:

I тело

OX: $m\mathit{a}$=mg sinα –T– $F_{тр1}$

OY: N_1-mg cosα=0,

но $F_{тр1}=\mu N_1=\mu$ mg cosα, тогда

$m\mathit{a}$ = mg sinα – T–μ mg cosα. (1)

II тело

OX: $m\mathit{a}$= T-$F_{тр1}$

OY: N_2-mg =0, но $F_{тр2}=\mu N_2=\mu$ mg, тогда

$m\mathit{a}$ = T- μ mg. (2)

Решая систему уравнений (1) и (2),получим

a=[mg sinα-mg(μ+μcosα)]/(2m)=[g sinα-gμ(1+cosα)]/2;

T=m(a+μg). a=2 м/с; T=5 Н.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Найти, с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт, равно: 1) 12кН; 2) 6 кН.

4.2. Автомобиль массой 1 т останавливается при торможении за 5 с, пройдя при этом равнозамедленно расстояние в 25 м. Найти начальную скорость автомобиля; силу торможения.

4.3. Какую силу надо приложить к вагону, стоящему на рельсах, чтобы вагон стал двигаться равноускоренно и за время 30 с прошел путь 11 м? Масса вагона 16 т. Во время движения на вагон действует сила трения, равная 0,05 силы тяжести вагона.

4.4. Поезд массой 500 т после прекращения тяги паровоза под действием силы трения в 98 кН останавливается через 1 мин. С какой скоростью шел поезд?

4.5. Вагон массой 20 т движется с постоянным отрицательным ускорением, численно равным 0,3 м/с^2. Начальная скорость вагона равна 54 км/ч. 1) Какая сила торможения действует на вагон? 2) Через сколько времени вагон остановится? 3) Какое расстояние вагон пройдет до остановки?

4.6. Под действием постоянной силы 9,8 Н тело движется прямолинейно так, что зависимость пройденного телом расстояния s от времени t дается уравнением $s=A-Bt+Ct^2$. Найти массу тела, если постоянная C=1 м/с^2.

4.7. Тело массой 0,5 кг движется так, что зависимость пройденного телом пути s от времени движения t дается уравнением $s=A \sin \omega t$, где A=5 см и $\omega=\pi$ рад/с. Найти силу, действующую на тело через 1/6 секунду после начала движения.

4.8. Трамвай, трогаясь с места, движется с постоянным ускорением 0,5 м/с^2. Через 12 с после начала движения мотор трамвая выключается и трамвай движется до остановки равнозамедленно. На всем пути движения трамвая коэффициент трения равен 0,01. Найти: 1) наибольшую скорость движения трамвая, 2) общую продолжительность движения, 3) отрицательное ускорение трамвая при замедленном движении, 4) общее расстояние, пройденное трамваем.

4.9. На движущийся по прямолинейному горизонтальному пути поезд действует постоянная сила тяги тепловоза, равная силе трения. Какое движение совершает поезд? Как проявляется в этом случае закон инерции?

4.10. Почему нагруженный автомобиль на булыжной мостовой движется более плавно, чем такой же автомобиль без груза?

4.11. На весах уравновешен человек, держащий в руке тяжелый груз. Что произойдет с весами, если человек быстро поднимет груз вверх?

Движение тел по наклонной плоскости.

4.12. Автомобиль весит 1 т. Во время движения на автомобиль действует сила трения, равная 0,1 его силы тяжести. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, если автомобиль движется с постоянной скоростью: 1) в гору с уклоном в 1 м на каждые 25 м пути, 2) пол гору с тем же уклоном.

4.13. Тело лежит на наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 4°. 1) При каком предельном значении коэффициента трения тело начнет скользить по наклонной плоскости? 2) С каким ускорением будет скользить тело по плоскости, если коэффициент трения равен 0,03? 3) Сколько времени потребуется для прохождения при этих условиях 100 м пути? 4) Какую скорость тело будет иметь в конце этих 100 м?

4.14. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°.Зависимость пройденного телом расстояния s от времени t дается уравнением $s=Ct^2$, где C=1,73 м/с^2. Найти коэффициент трения тела о плоскость..

4.15. На наклонной плоскости длиной 5 м и высотой 3 м находится груз массой 50 кг. Какую силу, направленную вдоль наклонной плоскости, надо приложить, чтобы: удержать этот груз? Втаскивать равномерно вверх? Втаскивать вверх с ускорением 1 м/с^2. Коэффициент трения 0,2.

4.16. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 15° с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в x=2 раза меньше времени спуска.

Движение системы связанных тел.

4.17. Две гири массой 2 кг и 1 кг соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Найти: 1) ускорение с которым движутся гири; 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

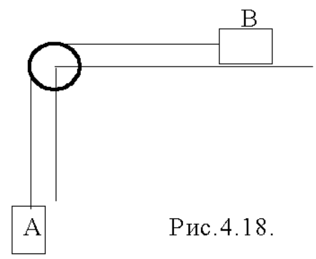


Рис.4.18.

4.18. Невесомый блок укреплен на конце стола (рис.4.18) Гири A и B равной массы $m_1=m_2=1$кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири B о стол равен 0,1. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

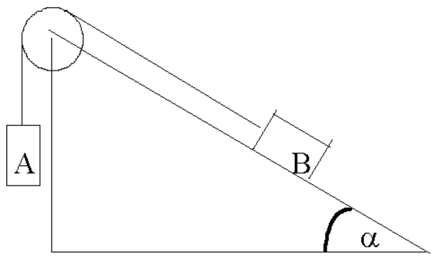


Рис.4.19.

4.19. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости (рис.4.19), составляющей с горизонтом угол $\alpha=30^\circ$. Гири A и B равной массы 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением в блоке, а также трением гири B о наклонную плоскость пренебречь.

4.21. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициент трения гири B о наклонную плоскость равен 0,1. Трением в блоке пренебречь.

4.22. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$ (рис.4.22). Гири A и B равной массы 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением гирь A и B о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

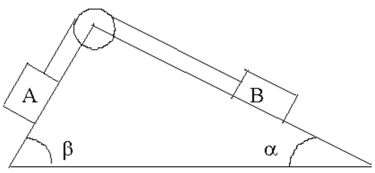


Рис.4.22.

4.23. Решить предыдущую задачу при условии, что коэффициенты трения гирь о наклонные плоскости равны $\mu_1=\mu_2=0,1$. Трением в блоке пренебречь.

4.24. Три груза массой по 1 кг связаны нитью и движутся по горизонтальной плоскости под действием силы 10Н, направленной под углом 30° к горизонту. Определить ускорение системы и силы натяжения нитей, если коэффициент трения равен 0,1.

4.25. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза массой по 100 г каждый. На один из грузов положен перегрузок массой 10 г. Найти силу, с которой перегрузок давит на груз, а также силу давления на ось блока.

4.26. Человек везет двое саней массой по 15 кг каждые, связанные между собой веревкой, прикладывая силу 120 Н под углом к горизонту. Найти ускорение саней и силу натяжения веревки, связывающей сани, если коэффициент трения полозьев о снег 0,02.

4.27. На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укрепленные на обоих концах стола. К свободным концам нити подвешены грузы массами 0,85 и 0,2 кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 3 с проходит расстояние 0,81 м. Зная, что масса бруска 2 кг, определить коэффициент трения скольжения и силу натяжения нитей.

5. Динамика криволинейного движения.

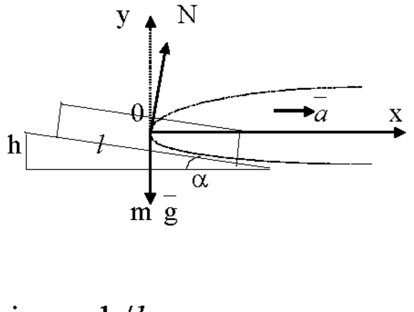
Примеры решения задач.

Задача 1. На сколько должен быть поднят наружный рельс над внутренним на закруглении железнодорожного пути радиусом 300 м, если ширина колеи 1524 мм? Скорость, при которой сила давления на рельсы перпендикулярна им, принять равной 54 км/ч.

Дано: R=300 м, l=1,524 м, v=15 м/с.

Найти: h - ?

Решение. Поезд должен двигаться по окружности радиуса R со скоростью v, т.е. с ускорением $a=v^2/R$, направленным горизонтально. Это ускорение вызывает равнодействующая сил $\bar{N}$ и m $\bar{g}$. Поэтому наружный рельс должен быть приподнят на некоторую высоту h. Второй закон Ньютона $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ в проекциях на оси



OX: $ma = N \sin\alpha$,

OY: $N \cos\alpha - mg = 0$.

Откуда $\mathrm{tg}\alpha = ma/mg = \upsilon^2/(gR)$.

Так как угол α мал, то $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$. Из рис. $\sin\alpha = h/l$.

Следовательно, $h = l\upsilon^2/(Rg)$. h=0,12 м.

Задачи для самостоятельного решения.

5.1. Какой продолжительности должны быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса?

5.2. Трамвайный вагон массой 5 тонн идет по закруглению радиусом 128 м. Найти силу бокового давления колес на рельсы при скорости движения 9 км/ч.

5.3. Ведерко с водой, привязанное к веревке длиной 60 см, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти: 1) наименьшую скорость вращения ведерка, при которой в высшей точке вода из него не выливается, 2) натяжение веревки при этой скорости в высшей и низшей точках окружности. Масса ведерка с водой 2 кг.

5.4. Камень, привязанный к веревке, равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти массу камня, если известно, что разность между максимальным и минимальным натяжениями веревки равна 9,8 Н.

5.5. Гирька, привязанная к нити длиною 30 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом 15 см. Какому числу оборотов в минуту соответствует скорость вращения гирьки? (59 об/мин)

5.6. Гирька массой 50 г, привязанная к нити длиною в 25 см, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Скорость вращения гирьки соответствует 2 об/с. Найти натяжение нити.

5.7. Диск вращается вокруг вертикальной оси, делая 30 об/мин. На расстоянии 20 см от оси вращения на диске лежит тело. каков должен быть коэффициент трения между телом и диском, чтобы тело не скатилось с диска?

5.8. Определить скорость движения автомобиля массой 2 т по вогнутому мосту радиусом 100 м, если он давит на середину моста с силой 25 кН..

5.9. Шарик на веревке длиной 50 см равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти, при какой частоте вращения веревка оборвется, если предел прочности веревки mg, где m - масса шарика.

5.10. Самолет, летящий со скоростью 900 км/ч, делает “мертвую петлю”. Каков должен быть радиус “мертвой петли”, чтобы наибольшая сила, прижимающая летчика к сидению, была равна: пятикратному весу летчика? 2) десятикратному весу летчика?

5.11. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч, делая поворот радиусом кривизны в 100 м. Насколько при этом он должен накрениться, чтобы не упасть при повороте?

5.12. Шоссе имеет вираж с уклоном в 10° при радиусе закругления дороги в 100 м. На какую скорость рассчитан вираж?

5.13. Почему при прохождении поезда через железнодорожный мост машинист уменьшает скорость поезда.

5.14. Как повлияет на «легкость хода» велосипеда увеличение диаметра его колес? Прочие размеры частей велосипеда считать неизменными.

Закон всемирного тяготения.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

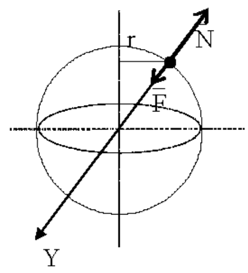
где m_1 и m_2 - массы взаимодействующих тел, находящихся на расстоянии r друг от друга, G = 6,67.10^{-11} Н.м^2/кг^2 - гравитационная постоянная.

Примеры решения задач.

Задача 1. На экваторе некоторой планеты тело весит вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества этой планеты 3.10^3 кг/м^3. Определить период вращения планеты вокруг своей оси.

Дано: $P=P_п/2$, $\rho=3.10^3$ кг/м^3

Найти: Т - ?



Решение .На тело, находящееся на поверхности планеты, действуют: $\bar{F}$- сила тяготения со стороны планеты, $\bar{N}$ - сила нормальной реакции планеты. По определению,

F= GMm/R^2, где M - масса планеты,m - масса тела, R-радиус планеты.

Масса планеты: $M=\rho V=(4/3)\pi R^3\rho$,

а F= $G(4/3)\pi R^3\rho m/R^2= G(4/3)\pi R\rho m.$ (1)

По второму закону Ньютона: $\overline{m\vec{g}} + \vec{N} = m\vec{a}_n$

в скалярной форме относительно оси Y: $F - N = ma_n$, (2)

или $(4/3)G\pi R\rho m - N = ma_n$. (3)

где N – сила нормальной реакции поверхности на экваторе.

Рассмотрим два частных случая движения тела.

1. Тело находится на полюсе, т.е. r=0, тогда линейная скорость тела $v=2\pi r/T=0$. Следовательно, уравнение (3) примет вид $(4/3)G\pi R\rho m$ - N =0, откуда $N_п=(4/3)G\pi R\rho m$, (4)

$N_п$ - сила нормальной реакции на полюсе.

2. Тело находится на экваторе. В этом случае r=R и $v=2\pi r/T$. Тогда уравнение (3) примет вид: $(4/3)G\pi R\rho m - N=m(2\pi r)^2/RT^2$, откуда

$$T=\sqrt{\frac{m4\pi^2R}{4\pi G\rho mR/3-N}}, \qquad (5)$$

По условию задачи, $P_э=P_п/2$. Поскольку P=N, то $N=N_п/2$, или с учетом (4)

$$N=(2/3)\ G\pi R\rho m$$

Подставим формулу (6) в (5): $T=(6\pi/G\rho)^{1/2}\approx 9{,}7.10^3$ с.

Задачи для самостоятельного решения.

5.15. Средняя высота спутника над поверхностью Земли 1700 км. Определить его скорость и период вращения.

5.16. Найти силу тяготения, действующую со стороны Земли на тело массой 1 кг, находящееся на поверхности Луны. Расстояние между центрами Земли и Луны принять равными 384 000 км.

5.17. Спутник делает 16 оборотов за время одного оборота Земли. Определить период, высоту и скорость спутника, считая его орбиту круговой.

5.18. С увеличением высоты полета спутника его скорость уменьшилась с 7,79 до 7,36 км/с. Определить, на сколько изменились период вращения спутника и удаленность его от земной поверхности.

5.19. Определить период вращения искусственного спутника вблизи планеты, которую можно принять за однородный шар плотностью ρ .

5.20. Спутник вывели на круговую орбиту со скорость v над полюсом Земли. Найти расстояние от спутника до поверхности Земли.

5.21. Найти массу Земли, если спутник, движущийся в ее экваториальной плоскости с запада на восток по круговой орбите радиуса $R=2.10^4$ км, появляется над некоторым пунктом на экваторе через каждые τ=11,6ч.

5.22*. Считая Землю шарообразной, найти зависимость ускорения силы тяжести Земли от широты местности. Вычислить g на полюсе, экваторе и на широте Одессы

5.23* Найти изменение ускорения силы тяжести тела на глубине h от поверхности Земли. На какой глубине ускорение силы тяжести составит 0,3 от ускорения силы тяжести на поверхности Земли? Плотность земли считать постоянной. Считать, что со стороны вышележащего слоя тело не испытывает никакого притяжения.

5.24. Когда Земля быстрее движется по своей орбите вокруг Солнца (для северного полушария) или летом?

5.25. Притяжение Луны Солнцем примерно в два раза больше, чем притяжение ее Землей. Почему же Луна - спутник Земли, а не самостоятельная планета.

5.26. Можно ли так запустить спутник, чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом Земли?

5.27. Может ли спутник обращаться устойчиво в плоскости, не проходящей через центр Земли?

6. Законы сохранения в механике.

1. Импульс тела: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

2. $\vec{F}dt = d\vec{p}$ – импульс действующей силы равен изменению импульса тела.

3. Закон сохранения импульса $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const$, или $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i = const.$

где N - число материальных точек (или тел), входящих в систему. Данный закон выполняется: а) для замкнутой системы тел, б) если система незамкнутая, но $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$, в) если время взаимодействия очень мало.

4. Работа, совершаемая постоянной силой F при перемещении s:

$$A = \int_s (\vec{F}d\vec{s}) = \int_s F_s ds$$

где F_s - проекция силы на направление пути, интегрирование ведется вдоль траектории, обозначаемой s.

В частном случае постоянной силы, действующей под неизменным углом к перемещению $A=F\, s \cos\alpha$,

где α - угол между силой F и перемещением s.

5. Мощность $N=dA/dt$, или $N = F\upsilon\cos\alpha$,

где dA - работа, совершаемая за промежуток времени dt.

6. Кинетическая энергия материальной точки (или тела, движущегося поступательно) $E_к=m\upsilon^2/2$, или $E= p^2/2m$, $(A_F= \Delta E_K)$

7. Потенциальная энергия - энергия взаимодействия тел, или частей одного и того же тела;

а) потенциальная энергия упруго деформированного тела (сжатой или растянутой пружины) $E_п=kx^2/2.$

б) потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести $E_п=mgh$,

где h - высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии. Эта формула справедлива при условии h<<R, где R - радиус Земли;

в) потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек (или тел) массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии r друг от друга $E_п = -Gm_1m_2/r.$ $(A_F= -\Delta E_п)$

8. Полная механическая энергия $E=E_к + E_п.$

9. Закон сохранения полной механической энергии

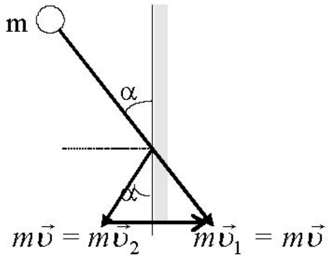
$E=const$ или $\Delta E=0;$

выполняется для замкнутой системы тел. Если система незамкнута, то

$$\Delta E=A.$$

Примеры решения задач.

Задача 1. Шар массой m, двигаясь со скоростью υ, упруго ударяется о стенку под углом α. Определить импульс силы, полученный стенкой.



Дано: m, υ, α.

Найти: $F\Delta t$ - ?

Решение. Изменение импульса шара численно равно импульсу силы, который получит стенка $\vec{F}\Delta t = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$. Из рис. $F\Delta t = 2m\upsilon \sin\alpha$

Задача 2. На рельсах стоит платформа массой 10 т. На платформе закреплено орудие массой 5 т, из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда 100 кг; его начальная скорость относительно орудия 500 м/с. Определить скорость платформы в первый момент выстрела, если: 1) платформа стояла неподвижно; 2) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении ее движения; 3) платформа двигалась со скоростью 18 км/ч и выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению ее движения.

Дано: $m_1=10^4$кг; $m_2=5.10^3$кг; $m_3=100$ кг; $\upsilon_o=500$ м/с; $\upsilon_1=5$ м/с.

Найти: υ_x - ?

Решение. 1) При неподвижной платформе начальная скорость снаряда относительно земли равна его скорости относительно орудия. На основании закона импульса имеем

$$(m_1+m_2+m_3)\upsilon_1= m_3\upsilon_o+(m_1+m_2)\ \upsilon_x.$$

В рассматриваемом случае $v_1=0$. Тогда

$$\upsilon_x=- m_3\upsilon_o/(m_1+m_2)=-3,33\ м/с=–12\ км/ч.$$

Знак “минус” указывает, что, если принять направление движения снаряда положительным, т.е. если принять $v_o>0$, то $v_x<0$, платформа стала двигаться в направлении, противоположном направлению движения снаряда.

2) Если выстрел был произведен в направлении движения платформы, то начальная скорость снаряда относительно земли равна $v_2=v_1+v_o$, и тогда закон сохранения импульса

$$(m_1+m_2+m_3)\ \upsilon_1= m_3\,(\upsilon_o+\upsilon_1)\ +(m_1+m_2)\ \upsilon_x,$$

откуда $\upsilon_x=\{(m_1+m_2+m_3)v_1- m_3\,(v_o+v_1)\}/\ (m_1+m_2)=$1,67 м/с=6 км/ч.

Отметим, что $v_x>0$, т.е платформа продолжает двигаться в том же направлении, но с уменьшенной скоростью.

Задача 2. С наклонной плоскости высотой 1 м и длиною склона 10 м скользит тело массой в 1 кг. Найти: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости, 2) скорость тела у основания плоскости, 3) расстояние, пройденное телом по горизонтальной части пути до остановки. Коэффициент трения на всем пути считать постоянным и равным 0,05.

Дано: $h=1$ м, $l=10$ м, $m=1$ кг.

Найти: E - ? υ- ? s - ?

Решение. Потенциальная энергия тела при скольжении его с наклонной плоскости переходит в кинетическую энергию и в работу против силы трения, т.е. $mgh=mv^2/2+F_{тр}l$. Но $h=l\sin\alpha$, $F_{тр}=\mu mg\cos\alpha$, где α-угол наклона плоскости.

1) $E=m\upsilon^2/2=mgh-F_{тр}l=mgl(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$. У нас $\sin\alpha=h/l=0{,}1$, т.е. $\alpha=5°44'$, следовательно, $\cos\alpha=0{,}995$. Подставляя числовые данные задачи, получим E=4,9 Дж.

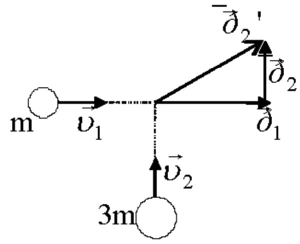
2) $\upsilon=\sqrt{\dfrac{2E}{g}}=3{,}1$ м/с.

3) Кинетическая энергия тела у основания наклонной плоскости переходит в работу против сил трения на горизонтальной части пути, т.е. $E=F_{тр}s=\mu mgs$, откуда $s=E/\mu mg=10$ м.

Задача 3. Два тела с массами m и 3m движутся во взаимно перпендикулярных направлениях (рис.). После соударения тело массы m остановилось. какую часть его энергии составляет выделившееся при ударе тепло?

Дано: m, 3m, $\upsilon_1'=0$.

Найти: $Q/E_{к1}$ - ?



Решение. Так как время соударения мало, то суммарный импульс системы не изменяется. $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'$

где $\vec{p}_1=m\vec{\upsilon}_1$, $\vec{p}_2=3m\vec{\upsilon}_2$. Но $p_1'=0$, т.к. $\upsilon_1'=0$, поэтому $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_2'$. Из рисунка видно, что

$$p_2'=\sqrt{m^2\upsilon_1^2+9m^2\upsilon_2^2}=m\sqrt{\upsilon_1^2+9\upsilon_2^2}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия тел до столкновения $E_к=m\upsilon_1^2/2+3m\upsilon_2^2/2$. Кинетическая энергия тела с массой 3m после столкновения

$$E_к'=(p_2')^2/(2\cdot 3m)=m(\upsilon_1^2+9\upsilon_2^2)/6=m\upsilon_1^2/6+3m\upsilon_2^2/2.$$

Убыль кинетической энергии означает, что ее часть превратилась во внутреннюю энергию тела, т.е. $Q=E_к-E_к'=m\upsilon_1^2/3$.

Тогда $Q/E_{к1}=2m\upsilon_1^2/3m\upsilon_1^2=2/3$,
т.е. 2/3 кинетической энергии первого тела превратилось в тепло.

Задача 4. Сваю массой 100 кг забивают в грунт копром, масса которого 300 кг. Копер свободно падает с высоты 4 м и при каждом ударе опускается на 10 см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар копра о сваю абсолютно неупругим.

Дано: $m_1=300$ кг, $m_2=100$ кг, $H=4$м, $h=0{,}1$ м

Найти: F_c - ?

Решение. При падении копра его потенциальная энергия превращается в кинетическую: $m_1\upsilon_1^2/2=m_1gH$. Тогда скорость копра в момент удара о сваю $\upsilon_1=(2gh)^{1/2}$. Удар о сваю неупругий. По закону сохранения импульса $m_1\upsilon_1=(m_1+m_2)\upsilon_2$. Отсюда $\upsilon_2=m_1\upsilon_1/(m_1+m_2)$. При движении сваи в грунт действует сила сопротивления, т.е. система незамкнута, поэтому изменение полной энергии системы: $\Delta E=A_{Fc}$;

$$\Delta E=-(m_1+m_2)gh-(m_1+m_2)\,\upsilon_2^2/2,$$

где $A_{Fc}=-F_ch$ - работа силы сопротивления.

Тогда $F_c=(m_1+m_2)(g+\upsilon_2^2/(2h))=(m_1+m_2)g[1+m_1^2H/(h(m_1+m_2)^2)]$.

$F_c=94.10^3$Н$=94$ кН.

Задача 5. Груз массой 0,5 кг падает с некоторой высоту на плиту массой 1 кг, укрепленную на пружине жесткостью $9{,}8.10^2$Н/м. Определить наибольшее сжатие пружины, если в момент удара груз обладал скоростью 5 м/с. Удар неупругий.

Дано: $m_1=0{,}5$ кг, $m_2=1$ кг, $k=9{,}8.10^2$Н/м, $v_1=5$ м/с.

Найти: x - ?

Решение. Так как в системе действуют только силы тяжести и упругости, то система является замкнутой и выполняется закон сохранения энергии. Полная механическая энергия груза вместе с плитой после удара равна потенциальной энергии сжатой пружины:

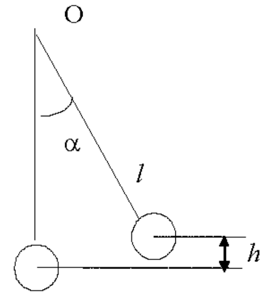
$$(m_1+m_2)\upsilon_2^2/2+(m_1+m_2)gx=kx^2/2\,, \qquad (1)$$

где v_2 - скорость груза и плиты после удара, которую найдем по закону сохранения импульса: $m_1\upsilon_1=(m_1+m_2)\,\upsilon_2$. Откуда $\upsilon_2=m_1\upsilon_1/(m_1+m_2)$.

Подставим это выражение в (1): $kx^2-2g(m_1+m_2)x-m_1^2\upsilon_1^2/(m_1+m_2)=0$.

Решая это уравнение, получим $x=8{,}2.10^{-2}$м$=8{,}2$ см.

Задача 6. Груз массой 1 кг, висящий на нити , отклоняют на угол 30°. Найти натяжение нити в момент прохождения грузом положения равновесия.



Дано: m=1 кг, α=30°

Найти: $F_н$ - ?

Решение. Натяжение нити в момент прохождения маятником положения равновесия $F_н = mg + mv^2/l$.

Кроме того, по закону сохранения энергии $mgh = m\upsilon^2/2$, откуда $\upsilon = \sqrt{2gh}$. Но из рис. $h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha)$. Тогда

$m\upsilon^2/l = m2gh/l = 2\,mg(1 - \cos\alpha)$ и $F_н = mg\,[1 + 2\,mg(1 - \cos\alpha)] = 12{,}4$ Н.

Задачи для самостоятельного решения.

6.1. Человек массой 60 кг, бегущий со скоростью 8 км/ч, догоняет тележку массой 80 кг, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. 1) С какой скоростью станет двигаться тележка? 2) С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежал ей навстречу?

6.2. Снаряд массой 100 кг летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью 500 м/с, попадает в вагон с песком массой 10 т и застревает в нем. Какую скорость получит вагон, если: 1) вагон стоял неподвижно, 2) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в том же направлении, что и снаряд, 3) вагон двигался со скоростью 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда?

6.3. Конькобежец массой 70 кг , стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

6.4. Человек, стоящий на неподвижной тележке, бросает вперед в горизонтальном направлении камень массой 2 кг. Тележка с человеком покатилась назад, и в первый момент после бросания ее скорость была равна 0,1 м/с. Масса тележки с человеком равна 100 кг. Найти кинетическую энергию брошенного камня через 0,5 с после начала его движения. Сопротивлением воздуха при полете камня пренебречь..

6.5. Тело массой 2 кг движется со скоростью 3 м/с и нагоняет второе тело массой 3 кг, движущееся со скоростью 1 м/с. Найти скорости тел после столкновения, если: 1) удар был неупругий, 2) удар был упругий. Тела движутся по одной прямой. Удар - центральный.

6.6.* Снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту со скоростью v_o. В верхней части траектории снаряд разрывается на две равные части, причем скорости частей непосредственно после взрыва горизонтальны и лежат в плоскости траектории. Одна половина упала на расстоянии s от орудия по направлению выстрела. Определить место падения второй половины, если известно, что она упала дальше первой. Считать, что полет снаряда происходит в безвоздушном пространстве.

6.7.* Снаряд летит в безвоздушном пространстве по параболе и разрывается в верхней точке траектории на две равные части. Одна половина снаряда упала вертикально вниз, вторая на расстоянии s по горизонтали от места разрыва. Определить скорость снаряда перед разрывом, если известно, что взрыв произошел на высоте H и упавшая по вертикали вниз половина снаряда падала время τ.

6.8. Пуля массой 10 г, летевшая со скоростью 400 м/с, пробив доску толщиной 5 см, уменьшила скорость вдвое. Определить силу сопротивления доски движению пули.

6.9. Танк, масса которого 15 т и мощность 368 кВт, поднимается в гору с уклоном 30°. Какую максимальную скорость может развивать танк?

6.10. Люстра массой 100 кг подвешена к потолку на металлической цепи, длина котрой 5 м. Какова высота, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась, если известно, что разрыв наступает при силе натяжения 2 кН?

6.11. Пуля массой m ударяется о баллистический маятник массой M и застревает в нем. Какая доля кинетической энергии пули перейдет в теплоту?

6.12. Камень, пущенный по поверхности льда со скоростью 2 м/с, прошел до полной остановки расстояние 20,4 м. Найти коэффициент трения камня по льду, считая его постоянным.

6.13. Вагон массой 20 тонн, движущийся равнозамедленно, под действием силы трения в 6000 Н через некоторое время останавливается. Начальная скорость вагона равна 54 км/ч. Найти: 1) работу сил трения, 2) расстояние, которое вагон пройдет до остановки.

6.14. Камень массой 2 кг упал с некоторой высоты. Падение продолжалось 1,43 с. Найти кинетическую и потенциальную энергию в средней точке пути. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.15. С башни высотой 25 м горизонтально брошен камень со скоростью 15 м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергию камня спустя одну секунду после начала движения. Масса камня 0,2 кг.

6.16. Камень бросили под углом 60° к горизонту со скоростью 15 м/с. Найти кинетическую, потенциальную и полную энергию камня: 1) спустя одну секунду после начала движения, 2) в высшей точке траектории. Масса камня 0,2 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.17. Работа, затраченная на толкание ядра, брошенного под углом 30° к горизонту, равна 216 Дж. Через сколько времени и на каком расстоянии от места бросания ядро упадет на землю? Масса ядра 2 кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.18. Сила тяги автомобиля изменяется с расстоянием по законам: а) $F=D+Bs$; б) $F=D+Bs+Cs^2$. Определить работы силы на участке пути (s_1, s_2).

6.19. По наклонной плоскости высотой 0,5 м и длиною склона 1 м скользит тело массой в 3 кг. Тело приходит к основанию наклонной плоскости со скоростью 2,45 м/с. Найти: 1) коэффициент трения тела о плоскость, 2) количество тепла, выделенного при трении. Начальная скорость тела равна нулю.

6.20. Ветер, дующий со скоростью v_o=20 м/с, действует на парус площадью s=25 м^2 с силой $F=a s\rho(v_o-v)^2/2$, где a - безразмерный коэффициент, ρ-плотность воздуха, v - скорость судна. Определите условия, при которых мощность ветра максимальна. Найти работу силы ветра.

6.21. Автомобиль массой в 1 тонну движется под гору при выключенном моторе с постоянной скоростью 54 км/ч. Уклон горы равен 4 м на каждые 100 м пути. Какую мощность должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы автомобиль двигался с той же скоростью в гору с тем же уклоном?

6.22. Молот массой 1,5 т ударяет по раскаленной болванке, лежащей на наковальне и деформирует болванку. Масса наковальни вместе с болванкой равна 20 т. Определить КПД при ударе молота, считая удар неупругим. Считать работу, совершенную при деформации болванки, полезной.

6.23. Боек (ударная часть) свайного молота массой 500 кг падает на сваю массой 100 кг со скоростью 4 м/с. Определить: а) кинетическую энергию бойка в момент удара; б) энергию, затраченную на углубление сваи в грунт, в) энергию, затраченную на деформацию сваи, г) КПД удара бойка о сваю. Удар бойка о сваю рассматривать как неупругий.

6.24. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара 0,2 кг, масса второго 100 г. Первый шар отклоняют так, что его центр тяжести поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если: 1) удар упругий, 2) удар неупругий?

6.25. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился от удара пули на угол 10^o.

6.26 Пуля массой 10 г, летевшая горизонтально, попадает в подвешенный шар массой 2 кг, и, пробив его, вылетает со скоростью 400м/с, причем шар поднимается на высоту 0,2 м. Определить: а) с какой скоростью летела пуля; б) какая часть кинетической энергии пули при ударе перешла во внутреннюю.

6.27 Деревянный шар массой М лежит на штативе, верхняя часть которого выполнена в виде кольца. Снизу в шар попадает пуля, летящая вертикально, и пробивает его. При этом шар поднимается на высоту h. На какую высоту поднимется пуля над штативом, если ее скорость перед ударом о шар была v ? Масса пули m.

6.28. Если автомобиль въезжает на гору при неизменной мощности двигателя, то он уменьшает скорость движения. Почему?

6.29. Почему трудно прыгнуть на берег с легкой лодки, а такой же прыжок с парохода легко осуществить?

6.30. Покоящийся шар получает центральный удар от другого такого же шара. Когда первый шар приобретает большую скорость - при упругом или неупругом ударе?

7. Твердое тело как система частиц. Вращательное движение твердых тел.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси $M\,dt = d(J\omega)$,

где М - момент силы, действующей на тело в течение времени dt; J - момент инерции тела; ω - угловая скорость; Jω - момент импульса.

В случае постоянного момента инерции $M = J\varepsilon$,

где ε - угловое ускорение, приобретаемое телом под действием вращающегося момента М.

Момент М силы F относительно какой-нибудь оси вращения определяется формулой $M=F\,l$,

где l - плечо силы (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

Момент инерции материальной точки $J=mr^2$,

где m - масса точки, r- расстояние от оси вращения.

Момент инерции твердого тела $J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i . r_i^{2,}$,

где r_i - расстояние элемента массы Δm_i от оси вращения. То же, в интегральной форме $J=\int r^2\, dm=\int \rho r^2\, dV$,

где ρ - плотность тела. .

Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно произвольной оси равен $J=J_o + ma^2$, где J_o - момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно заданной оси; a - расстояние между осями; m - масса тела.

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:

Тело	*Ось, относительно которой определяется момент инерции*	*Формула момента инерции*
Однородный тонкий стержень массой m и длиной l	Проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно стержню Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню	$\frac{1}{12}ml^2$ $\frac{1}{3}ml^2$
Тонкие кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m, распределенной по ободу	Проходит через центр перпендикулярно плоскости основания	mR^2
Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R и массой m	Проходит через центр диска перпендикулярно Проходит через центр плоскости основания	$\frac{1}{2}mR^2$
Однородный шар массой m и радиусом R	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Закон сохранения момента импульса $$\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i = const,$$

где L_i - момент импульса тела с номером i, входящего в состав системы.

Закон сохранения момента импульса для двух взаимодействующих тел $$J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2 = J_1'\,\omega_1' + J_2'\,\omega_2',$$

где J_1, J_2, ω_1 и ω_2 - моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J_1', J_2', ω_1' и ω_2' - те же величины после взаимодействия.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$E_к = J\omega^2/2.$$

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении:

$$E_к = m\upsilon^2/2 + J\omega^2/2,$$

где $m\upsilon^2/2$ – кинетическая энергия поступательного движения тела, v- скорость движения центра масс; $J\omega^2/2$ - кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Работа постоянного момента силы М, действующего на вращающееся тело, $$A = \int M\,d\varphi = M\varphi,$$

где φ - угол поворота тела.

Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение кинетической его связаны соотношением $A = J\omega_2^2/2 - J\omega_1^2/2$.

Примеры решения задач.

Задача 1. Через блок, укрепленный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1=300 г и m_2=200 г. Масса блока m_o=300 г. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

<u>*Дано:* m_1=300 г , m_2=200 г, m_o=300 г</u>

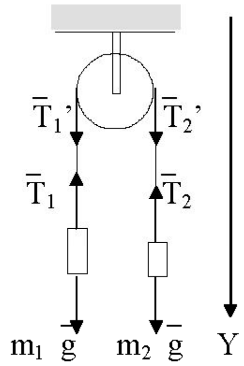
Найти: *а-?*

Решение. Второй закон Ньютона для первого груза

$$m_1\ \bar{a}_1 = m_1\ \bar{g} + \bar{T}_1, \quad (1)$$

для второго груза:

$$m_2\ \bar{a}_2 = m_2\ \bar{g} + \bar{T}_2. \quad (2)$$



Основное уравнение динамики вращательного движения для блока:

$$J\ \bar{\varepsilon} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2, \qquad (3)$$

где $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ - моменты сил натяжения $\bar{T}_1'$ и $\bar{T}_2'$.

Так как нить нерастяжима, то: $a_1 = a_2 = a,\ a = \varepsilon\ r$, (4)

а так как нить невесома: $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$.

Для перехода к скалярным соотношениям для описания движения грузов введем ось Y. Тогда $a_{1y} = a,\ a_{2y} = -a.$ Тогда векторные уравнения (1) и (2) можно заменить скалярными

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \qquad (5)$$

Моменты сил $\bar{T}_1'$ и $\bar{T}_2'$ направлены по оси вращения, но в противоположные стороны. Примем направление вектора $\bar{\omega}$ за положительное. Тогда векторное уравнение (3) можно переписать в виде

$$J\varepsilon = T_1\ r - T_2\ r,$$

где r - радиус блока.

Очевидно, $T_1 = T_2$, если масса блока, а следовательно, и его момент инерции пренебрежительно малы. Выражая из (4) ε и учитывая, что момент инерции однородного диска $J = m_o r^2/2$, получаем

$$m_o r^2 a/(2r) = T_1\ r - T_2\ r\ . \qquad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему. Сокращая в уравнении (6) радиус блока r и складывая все три уравнения [предварительно второе из уравнений (5) надо умножить на -1], получаем

$$a = g(m_1 - m_2)/(\ m_1 + m_2 + m_o) = 1{,}5\ м/с^2.$$

Задача 2 Две гири с массами 2 кг и 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок массой 1 кг. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири; 2) натяжения нитей T_1 и T_2, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

Дано: $m_1=2$ кг,$m_2=1$ кг, $m_б=1$ кг.

Найти: a -? T_1 -? T_2 - ?

Решение. Движение первой гири вниз происходит под действием двух сил: силы тяжести m_1g (направленного вниз) и натяжения нити T_1 (направленного вверх). Поэтому для этой гири будем иметь:

$$m_1a= m_1g - T_1. \qquad (1)$$

Вторая гиря движется вверх с тем же ускорением a под действием силы тяжести m_2g (вниз) и натяжения нити T_2 (вверх). Поэтому для нее:

$$m_2a= - m_2g + T_2. \qquad (2)$$

Нить будет натянута по обе стороны блока по-разному, и разность ее натяжений T_1 - T_2 будет создавать момент, вращающий блок. Применяя основной закон динамики , получим:

$$(T_1 - T_2)R=J\varepsilon=Ja/R, \qquad (3)$$

где
$$J=m_бR^2/2. \qquad (4)$$

1) Решая (1), (2), (3) и (4) совместно, найдем

$$a=(m_1g - m_2g)/(m_1+ m_2+J/R^2)= (m_1g - m_2g)/(m_1+ m_2+M/2). \qquad (5)$$

Подставляя числовые данные задачи, получим:

2) Подставляя (5) в (1) и (2), получим соответственно

$$T_1= m_1g(2m_2+ J/R^2)/ (m_1+ m_2+J/R^2)=14\ Н, \qquad (6)$$

$$T_2= m_2g(2m_1+ J/R^2)/ (m_1+ m_2+J/R^2) = 12{,}6\ Н. \qquad (7)$$

Задача 3 На барабан массой 9 кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 2 кг. Найти ускорение груза. Барабан считать однородным цилиндром. Трением пренебречь.

Дано: $m=2$ кг, $m_б=9$ кг

Найти: a - ?

Решение. Задачу можно решить двумя способами: 1) применяя основной закон динамики вращательного движения (см. решение предыдущей задачи) и 2) применяя закон сохранения энергии. Решение задачи первым способом предлагается сделать самостоятельно. При решении задачи вторым способом рассуждаем так: при опускании груза его потенциальная энергия уменьшается, переходя в кинетическую энергию груза и в кинетическую энергию вращения барабана. Таким образом,

$$mgh=m\upsilon^2/2+J\omega^2/2. \qquad (1)$$

Но так как $J=m_бR^2/2$ и $\omega=\upsilon/R$, где R - радиус барабана, то уравнение (1) можно написать так:

$$mgh=m\upsilon^2/2+ m_б\upsilon^2/(2\cdot 2)=(\upsilon^2/2)(m+m_б/2). \qquad (2)$$

Так как опускание груза происходит под действием постоянной силы, то движение груза равноускоренное, поэтому

$$h=at^2/2 \text{ и } \upsilon=at. \qquad (3).$$

Подставим (3) в (2) и получим $a=2mm_б/(2m+m_б)=3$ м/с.

Задача 4. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека - точечной массой.

Дано: m_1=100 кг, m_2=60 кг, ν_1=10 об/мин=1/6 об/с.

Найти: ν_2 - ?

Решение. На основании закона сохранения момента количества движения имеем: $J_1\omega_1=J_2\omega_2$ (1),

где J_1 - момент инерции платформы с человеком, стоящим на ее краю; J_2 - момент инерции платформы с человеком, стоящим в центре платформы; ω_1 и ω_1 - угловые скорости платформы соответственно в первом и во втором положениях человека. При этом

$$J_1 =m_1R^2/2 +m_2R^2 \text{ и } J_2 =m_1R^2/2, \qquad (2)$$

где R - радиус платформы. Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\omega=2\pi\nu$, получим $(m_1R^2/2 +m_2R^2)\ 2\pi\nu_1=2\pi\nu_2\ m_1R^2/2$,

откуда $\nu_2=\nu_1(m_1R^2+2m_2R^2)/\ m_1R^2=\nu_1(m_1+2m_2)/\ m_1=22$ *об/мин.*

Задачи для самостоятельного решения.

7.1. Однородный стержень длиною 1 м и массой 0,5 кг вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. С каким угловым ускорением вращается стержень, если вращающий момент равен $9{,}81.10^{-2}$Н.м?

7.2. Маховик, момент инерции которого равен 63,6 кг.м^2, вращается с постоянной угловой скоростью 31,4 рад/с. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик останавливается через 20 с.

7.3. К ободу колеса, имеющего форму диска, радиусом 0,5м и массой 50 кг приложена касательная сила в 98 Н. Найти: 1)угловое ускорение колеса, 2)через сколько времени после начала действия силы колесо будет иметь скорость, соответствующую 100 об/с?

7.4. Маховое колесо, имеющее момент инерции 245 кг.м^2, вращается, делая 20 об/с. Через минуту после того как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось. Найти: 1) момент сил трения, 2) число оборотов, которое сделало колесо до полной остановки после прекращения действия сил.

7.5. На барабан радиусом 20 см, момент инерции которого равен 0,1 кг.м^2, намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом равна 1 м. Найти: 1) через сколько времени груз опустился до пола, 2) кинетическую энергию груза в момент удара о пол, 3) натяжение нити. Трением пренебречь.

7.6. Две гири с разными массами соединены нитью, перекинутой через блок, момент инерции которого J=50 кг.м^2 и радиус R=20 см. Момент сил трения вращающегося блока равен $M_{тр}$=98,1 Н.м. Найти разность сил натяжений нити T_1-T_2 по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением 2,36 рад/с^2. Блок считать однородным диском.

7.7. Блок массой 1 кг укреплен на конце стола (см. рис. 15 к зад.4.14). Гири А и В равной массы 1 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири В о стол равен 0,1. Блок считать однородным диском. Трением в блоке пренебречь. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение T_A и T_B нитей.

7.8. К концу тонкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндрический сплошной неподвижный блок массой m_1=200 г, прикреплено тело массой m_2=500 г, которое находится на наклонной плоскости с углом наклона α=45°. Нить, удерживающая тело, параллельна наклонной плоскости. Какой путь пройдет тело по наклонной плоскости за t=1 с, если коэффициент трения скольжения по наклонной плоскости μ=0,1.

7.9. Какой путь пройдет катящийся без скольжения диск, поднимаясь вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30°, если ему сообщена начальная скорость 7 м/с, параллельная наклонной плоскости.

7.10. Какую работу нужно совершить, чтобы маховику в виде диска массой m=100 кг и радиусом R=0,4 м сообщить частоту вращения n=10 об/с, если он находится в состоянии покоя?

7.11. Радиус вала махового колеса r=10^{-2} м. На вал намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m=0,2 кг. Под действием силы тяжести груз опускается за t=5 с с высоты h_1=1,2 м, а затем, вследствие вращения колеса, по инерции поднимается на высоту h_2=0,8 м. Определить момент инерции колеса.

7.12. Определить момент инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с ее осью симметрии. Масса муфты m=2 кг, внутренний радиус r=0,03 м, внешний R=0,05 м.

7.13. Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой линейной скоростью. Кинетическая энергия обруча равна 39,2 Дж. Найти кинетическую энергию диска.

7.14. Медный шар радиусом R=10 см вращается со скоростью, соответствующей ν=2 об/с, вокруг оси, проходящей через его центр. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить угловую скорость вращения шара вдвое.

7.15. Найти линейные ускорения движения центров тяжести 1) шара, 2) диска и 3) обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен 30°, начальная скорость всех тел равна нулю. 4) Сравнить найденные ускорения с ускорением тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости при отсутствии трения.

7.16. Найти линейные скорости движения центров тяжести 1) шара, 2) диска и 3) обруча, скатывающихся без скольжения с наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости 0,5 м, начальная скорость всех тел равна нулю. 4) Сравнить найденные скорости со скоростью тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости при отсутствии трения.

7.17. Вентилятор вращается со скоростью, соответствующей 900 об/мин. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки 75 об. Работа сил торможения равна 44,4 Дж. Найти: 1) момент инерции вентилятора, 2) момент силы торможения.

7.18. Маховик вращается с постоянной скоростью, соответствующей ν=10 об/с; его кинетическая энергия $E_к$ = 800 Дж. За сколько времени вращающий момент сил М=50 Н.м, приложенный к этому маховику, увеличит угловую скорость маховика в два раза?

7.19. Однородный стержень длиною 85 см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

7.20. Карандаш, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорость будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша, 2) верхний его конец? Длина карандаша 15 см.

7.21. Горизонтальная платформа массой 80 кг и радиусом 1 м вращается с угловой скоростью, соответствующей 20 об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от 2,94 кг.м^2 до 0,98 кг.м^2? Считать платформу круглым однородным диском.

7.22. В ящик с песком массой М=5 кг, подвешенный на длинной нити l=3 м, попадает пуля массой m=0,05 кг и отклоняет его на угол α=10°. Определить скорость пули.

8. Колебательное движение.

1. Уравнения гармонических колебаний:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_o),\ \text{или}\ x=A\sin(\omega t+\varphi_o)$$

где x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t- время; A, ω,φ_o - соответственно амплитуда, круговая(циклическая) частота, начальная фаза колебаний; $(\omega t+\varphi_o)$ - фаза колебаний в момент времени t.

Круговая частота колебаний $\omega=2\pi\nu$, или $\omega=2\pi/T$,
где ν и T - частота и период колебаний.

Уравнение движения в общем виде: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$

Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon=dx/dt=-A\ \omega\sin(\omega t+\varphi_o).$$

Ускорение при гармоническом колебании

$$a=d^2x/dt^2=-A\ \omega^2\cos(\omega t+\varphi_o).$$

2. Амплитуда результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящими по одной прямой, определяется по формуле

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}),$$

где A_1 и A_2 - амплитуды составляющих колебаний; φ_{01} и φ_{02} - их начальные фазы.

Начальная фаза результирующего колебания может быть найдена из формулы:

$$tg\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}.$$

3. Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_{01} и φ_{02}:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\sin^2(\varphi_{02}-\varphi_{01}).$$

4. Период колебаний:

а) математического маятника $T=2\pi\sqrt{l/g}$, где l - длина маятника;

б) пружинного маятника $T=2\pi\sqrt{m/k}$, где m - масса маятника, k - коэффициент упругости пружины;

в) физического маятника $T=2\pi\sqrt{J/(mgl)}$, где J - момент инерции, m - масса маятника; или $T=2\pi\sqrt{L/g}$, где L - приведенная длина маятника;

г) крутильного маятника $T=2\pi\sqrt{J/k}$, где k - коэффициент упругости.

5. Полная энергия колебательной системы:

$$E = m\upsilon^2/2 + kx^2/2 = m\omega^2 A^2/2 = kA^2/2.$$

6. Уравнение затухающих колебаний: $x = A_o e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_o)$,

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, ω_0 - частота собственных колебаний системы, β - коэффициент затухания.

Логарифмический декремент колебаний $\theta = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$,

где A(t) и A(t+T) - амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

Примеры решения задач.

Задача 1. Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия по закону $x = A\ \sin\ \omega t$ с периодом 12 с. Определить, за какой наименьший промежуток времени t_1 точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды. За какой промежуток времени t_2 она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения.

Дано: x=A/2, T=12 с.

Найти: t_1-? t_2-?

Решение. В момент времени t_1 смещение равно A/2: $A/2 = A\sin\omega t_1$, $\sin\omega t_1 = 1/2$, т.е. $\omega t_1 = \pi/6$, или $(2\pi/T)t_1 = \pi/6$. Отсюда $t_1 = T/12 = 1$ с.

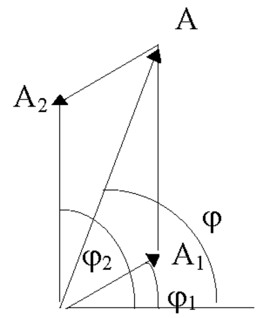
Расстояние от точки равновесия до точки максимального отклонения материальная точка проходит за t=T/4. Следовательно, $t_2 = T/4 - T/12 = 2$ с.

Задача 2. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями $x_1 = A_1\cos\omega(t+\tau_1)$ и $x_2 = A_2\cos\omega(t+\tau_2)$, где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\tau_1 = 1/6$ с; $\tau_2 = 1/2$ с; $\omega = \pi$ рад/с. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний; найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1).$$

Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду: $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \omega \tau_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \omega \tau_2)$ (2).



Из сравнения выражений (2) с (1) находим начальные фазы первого и второго колебаний: $\varphi_1 = \omega\tau_1 = \pi/6$ рад и $\varphi_2 = \omega\tau_2 = \pi/2$ рад

Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис. Согласно теореме косинусов, получим: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ (3)

$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/3$ рад.

Подставим значения A_1, A_2 и $\varphi_2 - \varphi_1$ в (3), извлечем корень и получим: A=2,65 см.

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определим непосредственно из рисунка: $tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$. Тогда

$\varphi = \mathrm{arctg}(5/\sqrt{3}) = 70{,}9^0 = 0{,}394\pi$ рад.

Так как циклические частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту ω. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, где A=2,65 см, ω=π рад/с, φ=0,394π рад.

Задача 3. Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой 0,2 м и периодом 4 с. В начальный момент времени x=A. Найти кинетическую и потенциальную энергию в момент времени t= 1 с.

Дано: $m=10^{-2}$ кг, A=0,2 м, T=4 с, $x|_{t=0}=A$, t=1 с.

Найти: $E_к$-? $E_п$-?

Решение: Запишем уравнение гармонических колебаний

$x=A\cos(\omega t+\varphi_o)$, где $\omega=2\pi/T$. Т.к. при t=0 x=A, то можно определить начальную фазу $A\cos(\omega.0+\varphi_o)=A$, $\cos\varphi_o=1$, $\varphi_o=0$.

Таким образом, $x=0{,}2\cos[(2\pi/4)t]= 0{,}2\cos[(\pi/2)t]$ (м).

Кинетическая энергия шарика определяется по формуле: $E_к=m\upsilon^2/2$, где $\upsilon=dx/dt = -A\,\omega\sin\omega t$. $E_к=[mA^2\omega^2\sin^2\omega t]/2$; $E_к=5.10^{-3}$Дж.

Потенциальная энергия шарика равна:

$E_п=kx^2/2=[kA^2\cos^2\omega t]/2=[kA^2\cos^2(\pi/2)]/2$, $E_п=0$.

Задача 4 Физический маятник представляет собой стержень длиной l=1 м и массой $3m_1$ с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром d=$l/2$ и массой m_1. Горизонтальная ось OZ проходит через середину стержня перпендикулярно ему (рис. 24). Определить период колебаний такого маятника.

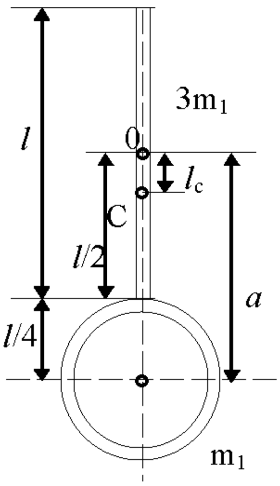
Дано: l=1 м, $m_c=3m_1$, d=$l/2$, $m_o=m_1$

Найти: Т - ?

Решение. Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}, \qquad (1)$$

где J - момент инерции маятника относительно оси колебаний, m - масса, l_c - расстояние от центра масс маятника до оси колебаний. Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и обруча J_2: $J=J_1+J_2$. (2)



Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле $J_1=m_c l^2/12$, т.е. $J_1=m_1 l^2/4$.

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера $J=J_o+ma^2$. Применив эту формулу к обручу, получим

$$J_2=m_1(l/4)^2+m_1(3l/4)^2=(5/8)m_1 l^2.$$

Подставив выражения J_1 и J_2 в формулу (2), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения: $J=m_1 l^2/4+(5/8)m_1 l^2=(7/8)m_1 l^2$.

Расстояние l_c от оси маятника до его центра масс равно

$$l_c=(\sum m_i x_i)/\sum m_i=(3m_1.0+m_1(3l/4))/(3m_1+m_1)=(3/16)l.$$

Подставив в формулу (1) выражения J, J_c и массы маятника ($m=3m_1+m_1=4m_1$), найдем период его колебаний:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{7/8\, m_1 l^2}{4m_1 g\cdot 3/16\, l}}=2\pi\sqrt{\frac{7l}{6g}}.\ T=2{,}17\ с.$$

Задачи для самостоятельного решения

Кинематика гармонических колебаний.

8.1. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой в 5 см, если в 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°.

8.2. Определить максимальные значения скорости v_{max} и ускорения a_{max} точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой А=3 см и циклической частотой $\omega=\pi/2$ рад/с.

8.3. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти циклическую частоту колебаний и максимальное ускорение точки.

8.4. Точка совершает колебания по закону $x=A\sin\omega t$. В некоторый момент времени смещение точки x_1 оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение x_2 стало равным 8 см. Найти амплитуду A колебаний.

8.5. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом 8 с и одинаковой амплитудой 0,02 м. Разность фаз между этими колебаниями равна $\pi/4$. Начальная фаза одного из колебаний равна нулю.

8.6. Найти амплитуду и начальную гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=0{,}02\sin(5\pi t+\pi/2)$ *м* и $x_2=0{,}03\sin(5\pi t+\pi/4)$ *м*.

8.7. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуда колебаний $A_1=3$ см и $A_2=4$ см. Найти амплитуду результирующего колебания, если: 1) колебания совершаются в одном направлении, 2) колебания взаимно-перпендикулярны.

8.8. Точка участвует одновременно в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях $x=2\sin\omega t$ *м* и $y=2\cos\omega t$ *м*. Найти траекторию движения точки.

8.9. Точка участвует одновременно в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях $x=\sin\pi t$ *м* и $y = 2\sin(\pi t+\pi/2)$ *м*. Найти траекторию движения точки и вычертить ее с нанесением масштаба.

8.10. Точка участвует одновременно в двух взаимно-перпендикулярных колебаниях $x=\sin\pi t$ *м* и $y = 4\sin(\pi t+\pi)$ *м*. Найти траекторию движения точки и вычертить ее с нанесением масштаба.

8.11. Сложите графически два гармонических, одинаково направленных колебания равных периодов, но смещенных по фазе друг относительно друга на π. Амплитуды относятся между собой как 3:1.

8.12. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами 1,5 с и амплитудами по 2 см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1=\pi/2$ рад и $\varphi_2=\pi/3$ рад. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму сложения амплитуд.

8.13. Складываются три гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами 2 с и амплитудами по 3 см. Начальные фазы колебаний $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi/3$ рад и $\varphi_3=2\pi/3$ рад. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Определить из чертежа амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

Динамика гармонических колебаний.

8.14. Материальная точка массой 50 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x=A\cos\omega t$, где A=10 см, ω=5 рад/с. Найти силу, действующую на точку в двух случаях: 1) в момент, когда фаза $\omega t=\pi/3$ рад; 2) в положении наибольшего смещения точки.

8.15. Найти возвращающую силу в момент t = 1 с и полную энергию материальной точки, совершающей колебания по закону $x=A\cos\omega t$, где A=20 см, $\omega=2\pi/3$ рад/с. Масса материальной точки равна 10 г.

8.16. Определить массу тела, совершающего гармонические колебания с амплитудой 0,1 м, частотой 2 Гц и начальной фазой 30^0, если полная энергия колебаний 7,7 мДж. Через сколько секунд от начала отсчета времени кинетическая энергия будет равна потенциальной?

8.17. Грузик массой 250 г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом T=1 с. Определить жесткость пружины.

8.18. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой 4 см. Определить полную энергию колебаний гири, если жесткость пружины равна 1 кН/м.

8.19. Однородный стержень совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Длина стержня 0,5 м. Найти период колебаний стержня.

8.20. Найти период колебаний стержня предыдущей задачи, если ось вращения проходит через точку, находящуюся на расстоянии 10 см от его верхнего конца.

8.21. Однородный шарик подвешен на нити, длина которой равна радиусу шарика. Во сколько раз период малых колебаний этого маятника больше периода малых колебаний математического маятника с таким же расстоянием от точки подвеса до центра тяжести?

8.22. Период колебаний крутильного маятника, состоящего из кольца, соединенного спиральной пружиной с осью вращения, равен T=4с. Определить момент инерции, если жесткость пружины $k=10^{-2}$Н.м. Трением пренебречь.

8.23. Математический маятник длиной 40 см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной 60 см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние центра масс стержня от оси колебаний.

8.24. Тонкий обруч, подвешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча равен 30 см. Вычислить период колебаний обруча.

8.25*. Ареометр массой m=50 г, имеющий трубку диаметром d=1 см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период T этих колебаний.

Затухающие колебания.

8.26. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t_1=5 мин уменьшилась в два раза. За какое время t_2, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

8.27. За время 8 мин амплитуда затухающих колебаний маятника уменьшилась в три раза. Определить коэффициент затухания.

8.28. Амплитуда колебаний маятника длиной 1 м за время 10 мин уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент колебаний.

8.29. Логарифмический декремент колебаний маятника равен 0,003. Определить число полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

8.30. Найти частоту колебаний груза массой m=0,2 кг, подвешенного на пружине и помещенного в масло, если коэффициент трения в масле r=0,5 кг/с, а жесткость пружины k=50 Н/м.

Приложения.

Некоторые характеристики Солнца, Земли и Луны.

Физические параметры	Солнце	Земля	Луна
Масса, кг	$1{,}97.10^{30}$	$5{,}96.10^{24}$	$7{,}33.10^{22}$
Радиус, м	$6{,}95.10^{8}$	$6{,}37.10^{6}$	$1{,}74.10^{6}$
Средняя плотность, кг/м^3	1400	5518	3350
Среднее расстояние от Земли, км	$1{,}496.10^{8}$	-	384440

Плотность некоторых веществ, 10^3кг/м^3.

Алюминий	2,7	Никель	8,9	Глицерин	1,2
Дерево	0,7	Парафин	0,9	Керосин	0,8
Железо,сталь	7,8	Пробка	0,2	Масло	0,91
Лед	0,9	Свинец	11,3	Нефть	0,8
Мрамор,гранит	2,7	Бензин	0,7	Ртуть	13,6
Медь	8,9	Вода	1	Спирт	0,8

Ответы

1.1. s=5t, 25 м; **1.2.** 0,6 м/с, 250 с. **1.3.** 0,049 м, 1,9 м. **1.4.** 14,7м/с, 11м. **1.5.** 73,5 м. **1.6.** 0,59 с. **1.7.** 1) $v=(2\text{-}6t+12t^2)$ м/с; $a=(-6+24t)$ м/с^2; 2) 24м, 38 м/с и 42 м/с^2. **1.8.** 3 м/с, 5 м/с, 7 м/с; 2 м/с^2. **1.9.** Прямая 3x-2y=12, расположенная в плоскости XY, с началом в точке $x_o=2$, $y_o=-3$. **1.10.** 200 м/с; 20 м/с^2. **1.11.** 410 м. **1.12***. $s=s_o+(1/k)\ln(kv_ot+1)$. **1.13.** -2 м. **1.14.** ($\frac{b}{v_ё}\int_0^1(-4x^2+4x+0{,}5)dx=245$ м). **1.15.** 0,069 рад; 221,7 м/с. **1.16.** 21,6 м/с. **1.17.** 14 м/с.

2.1. 1,22 м; 10 м/с; 11,1м/с; 26°12'. **2.2.** 4,4 м/с. **2.3.** 11,1 м/с; 68°12'. **2.4.** 300м. **2.5.** 5,9 м. **2.6.** 7,4 м. **2.7.** 5,4 м/с^2; 8,2 м/с^2. **2.8.** 305 м. **2.9.** $a_\tau=g\,v_y/v=3{,}52$ м/с^2, $a_n=gv_o\cos\alpha/v=9{,}15$ м/с^2. **2.10.** 6,3 м. **2.11.** 1)3,16с, 2)41,1м,3) $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$, где $v_x=v_o\cos\alpha=13$ м/с, $v_y=gt_2=23{,}4$м/с, отсюда v=26,7 м/с, 4)$tg\varphi=v_y/v_x=1{,}8$ и $\varphi=61°$. **2.12.** 20 м/с; 3 с; 12 м; 20 м; 20,8 м. **2.13.** 6,1 м. **2.14.** 6 м. **2.15.** 76°. **2.16.** $s=2v_ot\sin((\alpha_1-\alpha_2)/2)=11{,}3$м. **2.17.** $t=(v_o\cos\alpha/g)(tg\,\alpha-tg\beta)=1{,}2$ с.

3.1. 1,26 рад/с^2, 360 об. **3.2.** 10 с. **3.3.** 1)Через 6,3 с, 2)9,4 об. **3.4.** 1) $t=(R/a_t)^{1/2}=2$с; 2) $t=(2R/a_t)^{1/2}=2{,}8$ с. **3.5.** $a_t=v^2/(4\pi NR)=1{,}6.10^{-3}$ м/с^2. **3.6.** 4,5м/с^2, 0,06 м/с^2. **3.7.** 0,43 рад/с^2. **3.8.** 1) t=0, tg $\alpha=\infty$, т.е. $\alpha=90°$, 2) t=1c, tg $\alpha=3{,}13$ и $\alpha=72°17'$; 3) t=2 c, tg$\alpha=0{,}7$ и $\alpha=35°0'$; 4) t=3 c, tg$\alpha=0{,}278$ и $\alpha=15°32'$; 5) t=4 c, tg$\alpha=0{,}14$ и $\alpha=7°58'$; 6) t=5 c, tg$\alpha=0{,}081$ и $\alpha=4°38'$. **3.9.** 1.2 м. **3.10.** 0,58.

4.1. 1) 12кН; 2) 6 кН. (1) 5 м/с^2 (лифт поднимается), 2) 2,5 м/с^2 (лифт опускается). **4.2.** $v_o=2s/t=10$м/с, $F=2sm/t^2=2040$ Н. **4.3.** $F=\mu mg+2mgs/(gt^2)=8200$ Н. **4.4.** 11,75 м/с. **4.5.** 1) 6000Н; 2) через 50 с; 3) 375 м. **4.6.** 4,9 кг. **4.7.** -0,123 Н. **4.8.** 1)21,6 км/ч; 2) 73 с; 3) -0,098 м/с^2; 4)218 м. **4.12.** 1370 Н, 590Н. **4.13.** 0,07, 0,39 м/с^2, 22,7 с, 8,85 м/с. **4.14.** 0,5. **4.15.** 220Н, 380 Н, 430 Н. **4.16.** $[(x^2-1)/(x^2+1)]tg\alpha=0{,}16$. **4.17.** 3,27м/с^2, 13 Н. **4.18.** 4,4 м/с^2, 5,4 Н. **4.19.** 2,45 м/с^2, 7,35 Н. **4.20.** 2,02 м/с^2, 7,77 Н. **4.21.** 1,02 м/с^2, 5,9 Н. **4.22.** 0,244 м/с^2, 6 Н. **4.23.** 2,1м/с^2; 6,2Н; 3,1Н. **4.24.** F'=2,1Н; $F_д=9{,}3.10^{-2}$Н. **4.25.** 2,6 м/с^2; 42 Н. **4.26.** 0,3; 8,3 Н; 2 Н.

5.1. 1ч 25 мин. **5.2.** 245 Н. **5.3.** 1) 2,43 м/с; 2) в высшей точке $F_н=0$, в низшей точке $F_н=39{,}2$ Н). **5.4.** 0,5 кг. **5.5.** 59 об/мин. **5.6.** 1,96Н. **5.7.** 0,2. **5.8.** 5 м/с. **5.9.** 2,1 с$^{-1}$. **5.10.** 1)1600 м; 2) 711 м. **5.11.** 22°. **5.12.** 47 км/ч. **5.15.** $v=R[g_o/(R+h)]^{1/2}=7010$ м/с; $T=2\pi(R+h)/v\approx7{,}24.10^3$ с. **5.16.** 2,73 мН. **5.17.** 5,39 с; $2{,}65.10^5$ м, $7{,}7.10^3$ м/с. **5.18.** 900с, 8.10^5м. **5.19.** $[3\pi/(G\rho)]^{1/2}$]. **5.20.** $R(gR/v^2-1)$. **5.21.** $M=(4\pi^2R^3/GT^2)(1+T/\tau)=6.10^{24}$ кг, T-период вращения Земли вокруг оси. **5.22*** g= $\sqrt{G^2\frac{M^2}{R^4}+\omega^4R^2\cos^2\varphi-2G\frac{M}{R}\omega\cos^2\varphi}$; $g_п=9{,}83$ м/с^2, $g_э=9{,}78$ м/с^2, $g_o=9{,}81$ м/с^2. **5.23*** h=0,7R.

6.1. 5,14 км/ч; 1,71 км/ч. **6.2.** 17,8 км/ч; 53,5 км/ч; -17,8 км/ч. **6.3.** 0,3 м. **6.4.** 49 Дж. **6.5.** 1) $u_1=u_2=1{,}8$ м/с; 2) $u_1=0{,}6$ м/с; $u_2=2{,}6$ м/с. **6.6.*** $L=(2v_o\sin2\alpha)/g-s$. **6.7.*** $v=sg\tau/4H$. **6.8.** 12 кН. **6.10.** 2,5 м. **6.11.** 1–m/(m+M). **6.12.** 0,01. **6.13.** 2,25МДж, 375 м. **6.14.** E=U=98,1 Дж. **6.15.** 32,2Дж; 39,4Дж. **6.16.** 1) 6,6 Дж;

15,9Дж; 22,5 Дж; 2) 5,7 Дж; 16,8 Дж; 22,5 Дж. **6.17.** 1,5 с, 19,1 м. **6.18.** а) $A=D(s_2 - s_1)+B(s_2^2 - s_1^2)/2$; б) $A=D(s_2 - s_1)+B(s_2^2 - s_1^2)/2 +C(s_2^3 - s_1^3)/3$. **6.19.** 1) 0,22; 2) 5,7 Дж. **6.20.** Условие N_{max} $(dN/dt=0)$ выполняется при $v_2=v_o/3$; работа: $A=1{,}35.10^7$Дж. **6.21.** 11,8 кВт. **6.22.** 93%. **6.23.** а) 4 кДж, б) 3,33 кДж, в) 667 Дж, г)83,3%. **6.24.** 1) 5.10^{-3}м, 0,08 м; 2) 2.10^{-2} м. **6.25.** 550 м/с . **6.26** а) 800 м/с; б) 0,75. **6.27.** $h_n = \dfrac{\left(mv - M\sqrt{2gh}\right)^2}{2m^2 g}$.

7.1. 2,35 рад/с^2. **7.2.** 100 Н.м. **7.3.** 1) 7,8 рад/с^2; 2) через 1 мин 20 с. **7.4.** 1) 513 Н.м; 2) 600 об). **7.5.** 1) Через 1,1 с; 2) 0,81 Дж; 3) 4,1 Н). **7.6.** T_1-T_2= $(J\varepsilon+M_{тр})/R$= 1,08 кН. **7.7.** 1) 3,53 м/с^2; 2) 6,3 Н, 4,5 Н). **7.8.** $s=m_2g(\sin\alpha- \mu\cos\alpha)t^2/(2m_2+m_1)$=2,64 м. **7.9.** $s=3v_o/(4g\sin\alpha)$=7,5 м. **7.10.** $A=\pi^2n^2mR^2$=16 кДж. **7.11.** $J=mr^2[gt^2h_2/(h_1(h_1+h_2))-1]=1{,}63.10^3$ кг.м^2. **7.12.** $J=(1/2)m(R^2+r^2)=34.10^{-4}$ кг.м^2). **7.13.** 29,4 Дж. **7.14.** $A=3{,}2\pi^3R^5\ \rho\nu$=34,1 Дж. Здесь ρ - плотность меди. **7.15.** 3,5. м/с^2, 3,27 м/с^2; 2,44 м/с^2; 4,9 м/с^2. **7.16.** $v=\sqrt{\dfrac{2mgh}{m+\dfrac{J}{R^2}}}$. 1) 2,65 м/с, 2) 2,56 м/с, 3) 2,21 м/с, 4) 3,14 м/с. **7.17.** 1)0,01 кг.м^2, 2)$9{,}4.10^{-2}$ Н.м. **7.18.** $\Delta t=E_к/\pi\nu M$=5 с. **7.19.** 7,1 м/с. **7.20.** $\omega_1=\omega_2$=14 рад/с, 1) 1,05 м/с, 2) 2,1 м/с. **7.21.** 21 об/мин. **7.22.** $v=[2(M+m)/m](gl)^{1/2}\sin(\alpha/2)$ =943 м/с.

8.2. 4,71 см/с, 7,4 см/с^2. **8.3.** 2 рад/с, 40 см/с^2. **8.4.** $A=2x_1^2/(4x_1^2-x_2^2)^{1/2}$=8,33см. **8.5.** $x=0{,}037\ \sin(\pi t/4+\pi/8)$ *м*. **8.6.** $4{,}6.10^{-2}$м, 62°46’. **8.7.** 1)7 см, 2)5 см. **8.8.** $x^2/4+y^2/4=1$ - уравнение окружности радиусом в 2 м. **8.9.** $x^2/1+y^2/4=1$. **8.10.** $y=-4\ x$ - уравнение прямой. **8.11.** Результат сложения ясен из рис 8.11. **8.12.** A=3,86 см; $\varphi=0{,}417\pi$ рад; ω=4,19 рад/с. $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ **8.13.** A=6 см; $\varphi=\pi/3$ рад; $\omega=\pi$ рад/с. $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ **8.14.** 1) -62,5 мН, 2)-125 мН. **8.15.** 4,39 мН, 877 мкДж. **8.16.** 9,8 г; 0,02 с. **8.17.** 4,87 Н/м. **8.18.** 0,8 Дж. **8.19.** 1,16с. **8.20.** 1,07 с. **8.21.** В 1,05 раза. **8.22.** $J=T^2k/4\pi^2=4/10^{-3}$ кг.м^2. **8.23.** 10 см. **8.24.** $T=2\pi\sqrt{2R/g}$ =1,55 с. **8.25.** $T=\dfrac{4}{d}\sqrt{\dfrac{\pi m}{\rho g}}$ =1,6 с. **8.26.** 15 мин. **8.27.** 0,0023 с$^{-1}$. **8.28.** $2{,}31.10^{-3}$. **8.29.** $N=\ln(A_1/A_2)/\theta$. **8.30.** $\nu=\sqrt{4km-r^2}\ /4\pi m = 2{,}5$ Гц.

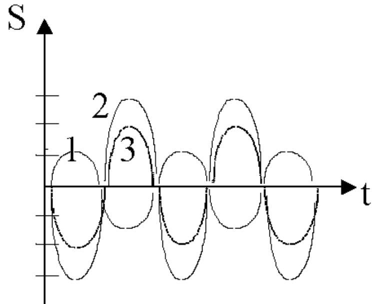


Рис.8.11.

Литература.

1. Балаш В.А.. Сборник задач по курсу общей физики. - М.:Просвещение, 1978.

2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по физике. - М.: Наука, 1985.
3. Гурьев Л.Г., Кортнев А.В., Куценко А.Н. и др. Сборник задач по общему курсу физики.- М.:Высшая школа, 1966.
4. Мясников С.П., Осанова Т.Н. Пособие по физике.- М.: Высшая школа, 1981.
5. Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Методика проведения упражнений по физике во втузе. - М.:Высшая школа, 1981.
6. Парфентьва Н., Фомина М. Решение задач по физике (ч.2) -М.:Мир, 1993.
7. Стрелков С.П., Эльцин И.А., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики (ч.1) - М.:Наука, М,1964.
8. Тульчинский М.Е. Сборник качественных задач по физике. - М.:Просвещение, 1965.
9. Цедрик М.С.(ред.) Сборник задач по курсу общей физики.- М.:Просвещение, 1989.
10. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. - М.:Высшая школа, 1981.

Оглавление.