

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА

ЧАСТЬ 2

Методические указания к расчетно-графическим работам

Методические указания предназначены для студентов дневных и заочных факультетов, изучающих теоретическую механику. Содержание отражает основной курс динамики и включает в себя решение задач, аналогичных заданиям выполняемых курсовых работ Д-9, Д-10, Д-14, Д-19 из «Сборника заданий» А.А.Яблонского. В соответствии с разбираемой темой дается теория, решается задача, выполняется обзор, классифицируются варианты задания по группам, приводится экзаменационная задача с решением.

Репетиторский подход и анализ решения задач ориентированы на развитие логического мышления студентов. Методические указания могут быть полезны студентам, изучающим сопротивление материалов и строительную механику, теорию механизмов и машин, детали машин, а также студентам старших курсов и аспирантам.

Введение

Методические указания по динамике (часть 2) предназначены для студентов всех факультетов, выполняющих расчетно-графические работы в соответствии с Государственным образовательным стандартом и программой курса по теоретической механике. Содержание отражает основной курс динамики и включает в себя разбор задач, соответствующих заданиям Д-9, Д-10, Д-14, Д-19 из сборника А. А. Яблонского. Вторая часть методических указаний по динамике содержит четыре задания, которые по содержанию ближе специальностям механиков. Задания Д-9 и Д-10 входят в основной курс динамики механической системы, а задания Д-14 и Д-19 составляют основу аналитической механики. Вторая задача по Д-19 решена с использованием уравнений Лагранжа второго рода. На последующих курсах при изучении технических дисциплин «Детали машин» и «Теория механизмов и машин» широко используются фундаментальные методы расчета, базирующиеся на общих теоремах динамики и трех основных принципах механики.

Для каждой разбираемой темы кратко дается теория, приводится решение задачи, подобной сложному варианту задания, выполняется обзор и классифицируются варианты задания по группам, решаются экзаменационные задачи.

Расчетно-графические работы оформляются на листах формата А4 в соответствии с разобранными примерами выполнения заданий в сборнике А.А. Яблонского и в данных методических указаниях.

Методические указания помогут студентам самостоятельно решать задания, развивают логику технического мышления и содержат минимум необходимой информации.

1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для получения теоремы об изменении кинетического момента механической системы рассмотрим понятие момента количества движения материальной точки. Это понятие аналогично понятиям моментов силы относительно оси из статики. Количество движения материальной точки $m\vec{V}$ является вектором, поэтому момент количества движения точки относительно центра O определяется вектором $\vec{L}_O$, а относительно оси OZ – отрезком L_z (рис.1).

В векторной форме и по модулю эти параметры определяются по формулам:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{V},$$

$$L_O = mV \cdot h,$$

$$L_z = \pm mV_1 \cdot h_1,$$

где h – плечо вектора $m\vec{V}$ относительно центра O , h_1 – плечо проекции $m\vec{V}_1$ на плоскость Q , перпендикулярную оси OZ .

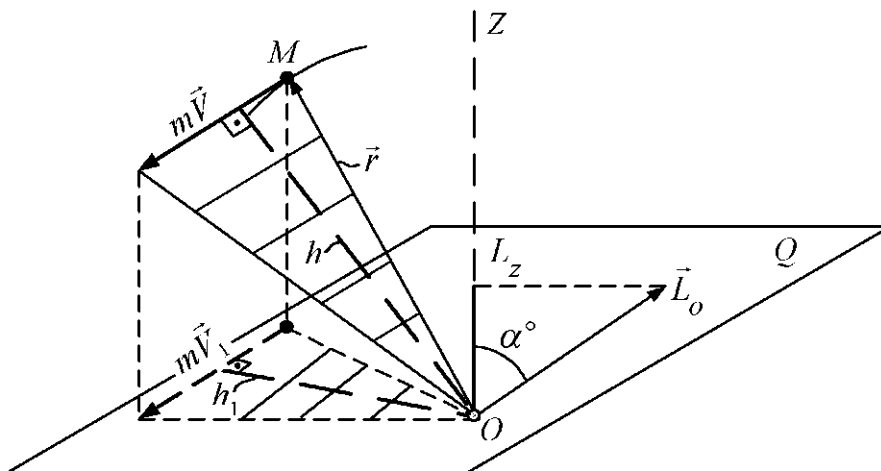


Рис. 1

Зависимость между вектором $\vec{L}_O$, направленным по правилу буравчика (векторного произведения) перпендикулярно плоскости векторов $m\vec{V}$ и $\vec{r}$, и отрезком L_z , направленным по оси, очевидна из рисунка:

$$L_z = L_O \cdot \cos \alpha.$$

Теорема об изменении момента количества движения точки относительно центра и оси определяется следующими выражениями:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где M_O и M_z – моменты равнодействующих сил относительно центра и оси.

При переходе от точки к материальному телу или к механической системе вводится новый термин – кинетический момент относительно центра $\vec{L}_O$ и относительно оси L_z . Кинетический момент относи-

центра равен геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы.

$$\vec{L}_o = \sum \vec{L}_{io} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i.$$

Кинетический момент относительно оси равен алгебраической сумме моментов количеств движения всех точек системы.

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i V_i \cdot h_i.$$

Теорема об изменении кинетического момента системы представляется формулами, аналогичными теореме об изменении момента количеств движения точки.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^E, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^E,$$

где M_o^E и M_z^E – главные моменты внешних сил относительно центра и оси.

Теорема имеет два следствия, которые выражают закон сохранения кинетического момента системы.

Первое следствие: если $\vec{M}_o^E = 0$, то $\vec{L}_o = \text{const}$.

Второе следствие: если $M_z^E = 0$, то $L_z = \text{const}$.

Рассмотрим применение *второго следствия* при вращении системы вокруг неподвижной оси Z . Представим систему как совокупность материальных точек, моменты количеств движения которых определяются по формулам:

$$L_{iz} = m_i V_i \cdot R_i = m_i R_i^2 \cdot \omega, \quad \text{где } V_i = \omega \cdot R_i.$$

Тогда кинетический момент системы

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i R_i^2 \cdot \omega = J_z \cdot \omega,$$

где J_z – момент инерции системы относительно оси вращения.

Если подставить выражение $L_z = J_z \cdot \omega$ в формулу теоремы об изменении кинетического момента $\frac{dL_z}{dt} = M_z^E$, то получим дифференциальное уравнение вращательного движения механической системы (твёрдого тела) относительно оси.

$$J_z \varepsilon = M_z^E, \quad \text{где } \varepsilon = \ddot{\phi}.$$

Закон сохранения кинетического момента механической системы работает в случае, если внешние силы не создают вращающего момента относительно оси вращения системы.

$$M_z^E = \sum M_{iz}^E = 0.$$

В этом случае если при вращении отдельные части системы меняют своё положение относительно оси вращения, то меняется момент инерции системы и соответственно меняется угловая скорость её вращения.

$$\text{Так,} \quad L_z = J_{z_1} \cdot \omega_1 = J_{z_2} \cdot \omega_2 = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{J_{z_1}}{J_{z_2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

то есть зависимость здесь обратно пропорциональная.

Теорема об изменении кинетического момента и дифференциальное уравнение вращательного движения дают наиболее простой способ решения первой и второй задач динамики для вращательного движения, то есть по заданному уравнению вращения и моменту инерции определяются действующие силы, а по известным силам и моменту инерции определяются угловая скорость и уравнение вращательного движения $\varphi = f(t)$.

Первая задача решается дифференцированием, а вторая – интегрированием дифференциального уравнения $J_z \ddot{\varphi} = M_z^E$.

1.1. Задание Д-9. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твёрдого тела

Тело H массой m_1 (рис. 2) вращается вокруг вертикальной оси Z с постоянной скоростью ω_0 ; при этом в точке O жёлоба AB тела H на расстоянии AO от точки A , отсчитываемом вдоль жёлоба, закреплена материальная точка K массой m_2 .

В момент времени $t = 0$ на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действия пары сил прекращаются. Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t = \tau$.

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ . В момент времени $t_1 = 0$ точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль жёлоба AB (в направлении

к B) по закону $OK=S=S(t_1)$. Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1=T$. Тело H – однородная пластинка.

Дано:

$$m_1 = 20 \text{ кг}; \quad m_2 = 5 \text{ кг};$$

$$\omega_o = 5 \text{ с}^{-1}; \quad a = 0,6 \text{ м};$$

$$R = 0,6 \text{ м}; \quad AO = 0;$$

$$M_z = -6 \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad \tau = 4 \text{ с};$$

$$OK = S = \frac{5\pi}{6} \cdot R \cdot t_1; \quad T = 1 \text{ с}.$$

Определить ω_τ и ω_T

Решение.

Применим теорему об изменении кинетического момента механической системы $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz}^E$, где L_z –

кинетический момент системы, состоящий из тела H и точки K , относительно оси Z ; $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ – главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси Z .

На систему за время от $t = 0$ до $t = \tau$ действуют силы: вес $\vec{G}_1$ тела H , вес $\vec{G}_2$ точки K , пара сил с моментом M_z , реакции подпятника X_E, Y_E, Z_E и подшипника X_D и Y_D (см. рис. 2).

Предположим, что вращение тела H происходит против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Z . Будем считать это направление положительным для M_z и кинетических моментов.

Найдём выражение кинетического момента L_z системы, который складывается из кинетического момента пластины H $L_{zH} = J_{zH} \cdot \omega$ и момента количества движения точки K , находящейся в точке O .

В данной задаче точка O совпадает с точкой A ($AO = 0$), то есть находится на оси вращения Z , поэтому $L_{zo} = m_2 V_o \cdot R = 0$ и кинетический момент создаёт только пластина H .

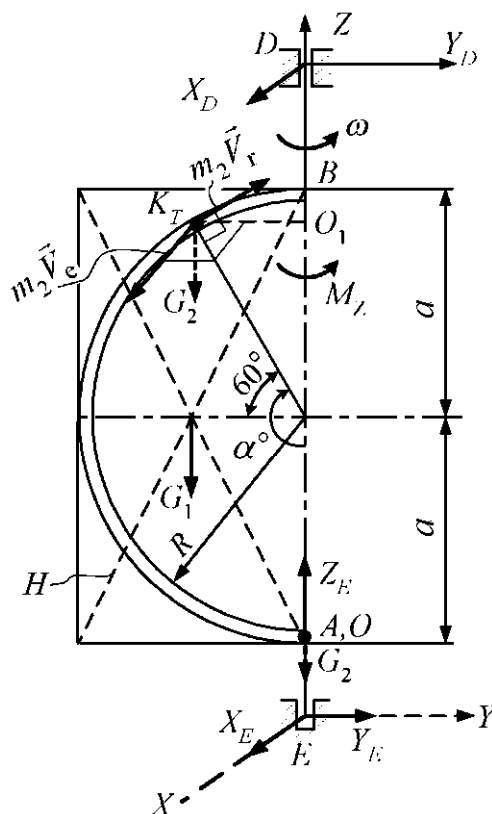


Рис. 2

$$L_z = L_{zH} = J_{zH} \cdot \omega,$$

где осевой момент инерции прямоугольной пластины определяется по формуле из табл. 46 [1].

$$J_{zH} = \frac{m_1 a^2}{3} = \frac{20 \cdot 0,36}{3} = 2,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Главный момент внешних сил равен вращающему моменту M_z , так как другие силы момента относительно оси Z не создают.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента, принимает вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где $L_z = 2,4 \omega \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$, а $M_z = -6 \text{ Н} \cdot \text{м}$, тогда $2,4 \omega \frac{d\omega}{dt} = -6$.

Разделим переменные ω и t и проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$2,4 \cdot \int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\omega = -6 \cdot \int_0^{\tau=4} dt,$$

получим $2,4(\omega_\tau - 5) = -24$, откуда $\omega_\tau = -5 \text{ с}^{-1}$.

После прекращения действия момента $M_z = 0$ тело H вращается по инерции с угловой скоростью $\omega_{\tau'}$, и уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента системы, имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = 0,$$

откуда следует, что $L_z = \text{const}$, то есть действует закон сохранения кинетического момента системы.

Приравняем значения кинетических моментов L_{z_τ} при $t_1 = 0$ и $L_{z_{\tau'}}$ при $t_1 = T$, то есть $L_{z_\tau} = 2,4 \omega_\tau = L_{z_{\tau'}}$, тогда при $\omega_\tau = -5 \text{ с}^{-1}$

получим

$$L_{z_{\tau'}} = -12 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Определим положение точки K в момент времени $T = 1 \text{ с}$.

$$OK_T = S = \frac{5\pi}{6} \cdot R \cdot 1.$$

Тогда центральный угол $\alpha = \frac{OK_T}{R} = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ (см. рис. 2).

Радиус вращения точки K_T вокруг оси Z вместе с пластиной H

$$O_1K_T = R \cdot \cos 60^\circ = 0,3 \text{ м.}$$

При $t_1 = T$ скорость точки K_T складывается из относительной скорости $\vec{V}_r$, направленной по касательной к желобу AB , и переносной скорости вращения $\vec{V}_e$ вместе с пластиной H . Поэтому в точке K_T покажем два вектора количества движения точки: $m_2\vec{V}_r$ и $m_2\vec{V}_e$ (см. рис. 2).

Кинетический момент системы L_{z_T} в момент времени T складывается из кинетического момента пластины $J_{z_H} \cdot \omega_T$, момента переносного количества движения точки $m_2V_e \cdot O_1K_T$ и момента относительного количества движения точки $m_2V_r \cdot h$, где h – плечо вектора $m_2\vec{V}_r$ относительно оси Z . Запишем:

$$L_{z_T} = J_{z_H} \cdot \omega_T + m_2V_e \cdot O_1K_T + m_2V_r \cdot h.$$

В данной группе вариантов задач с расположением пластины с желобом в одной плоскости с осью вращения вектор $m_2\vec{V}_r$ пересекает эту ось (или параллелен ей), поэтому плечо h равно нулю и третье слагаемое кинетического момента системы обращается в нуль.

Заметим, что $V_e = \omega \cdot O_1K_T$, тогда выражение кинетического момента системы принимает вид

$$L_{z_T} = J_{z_H} \cdot \omega_T + m_2 \cdot O_1K_T^2 \cdot \omega_T = (2,4 + 5 \cdot 0,3^2) \omega_T = 2,85 \omega_T.$$

Так как $L_{z_T} = L_{z_\tau} = -12$, то $-12 = 2,85 \omega_T$ и $\omega_T = -4,21 \text{ с}^{-1}$.

Видно, что угловая скорость вращения системы уменьшилась, так как $\omega_\tau = -5 \text{ с}^{-1}$. Этот факт подтверждает действие закона сохранения кинетического момента. Действительно, момент инерции системы во втором случае увеличился на величину момента инерции точки K относительно оси вращения.

1.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-9

Варианты задания Д-9 можно четко разбить на две группы. *Первая группа*, когда пластина H вместе с желобом AB находятся в плоскости, перпендикулярной оси вращения Z , то есть это горизонтальная плоскость.

Вторая группа вариантов, когда пластина с желобом находятся в одной плоскости оси вращения. Во всех вариантах только два вида желоба – *окружность* или *прямая линия*, принципиальной разницы в относительном движении здесь нет, так как вектор относительного количества движения всегда направлен по касательной к желобу, по которому движется материальная точка.

Существенное различие вариантов двух групп состоит в том, что во второй части задания с применением закона сохранения кинетического момента для вариантов с осью вращения в плоскости пластины отсутствует слагаемое момента относительного количества движения. В этом случае линия действия вектора $m_2 \vec{V}_r$ пересекает ось вращения (или параллельна оси) и не создает момента.

Полученные результаты расчета ω_τ и ω_r полезно проанализировать. Так, если момент инерции системы уменьшился, то угловая скорость должна увеличиться, и наоборот. Момент переносного количества движения точки направлен в сторону вращения системы и увеличивает ее кинетический момент, а знак слагаемого момента относительного количества движения определяется из расчетной схемы и данных задачи.

1.3. Задача по Д-9

Внутренними силами маховик 2 массой 20 кг, центральный момент инерции которого $J_{2Z_1} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, раскручивается до относительной угловой скорости $\omega_r = 40 \text{ с}^{-1}$. Определить угловую скорость ω_{1Z} держателя 1, если его момент инерции $J_{1Z} = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, размер $\ell = 1 \text{ м}$ (рис. 3).

Дано:

$$m_2 = 20 \text{ кг};$$

$$J_{2Z_1} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \text{ (тело 2)};$$

$$\omega_r = 40 \text{ с}^{-1};$$

$$J_{1Z} = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \text{ (тело 1)};$$

$$\ell = 1 \text{ м}.$$

Определить ω_{1Z} .

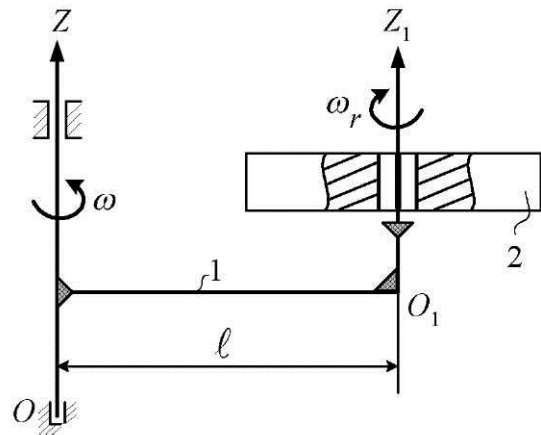


Рис. 3

Решение.

Система тел 1 и 2 вращается вокруг оси Z , поэтому по теореме об изменении кинетического момента $\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^E$, где M_Z^E – главный момент внешних сил, равный нулю, так как раскрутка идет за счет внутренних сил (электромотор) маховика 2. Тогда $L_Z = \text{const}$, то есть кинетический момент системы остается постоянным.

Кинетический момент раскрученного маховика

$$L_{2Z_1} = J_{2Z_1} \cdot \omega_r = 1 \cdot 40 = 40 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Приравняем его к кинетическому моменту L_Z системы тел 1 и 2, которые стали вращаться с угловой скоростью ω_{1Z} вокруг оси Z после раскрутки маховика до ω_r .

$$\begin{aligned} L_Z &= L_{1Z} + L_{2Z} = J_{1Z} \cdot \omega_{1Z} + (J_{2Z_1} + m_2 \ell^2) \cdot \omega_{1Z} = \\ &= 4 \cdot \omega_{1Z} + (1 + 20 \cdot 1^2) \cdot \omega_{1Z} = 25 \cdot \omega_{1Z}, \end{aligned}$$

где $L_{2Z} = (J_{2Z_1} + m_2 \ell^2) \cdot \omega_{1Z}$. В скобках дано выражение момента инерции тела 2 относительно оси вращения Z с использованием теоремы Штейнера–Гюйгенса о моментах инерции тела относительно параллельных осей Z и Z_1 .

$$\text{Итак, } L_{2Z_1} = L_Z, \text{ или } 40 = 25 \omega_{1Z}, \text{ откуда } \omega_{1Z} = \frac{40}{25} = 1,6 \text{ с}^{-1}.$$

2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Теорема об изменении кинетической энергии системы записывается следующим образом:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J,$$

где T и T_0 – кинетическая энергия системы в конечном и начальном положениях; $\sum A_i^E$ – сумма работ внешних сил по перемещению системы из начального положения в конечное; $\sum A_i^J$ – сумма работ внутренних сил по перемещению системы из начального положения в конечное.

Отметим, что сумма $\sum A_i^J = 0$ для механических систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями или стержнями. Если кинетическая энергия системы возрастает, то есть $T > T_0$, то сумма работ внешних сил положительна ($\sum A_i^E > 0$), и наоборот.

Кинетическая энергия системы $T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}$ является величиной скалярной и положительной, она складывается из кинетических энергий входящих в нее тел: $T = \sum T_i$. Если система находится в покое, то ее кинетическая энергия равна нулю.

Запишем формулы кинетической энергии тел при различных движениях:

$$\text{при поступательном} \quad T = \frac{m V^2}{2};$$

$$\text{при вращательном} \quad T = \frac{J \omega^2}{2};$$

$$\text{при плоском} \quad T = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где m и J – меры инертности тел при поступательном и вращательном движении.

Момент инерции сплошного однородного диска (цилиндра) относительно оси симметрии:

$$J_{cx} = \frac{m R^2}{2}.$$

Момент инерции маховика, обода, кольца, тонкостенной трубы относительно оси симметрии:

$$J_{cx} = m i_{cx}^2, \quad \text{или} \quad J_{cx} = m R^2,$$

где i_{cx}^2 – радиус инерции, а R – радиус кольца, играющий роль радиуса инерции.

Плоское движение твердого тела рассматривается как совокупность поступательного движения вместе центром масс C и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости его движения, поэтому формула кинетической энергии тела состоит из двух слагаемых.

Иногда удобно плоское движение рассматривать как вращательное вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через мгновенный центр скоростей (МЦС). В этом случае кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{J_{\Omega} \omega^2}{2},$$

где J_{Ω} – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, обычно определяемый с помощью теоремы Штейнера–Гюйгенса о моментах инерции тела относительно параллельных осей:

$$J_{\Omega} = J_{cx} + m d^2,$$

где J_{cx} – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела; d – расстояние между соответствующими параллельными осями.

Работу совершают не тела, а силы и моменты сил.

Работа силы тяжести $A_G = \pm GH$,

где H – величина вертикального перемещения точки приложения силы тяжести. Если точка опускается, работа положительна, и наоборот.

Работа постоянной силы $A_F = F \cdot S \cdot \cos \alpha$,

где F – сила, S – перемещение, α – угол между векторами перемещения и силы.

Работа силы трения $A_{F_{тр}} = -F_{тр} \cdot S$ (так как $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$).

Работа вращающего момента $A_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi,$

или при $M = \text{const}$ $A_M = M \cdot \varphi,$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ – угол поворота тела.

Работа момента сопротивления качению $A_{M_{\text{с.к}}} = -M_{\text{с.к}} \cdot \varphi,$

где $M_{\text{с.к}} = N \cdot \delta$; δ – коэффициент сопротивления качению; N – нормальная реакция поверхности.

Удобно применять теорему об изменении кинетической энергии системы при любых движениях входящих в нее тел, если в качестве данных и определяемых параметров фигурируют скорости V , ω и перемещения S , φ .

2.1 Задание Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 4. Учитывая трение скольжения тела 1, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный ими путь станет равным S .

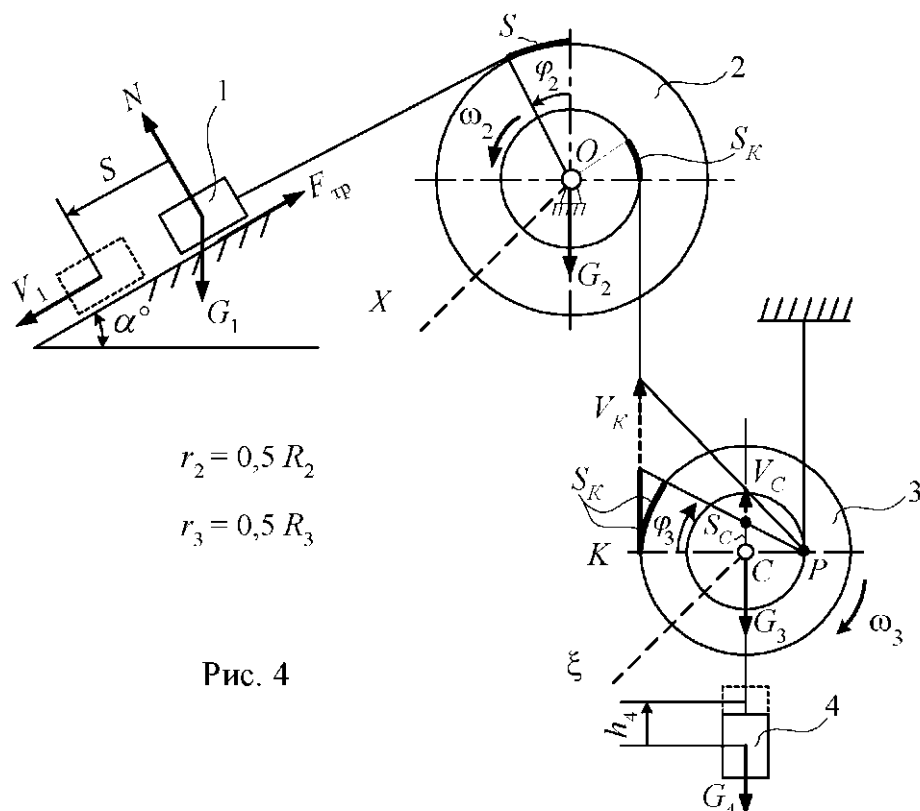


Рис. 4

Дано: $m_1 = m$; $m_2 = \frac{1}{3}m$; $m_3 = \frac{2}{10}m$; $m_4 = \frac{4}{3}m$; $R_2 = 26$ см;
 $R_3 = 20$ см; $i_{2x} = 20$ см и $i_{3\xi} = 18$ см – радиусы инерции;
 $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $S = 2$ м.

Определить V_1 .

Решение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J.$$

Если в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$ и $\sum A_i^J = 0$, так как система состоит из твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями.

Следовательно, уравнение принимает вид $T = \sum A_i^E$.

Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил изобразим систему в конечном положении, определяемом перемещением S груза 1, углами поворота шкивов φ_2 , φ_3 и перемещениями S_C , h_4 (см. рис. 4).

$T = f(V_1^2)$	$A = f(S)$
$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$	$\varphi_2 = \frac{S}{R_2}$
$V_K = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{V_1 \cdot r_2}{R_2} = \frac{V_1}{2}$	$S_K = \varphi_2 \cdot r_2 = \frac{S \cdot r_2}{R_2} = \frac{S}{2}$
$\omega_3 = \frac{V_K}{R_3 + r_3} = \frac{V_1}{6 r_3}$	$\varphi_3 = \frac{S_K}{R_3 + r_3} = \frac{S}{6 r_3}$
$V_C = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{V_1}{6}$	$S_C = \varphi_3 \cdot r_3 = \frac{S}{6}$
$V_4 = V_C = \frac{V_1}{6}$	$h_4 = S_C = \frac{S}{6}$
Кинематическое передаточное число системы $i = \frac{S}{h_4} = \frac{V_1}{V_4} = 6$	

Напишем кинетические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, то есть уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорость V_1 и перемещение S груза 1.

Эти соотношения запишем в форме таблицы для расчета кинетических энергий T и работ A согласно кинематической схеме.

Из таблицы видно, что все скорости выражены через искомую скорость V_1 , а все перемещения – через известную величину S груза 1.

Скорость будем подставлять в формулы кинетических энергий, а перемещения – в формулы работ внешних сил.

Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия шкива 2, вращающегося вокруг оси OX :

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_{2x}^2 \cdot V_1^2}{2 \cdot R_2^2}.$$

Кинетическая энергия шкива 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 V_C^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 V_1^2}{2 \cdot 36} + \frac{m_3 \cdot i_{3\xi}^2 \cdot V_1^2}{2 \cdot 36 r_3^2}.$$

Кинетическая энергия груза 4, связанного с движущимся центром C шкива 3 и совершающего поступательное движение:

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} = \frac{m_4 \cdot V_1^2}{2 \cdot 36}.$$

Кинетическую энергию всей механической системы запишем в общем виде, выразив все скорости через V_1^2 , все массы через m , и полученное число обозначим K_1 :

$$T = K_1 \cdot m \cdot V_1^2.$$

Для расчёта суммы работ покажем все силы: G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , $F_{\text{тр}}$, N . Реакция поверхности N перпендикулярна перемещению S и работы не совершает. Сила G_2 приложена к неподвижной точке O и работу также не совершает.

Тогда
$$\sum A_i^E = A_{G_1} + A_{F_{\text{тр}}} + A_{G_3} + A_{G_4},$$

где
$$A_{G_1} = G_1 \cdot h_1 = m_1 g \cdot S \cdot \sin \alpha,$$

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} \cdot S = -N \cdot f \cdot S = -m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot f \cdot S,$$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot h_C = -m_3 g \cdot \frac{S}{6}, \quad A_{G_4} = -G_4 \cdot h_4 = -m_4 g \cdot \frac{S}{6}.$$

Запишем $\sum A_i^E$ в общем виде, выразив все массы через m , и полученное число обозначим K_2 :

$$\sum A_i^E = K_2 \cdot m.$$

Приравняем по теореме об изменении кинетической энергии системы:

$$T = \sum A_i^E, \quad \text{или} \quad K_1 \cdot m \cdot V_1^2 = K_2 \cdot m.$$

Сократив полученное выражение на массу m и вычислив V_1^2 , определим скорость груза 1.

2.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-10

Все варианты задания Д-10 можно разбить на *три группы* в зависимости от рассматриваемой расчётной схемы механизма. *Первая группа* наиболее распространённая по схеме без стержней и кривошипов планетарных механизмов – это варианты №1–3, 6–15, 19, 21, 23, 27, 29, 30. Решение варианта этой группы дано выше в 2.1.

В этих вариантах конечное положение механической системы можно обозначить углами поворота тел φ_2 и φ_3 и соответственно показать перемещения в функции S .

В вариантах этой группы, там, где дан коэффициент сопротивления качению, надо рассчитывать момент сопротивления качению и его работу. Здесь полезно сразу рассчитать кинематическое передаточное отношение механизма, построив таблицу (см. 2.1).

Вторая группа вариантов с планетарными механизмами – №5, 16, 18, 22, 25. Вначале надо сразу рассчитать угол поворота кривошипа, обычно он кратен 45° , и нарисовать конечное положение всей системы. Расчёт работ в этих вариантах затруднения не вызывает.

В вариантах № 5 и 18 сложно рассчитать угол поворота кривошипа, а в варианте №16 – определить ω_4 . Здесь необходимо использовать точки контактов – общие точки для двух звеньев – для перехода от угла поворота и угловой скорости одного звена к углу поворота и угловой скорости другого звена.

Третья группа вариантов со стержнями, имеющими массу и невесомыми – это № 4, 17, 20, 24, 26, 28. Пример расчёта подобного варианта приведён в сборнике А.А. Яблонского [1].

Здесь, как и в группе планетарных механизмов, надо вначале рассчитать угол поворота колеса, связанного шарниром с шатуном, это определит конечное положение шатуна, которое надо показать на схеме.

Напомним, что момент инерции шатуна как тонкого однородного стержня относительно оси, проходящий через центр масс, равен

$$J_C = \frac{m \ell^2}{12}, \text{ где } \ell - \text{длина стержня.}$$

В конечном положении системы шатун может совершать плоское или поступательное движение, что обуславливает использование соответствующей формулы его кинетической энергии. Если начальное и конечное положения механизма показаны на схемах, то поиск работ действующих сил не

вызывает затруднения.

При качении колеса без скольжения по неподвижной поверхности перемещение его центра C определяется по формуле $S_C = \varphi \cdot R$, где φ – угол поворота колеса, R – радиус вращения или расстояние от центра C до мгновенного центра скоростей в точке контакта колеса с поверхностью.

2.3. Задача по Д-10

Ползун 1 массой 2 кг соединён шарниром с однородным стержнем 2, длиной $AB = 1$ м и массой 6 кг. Конец стержня B скользит по горизонтальной плоскости.

Определить кинетическую энергию системы тел, когда скорость $V_A = 1$ м/с и угол $\varphi = 60^\circ$ (рис. 5).

Дано: $m_1 = 2$ кг; $m_2 = 6$ кг;
 $AB = 1$ м; $V_A = 1$ м/с;
 $\varphi = 60^\circ$.

Определить T .

Решение.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_1 = \frac{m_1 V_A^2}{2}$ – кинетическая энергия ползуна 1, совершающего поступатель-

ное движение; $T_2 = \frac{m_2 \cdot V_C^2}{2} + \frac{J_2 \cdot \omega_2^2}{2}$ –

кинетическая энергия стержня 2, совершающего плоское движение, которое можно представить вращательным движением вокруг мгновенного центра скоростей P – точки пересечения перпендикуляров к скоростям $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ стержня AB .

Определим ω_2 и V_C (см. рис. 5).

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{1}{AB \cdot \sin 30^\circ} = \frac{1}{1 \cdot 0,5} = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$V_C = \omega_2 \cdot CP,$$

где $CP = CB = \frac{1}{2} AB = 0,5$ м из треугольника PCB .

Тогда $V_C = 2 \cdot 0,5 = 1$ м/с.

Момент инерции J_2 относительно центра C равен

$$J_2 = \frac{m_2 \cdot AB^2}{12} = \frac{6 \cdot 1^2}{12} = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Подставим найденные значения в формулу кинетической энергии системы:

$$T = \frac{2 \cdot 1^2}{2} + \frac{6 \cdot 1^2}{2} + \frac{0,5 \cdot 2^2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

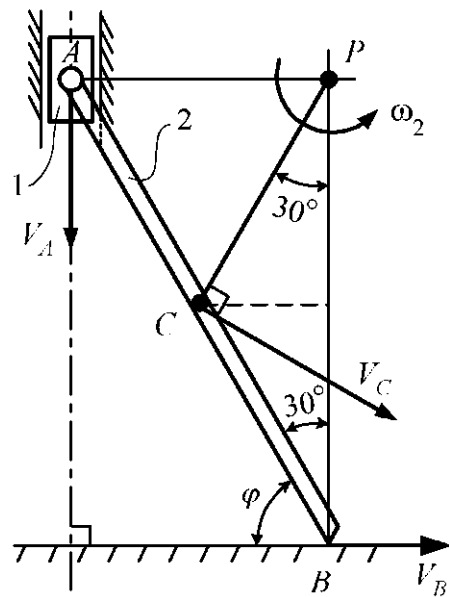


Рис. 5

3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Принцип возможных или виртуальных перемещений формулируется следующим образом: сумма работ задаваемых сил на любом возможном перемещении системы с двухсторонними идеальными связями равна нулю. Уравнения работ, выражающие принцип возможных перемещений, могут быть записаны:

1. *Общая, или геометрическая, форма* $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{S}_i \cdot \cos(\vec{F}_i, \delta \vec{S}_i) = 0.$

2. *Векторная форма* $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0.$

3. *Аналитическая форма* $\sum F_{ix} \cdot \delta X_i + \sum F_{iy} \cdot \delta Y_i + \sum F_{iz} \cdot \delta Z_i = 0.$

Для практических расчётов используются 1-я и 3-я формы.

Если вместо возможных перемещений вставить возможные скорости, то получаются уравнения мощностей. Количество уравнений работ или мощностей соответствует числу степеней свободы механической системы. Количество степеней свободы соответствует числу обобщённых координат. Обобщённые координаты – это независимые величины, заданием которых однозначно определяется положение всех точек механической системы. Например, положение свободной точки в пространстве определяется тремя обобщёнными координатами X, Y, Z ; положение твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, – одним углом поворота φ ; положение всех точек кривошипно-шатунного механизма определяется одной обобщённой координатой – углом поворота φ кривошипа; координаты остальных точек механизма можно выразить через эту обобщённую координату φ . Независимо от количества тел, входящих в систему, конструкцию, механизм, число степеней свободы определяет число обобщённых координат.

Большинство механизмов, используемых в технике, имеет одну степень свободы; то есть задавая возможное перемещение на входе системы в качестве изменения обобщённой координаты, в соответствии с кинематическим передаточным числом мы получим определённое возможное перемещение на выходе системы. Выразив все возможные перемещения через изменения обобщённой координаты, мы сокращаем возможные перемещения в уравнении

работ, определяя тем самым кинематическое передаточное число механизма, то есть возможные перемещения выполнили свою задачу. Если система имеет несколько степеней свободы, то для каждого независимого возможного перемещения составляется своё уравнение работ. Определение возможных перемещений, идеальных двухсторонних связей, преимуществ принципа возможных перемещений уже рассмотрено в части I, п.3 методических указаний в качестве теории для расчёта задания Д-15 по определению реакции опор конструкции.

3.1. Задание Д -14. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы

Схема механизма, находящегося под действием взаимно уравновешенных сил, показана на рис. 6.

На кривошип O_1A кулисного механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, действует вращающий момент M_1 . Применяя принцип возможных перемещений, определить, какой момент M_2 следует приложить к кулисе, чтобы уравновесить механизм в момент, когда $\angle AO_1O_2 = 90^\circ$, $\angle O_1O_2A = \varphi$. Трением пренебречь.

Дано: M_1 ;

$\angle AO_1O_2 = 90^\circ$;

$\angle O_1O_2A = \varphi$.

Определить M_2 .

Решение.

Механизм имеет одну степень свободы, сообщим ему соответствующее возможное перемещение. Повернём кривошип O_1A на угол $\delta\varphi_1$, при этом ползун A в относи-

тельном движении будет скользить по штанге O_2A и в переносном движении вместе с ней переместится на величину $\delta S_A \cdot \sin\varphi$. Штанга O_2A повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а абсолютное возможное

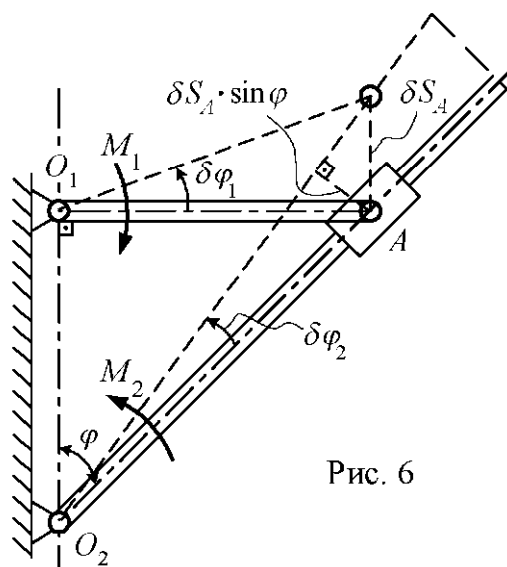


Рис. 6

перемещение ползуна δS_A определится из прямоугольного треугольника составляющих возможных перемещений. Возможные перемещения звеньев покажем штриховыми линиями.

Составим уравнение работ.

$$-M_1 \cdot \delta\varphi_1 + M_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0,$$

где знак *минус* перед первым слагаемым говорит о различных направлениях M_1 и $\delta\varphi_1$.

Из уравнения следует
$$M_2 = \frac{\delta\varphi_1 \cdot M_1}{\delta\varphi_2}.$$

В соответствии с расчётной схемой выразим:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_A \cdot \sin\varphi}{O_2A}.$$

Из треугольника O_1O_2A определяем: $O_2A = \frac{O_1A}{\sin\varphi}.$

Для кривошипа O_1A определяем возможное перемещение δS_A как длину дуги окружности: $\delta S_A = \delta\varphi_1 \cdot O_1A.$

Подставим найденные значения в исходную формулу определения момента:

$$M_2 = \frac{\delta\varphi_1 \cdot M_1}{\delta\varphi_2} = \frac{\delta\varphi_1 \cdot M_1 \cdot O_2A}{\delta S_A \cdot \sin\varphi} = \frac{\delta\varphi_1 \cdot M_1 \cdot O_1A}{\delta\varphi_1 \cdot O_1A \cdot \sin\varphi \cdot \sin\varphi} = \frac{M_1}{\sin^2\varphi}.$$

После сокращений получим ответ:
$$M_2 = \frac{M_1}{\sin^2\varphi}.$$

3.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-14

Все механизмы в задании Д-14 плоские, с одной степенью свободы, состоят из отдельных звеньев, соединенных между собой шарнирами, либо имеют общую точку контакта. В ряде вариантов имеется пружина, сила упругости которой определяется из условия равновесия механизма при решении уравнения работ.

Сила упругости
$$F_y = C \cdot h,$$

где C – коэффициент жесткости пружины, h – деформация пружины.

Если дана величина h и определена сила упругости F_y , то можно

определить $C = \frac{F}{h}$ или по известному C определить $h = \frac{F}{C}$.

Каждое звено механизма может совершать поступательное, вращательное или плоское движение. Плоское движение удобно заменять вращательным вокруг мгновенного центра скоростей. Установление соотношений между углами поворота и перемещениями контактирующих звеньев производится с использованием возможного перемещения общей точки контакта.

Например,
$$\delta S_K = \delta \varphi_1 \cdot R_1 = \delta \varphi_2 \cdot R_2,$$

откуда легко выразить:
$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \cdot \frac{R_1}{R_2}.$$

Чтобы правильно показать возможные перемещения, надо сначала показать скорости точек, определяющих движение звеньев и точек контактов звеньев. Возможные перемещения точек всегда направлены по их скоростям. Все варианты задания Д-14 имеют различные кинематические схемы, но принципиально решаются одинаково и в группы не выделяются.

3.3. Задача по Д-14

В кулисном механизме (рис. 7) при качании рычага OC вокруг горизонтальной оси O ползун A , перемещаясь вдоль рычага OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K .

Определить силу Q , которую надо приложить перпендикулярно кривошпицу OC в точке C для того, чтобы уравновесить силу P , направленную вдоль стержня AB вверх.

Дано: $OC = R$; $OK = \ell$, P .

Определить Q .

Решение.

Сообщим механизму возможное перемещение, допускаемое наложенными на систему связями.

Неподвижный шарнир в точке O допускает поворот рычага OC вокруг

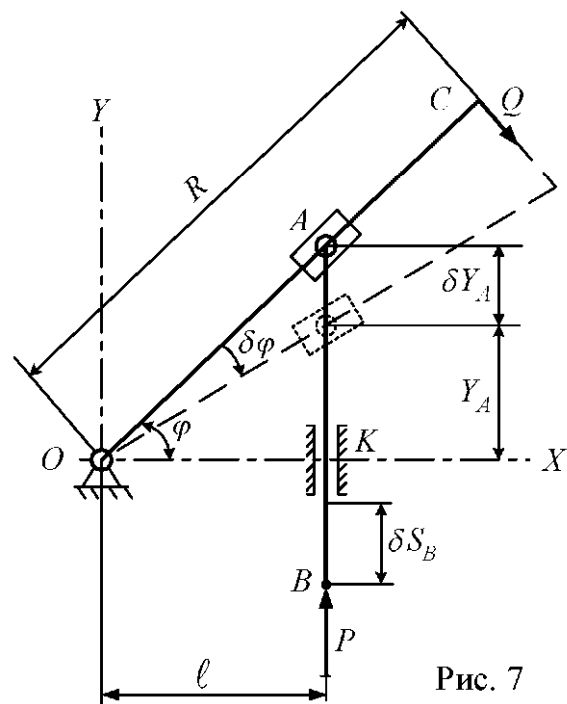


Рис. 7

точки O на угол $\delta\varphi$, при этом реакции шарнира O работу не производят. Направляющие в точке K допускают вертикальное перемещение стержня AB , например вниз, на величину δS_B , при этом реакции направляющих перпендикулярны перемещению и работу не производят. Таким образом, все связи двухсторонние идеальные. Силу P можно перенести по линии её действия в точку A , которая перемещается вертикально вдоль оси Y . Здесь удобно применить аналитическую форму уравнения работ для расчёта работы силы P .

$$\sum F_{ix} \cdot \delta X_i + \sum F_{iy} \cdot \delta Y_i + \sum F_{iz} \cdot \delta Z_i = 0,$$

где в данной задаче $\sum F_{iy} = P$, $\sum F_{ix} = 0$ и $\sum F_{iz} = 0$, $\delta Y_i = \delta Y_A$.

Определим Y_A из треугольника OAK :

$$Y_A = \ell \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

тогда возможное перемещение δY_A определится как дифференциал:

$$\delta Y_A = \ell \cdot (\operatorname{tg} \varphi)' = \frac{\ell}{\cos^2 \varphi} \cdot \delta \varphi.$$

Составим уравнение работ для механизма:

$$Q \cdot OC \cdot \delta \varphi - P \cdot \delta Y_A = 0,$$

откуда
$$Q = \frac{P \cdot \delta Y_A}{R \cdot \delta \varphi} = \frac{P \cdot \ell \cdot \delta \varphi}{R \cdot \cos^2 \varphi \cdot \delta \varphi} = \frac{P \cdot \ell}{R \cdot \cos^2 \varphi}.$$

4. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ И УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Общее уравнение динамики, объединяющее принцип Даламбера с принципом возможных перемещений, формулируется следующим образом: в любой момент времени сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с двухсторонними идеальными связями на любом возможном её перемещении равна нулю.

Если система состоит из отдельных твёрдых тел, то к каждому телу прикладывают действующие на него задаваемые силы, а также главный вектор и главный момент сил инерции точек тела, затем системе сообщают возможное перемещение и для всей совокупности сил составляют общее уравнение динамики. Количество уравнений

соответствует числу степеней свободы системы. Запишем три основных формы общего уравнения динамики.

1. *Общая, или геометрическая, форма*

$$\sum F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{F}_i \delta \vec{S}_i) + \sum \Phi_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(\vec{\Phi}_i \delta \vec{S}_i) = 0,$$

где F_i – задаваемые силы, а Φ_i – силы инерции.

2. *Векторная форма* $\sum (\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$

где $\delta \vec{r}_i$ – возможное приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i$ точки M_i .

3. *Аналитическая форма*

$$\sum [(F_{ix} + \Phi_{ix}) \cdot \delta X_i + (F_{iy} + \Phi_{iy}) \cdot \delta Y_i + (F_{iz} + \Phi_{iz}) \cdot \delta Z_i] = 0,$$

где $\Phi_{ix} = -m_i \ddot{X}_i$, $\Phi_{iy} = -m_i \ddot{Y}_i$, $\Phi_{iz} = -m_i \ddot{Z}_i$.

Общее уравнение динамики в обобщенных силах записывается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^S (Q_j + Q_j^\phi) \cdot \delta q_j = 0,$$

где S – количество степеней свободы механической системы $j=1, 2, \dots, S$ – количество обобщенных координат, соответствующее

числу степеней свободы системы; $Q_j = \frac{\delta A_{q_j}}{\delta q_j}$ – обобщенная сила,

определяемая как отношение элементарной работы действующих сил, вызванной приращением δq_j обобщенной координаты q_j , к величине этого приращения; Q_j^ϕ – обобщенная сила инерции.

В случае действия только потенциальных (консервативных) сил обобщенная сила Q_j^Π определяется по формуле

$$Q_j^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

то есть как частная производная потенциальной энергии Π системы по обобщенной координате q_j .

Вместо общего уравнения динамики можно записать уравнение, эквивалентное общему уравнению динамики в обобщенных силах.

Так как приращения обобщенных координат δq_j произвольны и не зависят друг от друга, то

$$\sum_{j=1}^S \delta q_j \neq 0, \quad \text{тогда} \quad Q_j + Q_j^\phi = 0, \quad \text{или} \quad -Q_j^\phi = Q_j.$$

Если обобщенную силу инерции Q_j^ϕ выразить через изменение кинетической энергии T механической системы в функции обобщенных координат и скоростей, то получим уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

где T – кинетическая энергия системы; $\dot{q}_j$ – обобщенная скорость; q_j – обобщенная координата; Q_j – обобщенная сила.

Уравнения Лагранжа представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы второго порядка относительно обобщенных координат. Интегрируя дважды эти уравнения, получаем уравнения движения системы в обобщенных координатах: $q_j = f(t)$. Уравнения Лагранжа сыграли решающую роль в развитии динамики и широко используются при решении различных задач динамики, являясь универсальным методом их решения.

4.1. Задание Д-19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

Блоки и катки считать сплошными однородными цилиндрами (рис. 8).

Дано: $G_1 = 8G$; $G_2 = G$; $G_3 = G$; $G_4 = 2G$; $f = 0,1$.

Определить a_1 , a_4 , T_1 , T_4 .

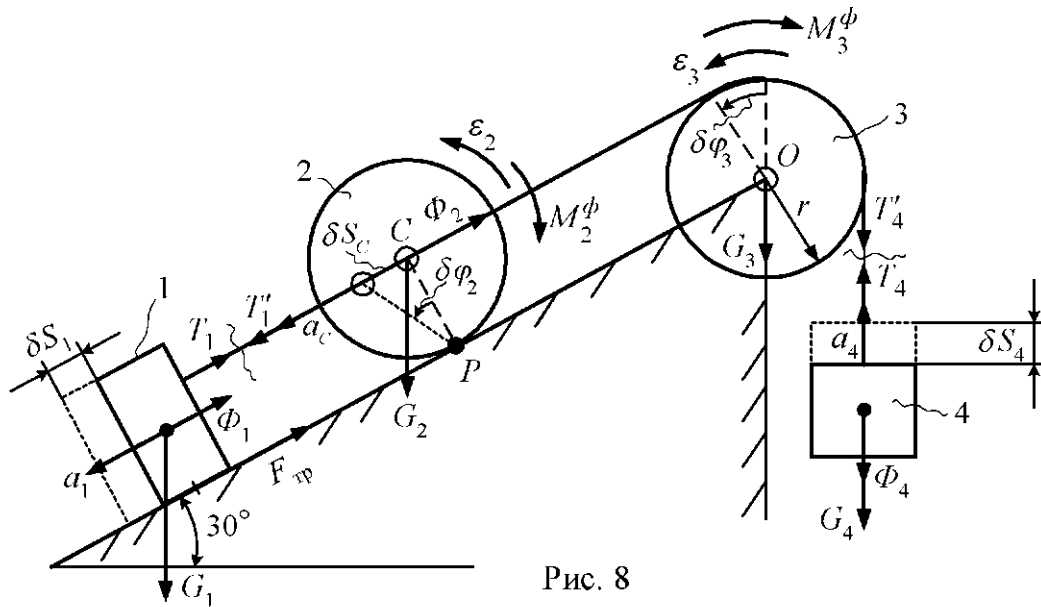


Рис. 8

Решение.

Применим к решению задания общее уравнение динамики. Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорений тел соответствуют направлениям их движения. Определим истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения. Для этого запишем сумму моментов сил, приложенных к третьему шкиву относительно точки O , то есть

$$\sum M_{i_o} = T_{2-3} \cdot r - T_{3-4} \cdot r,$$

где T_{2-3} – сила натяжения троса между телами 2 и 3;

T_{3-4} – сила натяжения троса между телами 3 и 4.

Определим T'_{2-3} из условия равновесия сил тяжести G_1 , G_2 и T'_{2-3} в проекции на ось, направленную по тросу.

$$T'_{2-3} = G_1 \cdot \sin 30^\circ + G_2 \cdot \sin 30^\circ = 8G \cdot 0,5 + G \cdot 0,5 = 4,5G.$$

Сила трения $F_{\text{тр}}$ тела 1 незначительно уменьшает натяжение троса

$$F_{\text{тр}} = N \cdot f = G_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot f = 8G \cdot 0,866 \cdot 0,1 = 0,69G.$$

Окончательно получаем $T_{2-3} = 4,5G - 0,69G = 3,81G$.

Сила натяжения T_{3-4} равна весу $G_4 = 2G$, что очевидно из проекции сил на вертикальную ось.

Таким образом, установлено, что грузы 1 и 2 будут опускаться, а груз 4 будет подниматься вверх.

Покажем на рисунке все силы тяжести, силу трения и ускорения.

Заметим, что ускорения одинаковы: $a_1 = a_c = a_4$, так как тела соединены одним тросом. Приложим силы инерции, выразив все ускорения через a_1 .

Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением $\vec{a}_1$, выражается вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1.$$

Силы инерции блока 2, совершающего плоское движение, приводятся:

к главному вектору $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{a}_c = -m_2 \vec{a}_1$,

где a_c – ускорение центра масс блока 2;

и к главному моменту $M_2^\phi = -J_2 \cdot \varepsilon_2$,

где момент инерции $J_2 = \frac{m_2 \cdot r^2}{2}$, угловое ускорение $\varepsilon_2 = a_1 / r$.

Силы инерции шкива 3, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к главному моменту $M_3^\phi = -J_3 \cdot \varepsilon_3$, где $J_3 = \frac{m_3 \cdot r^2}{2}$, $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{r}$.

Сила инерции груза 4, движущегося поступательно,

$$\vec{\Phi}_4 = -m_4 \vec{a}_4 = -m_4 \vec{a}_1.$$

Сообщим системе возможное перемещение в направлении её действительного движения и покажем возможные перемещения δS_1 , δS_c , $\delta \varphi_2$, $\delta \varphi_3$, δS_4 .

Составим общее уравнение динамики:

$$G_1 \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - F_{\text{тр}} \cdot \delta S_1 + G_2 \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - \Phi_1 \cdot \delta S_1 - \\ - M_2^\phi \cdot \delta \varphi_2 - \Phi_2 \cdot \delta S_c - M_3^\phi \cdot \delta \varphi_3 - G_4 \cdot \delta S_4 - \Phi_4 \cdot \delta S_4 = 0,$$

где $\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r}$, $\delta S_c = \delta S_1 = \delta S_4$, то есть все возможные перемещения выражаем через δS_1 .

Зависимости между перемещениями, скоростями и ускорениями одинаковые, поэтому $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_1}{r}$, $a_1 = a_c = a_4$, то есть все ускорения выражаем через a_1 .

После подстановки соответствующих значений общее уравнение динамики принимает вид

$$G_1 \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - F_{\text{тр}} \cdot \delta S_1 + G_2 \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - m_1 a_1 \cdot \delta S_1 - \frac{m_2 r^2}{2} \cdot \frac{a_1}{r} \cdot \frac{\delta S_1}{r} - \\ - m_2 a_1 \cdot \delta S_1 - \frac{m_3 r^2}{2} \cdot \frac{a_1}{r} \cdot \frac{\delta S_1}{r} - G_4 \cdot \delta S_1 - m_4 a_1 \cdot \delta S_1 = 0.$$

Сократим уравнение на δS_1 и подставим G , получим:

$$4G - 0,69G + G_2 \cdot 0,5 - \frac{8G}{g} \cdot a_1 - \frac{G}{2g} \cdot a_1 - \frac{G}{g} \cdot a_1 - \frac{G}{2g} \cdot a_1 - 2G - \frac{2G}{g} \cdot a_1 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие a_1 , в правую часть уравнения, сократив предварительно все слагаемые на G , получим:

$$1,81 = \frac{a_1}{g} \cdot \left(8 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 2\right),$$

откуда
$$a_1 = \frac{9,81 \cdot 1,81}{12} = 1,48 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для определения натяжения троса T_1 мысленно разрежем трос и заменим его действие реакцией T_1 .

Составим общее уравнение динамики отдельно для груза 1.

$$G_1 \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - F_{\text{тр}} \cdot \delta S_1 - \Phi_1 \cdot \delta S_1 - T_1 \cdot \delta S_1 = 0,$$

откуда
$$T_1 = 4G - 0,69G - \frac{8G}{9,81} \cdot a_1. \quad \text{Подставим} \quad a_1 = 1,48 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

тогда
$$T_1 = 2,1G \text{ Н}.$$

Для определения натяжения T_4 мысленно разрежем этот трос и заменим его действие реакцией T_4 .

Не составляя общего уравнения динамики, на основании принципа Даламбера в проекции на вертикальную ось запишем:

$$\sum Z_i = 0, \quad T_4 - \Phi_4 - G_4 = 0,$$

откуда
$$T_4 = \frac{2G}{g} \cdot a_1 + 2G = 2,3G \text{ Н}.$$

4.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-19

Варианты задания Д-19 имеют различные кинематические схемы механизмов, но все они имеют одну степень свободы, поэтому решаются с помощью одного общего уравнения динамики. Все возможные перемещения тел, входящих в систему, удобно выражать через одно δS_1 первого тела. Также все ускорения выражаются через a_1 , при этом происходит поиск кинематического передаточного отношения механизма.

$$i = \frac{\delta S_{\text{вых}}}{\delta S_1} = \frac{a_{\text{вых}}}{a_1},$$

где $S_{\text{вых}}$ и $a_{\text{вых}}$ – возможные перемещения и ускорения выходного звена 3 или 4.

Принципиально все варианты задания рассчитываются аналогично, поэтому выделение групп нецелесообразно. Следует лишь отметить особенность вариантов № 9–12, которая состоит в наличии рычага с тормозной колодкой. Здесь надо составить дополнительное уравнение равновесия рычага для определения силы нормального давления и трения, действующих на вращающийся шкив 2 или 3.

При составлении общего уравнения динамики эти силы надо учитывать как внешние силы со стороны рычага на движущиеся тела системы.

Определенную трудность в ряде вариантов представляет определение истинного направления движения грузов. Так как движение системы приводит к вращению шкивов 2 или 3 вокруг осей их вращения, то уравнение моментов сил, вращающих эти шкивы, определяет больший момент и соответственно направление их вращения. Эти моменты создаются либо силами натяжения ведущей и ведомой ветвей приводящих ремней (тросов), либо усилиями в контакте с другой шестерней (шкивом) и определяются заданными весами грузов.

При определении искомых усилий в тросах (ветвях нитей) используется общее уравнение динамики, записанное отдельно для рассматриваемого груза, или применяется принцип Даламбера. Здесь следует отметить, что для определения силы натяжения троса катка, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности, нельзя использовать уравнение равновесия в проекции на ось движения. В это уравнение должна войти сила сцепления, приложенная в точке

касания катка с поверхностью, но эта сила неизвестна, так как в задании нет данных о коэффициенте сцепления. При составлении общего уравнения динамики эта неизвестная по модулю сила сцепления, приложенная в неподвижной точке касания (мгновенный центр скоростей), работу не создает и не входит в уравнение. При использовании принципа Даламбера можно составить уравнение моментов сил относительно этой точки касания, при этом сила сцепления момента не создает и не входит в уравнение. Задание Д-19 можно решить, используя вместо общего уравнения динамики уравнения Лагранжа второго рода.

4.3. Задача по Д-19

Решим задачу, изложенную выше в п.4.1 (см. рис. 8), используя дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах – уравнения Лагранжа второго рода.

В качестве обобщённой координаты выберем координату груза S_1 . Элементарное приращение обобщенной координаты вызовет возможное перемещение δS_1 . Обобщенной скоростью будет $\dot{S}_1 = V_1$. Ускорение груза $a_1 = \ddot{S}_1$. Обобщенная сила Q_{S_1} соответствует обобщенной координате S_1 . Запишем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q_{S_1},$$

где T – кинетическая энергия системы; $\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1}$ – частная производная

кинетической энергии по обобщенной скорости; $\frac{\partial T}{\partial S_1}$ – частная производная

кинетической энергии по обобщенной координате.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где
$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{8 G \cdot V_1^2}{2g}; \quad (m_1 = \frac{8 G}{2g});$$

$$T_2 = \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{G \cdot V_1^2}{2g} + \frac{m_2 r^2}{2} \cdot \frac{V_1^2}{2r^2} = \frac{G}{2g} \cdot V_1^2 \cdot \frac{3}{2}; \quad (m_2 = \frac{G}{g});$$

$$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 r^2}{2} \cdot \frac{V_1^2}{2r^2} = \frac{G}{2g} \cdot V_1^2 \cdot \frac{1}{2}; \quad (m_3 = \frac{G}{g});$$

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} = \frac{G}{2g} \cdot V_1^2 \cdot 2; \quad (m_4 = \frac{G}{g});$$

$$T = \frac{G}{2g} \cdot V_1^2 \cdot (8 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2) = \frac{G}{2g} \cdot V_1^2 \cdot 12;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = \frac{G}{g} \cdot V_1 \cdot 12, \quad \text{так как} \quad \dot{S}_1 = V_1;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) = \frac{G}{g} \cdot a_1 \cdot 12, \quad \text{так как} \quad a_1 = \ddot{S}_1;$$

$$\begin{aligned} Q_{S_1} &= \frac{\delta A_{S_1}}{\delta S_1} = \\ &= \frac{8 G \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ + G \cdot \delta S_1 \cdot \sin 30^\circ - 8 G \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,1 \cdot \delta S_1 - 2 G \cdot \delta S_1}{\delta S_1} = \\ &= 4 G + \frac{1}{2} G - 0,69 G - 2 G = 1,81 G. \end{aligned}$$

Приравняв левую и правую части уравнения Лагранжа, заметим, что $\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0$, так как $T = f(\dot{S}_1)$, и получим $\frac{G}{g} \cdot a_1 \cdot 12 = 1,81 G$, откуда $a_1 = \frac{1,81 \cdot 9,81}{12} = 1,48 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, то есть ответ тот же, что и в п. 4.1.

Расчёт T_1 и T_4 можно произвести, используя принцип Даламбера в проекции на оси движения грузов 1 и 4, как это делалось в п.4.1.

Библиографический список

1. *Яблонский А.А.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М., 1978 и последующие издания.
2. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики. – М., 1984. – Ч.II и последующие издания.
3. *Тарг С.М.* Курс теоретической механики. – М., 1963 и последующие издания.
4. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М., 1990.
5. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М., 1971 и последующие издания.
6. *Кепе О.Э.* Сборник коротких задач по теоретической механике. – М., 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	4
1.1. Задание Д-9. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твёрдого тела.....	6
1.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-9.....	10
1.3. Задача по Д-9.....	10
2. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	12
2.1. Задание Д-10. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	14
2.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-10.....	17
2.3. Задача по Д-10.....	18
3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	20
3.1. Задание Д-14. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы.....	21
3.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-14.....	22
3.3. Задача по Д-14.....	23
4. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ И УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА.....	24
4.1. Задание Д-19. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы.....	26
4.2. Обзор и классификация вариантов задания Д-19.....	30
4.3. Задача по Д-19.....	31
Библиографический список.....	33