ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА
ЧАСТЬ 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Практикум

Учебное пособие содержит типовые задачи по динамике материальной системы и аналитической механике с решениями, взятые из наиболее распространенного сборника задач И.В. Мещерского (§ 34–48). В начале каждого параграфа приведены основные теоретические положения и методические указания, используемые при решении задач. Решения даны с подробными пояснениями.

Для студентов и преподавателей технических вузов и естественных факультетов университетов, а также лиц, самостоятельно изучающих теоретическую механику.

34. Геометрия масс: центр масс материальной системы, моменты инерции твердых тел

Методические указания к решению задач

Механической системой или ***системой материальных точек*** называют такую их совокупность, в которой положение или движение каждой точки зависит от положения или движения всех остальных, т.е. это система взаимосвязанных точек. Поэтому материальное тело, в том числе и абсолютно твердое, может рассматриваться как система материальных частиц, образующих это тело. В свою очередь совокупность взаимосвязанных твердых тел также является механической системой.

При исследовании движения механической системы важно учитывать характер распределения масс всех точек системы.

Для характеристики распределения масс используются такие понятия, как центр масс системы, осевые, планарные и полярный, а также центробежные моменты инерции твердых тел.

Если движение механической системы изучается в декартовой системе координат $Oxyz$, то центр масс C этой системы представляет собой геометрическую точку с координатами:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \\ y_C &= \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \\ z_C &= \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}, \end{aligned}\right\} \qquad (34.1)$$

где m_k — масса k-й точки (или тела); x_k, y_k, z_k — координаты k-й точки или центра тяжести k-го тела, входящих в механическую систему.

Арифметическая сумма масс всех точек или тел, образующих систему, есть *масса M системы*, т.е.

$$M = \sum m_k.$$

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то

$$M = \rho V, \tag{34.2}$$

где ρ — объемная плотность; V — объем тела.

Если масса распределена по поверхности (площади), то вводится понятие *поверхностной плотности*

$$\rho = \frac{M}{S}, \tag{34.3}$$

где S — площадь поверхности.

Для длинных тонких тел (стержней) вводится понятие *линейной плотности*

$$\rho = \frac{M}{l}, \tag{34.4}$$

где l — длина тела массы M.

Эти величины используют при вычислении моментов инерции тел.

Осевым моментом инерции твердого тела называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний до оси. Например, осевой момент инерции тела относительно оси z обозначается I_z и равен

$$I_z = \sum m_k h_k^2. \tag{34.5}$$

В формуле (34.5) h_k может быть выражено через координаты k-й точки. Тогда выражения осевых моментов инерции тела относительно декартовых осей координат примут вид

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum m_k(y_k^2 + z_k^2),\\ I_y &= \sum m_k(z_k^2 + x_k^2),\\ I_z &= \sum m_k(x_k^2 + y_k^2). \end{aligned}\right\} \tag{34.6}$$

Формулы (34.5) и (34.6) справедливы как для твердого тела, так и для любой системы материальных точек.

В случае сплошного тела его разбивают на элементарные части, а вычисление сумм в формулах (34.6) в пределе сводится к вычислению определенных интегралов. Причем в зависимости от того, что собой представляют с точки зрения геометрии элементарные части тела, эти интегралы могут быть кратными — тройными и двойными — или обычными однократными вида:

$$I_z = \int\limits_{(V),(S),(l)} h^2 dm, \tag{34.7}$$

которые вычисляются по всему объему V, по всей площади S или по всей длине l тела. Тогда соответственно масса элементарной части тела

$$dm = \rho dV,$$

$$dm = \rho dS,$$

$$dm = \rho dl.$$

Момент инерции твердого тела относительно оси z

$$I_z = Mi_z^2, \tag{34.8}$$

где i_z, или ρ_z — радиус инерции тела относительно оси.

Радиус инерции тела относительно оси представляет собой расстояние от этой оси до такой точки тела, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В заключение отметим, что осевой момент инерции является мерой инертности твердого тела при вращательном движении.

Планарные моменты инерции — это скалярные величины, равные сумме произведений масс всех точек тела на квадраты расстояний от этих точек до соответствующих плоскостей.

В случае декартовых осей планарные моменты инерции определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{Oxy} &= \sum m_k z_k^2, \\ I_{Oyz} &= \sum m_k x_k^2, \\ I_{Ozx} &= \sum m_k y_k^2. \end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

Полярный момент инерции — момент инерции тела относительно начала координат:

$$I_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \tag{34.10}$$

Из формул (34.6) и (34.10) следует, что

$$2I_O = I_x + I_y + I_z. \tag{34.11}$$

Если твердое тело симметрично относительно осей координат и

$$I_x = I_y = I_z = I_{\text{ос}},$$

что имеет место для сферического тела, то

$$2I_O = 3I_{\text{ос}},$$

откуда

$$I_{\text{ос}} = \frac{2}{3} I_O, \tag{34.12}$$

где $I_{\text{ос}}$ — осевой момент инерции.

Приведем формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных тел относительно главных осей тензора инерции.

Тонкий диск (рис. 34.1):

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{MR^2}{2}.$$

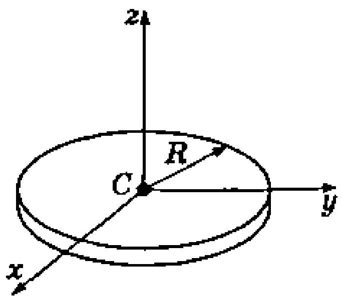


Рис. 34.1

Круглый цилиндр (рис. 34.2):

$$I_{C_z} = \frac{MR^2}{2},$$

$$I_{C_x} = I_{C_y} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}.$$

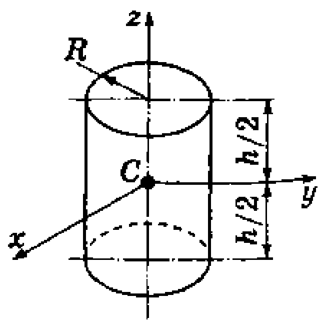


Рис. 34.2

Тонкий стержень (рис. 34.3):

$$I_x = I_z = \frac{Ml^2}{12},$$

$$I_y = 0.$$

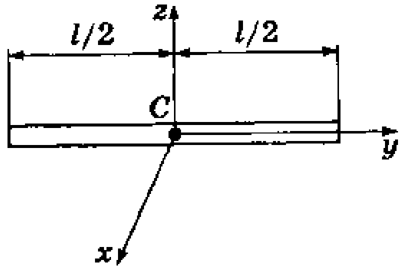


Рис. 34.3

Круговой конус (рис. 34.4):

$$I_{C_z} = \frac{3}{10}MR^2.$$

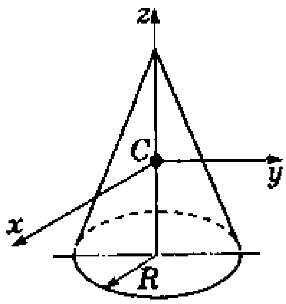


Рис. 34.4

Шар (рис. 34.5):

$$I_{\text{ос}} = I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2,$$

$$I_O = \frac{3}{2}I_{\text{ос}} = \frac{3}{5}MR^2.$$

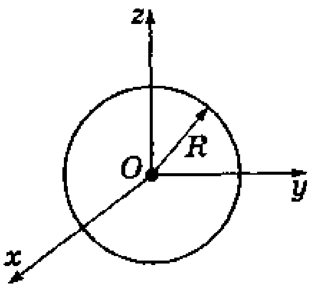


Рис. 34.5

Прямоугольная тонкая пластинка (рис. 34.6):

$$I_{C_x} = \frac{Mb^2}{12},$$

$$I_{C_y} = \frac{Ma^2}{12},$$

$$I_{C_z} = I_{C_x} + I_{C_y} = \frac{M(a^2+b^2)}{12}.$$

Момент инерции тела относительно оси так же, как и центр масс тела, не полностью характеризует распределение масс системы. В частности, эти характеристики распределения масс не учитывают асимметрию в их распределении. Поэтому в качестве характеристик, учитывающих асимметрию в распределении масс, дополнительно вводят центробежные моменты инерции.

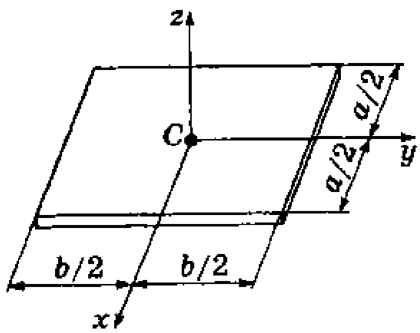


Рис. 34.6

Центробежные моменты инерции определяются относительно пары координатных осей по формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \sum m_k x_k y_k, \\ I_{yz} &= \sum m_k y_k z_k, \\ I_{zx} &= \sum m_k z_k x_k \end{aligned}\right\} \tag{34.13}$$

или по аналогии с формулой (34.7) для сплошных тел

$$I_{xy} = \int\limits_{V,S,l} xy\,dm, \quad I_{yz} = \int\limits_{V,S,l} yz\,dm, \quad I_{zx} = \int\limits_{V,S,l} zx\,dm. \tag{34.14}$$

Центробежные моменты инерции в отличие от осевых могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Это зависит от выбора начала осей координат и их направления.

Ось, относительно которой центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах обозначение этой оси, равны нулю, называется ***главной осью инерции тела***. Главная ось инерции, проходящая через центр масс тела, называется ***главной центральной осью инерции***.

Зная осевые и центробежные моменты инерции тела, можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат и образующей с осями x, y, z соответственно углы α, β, γ:

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$

$$- 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha. \tag{34.15}$$

Если оси координат являются главными осями инерции, то

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0.$$

Тогда

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma. \tag{34.16}$$

Пусть в некоторой точке O твердого тела выбрано начало координат $Oxyz$. Если в этой точке известны главные моменты инерции относительно главных осей инерции $Ox'y'z'$ и ориентация осей $Oxyz$ относительно главных осей, то при определении центробежных моментов инерции возможны три случая.

1. Ось Ox совпадает с главной осью инерции Ox' (рис. 34.7, *а*).

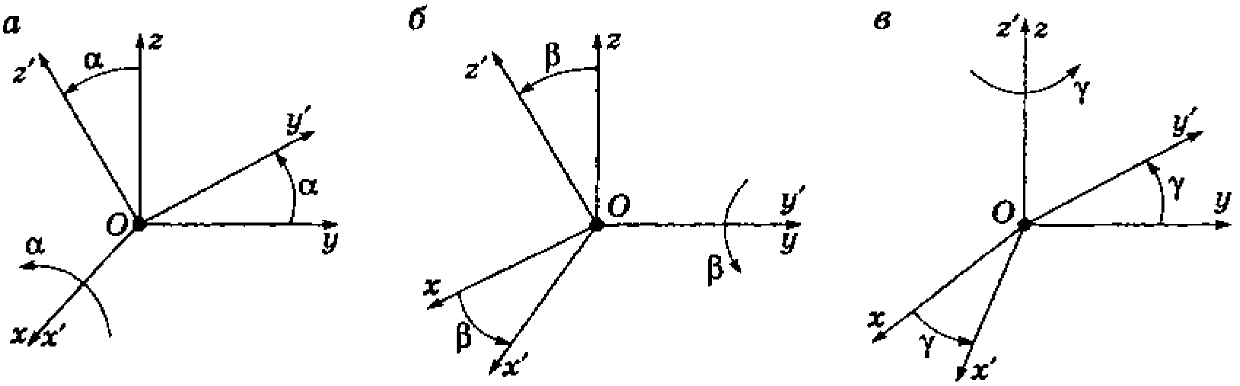


Рис. 34.7

Тогда

$$I_{xy} = I_{x'y} = 0,$$
$$I_{zx} = I_{zx'} = 0,$$

а центробежный момент инерции при повороте против часовой стрелки осей Oyz вокруг оси Ox на угол $\alpha < 90°$ до совпадения с осями $Oy'z'$ от оси Oy к оси Oz

$$I_{yz} = \frac{I_{z'} - I_{y'}}{2} \sin 2\alpha, \qquad (34.17)$$

а при повороте по часовой стрелке

$$I_{yz} = \frac{I_{y'} - I_{z'}}{2} \sin 2\alpha. \qquad (34.18)$$

2. Ось Oy совпадает с Oy' (рис. 34.7, *б*) и при повороте осей Oxz вокруг оси Oy на угол $\beta < 90°$ до совпадения с осями $Ox'z'$ от оси Oz к оси Ox против часовой стрелки имеем

$$I_{xy} = I_{xy'} = 0,$$
$$I_{yz} = I_{y'z} = 0,$$
$$I_{zx} = \frac{I_{x'} - I_{z'}}{2} \sin 2\beta. \qquad (34.19)$$

3. При совпадении оси Oz с осью Oz' (рис. 34.7, *в*) и повороте вокруг оси Oz на угол $\gamma < 90°$ от оси Ox к оси Oy против часовой стрелки

$$I_{xz} = I_{xz'} = 0,$$
$$I_{yz} = I_{yz'} = 0,$$

$$I_{xy} = \frac{I_{y'} - I_{x'}}{2} \sin 2\gamma. \qquad (34.20)$$

При вычислении моментов инерции относительно осей, параллельных оси, проходящей через центр масс тела, применяется ***теорема Гюйгенса — Штейнера***:

> момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Пусть ось Oz параллельна оси Cz', проходящей через центр масс C тела. Тогда

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2, \qquad (34.21)$$

где d — расстояние между осями.

Для центробежных моментов инерции зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей определяется по формулам

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= I_{x'y'} + Mx_C y_C, \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + My_C z_C, \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + Mz_C x_C, \end{aligned}\right\} \qquad (34.22)$$

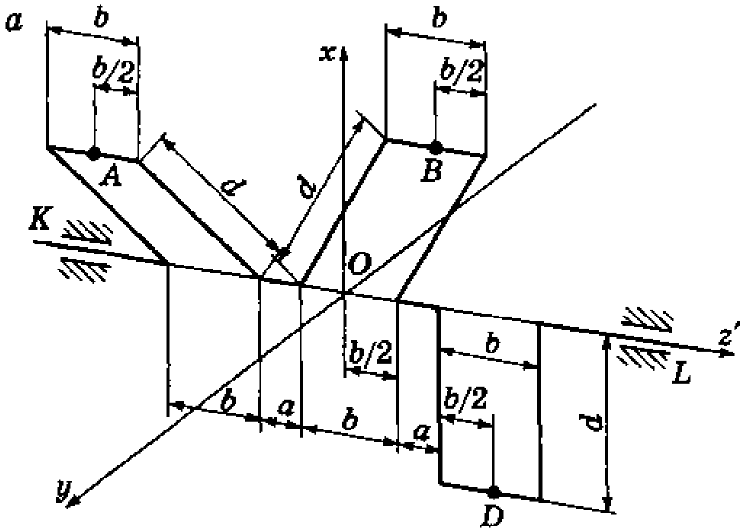
где x', y', z' — оси координат, проходящие через центр масс тела; x, y, x — оси координат, параллельные осям x', y', z'; x_C, y_C, z_C — координаты центра масс тела в осях xyz.

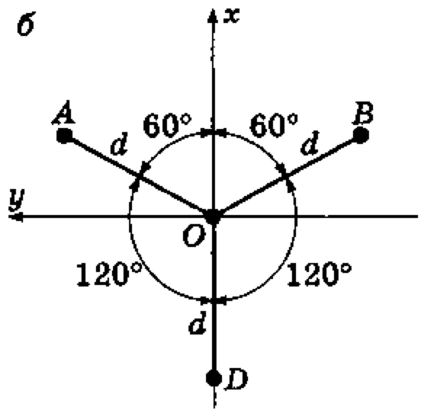
При решении задач этого параграфа все приведенные выше формулы могут быть применены в указанном виде, хотя в некоторых случаях не исключается иной подход.

Задачи и решения

Задача 34.1

Коленчатый вал трехцилиндрового двигателя, изображенный на рисунке, состоит из трех колен, расположенных под углом 120° друг к другу. Определить положение центра масс коленчатого вала, считая, что массы колен сосредоточены в точках A, B и D, причем $m_A = m_B = m_D = m$, и пренебрегая массами остальных частей вала. Размеры указаны на рисунке.





Решение

Определим координаты центра масс системы по формулам (34.1). Найдем координаты центров тяжести тел, входящих в систему (см. рисунок в условии задачи; вид слева):

$$x_A = d\cos 60° = \frac{1}{2}d,$$

$$x_B = d\cos 60° = \frac{1}{2}d,$$

$$x_D = -d;$$

$$y_A = d\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}d,$$

$$y_B = -d\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}d,$$

$$y_D = 0;$$

$$z_A = -\left(\frac{b}{2} + a + \frac{b}{2}\right) = -(b+a),$$

$$z_B = 0,$$

$$z_D = \left(\frac{b}{2} + a + \frac{b}{2}\right) = b + a.$$

Тогда

$$x_C = \frac{m(x_A + x_B + x_D)}{3m} = \frac{m\left(\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d - d\right)}{3m} = 0,$$

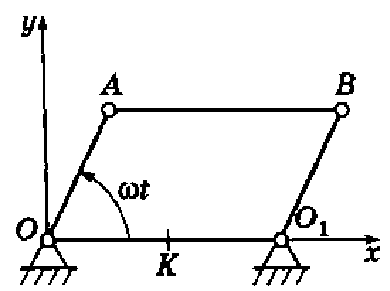
$$y_C = \frac{m(y_A + y_B + y_D)}{3m} = \frac{m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}d - \frac{\sqrt{3}}{2}d + 0\right)}{3m} = 0,$$

$$z_C = \frac{m(z_A + z_B + z_D)}{3m} = \frac{m(-b - a + 0 + b + a)}{3m} = 0.$$

Ответ: центр масс совпадает с началом координат O.

Задача 34.2

Найти уравнения движения центра масс шарнирного параллелограмма $OABO_1$, а также уравнение траектории его центра масс при вращении кривошипа OA с постоянной угловой скоростью ω. Звенья параллелограмма — однородные стержни, причем $OA = O_1B = AB/2 = a$.



Решение

Определим координаты центра масс механизма

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},$$

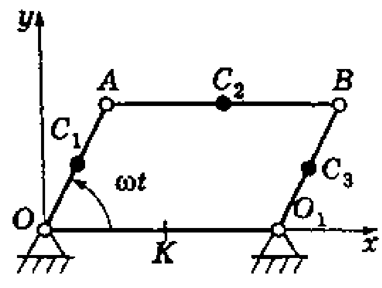
$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}. \qquad (1)$$

Центры масс стержней OA, AB, O_1B находятся в их серединах, т.е. соответственно в точках C_1, C_2, C_3 (см. рисунок). Найдем координаты этих точек:

$$x_{C_1} = \frac{a}{2}\cos\omega t, \quad y_{C_1} = \frac{a}{2}\sin\omega t;$$

$$x_{C_2} = a + a\cos\omega t, \quad y_{C_2} = a\sin\omega t;$$

$$x_{C_3} = 2a + \frac{a}{2}\cos\omega t, \quad y_{C_3} = \frac{a}{2}\sin\omega t.$$



Подставим эти значения в формулы (1). Учитывая, что

$$m_{OA} = m_{O_1 B} = \rho a,$$

$$m_{AB} = 2a\rho$$

(ρ — плотность материала стержней), получим

$$x_C = \frac{\rho a(x_{C_1} + 2x_{C_2} + x_{C_3})}{\rho a + \rho a + 2\rho a} = \frac{\frac{a}{2}\cos\omega t + 2(a + a\cos\omega t) + 2a + \frac{a}{2}\cos\omega t}{1+1+2} =$$

$$= a + \frac{3}{4}a\cos\omega t;$$

$$y_C = \frac{\rho a(y_{C_1} + 2y_{C_2} + y_{C_3})}{\rho a + \rho a + 2\rho a} = \frac{\frac{a}{2}\sin\omega t + 2a\sin\omega t + \frac{a}{2}\sin\omega t}{4} = \frac{3a}{4}\sin\omega t.$$

Найдем уравнение траектории центра масс системы, исключив время из выражений для x_C и y_C. Так как

$$x_C - a = \frac{3}{4}a\cos\omega t,$$

$$y_C = \frac{3}{4}a\sin\omega t,$$

то после преобразований получим

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \frac{9}{16}a^2\cos^2\omega t + \frac{9}{16}a^2\sin^2\omega t = \frac{9}{16}a^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2.$$

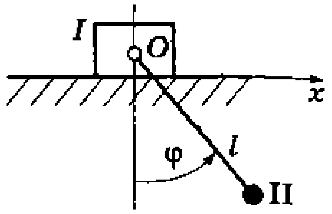
Таким образом,

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \frac{9}{16}a^2$$

— это уравнение окружности радиусом $\frac{3}{4}a$ с центром в точке $K(a\,,\ 0)$.

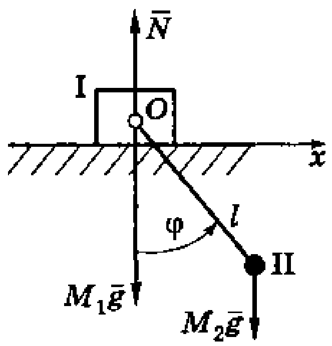
Ответ: $x_C = a + \frac{3}{4}a\cos\omega t$, $y_C = \frac{3}{4}a\sin\omega t$; уравнение траектории $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2$ — окружность радиуса $\frac{3}{4}a$ с центром в точке K с координатами $(a,\ 0)$.

Задача 34.3



К ползуну I массы M_1 посредством тонкой невесомой нити прикреплен груз II массы M_2. При колебаниях груза по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ ползун скользит по неподвижной горизонтальной гладкой поверхности. Найти уравнение движения ползуна $x_1 = f(t)$, считая, что в начальный момент ($t = 0$) ползун находился в начале отсчета O оси x. Длина нити равна l.

Решение



Запишем теорему о движении центра масс системы в проекции на ось x (см. рисунок):

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0,$$

так как внешние силы перпендикулярны оси x. Следовательно, $\ddot{x}_C = 0$, а $\dot{x}_C = \text{const}$, при $t = 0$ $\dot{x}_{C_0} = 0$, $x_C = \text{const}$, значит, $x_{C_1} = x_{C_2}$, где x_{C_1}, x_{C_2} — положение центра масс системы соответственно при $t = 0$ и при $t > 0$.

Найдем x_{C_1} и x_{C_2}:

$$x_{C_1} = 0 \text{ (нить с грузом расположена вертикально)},$$

$$x_{C_2} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2(x_1 + l \sin \varphi)}{M_1 + M_2},$$

где x_1 — перемещение ползуна; $x_2 = x_1 + l \sin \varphi$ — перемещение груза по горизонтали, которое происходит вместе с ползуном.

Тогда

$$x_{C_1} = x_{C_2} = 0 = \frac{M_1 x_1 + M_2(x_1 + l \sin \varphi)}{M_1 + M_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 x_1 + M_2 x_1 + M_2 l \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{M_2 l \sin \varphi}{M_1 + M_2}.$$

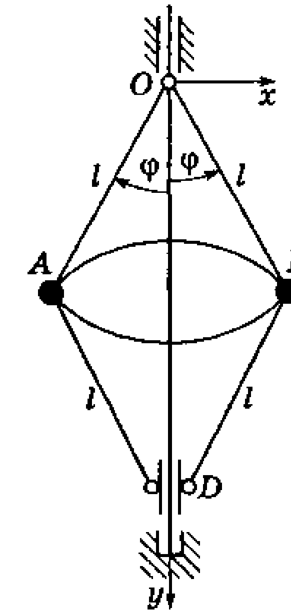
Подставим значение φ и получим

$$x_1 = -\frac{M_2 l \sin(\varphi_0 \sin\omega t)}{M_1 + M_2}.$$

О т в е т: $x_1 = -\dfrac{M_2 l \sin(\varphi_0 \sin\omega t)}{M_1 + M_2}$.

Задача 34.4

Определить положение центра масс центробежного регулятора, изображенного на рисунке, если масса каждого из шаров A и B равна M_1, масса муфты D равна M_2. Шары A и B считать точечными массами. Массой стержней пренебречь.

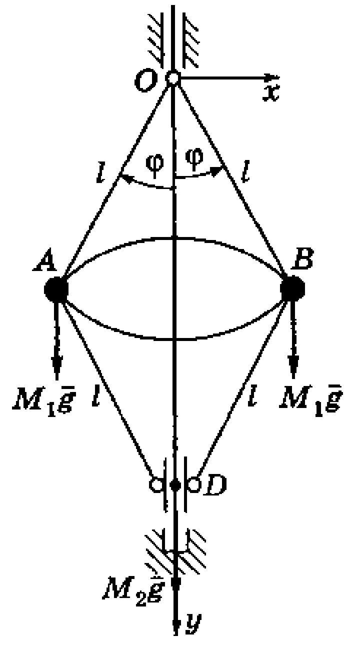


Р е ш е н и е

Запишем формулы для определения координат центра масс:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},$$

$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$



Из рисунка следует, что

$$x_B = l\sin\varphi; \quad x_D = 0; \quad y_B = y_A = l\cos\varphi;$$

$$y_D = 2l\cos\varphi; \quad x_A = -l\sin\varphi.$$

Тогда

$$x_C = \frac{M_1 x_A + M_1 x_B + M_2 x_D}{M_1 + M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{M_1(-l\sin\varphi) + M_1 l \sin\varphi + 0}{2M_1 + M_2} = 0;$$

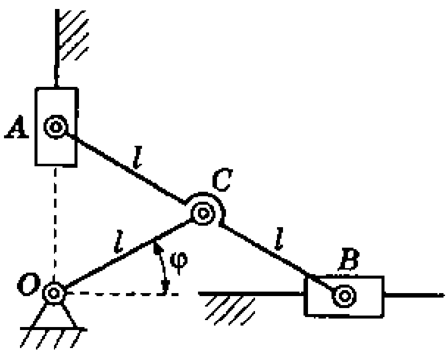
$$y_C = \frac{M_1 y_A + M_1 y_B + M_2 y_D}{M_1 + M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{M_1 l\cos\varphi + M_1 l\cos\varphi + M_2 \cdot 2l\cos\varphi}{2M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{2(M_1 + M_2)}{2M_1 + M_2} l\cos\varphi.$$

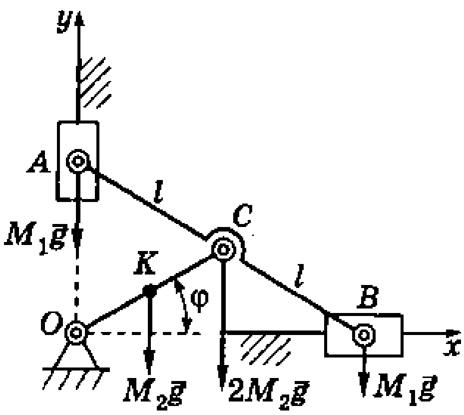
О т в е т: $x_C = 0$; $y_C = 2\dfrac{M_1 + M_2}{2M_1 + M_2} l\cos\varphi$.

Задача 34.5



Определить траекторию центра масс механизма эллипсографа, состоящего из муфт A и B массы M_1 каждая, кривошипа OC массы M_2 и линейки AB массы $2M_2$; дано: $OC = AC = CB = l$. Считать, что линейка и кривошип представляют однородные стержни, а муфты — точечные массы.

Р е ш е н и е



Запишем формулы для определения координат центра масс C_1 механизма:

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},$$

$$y_{C_1} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

Определим (см. рисунок)

$$x_A = 0, \quad y_A = 2l\sin\varphi;$$

$$x_B = 2l\cos\varphi, \quad y_B = 0;$$

$$x_C = l\cos\varphi, \quad y_C = l\sin\varphi;$$

$$x_K = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_K = \frac{l}{2}\sin\varphi$$

(K — точка приложения веса стержня OC).

Следовательно,

$$x_{C_1} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_1(2l\cos\varphi) + 2M_2 l\cos\varphi + M_2\frac{l}{2}\cos\varphi}{2M_1 + 3M_2} = \frac{l(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\cos\varphi,$$

$$y_{C_1} = \frac{M_1(2l\sin\varphi) + M_1 \cdot 0 + 2M_2 l\sin\varphi + M_2\frac{l}{2}\sin\varphi}{2M_1 + 3M_2} = \frac{l(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\sin\varphi.$$

Исключив φ из уравнения движения центра масс, получим

$$x_{C_1}^2 + y_{C_1}^2 = \left[\frac{l(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\right]^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \left[\frac{l(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}\right]^2$$

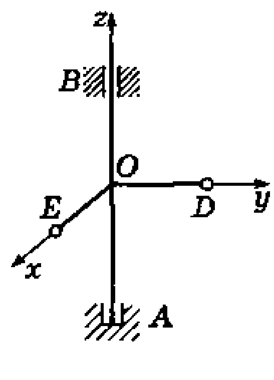
— это уравнение окружности радиусом

$$\frac{l(4M_1 + 5M_2)}{2(2M_1 + 3M_2)}$$

с центром в точке O.

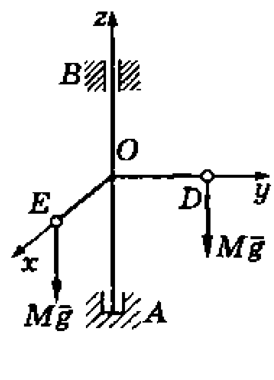
Ответ: окружность с центром в точке O и радиусом, равным $\frac{4M_1 + 5M_2}{2M_1 + 3M_2} \cdot \frac{l}{2}$.

Задача 34.6



К вертикальному валу AB прикреплены два одинаковых груза E и D с помощью двух перпендикулярных оси AB и притом взаимно перпендикулярных стержней $OE = OD = r$. Массами стержней и вала пренебречь. Грузы считать точечными массами. Найти положение центра масс C системы, а также центробежные моменты инерции I_{xz}, I_{yz}, I_{xy}.

Решение



Координаты центра масс определим по формулам (34.1).

Запишем координаты точек E и D (см. рисунок):

$$x_E = r, \quad y_E = 0, \quad z_E = 0;$$

$$x_D = 0, \quad y_D = r, \quad z_D = 0.$$

Тогда

$$x_C = \frac{Mx_E + Mx_D}{2M} = \frac{Mr + M\cdot 0}{2M} = \frac{r}{2},$$

$$y_C = \frac{My_E + My_D}{2M} = \frac{M\cdot 0 + Mr}{2M} = \frac{r}{2},$$

$$z_C = \frac{Mz_E + Mz_D}{2M} = 0.$$

Центробежные моменты инерции определим по формулам

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \quad I_{xz} = \sum m_k x_k z_k.$$

Получим

$$I_{xy} = Mx_E y_E + Mx_D y_D = 0,$$

$$I_{yz} = My_E z_E + My_D z_D = 0,$$

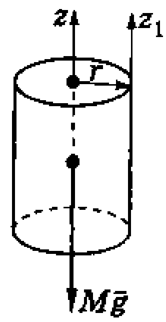
$$I_{xz} = Mx_E z_E + Mx_D z_D = 0.$$

Ответ: $C\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r, 0\right)$; $I_{xz} = I_{yz} = I_{xy} = 0$.

Задача 34.7

Вычислить момент инерции стального вала радиуса 5 см и массы 100 кг относительно ее образующей. Вал считать однородным сплошным цилиндром.

Решение



Для вычисления момента инерции вала относительно оси z_1 воспользуемся теоремой Гюйгенса — Штейнера, согласно которой

$$I_{z_1} = I_z + Md^2,$$

где d — расстояние между осями z и z_1.

Поскольку $d = r$, то

$$I_{z_1} = I_z + Mr^2 = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3Mr^2}{2} = \frac{3\cdot 100\cdot 25}{2} = 3750 \text{ (кг} \cdot \text{см}^2\text{)}.$$

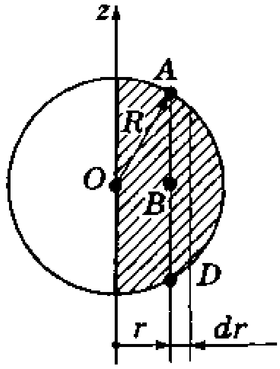
Ответ: 3750 кг · см^2.

Задача 34.8

Вычислить момент инерции тонкого однородного полудиска массы M и радиуса R относительно оси, проходящей вдоль диаметра, ограничивающего полудиск.

Решение

Пусть M — масса полудиска, тогда поверхностная плотность диска



$$\rho = \frac{M}{1/2\,\pi R^2} = \frac{2M}{\pi R^2}.$$

Рассмотрим полоску толщиной dr, находящуюся на расстоянии r от оси z. Из рисунка следует, что

$$AD = 2AB = 2\sqrt{R^2 - r^2},$$

где R — радиус полудиска.

Тогда согласно определению осевого момента инерции тела

$$I_z = \sum \Delta m_k d_k^2,$$

где $d_k = r$.

Будем рассматривать диск как систему материальных полосок длиной AD и шириной dr, которые находятся на расстоянии r от оси z и имеют массу $\Delta m_k = \rho \cdot AD \cdot dr$. Поэтому

$$I_z = \int_0^R \rho \cdot AD \cdot dr \cdot r^2 = \int_0^R \rho \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} \cdot r^2 dr = 2\rho \int_0^R r^2 \sqrt{R^2 - r^2}\, dr =$$

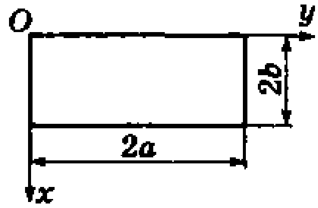
$$= 2\rho \left\{ -\frac{r}{4}\sqrt{(R^2 - r^2)^3} + \frac{R^2}{8}\left(r\sqrt{R^2 - r^2} + R^2 \arcsin\frac{r}{R} \right) \right\} \Bigg|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= 2\rho \left\{ \frac{R^4}{8} \arcsin 1 \right\} = \frac{2\rho R^4}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2MR^4\pi}{8\pi R^2} = \frac{MR^2}{4}.$$

Ответ: $MR^2/4$.

Задача 34.9

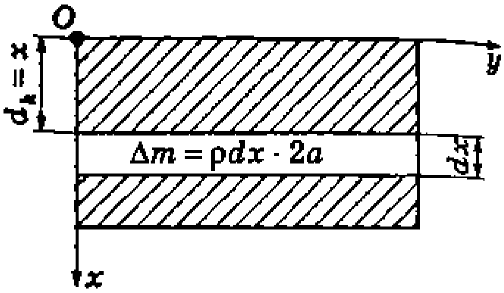
Вычислить осевые I_x и I_y моменты инерции изображенной на рисунке однородной прямоугольной пластины массы M относительно осей x и y.



Решение

Осевой момент инерции системы относительно оси y

$$I_y = \sum \Delta m_k d_k^2.$$



Будем рассматривать пластинку как систему стержней шириной dx и длиной $2a$ (см. рисунок). Поверхностная плотность пластины

$$\rho = \frac{M}{2a \cdot 2b} = \frac{M}{4ab}.$$

Тогда масса полоски стержня

$$\Delta m_k = 2a\rho dx.$$

При $d_k = x$ получим

$$I_y = \sum_i^n \Delta m_k d_k^2 = \int_0^{2b} 2a\rho x^2 dx =$$

$$= 2a\rho \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2b} = \frac{2a\rho \cdot 8b^3}{3} = \frac{16ab^3}{3} \cdot \frac{M}{4ab} = \frac{4}{3} Mb^2.$$

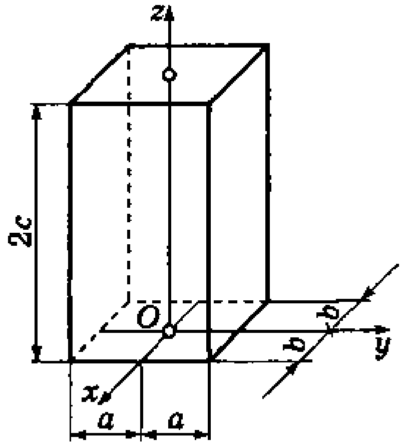
Момент инерции I_x рассчитаем аналогично, заменив $x \to y$, $a \to$ $\to b \to a$:

$$I_x = \frac{4}{3} Ma^2.$$

Ответ: $I_x = \frac{4}{3} Ma^2$; $I_y = \frac{4}{3} Mb^2$.

Задача 34.10

Вычислить моменты инерции изображенного на рисунке однородного прямоугольного параллелепипеда массы M относительно осей x, y и z.

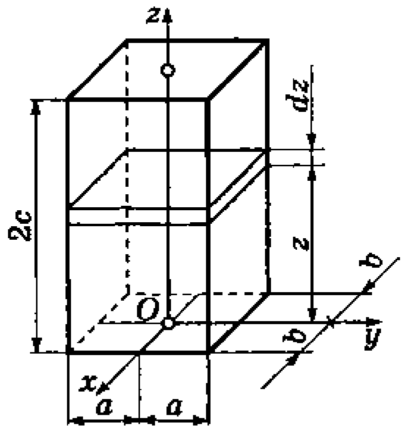


Решение

Объемную плотность определим по формуле (34.2):

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2a \cdot 2b \cdot 2c} = \frac{M}{8abc}.$$

Рассматривая параллелепипед как систему материальных точек массы



$$\Delta m_k = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

находящихся на расстоянии $d_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ от оси z (см. рисунок), найдем момент инерции параллелепипеда относительно этой оси:

$$I_z = \sum \Delta m_k d_k^2.$$

Вычисление I_z сводим к вычислению тройного интеграла:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{0}^{2c} \rho(x^2+y^2)dx\,dy\,dz = \rho\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(x^2+y^2)z\Big|_0^{2c} dx\,dy =$$

$$= 2c\rho\int_{-b}^{b}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-a}^{y=a} dx = 2c\rho\int_{-b}^{b}\left(2ax^2 + \frac{2a^3}{3}\right)dx =$$

$$= 2c\rho\left(\frac{x^3}{3}\cdot 2a + \frac{2a^3}{3}x\right)\Bigg|_{x=-b}^{x=b} = 2c\rho\left(\frac{2b^3}{3}\cdot 2a + \frac{2a^3}{3}\cdot 2b\right) = \frac{M}{3}(a^2+b^2).$$

Аналогично вычислим I_x:

$$I_x = \sum \Delta m_k d_k^2,$$

где $d_k^2 = y_k^2 + z_k^2$.

Поэтому

$$I_x = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{0}^{2c} \rho(y^2 + z^2)\,dxdydz.$$

Проведя аналогичные вычисления, получим

$$I_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2).$$

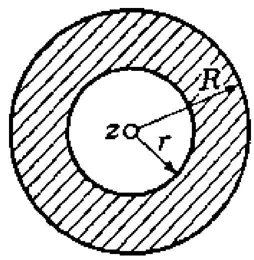
Из I_x заменой $a \to b$ найдем I_y:

$$I_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2).$$

Ответ: $I_x = \frac{M}{3}(a^2 + 4c^2)$; $I_y = \frac{M}{3}(b^2 + 4c^2)$; $I_z = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$.

Задача 34.11

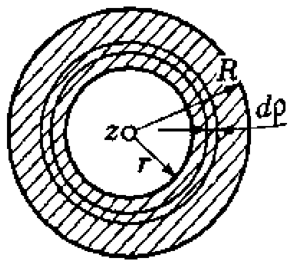
В тонком однородном круглом диске радиуса R высверлено концентрическое отверстие радиуса r. Вычислить момент инерции этого диска массы M относительно оси z, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска.



Решение

Момент инерции диска относительно оси z

$$I_z = \int_r^R \rho^2 dm,$$



где dm — масса тонкого кольца толщиной $d\rho$ (см. рисунок), длиной $2\pi\rho$ и с поверхностной плотностью $\frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}$.

Поэтому

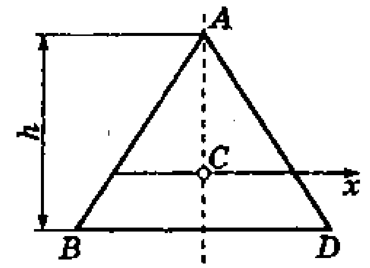
$$I_z = \int_r^R \rho^2 dm = \int_r^R \rho^2 \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)} \cdot 2\pi\rho d\rho =$$

$$= \int_r^R \frac{2M}{(R^2-r^2)}\rho^3 d\rho = \frac{2M}{(R^2-r^2)}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_r^R = \frac{2M}{(R^2-r^2)}\frac{R^4-r^4}{4} = \frac{M}{2}(R^2+r^2).$$

Ответ: $I_z = \dfrac{M}{2}(R^2+r^2)$.

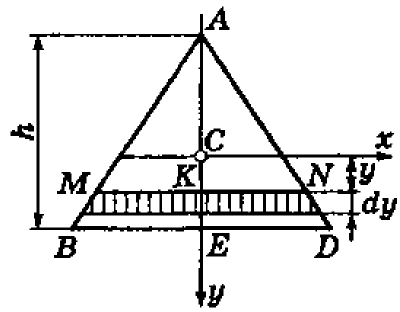
Задача 34.12

Вычислить момент инерции тонкой однородной пластинки массы M, имеющей форму равнобедренного треугольника с высотой h, относительно оси, проходящей через ее центр масс C параллельно основанию.



Решение

Центр масс равнобедренного треугольника находится на его высоте в точке C на расстоянии $\frac{1}{3}h$ от основания BD (см. рисунок).



Из подобия ΔABD и ΔAMN следует, что

$$\frac{AK}{AE} = \frac{MN}{BD},$$

так как

$$AK = AC + CK = \frac{2}{3}h + y,$$

то

$$MN = \frac{AK \cdot BD}{AE} = \frac{\left(\frac{2}{3}h + y\right)}{h} \cdot BD.$$

Будем рассматривать пластинку как систему материальных точек массой

$$dm = MN \cdot dy \cdot \rho,$$

где ρ — поверхностная плотность пластинки, $\rho = \dfrac{M}{\frac{1}{2}h \cdot BD}$.

Тогда момент инерции пластины

$$I_x = \int\limits_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 dm = \int\limits_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 \frac{M \cdot MN \cdot dy}{\frac{1}{2} h \cdot BD} = \int\limits_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} \frac{y^2 M\left(\frac{2}{3}h + y\right)dy}{\frac{1}{2}h^2} =$$

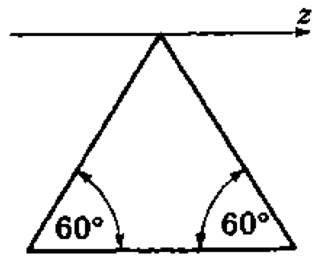
$$= \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{9}y^3 h + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{2}{3}h}^{\frac{1}{3}h} =$$

$$= \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{9}h \cdot \frac{h^3}{27} + \frac{h^4}{4 \cdot 81} + \frac{2}{9}h \cdot \frac{8}{27}h^3 - \frac{16}{81 \cdot 4} \cdot h^4\right) = \frac{Mh^2}{18}.$$

Ответ: $\frac{1}{18}Mh^2$.

Задача 34.13

Однородная металлическая пластинка выполнена в виде равностороннего треугольника. Масса пластинки равна M, l — длина ее стороны. Вычислить момент инерции пластинки относительно оси z, проходящей через ее вершину параллельно основанию.

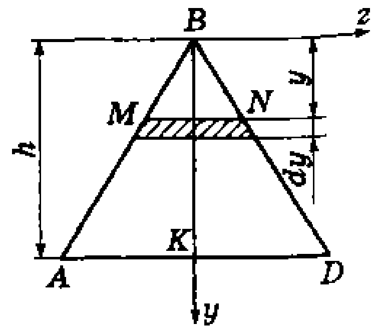


Решение

Будем рассматривать пластинку как систему материальных точек массой

$$dm = \rho \cdot MN \cdot dy,$$

где ρ — поверхностная плотность, $\rho = \frac{M}{\frac{1}{2}lh}$,



$$h = l\cos 30° = \frac{l\sqrt{3}}{2}; \quad MN = 2y\,\mathrm{tg}\,30° = \frac{2y}{\sqrt{3}},$$

поэтому

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4M}{\sqrt{3} l^2}.$$

Рассчитаем

$$dm = \rho \frac{2y}{\sqrt{3}} \cdot dy = \frac{4M}{\sqrt{3} l^2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{3}} dy = \frac{8Mydy}{3l^2}.$$

По определению

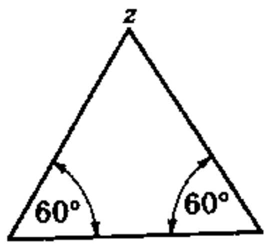
$$I_z = \int_0^h y^2 dm = \int_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} y^2 \frac{8Mydy}{3l^2} = \frac{8M}{3l^2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} y^3 dy = \frac{8M}{3l^2} \left(\frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} =$$

$$= \frac{8M}{3l^2} \cdot \frac{9l^4}{64} = \frac{3Ml^2}{8}.$$

Ответ: $I_z = \frac{3}{8} Ml^2$.

Задача 34.14

Однородная равносторонняя треугольная пластинка имеет массу M и длину стороны l. Вычислить момент инерции пластины относительно оси z, проходящей через вершину пластины перпендикулярно ее плоскости.

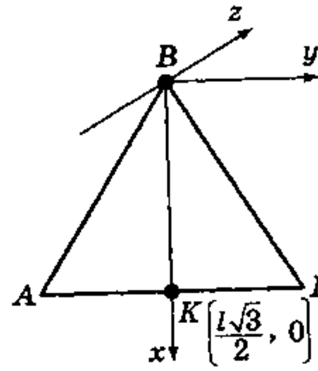


Решение

По определению осевого момента инерции

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) dm,$$

где S — площадь пластинки (равностороннего ΔABD).



По формуле (34.3) определим поверхностную плотность

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\sqrt{3} l^2 / 4} = \frac{4M}{\sqrt{3} l^2}.$$

Тогда

$$dm = \rho dxdy.$$

Уравнение стороны BD:

$$y = kx,$$

где $k = \operatorname{tg}3° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Уравнение стороны AB:

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$I_z = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \rho dx \int_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} (x^2 + y^2)dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}l} \rho dx\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{x}{\sqrt{3}}} =$$

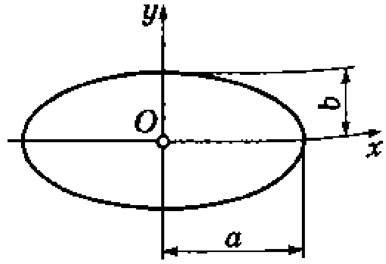
$$= \rho\int_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3\cdot 3\sqrt{3}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{3\cdot 3\sqrt{3}}\right)dx = \rho\int_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} \frac{20}{9\sqrt{3}}x^3dx = \frac{20\rho}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}l}{2}} =$$

$$= \frac{20\rho}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{9l^4}{4\cdot 16} = \frac{5Ml^2}{12}.$$

Ответ: $I_z = \dfrac{5}{12}Ml^2$.

Задача 34.15

Вычислить моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей x, y и z тонкой однородной эллиптической пластинки массы M, ограниченной контуром

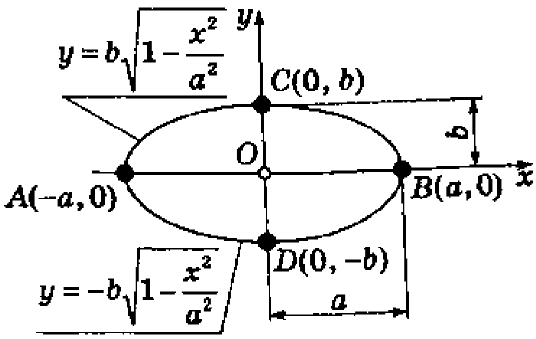


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение

Определим поверхностную плотность

$$\rho=\frac{M}{S}=\frac{M}{\pi ab}.$$



Вычислим момент инерции пластинки относительно оси z (см. рисунок):

$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)\,dm=\iint_S (x^2+y^2)\rho dS=\rho\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{y}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\left|y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right|=\rho\int_{-a}^{a}dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=$$

$$=2\rho\int_{-a}^{a}\left[x^2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx=$$

$$=2b\rho\int_{-a}^{a}\left[x^2+\frac{b^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=4b\rho\int_{0}^{a}\left[x^2+\frac{b^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену: $x=a\sin t$, $dx=a\cos t dt$. Тогда

$$I_z=4b\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[a^2\sin^2 t+\frac{b^2}{3}(1-\sin^2 t)\right]\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=4b\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[a^2\sin^2 t+\frac{b^2}{3}\cos^2 t\right]\cos^2 t\,dt=4ab\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{a^2}{4}\sin^2 2t+\frac{b^2}{3}\cos^4 t\right]dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin^2 2t=\dfrac{1-\cos 4t}{2};\\ \cos^4 t=\dfrac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}=\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\dfrac{1+4\cos 4t}{2}\right)\\ \text{так как } \cos^2 t=\dfrac{1+\cos 4t}{2}\end{array}\right|=$$

$$= 4ab\rho\left\{\frac{a^2}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)+\frac{b^2}{12}\left[t+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\right]\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab\rho\left\{\frac{a^2}{8}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{b^2}{12}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \left|\rho=\frac{M}{\pi ab}\right| = 4M\left\{\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{12}\cdot\frac{3}{4}\right\} =$$

$$= \frac{M}{4}(a^2+b^2).$$

Вычислим момент инерции пластинки относительно оси x:

$$I_x = \iint\limits_S (y^2+z^2)dm\Big|_{z=0} = \iint\limits_S y^2\rho\, dx\, dy = \rho\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-y}^{y} y^2 dy = \left|y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right| =$$

$$= \rho\int\limits_{-a}^{a}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = 2\rho\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}dx = 4\rho\int\limits_{0}^{a}\frac{b^3}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Сделаем замену: $x = a\sin t$, тогда

$$I_x = 4\rho a\frac{b^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t\, dt = 4\rho a\frac{b^3}{3}\left[\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\rho a\frac{b^3}{3}\left[\frac{3\pi}{16}+0+0\right] = 4\frac{M}{\pi ab}\cdot\frac{ab^3}{3}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{Mb^2}{4}.$$

Аналогично I_x рассчитаем I_y:

$$I_y = \frac{M}{4}a^2.$$

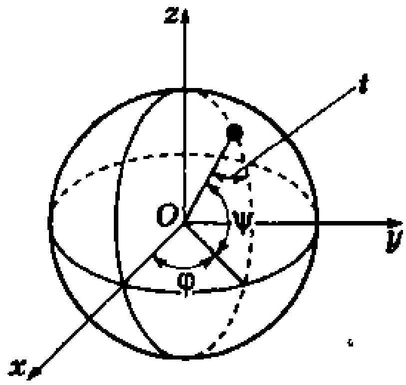
Ответ: $I_x = \frac{M}{4}b^2$; $I_y = \frac{M}{4}a^2$; $I_z = \frac{M}{4}(a^2+b^2)$.

Задача 34.16

Определить момент инерции однородного полого шара массы M относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Внешний и внутренний радиусы соответственно равны R и r.

Решение

Центр тяжести полого шара находится в начале координат. По определению осевого момента инерции



$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dm,$$

где V — объем тела.

Выразим dm через объемную плотность

$$dm = \rho dV,$$

где $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)}$.

Тогда

$$I_z = \iiint\limits_V \rho(x^2 + y^2)dV.$$

Перейдем к сферическим координатам (см. рисунок):

$$x = t\cos\varphi\cos\psi,$$

$$y = t\sin\varphi\cos\psi,$$

$$z = t\sin\psi,$$

где $r < t < R$; $0 < \varphi < 2\pi$; $-\dfrac{\pi}{2} < \psi < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда

$$dV = t^2\cos\psi\,dt\,d\varphi\,d\psi,$$

$$I_z = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_r^R (t^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + t^2\sin^2\varphi\cos^2\psi)t^2\cos\psi\,dt =$$

$$= \rho\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_r^R (t^2\cos^2\psi)(t^2\cos\psi)dt = 2\rho\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi \int_r^R t^4\,dt =$$

$$=2\rho\pi\frac{t^5}{5}\bigg|_r^R\cdot\left(\sin\psi-\frac{1}{3}\sin^3\psi\right)\bigg|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{5}\rho(R^5-r^5)\cdot\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{8\pi}{15}(R^5-r^5)\frac{3M}{4\pi(R^3-r^3)}=\frac{2M(R^5-r^5)}{5(R^3-r^3)}.$$

Ответ: $\dfrac{2M(R^5-r^5)}{5(R^3-r^3)}$.

Примечание. Можно также определить сначала полярный момент инерции

$$I_O=\int_r^R t^2dm,$$

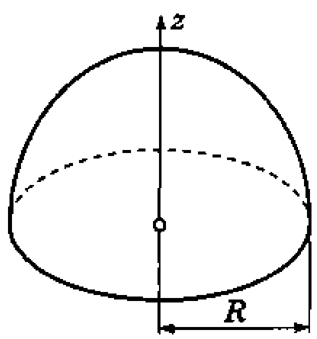
а затем осевой

$$I_z=\frac{2}{3}I_O,$$

где $dm=4\pi t^2\rho dt$.

Задача 34.17

Вычислить момент инерции однородной тонкой оболочки, выполненной в виде полусферы радиуса R относительно оси, проходящей через центр полусферы перпендикулярно к ограничивающей ее плоскости. Масса M оболочки равномерно распределена по поверхности оболочки.



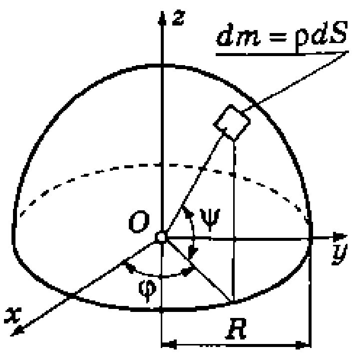
Решение

Будем рассматривать полусферу как систему материальных точек массой

$$dm=\rho dS,$$

лежащих на поверхности (см. рисунок)

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$



Поверхностная плотность оболочки

$$\rho=\frac{M}{2\pi R^2}.$$

Тогда по определению осевого момента инерции

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)dm = \rho \iint\limits_S (x^2 + y^2)dS,$$

где dS — элемент площади полусферы.

Перейдем к сферическим координатам:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi,$$

$$y = R\sin\varphi\cos\psi,$$

$$z = R\sin\psi,$$

где $0 < \varphi < 2\pi$; $0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда

$$dS = R^2 \cos\psi\, d\varphi\, d\psi.$$

Поэтому

$$I_z = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi)\, R^2\cos\psi\, d\psi =$$

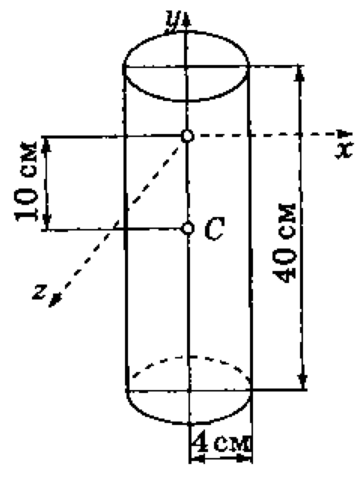
$$= \rho R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi = 2\pi\rho R^4 \left(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{4\pi R^4 \rho}{3} = \frac{4}{3}\pi R^4 \frac{M}{2\pi R^2} = \frac{2}{3} M R^2.$$

О т в е т: $\dfrac{2}{3} M R^2$.

Задача 34.18

Вычислить радиус инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси z, перпендикулярной оси цилиндра и отстоящей от его центра масс C на расстоянии 10 см, если радиус цилиндра равен 4 см, а высота 40 см.



Решение

Определим радиус инерции ρ_z из формулы (34.8):

$$I_z = M\rho_z^2,$$

найдем

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}},$$

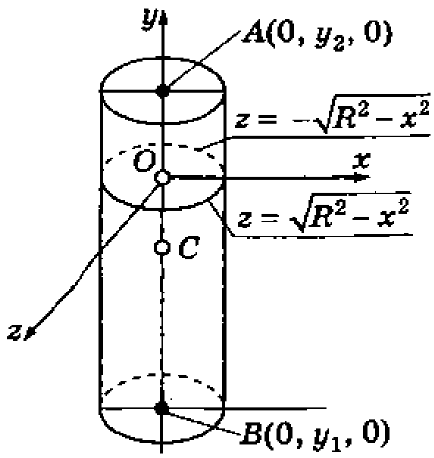
где M — масса цилиндра.

Объемная плотность

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h},$$

где R — радиус; h — высота; M — масса цилиндра.

Момент инерции цилиндра относительно оси z (см. рисунок):



$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)dm = \iiint_V (x^2+y^2)\rho dV =$$

$$= \rho\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{-R}^{R} dx \int_{-z}^{z}(x^2+y^2)dz = \left|z = \sqrt{R^2-x^2}\right| =$$

$$= \rho\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{-R}^{R}(x^2+y^2)\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}dx =$$

$$= 4\rho\int_{y_1}^{y_2}\left\{-\frac{x}{4}\sqrt{(R^2-x^2)^3} + \frac{R^2}{8}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}y^2\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\right\}\Bigg|_{x=0}^{x=R} dy =$$

$$= 4\rho\int_{y_1}^{y_2}\left\{\frac{R^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{y^2}{2}R^2\frac{\pi}{2}\right\}dy = \rho\pi R^2\left(\frac{(y_2-y_1)R^2}{4} + \frac{y_2^3-y_1^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{\rho\pi R^2(y_2-y_1)}{12}[3R^2 + 4(y_1^2+y_2^2+y_1y_2)].$$

Поскольку $(y_2 - y_1) = h$, $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2 h}$, то

$$I_z = \frac{M(3R^2 + 4(y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2)}{12}.$$

При $y_1 = -30$, $y_2 = 10$, $R = 4$ получим

$$I_z = \frac{M}{12}[3 \cdot 16 + 4(100 + 900 - 300)] = 237{,}33\ M.$$

Тогда

$$\rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{237{,}33} = 15{,}4\ (\text{см}).$$

Ответ: 15,4 см.

Примечание. Можно было использовать теорему Гюйгенса — Штейнера и формулу

$$I_{Cz'} = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

Тогда

$$I_{Oz} = I_{Cz'} + Md^2,$$

где $d = OC$. С другой стороны, $I_{Oz} = M\rho_z^2$.

Следовательно,

$$M\rho_z^2 = I_{Cz'} + Md^2,$$

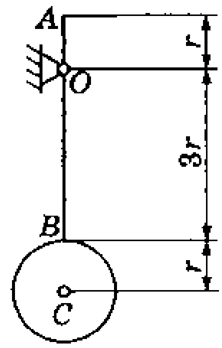
откуда

$$\rho_z^2 = \frac{I_{Cz'} + Md^2}{M} = d^2 + \frac{I_{Cz'}}{M} = d^2 + \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} = 10^2 + \frac{4^2}{4} + \frac{40^2}{12} = 237{,}33;$$

$$\rho_z = 15{,}4\ \text{см}.$$

Задача 34.19

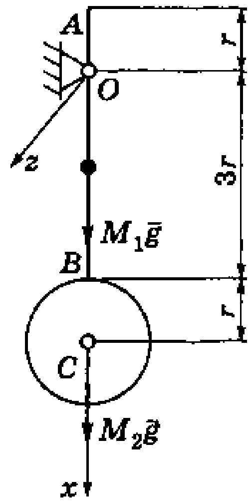
Маятник состоит из тонкого однородного стержня AB массы M_1, к концу которого прикреплен однородный диск C массы M_2. Длина стержня равна $4r$, где r — радиус диска. Вычислить момент инерции маятника относительно его оси привеса O, перпендикулярной плоскости маятника и отстоящей на расстоянии r от конца стержня.



Р е ш е н и е

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня $I_{z_{\text{ст}}}$ и диска $I_{z_{\text{д}}}$:

$$I_z = I_{z_{\text{ст}}} + I_{z_{\text{д}}}.$$



Момент инерции стержня (см. рисунок)

$$I_{z\,\text{ст}} = \int_l x^2 dm.$$

Так как стержень AB однородный, то

$$dm = \rho dx,$$

где $\rho = \dfrac{M_1}{4r}$.

Тогда

$$I_{z_{\text{ст}}} = \int_{-r}^{3r} x^2 dm = \frac{M_1}{4r}\int_{-r}^{3r} x^2 dx = \frac{M_1}{4r}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-r}^{3r} = \frac{M_1}{4r}\cdot\frac{27r^3 + r^3}{3} = \frac{7M_1r^2}{3}.$$

Момент инерции диска найдем по теореме Гюйгенса — Штейнера:

$$I_{z_{\text{д}}} = I_{zC} + M_2(4r)^2 = \frac{M_2r^2}{2} + 16M_2r^2 = 16{,}5M_2r^2.$$

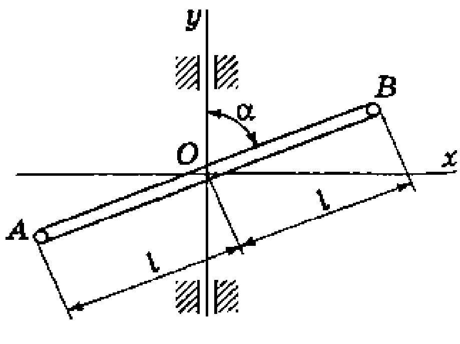
Следовательно,

$$I_z = \frac{7M_1r^2}{3} + \frac{33}{2}M_2r^2 = \frac{r^2}{6}(14M_1 + 99M_2).$$

О т в е т: $I_z = \dfrac{r^2}{6}(14M_1 + 99M_2)$.

Задача 34.20

Тонкий однородный стержень AB длины $2l$ и массы M прикреплен в центре O к вертикальной оси, образуя с ней угол α. Вычислить моменты инерции стержня I_x, I_y и центробежный момент инерции I_{xy}. Оси координат показаны на рисунке.



Р е ш е н и е

Согласно формуле (34.4) линейная плотность стержня

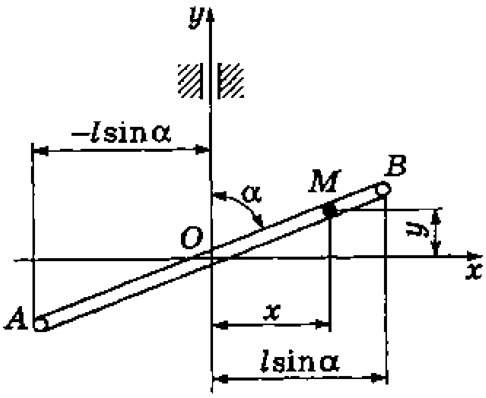
$$\rho = \frac{M}{2l},$$

тогда

$$dm = \rho dl = \rho\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Уравнение AB (см. рисунок):

$$y = x\operatorname{ctg}\alpha.$$



Поэтому

$$dl = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}\, dx = \frac{dx}{\sin\alpha}.$$

Вычислим моменты инерции стержня:

$$I_x = \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} y^2 dm = \rho \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} x^2 \operatorname{ctg}^2\alpha \frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{\rho\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\rho\operatorname{ctg}^2\alpha}{3\sin\alpha}\cdot l^3\sin^3\alpha = \frac{2\rho l^3\cos^2\alpha}{3} = \frac{2Ml^3\cos^2\alpha}{3\cdot 2l} = \frac{Ml^2\cos^2\alpha}{3};$$

$$I_y = \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} x^2 dm = \rho \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} x^2 \frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin\alpha}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\rho l^2\sin^3\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{2Ml^3\sin^3\alpha}{3\sin\alpha\cdot 2l} = \frac{Ml^2\sin^2\alpha}{3}.$$

Центробежный момент инерции

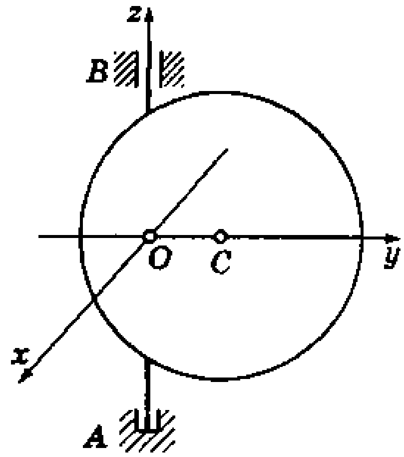
$$I_{xy} = \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} xy dm = \rho \int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} x\cdot x\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{dx}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\rho\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\int\limits_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} x^2 dx = \frac{\rho\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-l\sin\alpha}^{l\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2\rho l^3 \operatorname{ctg}\alpha \sin^3\alpha}{3\sin\alpha} = \frac{Ml^2 \sin\alpha\cos\alpha}{3} = \frac{Ml^2 \sin 2\alpha}{6}.$$

Ответ: $I_x = \dfrac{Ml^2}{3}\cos^2\alpha$; $I_y = \dfrac{Ml^2}{3}\sin^2\alpha$; $I_{xy} = \dfrac{Ml^2}{6}\sin 2\alpha$.

Задача 34.21



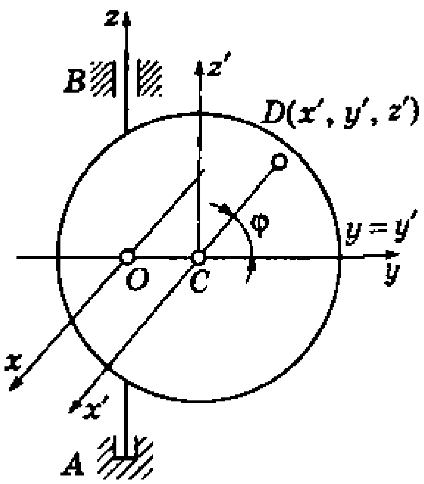
Однородный круглый диск массы M и радиуса R прикреплен к оси AB, отстоящей от центра масс C на расстоянии $OC = R/2$. Вычислить осевые и центробежные моменты инерции диска.

Решение

По определению осевого момента инерции твердого тела

$$I_y = I_{y'} = \iint\limits_S [(x')^2 + (z')^2]\, dm,$$

где S — круг, лежащий в плоскости $x = 0$. Поэтому



$$I_y = \rho\iint\limits_S (z')^2 dS = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (z')^2 R\,dR\Big|_{z' = R\sin\varphi} =$$

$$= \rho\int_0^R R^3 dR \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \rho\frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \rho\,\frac{R^4}{4}(\pi - 0) = \rho\frac{R^4}{4}\pi,$$

где ρ — поверхностная плотность диска, $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Тогда

$$I_y = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4\pi}{4} = \frac{MR^2}{4}.$$

Для вычисления I_x воспользуемся теоремой Гюйгенса — Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + Md^2,$$

где $I_{x'} = \rho\iint\limits_S [(y') + (z')^2]\, dS = \frac{MR^2}{2}$, так как $d = \frac{R}{2}$ (по условию).

Следовательно,

$$I_x = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2.$$

Аналогично вычислим I_z:

$$I_z = I_{z'} + Md^2 = \rho\iint\limits_S [(x')^2 + (y')^2]_{x'=0}\, dS + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 =$$

$$= \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} R^2\cos^2\varphi\, R\,dR\, d\varphi + \frac{MR^2}{4} =$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{MR^2}{4} = \rho\frac{R^4}{4}\pi + \frac{MR^2}{4} =$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}.$$

По определению момента инерции твердого тела относительно плоскости

$$I_{xy} = \iint\limits_S xy\, dm\big|_{x=0} = 0,$$

так как S лежит в плоскости Oyz, то $x = 0$. Аналогично

$$I_{xz} = \iint\limits_S xz\, dm\big|_{x=0} = 0.$$

Для вычисления I_{xy} воспользуемся теоремой Гюйгенса — Штейнера:

$$I_{yz} = I_{z'y'} + Mz_C y_C\big|_{z_C=0} = I_{y'z'} = \rho\iint\limits_S y'z'\,dS =$$

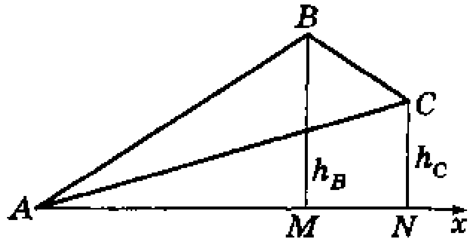
$$= \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} R\cos\varphi\cdot R\sin\varphi\cdot R\, dR\, d\varphi = \rho\int\limits_0^R R^3 dR\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4}\left(-\frac{1}{4}\cdot\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Ответ: $I_x = \frac{3}{4}MR^2$; $I_y = \frac{MR^2}{4}$; $I_z = \frac{MR^2}{2}$; $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0.$

Задача 34.22

Вычислить момент инерции однородной треугольной пластинки ABC массы M относительно оси x, проходящей через его вершину A в плоскости пластинки, если даны расстояния от точек B и C до оси x; $BM = h_B, CN = h_C$.



Решение

По определению осевого момента инерции твердого тела

$$I_x = \rho\iint\limits_S (y^2+z^2)dm\big|_{z=0} = \rho\iint\limits_S y^2 dx\,dy =$$

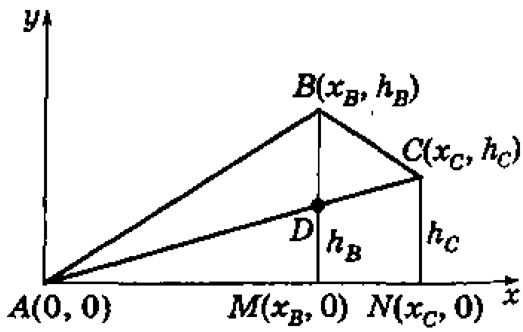
$$= \rho\left\{\iint\limits_{\Delta ABD} y^2 dxdy + \iint\limits_{\Delta DBC} y^2 dxdy\right\} = \rho A. \qquad (1)$$

Уравнение стороны пластины AB:

$$y = \frac{h_B}{x_B}x,$$

стороны AC:

$$y = \frac{h_C}{x_C}x,$$



стороны BC:

$$y - h_B = \frac{h_C - h_B}{(x_C - x_B)}(x - x_B).$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Delta ABD} y^2 dxdy = \int_0^{x_B} dx \int_{\frac{h_C}{x_C}x}^{\frac{h_B}{x_B}x} y^2 dy = \int_0^{x_B} dx\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{h_C}{x_C}x}^{\frac{h_B}{x_B}x} = \frac{1}{3}\int_0^{x_B}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3 - \left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right]x^3 dx =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right]\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=0}^{x_B}=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right]x_B^4;$$

$$\iint\limits_{\Delta DBC} y^2dxdy=\int\limits_{x_B}^{x_C}dx\int\limits_{y_2}^{y_1}y^2dy=\left|\begin{array}{l} y_1=h_B+\dfrac{(h_C-h_B)}{(x_C-x_B)}(x-x_B); \\ y_2=\dfrac{h_C}{x_C}x \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{x_B}^{x_C}dx\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{h_C}{x_C}x}^{h_B+\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)}=\frac{1}{3}\int\limits_{x_B}^{x_C}\left\{\left[h_B+\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\right]^3-\left(\frac{h_C}{x_C}x\right)^3\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{x_B}^{x_C}\left\{h_B^3+3h_B^2\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)+\right.$$

$$\left.+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2(x-x_B)^2+\left[\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\right]^3-\left(\frac{h_C}{x_C}x\right)^3\right\}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[h_B^3x+3h_B^2\cdot\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\cdot\frac{(x-x_B)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2\frac{(x-x_B)^3}{3}+\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^3\frac{(x-x_B)^4}{4}-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{x_B}^{x_C}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[h_B^3(x_C-x_B)+3h_B^2\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\frac{(x_C-x_B)^2}{2}+3h_B\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^2\frac{(x_C-x_B)^3}{3}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{h_C-h_B}{x_C-x_B}\right)^3\cdot\frac{(x_C-x_B)^4}{4}-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\cdot\frac{x_C^4-x_B^4}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2}{2}(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\frac{(x_C+x_B)(x_C^2+x_B^2)}{4}\right].$$

Тогда

$$A=\iint\limits_S y^2dS=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{h_B}{x_B}\right)^3-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\right]x_B^4+$$

$$+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2(h_C-h_B)}{2}+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3\cdot\frac{(x_C+x_B)(x_C^2+x_B^2)}{4}\right]=\frac{1}{12}\left[h_B^3x_B-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3x_B^4-\left(\frac{h_C}{x_C}\right)^3(x_C^4-x_B^4)\right]+$$

$$+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2}{2}(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{12}(h_B^3x_B-h_C^3x_C)+\frac{1}{3}(x_C-x_B)\left[h_B^3+\frac{3h_B^2}{2}(h_C-h_B)+h_B(h_C-h_B)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}(h_C-h_B)^3\right]=\frac{1}{12}(h_B^3x_B-h_C^3x_C)+\frac{1}{12}(x_C-x_B)\times$$

$$\times[4h_B^3+6h_B^2h_C-6h_B^3+4(h_Bh_C^2-2h_Ch_B^2+h_B^3)+h_C^3-3h_C^2h_B+3h_Ch_B^2-h_C^3]=$$

$$=\frac{1}{12}(h_B^3x_B-h_C^3x_C)+\frac{1}{12}(x_C-x_B)(h_B^3+h_B^2h_C+h_Bh_C^2+h_C^3)=$$

$$=\frac{1}{12}x_B(h_B^3-h_B^3-h_B^2h_C-h_Bh_C^2-h_C^3)+$$

$$+\frac{1}{12}x_C(h_B^3+h_B^2h_C+h_Bh_C^2+h_C^3-h_C^3)=$$

$$=\frac{1}{12}x_Ch_B(h_B^2+h_Bh_C+h_C^2)-\frac{1}{12}x_Bh_C(h_B^2+h_Bh_C+h_C^2)=$$

$$=\frac{h_B^2+h_Bh_C+h_C^2}{6}\cdot S,$$

где $S=\frac{1}{2}(x_Ch_B-x_Bh_C)$ — площадь ΔABC с вершинами $A(0,\,0)$, $B(x_B,\,h_B)$, $C(x_C,\,h_C)$;

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_C & h_C & 1 \\ x_B & h_B & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$I_x = \rho A = \rho S \cdot \frac{1}{6}(h_B^2 + h_B h_C + h_C^2) = \frac{1}{6} M (h_B^2 + h_B h_C + h_C^2),$$

где $M = \rho S$.

Ответ: $I_x = \dfrac{M}{6}(h_B^2 + h_B h_C + h_C^2)$.

Задача 34.23

По данным задачи 34.1 определить центробежные моменты инерции I_{xz}, I_{yz}, I_{xy} коленчатого вала.

Решение

Выпишем координаты точек A, B и D:

$$A\left[\frac{d}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}d;\ -(a+b)\right],$$

$$B\left[\frac{d}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}d;\ 0\right],$$

$$D[-d;\ 0;\ (a+b)].$$

По определению центробежного момента инерции

$$I_{xz} = \sum_{k=1}^{3} m_k x_k z_k = m\left\{-(a+b)\frac{d}{2} + 0 + (-d)(a+b)\right\} =$$

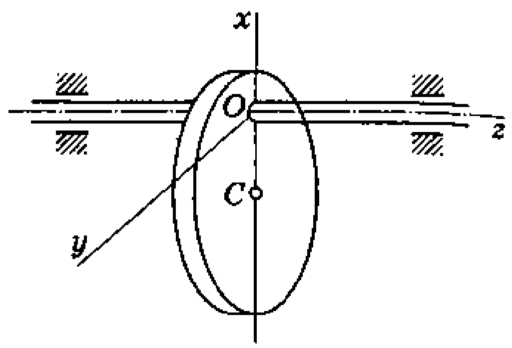
$$= -m\left(\frac{3}{2}d\right)(a+b) = \frac{-3md(a+b)}{2},$$

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^{3} m_k y_k z_k = m\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}d(a+b) + 0 + 0\right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b),$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{3} m_k x_k y_k = m\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}d\left(\frac{d}{2}\right) - \frac{d\cdot\sqrt{3}d}{2\cdot 2} + 0\right\} = 0.$$

Ответ: $I_{xz} = -\frac{3}{2}md(a+b)$; $I_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b)$; $I_{xy} = 0$.

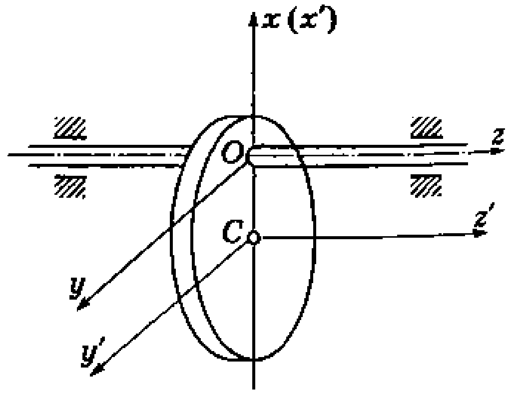
Задача 34.24



Однородный круглый диск массы M эксцентрично насажен на ось z, перпендикулярную его плоскости. Радиус диска равен R, эксцентриситет $OC = a$, где C — центр масс диска.

Вычислить осевые I_x, I_y, I_z и центробежные I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} моменты инерции диска. Оси координат показаны на рисунке.

Решение



Аналогично решению задачи 34.21 запишем (см. рисунок).

$$I_z = I_{z'} + M\cdot(OC)^2 = \frac{MR^2}{2} + Ma^2 =$$

$$= \frac{M}{2}(R^2 + 2a^2),$$

$$I_x = I_{x'} + M\cdot 0 = I_{x'} =$$

$$= \rho\iint_S [(y')^2 + (z')^2]ds\Big|_{z'=0} = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^R (y')^2 r dr d\varphi = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\sin^2\varphi dr d\varphi =$$

$$= \rho\frac{R^4}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \rho\frac{\pi R^4}{4}\left|\rho = \frac{M}{\pi R^2}\right| = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_y = I_{y'} + M\cdot(OC)^2 = \rho\int_0^R\int_0^{2a}[(x')^2 + (z')^2]dS\Big|_{z'=0} + Ma^2 =$$

$$= \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} r^3\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi + Ma^2 = \rho\frac{R^4\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} + Ma^2 =$$

$$= \rho\frac{R^4\pi}{4} + Ma^2 = \frac{MR^2}{4} + Ma^2 = \frac{M}{4}(R^2 + 4a^2).$$

Определим центробежные моменты инерции диска:

$$I_{xz} = \iint\limits_S xz\, dm\Big|_{z=0} = 0,$$

$$I_{yz} = \iint\limits_S yz\, dm\Big|_{z=0} = 0;$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_C y_C\Big|_{x_C=-a}^{y_C=0} = I_{x'y'} = \iint\limits_S x'y' dm =$$

$$= \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} r\cos\varphi\cdot r\cdot\sin\varphi\cdot r\, d\varphi\, dr =$$

$$= \rho\int\limits_0^R r^3 dr\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = \rho\frac{R^4}{4}\left(-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

Примечание. Решение значительно упрощается, если воспользоваться справочными данными и теоремой Гюйгенса — Штейнера:

$$I_x = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_y = I_{C_{y'}} + M\cdot(OC)^2 = \frac{MR^2}{4} + Ma^2 = M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right);$$

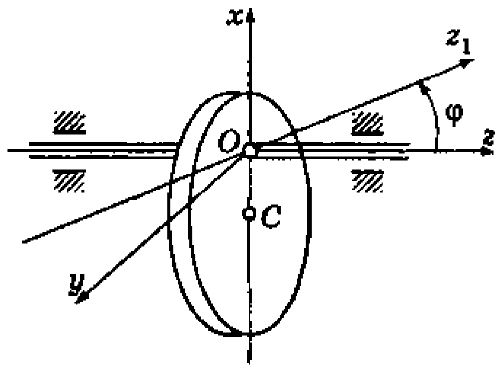
$$I_z = I_{C_{z'}} + M\cdot(OC)^2 = M\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right).$$

Так как ось x является главной центральной осью инерции (ось материальной симметрии, проходящая через центр масс), то $I_{xy} = I_{xz} = 0$.

Ответ: $I_x = \dfrac{MR^2}{4}$; $I_y = \dfrac{M}{4}(R^2 + 4a^2)$; $I_z = \dfrac{M}{2}(R^2 + 2a^2)$;
$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Задача 34.25

По данным задачи 34.24 вычислить момент инерции диска относительно оси z_1, лежащей в вертикальной плоскости xz и образующей с осью z угол φ.



Решение

Воспользуемся формулой (34.15) для момента инерции относительно оси произвольного направления, проходящей через начало координат:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$-2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\gamma\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координаты единичного вектора $\bar{e}$, определяющего направления оси l (т.е. оси z_1).

Поскольку $\gamma = \varphi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ и $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha = \sin\varphi$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \cos\varphi$, тогда согласно формуле (1)

$$I_l = I_x\sin^2\varphi + I_z\cos^2\varphi - 2I_{xz}\cos\varphi\sin\varphi.$$

В данном случае

$$I_x = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_z = \frac{MR^2}{2} + Ma^2,$$

$$I_{xz} = 0$$

(см. решение задачи 34.24).

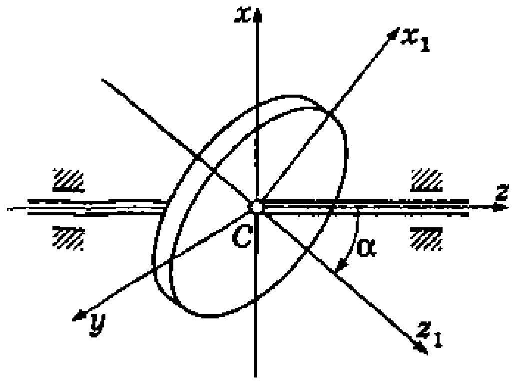
Тогда

$$I_l = \frac{MR^2}{4}\sin^2\varphi + M\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)\cos^2\varphi = I_{z_1}.$$

Ответ: $I_{z_1} = \dfrac{MR^2}{4}\sin^2\varphi + M\left(\dfrac{R^2}{2} + a^2\right)\cos^2\varphi.$

Задача 34.26

Однородный круглый диск массы M насажен на ось z, проходящую через его центр масс C. Ось симметрии диска z_1 лежит в вертикальной плоскости симметрии xz и образует с осью z угол α. Радиус диска равен R.



Вычислить центробежные моменты инерции диска I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} (оси координат показаны на рисунке).

Решение

Запишем формулы перехода от координат x_1, y_1, z_1 к координатам x, y, z:

$$x = x_1 \cos a - z_1 \sin a, \quad y = y_1, \quad z = x_1 \sin\alpha + z_1 \cos\alpha.$$

Тогда

$$I_{xy} = \iint\limits_S xy\, dm = \iint\limits_S (x_1 \cos\alpha - z_1 \sin\alpha) y_1 dm =$$

$$= \cos\alpha \iint\limits_S x_1 y_1 dm - \sin\alpha \iint\limits_S y_1 z_1 dm = I_{x_1 y_1} \cos\alpha - I_{y_1 z_1} \sin\alpha.$$

Вычислим

$$I_{x_1 y_1} = \rho \iint\limits_S x_1 y_1 dS = \rho \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} r\cos\varphi \cdot r \sin\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} \left(-\frac{1}{4} \cos 2\varphi \right) \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0,$$

$$I_{y_1 z_1} = \iint\limits_S y_1 z_1 dm \Big|_{z_1=0} = 0,$$

так как S — диск, лежащий на плоскости $z_1 = 0$.

Следовательно,

$$I_{xy} = 0 \cdot \cos\alpha - 0 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Аналогично

$$I_{zy} = \iint\limits_S zy dm = \iint\limits_S (x_1 \sin\alpha + z_1 \cos\alpha) y_1 dm =$$

$$= \sin\alpha \iint\limits_S x_1 y_1 dm + \cos\alpha \iint\limits_S z_1 y_1 dm = I_{x_1 y_1} \sin\alpha + I_{z_1 y_1} \cos\alpha.$$

Поскольку $I_{x_1 y_1} = 0$ и $I_{z_1 y_1} = 0$, то $I_{zy} = 0$.

Определим

$$I_{xz} = \iint_S xz\, dm = \iint_S (x_1 \cos\alpha - z_1 \sin\alpha)(x_1 \sin\alpha + z_1 \cos\alpha)\, dm =$$

$$= \iint_S (x_1^2 \cos\alpha \sin\alpha + x_1 z_1 \cos^2\alpha - x_1 z_1 \sin^2\alpha - z_1^2 \sin\alpha \cos\alpha)\, dm =$$

$$= \cos\alpha \sin\alpha \iint_S (x_1^2 - z_1^2)\, dm + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \iint_S x_1 z_1\, dm.$$

Так как S лежит в плоскости $z_1 = 0$, то

$$I_{xz} = \cos\alpha \sin\alpha \iint_S x_1^2 dm = \rho \cos\alpha \sin\alpha \iint_S x_1^2 dS =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \sin 2\alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

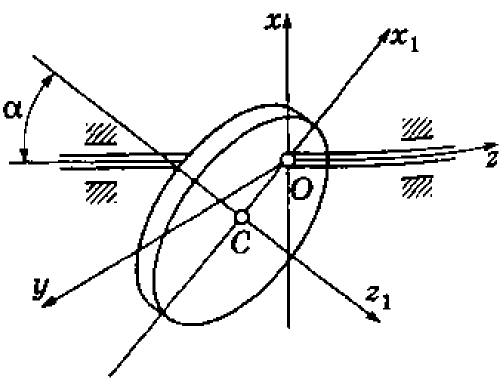
$$= \frac{1}{2} \rho \sin 2\alpha \frac{R^4}{4} \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{8} \rho \frac{2\pi R^4}{2} \sin 2\alpha \right) \Bigg|_{\rho = \frac{M}{\pi R^2}} =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{M\pi R^4}{\pi R^2} \sin 2\alpha = \frac{1}{8} M R^2 \sin 2\alpha\ .$$

Ответ: $I_{xz} = \frac{1}{8} M R^2 \sin 2\alpha$; $I_{xy} = I_{zy} = 0$.

Задача 34.27

Решить предыдущую задачу в предположении, что диск эксцентрично насажен на ось z, причем эксцентриситет $OC = a$.



Решение

Координаты точки C:

$$x_C = -a \cos\alpha, \quad y_C = 0, \quad z_C = -a \sin\alpha.$$

Поэтому координаты x, y, z и x_1, y_1, z_1 связаны следующими формулами:

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha - a\cos\alpha = (x_1 - a)\cos\alpha - z_1\sin\alpha, \\ y = y_1, \\ z = x_1\sin\alpha + z_1\cos\alpha - a\sin\alpha = (x_1 - a)\sin\alpha + z_1\cos\alpha. \end{cases}$$

Отсюда

$$I_{xy} = \iint\limits_S xy\,dm = \iint\limits_S y_1(x_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha - a\cos\alpha)dm\Big|_{z_1=0} =$$

$$= I_{x_1y_1}\cos\alpha - a\cos\alpha\iint\limits_S y_1\,dm = -a\cos\alpha\cdot My_{1C} = 0,$$

так как C совпадает с началом системы координат x_1, y_1, z_1 и $y_{1C} = 0$, а $I_{x_1y_1} = 0$ (см. задачу 34.26).

Аналогично

$$I_{yz} = \iint\limits_S yz\,dm\Big|_{z_1=0} = \iint\limits_S y_1(x_1 - a)\sin\alpha\,dm - My_{1C}\,a\sin\alpha = 0,$$

$$I_{xz} = \iint\limits_S xz\,dm =$$

$$= \iint\limits_S (x_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha - a\cos\alpha)\,(x_1\sin\alpha + z_1\cos\alpha - a\sin\alpha)dm\Big|_{z_1=0} =$$

$$= \iint\limits_S (x_1^2 + a^2 - 2ax_1)\sin\alpha\cos\alpha\,dm =$$

$$= a^2\sin\alpha\cos\alpha\iint\limits_S dm - a\sin2\alpha\iint\limits_S x_1\,dm + \sin\alpha\cos\alpha\iint\limits_S x_1^2\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}Ma^2\sin2\alpha - a\sin2\alpha\cdot Mx_{1C} + \frac{\sin2\alpha}{2}\cdot M\frac{R^2}{4} =$$

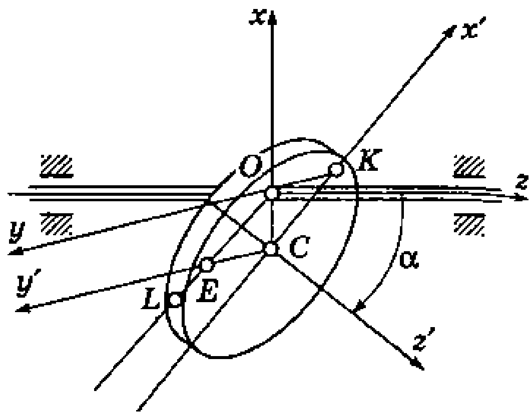
$$= \frac{1}{2}M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin2\alpha$$

(см. решение задачи 34.26).

Ответ: $I_{xz} = \frac{1}{2}M\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin2\alpha$; $I_{xy} = I_{zy} = 0$.

Задача 34.28

Однородный круглый диск радиуса R насажен на ось вращения z, проходящую через точку O и составляющую с осью симметрии диска Cz_1 угол α. Масса диска равна M. Определить момент инерции I_z диска относительно оси вращения z и центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz}, если OL — проекция оси z на плоскость диска, $OE = a$, $OK = b$.

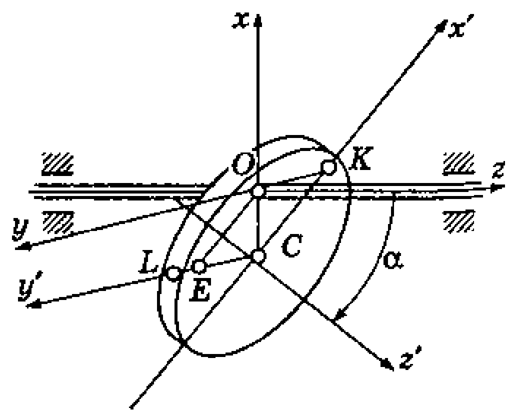


Решение

Найдем зависимость между координатами точки x_i, y_i, z_i в системах $Oxyz$ и $Cx'y'z'$:

$$\left.\begin{aligned}
x_i &= \bar{x}_i\cos\alpha - z_i'\sin\alpha,\\
y_i &= \bar{y}_i,\\
z_i &= \bar{x}_i\sin\alpha + \bar{z}_i\cos\alpha,\\
\bar{x}_i &= x_C + x_{iC}',\\
\bar{y}_i &= y_C + y_{iC}',\\
\bar{z}_i &= z_C + z_{iC}',\\
x_C &= OE = a,\quad y_C = OK = b,\quad z_C = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Формулы (1) получены параллельным переносом координат $Cx'y'z'$ в точку O с последующим поворотом ее на угол α.



Вычислим центробежный момент инерции:

$$I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = \sum_i m_i \bar{y}_i(\bar{x}_i\sin\alpha + \bar{z}_i\cos\alpha) =$$

$$= \sin\alpha \sum_i m_i\bar{y}_i\bar{x}_i + \cos\alpha\sum_i m_i\bar{y}_i\bar{z}_i =$$

$$= \sin\alpha\sum m_i(y_{iC} + \bar{y}_{iC})(x_C + x_{iC}') + \cos\alpha\sum_i m_i(y_C + y_{iC}')(z_C + z_{iC}') =$$

$$= \sin\alpha\sum m_i y_C x_C = Mab\sin\alpha.$$

При выводе этой формулы было учтено, что ось z' является главной центральной осью инерции диска, а поэтому

$$I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0, \quad \sum m_i x_i' = Mx_C' = 0, \quad \sum m_i y_i' = My_i' = 0; \qquad (2)$$

$$I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = \sum m_i (\bar{x}_i \cos\alpha - \bar{z}_i \sin\alpha)\,(\bar{x}_i \sin\alpha + \bar{z}_i \cos\alpha) =$$

$$= \sin^2\alpha \sum_i m_i \bar{x}_i z_C + \cos^2\alpha \sum_i m_i x_i z_C + \cos\alpha\sin\alpha \sum m_i (\bar{x}_i^2 - \bar{z}_i^2) =$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sum m_i (x_C + x_i')(z_C + z_C') +$$

$$+ \cos\alpha\sin\alpha \sum m_i\,[(x_C + x_i')^2 - (z_C + z_C')^2] =$$

$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\left(\sum m_i x_C z_C + \sum_i m_i x_i z_i + \sum m_i z_i' x_C + \sum m_i x_i' z_i'\right) +$$

$$+ \sin\alpha\cos\alpha\left(\sum m_i (x_C^2 + x_i^2 + 2x_C x_i - z_i)\right) =$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\,(Mx_C^2 + \sum m_i (x_i'^2 - z_i'^2) =$$

$$= \left(Ma^2 + \frac{1}{4}MR^2\right)\sin\alpha\cos\alpha = M\left(a^2 + \frac{R^2}{4}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Так как x_i', y_i', z_i' координаты точки на диске, уравнение которого имеет вид $z' = 0$ (в системе координат $Cx'y'z'$), поэтому $z_i' = 0$ для всех i.

Также вычислим I_z:

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i\,[(\bar{x}_i \cos\alpha - \bar{z}_i \sin\alpha)^2 + \bar{y}_i^2] =$$

$$= \sum m_i [\bar{x}_i^2 \cos^2\alpha - 2\bar{x}_i \bar{z}_i \cos\alpha\sin\alpha + \bar{z}_i^2 \sin^2\alpha + \bar{y}_i^2] =$$

$$= \cos^2\alpha \sum m_i (x_C^2 + 2x_C x_i' + x_i^2) + \sin^2\alpha(\sum m_i z_C^2) -$$

$$- 2\cos\alpha\sin\alpha \sum m_i x_{iC}' x_C + \sum m_i (y_C^2 + 2y_C y_i' + y_i'^2) =$$

$$= \cos^2\alpha\,(Mx_C^2 + 2x_C \sum m_i x_i' + \sum m_i x_C'^2) + \sin^2\alpha \cdot Mz_C^2 -$$

$$- 2x_C \cos\alpha\sin\alpha \sum m_i x_{iC}' + (\sum m_i x'^2_i + 2\sum m_i y_{iC}'^2 + \sum m_i y_i'^2) =$$

$$= \cos^2\alpha\left(Ma^2 + \frac{1}{4}R^2\right) + Mz_C^2 \sin^2\alpha + My_C^2 + \sum mL_i y_i'^2 =$$

$$= M\left(a^2 + \frac{1}{4}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}MR^2 + Mb^2 =$$

$$= M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha + b^2\right].$$

При упрощении учтено, что для круглого диска

$$\sum m_i y_i'^2 = \frac{1}{4}MR^2,$$

$$\sum m_i x_C'^2 = \frac{1}{4}MR^2,$$

а также формулы (2).

Примечание. Решение этой задачи может быть проведено с использованием теоремы Гюйгенса — Штейнера:

$$I_{O_z} = I_{Cz'} + Md^2,$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Mx_Cy_C.$$

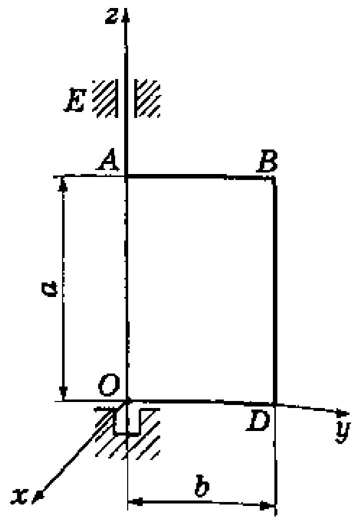
Ответ: $I_z = M\left[\left(a^2 + \frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha + b^2\right]$;

$$I_{xz} = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\sin\alpha\cos\alpha,\ I_{yz} = Mab\sin\alpha.$$

Задача 34.29

Однородная прямоугольная пластинка $OABD$ массы M со сторонами a и b прикреплена стороной OA к оси OE.

Вычислить центробежные моменты инерции пластинки I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}.



Решение

Пластинка $OABD$ лежит в плоскости $x = 0$. Поэтому

$$I_{xz} = \iint_S xz\,dm\big|_{x=0} = 0,$$

$$I_{xy} = \iint_S xy\,dm\big|_{x=0} = 0.$$

Вычислим I_{yz}:

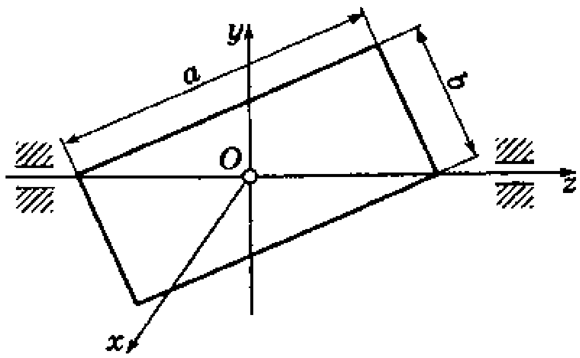
$$I_{yz} = \iint_S yz\, dm = \rho \int_0^b \left(\int_0^a z\, dz \right) y\, dy = \rho \frac{b^2}{2} \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} Mab,$$

где $dm = \rho\, dy\, dz$, $\rho = \dfrac{M}{ab}$.

О т в е т: $I_{xy} = I_{zy} = 0$; $I_{yz} = \dfrac{1}{4} Mab$.

Задача 34.30

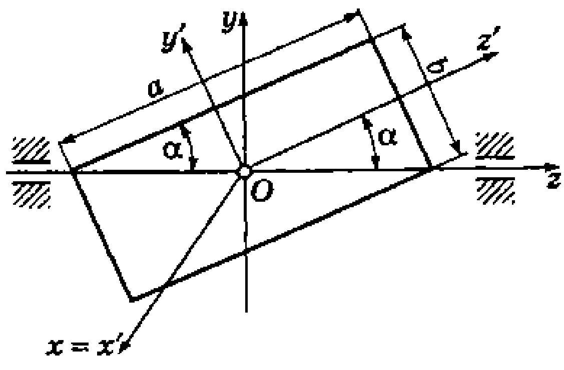
Однородная прямоугольная пластинка массы M со сторонами длины a и b прикреплена к оси z, проходящей через одну из ее диагоналей.



Вычислить центробежный момент инерции I_{yz} пластинки относительно осей y и z, лежащих вместе с пластинкой в плоскости рисунка. Начало координат совмещено с центром масс пластинки.

Р е ш е н и е.

Введем координаты x', y' и z' (см. рисунок) согласно формулам



$$x = x', \quad y = y' \cos\alpha + z' \sin\alpha,$$

$$z = -y' \sin\alpha + z' \cos\alpha,$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{b}{a}$; $-\dfrac{b}{2} < y' < \dfrac{b}{2}$; $-\dfrac{a}{2} < z' < \dfrac{a}{2}$.

Пусть поверхностная плотность пластины

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}.$$

Тогда центробежный момент инерции пластины

$$I_{yz}=\iint\limits_S yz\,dm=\rho\iint\limits_S (y'\cos\alpha+z'\sin\alpha)(-y'\sin\alpha+z'\cos\alpha)\,dy'dz'=$$

$$=\rho\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{[(z')^2-(y')^2]\sin\alpha\cos\alpha+y'z'(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\right\}dy'dz'=$$

$$=\frac{1}{2}\rho\sin2\alpha\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left\{\left[\frac{(z')^3}{3}-z'(y')^2\right]_{z'=-\frac{a}{2}}^{z'=\frac{a}{2}}\right\}dy'+\rho\cos2\alpha\left[\frac{(y')^2}{2}\Bigg|_{y'=-\frac{b}{2}}^{y'=\frac{b}{2}}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{(z')^2}{2}\Bigg|_{z'=-\frac{a}{2}}^{z'=\frac{a}{2}}\right]=\frac{\rho\sin2\alpha}{2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{a^3}{12}-a(y')^2\right]dy'+\rho\cos2\alpha\cdot0\cdot0=$$

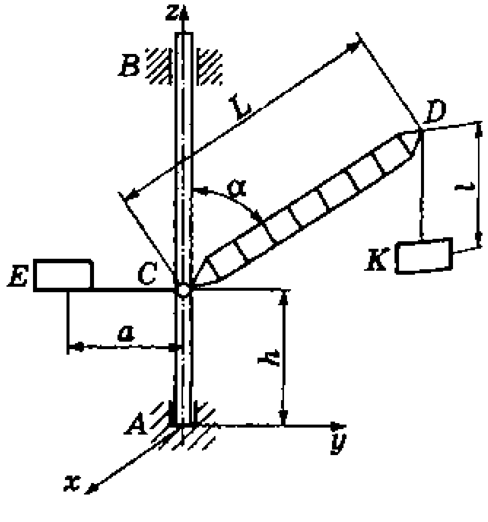
$$=\frac{1}{2}\rho\sin2\alpha\left[\frac{a^3}{12}y'-a\frac{(y')^3}{3}\right]\Bigg|_{y'=-\frac{b}{2}}^{y'=\frac{b}{2}}=\frac{1}{2}\rho\sin2\alpha\left(\frac{a^3}{12}b-a\frac{b^3}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}\rho ab(a^2-b^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{M(a^2-b^2)}{12}\,\frac{\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=$$

$$=\frac{M(a^2-b^2)}{12}\cdot\frac{b/a}{1+(b/a)^2}=\frac{Mab}{12}\,\frac{(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)}.$$

Ответ: $I_{yz}=\dfrac{M}{12}\,\dfrac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}.$

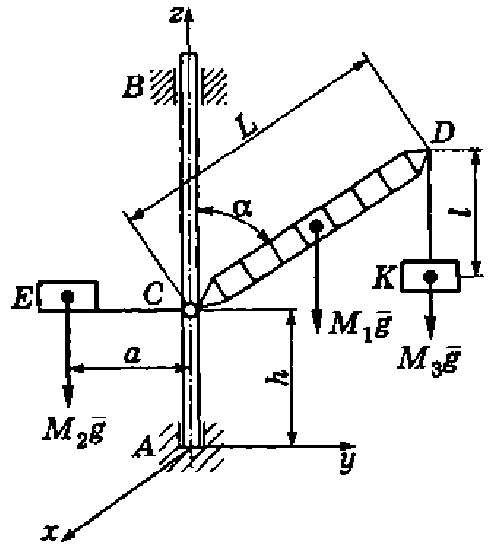
Задача 34.31



Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длины L и массы M_1, противовеса E массы M_2 и груза K массы M_3. Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес E и груз K как точечные массы, определить момент инерции I_z крана относительно вертикальной оси вращения z и центробежные моменты инерции относительно осей координат x, y, z, связанных с краном. Центр масс всей системы находится на оси z; стрела CD расположена в плоскости yz.

Решение

Запишем координаты характерных точек подъемного крана (см. рисунок):



$$E(0, -a, h),$$

$$C(0, 0, h),$$

$$D(0, L\sin\alpha, h + L\cos\alpha);$$

$$K(0, L\sin\alpha, h + L\cos\alpha - l).$$

По определению осевого момента инерции

$$I_z = M_2a^2 + \int\limits_0^{L\sin\alpha} y^2 dm + M_3(L\sin\alpha)^2.$$

Однако

$$dm = \rho dl = \rho\sqrt{dy^2 + dz^2} = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dy,$$

где $\rho = \dfrac{M_1}{L}$; $z = h + y\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Поэтому

$$dm = \frac{M_1}{L}\sqrt{1 + (\mathrm{ctg}\,\alpha)^2}\,dy = \frac{M_1}{L\sin\alpha}dy.$$

Тогда

$$I_z = M_2a^2 + \frac{M_1}{L\sin\alpha}\int\limits_0^{L\sin\alpha} y^2 dy + M_3(L\sin\alpha)^2 = M_2a^2 + \frac{M_1}{L\sin\alpha}\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{L\sin\alpha} +$$

$$+ M_3(L\sin\alpha)^2 = M_2a^2 + \left(M_3 + \frac{1}{3}M_1\right)L^2\sin^2\alpha;$$

$$I_{xy} = M_2\cdot 0\cdot(-a) + \int\limits_0^{L\sin\alpha} xy\,dm\big|_{x=0} + M_3\cdot 0\cdot L\sin\alpha = 0;$$

$$I_{xz} = M_2 \cdot 0 \cdot h + \int\limits_0^{L\sin\alpha} xz\,dm\Big|_{x=0} + M_3 \cdot 0 \cdot (h - l + L\cos\alpha) = 0;$$

$$I_{yz} = M_2(-a)h + \int\limits_0^{L\sin\alpha} yz\,dm + M_3\,L(h - l + L\cos\alpha)\sin\alpha =$$

$$= M_3\,L(h - l + L\cos\alpha)\sin\alpha - M_2ah + \frac{M_1}{L\sin\alpha}\int\limits_0^{L\sin\alpha} y(h + y\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\,dy =$$

$$= M_3L(h - l + L\cos\alpha)\sin\alpha - M_2ah + \frac{M_1}{L\sin\alpha}\left(h\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\mathrm{ctg}\alpha\right)\Bigg|_{y=0}^{y=L\sin\alpha} =$$

$$= M_3L(h - l + L\cos\alpha)\sin\alpha - M_2ah + M_1L\sin\alpha\left(\frac{h}{2} + \frac{L\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha}{3}\right) =$$

$$= \frac{M_3 + \frac{1}{3}M_1}{2}L^2\sin 2\alpha + \left[M_3(h - l) + \frac{1}{2}M_1h\right]L\sin\alpha - M_2ah.$$

О т в е т: $I_z = M_2a^2 + \left(M_3 + \frac{1}{3}M_1\right)L^2\sin^2\alpha;$

$$I_{yz} = \frac{M_3 + \frac{1}{3}M_1}{2}L^2\sin 2\alpha + \left[M_3(h - l) + \frac{1}{2}M_1h\right]L\sin\alpha - M_2ah;$$

$$I_{xy} = I_{xz} = 0.$$

П р и м е ч а н и е. В приведенном в сборнике ответе были допущены опечатки.

35. Теорема о движении центра масс материальной системы

Методические указания к решению задач

Определение и физический смысл центра масс системы дан в предыдущем параграфе. Однако здесь уместно напомнить, что центр масс системы материальных точек — это геометрическая точка, координаты которой в декартовой системе координат определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \\ y_C &= \frac{\sum m_k y_k}{m_k}, \\ z_C &= \frac{\sum m_k z_k}{m_k}. \end{aligned}\right\} \tag{35.1}$$

При движении механической системы координаты x_k, y_k и z_k материальных точек или центров тяжести тел, входящих в систему, изменяются с течением времени. Поэтому формулы (35.1) могут рассматриваться как уравнения движения центра масс, т.е.

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t), \quad z_C = f_3(t).$$

Зная уравнения движения, можно путем дифференцирования найти проекции скорости — $\dot{x}_C$, $\dot{y}_C$, $\dot{z}_C$ и ускорения — $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{z}_C$ центра масс на оси декартовых координат, а затем определить его скорость v_C и ускорение a_C:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2},$$

$$a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2 + \ddot{z}_C^2}. \tag{35.2}$$

Если же в некоторой механической системе центр масс окажется на звене, совершающем вращательное движение вокруг неподвижной оси, то v_C и a_C центра масс можно определить как скорость и ускорение точек тела при вращательном движении. Для этого нужно знать расстояние от оси вращения до центра масс, угловую скорость и угловое ускорение вращения тела.

Теорема о движении центра масс механической системы — это выражение второго закона динамики для системы материальных точек при ее поступательном движении:

центр масс механической системы движется как любая материальная точка, масса которой равна массе всей механической системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему, т.е.

$$M\bar{a}_C = \bar{R}^e, \tag{35.3}$$

где $M = \sum m_k$ — масса всей системы; $\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e$ — главный вектор всех внешних $\bar{F}_k^e$ сил, приложенных к материальным точкам или телам механической системы.

Уравнение (35.3) может быть записано в скалярной форме в проекциях на оси декартовых координат или на естественные оси. В декартовой системе координат выражение (35.3) примет вид

$$M\ddot{x}_C = R_x^e = \sum F_{kx}^e,$$

$$M\ddot{y}_C = R_y^e = \sum F_{ky}^e,$$

$$M\ddot{z}_C = R_z^e = \sum F_{kz}^e. \tag{35.4}$$

Как следует из формул (35.3) и (35.4), на движение центра масс механической системы влияют только внешние силы. Внутренние силы в механической системе прямого влияния на движение центра масс не оказывают, хотя их косвенное влияние имеет место в том случае, когда они являются источником возникновения (появления) внешних сил. Уравнения (35.4) позволяют решать две задачи, аналогичные двум основным задачам динамики материальной точки:

• первая задача — по известным массе системы и закону движения ее центра масс требуется определить главный вектор внешних сил, действующих на систему, или какую-либо одну из этих сил, когда известны другие силы;

• вторая задача — по известным массе системы, внешним силам, действующим на систему, и начальным условиям движения центра масс требуется определить закон движения центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно сформулировать два следствия.

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс механической системы движется равномерно и прямолинейно либо покоится.

2. Если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось равна нулю, то проекция центра масс на эту ось либо покоится, либо движется равномерно, т.е. если, например, $R_x^e = 0$, то $\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const}$.

Если в начальный момент система покоилась, то

$$\dot{x}_{0C} = 0 = \dot{x}_C \Rightarrow x_C = \text{const},$$

т.е. проекция центра масс покоится. При $\dot{x}_{0C} \neq 0$ центр масс движется вдоль оси x с постоянной скоростью.

Эти следствия выражают закон сохранения движения центра масс механической системы. Если координаты центра масс системы остаются неизменными во все время ее движения, то можно определить перемещение некоторых точек или тел системы, составив алгебраическое уравнение вида

$$\sum m_k \Delta x_k = 0, \tag{35.5}$$

где Δx_k — приращение координаты центра масс k-го тела при изменении положения тел в механической системе.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить механическую систему, показав все внешние силы, включая и необходимые реакции связей, если система несвободна.

2. Записать для данной расчетной схемы теорему о движении центра масс в некоторой форме [см. формулу (35.3)].

3. Выбрать неподвижную систему координатных осей.

4. Записать теорему о движении центра масс в проекции на эти оси или на одну из осей [см. формулу (35.4)].

5. При необходимости определения какой-либо внешней силы выразить ее из уравнения, полученного в п. 4.

6. Используя формулы (35.1), определить координаты или уравнения движения центра масс. При определении скорости или ускорения центра масс эти уравнения следует продифференцировать.

7. Для определения закона движения центра масс составить дифференциальные уравнения вида (35.4), а затем проинтегрировать их, предварительно определив начальные условия движения центра масс при $t = 0$: $x_{0C}, y_{0C}, z_{0C}, \dot{x}_{0C}, \dot{y}_{0C}, \dot{z}_{0C}$.

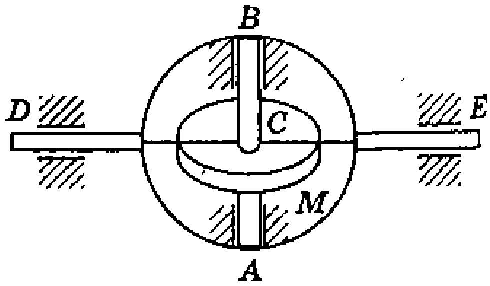
8. При решении задач на закон сохранения движения центра масс необходимо выполнить все указания пп. 1—4, обосновать, будет ли центр масс покоиться или двигаться равномерно, показать координаты центров тяжести тел в начальном положении системы, определить их приращение Δx_k, а затем составить уравнение вида (35.5) и определить перемещение некоторого тела при условии, что центр масс системы покоится.

9. Решение задачи необходимо дать в общем виде, а при необходимости в полученные выражения искомых величин подставить числовые значения.

Задачи и решения

Задача 35.1

Определить главный вектор внешних сил, действующих на маховик M, вращающийся вокруг оси AB. Ось AB, укрепленная в круговой раме, в свою очередь вращается вокруг оси DE. Центр масс C маховика находится в точке пересечения осей AB и DE.



Решение

Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\ddot{\bar{r}}_C = \sum \bar{F}_k^e.$$

Радиус-вектор центра масс механической системы определяется по формуле

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{\sum m_k}.$$

Так как положение центра масс маховика при движении не меняется (это точка C), то $\ddot{\bar{r}}_C = 0$, а значит, и

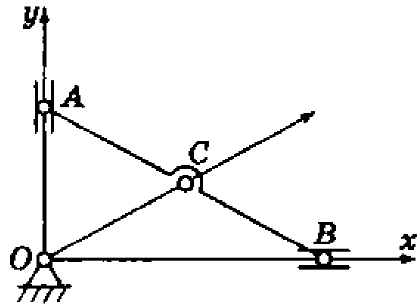
$$\sum \bar{F}_k^e = 0,$$

т.е. главный вектор внешних сил равен нулю.

Ответ: главный вектор внешних сил равен нулю.

Задача 35.2

Определить главный вектор внешних сил, приложенных к линейке AB эллипсографа, изображенного на рисунке. Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω, масса линейки AB равна M, $OC = AC = BC = l$.

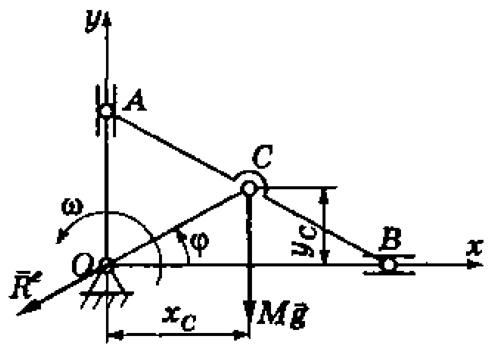


Решение

Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\ddot{\bar{r}}_C = \sum \bar{F}_k^e. \tag{1}$$

Проекции радиуса-вектора на оси координат (см. рисунок) найдем по формулам



$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \tag{2}$$

$$y_C = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}, \tag{3}$$

$$\varphi = \omega t. \tag{4}$$

Так как дана только масса линейки AB, то

$$x_C = \frac{M \cdot OC \cdot \cos\omega t}{M} = l\cos\omega t,$$

$$y_C = l\sin\omega t.$$

Взяв вторые производные от x_C и y_C, получим проекции ускорения центра масс:

$$\ddot{x}_C = -l\omega^2 \cos\omega t,$$

$$\ddot{y}_C = -l\omega^2 \sin\omega t.$$

Тогда проекции главного вектора внешних сил на оси координат

$$R_x^e = M\ddot{x}_C = -Ml\omega^2 \cos\omega t,$$

$$R_y^e = M\ddot{y}_C = -Ml\omega^2 \sin\omega t,$$

а модуль главного вектора внешних сил

$$R^e = \sqrt{(R_x^e)^2 + (R_y^e)^2} = Ml\omega^2\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = Ml\omega^2.$$

Направляющий косинус

$$\cos\alpha = \frac{R_x^e}{R^e} = -\cos\omega t,$$

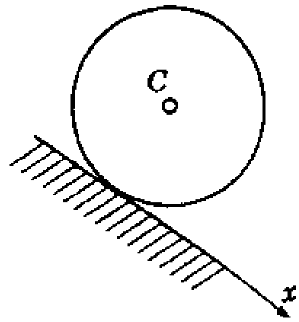
т.е. $\alpha = 180° - \varphi$, где $\varphi = \omega t$.

Значит, главный вектор внешних сил направлен по звену CO.

О т в е т: главный вектор внешних сил параллелен звену CO и равен по модулю $Ml\omega^2$.

Задача 35.3

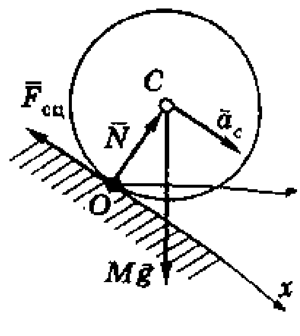
Определить главный вектор внешних сил, действующих на колесо массы M, скатывающееся с наклонной плоскости вниз, если его центр масс C движется по закону $x_C = at^2/2$.



Р е ш е н и е

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось x:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e. \qquad (1)$$



Так как траектория движения центра масс — прямая, параллельная оси x (см. рисунок), то

$$\sum F_{kx}^e = R^e,$$

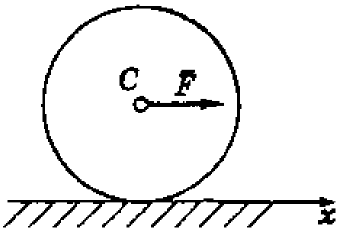
т.е. равна главному вектору внешних сил.

Возьмем вторую производную от уравнения движения центра масс: $\ddot{x}_C = a$. Подставим это значение в уравнение (1) и получим, что главный вектор внешних сил равен Ma.

Ускорение центра масс направлено параллельно оси Ox, так как главный вектор внешних сил имеет направление ускорения, то он тоже направлен по оси Ox.

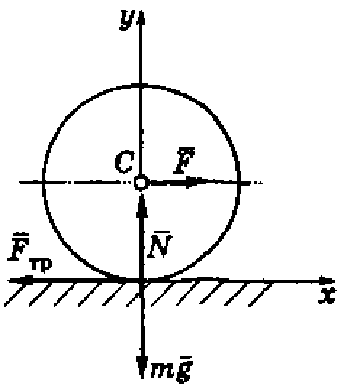
Ответ: главный вектор внешних сил параллелен оси Ox, направлен в сторону движения и равен по модулю Ma.

Задача 35.4



Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием силы $\overline{F}$, изображенной на рисунке. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f, а $F = 5fP$, где P — вес колеса. В начальный момент колесо находилось в покое.

Решение



Покажем на рисунке силы; действующие на колесо: $m\bar{g}$ — сила тяжести колеса, $\overline{N}$ – нормальная реакция, $\overline{F}_{тр}$ — сила трения скольжения.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = F - F_{тр}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - mg. \qquad (2)$$

Так как $y_C = r = \text{const}$, значит, $\ddot{y}_C = 0$, т.е.

$$N = mg,$$

$$F_{тр} = fN = fmg = fP.$$

Подставим значение силы трения в уравнение (1) и выразим $\ddot{x}_C$:

$$m\ddot{x}_C = F - F_{тр} = 5fP - fP = 4fP,$$

$$\ddot{x}_C = \frac{4fP}{m} = 4fg. \qquad (3)$$

Проинтегрируем дважды выражение (3). Запишем

$$\frac{d\dot{x}_C}{dt} = 4fg$$

или

$$d\dot{x}_C = 4fgdt, \tag{4}$$

откуда получим

$$\dot{x}_C = 4fgt + C_1. \tag{5}$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из начальных условий: $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $C_1 = 0$.

Интегрируя выражение (5) и учитывая, что $C_1 = 0$, получим

$$\frac{dx_C}{dt} = 4fgt$$

или

$$dx_C = 4fgtdt,$$

$$x_C = \frac{4fgt^2}{2} + C_2 = 2fgt^2 + C_2.$$

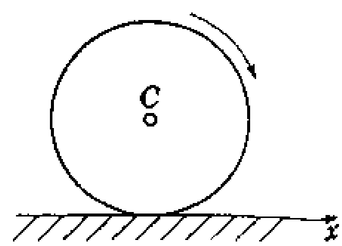
Найдем постоянную интегрирования C_2 из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$; $C_2 = 0$.

Значит, закон движения центра масс

$$x_C = 2fg\,t^2.$$

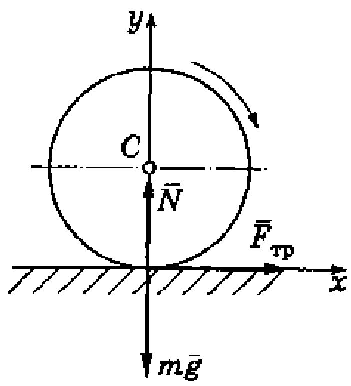
Ответ: $x_C = 2fgt^2$.

Задача 35.5



Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием приложенного к нему вращающего момента. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f. В начальный момент колесо находилось в покое.

Р е ш е н и е



Покажем на рисунке силы, действующие на колесо: сила трения скольжения $\bar{F}_{тр}$, сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция $\bar{N}$. Центр масс колеса C движется прямолинейно.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = F_{тр}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = N - mg = 0. \qquad (2)$$

Так как $y_C = R = \text{const}$ (R — радиус колеса), то $\ddot{y}_C = 0$.
Из уравнения (2) следует, что $N = mg$. Тогда

$$F_{тр} = fN = fmg. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в уравнение (1).
Тогда

$$m\ddot{x}_C = fmg$$

или

$$\ddot{x}_C = fg.$$

Дважды проинтегрируем полученное равенство. Постоянные интегрирования найдем из начальных условий: $t = 0$, $x_{C_0} = 0$, $\dot{x}_{C_0} = 0$. Получим

$$\dot{x}_C = fg\,t + C_1, \quad C_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = fgt$$

или

$$dx_C = fg\,tdt.$$

После интегрирования

$$x_C = \frac{fgt^2}{2} + C_2.$$

Используя начальные условия, определим, что $C_2 = 0$. Следовательно, закон движения центра масс колеса

$$x_C = \frac{fg\,t^2}{2}.$$

О т в е т: $x_C = \dfrac{fg\,t^2}{2}$.

Задача 35.6

Вагон трамвая совершает вертикальные гармонические колебания на рессорах амплитуды 2,5 см и периода $T = 0{,}5$ с. Масса кузова с нагрузкой 10 т, масса тележки и колес 1 т. Определить силу давления вагона на рельсы.

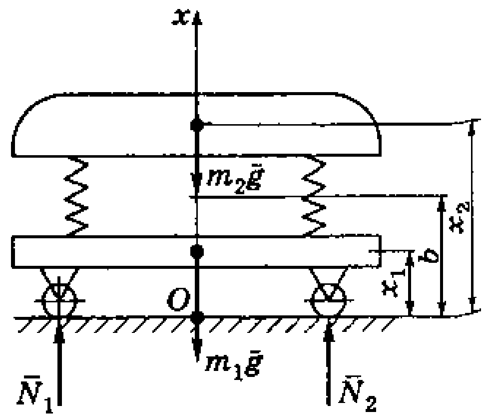
Р е ш е н и е

Применим теорему о движении центра масс системы:

$$M\bar{a}_C = (m_1 + m_2)\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2,$$

где $M = m_1 + m_2$.

В проекции на ось x (см. рисунок) запишем



$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = -(m_1 + m_2)g + N,$$

где $N_1 + N_2 = N$.

Отсюда

$$N = (m_1 + m_2)(g + \ddot{x}_C).$$

Найдем уравнение движения центра масс всей системы:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

где $x_1 = \text{const}$; $x_2 = a\sin\omega t + b$.

Так как вагон совершает вертикальные гармонические колебания, то $b = \text{const}$.

Частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi,$$

амплитуда — $a = 2{,}5$ см $= 0{,}025$ м.

Найдем ускорение центра масс системы:

$$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a\omega^2 \sin\omega t.$$

Так как $|\sin\omega t| \le 1$, то

$$\ddot{x}_{C\max} = \pm\frac{m_2 a\omega^2}{m_1 + m_2}.$$

В зависимости от знака ускорения центра масс давление будет минимальным или максимальным:

$$N_{\min} = (m_1 + m_2)g - m_2 a\omega^2 = 107{,}8\cdot 10^3 - 39{,}5\cdot 10^3 = 68{,}3 \text{ (кН)},$$

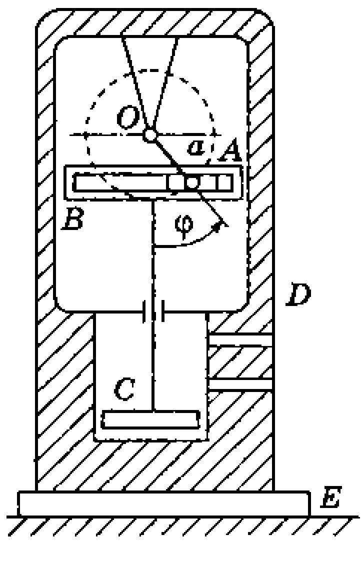
$$N_{\max} = (m_1 + m_2)g + m_2 a\omega^2 =$$

$$= (1 + 10)\cdot 10^3\cdot 9{,}8 + 10\cdot 10^3\cdot 0{,}025\cdot 16\pi^2 = 147{,}3 \text{ (кН)}.$$

Ответ: от 68,3 до 147,3 кН.

Задача 35.7

Определить силу давления на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую, если масса неподвижных частей корпуса D и фундамента E равна M_1, масса кривошипа $OA = a$ равна M_2, масса кулисы B и поршня C равна M_3. Кривошип OA, вращающийся равномерно с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.



Решение

Показываем на рисунке силы: $M_1\bar{g}$ — сила тяжести корпуса и фундамента E, $M_2\bar{g}$ — сила тяжести кривошипа OA, $M_3\bar{g}$ — сила тяжести кулисы B и поршня C, $\bar{N}$ — сила реакции грунта.

Запишем теорему о движении центра масс системы:

$$M\bar{a}_C = (M_1 + M_2 + M_3)\bar{g} + \bar{N}. \qquad (1)$$

В проекции на ось x получим

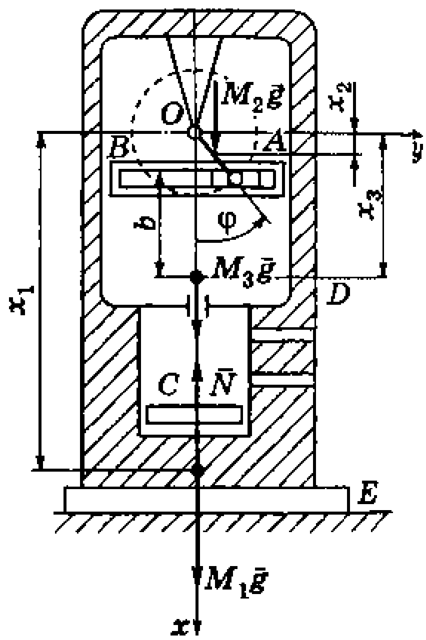
$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2 + M_3)g - N, \qquad (2)$$

отсюда сила реакция грунта

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - M\ddot{x}_C, \qquad (3)$$

где $M = M_1 + M_2 + M_3$.

Найдем уравнение движения центра масс системы:



$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3}, \qquad (4)$$

где $x_1 = l = \text{const}$ — координата центра масс корпуса и фундамента; $x_2 = \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{a}{2}\cos\omega t$ — координата центра масс кривошипа; $x_3 = a\cos\omega t + b$ (b — константа) — координата центра масс кулисы и поршня.

Взяв вторую производную от выражения (4), получим

$$\ddot{x}_C = \frac{M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2 + M_3\ddot{x}_3}{M_1 + M_2 + M_3} = -\frac{(M_2 + 2M_3)a\omega^2}{2(M_1 + M_2 + M_3)}\cos\omega t. \qquad (5)$$

Тогда с учетом формулы (5) и согласно формуле (3)

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - (M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_C =$$

$$= (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)\cos\omega t.$$

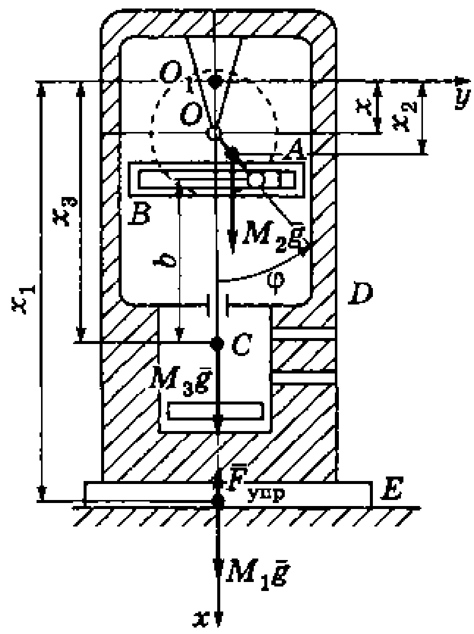
О т в е т: $N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{a\omega^2}{2}(M_2 + 2M_3)\cos\omega t$.

Задача 35.8

Использовав данные предыдущей задачи, считать, что насос установлен на упругом основании, коэффициент упругости которого равен c. Найти закон движения оси O кривошипа OA по вертикали, если в начальный момент ось O находилась в положении статического равновесия и ей была сообщена по вертикали вниз скорость $\bar{v}_0$. Взять начало отсчета оси x, направленной вертикально вниз, в положении статического равновесия оси O. Силами сопротивления пренебречь.

Решение

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось x (см. рисунок):



$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2 + M_3)g - F_{упр}, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$.

Подставим выражение $F_{упр}$ в уравнение (1) и, зная, что

$$f_{ст} = \frac{(M_1 + M_2 + M_3)g}{c},$$

получим дифференциальное уравнение

$$M\ddot{x}_C = -cx. \qquad (2)$$

Определим координаты центров масс входящих в механическую систему тел:

$$x_1 = l + x, \quad l = \mathrm{const}; \quad x_2 = \frac{a}{2}\cos\omega t + x; \quad x_3 = b + a\cos\omega t + x.$$

Запишем уравнение движения центра масс вдоль оси x:

$$x_C = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{M_1(l + x) + M_2\left(\frac{a}{2}\cos\omega t + x\right) + M_3(b + a\cos\omega t + x)}{M_1 + M_2 + M_3}. \qquad (3)$$

Взяв вторую производную, найдем проекцию ускорения центра масс $\ddot{x}_C$ на ось x:

$$\ddot{x}_C = -\frac{(M_2 + 2M_3)a\omega^2}{2(M_1 + M_2 + M_3)}\cos\omega t + \frac{M_1 + M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3}\ddot{x}. \qquad (4)$$

Подставим выражение (4) в уравнение (2) и получим

$$\ddot{x}+\frac{c}{M_1+M_2+M_3}x=\frac{(M_2+2M_3)}{M_1+M_2+M_3}\,\frac{a\omega^2}{2}\cos\omega t. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$k^2=\frac{c}{M_1+M_2+M_3},$$

$$h=\frac{(M_2+2M_3)}{M_1+M_2+M_3}\,\frac{a\omega^2}{2}.$$

Подставим их в уравнение (5) и получим дифференциальное уравнение движения оси O вдоль оси Ox:

$$\ddot{x}+k^2x=h\cos\omega t. \tag{5*}$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого будем искать в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}$ — решение однородного уравнения; x^* — частное решение.

Рассмотрим два случая.

1) Если $k\neq\omega$, то

$$\bar{x}=C_1\cos kt+C_2\sin kt,\quad x^*=A\cos\omega t,\quad \ddot{x}^*=-A\omega^2\cos\omega t.$$

Из уравнения

$$-A\omega^2\cos\omega t+Ak^2\cos\omega t=h\cos\omega t$$

найдем коэффициент A:

$$A=\frac{h}{k^2-\omega^2}$$

и, следовательно,

$$x^*=\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t.$$

Тогда

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t, \tag{6}$$

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt-\frac{h\omega}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \tag{7}$$

C_1 и C_2 найдем из начальных условий: $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=v_0$.
Из равенства (6)

$$x=x_0=C_1+\frac{h}{k^2-\omega^2}=0\Rightarrow C_1=-\frac{h}{k^2-\omega^2},$$

из равенства (7)

$$\dot{x}=\dot{x}_0=v_0=C_2k\Rightarrow C_2=\frac{v_0}{k}$$

и тогда

$$x_O=-\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t.$$

2) Если $k=\omega$, то, как известно из общей теории дифференциальных уравнений, решение уравнения (5*) следует искать в виде:

$$x=(At+B)\cos kt+(Ct+D)\sin kt, \tag{8}$$

$$\dot{x}=A\cos kt-k(At+B)\sin kt+C\sin kt+(Ct+D)k\cos kt, \tag{9}$$

$$\ddot{x}=-Ak\sin kt-k^2(At+B)\cos kt-kA\sin kt+$$

$$+Ck\cos kt-k^2(Ct+D)\sin kt+Ck\cos kt.$$

Подставим найденные значения x и $\ddot{x}$ в уравнение (5*):

$$-Ak\sin kt-k^2(At+B)\cos kt-kA\sin kt+Ck\cos kt-$$

$$-k^2(Ct+D)\sin kt+Ck\cos kt+k^2(At+B)\cos kt+k^2(Ct+D)\sin kt=h\cos kt,$$

$$-2Ak\sin kt+2Ck\cos kt=h\cos kt.$$

Так как коэффициенты при $\sin kt$ и $\cos kt$ должны быть одинаковыми, то получим

$$2Ck=h\Rightarrow C=\frac{h}{2k},$$

$$-2Ak=0\Rightarrow A=0.$$

Постоянные B и D найдем, подставив начальные условия: $t_0=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=v_0$, в уравнения (8) и (9):

$$x_0=B=0\Rightarrow B=0,$$

$$\dot{x}_0=v_0=A+Dk\Rightarrow D=\frac{v_0-A}{k}=\frac{v_0}{k}.$$

Подставим значения постоянных A, B, C и D в формулу (8) и запишем решение в виде

$$x=\left(\frac{h}{2k}t+\frac{v_0}{k}\right)\sin kt$$

или, зная, что $k=\omega$,

$$x_0=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{h}{2\omega}t\sin\omega t.$$

О т в е т: 1) при $\dfrac{c}{M_1+M_2+M_3}\neq\omega^2$

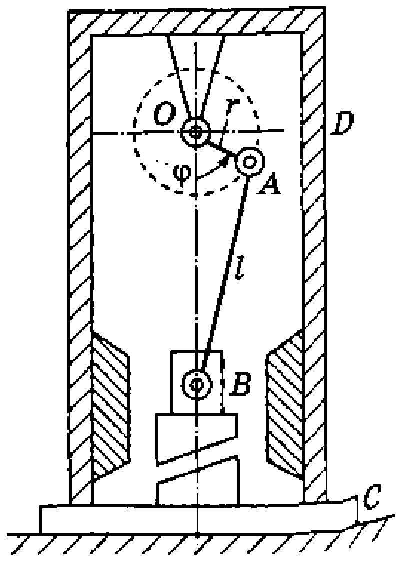
$$x_O=-\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t,$$

где $k=\sqrt{\dfrac{c}{M_1+M_2+M_3}}$, $h=\dfrac{(M_2+2M_3)}{M_1+M_2+M_3}\dfrac{a\omega^2}{2}$;

2) при $\dfrac{c}{M_1+M_2+M_3}=\omega^2$ $x_O=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\dfrac{h}{2\omega}t\sin\omega t.$

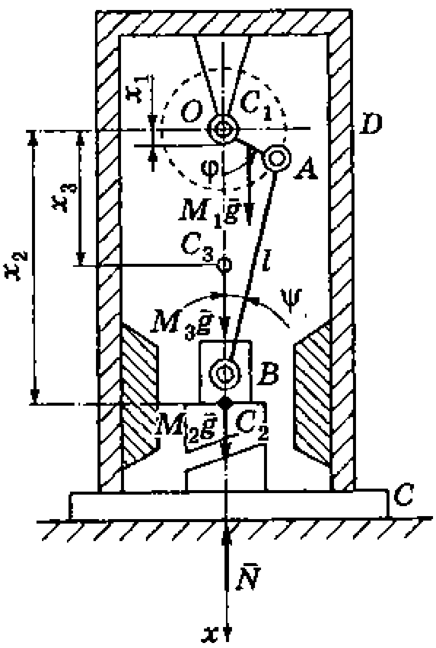
Задача 35.9

Ножницы для резки металла состоят из кривошипно-ползунного механизма OAB, к ползуну B которого прикреплен подвижный нож. Неподвижный нож укреплен на фундаменте C. Определить давление фундамента на грунт, если длина кривошипа r, масса кривошипа M_1, длина шатуна l, масса ползуна B с подвижным ножом M_2, масса фундамента C и корпуса D равна M_3. Массой шатуна пренебречь. Кривошип OA, равномерно вращающийся с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.



У к а з а н и е. Выражение $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение $\frac{r}{l}$ в степени выше второй.

Решение



Покажем на рисунке действующие активные силы: силы тяжести всех частей машины — $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$, $M_3\bar{g}$, и точки их приложения соответственно C_1, C_2, C_3, а также реакцию $\bar{N}$ грунта.

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось x:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = (M_1 + M_2 + M_3)g - N. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) выразим N:

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - M\ddot{x}_C. \qquad (2)$$

Для определения N необходимо знать проекцию ускорения центра масс на ось x. Рассмотрим кривошипно-ползунный механизм. Так как $\omega = \text{const}$, то $\varphi = \omega t$, координаты x_1, x_2 и x_3 центров масс C_1, C_2 и C_3 (см. рисунок):

$$x_1 = \frac{OA}{2}\cos\omega t = \frac{r}{2}\cos\omega t, \qquad (3)$$

$$x_2 = OA\cdot\cos\omega t + AB\cdot\cos\psi + BC_2 \quad (BC_2 = \text{const}), \qquad (4)$$

$$x_3 = OC_3 = \text{const}. \qquad (5)$$

Зависимость между углами φ и ψ определим по теореме синусов из ΔOAB:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\omega t} = \frac{r}{l}$$

или

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\omega t.$$

Тогда

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}. \qquad (6)$$

Подставим выражение (6) в формулу (4) и получим

$$x_2 = r\cos\omega t + l\cos\psi + BC_2 = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2} + BC_2.$$

Разложим выражение

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}$$

в ряд. Учитывая, что $\frac{r}{l}$ — правильная дробь, отбросим все члены ряда, содержащие $\frac{r}{l}$ в степени выше второй. Тогда

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2} = \left[1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t.$$

Следовательно,

$$x_2 = r\cos\omega t + l\left(1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\omega t\right) + BC_2,$$

зная, что

$$\sin^2\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2},$$

получим следующее выражение для x_2:

$$x_2 = l + \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{1}{4}\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) + BC_2. \qquad (7)$$

Вычислим вторые производные от выражений (3), (5) и (7):

$$\ddot{x}_1 = -\frac{r\omega^2}{2}\cos\omega t,$$

$$\ddot{x}_2 = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right),$$

$$\ddot{x}_3 = 0.$$

Зная, что

$$x_C = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

найдем

$$\ddot{x}_C = \frac{M_1 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{x}_2 + M_3 \ddot{x}_3}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{-M_1 \frac{r\omega^2}{2}\cos\omega t - M_2 r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{-\frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)\cos\omega t + 2M_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right]}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

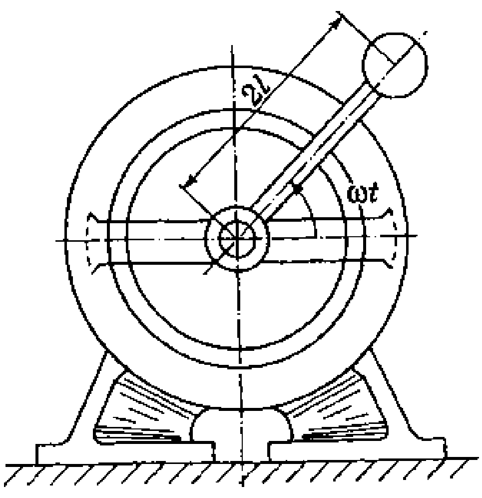
Подставим значение $\ddot{x}_C$ в уравнение (2) и найдем

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)\cos\omega t + 2M_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right].$$

Ответ: $N = (M_1 + M_2 + M_3)g + \frac{r\omega^2}{2}\left[(M_1 + 2M_2)\cos\omega t + 2M_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right].$

Задача 35.10

Электрический мотор массы M_1 установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длины $2l$ и массы M_2, на другой конец стержня насажен точечный груз массы M_3; угловая скорость вала равна ω.



Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.

Решение

1) Покажем на рис. 1 силы тяжести каждой части мотора — $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$, $M_3\bar{g}$ и суммарную реакцию $\bar{N}$ фундамента.

1) Если мотор не закреплен на фундаменте, то при движении стержня с точечным грузом корпус электромотора начнет движение, обозначим его перемещение x и запишем координату центра масс по оси x:

$$x_{C_1} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1(-x) + M_2(l\cos\omega t - x) + M_3(2l\cos\omega t - x)}{M_1 + M_2 + M_3}. \qquad (1)$$

Если стержень с точечным грузом займет вертикальное положение, то координата центра масс по оси x будет $x_{C_2} = 0$.

Так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, то согласно следствию из теоремы о движении центра масс можно записать $x_{C_1} = x_{C_2} = 0$. Приравняв выражение (1) к нулю, найдем x (горизонтальное движение мотора):

$$\frac{M_1(-x) + M_2(l\cos\omega t - x) + M_3(2l\cos\omega t - x)}{M_1 + M_2 + M_3} = 0$$

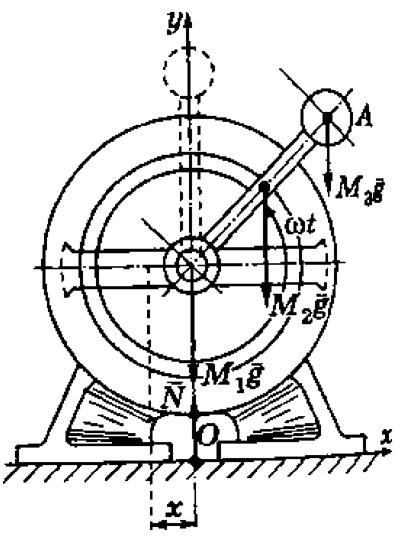


Рис. 1

или

$$l\cos\omega t(M_2 + 2M_3) = x(M_1 + M_2 + M_3).$$

Откуда

$$x = \frac{l(M_2 + 2M_3)\cos\omega t}{M_1 + M_2 + M_3},$$

т.е. мотор совершает гармонические колебания с амплитудой

$$\frac{l(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

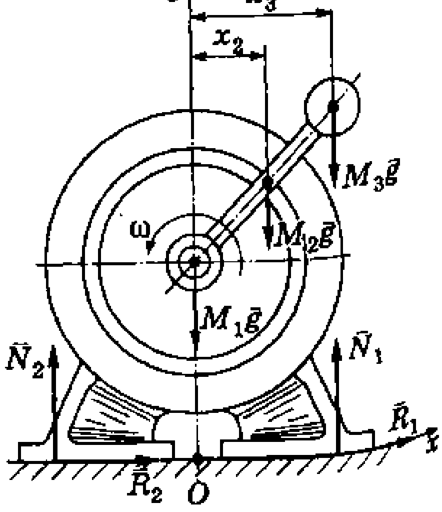


Рис. 2

2) Если мотор закреплен на фундаменте, то на болты действует срезывающее усилие $R = R_1 + R_2$ (см. рис. 2).

Найдем координату центра масс:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 \cdot l\cos\omega t + M_3 \cdot 2l\cos\omega t}{M_1 + M_2 + M_3} =$$

$$= \frac{(M_2 + 2M_3)\, l\cos\omega t}{M_1 + M_2 + M_3}$$

и проекцию ускорения центра масс на ось x:

$$\ddot{x}_C = \frac{-(M_2 + 2M_3) l\omega^2 \cos\omega t}{M_1 + M_2 + M_3}. \qquad (2)$$

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось x:

$$(M_1 + M_2 + M_3)\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = R. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) в формулу (3) и получим:

$$-l\omega^2 \cos\omega t (M_2 + 2M_3) = R.$$

Значение R будет наибольшим, когда $\cos\omega t = 1$, т.е.

$$R = l\omega^2 (M_2 + 2M_3).$$

Ответ: 1) гармонические колебания с амплитудой $\dfrac{l(M_2 + 2M_3)}{M_1 + M_2 + M_3}$ и периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; 2) $R = l\omega^2(M_2 + 2M_3)$.

Задача 35.11

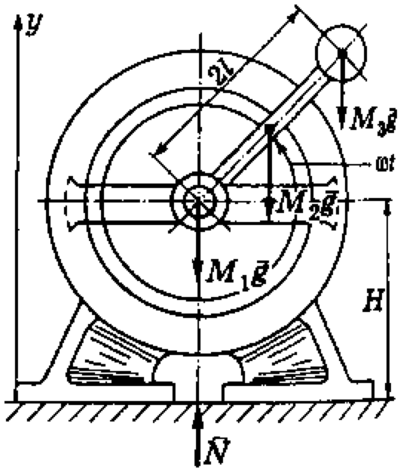
По условиям предыдущей задачи вычислить ту угловую скорость ω вала электромотора, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами.

Решение

Определим массу всей системы:

$$M = M_1 + M_2 + M_3.$$

Координаты центров масс по оси y (см. рисунок):



$$y_{C_1} = H,$$
$$y_{C_2} = H + l\sin\omega t,$$
$$y_{C_3} = H + 2l\sin\omega t.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_{C_1} &= 0, \\ \ddot{y}_{C_2} &= -l\omega^2\sin\omega t, \\ \ddot{y}_{C_3} & -2l\omega^2\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Согласно одной из формул (35.1)

$$y_C = \frac{M_1H + M_2(H + l\sin\omega t) + M_3(H + 2l\sin\omega t)}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось y:

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e.$$

С учетом выражений (1) запишем

$$M\ddot{y}_C = -M_2l\omega^2\sin\omega t - 2M_3l\omega^2\sin\omega t = -Mg + N.$$

Откуда

$$N = (M_1 + M_2 + M_3)g - l\omega^2(M_2 + 2M_3)\sin\omega t.$$

Наименьшим давление будет при $\sin\omega t = 1$, т.е.

$$N_{\min} = (M_1 + M_2 + M_3)g - l\omega^2(M_2 + 2M_3).$$

Электромотор будет подпрыгивать при $N_{\min} < 0$:

$$(M_1 + M_2 + M_3)g - l\omega^2(M_2 + 2M_3) < 0,$$

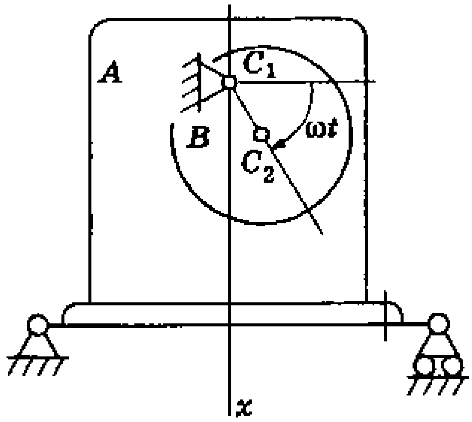
т.е. когда

$$\omega > \sqrt{\frac{(M_1 + M_2 + M_3)g}{(M_2 + 2M_3)l}}.$$

Ответ: $\omega > \sqrt{\dfrac{(M_1 + M_2 + M_3)g}{(M_2 + 2M_3)l}}.$

Задача 35.12

При сборке электромотора его ротор B был эксцентрично насажен на ось вращения C_1 на расстоянии $C_1C_2 = a$, где C_1 — центр масс статора A, а C_2 — центр масс ротора B. Ротор равномерно вращается с угловой скоростью ω. Электромотор установлен посередине упругой балки, статический прогиб которой равен Δ; M_1 — масса статора, M_2 — масса ротора.



Найти уравнение движения точки C_1 по вертикали, если в начальный момент она находилась в покое в положении статического равновесия.

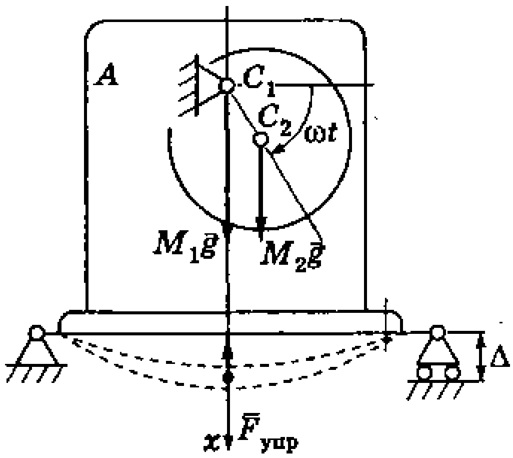
Силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в положении статического равновесия точки C_1.

Решение

Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\bar{a}_C = (M_1 + M_2)g - F_{\text{упр}}, \qquad (1)$$

где $F_{\text{упр}} = -c(x + f_{\text{ст}}) = -c(x + \Delta)$, по условию задачи $f_{\text{ст}} = \Delta$. В проекции на ось x (см. рисунок)



$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2.$$

Поскольку $x_1 = x$; $x_2 = x + a\sin\omega t$, то $\ddot{x}_1 = \ddot{x}$, $\ddot{x}_2 = \ddot{x} - a\omega^2 \sin\omega t$.

Так как

$$f_{\text{ст}} = \Delta = \frac{(M_1 + M_2)g}{c},$$

выражение (1) примет вид

$$M_1\ddot{x} + M_2(\ddot{x} - a\omega^2 \sin\omega t) = (M_1 + M_2)g - c\left[x + \frac{(M_1 + M_2)g}{g}\right]$$

или

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - M_2 a\omega^2 \sin\omega t = -cx,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{M_1 + M_2} x = \frac{M_2 a\omega^2}{M_1 + M_2} \sin\omega t. \qquad (2)$$

Введем обозначения:

$$k^2 = \frac{c}{M_1 + M_2},$$

$$h = \frac{M_2 a\omega^2}{M_1 + M_2}.$$

Подставим их в уравнение (2) и получим

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin\omega t. \qquad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1) Когда $k \neq \omega$, где $k = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$.

Так как уравнение (3) — неоднородное дифференциальное уравнение, то его решение будем искать в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$; $x^* = A\sin\omega t$.

Для нахождения постоянных интегрирования определим

$$\ddot{x}^* = -A\omega^2 \sin\omega t.$$

Подставим $\ddot{x}^*$ в уравнение (3):

$$-A\omega^2 \sin\omega t + k^2 A\sin\omega t = h\sin\omega t$$

и найдем A:

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}.$$

Тогда

$$x = \bar{x} + x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t, \qquad (4)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \cos kt + C_2 k \sin kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t. \qquad (5)$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем постоянные интегрирования:
из формулы (4)

$$x_0 = 0 = C_1;$$

из формулы (5)

$$\dot{x}_0 = 0 = C_2 k + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \Rightarrow C_2 = -\frac{h\omega}{k(k^2 - \omega^2)}.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (4) и получим

$$x = -\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2 - \omega^2}\sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2}\sin \omega t.$$

2) Когда $k = \omega$. Решение однородного уравнения ищем в виде

$$x = (At + B)\cos kt + (Ct + D)\sin kt. \qquad (6)$$

Найдем производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = A\cos kt - k(At + B)\sin kt + C\sin kt + (Ct + D)k\cos kt, \qquad (7)$$

$$\ddot{x} = -Ak\sin kt - k^2(At + B)\cos kt -$$

$$- kA\sin kt + Ck\cos kt - k^2(Ct + D)\sin kt + Ck\cos kt.$$

Подставим эти выражения в уравнение (3) и после преобразований получим

$$-2Ak\sin kt + 2Ck\cos kt = h\sin \omega t.$$

Поскольку коэффициенты при $\sin kt$ и $\cos kt$ должны быть одинаковыми, то

$$-2Ak = h \Rightarrow A = -\frac{h}{2k},$$

$$2Ck = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Постоянные интегрирования B и D найдем с учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (6) и (7) соответственно:

$$x_0 = 0 = B \Rightarrow B = 0,$$

$$\dot{x}_0 = 0 = A + Dk \Rightarrow D = -\frac{A}{k} = \frac{h}{2k^2}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования в формулу (6) и запишем:

$$x = -\frac{ht}{2k}\cos kt + \frac{h}{2k^2}\sin kt$$

или, зная, что $\omega = k$,

$$x = \frac{h}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{h}{2\omega}t\cos\omega t.$$

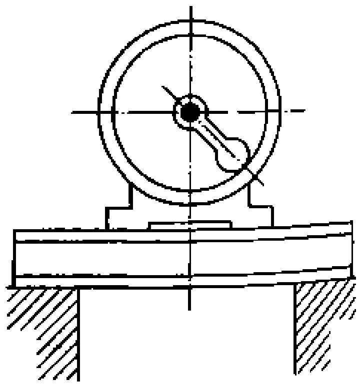
Ответ: 1) при $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \neq \omega$ $x = -\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin kt + \frac{h}{k^2-\omega^2}\sin\omega t$,

где $k = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$, $h = \frac{M_2}{M_1+M_2}a\omega^2$;

2) при $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \omega$ $x = \frac{h}{2\omega^2}\sin\omega t - \frac{h}{2\omega}t\cos\omega t$.

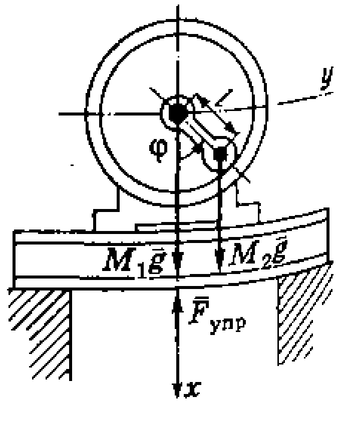
Задача 35.13

Электрический мотор массы M_1 установлен на балке, жесткость которой равна c. На вал мотора насажен груз массы M_2 на расстоянии l от оси вала. Угловая скорость мотора $\omega = \text{const}$. Определить амплитуду вынужденных колебаний мотора и критическое число его оборотов в минуту, пренебрегая массой балки и сопротивлением движению.



Решение

Запишем теорему о движении центра масс механической системы в проекции на ось x (см. рисунок):



$$M\ddot{x}_C = (M_1 + M_2)g - F_{упр}, \qquad (1)$$

где $M = M_1 + M_2$, $F_{упр} = c(x + f_{ст})$;
$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x}_1 + M_2\ddot{x}_2$.

Поскольку $x_1 = x + b$ ($b = \text{const}$), $x_2 = l\cos\omega t + x$, то

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x},$$

$$\ddot{x}_2 = -l\omega^2\cos\omega t + \ddot{x}.$$

Тогда

$$M\ddot{x}_C = M_1\ddot{x} + M_2\ddot{x} - M_2 l\omega^2 \cos\omega t.$$

Это выражение подставим в уравнение (1):

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} - M_2 l\omega^2 \cos\omega t = -cx$$

и получим неоднородное дифференциальное уравнение относительно x:

$$\ddot{x} + \frac{c}{M_1 + M_2}x = \frac{M_2 l\omega^2}{M_1 + M_2}\cos\omega t$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\cos\omega t, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{M_1 + M_2}$; $h = \dfrac{M_2 l\omega^2}{M_1 + M_2}$.

Дифференциальное уравнение (2) — это уравнение вынужденных колебаний без сопротивления. Его решение $x = \bar{x} + x^*$. При $k \neq \omega$ $x^* = A\cos\omega t$.

Найдем амплитуду вынужденных колебаний. Возьмем вторую производную:

$$\ddot{x}^* = -A\omega^2\cos\omega t.$$

Подставим выражения x^* и $\ddot{x}^*$ в уравнение (2):

$$-A\omega^2\cos\omega t + k_2(A\cos\omega t) = h\cos\omega t$$

и найдем

$$a = A = \frac{h}{k^2 - \omega^2} = \frac{M_2 l\omega^2}{(M_1 + M_2)\left(\dfrac{c}{M_1 + M_2} - \omega^2\right)} = \frac{M_2 l\omega^2}{c - (M_1 + M_2)\omega^2}.$$

Критическое число оборотов мотора $n_{кр}$ в минуту определим из условия резонанса, когда $k = \omega$:

$$\omega_{кр} = \frac{\pi n_{кр}}{30} = k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}.$$

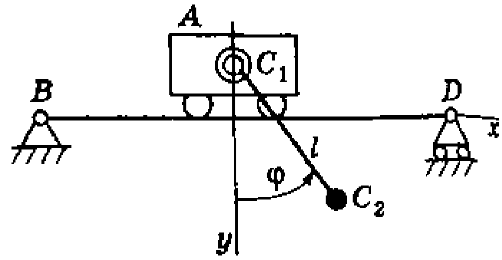
Откуда

$$n_{\text{кр}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{c}{M_1 + M_2}}.$$

О т в е т: $a = \dfrac{M_2 l\omega^2}{c - (M_1 + M_2)\omega^2}$; $n_{\text{кр}} = \dfrac{30}{\pi}\sqrt{\dfrac{c}{M_1 + M_2}}$.

Задача 35.14

На рисунке изображена крановая тележка A массы M_1, которая заторможена посередине балки BD. В центре масс C_1 тележки подвешен трос длины l с привязанным к нему грузом C_2 массы M_2. Трос с грузом совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Определить:



1) суммарную вертикальную реакцию балки BD, считая ее жесткой;

2) закон движения точки C_1 в вертикальном направлении, считая балку упругой с коэффициентом упругости, равным c.

В начальный момент балка, будучи недеформированной, находилась в покое в горизонтальном положении. Считая колебания троса малыми, принять: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Начало отсчета оси y взять в положении статического равновесия точки C_1. Массой троса и размерами тележки по сравнению с длиной балки пренебречь.

Р е ш е н и е

1) Определим суммарную вертикальную реакцию балки BD, считая ее жесткой.

На механическую систему, состоящую из тележки A и груза C_2, действуют сила тяжести $M_1\bar{g}$ тележки, сила тяжести $M_2\bar{g}$ груза, суммарная вертикальная реакция $\bar{R}_y$ (рис. 1).

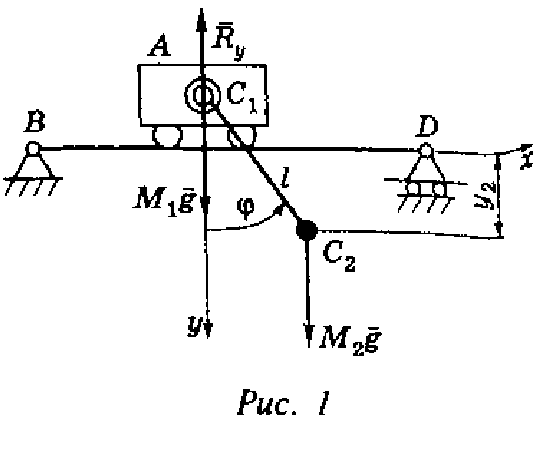


Рис. 1

Запишем теорему о движении центра масс:

$$M\vec{a}_C = M_1\vec{g} + M_2\vec{g} + \vec{R}_y. \tag{1}$$

В проекции на ось y выражение (1) примет вид

$$M\ddot{y}_C = (M_1 + M_2)g - R_y. \tag{2}$$

Отсюда

$$R_y = (M_1 + M_2)g - M\ddot{y}_C. \tag{3}$$

Найдем проекцию ускорения центра масс системы на ось y. Координата центра масс

$$y_C = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2},$$

где $y_1 = 0$; $y_2 = l\cos\varphi$, l — длина троса C_1C_2.

Тогда

$$y_C = \frac{M_2 l \cos\varphi}{M}, \tag{4}$$

где M — суммарная масса системы, $M = M_1 + M_2$.

Найдем вторую производную по времени от y_C, считая, что $\varphi = f(t)$, тогда

$$\dot{y}_C = \frac{dy_C}{dt} = -\frac{M_2 l}{M}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$\ddot{y}_C = \frac{d^2 y_C}{dt^2} = -\frac{M_2 l}{M}\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \frac{M_2 l}{M}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2. \tag{5}$$

С учетом формулы (5) выражение (3) примет вид

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2 l(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} + \cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2). \tag{6}$$

Вертикальная реакция наибольшая при $\varphi = 0$. Поэтому

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2 l\dot{\varphi}^2. \tag{7}$$

Примечание. Ответ $R_y = (M_1 + M_2)g$ неверен, так как масса M_2 (груз C_2) совершает гармоническое колебание в вертикальной плоскости и поэтому будет возникать дополнительное давление, обусловленное наличием центробежной силы инерции, равной $M_2 l\dot{\varphi}^2$, что и получено в предлагаемом решении. Для определения величины этой силы в условии задачи должны быть дополнительно указаны начальные условия движения груза C_2, т.е. при $t=0$ должны быть заданы φ_0 и $\dot\varphi_0$.

Пусть заданы такие начальные условия: $t=0$, $\varphi_0=0$, $\dot\varphi=\dot\varphi_0\neq 0$.

Составим дифференциальное уравнение колебаний математического маятника. Запишем второй закон динамики в проекции на ось τ (рис. 2):

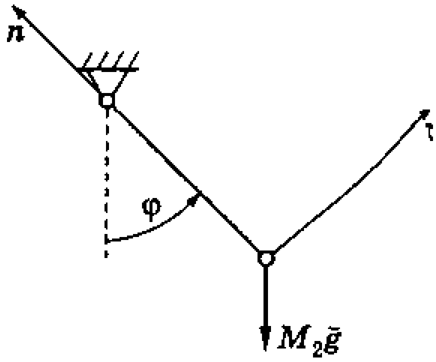


Рис. 2

$$M_2 a_\tau = -M_2 g \sin\varphi,$$

где a_τ — касательное ускорение,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\dot\varphi l)}{dt} = \ddot\varphi l.$$

Тогда

$$\ddot\varphi l = -g\sin\varphi.$$

Считая колебания малыми, примем $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение колебаний маятника

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

или

$$\ddot\varphi + k^2\varphi = 0,$$

где $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$ — циклическая частота колебаний.

Решение этого уравнения:

$$\varphi = C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

$$\dot\varphi = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt.$$

При указанных начальных условиях движения $C_1=\varphi_0=0$, $C_2=\frac{\dot\varphi_0}{k}$.

Тогда уравнение движения маятника

$$\varphi = \frac{\dot\varphi_0}{k}\sin kt.$$

Найдем

$$\dot\varphi = \frac{\dot\varphi_0}{k}\cdot k\cos kt = \dot\varphi_0\cos kt.$$

Слагаемое $M_2 l\dot\varphi^2$ в выражении (7) будет иметь максимальное значение при $\dot\varphi = \dot\varphi_{max}$, т.е. при $t=0$. Отсюда следует, что $\dot\varphi = \dot\varphi_{max} = \dot\varphi_0$. Тогда

$$R_y = (M_1 + M_2)g + M_2 l\dot\varphi_0^2.$$

2) Определение закона движения точки C_1 в вертикальном направлении, считая балку упругой, с коэффициентом упругости, равным c.

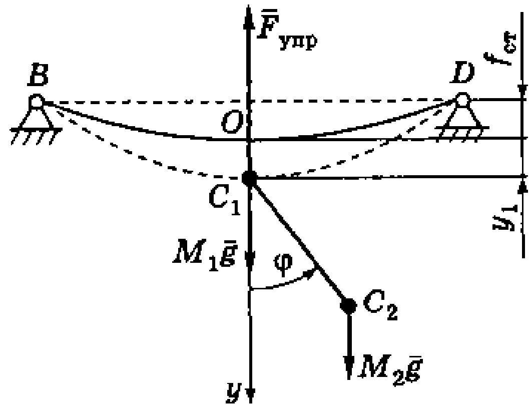


Рис. 3

Так как балка упругая, то под действием силы тяжести тележки и груза она прогнется и точка C_1 (рис. 3) сместится вниз на некоторую величину $\varphi_{ст}$ (статическая деформация).

В этом случае на механическую систему действуют силы тяжести тележки A и груза C_2, т.е. $M_1\bar g$ и $M_2\bar g$, а также сила упругости балки

$$F_{упр} = -c(y_1 + f_{ст}). \tag{8}$$

Запишем теорему о движении центра масс в проекции на ось y:

$$M\ddot y_C = (M_1 + M_2)g - F_{упр}. \tag{9}$$

Поскольку начало координат выбрано в положении статического равновесия (в точке O), то $y_1 = y_1$, $y_2 = y_1 + l\cos\varphi$. Тогда уравнение движения центра масс системы по оси y

$$y_C = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} = \frac{My_1 + M_2 l\cos\varphi}{M}, \tag{10}$$

где $M = M_1 + M_2$.

Дважды продифференцировав это уравнение и получим

$$\ddot y_C = \ddot y_1 - \frac{M_2 l}{M}(\sin\varphi\cdot\ddot\varphi + \cos\varphi\cdot\dot\varphi^2). \tag{11}$$

С учетом формул (8) и (11) выражение (9) примет вид:

$$M\ddot{y}_1 - M_2 l(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}+\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2) = (M_1+M_2)g - c(f_{\text{ст}}+y_1). \tag{12}$$

Учитывая, что в положении статического равновесия сила упругости равна силе тяжести, т.е. $(M_1+M_2)g = cf_{\text{ст}}$, уравнение (12) примет вид

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{M_1+M_2}y_1 = \frac{M_2 l}{M_1+M_2}(\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi}+\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}^2). \tag{13}$$

Уравнение (13) — дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, т.е. центр масс C_1 будет совершать вынужденные, а не свободные, колебания, как указано в ответе в сборнике.

Чтобы решить уравнение (13), нужно задать начальные условия колебаний груза C_2. Если принять начальные условия, приведенные при определении R_y, уравнение колебаний маятника будет таким:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin kt,$$

тогда

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0\cos kt,$$

$$\ddot{\varphi} = -\dot{\varphi}_0 k\sin kt.$$

После преобразований уравнение (13) примет вид

$$\ddot{y}_1 + \frac{c}{M_1+M_2}y_1 = \frac{M_2 l\dot{\varphi}_0^2}{M_1+M_2}\cos 2kt. \tag{14}$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{M_1+M_2} = k_1^2,\quad \frac{M_2 l\dot{\varphi}_0^2}{M_1+M_2} = h,\quad 2k = p.$$

Тогда дифференциальное уравнение движения точки C_1

$$\ddot{y}_1 + k_1^2 y_1 = h\cos pt. \tag{15}$$

Решение неоднородного уравнения (15) представим в виде

$$y_1 = \bar{y}_1 + \bar{y}_1^*,$$

где $\bar{y}_1 = A\cos k_1 t + B\sin k_1 t$ — решение однородного дифференциального уравнения.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_1^* = A_1 \sin pt + B_1 \cos pt.$$

Найдем вторую производную

$$\ddot{y}_1^* = -A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt$$

и подставим в уравнение (15):

$$-A_1 p^2 \sin pt - B_1 p^2 \cos pt + k_1^2 A_1 \sin pt + k_1^2 B_1 \cos pt = h \cos pt.$$

Коэффициенты при $\sin pt$ и $\cos pt$ должны быть одинаковыми, следовательно, получим два уравнения. Первое уравнение

$$A_1 (k_1^2 - p^2) = 0$$

(приравняли коэффициенты при $\sin pt$).

Так как $p^2 = 4k^2 = 4\frac{g}{l}$, а $k_1^2 = \frac{c}{M_1 + M_2}$ и числовые значения не заданы, то будем считать, что $p \neq k_1$. Тогда при $\sin pt \neq 0$ $A_1 = 0$.

Из второго уравнения

$$B_1 (k_1^2 - p^2) = h$$

(приравняли коэффициенты при $\cos pt$) найдем

$$B_1 = \frac{h}{k_1^2 - p^2}.$$

Тогда

$$y_1^* = \frac{h}{k_1^2 - p^2} \cos pt,$$

$$y_1 = A \cos k_1 t + B \sin k_1 t + \frac{h}{k_1^2 - p^2} \cos pt. \qquad (16)$$

Возьмем производную от y_1 по времени

$$\dot{y}_1 = -Ak_1 \sin k_1 t + Bk_1 \cos k_1 t - \frac{hp}{k_1^2 - p^2} \sin pt.$$

С учетом начальных условий движения при $t=0$ из уравнения $y_{1(0)}=-f_{\text{ст}}$ определим A:

$$-f_{\text{ст}}=A+\frac{h}{k_1^2+p^2},$$

$$A=\frac{-h}{k_1^2-p^2}-f_{\text{ст}}=-\left[\frac{h}{k_1^2-p^2}+\frac{(M_1+M_2)g}{c}\right];$$

из уравнения $\dot{y}_{1(0)}=0$ определим B:

$$0=Bk_1\Rightarrow B=0.$$

Подставим значения постоянных интегрирования A и B в формулу (16) и запишем уравнение движения точки C_1:

$$y_1=-\left[\frac{h}{k_1^2-p^2}+\frac{(M_1+M_2)g}{C}\right]\cos k_1t+\frac{h}{k_1^2-p^2}\cos pt.$$

С учетом введенных обозначений:

$$k_1=\sqrt{\frac{c}{M_1+M_2}},$$

$$h=\frac{M_2l\dot{\varphi}_0^2}{M_1+M_2},$$

$$p=2k=2\sqrt{\frac{g}{l}},$$

это уравнение будет иметь вид

$$y_1=-\frac{(M_1+M_2)g}{c}\cos\sqrt{\frac{c}{M_1+M_2}}\,t+\frac{h}{k_1^2-p^2}(\cos pt-\cos k_1t).$$

О т в е т: 1) $R_y=(M_1+M_2)g+M_2l\dot{\varphi}_0^2$;

2) точка C_1 совершает вынужденные колебания по закону

$$y_1=-\frac{(M_1+M_2)g}{c}\cos\sqrt{\frac{c}{M_1+M_2}}\,t+\frac{h}{k_1^2-p^2}(\cos pt-\cos k_1t).$$

Примечание. Приведенный в сборнике ответ неверный, так как точка C_1 совершает вынужденные, а не свободные, колебания, т.е. в ответе отсутствует слагаемое $\frac{h}{k_1^2 - p^2}(\cos pt - \cos k_1 t)$.

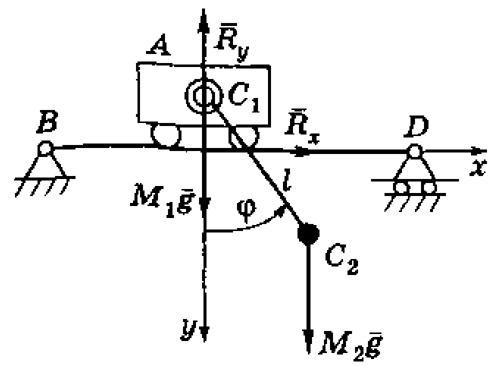
Задача 35.15

Сохранив данные предыдущей задачи и считая балку BD жесткой, определить: 1) суммарную горизонтальную реакцию рельсов; 2) в предположении, что тележка не заторможена, закон движения центра масс C_1 тележки A вдоль оси x.

В начальный момент точка C_1 находилась в покое в начале отсчета оси x. Трос совершает колебания по закону $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$.

Решение

1. Определение суммарной горизонтальной реакции рельсов.



На механическую систему действуют (см. рисунок) сила тяжести $M_1\bar{g}$ тележки, сила тяжести $M_2\bar{g}$ груза C_2, суммарная горизонтальная $\bar{R}_x$ реакция и суммарная вертикальная реакция $\bar{R}_y$.

Запишем теорему о движении центра масс в векторной форме и в проекции на ось x:

$$M\bar{a}_C = M_1\bar{g} + M_2\bar{g} + \bar{R}_y + \bar{R}_x, \tag{1}$$

$$M\ddot{x}_C = R_x. \tag{2}$$

Координата центра масс

$$x_C = \frac{x_1 M_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2},$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = l \sin\varphi$.

Тогда

$$x_C = \frac{M_2 l \sin\varphi}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 l}{M} \sin\varphi. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) дважды:

$$\dot{x}_C = \frac{M_2 l}{M}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$\ddot{x}_C = \frac{M_2 l}{M}\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \frac{M_2 l}{M}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2. \tag{4}$$

С учетом формулы (4) выражение (2) примет вид

$$R_x = M\ddot{x}_C = M_2 l(\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2). \tag{5}$$

Трос с подвешенным на нем грузом M совершает колебания по закону $\varphi = \varphi_0\cos\omega t$. Продифференцировав это выражение, получим

$$\dot{\varphi} = -\varphi_0\,\omega\sin\omega t, \tag{6}$$

$$\ddot{\varphi} = -\varphi_0\,\omega^2\cos\omega t. \tag{7}$$

С учетом формул (6) и (7) равенство (5) примет вид

$$R_x = M_2 l[\cos\varphi(-\varphi_0\,\omega^2\cos\omega t) - \sin\varphi\cdot\varphi_0^2\,\omega^2\sin^2\omega t] =$$

$$= -M_2 l\varphi_0\,\omega^2(\cos\varphi\cos\omega t + \varphi_0\sin\varphi\sin^2\omega t). \tag{8}$$

Из выражения (8) следует, что горизонтальная составляющая реакции рельсов зависит от угла φ. Найдем значение R_x для двух значений φ.

1) Трос занимает вертикальное положение. В этом случае $\varphi = 0$. Тогда

$$R_x = -M_2 l\varphi_0\omega^2\cos\omega t. \tag{9}$$

Примечание. Такой ответ приведен в сборнике. Однако значению угла $\varphi = 0$, как следует из уравнения колебаний груза, соответствует $\cos\omega t = 0$, так как $\varphi_0 \neq 0$. Следовательно, при этом положении троса $R_x = 0$.

2) Трос отклоняется на максимальный угол $\varphi = \varphi_0$. В этом случае $\cos\omega t = 1$, откуда следует, что $\omega t = 0$ или $t = 0$, так как $\omega \neq 0$.

С учетом этого согласно выражению (8)

$$R_x = -M_2 l\,\varphi_0\,\omega^2\cos\varphi_0. \tag{10}$$

Итак, ответ должен быть таким:

$$R_x = 0 \text{ при } \varphi = 0;$$

$$R_x = -M_2 l \varphi_0 \omega^2 \cos\varphi_0 \text{ при } \varphi = \varphi_0.$$

2. Определение закона движения центра масс C_1 тележки A вдоль оси x в предположении, что тележка не заторможена.

В этом случае $R_x = 0$, следовательно, выражение (2) примет вид

$$M\ddot{x}_C = 0,$$

отсюда $\ddot{x}_C = 0$, $\dot{x}_C = \text{const}$.

Так как в начальный момент система неподвижна, то $\dot{x}_{C_0} = 0 = \dot{x}_C$ или $x_C = \text{const}$, т.е. центр масс системы покоится.

Выберем начало оси x в начальном положении центра масс C_1 тележки.

Найдем уравнение движения центра масс системы

$$x_C = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2},$$

где $x_1 = x_1$; $x_2 = x_1 + l\sin\varphi$; $M_1 + M_2 = M$.

Тогда

$$x_C = \frac{(M_1 + M_2)x_1 + M_2 l \sin\varphi}{M_1 + M_2},$$

или

$$x_C = x_1 + \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\sin\varphi. \tag{11}$$

Продифференцировав уравнение (11), получим выражение для скорости движения центра масс по оси x:

$$\dot{x}_C = \dot{x}_1 + \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}. \tag{12}$$

Зная, что $x_C = \text{const}$, а $\dot{x}_{C_0} = 0$, уравнение движения точки C_{1x_1} можно найти двумя способами.

Первый способ. Найдем x_{C_0}, т.е. координату центра масс в начальный момент:

$$x_{C_0} = \frac{M_1 x_{01} + M_2 x_{02}}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 l \sin\varphi_0}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 l \sin\varphi_0}{M_1 + M_2}. \qquad (13)$$

Координату центра масс системы, когда трос составляет с вертикалью некоторый угол φ, определим по формуле (11). Приравняв выражения (13) и (11), получим

$$\frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\sin\varphi_0 = x_1 + \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\sin\varphi.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi). \qquad (14)$$

Для малых углов отклонения $\sin\varphi \approx \varphi$, $\sin\varphi_0 = \varphi_0$. Тогда

$$x_1 = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}(\varphi_0 - \varphi_0 \cos\omega t) = \frac{M_2 l \varphi_0}{M_1 + M_2}(1 - \cos\omega t). \qquad (15)$$

Второй способ. Так как $\dot{x}_C = 0$, то

$$\dot{x}_1 + \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = 0,$$

а с учетом малости углов отклонения, когда $\cos\varphi = 1$, выражение для $\dot{x}_1$ примет вид

$$\dot{x}_1 = -\frac{M_2 l}{M_1 + M_2}\sin\dot{\varphi}$$

или с учетом выражения (6)

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{M_2 l \varphi_0 \omega}{M_1 + M_2}\sin\omega t. \qquad (16)$$

Разделим переменные и проинтегрируем выражение (16):

$$\int_0^{x_1} dx_1 = \frac{M_2 l \varphi_0 \omega}{M_1 + M_2}\int_0^t \sin\omega t \, dt$$

и получим

$$x_1 = \frac{M_2 l \varphi_0 \omega}{M_1 + M_2} \cdot \frac{1}{\omega}(-\cos\omega t)\Big|_0^t = \frac{M_2 l \varphi_0}{M_1 + M_2}(1 - \cos\omega t).$$

Ответ: 1) $R_x = -M_2 l \varphi_0 \omega^2(\cos\varphi\cos\omega t + \varphi_0 \sin\varphi\sin^2\omega t)$, $R_x = 0$ при $\varphi = 0$, $R_x = -M_2 l \varphi_0 \omega^2 \cos\varphi_0$ при $\varphi = \varphi_0$;

2) точка C_1 совершает колебания с амплитудой $\dfrac{M_2}{M_1 + M_2} l\varphi_0$ и круговой частотой ω по закону $x_1 = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} l\varphi_0(1 - \cos\omega t)$.

Задача 35.16

На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, массы $M_1 = 50$ кг, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек массы $M_2 = 70$ кг для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 м. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Решение

На данную механическую систему действуют внешние силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и $M_3\bar{g}$, выталкивающая сила $\bar{F}_A$ воды (см. рисунок). Запишем теорему о движении центра масс в векторной форме и в проекции на ось x:

$$M\bar{a}_C = M_1\bar{g} + M_2\bar{g} + M_3\bar{g} + \bar{F}_A,$$

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0.$$

Тогда

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0,$$

$$\dot{x}_C = C_1 = \text{const}.$$

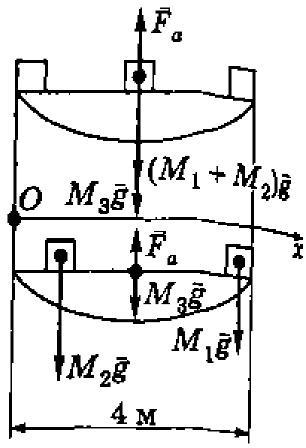
В начальный момент система покоилась, поэтому

$$\dot{x}_{0C} = 0, \; C_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0 \Rightarrow x_C = \text{const}.$$

Запишем координату центра масс системы для первого и второго положений:



1) $x_{C_1} = 2$ м (оба человека сидят на средней скамейке лодки);

2) $x_{C_2} = \dfrac{4M_1 + (2-x)M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$.

Так как $x_{C_1} = x_{C_2}$, получим

$$2 = \frac{4M_1 + (2-x)M_2 + 2M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$$

или

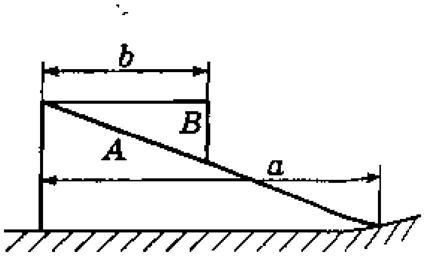
$$2(M_1 + M_2 + M_3) = 4M_1 + 2M_2 - M_2 x + 2M_3.$$

Откуда

$$x = \frac{4M_1 + 2M_2 - 2M_1 - 2M_2 + 2M_3 - 2M_3}{M_2} = \frac{2M_1}{M_2} = \frac{100}{70} = 1{,}43 \text{ (м)}.$$

Ответ: влево на корму лодки на расстояние 1,43 м.

Задача 35.17



На однородную призму A, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, масса призмы A втрое больше массы призмы B. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l, на которую передвинется призма A, когда призма B, спускаясь по A, дойдет до горизонтальной плоскости.

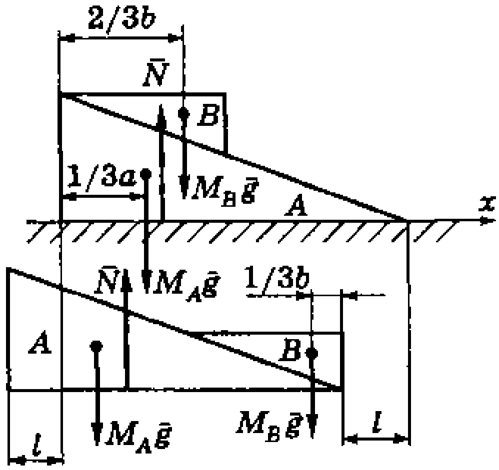
Решение

На механическую систему действуют силы тяжести $M_A\bar{g}$, $M_B\bar{g}$ и реакция $\bar{N}$ опоры (см. рисунок). Аналогично решению задачи 35.16 получим, что $x_C = \text{const}$.

Запишем координату x центра масс механической системы для двух положений призм. Для начального положения

$$x_{C_1} = \frac{M_A \cdot \frac{1}{3}a + M_B \cdot \frac{2}{3}b}{M_A + M_B}$$

или, так как $M_A = 3M_B$,



$$x_{C_1} = \frac{3M_B \cdot \frac{1}{3}a + M_B \cdot \frac{2}{3}b}{4M_B} = \frac{3a+2b}{12}.$$

Для конечного положения, когда призма B дойдет до горизонтальной плоскости,

$$x_{C_2} = \frac{M_A\left(\frac{1}{3}a - l\right) + M_B\left(a - l - \frac{1}{3}b\right)}{M_A + M_B} =$$

$$= \frac{3M_B\left(\frac{1}{3}a - l\right) + M_B\left(a - l\frac{1}{3}b\right)}{4M_B} = \frac{6a - b - 12l}{12}.$$

Так как $x_C = \text{const}$, то $x_{C_1} = x_{C_2}$, т.е.

$$\frac{3a+2b}{12} = \frac{6a-b-12l}{12}.$$

Откуда

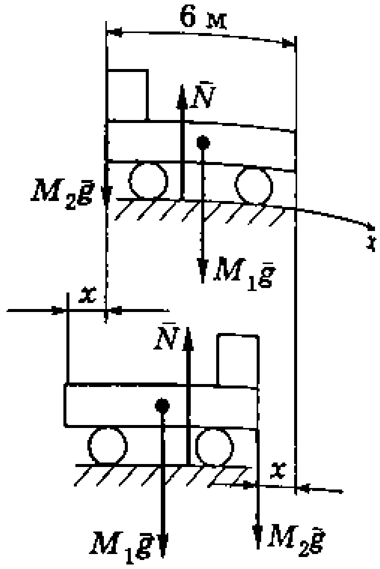
$$l = \frac{a-b}{4}.$$

Ответ: $l = \dfrac{a-b}{4}$.

Задача 35.18

По горизонтальной товарной платформе длины 6 м и массы 2700 кг, находившейся в начальный момент в покое, двое рабочих перекатывают тяжелую отливку из левого конца платформы в правый. В какую сторону и на сколько переместится при этом платформа, если общая масса груза и рабочих равна 1800 кг? Силами сопротивления движению платформы пренебречь.

Решение



Покажем на рисунке внешние силы, действующие на систему: силу тяжести платформы $M_1\bar{g}$, силу тяжести груза с рабочими $M_2\bar{g}$, реакцию $\overline{N}$ опорной поверхности.

Запишем теорему о движении центра масс системы в векторной форме:

$$M\bar{a}_C = (M_1 + M_2)\bar{g} + \overline{N}$$

и в проекции на ось x:

$$M\ddot{x}_C = 0$$

(см. решение задачи 35.16), $x_C = \text{const}$.

Определим координату x_C для начального положения, когда платформа находится в покое:

$$x_{C_1} = \frac{3M_1 + 0\cdot M_2}{M_1 + M_2} = \frac{3M_1}{M_1 + M_2}.$$

Для конечного положения, когда рабочие перекатят отливку на правый конец платформы,

$$x_{C_2} = \frac{(3-x)M_1 + (6-x)M_2}{M_1 + M_2}.$$

Так как $x_{C_1} = x_{C_2}$, то

$$\frac{3M_1}{M_1 + M_2} = \frac{(3-x)M_1 + (6-x)M_2}{M_1 + M_2}$$

или

$$3M_1 = 3M_1 - M_1x + 6M_2 - M_2x.$$

Откуда

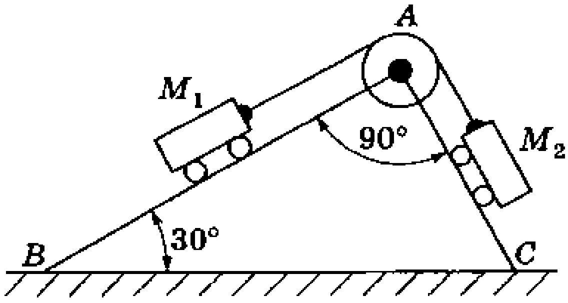
$$x = \frac{6M_2}{M_1 + M_2} = \frac{6\cdot 1800}{4500} = 2{,}4 \text{ (м)}.$$

Платформа переместится влево.

Ответ: влево на 2,4 м.

Задача 35.19

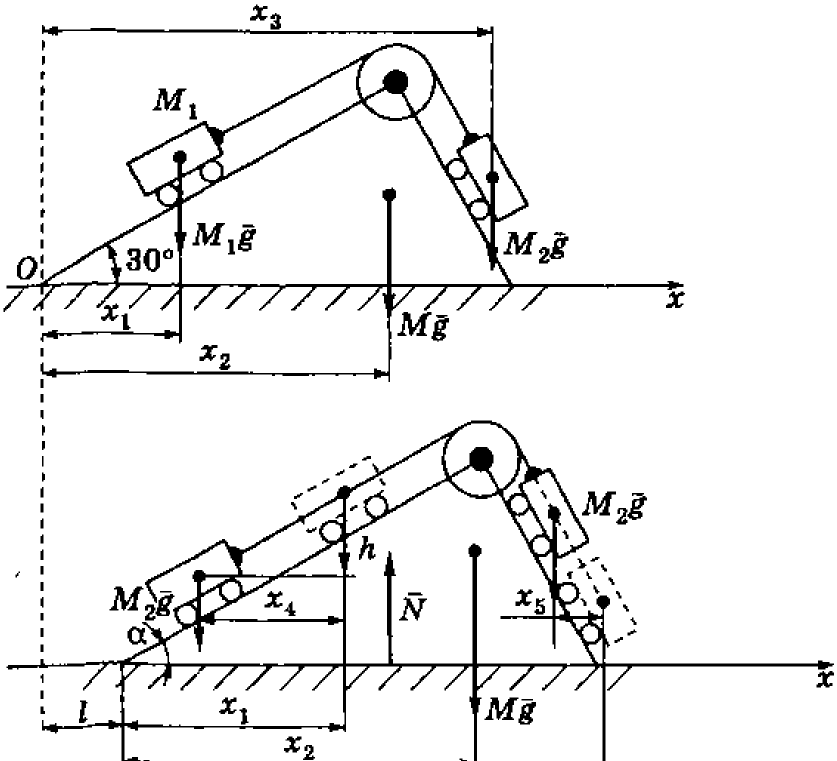
Два груза M_1 и M_2, соответственно массы M_1 и M_2, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A, скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием BC на гладкую горизонтальную плоскость.



Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза M_1 на высоту $h = 10$ см. Масса клина $M = 4M_1 = 16M_2$; массой нити и блока пренебречь.

Решение

На данную механическую систему (см. рисунок) действуют силы тяжести $M\bar{g}$, $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, реакция $\bar{N}$ опорной поверхности. Рассуждая так же, как в задаче 35.16, получим $x_C = \text{const}$, т.е. $x_{C_1} = x_{C_2}$.



Запишем координату центра масс системы

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M + M_1 + M_2}.$$

Тогда координата центра масс x_{C_1} для начального положения системы

$$x_{C_1} = \frac{\frac{1}{4}Mx_1 + Mx_2 + \frac{1}{16}Mx_3}{\frac{1}{4}M + \frac{1}{16}M + M} = \frac{4x_1 + 16x_2 + x_3}{4+1+16} = \frac{4x_1 + 16x_2 + x_3}{21}.$$

Координата центра масс x_{C_2} в конечном положении, когда груз M_2 опустился на 10 см:

$$x_{C_2} = \frac{\frac{M}{4}(l + x_1 - x_4) + M(l + x_2) + \frac{M}{16}(l + x_3 - x_5)}{\frac{1}{4}M + \frac{1}{16}M + M} =$$

$$= \frac{4l + 4x_1 - 4x_4 + 16l + 16x_2 + l + x_3 - x_5}{21} = \frac{21l + 4x_1 + 16x_2 + x_3 - 4\frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} - h}{21},$$

где $x_4 = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_5 = \frac{h}{\sin\alpha}\cos(90° - \alpha) = h$.

Поскольку $x_{C_1} = x_{C_2}$, то

$$4x_1 + 16x_2 + x_3 = 21l + 4x_1 + 16x_2 + x_3 - 10\left(\frac{4\sqrt{3}}{1} + 1\right)$$

или

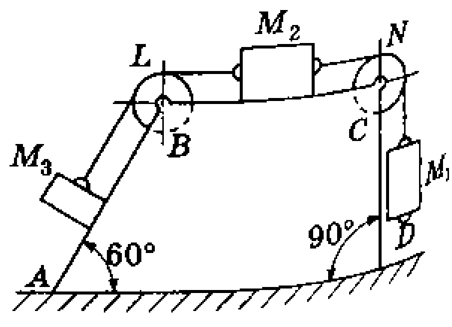
$$21l = 79{,}2 \Rightarrow l = 3{,}77 \text{ (см)}.$$

Клин переместится вправо.

Ответ: клин переместится вправо на 3,77 см.

Задача 35.20

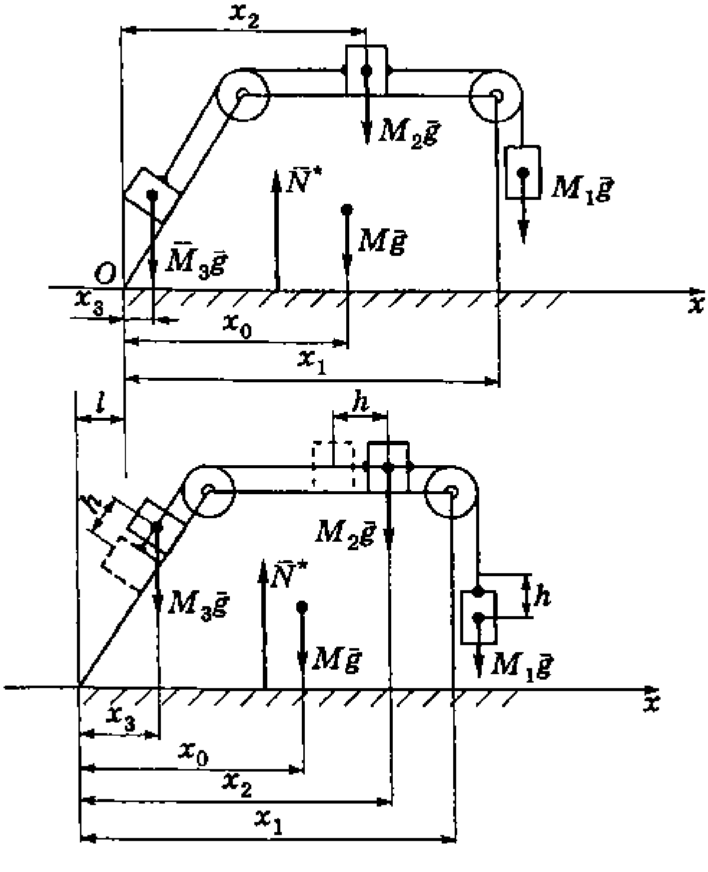
Три груза массы $M_1 = 20$ кг, $M_2 = 15$ кг и $M_3 = 10$ кг соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки L и N. При опускании груза M_1 вниз груз M_2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ массы $M = 100$ кг вправо, а груз M_3 поднимается по боковой



грани AB вверх. Пренебрегая трением между усеченной пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение усеченной пирамиды $ABCD$ относительно пола, если груз M_1 опустится вниз на 1 м. Массой нити пренебречь.

Решение

На механическую систему, состоящую из пирамиды массы M, трех грузов массы M_1, M_2 и M_3, действуют внешние силы (см. рисунок): силы тяжести $M\bar{g}$, $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и $M_3\bar{g}$, реакция $\bar{N}^*$ гладкой горизонтальной поверхности.



Рассуждая так же, как в задаче 35.16, получим $x_C = \text{const}$, т.е. $x_{C_1} = x_{C_2}$.

Запишем координату центра масс соответственно для начального и конечного положения системы:

$$x_{C_1} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + Mx_0}{M_1 + M_2 + M_3 + M},$$

$$x_{C_2} = \frac{M_1(x_1 - l) + M_2(x_2 + h - l) + M_3(x_3 + h\cos 60° - l) + M(x_0 - l)}{M_1 + M_2 + M_3 + M}.$$

Поскольку $x_{C_1} = x_{C_2}$, то

$$M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + Mx_0 =$$

$$= M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3 + Mx_0 - l(M_1 + M_2 + M_3 + M) +$$

$$+ h(M_2 + M_3\cos 60°)$$

или

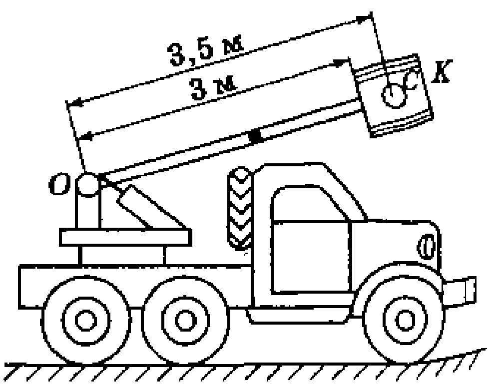
$$h(M_2 + M_3\cos 60°) = l(M_1 + M_2 + M_3 + M).$$

Откуда

$$l = \frac{h(M_2 + M_3\cos 60°)}{M_1 + M_2 + M_3 + M} = \frac{1\cdot\left(15 + 10\cdot\dfrac{1}{2}\right)}{20 + 15 + 10 + 100} = 0{,}14 \text{ (м)} = 14 \text{ (см)}.$$

Ответ: влево на 14 см.

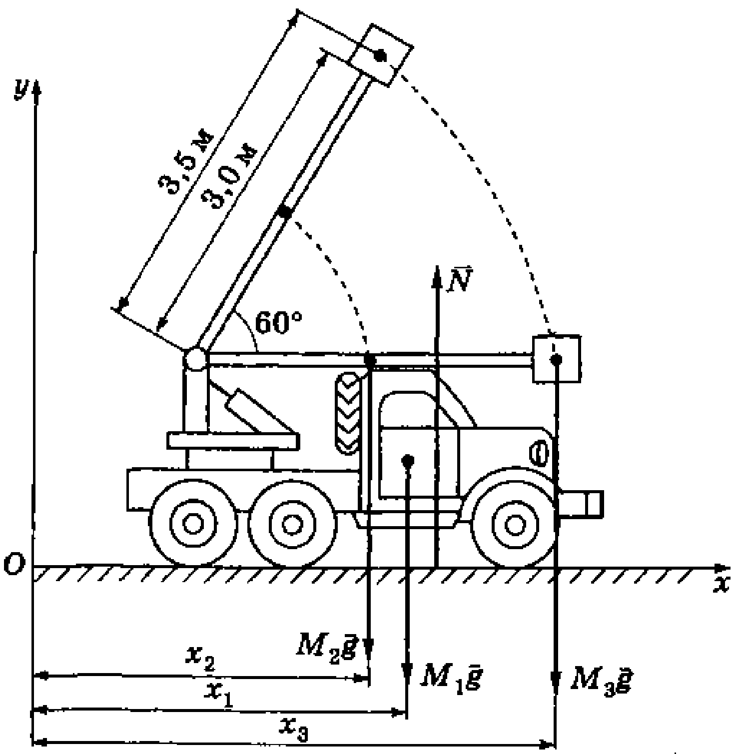
Задача 35.21



Подвижный поворотный кран для ремонта уличной электросети установлен на автомашине массы 1 т. Люлька K крана, укрепленная на стержне L, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. В начальный момент кран, занимавший горизонтальное положение, и автомашина находились в покое. Определить перемещение незаторможенной автомашины, если кран повернулся на 60°. Масса однородного стержня L длины 3 м равна 100 кг, а люльки K — 200 кг. Центр масс C люльки K отстоит от оси O на расстоянии $OC = 3{,}5$ м. Сопротивлением движению пренебречь.

Решение

На механическую систему действуют внешние силы: сила тяжести $M_1\bar{g}$ автомашины, сила тяжести $M_2\bar{g}$ стержня, сила тяжести $M_3\bar{g}$ люльки, суммарная нормальная реакция $\overline{N}$ горизонтальной поверхности.



Запишем теорему о движении центра масс в векторной форме и в проекции на ось x:

$$M\bar{a}_C = M_1\bar{g} + M_2\bar{g} + M_3\bar{g} + \bar{N},$$

$$M\ddot{x}_C = \Sigma F_{kx}^e = 0.$$

Тогда

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = 0,$$

$$\dot{x}_C = C_1 = \text{const}.$$

В начальный момент времени система находилась в покое, поэтому

$$\dot{x}_{O_C} = 0, \quad C_1 = 0,$$

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = 0 \Rightarrow x_C = \text{const}.$$

Определим координату центра масс системы x_C для двух положений: в начальный момент времени, когда кран занимал горизонтальное положение, и в момент времени, когда кран повернулся на 60° и автомашина переместилась вдоль оси x на l:

$$x_{C_1} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_1 + M_2 + M_3},$$

$$x_{C_2} = \frac{M_1(x_1 + \Delta x_1) + M_2(x_2 + \Delta x_2) + M_3(x_3 + \Delta x_3)}{M_1 + M_2 + M_3}.$$

Так как $x_C = \text{const}$, то $x_{C_1} = x_{C_2}$ или

$$M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 = 0. \tag{1}$$

Запишем $\Delta x_1 = l$ — перемещение незаторможенной машины, тогда

$$\Delta x_2 = l - (1{,}5 - 1{,}5\cos 60°),$$

$$\Delta x_3 = l - (3{,}5 - 3{,}5\cos 60°).$$

Подставим эти значения в равенство (1) и получим

$$M_1 l + M_2[l - 1{,}5(1 - \cos 60°)] + M_3[l - 3{,}5(1 - \cos 60°)] = 0,$$

откуда

$$l = \frac{(1 - \cos 60°)(1{,}5M_2 + 3{,}5M_3)}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{(1 - 0{,}5)(1{,}5 \cdot 100 + 3{,}5 \cdot 200)}{1000 + 100 + 200} =$$

$$= 0{,}327 \text{ (м)} = 32{,}7 \text{ (см)}.$$

Ответ: направо на 32,7 см.

36. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы. Приложение к сплошным средам

Методические указания к решению задач

Главный вектор количества движения материальной системы (или просто количество движения системы) представляет собой геометрическую сумму количеств движения всех материальных точек данной системы

$$\overline{K} = \sum m_k \overline{v}_k. \tag{36.1}$$

Главный вектор количества движения системы может быть определен через скорость $\overline{v}_C$ центра масс по формуле

$$\overline{K} = M\overline{v}_C. \tag{36.2}$$

Формулы (36.1) и (36.2) применимы не только к системе материальных точек в виде твердого тела, но и к механической системе, состоящей из твердых тел. В этом случае под m_k следует понимать массу k-го тела, под $\overline{v}_{Ck}$ — скорость центра масс этого тела, под M — сумму масс всех тел. Тогда количество движения k-го тела

$$\overline{K}_k = m_k \overline{v}_{Ck},$$

а *главный вектор количества движения системы*

$$\overline{K} = \sum \overline{K}_k = \sum m_k \overline{v}_{Ck} = M\overline{v}_C. \tag{36.3}$$

Модуль главного вектора количества движения системы можно определить через его проекции на оси декартовых координат:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum K_{kx} = M\dot{x}_C, \\ K_y &= \sum K_{ky} = M\dot{y}_C, \\ K_z &= \sum K_{kz} = M\dot{z}_C, \\ K &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{36.4}$$

Физическая величина, характеризующая действие внешних сил, приложенных к механической системе за некоторый промежуток времени, называется *импульсом главного вектора внешних сил* или *полным импульсом* и определяется по формуле

$$\bar{S}^e = \int_{t_1}^{t_2} \bar{R}^e dt. \qquad (36.5)$$

Векторному равенству (36.5) соответствуют скалярные уравнения

$$\left.\begin{aligned} S_x^e &= \int_{t_1}^{t_2} R_x^e dt, \\ S_y^e &= \int_{t_1}^{t_2} R_y^e dt, \\ S_z^e &= \int_{t_1}^{t_2} R_z^e dt, \end{aligned}\right\} \qquad (36.6)$$

где $R_x^e = \sum F_{kx}^e$, $R_y^e = \sum F_{ky}^e$, $R_z^e = \sum F_{kz}^e$ — проекции главного вектора внешних сил на оси декартовых координат.

Тогда ***модуль импульса главного вектора*** внешних сил

$$S^e = \sqrt{(S_x^e)^2 + (S_y^e)^2 + (S_z^e)^2}. \qquad (36.7)$$

Если все внешние силы не зависят от времени, то $\bar{S}^e$ равен произведению $\bar{R}^e$ на время действия сил.

Теорема об изменении главного вектора количества движения механической системы может быть сформулирована в дифференциальной и интегральной формах.

Дифференциальная форма — производная по времени от главного вектора количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, т.е.

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{R}^e. \qquad (36.8)$$

Интегральная, или *конечная, форма* — изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени геометрически равно импульсу главного вектора внешних сил, действующих на точки системы, за тот же промежуток времени, т.е.

$$\bar{K}_2 - \bar{K}_1 = \bar{S}^e. \qquad (36.9)$$

При решении задач уравнения (36.8) и (36.9) представляют в скалярной форме (в проекциях на оси декартовых координат):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= R_x^e, \\ \frac{dK_y}{dt} &= R_y^e, \\ \frac{dK_z}{dt} &= R_z^e; \end{aligned}\right\} \tag{36.8'}$$

$$\left.\begin{aligned} K_{2x} - K_{1x} &= S_x^e, \\ K_{2y} - K_{1y} &= S_y^e, \\ K_{2z} - K_{1z} &= S_z^e. \end{aligned}\right\} \tag{36.9'}$$

Следствия из теоремы об изменении главного вектора количества движения:

1. Если главный вектор внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, то количество движения механической системы есть величина постоянная.

2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения механической системы на эту ось есть величина постоянная.

Из формул (36.9) и (36.9′) следует:

• если полный импульс внешних сил равен нулю, то главный вектор количества движения системы сохраняется;

• если проекция вектора полного импульса внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция главного вектора количества движения на эту ось остается величиной постоянной (если $R_x^e = 0$ или $S_x^e = 0$, то $K_x = \text{const}$).

Следствия из теоремы об изменении количества движения механической системы выражают закон сохранения количества движения.

Из формул (36.8), (36.9) и (36.8′), (36.9′) следует также, что внутренние силы в механической системе не оказывают прямого влияния на изменение количества движения системы. Однако когда внутренние силы вызывают появление внешних сил в виде сил реакций связей, то тем самым косвенно они влияют на изменение количества движения.

Теорема об изменении количества движения и теорема о движении центра масс механической системы представляют собой, по существу, две формы одной и той же теоремы, что следует из формулы (36.8), если в нее вместо $\overline{K}$ подставить равенство (36.2).

Поэтому в тех случаях, когда изучается движение твердого тела или системы тел, можно пользоваться в равной мере любой из этих форм.

При изучении движения сплошной среды, например жидкости или газа, понятие о центре масс всей системы теряет смысл. В этих случаях для решения задач пользуются теоремой об изменении количества движения, причем предпочтительно в интегральной форме.

Например, при движении жидкости по трубам или криволинейным каналам в формуле (36.9) под $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ понимается количество движения массы жидкости, протекающей через любых два сечения, например на входе и выходе этого канала, за некоторое время. В силу неразрывности потока эти количества движения будут одинаковыми и при равенстве площадей этих сечений скорость жидкости через них будет также одинаковой. Если площадь сечений разная, то масса протекающей жидкости будет одинаковой, но скорости $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ будут разными.

Используя равенства (36.9′), можно определить составляющие реакций стенок канала, действующих на жидкость при движении ее на криволинейном участке канала. По закону равенства действия и противодействия жидкость с такой же силой будет действовать на стенку канала или трубы, что вызовет давление колена трубы на опору или, при отсутствии опоры, колено будет стремиться повернуться в сторону, противоположную движению жидкости на выходе из трубы. Масса жидкости, протекающей через поперечные сечения канала,

$$M = \rho W = \rho \sigma v t, \tag{36.10}$$

где ρ — плотность жидкости; W — объем жидкости, протекающей за время t; σ — площадь поперечного сечения канала (трубы); v — скорость протекания жидкости.

Задачи такого типа можно решать, используя *теорему Эйлера* об изменении количества движения применительно к сплошной среде: главные векторы объемных $\overline{R}_{об}$ и поверхностных сил $\overline{R}_{пов}$ и векторы количества движения масс жидкости, входящей и выходящей через два каких-нибудь сечения в единицу времени, направленные внутрь выделенного объема, образуют замкнутый многоугольник, т.е.

$$\overline{R}_{об} + \overline{R}_{пов} + M\overline{v}_1 - M\overline{v}_2 = 0 \qquad (36.11)$$

или в проекции на оси декартовых координат

$$\left.\begin{aligned} X_{об} + X_{пов} + M(v_{1x} - v_{2x}) = 0, \\ Y_{об} + Y_{пов} + M(v_{1y} - v_{2y}) = 0, \\ Z_{об} + Z_{пов} + M(v_{1z} - v_{2z}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36.12)$$

При этом под объемными (или массовыми) силами понимают силы, действующие на все частицы объема W, находящиеся как внутри этого объема, так и на его поверхности, например силы тяжести частиц.

Поверхностные силы — это силы, действующие только на частицы, лежащие на внешней поверхности объема, например реакции твердых стенок, между которыми движется жидкость.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить механическую систему и показать все внешние силы, действующие на нее, включая и необходимые реакции связей, если система несвободная.

2. Записать теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной [формула (36.8)] или интегральной [формула (36.9)] форме для данной расчетной схемы.

3. Выбрать неподвижную систему координатных осей.

4. Вычислить проекции главного $\overline{R}^e$ вектора внешних сил или проекцию импульса $\overline{S}^e$ главного вектора на оси координат (или на одну какую-либо ось). При этом возможны два случая.

а) Проекция главного вектора $\overline{R}^e$ или импульса $\overline{S}^e$ внешних сил, например, на ось Ox равна нулю ($R_x^e = 0$ или $S_x^e = 0$), тогда $K_x = \text{const}$. В этом случае необходимо определить проекцию количества движения в начальном и конечном положениях системы на ось Ox и приравнять их, т.е. $K_{1x} = K_{2x}$, и из полученного уравнения определить искомую величину (скорость всей системы в целом или какого-либо тела).

б) Проекция главного вектора $\overline{R}^e$ или импульса $\overline{S}^e$ внешних сил не равна нулю. Тогда необходимо записать теорему об изменении количества движения в скалярном виде — формулы (36.8′) или (36.9′)

и из полученного уравнения определить проекции всех внешних сил или одной из внешних сил на оси координат или на одну из осей. Количество движения системы и полный импульс внешних сил определить соответственно по формулам (36.4′) и (36.6).

Последовательность решения задач с помощью теоремы Эйлера:

1. Изобразить на рисунке выделенный объем сплошной среды и показать объемные и поверхностные силы.

2. Показать на рисунке векторы секундных количеств движения жидкости, протекающей через оба сечения, ограничивающие рассматриваемый объем жидкости (газа), направив их внутрь этого объема.

3. Выбрать систему осей координат.

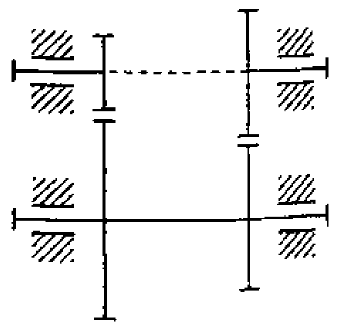
4. Записать теорему Эйлера в проекциях на оси декартовых координат [формулы (36.12)].

5. Определить из полученных уравнений (уравнения) искомую величину (как правило, реакцию стенок канала) в общем виде, затем при необходимости подставить числовые данные и рассчитать модуль этой силы.

Задачи и решения

Задача 36.1

Определить главный вектор количества движения работающего редуктора скоростей, изображенного на рисунке, если центры тяжести каждого из четырех вращающихся зубчатых колес лежат на осях вращения.

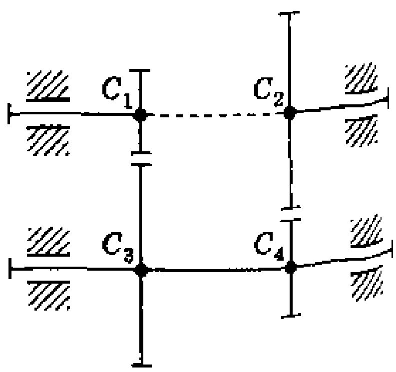


Решение

Количество движения системы

$$\overline{K} = \sum_{k=1}^{4} \overline{K}_k = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3 + \overline{K}_4,$$

где $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_4$ — количество движения колес, входящих в систему.



Так как центры масс колес C_1, C_2, C_3 и C_4 (см. рисунок) неподвижны, то количество движения каждого из них равно нулю, а значит, и количество движения системы равно нулю.

Ответ: главный вектор количества движения равен нулю.

Задача 36.2

Определить сумму импульсов внешних сил, приложенных к редуктору, рассмотренному в предыдущей задаче, за произвольный конечный промежуток времени.

Решение

Сумма импульсов внешних сил равна нулю, так как скорости центров масс в начальном и конечном положении колес равны нулю:

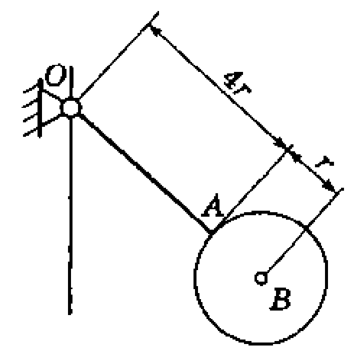
$$S_{kx} = m_k(v_{kx} - v_{0x}) = 0,$$

$$S_{ky} = m_k(v_{ky} - v_{0y}) = 0.$$

Ответ: сумма импульсов внешних сил равна нулю.

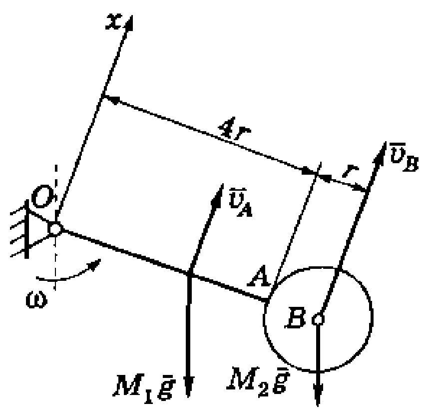
Задача 36.3

Определить главный вектор количеств движения маятника, состоящего из однородного стержня OA массы M_1, длины $4r$ и однородного диска B массы M_2, радиуса r, если угловая скорость маятника в данный момент равна ω.



Решение

Скорости центров масс стержня и диска равны соответственно $v_A = \omega \cdot 2r$, $v_B = \omega \cdot 5r$ (направления скоростей показаны на рисунке).



Направим ось x перпендикулярно стержню, тогда

$$K = K_x = M_1 v_A + M_2 v_B$$

(так как скорости v_A и v_B направлены одинаково).

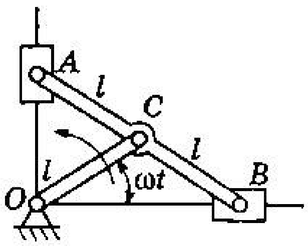
Подставим выражения v_A и v_B в это равенство и получим:

$$K = M_1\omega \cdot 2r + M_2\omega \cdot 5r = \omega r(2M_1 + 5M_2).$$

Вектор $\bar{K}$ направлен перпендикулярно стержню OA.

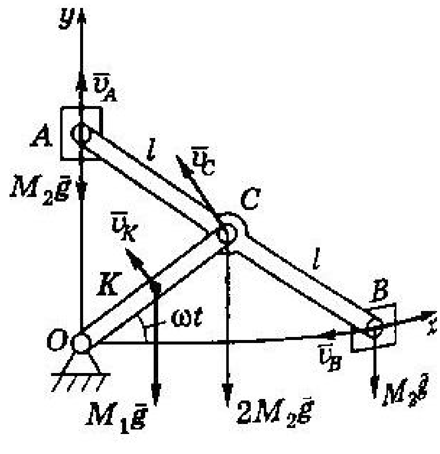
О т в е т: главный вектор количества движения направлен перпендикулярно стержню OA и по модулю равен $(2M_1 + 5M_2)r\omega$.

Задача 36.4



Определить модуль и направление главного вектора количества движения механизма эллипсографа, если масса кривошипа равна M_1, масса линейки AB эллипсографа равна $2M_1$, масса каждой из муфт A и B равна M_2; даны размеры $OC = AC = CB = l$. Центры масс кривошипа и линейки расположены в их серединах. Кривошип вращается с угловой скоростью ω.

Р е ш е н и е



Количество движения системы

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \qquad (1)$$

где $K_x = \sum m_k v_{kx}$; $K_y = \sum m_k v_{ky}$.

Определим координаты центров масс тел, входящих в систему, и найдем проекции скоростей этих точек на оси x и y (см. рисунок). Из рассмотрения равнобедренных треугольников OAC и OCB следует, что

$$x_K = \frac{l}{2} \cdot \cos\omega t, \quad \dot{x}_K = v_{Kx} = -\frac{l\omega}{2}\sin\omega t;$$

$$y_K = \frac{l}{2} \cdot \sin\omega t, \quad \dot{y}_K = v_{Ky} = \frac{l\omega}{2}\cos\omega t;$$

$$x_C = l\cos\omega t, \quad \dot{x}_C = v_{Cx} = -l\omega\sin\omega t;$$

$$y_C = l\sin\omega t, \quad \dot y_C = v_{Cy} = l\omega\cos\omega t;$$

$$x_A = 0, \quad v_{Ax} = 0;$$

$$y_A = 2l\sin\omega t, \quad \dot y_A = v_{Ay} = 2l\omega\cos\omega t;$$

$$x_B = 2l\cos\omega t, \quad \dot x_B = v_{Bx} = -2l\omega\sin\omega t;$$

$$y_B = 0, \quad \dot y_B = 0.$$

С учетом полученных выражений скоростей запишем

$$K_x = M_1\left(-\frac{l\omega}{2}\sin\omega t\right) + 2M_1(-l\omega\sin\omega t) + M_2(-2l\omega\sin\omega t) =$$

$$= -\frac{l\omega}{2}\sin\omega t(M_1 + 4M_1 + 4M_2) = \frac{(5M_1 + 4M_2)l\omega\sin\omega t}{2},$$

$$K_y = M_1\frac{l\omega}{2}\cos\omega t + 2M_1 l\omega\cos\omega t + M_2\cdot 2l\omega\cos\omega t =$$

$$= \frac{l\omega}{2}\cos\omega t(M_1 + 4M_1 + 4M_2) = \frac{(5M_1 + 4M_2)l\omega\cos\omega t}{2}.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$K = \sqrt{\left[-\frac{(5M_1 + 4M_2)l\omega\sin\omega t}{2}\right]^2 + \left[\frac{(5M_1 + 4M_2)l\omega\cos\omega t}{2}\right]^2} =$$

$$= \left(\frac{5M_1 + 4M_2}{2}\right) l\omega\sqrt{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t} = \frac{\omega l}{2}(5M_1 + 4M_2).$$

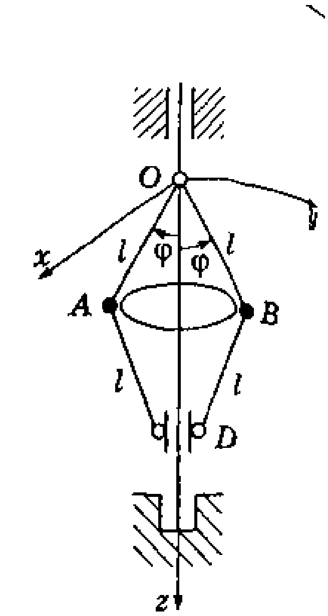
Направление главного вектора перпендикулярно кривошипу OC.

Примечание. Можно было также воспользоваться формулами (36.3) и (26.4).

Ответ: модуль главного вектора равен $K = \dfrac{\omega l}{2}(5M_1 + 4M_2)$; направление главного вектора перпендикулярно кривошипу.

Задача 36.5

Определить главный вектор количества движения центробежного регулятора, ускоренно вращающегося вокруг вертикальной оси. При этом углы φ изменяются по закону $\varphi = \varphi(t)$ и верхние стержни, поворачиваясь, поднимают шары A и B. Длины стержней: $OA = OB = AD = BD = l$. Центр масс муфты D массы M_2 лежит на оси z.



Шары A и B считать точечными массами массы M_1 каждый. Массой стержней пренебречь.

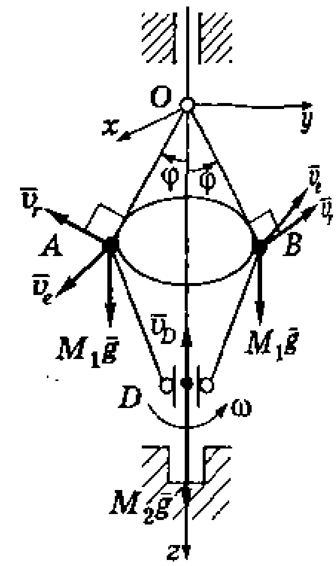
Решение

Количество движения системы

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}.$$

Шары совершают сложное движение:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad v_r = \dot{\varphi} l, \quad v_e = \omega l \sin\varphi.$$



Вектор $\bar{v}_r$ направлен перпендикулярно OA (OB), вектор $\bar{v}_e$ — по касательной к траектории переносного движения (см. рисунок) ($v_e \| Ox$).

Скорость точки D найдем, взяв производную от ее координаты z:

$$z_D = 2l\cos\varphi,$$

тогда

$$\dot{z}_D = v_D = -2l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Проекции количеств движения на оси x, y и z равны соответственно:

$$K_x = M_1 v_{e_A} - M_1 v_{e_B} = 0, \quad v_{e_A} = v_{e_B};$$

$$K_y = M_1 v_{r_B}\cos\varphi - M_1 v_{r_A}\cos\varphi = 0, \text{ так как } v_{r_B} = v_{r_A};$$

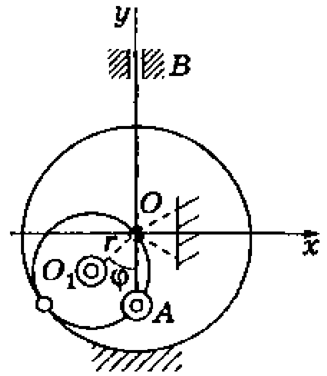
$$K_z = -M_1 v_{r_A}\sin\varphi - M_1 v_{r_B}\sin\varphi - M_2 v_D = -(2M_1\dot{\varphi} l\sin\varphi + M_2 2l\dot{\varphi}\sin\varphi) =$$

$$= -2(M_1 + M_2) l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

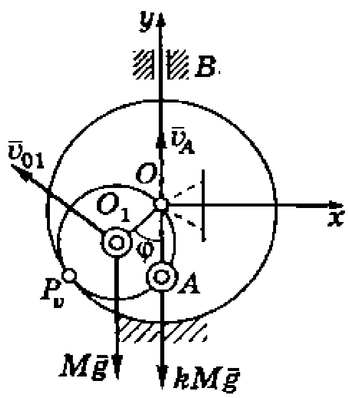
О т в е т: $K_x = K_y = 0$, $K_z = -2(M_1 + M_2)l\dot{\varphi}\sin\varphi$, $K = |K_z|$, где K — главный вектор количества движения; плоскость yz совпадает с плоскостью расположения стержней регулятора.

Задача 36.6

В механизме, изображенном на рисунке, движущееся колесо радиуса r имеет массу M, причем центр масс колеса находится в точке O_1; центр масс прямолинейного стержня AB массы kM находится в его середине. Кривошип OO_1 вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω. Определить главный вектор количества движения системы, пренебрегая массой кривошипа.



Р е ш е н и е



Количество движения системы

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}\,.$$

Стержень AB совершает поступательное движение, а колесо — плоскопараллельное. Скорость точки O_1 $v_{O_1} = r\omega$ (направление $\bar{v}_{O_1}$ см. на рисунке).

Так как точка P_v — МЦС, то

$$\omega_k = \frac{v_{O_1}}{r} = \frac{v_A}{AP_v},$$

где $AP_v = 2r\sin\varphi$; $v_A = \dfrac{v_{O_1} \cdot AP_v}{r} = \dfrac{r\omega \cdot 2r\sin\varphi}{r} = 2r\omega\sin\varphi$.

Тогда

$$K_x = Mv_{O_1}\cos\varphi = -Mr\omega\cos\omega t,$$

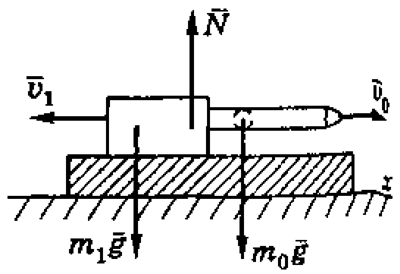
$$K_y = Mv_{O_1}\sin\varphi + kMv_A = Mr\omega\sin\omega t + kM \cdot 2r\omega\sin\varphi = Mr\omega(1+2k)\sin\omega t.$$

О т в е т: проекции главного вектора количества движения системы на оси координат: 1) на ось Ox: $-Mr\omega\cos\omega t$; 2) на ось Oy: $Mr\omega(1+2k)\sin\omega t$.

Задача 36.7

Масса ствола орудия равна 11 т. Масса снаряда равна 54 кг. Скорость снаряда у дульного среза $v_0 = 900$ м/с. Определить скорость свободного отката ствола орудия в момент вылета снаряда.

Решение



Так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю, то можем записать закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$(m_1 + m_0)v = -m_1 v_1 + m_0 v_0, \quad (1)$$

где v — скорость механической системы в начальный момент времени, $v = 0$.

С учетом того, что $v = 0$, уравнение (1) перепишем в виде

$$0 = -m_1 v_1 + m_0 v_0.$$

Откуда

$$v_1 = \frac{m_0 v_0}{m_1} = \frac{54 \cdot 900}{11000} = 4{,}42 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: скорость отката ствола орудия равна 4,42 м/с и направлена в сторону, противоположную движению снаряда.

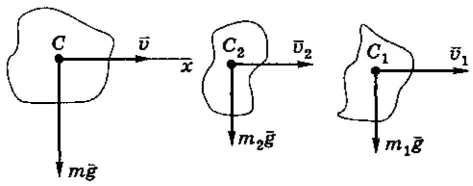
Задача 36.8

Граната массы 12 кг, летевшая со скоростью 15 м/с, разорвалась в воздухе на две части. Скорость осколка массы 8 кг возросла в направлении движения до 25 м/с. Определить скорость второго осколка.

Решение

Направим ось x по направлению скорости, тогда все силы будут перпендикулярны этой оси (см. рисунок). Поэтому проекция главного вектора внешних сил на ось x будет равна нулю. Запишем закон сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$mv = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$



Откуда

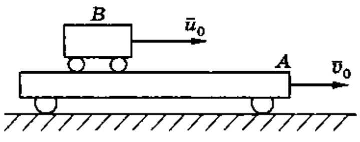
$$v_2 = \frac{mv - m_1 v_1}{m_2} = \frac{12 \cdot 15 - 8 \cdot 25}{4} = -5 \text{ (м/с)}.$$

Знак минус указывает на то, что скорость второго осколка направлена в сторону, противоположную движению первого осколка.

Ответ: 5 м/с в направлении, противоположном движению первого осколка.

Задача 36.9

По горизонтальной платформе A, движущейся по инерции со скоростью v_0, перемещается тележка B с постоянной относительной скоростью $\bar{u}_0$. В некоторый момент времени тележка была заторможена.

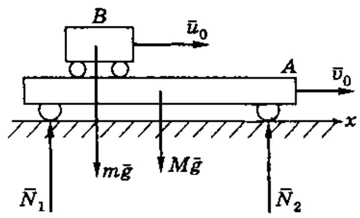


Определить общую скорость v платформы с тележкой после ее остановки, если M — масса платформы, m — масса тележки.

Решение

Тележка B совершает сложное движение (см. рисунок), ее абсолютная скорость

$$\bar{v}_{абс} = \bar{u}_0 + \bar{v}_0.$$



Так как проекция главного вектора внешних сил на ось x равна нулю (тележка движется по инерции), можно записать закон сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$m(u_0 + v_0) + Mv_0 = (m + M)v.$$

Откуда

$$v=\frac{m(u_0+v_0)+Mv_0}{m+M}=\frac{mu_0+(m+M)v_0}{m+M}=v_0+\frac{m}{m+M}u_0.$$

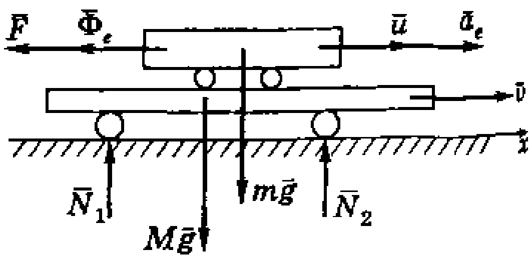
Ответ: $v=v_0+\dfrac{m}{M+m}u_0.$

Задача 36.10

Сохранив условие предыдущей задачи, определить путь s, который пройдет тележка B по платформе A с момента начала торможения до полной остановки, и время торможения τ, если считать, что при торможении возникает постоянная по величине сила сопротивления $\overline{F}$.

Указание. В дифференциальном уравнении движения тележки использовать соотношение $Mv+m(u+v)=\text{const}$, где u и v — переменные скорости.

Решение



После того, как начнется торможение тележки, ее относительная скорость u за время торможения τ изменится от u_0 до нуля.

Скорость v движения платформы будет возрастать. При этом в соответствии с указанием в условии задачи количество движения системы в проекции на ось x:

$$Mv+m(u+v)=\text{const}. \tag{1}$$

Так как скорость платформы меняется, то платформа будет двигаться с ускорением, которое для тележки является переносным $\overline{a}_e$ ускорением, и, следовательно, будет действовать переносная сила инерции $\overline{\Phi}_e$ тележки. Поэтому для тележки следует составить дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на ось x:

$$m\frac{du}{dt}=-F-\Phi_e, \tag{2}$$

где $|\overline{\Phi}_e|=ma_e=m\dfrac{dv}{dt}.$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$M\frac{dv}{dt}+m\frac{du}{dt}+m\frac{dv}{dt}=0.$$

Откуда

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{m}{M+m}\frac{du}{dt}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в уравнение (2), получим

$$m\frac{du}{dt}=-F+\frac{m^2}{M+m}\frac{du}{dt}. \tag{4}$$

После преобразований уравнение (4) примет вид

$$\frac{mM}{M+m}\frac{du}{dt}=-F. \tag{5}$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (5), получим

$$\int_0^{\tau} dt=-\frac{mM}{(m+M)F}\int_{u_0}^{0} du \Rightarrow \tau=\frac{mM}{m+M}\frac{u_0}{F}.$$

Для определения пути s, пройденного тележкой до полной остановки, уравнение (5) запишем в виде

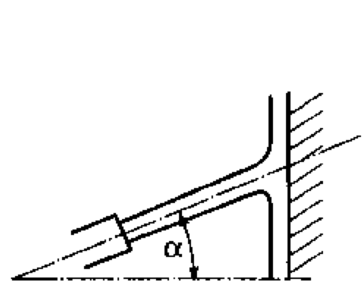
$$\frac{mM}{M+m}\frac{udu}{ds}=-F. \tag{6}$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (6), получим

$$\int_0^{s} ds=-\frac{mM}{(m+M)F}\int_{u_0}^{0} udu \Rightarrow s=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\frac{u_0^2}{F}.$$

Ответ: $s=\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}\frac{u_0^2}{F}$; $\tau=\frac{mM}{m+M}\frac{u_0}{F}$.

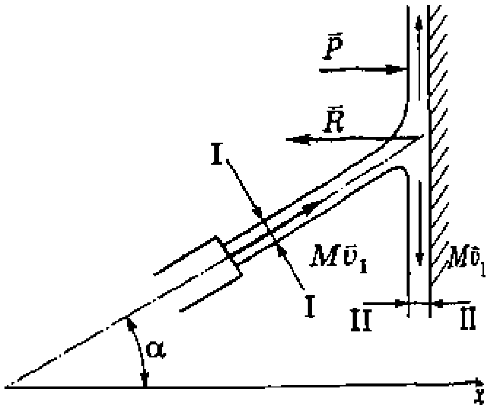
Задача 36.11



Из наконечника пожарного рукава с поперечным сечением 16 см^2 бьет струя воды под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью 8 м/с. Определить силу давления струи на вертикальную стену, пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что частицы жидкости после встречи со стеною приобретут скорости, направленные вдоль стены.

Решение

Согласно теореме Эйлера запишем



$$M\overline{v}_1 - M\overline{v}_2 + \overline{R}_{об} + \overline{R}_{пов} = 0, \qquad (1)$$

где $\overline{R}_{об}$ — главный вектор поверхностных сил (сил тяжести); $\overline{R}_{пов}$ — главный вектор поверхностных сил (сил реакций стенки); $M\overline{v}_1$ — количество движения массы воды, втекающей сквозь сечения I–I за единицу времени; $M\overline{v}_2$ — количество движения массы воды, вытекающей сквозь сечения II–II за единицу времени. Запишем векторное равенство (1) в проекции на ось x (см. рисунок):

$$Mv_1 \cos 30° + 0 + 0 + R_{пов\,x} = 0.$$

Откуда

$$-R_{пов\,x} = Mv_1 \cos 30° = P, \qquad (2)$$

где P — сила давления струи на стену.

Масса струи воды

$$M = \sigma \frac{v_1 \gamma}{g},$$

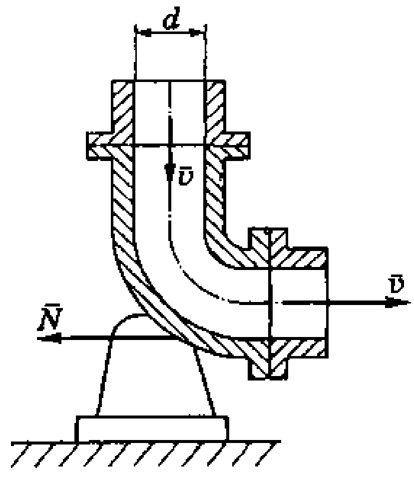
где $\gamma = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность воды; σ — площадь поперечного сечения пожарного рукава.

Тогда согласно формуле (2)

$$P = \sigma \frac{\gamma}{g} v_1^2 \cos 30° = 16 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1 \cdot 10^3}{9{,}8} \cdot 64 \cdot 0{,}866 = 88{,}8 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 88,8 Н.

Задача 36.12



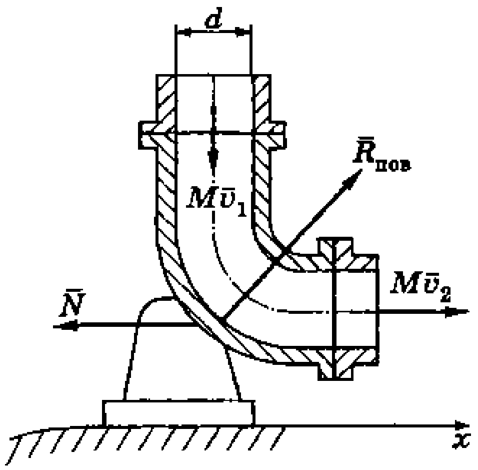
Определить горизонтальную составляющую N возникающей при движении воды силы давления на опору колена трубы диаметром $d = 300$ мм, по которой течет вода со скоростью $v = 2$ м/с.

Решение

Запишем теорему Эйлера в векторном виде:

$$M\bar v_1 - M\bar v_2 + \bar R_{об} + \bar R_{пов} = 0, \qquad (1)$$

где $\bar R_{об}$ — главный вектор объемных сил; $\bar R_{пов}$ — главный вектор поверхностных сил.



В проекции на ось x (см. рисунок), получим

$$-Mv_2 + 0 + 0 + R_{пов\,x} = 0.$$

Откуда

$$R_{пов\,x} = Mv_2 = \frac{\pi d^2}{4}\,\frac{v\gamma}{g}\,v = \frac{\pi d^2}{4g}\gamma v^2,$$

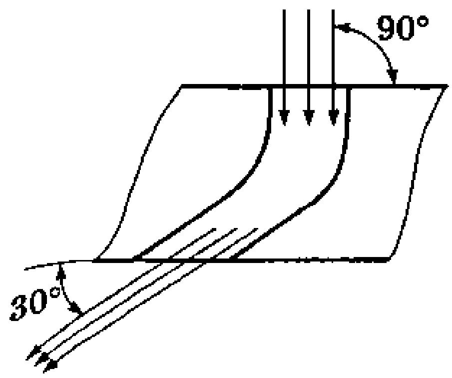
где $\gamma = 1\cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.

Так как $|R_{пов\,x}| = N$, то

$$N = \frac{3{,}14\cdot 10^3(300\cdot 10^{-3})^2\cdot 4}{4\cdot 9{,}8} = 284 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $N = 284$ Н.

Задача 36.13

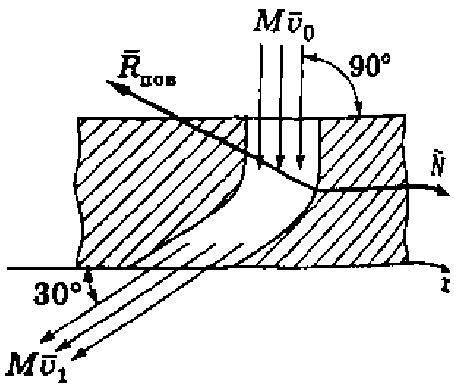


Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметричный относительно вертикальной плоскости, со скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\alpha = 90°$ к горизонту; сечение канала при входе 0,02 м^2; скорость воды у выхода из канала $v_1 = 4$ м/с и направлена под углом $\alpha_1 = 30°$ к горизонту.

Определить модуль горизонтальной составляющей силы, с которой вода действует на стенки канала.

Решение

Запишем теорему Эйлера



$$M\bar{v}_0 - M\bar{v}_1 + \bar{R}_{об} + \bar{R}_{пов} = 0,$$

где $\bar{R}_{об}$ — главный вектор объемных сил; $\bar{R}_{пов}$ — главный вектор поверхностных сил.

В проекции на ось x (см. рисунок), получим

$$-Mv_{1x} - R_{пов\,x} = 0,$$

где $v_{1x} = -v_1 \cos 30°$.

Тогда

$$Mv_1 \cos 30° - R_{пов\,x} = 0.$$

Откуда

$$R_{пов\,x} = Mv_1 \cos 30°. \qquad (1)$$

Масса струи воды

$$M = \sigma \frac{v_0 \gamma}{g},$$

где σ — площадь сечения канала; $\gamma = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.

Тогда согласно формуле (1)

$$R_{пов\,x} = \sigma \frac{\gamma}{g} v_0 v_1 \cos 30° = \frac{0{,}02 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0{,}866}{9{,}8} = 138 \text{ (Н)}.$$

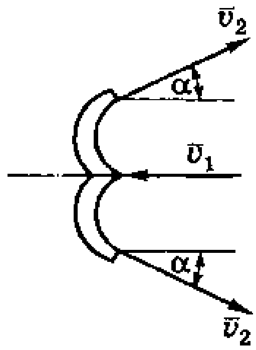
Горизонтальная составляющая давления N воды на стенки канала равна

$$N = R_{пов\,x} = 138 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 138 Н.

Задача 36.14

Определить модуль горизонтальной составляющей силы давления струи воды на неподвижную лопатку турбинного колеса, если объемный расход воды Q, плотность γ, скорость подачи воды на лопатку v_1 горизонтальна, скорость схода воды v_2 образует угол α с горизонтом.



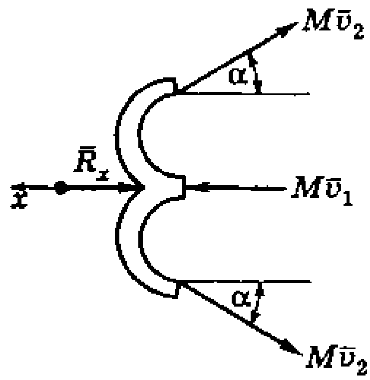
Решение

Запишем теорему Эйлера в векторном виде

$$M\bar{v}_1 - M\bar{v}_2 + \bar{R}_{об} + \bar{R}_{пов} = 0, \qquad (1)$$

где $\bar{R}_{об}$ — главный вектор объемных сил; $\bar{R}_{пов}$ — главный вектор поверхностных сил.

В проекции на ось x (см. рисунок) получим



$$M_{v_{1x}} - M_{v_{2x}} + R_{пов\,x} = 0,$$

где $v_{1x} = -v_1$, $v_{2x} = v_2 \cos\alpha$.

Тогда

$$-Mv_1 - Mv_2 \cos\alpha + R_{пов\,x} = 0.$$

Откуда

$$R_{пов\,x} = Mv_1 + \frac{M}{2} v_2 \cos\alpha. \qquad (2)$$

Масса струи воды $M = \gamma Q$, тогда выражение (2) примет вид

$$R_{пов\,x} = N = \gamma Q v_1 + \gamma Q v_2 \cos\alpha = \gamma Q (v_1 + v_2 \cos\alpha),$$

где N — модуль горизонтальной составляющей силы давления струи воды.

Ответ: $N = \gamma Q (v_1 + v_2 \cos\alpha)$.

Примечание. Задачи 36.11–36.14 можно решить, применив теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме в проекции на ось x, т.е. воспользовавшись формулой (36.9), приведенной в методических указаниях.

37. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Методические указания к решению задач

Различают главный момент количества движения материальной системы относительно центра и оси.

Главным моментом количеств движения или ***кинетическим моментом механической системы относительно некоторого центра*** называется геометрическая сумма моментов количества движения всех материальных точек системы относительно того же центра:

$$\bar{L}_O = \sum \bar{l}_{kO}. \tag{37.1}$$

Кинетическим моментом механической системы относительно некоторой оси называется алгебраическая сумма моментов количества движения всех материальных точек относительно этой оси, например относительно оси z:

$$L_z = \sum l_{kz}. \tag{37.2}$$

Определения моментов количества движения материальной точки относительно центра и оси даны в параграфе 28.

Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z:

$$L_z = I_z \omega, \tag{37.3}$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси z; ω — угловая скорость тела.

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно некоторого центра:

векторная производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого центра O геометрически равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно этого же центра, т.е.

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_k^e) = \overline{M}_O^e. \tag{37.4}$$

Следствие из этой теоремы:

если главный момент внешних сил относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент относительно этого центра остается постоянным, т.е. при $\overline{M}_O^e = 0$, $\overline{L}_O = \text{const}$.

Уравнению (37.4) соответствуют три уравнения в скалярной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^e, \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^e, \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^e, \end{aligned}\right\} \tag{37.5}$$

которые выражают *теорему об изменении кинетического момента системы относительно некоторой оси*:

производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторой оси равна главному моменту внешних сил относительно этой оси.

Следствие из теоремы: если главный момент внешних сил относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается величиной постоянной, например, при $M_z^e = \sum M_z(\overline{F}_k^e) = 0$, $L_z = \text{const}$.

Следствия из теорем выражают закон сохранения кинетического момента.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси под действием внешних сил, главный момент которых относительно этой оси не равен нулю, то с учетом формул (37.3) и (37.5) получаем дифференциальное уравнение вращения тела относительно оси.

Пусть осью вращения является ось z, тогда

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z^e. \tag{37.6}$$

Если $I_z = \text{const}$, то дифференциальное уравнение (37.6) примет вид:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e. \tag{37.7}$$

Так как

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

или

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

то уравнение (37.7) можно записать в виде

$$I_z \varepsilon = M_z^e \tag{37.8}$$

или

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z^e. \tag{37.9}$$

В зависимости от постановки задачи применяют одну из этих форм записи дифференциального уравнения вращения тела. Например, если задано угловое ускорение ε, а нужно определить момент внешних сил, то уравнение следует записать в виде (37.8). При определении закона изменения угловой скорости или закона вращения применяют уравнение соответственно в виде (37.7) или (37.9).

Таким образом, дифференциальное уравнение вращательного движения позволяет решать следующие типы задач:

- при известных законе вращения тела и моменте инерции тела относительно оси его вращения требуется определить момент внешних сил;
- при известных моменте инерции тела и моменте внешних сил требуется определить закон вращения этого тела.

Используя дифференциальное уравнение вращательного движения применительно к физическому маятнику, можно получить формулу для определения периода колебаний маятника:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{Gd}}, \tag{37.10}$$

где d — расстояние от оси подвеса до центра тяжести маятника; I_x — момент инерции маятника относительно оси подвеса; G — вес маятника.

Формула (37.10) позволяет экспериментально определить момент инерции тела, для этого надо знать вес тела, расстояние от оси подвеса до центра тяжести тела и период колебаний (время одного полного колебания). Тогда

$$I_x = \frac{Gd\tau^2}{4\pi^2}. \tag{37.11}$$

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить тело или механическую систему, движение которой исследуется в данной задаче.

2. Показать все внешние силы, действующие на тело (систему), включая и реакции связей.

3. При необходимости изобразить оси декартовых координат, совместив одну из них с осью вращения тела.

4. Определить сумму моментов всех внешних сил относительно оси вращения. При этом возможны два случая.

Главный момент внешних сил относительно оси вращения не равен нулю. В этом случае надо:

- составить дифференциальное уравнение вращательного движения в виде (37.7)–(37.9), решить его и найти искомую величину в общем виде, а затем при необходимости в полученное выражение подставить числовые данные. При определении закона изменения угловой скорости или закона движения тела следует проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, предварительно определив начальные условия движения;
- при решении задач о движении физического маятника можно непосредственно воспользоваться формулами (37.10) и (37.11).

Если главный момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю, то следует:

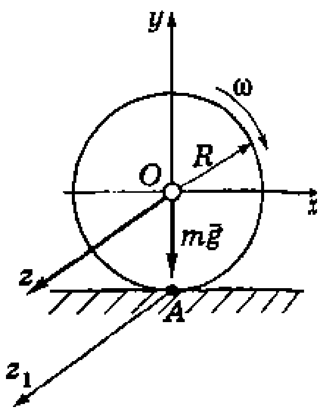
- составить выражения кинетического момента механической системы относительно оси для начального и конечного положений системы и приравнять их. Если в начальный момент система покоилась, то кинетический момент механической системы необходимо приравнять нулю;
- выразить в общем виде искомую величину и подставить в полученное выражение числовые данные.

Задача 37.1

Однородный круглый диск массой $m = 50$ кг и радиуса $R = 30$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая вокруг своей оси $n = 60$ об/мин. Вычислить главный момент количеств движения диска относительно осей: 1) проходящей через центр диска перпендикулярно к плоскости движения; 2) относительно мгновенной оси.

Решение

1) Если ось z проходит через центр O диска (см. рисунок), то главный момент количеств движения



$$L_z = I_z\omega,$$

где $I_z = \dfrac{mR^2}{2}$; $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Тогда

$$L_z = \frac{mR^2}{2}\pi n = \frac{50 \cdot 0{,}3^2 \cdot 60}{60} = 14{,}1 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2/\text{с)}.$$

2) Если ось z_1 проходит через мгновенный центр скоростей, точку A, то

$$L_{z_1} = I_{Az_1}\omega.$$

По теореме Гюйгенса — Штейнера найдем

$$I_{Az_1} = I_z + mR^2.$$

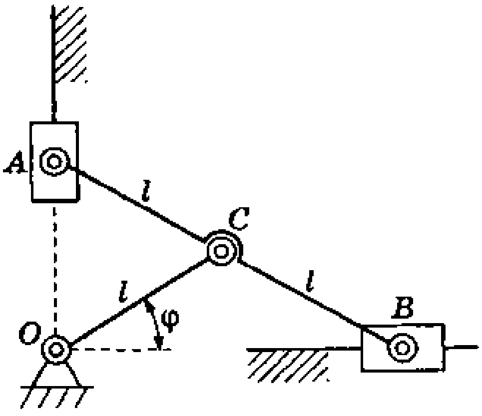
Тогда

$$L_{z_1} = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\frac{\pi n}{30} = \left(\frac{50 \cdot 0{,}3^2}{2} + 50 \cdot 0{,}3^2\right)\frac{3{,}14 \cdot 60}{30} = 42{,}3 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2/\text{с)}.$$

Ответ: 1) 14,1 кг · м²/с; 42,3 кг · м²/с.

Задача 37.2

Вычислить главный момент количеств движения линейки AB эллипсографа в абсолютном движении относительно оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC, а также в относительном движении по отношению к оси, проходящей через центр тяжести C линейки параллельно оси z. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z; масса линейки равна m; $OC = AC = BC = l$ (см. рисунок к задаче 34.5).



Решение

Определим скорость точки C, когда она принадлежит кривошипу:

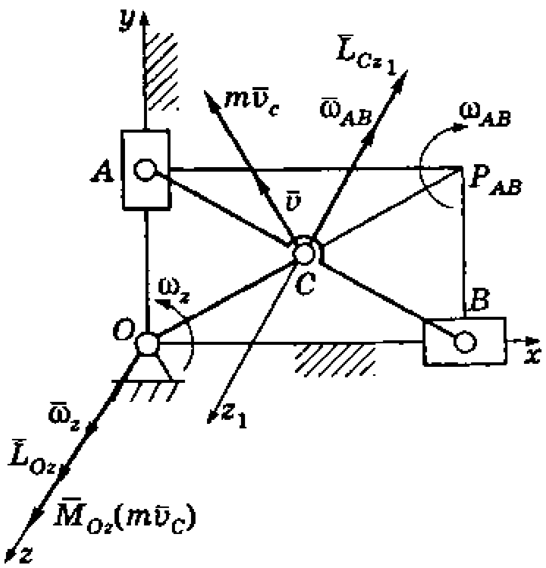
$$v_C = \omega_z \cdot OC$$

и шатуну:

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB}.$$

Так как $OC = CP_{AB}$, то

$$\omega_{AB} = \omega_z.$$



Линейка AB изображенного на рисунке эллипсографа совершает сложное движение: переносное — вращательное вместе с кривошипом OC (вокруг оси Oz) и относительное — вращательное вокруг оси z_1.

Найдем главный момент количеств движения линейки AB в абсолютном движении относительно оси z, проходящей через точку O,

$$L_{Oz} = \bar{L}_{Oz}^{\text{пер}} + \bar{L}_{Cz_1}^{\text{отн}}$$

или

$$\bar{L}_{Oz} = \bar{M}_{Oz}(m\bar{v}_C) + \bar{L}_{Cz_1}.$$

Так как векторы $\bar{L}_{Oz}$, $\bar{M}_{Oz}(m\bar{v}_C)$ и $\bar{L}_{Cz_1}$ параллельны, то

$$L_{Oz} = mv_C \cdot l - I_{Cz_1}\omega_z = ml^2\omega_z - \frac{m(2l)^2}{12}\omega_z = \frac{2}{3}ml^2\omega_z.$$

Поскольку направление кинетического момента системы совпадает с направлением вектора $\bar{\omega}_z$, главный момент $\bar{L}_{Oz}$ имеет положительное значение.

Главный момент количества движения линейки AB в относительном движении относительно оси z_1, проходящей через точку C:

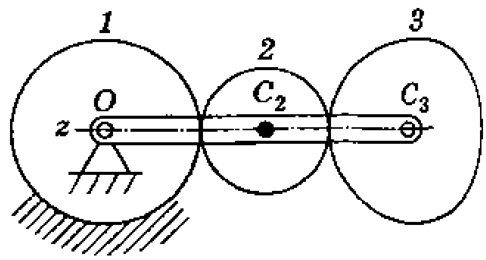
$$L_{Cz_1} = I_{Cz_1}\omega_{AB} = \frac{m(2l)^2}{12}\omega_z = \frac{1}{3}ml^2\omega_z.$$

Так как вектор $\bar{L}_{Cz_1}$ направлен в сторону, противоположную оси z, значение главного момента количества движения принимаем со знаком минус.

Ответ: $L_{Oz} = \frac{2}{3}ml^2\omega_z$; $L_{Cz_1} = -\frac{1}{3}ml^2\omega_z$.

Задача 37.3

Вычислить главный момент количеств движения планетарной передачи относительно неподвижной оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3.



Неподвижное колесо *1* и подвижное колесо *3* — одинакового радиуса r. Масса колеса *3* равна m. Колесо *2* массой m_2 имеет радиус r_2. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z.

Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками.

Решение

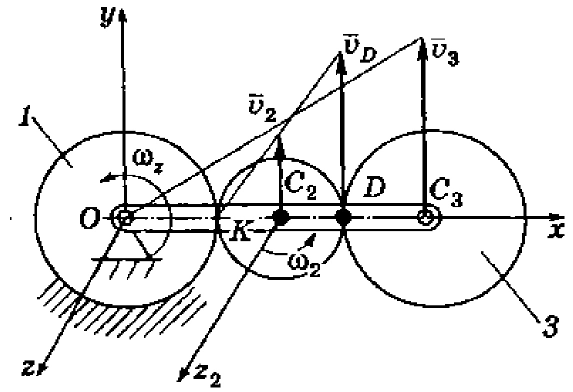
Определим скорость точек C_2, D и C_3 (см. рисунок):

$$v_{C_2} = v_2 = (r + r_2)\omega_z,$$

$$v_D = 2(r + r_2)\omega_z,$$

$$v_{C_3} = v_3 = 2(r + r_2)\omega_z.$$

Так как получили, что $v_3 = v_D$, то колесо 3 совершает круговое поступательное движение и его угловая скорость равна нулю.



Поскольку оси вращения колес планетарной передачи параллельны, то главный момент количеств движения передачи

$$L_{Oz} = L_{2Oz} + L_{3Oz}. \qquad (1)$$

Главный момент количества движения колеса 2, совершающего сложное движение

$$L_{2Oz} = L_{2Oz}^{\text{пер}} + L_{2Oz_2}^{\text{отн}},$$

где $L_{2Oz}^{\text{пер}} = M_{Oz}(m_2\bar{v}_2) = m_2(r + r_2)^2\,\omega_z$;

$$L_{2Oz_2}^{\text{отн}} = I_{C_2z_2}\omega_2 = I_{C_2}\frac{r + r_2}{r_2}\omega_z = \frac{m_2 r_2^2}{2}\,\frac{r + r_2}{r_2}\omega_z = \frac{m_2 r_2(r + r_2)}{2}\omega_z.$$

Тогда

$$L_{2Oz} = m_2(r + r_2)^2\omega_z + \frac{m_2 r_2(r + r_2)}{2}\omega_z = m_2(r + r_2)\omega_z\frac{2r + 3r_2}{2}. \qquad (2)$$

Главный момент количества движения колеса 3, совершающего только поступательное движение,

$$L_{3Oz} = M_{Oz}(m\bar{v}_3) = 4m(r + r_2)^2\omega_z. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1) и найдем значение главного момента количества движения планетарной передачи:

$$L_{Oz} = m_2(r + r_2)\,\omega_z\left(\frac{2r + 3r_2}{2}\right) + 4m(r + r_2)^2\omega_z =$$

$$= \frac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\omega_z.$$

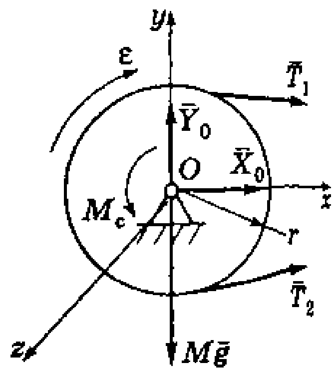
Ответ: $L_{Oz} = \dfrac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\,\omega_z.$

Задача 37.4

Натяжение ведущей и ведомой ветвей ремня, приводящего во вращение шкив радиуса $r = 20$ см, массой $M = 3{,}27$ кг, соответственно равны: $T_1 = 100$ Н, $T_2 = 50$ Н.

Чему должен быть равен момент сил сопротивления для того, чтобы шкив вращался с угловым ускорением $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2? Шкив считать однородным диском.

Решение



Покажем на рисунке активные силы, действующие на шкив: силу тяжести $M\bar{g}$, силы натяжения ремня $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$, силы сопротивления с моментом M_c, реакции $\bar{Y}_O$ и $\bar{X}_O$ связей.

Запишем дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \qquad (1)$$

где $I_z = \dfrac{mr^2}{2}$; $\ddot{\varphi} = \varepsilon$; $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = T_1 r - T_2 r - M_c$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mr^2}{2}\varepsilon = T_1 r - T_2 r - M_c. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдем момент сил сопротивления:

$$M_c = (T_1 - T_2)r - \frac{mr^2}{2}\varepsilon = (100-50)\,0{,}2 - \frac{3{,}21\cdot 0{,}2^2}{2}\cdot 1{,}5 = 9{,}8 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Ответ: 9,8 Н · м.

Задача 37.5

Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик массой $m = 500$ кг; радиус инерции маховика $\rho = 1{,}5$ м. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n = 240$ об/мин; предоставленный самому себе, он остановился через 10 мин. Определить момент трения, считая его постоянным.

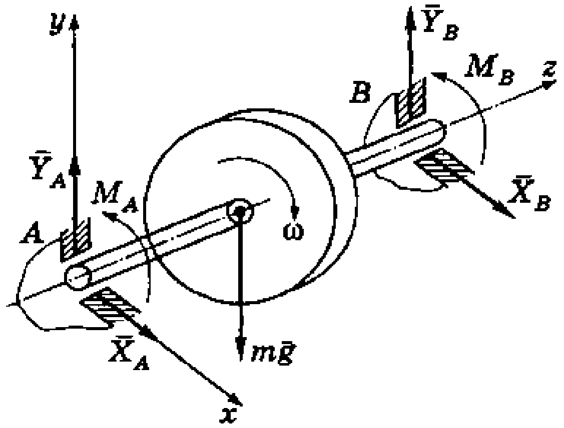
Решение

Покажем на рисунке активные силы, действующие на вал и маховик: силу тяжести $m\bar{g}$, моменты сил трения в цапфах M_A и M_B (суммарный момент трения в обеих цапфах $M_{\text{тр}} = M_A + M_B$), реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ соответственно в опорах A и B.

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

где $I_z = m\rho^2$; $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -M_{\text{тр}}$.



Тогда

$$m\rho^2 \frac{d\omega}{dt} = -M_{\text{тр}}.$$

Разделим переменные $d\omega$ и dt:

$$m\rho^2 d\omega = -M_{\text{тр}} dt$$

и проинтегрируем это равенство:

$$m\rho^2 \int_{\omega_0}^{0} d\omega = -M_{\text{тр}} \int_{0}^{t} dt.$$

Получим

$$-m\rho^2 \omega_0 = -M_{\text{тр}} t,$$

где $\omega_0 = \dfrac{\pi n}{30}$.

Откуда найдем момент трения:

$$M_{\text{тр}} = \frac{m\rho^2\omega_0}{t} = \frac{500 \cdot 1{,}5^2 \cdot 3{,}14 \cdot 240}{600 \cdot 30} = 47{,}1 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Ответ: 47,1 Н · м.

Задача 37.6

Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущий на себе обмотку, питаемую постоянным током.

Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости v на ободе маховика: $M_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным; диаметр маховика D, момент инерции его относительно оси вращения I. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.

Решение

Покажем на рисунке направление вращения маховика под действием приложенных к нему активных сил: силы тяжести $m\bar{g}$, моментов сил сопротивления M_1 и M_2, реакции связей $\bar{Y}_O$ и $\bar{X}_O$ в опоре O.

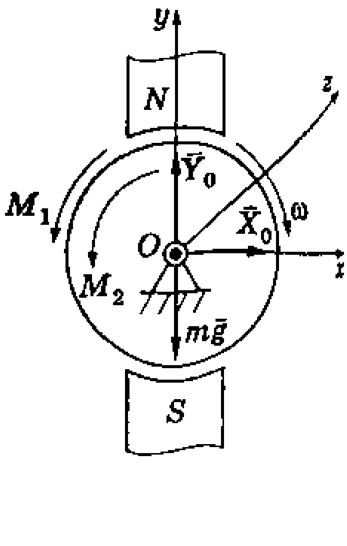
Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \qquad (1)$$

где $I_z = I$; $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -M_1 - M_2 = -(M_2 + kv) = -\left(M_2 + \frac{kD\omega}{2}\right)$.

Подставим значения в уравнение (1) и получим

$$I\frac{d\omega}{dt} = -\left(M_2 + \frac{kD\omega}{2}\right). \qquad (2)$$



Разделим переменные, проинтегрируем равенство (2) и найдем время до остановки маховика:

$$I\frac{d\omega}{M_2 + \frac{kD\omega}{2}} = -dt,$$

$$I\int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{M_2 + \frac{kD\omega}{2}} = -\int_0^T dt,$$

$$\frac{2I}{kD}\ln\left(\frac{M_2 + \frac{kD\omega}{2}}{M_2}\right) = T$$

или

$$T = \frac{2I}{kD}\ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right).$$

Ответ: $T = \frac{2I}{kD}\ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

Задача 37.7

Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M; при этом возникает момент сил сопротивления M_1, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен I.

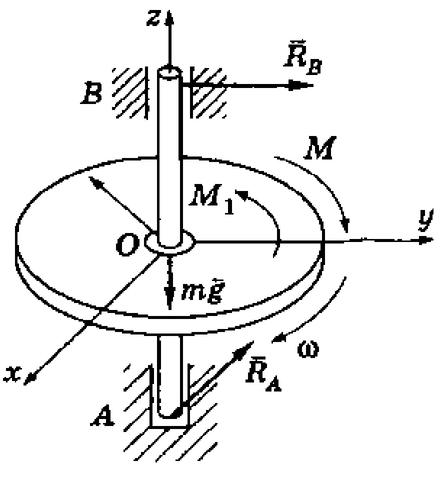
Решение

Покажем на рисунке активные силы, действующие на твердое тело, вращающееся вокруг вертикальной оси: силу тяжести $m\bar{g}$ и моменты сил сопротивления M и M_1; реакции связей $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ соответственно в опорах A и B.

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \tag{1}$$

где $I_z = I$; $M_z(\bar{F}_k^e) = M - M_1 = M - \alpha\omega^2$.



Подставим эти значения в уравнение (1), получим

$$I\frac{d\omega}{dt} = -M - \alpha\omega^2. \tag{2}$$

Разделим переменные, проинтегрируем равенство (2):

$$I\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = -\int_0^t dt$$

или

$$\frac{I}{\alpha}\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\omega^2\frac{M}{\alpha}-\omega^2}=-\int_0^t dt$$

и получим

$$\frac{I}{\alpha}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{M}{\alpha}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega}\right|_0^{\omega}=t$$

или

$$\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega}\right|=\frac{2\sqrt{\alpha M}}{I}t. \qquad (3)$$

Введем обозначение: $\beta=2\sqrt{\alpha M}/I$, тогда выражение (3) примет вид

$$\frac{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}+\omega}{\sqrt{\frac{M}{\alpha}}-\omega}=e^{\beta t}.$$

Из этого выражения найдем закон изменения угловой скорости вращения тела:

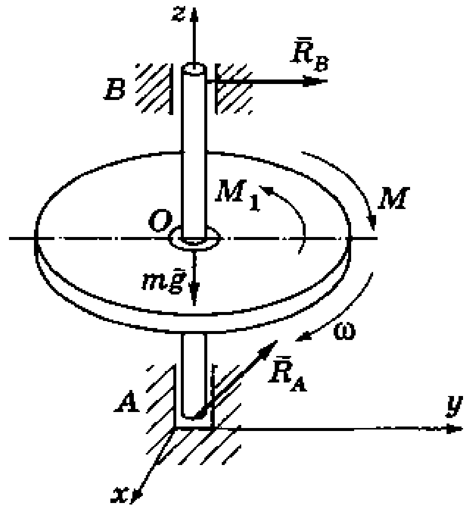
$$\omega=\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}.$$

Ответ: $\omega=\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}$, где $\beta=\frac{2}{I}\sqrt{\alpha M}$.

Задача 37.8

Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твердого тела: $M_1=\alpha\omega$.

Решение



Твердое тело вращается вокруг вертикальной оси под действием приложенных к нему активных сил (см. рисунок): силы тяжести $m\bar{g}$, моментов сил сопротивления M и M_1, реакции связей $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ соответственно в опорах A и B.

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{Oz}(\bar{F}_k^e), \qquad (1)$$

где $I_z = I$; $\sum M_{Oz}(\bar{F}_k^e) = M - M_1 = M - \alpha\omega$.

Тогда

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega = -(\alpha\omega - M). \qquad (2)$$

Разделим переменные и проинтегрируем равенство (2):

$$I \frac{d\omega}{\alpha\omega - M} = -dt,$$

$$I \int_0^\omega \frac{d\omega}{\alpha\omega - M} = -\int_0^t dt,$$

$$\frac{I}{\alpha} \ln \left| \frac{\alpha\omega - M}{-M} \right| = -t.$$

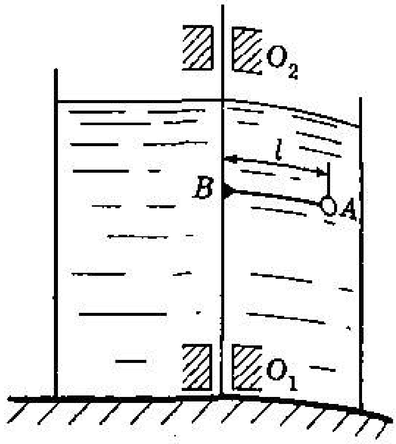
Потенциируем это выражение и находим закон изменения угловой скорости:

$$\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t / I}\right).$$

Ответ: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t / I}\right)$.

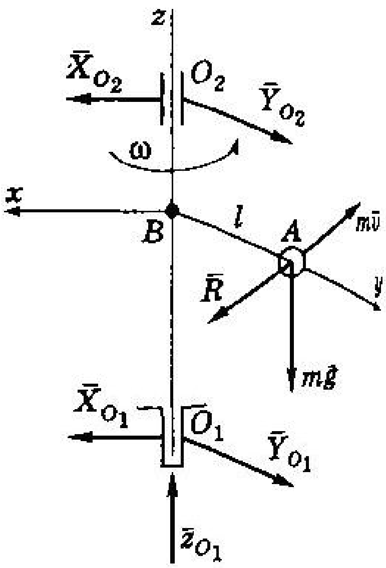
Задача 37.9

Шарик A, находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длиной l, приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0. Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m\omega$, где m — масса шарика, α — коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов n, которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.



Решение

Шарик A, прикрепленный посредством стержня AB к вертикальной оси O_1O_2, движется под действием активных сил (см. рисунок): силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления R, реакции связей $\bar{X}_{O_1}, \bar{Y}_{O_1}$ и $\bar{X}_{O_2}, \bar{Y}_{O_2}$ опор O_1 и O_2.



Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения твердого тела:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \qquad (1)$$

где $L_z = M_z(m\bar{v}) = ml^2\omega$; $M_z(\bar{F}_k^e) = -Rl = -\alpha lm\omega$.

Тогда

$$\frac{d(ml^2\omega)}{dt} = -\alpha lm\omega$$

или

$$l\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega. \qquad (2)$$

Разделим переменные и проинтегрируем равенство (2):

$$l\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha\int_0^T dt,$$

и получим

$$-I\ln 2 = -\alpha T.$$

Откуда время, за которое угловая скорость шарика уменьшится в 2 раза,

$$T = \frac{I}{\alpha}\ln 2.$$

Для определения числа оборотов n воспользуемся подстановкой

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}.$$

Тогда дифференциальное уравнение движения системы (2) примет вид

$$I\frac{d\omega}{d\varphi} = -\alpha. \tag{3}$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (3):

$$I\int\limits_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} d\omega = -\alpha\int\limits_0^{\varphi} d\varphi.$$

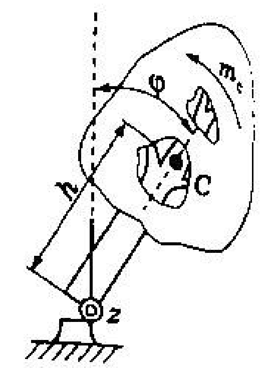
Получим

$$-I\frac{\omega_0}{2} = -\alpha\varphi.$$

Откуда найдем

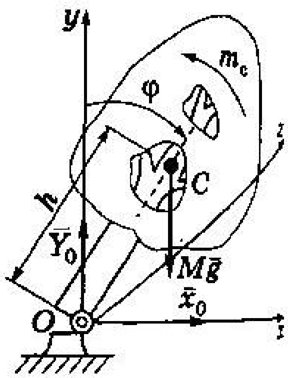
Задача 37.10

Определить, с какой угловой скоростью ω упадет на землю спиленное дерево массой M, если его центр тяжести C расположен на расстоянии h от основания, а силы сопротивления воздуха создают момент сопротивления m_c, причем $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, где $\alpha = \text{const}$. Момент инерции дерева относительно оси z, совпадающей с осью, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен I.



Решение

Рассмотрим вращательное движение дерева относительно оси Oz (см. рисунок) под действием активных сил: силы тяжести дерева $M\bar{g}$, момента силы сопротивления m_c воздуха, реакции $\bar{Y}_O$ в точке O. Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси z:



$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \qquad (1)$$

где $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = Mgh\sin\varphi + m_{cz} = Mgh\sin\varphi - \alpha\omega^2$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$I\frac{d\omega}{dt} = Mgh\sin\varphi - \alpha\omega^2. \qquad (2)$$

Представим

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} = \frac{d(\omega^2)}{2d\varphi}$$

и обозначим $\omega^2 = Z$.

Тогда уравнение (2) запишем в виде

$$\frac{1}{2}I\frac{dZ}{d\varphi} = Mgh\sin\varphi - \alpha Z$$

или

$$\frac{dZ}{d\varphi}+\frac{2\alpha}{I}Z=\frac{2ghM}{I}\sin\varphi. \tag{3}$$

Решение дифференциального уравнения (3) ищем в виде

$$Z=\bar{Z}+Z^{*} \tag{4}$$

где $\bar{Z}$ – решение однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{d\varphi}+\frac{2\alpha}{I}Z=0; \tag{5}$$

Z^{*} – частное решение уравнения (3).

Вначале найдем решение $\bar{Z}$. Представим уравнение (5) в виде

$$\frac{dZ}{d\varphi}=-\frac{2\alpha}{I}Z,$$

где $z=\bar{z}$.

Разделим переменные

$$\frac{dZ}{Z}=-\frac{2\alpha}{I}d\varphi,$$

проинтегрируем и получим

$$\int\frac{dZ}{Z}=-\frac{2\alpha}{I}\int d\varphi,\quad \ln Z=-\frac{2\alpha}{I}\varphi+\ln C.$$

Отсюда

$$\bar{Z}=Ce^{-\frac{2\alpha}{I}\varphi}.$$

Затем найдем частное решение:

$$Z^{*}=A\cos\varphi+B\sin\varphi.$$

Продифференцируем это выражение по φ:

$$(Z^{*})'=-A\sin\varphi+B\cos\varphi=\frac{dZ^{*}}{d\varphi}.$$

Полученные значения подставим в уравнение (3):

$$-A\sin\varphi+B\cos\varphi+\frac{2\alpha}{I}A\cos\varphi+\frac{2\alpha}{I}B\sin\varphi=\frac{2Mgh}{I}\sin\varphi.$$

Найдем постоянные интегрирования A и B, решив систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&-A+\frac{2\alpha}{I}B=\frac{2Mgh}{I},\\&B+\frac{2\alpha}{I}A=0.\end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$A=-\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)},$$

$$B=\frac{4Mgh\alpha}{I^2+4\alpha^2}.$$

Решение (4) с учетом найденных значений примет вид

$$Z=Ce^{-\frac{2\alpha}{I}\varphi}-\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)}\cos\varphi+\frac{4Mgh\alpha}{I^2+4\alpha^2}\sin\varphi. \qquad (6)$$

Найдем постоянную интегрирования C при $t=0$, когда $\varphi=\varphi_0=0$, $Z_0=\omega_0^2=0$:

$$C=\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)}.$$

Подставим значение C в формулу (6):

$$Z=\omega^2=\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)}e^{-\frac{2\alpha}{I}\varphi}-\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)}\cos\varphi+\frac{4Mgh\alpha}{I^2+4\alpha^2}\sin\varphi.$$

Определим скорость ω дерева в момент его падения, т.е. когда $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$\omega^2=\frac{2Mgh}{I\left(1+\frac{4\alpha^2}{I^2}\right)}e^{-\frac{\alpha\pi}{I}}+\frac{4Mgh\alpha}{I^2+4\alpha^2}=\frac{2MghI}{I^2+4\alpha^2}e^{-\frac{\alpha\pi}{I}}+\frac{4Mgh\alpha}{I^2+4\alpha^2};$$

$$\omega=\sqrt{\frac{2Mgh}{I^2+4\alpha^2}\left(2\alpha+Ie^{-\frac{\alpha\pi}{I}}\right)}=\sqrt{\frac{2MghI}{I^2+4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{I}}+2\frac{\alpha}{I}\right)}.$$

Ответ: $\omega=\sqrt{\frac{2MghI}{I^2+4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{I}}+2\frac{\alpha}{I}\right)}$.

Задача 37.11

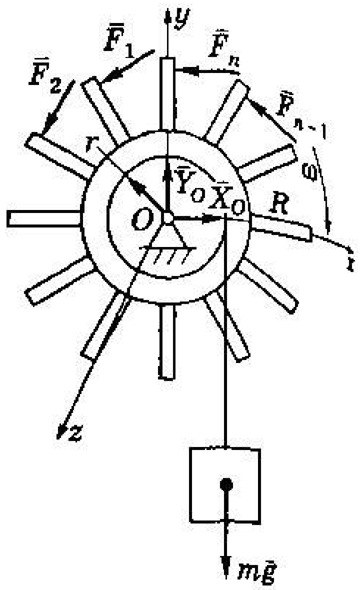
Вал радиуса r приводится во вращательное движение вокруг горизонтальной оси гирей, подвешенной посредством троса. Для того чтобы угловая скорость вала через некоторое время после начала движения имела величину, близкую к постоянной, с валом соединены n одинаковых пластин; сопротивление воздуха, испытываемое пластиной, приводится к силе, нормальной к пластине, приложенной на расстоянии R от оси вала и пропорциональной квадрату ее угловой скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Масса гири m, момент инерции всех вращающихся частей относительно оси вращения равен I; массой троса и трением в опорах пренебречь.

Определить угловую скорость ω вала, предполагая, что в начальный момент она равна нулю.

Решение

Рассмотрим поступательное движение гири и вращение вокруг горизонтальной оси вала с насаженным на него жестко демпфером. Движение гири происходит (см. рисунок) под действием активных сил: силы тяжести $m\bar{g}$ гири, сил сопротивления $\bar{F}_n$ пластин, реакций $\bar{Y}_O$ и $\bar{X}_O$ опор.

Для решения задачи воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси z:



$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

где

$$\sum M_z(\bar{F}^e) = mgr - \sum F_k R = mgr - \omega^2 \sum kR =$$

$$= mgr - knR\omega^2;$$

$$L_z = L_{z\,\text{г}} + L_{z\,\text{демпф}} = M_z(M\bar{v}_{\text{г}}) + I\omega =$$

$$= mr^2\omega + I\omega = (mr^2 + I)\omega.$$

Тогда

$$(mr^2 + I)\frac{d\omega}{dt} = mgr - knR\omega^2. \qquad (1)$$

Разделим переменные и проинтегрируем выражение (1):

$$\int \frac{d\omega}{mgr - knR\omega^2} = \frac{\int dt}{mr^2 + I},$$

$$\frac{1}{knR}\int \frac{d\omega}{\frac{mgr}{knR} - \omega^2} = \frac{\int dt}{mr^2 + I},$$

$$\frac{1}{2knr\sqrt{\frac{mgr}{knR}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} + \omega}{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} - \omega}\right| + C_1 = \frac{t}{mr^2 + I}$$

или

$$\frac{1}{2\sqrt{knRmgr}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} + \omega}{\sqrt{\frac{mgr}{knR}} - \omega}\right| + C_1 = \frac{t}{mr^2 + I}. \qquad (2)$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из начальных условий $\omega_0 = 0$ при $t_0 = 0$. Тогда $C_1 = 0$. С учетом этого выражение (2) примет вид

$$\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}+\omega}{\sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}-\omega}\right| = \frac{2\sqrt{knRmgr}}{mr^2+I}t.$$

Введем обозначение:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{knRmgr}}{mr^2+I},$$

и найдем закон изменения угловой скорости ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}\,\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}.$$

При $t = \infty$

$$\omega = \omega_{\max} = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}.$$

Значение максимальной скорости можно также определить из условия, что при

$$\omega = \omega_{\max} \qquad \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$0 = mgr - knR\omega_{\max}^2.$$

Откуда

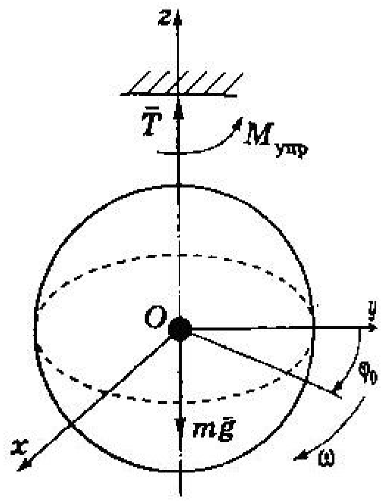
$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{mgr}{knR}}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}\,\dfrac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, где $\alpha = \dfrac{2}{I+mr^2}\sqrt{mgnkrR}$; при достаточно большом значении t угловая скорость ω близка к постоянной величине $\sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}$.

Задача 37.12

Упругую проволоку, на которой подвешен однородный шар с радиусом r и массой m, закручивают на угол φ_0, а затем предоставляют ей свободно раскручиваться. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c. Определить движение, пренебрегая сопротивлением воздуха и считая момент силы упругости закрученной проволоки пропорциональным углу кручения φ.

Решение



Рассмотрим вращение шара, подвешенного на упругой проволоке (см. рисунок). На шар действуют сила тяжести шара $m\bar{g}$, момент силы упругости закрученной проволоки $M_{упр} = c\varphi$, реакция $\bar{T}$ проволоки.

Запишем дифференциальное уравнение вращения шара вокруг оси z, совпадающей с проволокой:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

где $I_z = \dfrac{2mr^2}{5}$; $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -M_{упр} = -c\varphi$.

Тогда

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = -c\varphi,$$

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} + c\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{5c}{2mr^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{5c}{2mr^2}}$.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$z^2 + k^2 = 0, \quad z_{1,2} = \pm ki.$$

Общее решение полученного однородного дифференциального уравнения ищем в виде

$$\varphi = A\cos kt + B\sin kt.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{\varphi} = \omega = -Ak\sin kt + Bk\cos kt.$$

Постоянные интегрирования A и B найдем из начальных условий: $\varphi_0 \neq 0$, $\omega_0 = 0$ при $t = 0$; $A = \varphi_0$, $B = 0$.

Следовательно, уравнение вращательного движения шара

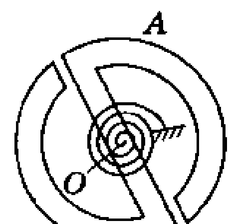
$$\varphi = \varphi_0 \cos kt = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\, t.$$

Ответ: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{5c}{2mr^2}}\, t.$

Задача 37.13

Часовой балансир A может вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести O, имея относительно этой оси момент инерции I. Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов.

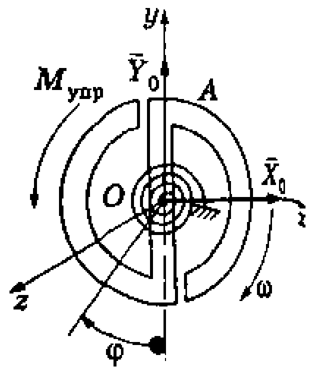
При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен c. Определить закон движения балансира, если в начальный момент в условиях отсутствия сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость ω_0.



Решение

Вращение часового балансира A происходит под действием приложенных к нему сил (см. рисунок): момента $M_{упр}$ сил упругости пружины, реакций связей $\overline{X}_O$ и $\overline{Y}_O$ в опоре O.

Запишем дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:



$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

где $I_z = I$; $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -M_{упр} = -c\varphi$.

Получим однородное дифференциальное уравнение

$$I\ddot{\varphi} = -c\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{I}}$.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi = B\cos kt + D\sin kt. \tag{1}$$

Продифференцируем выражение (1) по времени:

$$\dot{\varphi} = -Bk\sin kt + Dk\cos kt.$$

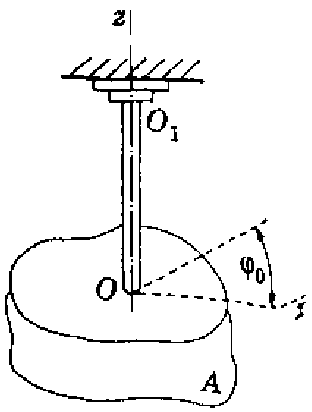
Постоянные интегрирования B и D найдем из начальных условий: $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ при $t = 0$. Тогда $B = 0$, $D = \dfrac{\omega_0}{k} = \omega_0\sqrt{\dfrac{I}{c}}$.

С учетом значений B, D и k запишем уравнение движения балансира A:

$$\varphi = \omega_0\sqrt{\frac{I}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{I}}\,t.$$

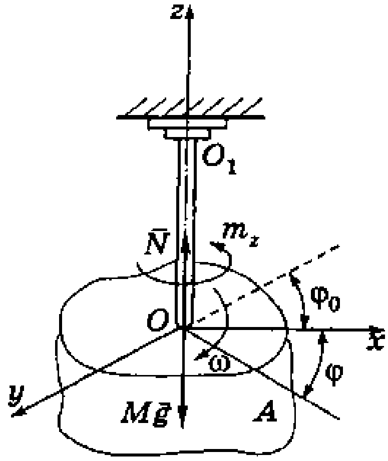
Ответ: $\varphi = \omega_0\sqrt{\dfrac{I}{c}}\sin\sqrt{\dfrac{c}{I}}\,t$.

Задача 37.14



Для определения момента инерции I_z тела A относительно вертикальной оси Oz его прикрепили к упругому вертикальному стержню OO_1, закрутили этот стержень, повернув тело A вокруг оси Oz на малый угол φ_0, и отпустили; период возникающих колебаний оказался равным T_1, момент сил упругости относительно оси Oz равен $m_z = -c\varphi$. Для определения коэффициента c проделали второй опыт; на стержень в точке O был надет однородный круглый диск радиуса r массы M, и тогда период колебаний оказался равным T_2. Определить момент инерции тела I_z.

Решение



Вначале определим коэффициент жесткости стержня OO_1. Для этого наденем на стержень круглый диск и рассмотрим движение системы, состоящей из однородного диска массы M и упругого стержня. Покажем на рисунке активные силы: силу тяжести $M\bar{g}$, момент сил упругости m_z, реакцию $\bar{N}$ стержня.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \quad (1)$$

Найдем момент активных сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_z = -c\varphi$$

и момент количеств движения диска:

$$L_z = I_z\omega = \frac{Mr^2}{2}\omega.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1) и получим

$$\frac{Mr^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = -c\varphi$$

или

$$\frac{Mr^2}{2}\ddot{\varphi} + c\varphi = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c}{Mr^2}\varphi = 0$$

и запишем его в виде

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0.$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением свободных крутильных колебаний с круговой частотой

$$k=\sqrt{\frac{2c}{Mr^2}}$$

и периодом

$$T_2=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{Mr^2}{2c}}.$$

Откуда найдем коэффициент жесткости стержня OO_1:

$$c=\frac{4\pi Mr^2}{2T_2^2}. \qquad (2)$$

Заменим диск на тело A и рассмотрим его движение. Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения в виде

$$I_z\ddot{\varphi}=\sum M_z(\overline{F}_k^e),$$

где $\sum M_z(\overline{F}_k^e)=m_z=-c\varphi$.

Тогда

$$I_z\ddot{\varphi}=-c\varphi$$

или

$$I_z\ddot{\varphi}+c\varphi=0.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\ddot{\varphi}+\frac{c}{I_z}\varphi=0$$

и запишем его в виде

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

где k — круговая частота крутильных колебаний тела A, $k=\sqrt{\frac{c}{I_z}}$.

Тогда период колебаний тела A

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{I_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{c}}.$$

Подставим в это выражение выражение (2) и получим

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z 2T_2^2}{4\pi M r^2}}.$$

Откуда момент инерции тела A:

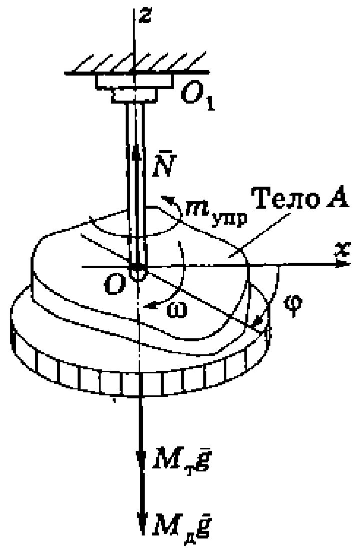
$$I_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$$

Ответ: $I_z = \frac{Mr^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$

Задача 37.15

Решить предыдущую задачу в предположении, что для определения коэффициента c второй опыт проделывают иначе: однородный круглый диск массы M и радиуса r прикрепляется к телу, момент инерции которого требуется определить. Найти момент инерции тела I_z, если период колебаний тела τ_1, а период колебаний тела с прикрепленным к нему диском τ_2.

Решение



Вначале рассмотрим движение тела A (см. рисунок) под действием силы тяжести тела $M_т\bar{g}$, момента $m_{упр}$ сил упругости стержня и реакции $\bar{N}$ стержня.

Запишем дифференциальное уравнение вращения тела A вокруг оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{упр} = -c\varphi.$$

После подстановки получим

$$I_z\ddot{\varphi} = -c\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{I_z}\varphi = 0.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + k_1^2\varphi = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является дифференциальным уравнением крутильных колебаний тела A на упругом стержне OO_1 с круговой частотой

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{I_z}}$$

и периодом

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{I_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{c}}.$$

Откуда

$$c = \frac{4\pi^2 I_z}{\tau_1^2}.$$

Прикрепим к телу A диск радиусом r и рассмотрим их совместное движение.

Запишем дифференциальное уравнение вращения этой системы вокруг оси z:

$$I_{\text{пр}}\ddot{\varphi} = \sum M_z(\overline{F}_k^e). \qquad (2)$$

Найдем приведенный момент инерции системы:

$$I_{\text{пр}} = I_z + I_{z\,\text{д}},$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси z; $I_{z\,\text{д}} = \dfrac{Mr^2}{2}$ — момент инерции диска относительно оси z.

Тогда

$$I_{\text{пр}} = I_z + \frac{Mr^2}{2}.$$

Главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = -c\varphi.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (2) примет вид

$$\left(I_z + \frac{Mr^2}{2}\right)\ddot{\varphi} = -c\varphi.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{\left(I_z + \frac{Mr^2}{2}\right)}\varphi = 0$$

и запишем его в виде

$$\ddot{\varphi} + k_2^2\varphi = 0,$$

где $k_2 = \sqrt{\dfrac{c}{I_z + \dfrac{Mr^2}{2}}}$.

Найдем период крутильных колебаний системы

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{c}{I_z + \dfrac{Mr^2}{2}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z + \dfrac{Mr^2}{2}}{c}}.$$

Откуда

$$c = \frac{4\pi^2\left(I_z + \dfrac{Mr^2}{2}\right)}{\tau_2^2}.$$

Приравняем значения коэффициента c для системы, состоящей из тела A и диска, и для одного тела A, получим

$$\frac{4\pi^2 I_z}{\tau_1^2} = \frac{4\pi^2\left(I_z + \dfrac{Mr^2}{2}\right)}{\tau_2^2}.$$

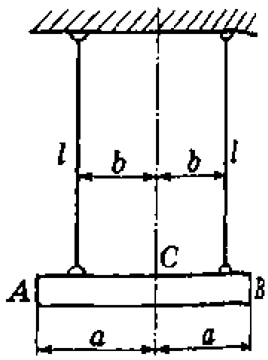
Откуда определим значение момента инерции тела A:

$$I_z = \frac{Mr^2}{2}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}.$$

О т в е т: $I_z = \dfrac{Mr^2}{2}\dfrac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}.$

Задача 37.16

Бифилярный подвес состоит из однородного стержня AB длины $2a$, подвешенного горизонтально посредством двух вертикальных нитей длины l, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$. Определить период крутильных колебаний стержня, полагая, что стержень в течение всего времени движения остается в горизонтальном положении и натяжение каждой из нитей равно половине веса стержня.



У к а з а н и е. При определении горизонтальной составляющей натяжения каждой из нитей, считая колебания бифиляра малыми, заменить синус угла между направлением нити и вертикалью самим углом.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение бифилярного подвеса под действием внешних сил (см. рисунок): силы тяжести $M\bar{g}$ стержня, реакций $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ нитей подвеса.

Запишем дифференциальное уравнение вращения стержня вокруг оси z:

$$I_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -N_{1x}b - N_{2x}b = -(N_{1x} + N_{2x})b$$

и горизонтальные составляющие реакций $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ соответственно:

$$N_{1x} = N_1 \sin\alpha,$$

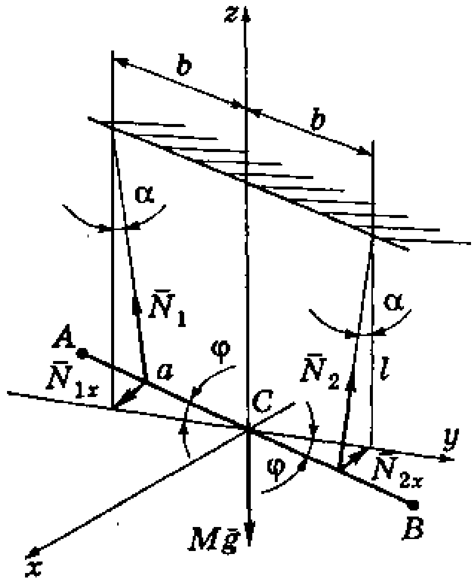
$$N_{2x} = N_2 \sin\alpha.$$

По условию задачи

$$N_1 = N_2 = \frac{Mg}{2},$$

тогда

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha = Mg\sin\alpha. \qquad (2)$$



Выразим угол α через угол φ:

$$b\sin\varphi = l\sin\alpha$$

или

$$\sin\alpha = \frac{b}{l}\sin\varphi.$$

Подставим это выражение в формулу (2):

$$Mg\sin\alpha = Mg\frac{b}{l}\sin\varphi.$$

Для малых колебаний $\sin\varphi = \varphi$, тогда

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -Mg\frac{b^2}{l}\varphi.$$

Момент инерции стержня относительно оси z

$$I_{Cz} = \frac{M(2a^2)}{12} = \frac{Ma^2}{3}.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1):

$$\frac{Ma^2}{3}\ddot{\varphi} = -Mg\frac{b^2}{l}\varphi$$

и запишем его в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{3gb^2}{la^2}$.

Найдем период крутильных колебаний стержня:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{3gb^2}{la^2}}} = \frac{2\pi a}{b\sqrt{\dfrac{3g}{l}}} = \frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

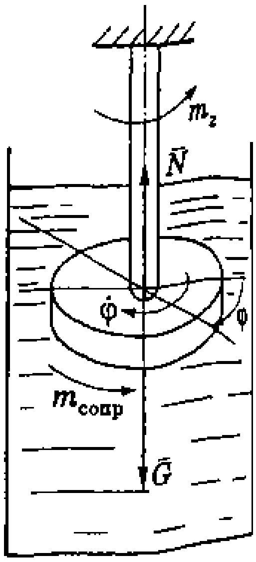
Ответ: $T = \dfrac{2\pi a}{b}\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$.

Задача 37.17

Диск, подвешенный к упругой проволке, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент инерции диска относительно оси проволоки равен I. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c. Момент сопротивления движению равен $\alpha S\omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего основания диска, ω — угловая скорость диска. Определить период колебаний диска в жидкости.

Решение

Рассмотрим движение диска (см. рисунок) под действием внешних сил: силы тяжести $\overline{G}$, момента $m_z = -c\varphi$ сил упругости проволоки и момента $m_{\text{сопр}} = \alpha S\dot{\varphi}$ сил сопротивления, реакции $\overline{N}$ проволоки.



Запишем дифференциальное уравнение вращения диска вокруг оси z:

$$I\ddot{\varphi} = \sum M_z(\overline{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем сумму моментов внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = -c\varphi - \alpha S\dot{\varphi}$$

и подставим ее значение в уравнение (1):

$$I\ddot{\varphi} = -c\varphi - \alpha S\dot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha S}{I}\dot{\varphi} + \frac{c}{I}\varphi = 0.$$

Полученное уравнение запишем в виде

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (2)$$

где $2n = \dfrac{\alpha S}{I}$; $k^2 = \dfrac{c}{I}$.

Уравнение (2) является дифференциальным уравнением затухающих крутильных колебаний.

Если

$$k = \sqrt{\frac{c}{I}} > \frac{\alpha S}{2},$$

то диск будет совершать затухающие колебания с периодом

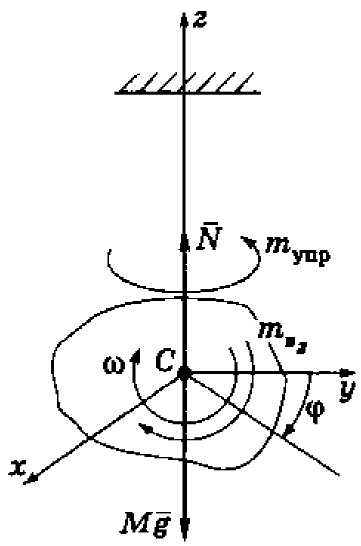
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{I} - \left(\frac{\alpha S}{2I}\right)^2}} = \frac{4\pi I}{\sqrt{4cI - \alpha^2 S^2}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{4\pi I}{\sqrt{4cI - \alpha^2 S^2}}$.

Задача 37.18

Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m_{в}$, причем $m_{вz} = m_1 \sin\omega t + m_3 \sin 3\omega t$, где m_1, m_3 и ω — постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки. Момент сил упругости проволоки равен $m_{упр}$, причем $m_{упр\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания. Определить закон вынужденных крутильных колебаний твердого тела, если его момент инерции относительно оси z равен I_z. Силами сопротивления движению пренебречь. Считать, что $\sqrt{c/I_z} \neq \omega$ и $\sqrt{c/I_z} \neq 3\omega$.

Решение



Рассмотрим движение твердого тела, подвешенного на упругой проволоке, под действием внешних сил (см. рисунок): силы тяжести $M\bar{g}$, внешнего $m_{в_z}$ момента, момента $m_{упр}$ сил упругости, реакции $\bar{N}$ проволоки.

Запишем дифференциальное уравнение вращения тела вокруг оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно этой оси:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{вz} - m_{упр} = m_1 \sin\omega t + m_3 \sin 3\omega t - c\varphi.$$

Полученное значение подставим в уравнение (1):

$$I_z\ddot{\varphi} = m_1 \sin\omega t + m_3 \sin 3\omega t - c\varphi.$$

Приведем дифференциальное уравнение к виду

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h_1 \sin\omega t + h_3 \sin 3\omega t, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$ — круговая частота собственных крутильных колебаний тела; $h_1 = \dfrac{m_1}{I_z}$; $h_3 = \dfrac{m_3}{I_z}$.

Уравнение (2) является неоднородным дифференциальным уравнением вынужденных колебаний.

Общее решение уравнения (2) состоит из общего решения однородного уравнения $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ и частного решения неоднородного уравнения, которое описывает вынужденные колебания. Запишем частное решение в виде правой части уравнения (2):

$$\varphi = A \sin\omega t + B \sin 3\omega t.$$

Найдем значения постоянных A и B. Для этого определим производные по времени $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = A\omega\cos\omega t + 3B\omega\cos 3\omega t,$$

$$\ddot{\varphi} = -A\omega^2 \sin\omega t - 9B\omega^2 \sin 3\omega t.$$

Подставим их в дифференциальное уравнение (2):

$$-A\omega^2 \sin\omega t - 9B\omega^2 \sin 3\omega t + Ak^2 \sin\omega t + Bk^2 \sin 3\omega t = h_1 \sin\omega t + h_2 \sin 3\omega t.$$

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} Ak^2 \sin\omega t - A\omega^2 \sin\omega t &= h_1 \sin\omega t, \\ Bk^2 \sin 3\omega t - 9B\omega^2 \sin 3\omega t &= h_2 \sin 3\omega t \end{aligned}\right\}$$

и найдем

$$A = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2},$$

$$B = \frac{h_3}{k^2 - 9\omega^2}.$$

Тогда закон вынужденных крутильных колебаний примет вид:

$$\varphi = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{h_3}{k^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t.$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{h_1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + \dfrac{h_3}{k^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t,$

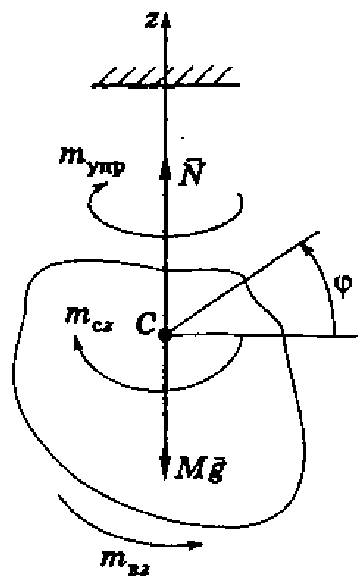
где $k^2 = c/I_z$; $h_1 = m_1/I_z$; $h_3 = m_3/I_z$.

Задача 37.19

Решить предыдущую задачу с учетом момента сопротивления m_c, пропорционального угловой скорости твердого тела, причем $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где β — постоянный коэффициент.

Решение

Рассмотрим движение тела, подвешенного на упругой проволоке. На рисунке покажем силы, действующие на тело: силу тяжести тела $M\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ проволоки, момент $m_{упр}$ сил упругости проволоки, момент m_{cz} сил сопротивления, внешний $m_{вz}$ момент.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения тела относительно оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{вz} - m_{cz} - m_{упр} =$$

$$= m_1 \sin \omega t + m_3 \sin 3\omega t - \beta\dot{\varphi} - c\varphi.$$

Подставим это выражение в уравнение (1):

$$I_z\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - c\varphi + m_1 \sin \omega t + m_3 \sin 3\omega t$$

или после преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h_1 \sin \omega t + h_3 \sin 3\omega t, \qquad (2)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$; $n = \dfrac{\beta}{2I_z}$; $h_1 = \dfrac{m_1}{I_z}$; $h_3 = \dfrac{m_3}{I_z}$.

Уравнение (2) является дифференциальным уравнением вынужденных крутильных колебаний с учетом сопротивления среды.

Уравнение вынужденных крутильных колебаний тела ищем в виде частного решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\varphi = D\sin(\omega t - \varepsilon_1) + E\sin(3\omega t - \varepsilon_3). \qquad (3)$$

Дважды продифференцируем уравнение (3) по времени:

$$\dot\varphi = D\omega\cos(\omega t - \varepsilon_1) + 3E\omega\cos(3\omega t - \varepsilon_3),$$

$$\ddot\varphi = -D\omega^2\sin(\omega t - \varepsilon_1) - 9E\omega^2\sin(3\omega t - \varepsilon_3).$$

Подставим значения φ, $\dot\varphi$ и $\ddot\varphi$ в дифференциальное уравнение (2):

$$-D\omega^2\sin(\omega t - \varepsilon_1) - 9E\omega^2\sin(3\omega t - \varepsilon_3) + 2nD\omega\cos(\omega t - \varepsilon_1) +$$

$$+ 6nE\omega\cos(3\omega t - \varepsilon_3) + k^2 D\sin(\omega t - \varepsilon_1) + k^2 E\sin(3\omega t - \varepsilon_3) =$$

$$= h_1\sin[(\omega t - \varepsilon_1) + \varepsilon_1] + h_3\sin[(3\omega t - \varepsilon_3) + \varepsilon_3]. \qquad (4)$$

Найдем значения постоянных интегрирования D и E и величины сдвига фаз ε_1 и ε_2, раскрыв синус суммы двух углов в правой части равенства (4) и приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в правой и левой частях равенства:

$$D = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}},$$

$$E = \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{tg}\varepsilon_3 = \frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2}.$$

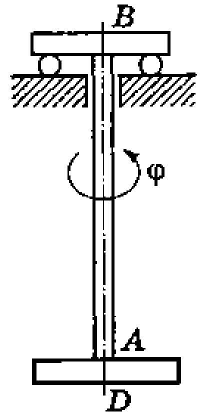
С учетом найденных значений уравнение (3) примет вид

$$\varphi = \frac{h_1}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}\sin(\omega t - \varepsilon_1) + \frac{h_3}{\sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2}}\sin(3\omega t - \varepsilon_3).$$

Ответ: $\varphi = A_1\sin(\omega t - \varepsilon_1) + A_3\sin(3\omega t - \varepsilon_3)$, где $A_1 = D$; $A_3 = E$;

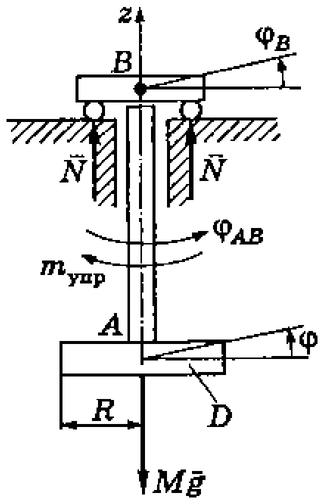
$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}; \quad \varepsilon_3 = \operatorname{arctg}\frac{6n\omega}{k^2 - 9\omega^2}.$$

Задача 37.20



Диск D, радиус которого равен R, а масса — M, подвешен на упругом стержне AB, имеющем жесткость на кручение c. Конец стержня B вращается по закону $\varphi_B = \omega_0 t + \Phi \sin pt$, где ω_0, Φ, p — постоянные величины. Пренебрегая силами сопротивления, определить движение диска D: 1) при отсутствии резонанса, 2) при резонансе. В начальный момент диск был неподвижен, а стержень — недеформирован.

Решение



Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке силы, действующие на систему: силу тяжести $M\bar{g}$ диска, момент $m_{упр}$ сил упругости стержня и реакции $\bar{N}$ опоры.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения диска относительно оси z, проходящей вдоль стержня AB:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси вращения z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -m_{упр} = -c(\varphi - \varphi_B) = (\omega_0 t + \Phi \sin pt)c - c\varphi$$

и момент инерции диска относительно этой оси:

$$I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Полученные значения подставим в уравнение (1):

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\varphi} = -c\varphi + c(\omega_0 t + \Phi \sin pt).$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c}{MR^2}\varphi = \frac{2c}{MR^2}(\omega_0 t + \Phi \sin pt)$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = dt + h\sin pt, \tag{2}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$ — круговая частота крутильных колебаний диска;
$d = \dfrac{2c\omega_0}{MR^2}$; $h = \dfrac{2c\Phi}{MR^2}$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами ищем в виде суммы

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{3}$$

где φ_1 — общее решение однородного дифференциального уравнения $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$,

$$\varphi_1 = A\cos kt + B\sin kt; \tag{4}$$

φ_2 — частное решение, которое ищем в виде правой части дифференциального уравнения (2) при отсутствии резонанса, т.е. когда $p \neq k$,

$$\varphi_2 = Dt + E\sin pt. \tag{5}$$

Найдем постоянные интегрирования D и E. Для этого дважды продифференцируем по времени выражение (5):

$$\dot{\varphi}_2 = D + Ep\sin pt,$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -Ep^2\sin pt.$$

Подставим значения φ_2 и $\ddot{\varphi}_2$ в дифференциальное уравнение (2) и получим

$$-Ep^2\sin pt + k^2Dt + k^2E\sin pt = dt + h\sin pt.$$

Откуда

$$D = \frac{d}{k^2} = \frac{2c\omega_0 MR^2}{MR^2 2c} = \omega_0,$$

$$E = \frac{h}{k^2 - p^2}. \tag{6}$$

Запишем выражение (3) с учетом формул (4)—(6):

$$\varphi = A\cos kt + B\sin kt + \omega_0 t + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt. \tag{7}$$

Продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\dot{\varphi} = -Ak\cos kt + Bk\sin kt + \omega_0 + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos pt. \tag{8}$$

Определим постоянные интегрирования A и B, подставив в уравнения (7) и (8) начальные условия: $t = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Тогда $A = 0$, $B = -\frac{\omega_0}{k} - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}$.

Подставим значения A и B в уравнение (7) и запишем закон движения диска:

$$\varphi = -\frac{\omega_0}{k}\sin kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)}\sin t + \omega_0 t + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt$$

или

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right).$$

Частное решение при резонансе, т.е. при $k = p$, ищем в виде

$$\varphi_2 = Dt + Et\cos kt. \tag{9}$$

Найдем постоянные интегрирования D и E. Для этого дважды продифференцируем по времени выражение (9):

$$\dot{\varphi}_2 = D + E\cos kt - kEt\sin kt,$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -Ek\sin kt - Ek\sin kt - Ek^2 t\cos kt.$$

Подставим значения φ_2 и $\ddot{\varphi}_2$ в дифференциальное уравнение (2) и получим

$$-Ek^2 t\cos kt - 2Ek\sin kt + Dtk^2 + Ek^2 t\cos kt = dt + h\sin pt.$$

Откуда

$$D = \frac{d}{k^2} = \omega_0,$$

$$E = -\frac{h}{2k}.$$

Тогда частное решение (9) будет иметь вид

$$\varphi_2 = \omega_0 t - \frac{h}{2k}\cos kt. \tag{10}$$

Подставим выражения (4) и (10) в уравнение (3) и получим

$$\varphi = A\cos kt + B\sin kt + \omega_0 t - \frac{h}{2k} t\cos kt. \tag{11}$$

Постоянные интегрирования A и B найдем с учетом начальных условий: $t = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, продифференцировав уравнение (11):

$$\dot{\varphi} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt + \omega_0 + \frac{hk}{2k} t\sin kt - \frac{h}{2k}\cos kt.$$

Откуда

$$A = 0,$$

$$B = \frac{h}{2k^2} - \frac{\omega_0}{k}.$$

Подставим значения A и B в уравнение (11) и получим закон движения диска:

$$\varphi = \frac{h}{2k^2}\sin kt - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \omega_0 t - \frac{h}{2k} t\cos kt$$

или

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right).$$

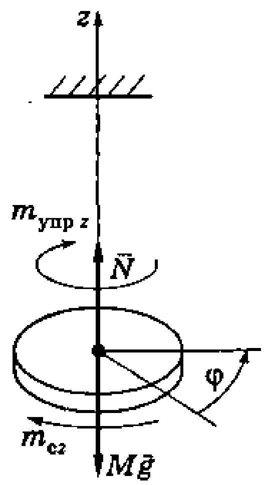
Ответ: 1) $\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right)$, где $k = \sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, $h = \frac{2c\Phi}{MR^2}$; 2) $\varphi = \omega_0 t - \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt - t\cos kt\right)$.

Задача 37.21

Твердое тело, подвешенное к упругой проволоке, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент инерции тела относительно оси проволоки z равен I_z. Момент сил упругости проволоки $m_{упр\,z} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость твердого тела, а $\beta > 0$. В начальный момент твердое тело было закручено на угол φ_0 и отпущено без начальной скорости. Найти уравнение движения твердого тела, если $\dfrac{\beta}{2I_z} < \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$.

Решение

Рассмотрим крутильные колебания тела в жидкости. На рисунке покажем силы, действующие на тело: силу тяжести $M\bar{g}$ тела, реакцию $\bar{N}$ проволоки, момент $m_{\text{упр}\,z}$ сил упругости проволоки, момент m_{cz} сопротивления движению.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения тела относительно оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \tag{1}$$

Найдем значение главного момента внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}^e) = -m_{cz} - m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}$$

и подставим это значение в уравнение (1):

$$I_z\ddot{\varphi} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}.$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{I_z}\dot{\varphi} + \frac{c}{I_z}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{2}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$; $n = \dfrac{\beta}{2I_z}$.

Уравнение (2) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний, так как

$$\frac{\beta}{2I_z} < \sqrt{\frac{c}{I_z}} \quad \text{или} \quad n < k.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi = e^{-nt}(A\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + B\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t). \tag{3}$$

Продифференцируем уравнение (3) по времени:

$$\dot\varphi = -ne^{-nt}(A\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + B\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t) +$$

$$+ e^{-nt}(-A\sqrt{k^2-n^2}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t + B\sqrt{k^2-n^2}\,t\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t). \tag{4}$$

Постоянные интегрирования A и B найдем с учетом начальных условий движения: $t = 0$, $\dot\varphi_0 = 0$, $\varphi_0 \neq 0$, подставив их в уравнения (3) и (4). Тогда

$$A = \varphi_0,$$

$$B = \frac{n\varphi_0}{\sqrt{k^2-n^2}}.$$

Подставим эти значения A и B в уравнение (3) и получим уравнение движения тела:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-nt}\left(\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right).$$

Ответ: затухающие крутильные колебания по закону

$$\varphi = \varphi_0 e^{-nt}\left(\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{n}{\sqrt{k^2-n^2}}\sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right),$$

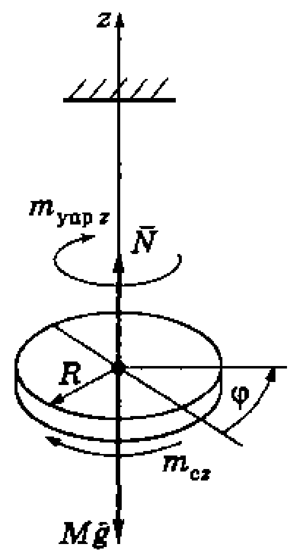
где $k^2 = \dfrac{c}{I_z}$; $n = \dfrac{\beta}{2I_z}$.

Задача 37.22

Однородный круглый диск массы M и радиуса R, подвешенный к упругой проволоке, может совершать крутильные колебания в жидкости. Момент сил упругости проволоки $m_{\text{упр}z} = -c\varphi$, где ось z проведена вдоль проволоки, c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{cz} = -\beta\dot\varphi$, где $\dot\varphi$ — угловая скорость диска, а $\beta > 0$. В начальный момент диск был закручен на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения диска, если: 1) $\dfrac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$, 2) $\dfrac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$.

Решение

Рассмотрим крутильные колебания тела в жидкости. Покажем на рисунке силы, действующие на тело: силу тяжести $M\bar{g}$ тела, реакцию $\bar{N}$ проволоки, момент $m_{\text{упр}z}$ сил упругости проволоки, момент m_{cz} сопротивления движению.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения тела относительно оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}^e) = -m_{cz} - m_{\text{упр}\,z} = -c\varphi - \beta\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - c\varphi.$$

После преобразований получим

$$I_z\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \qquad (3)$$

где $I_z = \dfrac{MR^2}{2}$ — момент инерции однородного диска относительно оси z; $n = \dfrac{\beta}{2I_z} = \dfrac{\beta}{MR^2}$ — коэффициент сопротивления среды; $k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}} = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$ — круговая частота колебаний.

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний, решение которого зависит от значения корней характеристического уравнения:

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0. \qquad (4)$$

Корни уравнения (4):

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

1) Если $\frac{\beta}{MR^2}=\sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, т.е. $n=k$, то корни уравнения (4) вещественные, равные и отрицательные:

$$z_{1,2}=-n.$$

Общее решение в этом случае имеет вид

$$\varphi=e^{-nt}(At+B). \tag{5}$$

Продифференцируем уравнение (5) по времени:

$$\dot{\varphi}=-ne^{-nt}(At+B)+Ae^{-nt}. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования найдем с учетом начальных условий движения: $t=0$, $\dot{\varphi}_0=0$, $\varphi_0\neq 0$, подставив их в уравнения (5) и (6): $B=\varphi_0$, $A=n\varphi_0$.

Значения A и B подставим в уравнение (5) и получим уравнение движения диска для этого случая:

$$\varphi=\varphi_0 e^{-nt}(nt+1).$$

2) Если $\frac{\beta}{MR^2}>\sqrt{\frac{2c}{MR^2}}$, т.е. $n>k$, то корни уравнения (4) вещественные, отрицательные и различные:

$$z_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}.$$

Общее решение в этом случае имеет вид

$$\varphi=e^{-nt}(Ae^{\sqrt{k^2-n^2}\,t}+Be^{-\sqrt{k^2-n^2}\,t}). \tag{7}$$

Продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\dot{\varphi}=-ne^{-nt}(Ae^{\sqrt{k^2-n^2}\,t}+Be^{-\sqrt{k^2-n^2}\,t})+$$
$$+e^{-nt}(A\sqrt{k^2-n^2}\,e^{\sqrt{k^2-n^2}\,t}-B\sqrt{k^2-n^2}\,e^{-\sqrt{k^2-n^2}\,t}). \tag{8}$$

Постоянные интегрирования найдем с учетом начальных условий движения: $t=0$, $\dot{\varphi}_0=0$, $\varphi_0\neq 0$, подставив их в уравнения (7) и (8). Тогда

$$A=\frac{\varphi_0(\sqrt{n^2-k^2}+n)}{2\sqrt{n^2-k^2}},$$

$$B=\frac{\varphi_0(\sqrt{n^2-k^2}-n)}{2\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Значения A и B подставим в уравнение (7) и получим уравнение движения диска для этого случая:

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}} e^{-nt}\left[(\sqrt{n^2-k^2}+n)e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + (\sqrt{n^2-k^2}-n)e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right].$$

Ответ: апериодическое движение по закону:

1) $\dfrac{\beta}{MR^2} = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = \varphi_0 e^{-nt}(nt+1)$, где $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$;

2) $\dfrac{\beta}{MR^2} > \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$, $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{2\sqrt{n^2-k^2}} e^{-nt} \times$

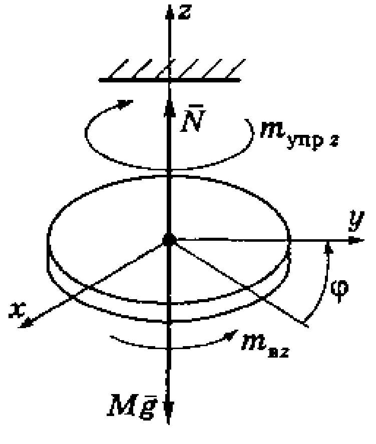
$\times\left[(\sqrt{n^2-k^2}+n)e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + (\sqrt{n^2-k^2}-n)e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right]$,

где $k^2 = \dfrac{2c}{MR^2}$; $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$.

Задача 37.23

Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m_{вz} = m_0 \cos pt$, где m_0 и p — положительные постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки. Момент сил упругости проволоки $m_{упрz} = -c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания. Момент инерции твердого тела относительно оси z равен I_z. Силами сопротивления движению пренебречь. Определить уравнение движения твердого тела в случаях: 1) $\sqrt{c/I_z} \neq p$, 2) $\sqrt{c/I_z} = p$, если в начальный момент при ненапряженной проволоке твердому телу была сообщена угловая скорость ω_0.

Решение



Рассмотрим крутильное колебание тела под действием приложенных сил. Покажем на рисунке действующие на тело силы: силу тяжести $M\bar{g}$ тела, момент $m_{упрz}$ сил упругости проволоки, внешний момент $m_{вz}$, реакцию $\bar{N}$ проволоки.

Запишем дифференциальные уравнение вращательного движения тела относительно оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно этой оси:

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = -m_{\text{в}z} - m_{\text{упр}2} = m_0 \cos pt - c\varphi \tag{2}$$

и подставим его значение в уравнение (1):

$$I_z\ddot{\varphi} = m_0 \cos pt - c\varphi.$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{I_z}\varphi = \frac{m_0}{I_z}\cos pt$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h\cos pt, \tag{3}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$; $h = \dfrac{m_0}{I_z}$.

Общее решение φ неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде суммы общего решения φ_1 однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

и частного решения φ_2 в виде правой части уравнения (3), т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{4}$$

где

$$\varphi_1 = A\sin kt + B\cos kt, \tag{5}$$

φ_2 для первого случая, когда $p \neq k$,

$$\varphi_2 = D\cos pt. \tag{6}$$

Продифференцируем выражение (6) по времени:

$$\dot{\varphi}_2 = -pD\sin pt,$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -p^2 D\sin pt.$$

Найдем постоянную интегрирования D, подставив значения φ_2 и $\ddot{\varphi}_2$ в уравнение (3):

$$-Dp^2\cos pt + Dk^2\cos pt = h\cos pt.$$

Откуда

$$D = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Подставим выражения (5) и (6) с учетом значения постоянной интегрирования D в уравнение (4) и получим

$$\varphi = A\sin kt + B\cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos pt. \qquad (7)$$

Продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\dot{\varphi} = Ak\cos kt - Bk\sin kt - \frac{hp}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

Найдем постоянные интегрирования A и B с учетом начальных условий движения: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$. Тогда

$$A = \frac{\omega_0}{k}, \quad B = -\frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования в уравнение (7) и получим уравнение движения тела для первого случая:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k}\sin kt - \frac{h}{k^2 - p^2}\cos kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\cos pt$$

или

$$\varphi = \frac{\omega_0}{k}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}(\cos pt - \cos kt).$$

Для второго случая, когда $p = k$, частное решение φ_2 ищем в виде

$$\varphi_2 = Et\sin pt. \qquad (8)$$

Дважды продифференцируем уравнение (8) по времени:

$$\dot{\varphi}_2 = E\sin pt + Etp\cos pt,$$

$$\ddot{\varphi}_2 = Ep\cos pt + Ep\cos pt - Ep^2 t\sin pt.$$

Найдем постоянную интегрирования E. Подставим выражения φ_2 и $\ddot{\varphi}_2$ в уравнение (3) и получим

$$2Ep\cos pt - Ep^2 t\sin pt + Ek^2 t\sin kt = h\cos pt.$$

Откуда

$$E=\frac{h}{2p}.$$

Подставим выражения (5) и (8) с учетом значения постоянной интегрирования E в уравнение (4) и получим

$$\varphi=A\sin kt+B\cos kt+\frac{h}{2p}t\sin pt. \tag{9}$$

Продифференцируем уравнение (9) по времени:

$$\dot\varphi=Ak\cos kt-Bk\sin kt+\frac{h}{2p}\sin pt+\frac{hp}{2p}t\cos pt$$

с учетом начальных условий движения: $t=0$, $\varphi_0=0$, $\dot\varphi_0=\omega_0$. Тогда

$$A=\frac{\omega_0}{k},\quad B=0.$$

Подставим значения A и B в уравнение (9) и получим закон движения тела для второго случая:

$$\varphi=\frac{\omega_0}{k}\sin kt+\frac{h}{2p}t\sin pt.$$

Ответ: 1) $\sqrt{\dfrac{c}{I_z}}\neq p$; $\varphi=\dfrac{\omega_0}{k}\sin kt+\dfrac{h}{k^2-p^2}(\cos pt-\cos kt)$,

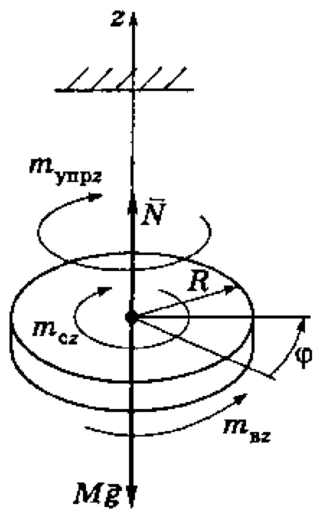
где $k=\sqrt{c/I_z}$; $h=m_0/I_z$;

2) $\sqrt{\dfrac{c}{I_z}}=p$; $\varphi=\dfrac{\omega_0}{k}\sin kt+\dfrac{h}{2k}t\sin kt$, где $k=\sqrt{\dfrac{c}{I_z}}=p$; $h=\dfrac{m_0}{I_z}$.

Задача 37.24

Однородный круглый диск массы M и радиуса R, подвешенный на упругой проволоке, совершает резонансные крутильные колебания в жидкости под действием внешнего момента $m_{вz}=m_0\sin pt$, где m_0 и p — положительные постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки; момент упругости проволоки $m_{упр z}=-c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания; момент сопротивления движению $m_{cz} = -\beta\dot{\varphi}$, где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость диска, а $\beta > 0$. Найти уравнение вынужденных резонансных колебаний диска.

Решение



Рассмотрим крутильные колебания диска в жидкости. Покажем на рисунке действующие на тело силы: силу тяжести $M\bar{g}$, момент $m_{\text{упр}z}$ сил упругости проволоки, внешний момент $m_{\text{в}z}$, момент m_{cz} сопротивления движению, реакцию $\bar{N}$ проволоки.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения диска относительно оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \quad (1)$$

Главный момент сил относительно оси вращения z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{\text{в}z} - m_{cz} - m_{\text{упр}z} = m_0 \sin pt - \beta\dot{\varphi} - c\varphi. \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1):

$$I_z\ddot{\varphi} = m_0 \sin pt - \beta\dot{\varphi} - c\varphi$$

или

$$I_z\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = m_0 \sin pt. \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением крутильных колебаний диска.

Закон вынужденных колебаний найдем как частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$\varphi = A\sin pt + B\cos pt.$$

Продифференцируем дважды это выражение:

$$\dot{\varphi} = Ap\cos pt - Bp\sin pt,$$

$$\ddot{\varphi} = -Ap^2\sin pt - Bp^2\cos pt.$$

Для определения постоянных интегрирования A и B значения φ, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ подставим в уравнение (3):

$$-AI_z p^2 \sin pt - BI_z p^2 \cos pt + A\beta p\cos pt - B\beta p\sin pt +$$

$$+ Ac\sin pt + Bc\cos pt = m_0 \sin pt.$$

Получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A(c-I_z p^2)\sin pt - B\beta p\sin pt = m_0 \sin pt, \\ B(c-I_z p^2)\cos pt + A\beta p\cos pt = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему уравнений, найдем

$$A = \frac{m_0(c-I_z p^2)}{(c-I_z p^2)+(\beta p)^2},$$

$$B = -\frac{m_0\beta p}{(c-I_z p^2)+(\beta p)^2},$$

где $I_z = \dfrac{MR^2}{2}$.

В случае резонанса, когда $p = k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$,

$$A = 0, \quad B = -\frac{m_0}{\beta p}.$$

Следовательно, уравнение вынужденных резонансных колебаний диска с учетом сопротивления среды имеет вид

$$\varphi = -\frac{m_0}{\beta p}\cos pt.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби в правой части этого уравнения на I_z, получим

$$\varphi = -\frac{h}{2np}\cos pt,$$

где $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$; $h = \dfrac{m_0}{MR^2}$.

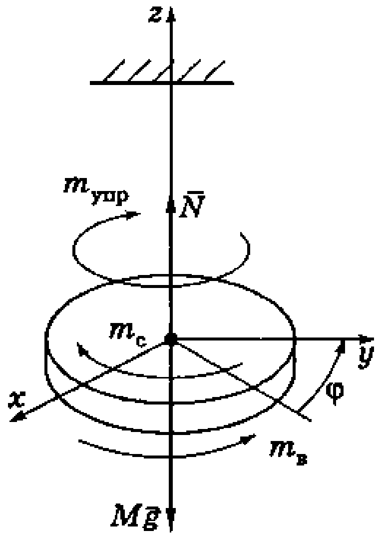
Ответ: при $p = \sqrt{\dfrac{2c}{MR^2}}$ $\varphi = -\dfrac{h}{2np}\cos pt$, где $n = \dfrac{\beta}{MR^2}$; $h = \dfrac{2m_0}{MR^2}$.

Задача 37.25

Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают колебания диска, подвешенного к упругой проволоке в жидкости. К диску приложен внешний момент, равный $M_0 \sin pt$ ($M_0 = \text{const}$), при котором наблюдается явление резонанса. Момент сопротивления движению в жидкости равен $\alpha S \omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω – угловая скорость диска. Определить коэффициент α вязкости жидкости, если амплитуда вынужденных колебаний диска при резонансе равна φ_0.

Решение

Рассмотрим крутильные колебания диска в жидкости. Покажем на рисунке действующие на диск силы: силу тяжести $M\bar{g}$ диска, момент $m_{\text{упр}}$ сил упругости проволоки, внешний момент $m_{\text{в}}$, момент $m_{\text{с}}$ сопротивления движению, реакцию $\bar{N}$ проволоки.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения диска относительно оси z:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \tag{1}$$

Главный момент внешних сил относительно оси вращения z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{\text{в}} - m_{\text{с}} - m_{\text{упр}} = M_0 \sin pt - \alpha S \dot{\varphi} - c\varphi. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и получим

$$I_z \ddot{\varphi} = M_0 \sin pt - \alpha S \dot{\varphi} - c\varphi$$

или

$$I_z \ddot{\varphi} + \alpha S \dot{\varphi} + c\varphi = M_0 \sin pt. \tag{3}$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением крутильных колебаний диска.

Закон вынужденных колебаний найдем как частное решение неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$\varphi = A \sin pt + B \cos pt.$$

Найдем производные по времени

$$\dot{\varphi} = Ap\cos pt - Bp\sin pt,$$

$$\ddot{\varphi} = -Ap^2\sin pt - Bp^2\cos pt.$$

Для определения постоянных интегрирования значения φ, $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ подставим в уравнение (3):

$$-AI_z p^2\sin pt - BI_z p^2\cos pt + A\alpha Sp\cos pt -$$

$$- B\alpha Sp\sin pt + Ac\sin pt + Bc\cos pt = m_0\sin pt.$$

Составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &A(c - I_z p^2)\sin pt - B\alpha Sp\sin pt = M_0\sin pt,\\ &B(c - I_z p^2)\cos pt + A\alpha Sp\cos pt = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему уравнений, найдем

$$A = \frac{M_0(c - I_z p^2)}{(c - I_z p^2) + (\alpha Sp)^2},$$

$$B = -\frac{M_0\beta p}{(c - I_z p^2) + (\alpha Sp)^2}.$$

В случае резонанса $p = k = \sqrt{\dfrac{c}{I_z}}$. Тогда

$$A = 0, \quad B = -\frac{M_0}{\alpha Sp}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$\varphi_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{M_0}{\alpha Sp}.$$

Откуда коэффициент вязкости жидкости

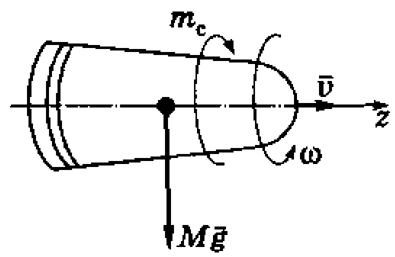
$$\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 Sp}.$$

Ответ: $\alpha = \dfrac{M_0}{\varphi_0 Sp}$.

Задача 37.26

При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента силы сопротивления воздуха, равного $k\omega$, где ω — угловая скорость вращения снаряда, k — постоянный коэффициент пропорциональности. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции снаряда относительно оси симметрии I.

Решение



Покажем на рисунке действующие на снаряд силы: силу тяжести $M\bar{g}$, момент m_c сил сопротивления.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения снаряда относительно оси z:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e)$$

или

$$I\frac{d\omega}{dt} = -k\omega.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$I\frac{d\omega}{\omega} = -kdt,$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{I}\int_0^t dt.$$

Получим

$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{k}{I}t.$$

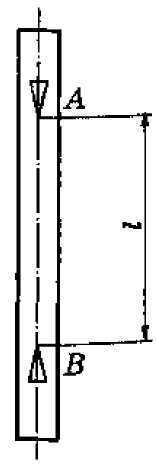
Найдем закон убывания угловой скорости снаряда:

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t}.$$

Ответ: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{I}t}$.

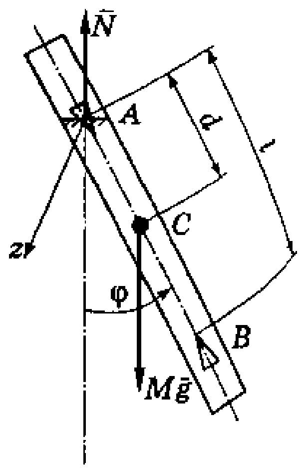
Задача 37.27

Для определения ускорения силы тяжести пользуются оборотным маятником, который представляет собой стержень, снабженный двумя трехгранными ножами A и B. Один из ножей неподвижен, а второй может перемещаться вдоль стержня. Подвешивая стержень то на один, то на другой нож и меняя расстояние AB между ними, можно добиться равенства периодов качаний маятника вокруг каждого из ножей. Чему равно ускорение силы тяжести, если расстояние между ножами, при котором периоды качаний маятника равны, $AB = l$, а период качаний равен T?



Решение

Рассмотрим движение оборотного маятника. Покажем на рисунке действующие на него силы: силу тяжести $M\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ опоры A.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения маятника относительно оси z, проходящей через точку A:

$$I_{Az}\ddot{\varphi} = -Mgd\sin\varphi$$

или

$$I_{Az}\ddot{\varphi} + Mgd\sin\varphi = 0,$$

где d — расстояние от точки A до центра масс C.

Считая колебания малыми ($\sin\varphi = \varphi$), получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{dMg\varphi}{I_{Az}} = 0. \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) является уравнением колебаний маятника относительно опоры A.

Период колебаний

$$T_A = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgd}{I_{Az}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Az}}{Mgd}}.$$

Подвесим маятник на другом ноже в точке B. Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения маятника относительно оси z, проходящей через точку B:

$$I_{Bz}\ddot{\varphi} = -Mg(l-d)\sin\varphi$$

или

$$I_{Bz}\ddot{\varphi} + Mg(l-d)\sin\varphi = 0.$$

Считая колебания маятника малыми, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg(l-d)\varphi}{I_{Bz}} = 0. \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) является уравнением колебаний маятника относительно опоры B.

Найдем период колебаний в этом случае:

$$T_B = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Mg(l-d)}{I_{Bz}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{Bz}}{Mg(l-d)}}.$$

Определим момент инерции маятника относительно точек подвеса A и B:

$$I_{Az} = I_C + Md^2,$$

$$I_{Bz} = I_C + M(l-d)^2.$$

Приравняем периоды колебаний: $T_A = T_B = T$, и найдем значение момента инерции маятника относительно центра масс C, выразив его через период колебаний T:

$$I_C = Mgd\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - Md^2 = Mg(l-d)\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 - M(l-d)^2.$$

Определим значение ускорения силы тяжести:

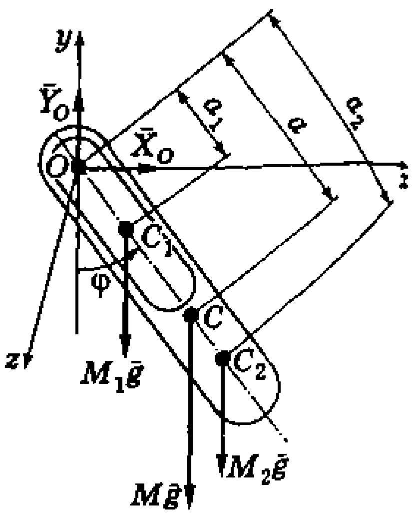
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Ответ: $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Задача 37.28

Два твердых тела могут качаться вокруг одной и той же горизонтальной оси как отдельно друг от друга, так и скрепленные вместе. Определить приведенную длину сложного маятника, если массы твердых тел M_1 и M_2, расстояния от их центров тяжести до общей оси вращения a_1 и a_2, а приведенные длины при отдельном качании каждого l_1 и l_2.

Решение



Рассмотрим колебания двух тел, скрепленных вместе. Покажем на рисунке силы, действующие на полученный сложный маятник: силы тяжести твердых тел $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, реакцию осей $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ в точке O.

Приведем силы тяжести тел к одной равнодействующей:

$$Mg = (M_1 + M_2)g,$$

где $M = M_1 + M_2$.

Найдем точку приложения равнодействующей — центр масс сложного маятника:

$$a = \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2}{M_1 + M_2}.$$

Определим моменты инерции тел, выразив их через приведенные длины l_1 и l_2:

$$l_1 = \frac{I_{1z}}{M_1 a_1},$$

$$l_2 = \frac{I_{2z}}{M_2 a_2}.$$

Тогда

$$I_{1z} = M_1 a_1 l_1,$$

$$I_{2z} = M_2 a_2 l_2.$$

Найдем момент инерции сложного маятника

$$I_z = I_{1z} + I_{2z} = M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2$$

и его приведенную длину

$$l = \frac{I_z}{Ma} = \frac{M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2}{(M_1 + M_2)\dfrac{M_1 a_1 + M_2 a_2}{M_1 + M_2}} = \frac{M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2}{M_1 a_1 + M_2 a_2}.$$

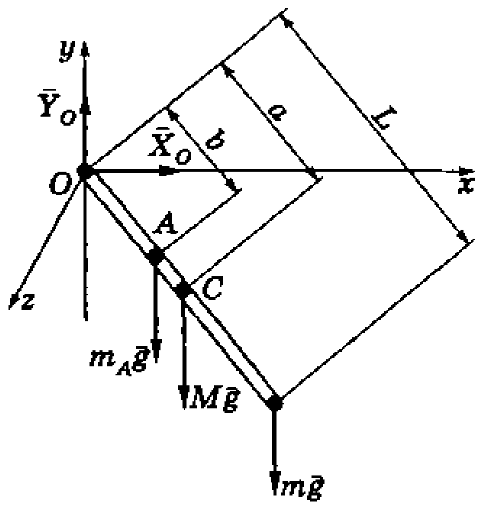
Ответ: $l = \dfrac{M_1 a_1 l_1 + M_2 a_2 l_2}{M_1 a_1 + M_2 a_2}$.

Задача 37.29

Часть прибора представляет собой однородный стержень длины L, свободно подвешенный одним концом на горизонтальной оси O. Для регистрации качаний к его нижнему концу приклеивается небольшое зеркало массы m. При этом, чтобы частота колебаний не изменилась, на нем в другом месте укрепляется груз A. Рассматривая зеркало и груз как материальные точки, найти минимальную массу, которую должен иметь груз A. На каком расстоянии от оси O его следует прикрепить?

Решение

Рассмотрим колебания однородного стержня с зеркалом и грузом и без них. Покажем на рисунке силы, действующие на систему: силу тяжести $m_A\bar{g}$ груза, силу тяжести $M\bar{g}$ стержня, силу тяжести $m\bar{g}$ зеркала, реакции осей $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ в точке O.



Найдем приведенную длину стержня:

$$l = \frac{I_z}{Ma} = \frac{\dfrac{ML^2}{3}}{M\dfrac{L}{2}} = \frac{2}{3}L$$

и приведенную длину l_2 системы, состоящей из стержня, зеркала и груза A:

$$l_2 = \frac{I_z^{\text{сист}}}{M_c a_C},$$

где M_c — масса системы, $M_c = M + m + m_A$.

Определим положение центра масс системы:

$$a_C = \frac{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}{M + m + m_A}$$

и момент инерции системы относительно оси z, проходящей через точку O:

$$I_z^{\text{сист}} = I_z + mL^2 + m_A b^2 = \frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$l_2 = \frac{\frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2}{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}.$$

Частота колебаний не изменится, если приведенная длина маятника будет постоянной, т.е. при $l = l_2$:

$$\frac{2}{3}L = \frac{\frac{ML^2}{3} + mL^2 + m_A b^2}{M\frac{L}{2} + mL + m_A b}.$$

Из этого равенства найдем

$$m_A = \frac{\frac{1}{3}mL^2}{\frac{2}{3}bL - b^2}$$

Определим минимальную массу груза A и расстояние $OA = b$.

Введем обозначение $\frac{2}{3}bL - b^2 = f(b)$. Из условия $f'(b) = \frac{2}{3}L - 2b = 0$ $b = \frac{1}{3}L$. Так как $f''(b) = -2 < 0$, то при этом значении b $f(b)$ будет максимальной, а m_A — минимальной:

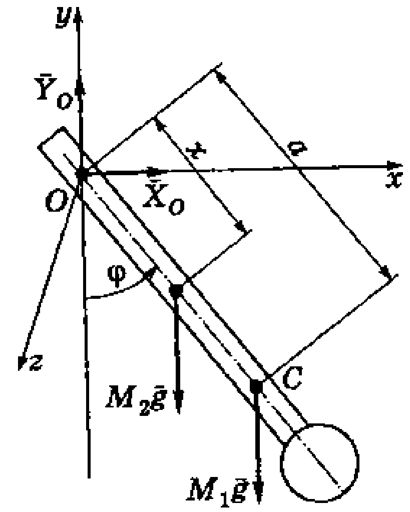
$$m_A = \frac{\frac{1}{3}mL^2}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}L^2 - \left(\frac{1}{3}L\right)^2} = 3m.$$

О т в е т: $m_A = 3m$; $b = OA = \frac{1}{3}L$.

Задача 37.30

Для регулирования хода часов к маятнику массы M_1, приведенной длины l с расстоянием a от его центра тяжести до оси подвеса прикрепляют добавочный груз массы M_2 на расстоянии x от оси подвеса. Принимая добавочный груз за материальную точку, определить изменение Δl приведенной длины маятника при данных значениях M_2 и x и значение $x = x_1$, при котором заданное изменение Δl приведенной длины маятника достигается при помощи добавочного груза наименьшей массы.

Решение



Рассмотрим колебания системы, состоящей из часового маятника с добавочным грузом. Покажем на рисунке действующие на систему силы: силы тяжести маятника $M_1\bar{g}$ и добавочного груза $M_2\bar{g}$, реакции оси $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ в точке O.

Из выражения приведенной длины маятника

$$l = \frac{I_z}{M_1 a}$$

определим значение его момента инерции:

$$I_z = M_1 a l.$$

Найдем момент инерции системы:

$$I_z^{\text{сист}} = I_z + M_2 x^2 = M_1 a l + M_2 x^2.$$

Определим положение центра масс системы

$$a_C = \frac{M_1 a + M_2 x}{M_1 + M_2}$$

и ее приведенную длину

$$l_{\text{сист}} = \frac{I_z^{\text{сист}}}{M a_C} = \frac{M_1 a l + M_2 x^2}{(M_1 + M_2)\dfrac{M_1 a + M_2 x}{M_1 + M_2}} = \frac{M_1 a l + M_2 x^2}{M_1 a + M_2 x},$$

где M — общая масса системы, $M = M_1 + M_2$.

Найдем изменение приведенной длины маятника

$$\Delta l = l_{\text{сист}} - l = \frac{M_1 al + M_2 x^2}{M_1 a + M_2 x} - l = \frac{M_2(x-l)x}{M_1 a + M_2 x}.$$

Выразим из этого равенства массу добавочного груза

$$M_2 = \frac{M_1 a \Delta l}{x(l+\Delta l) - x^2}.$$

Определим значение $x = x_1$, при котором масса добавочного груза будет наименьшей. Для этого

$$\frac{d}{dx}[x(l+\Delta l) - x^2] = 0$$

или

$$l + \Delta l - 2x_1 = 0.$$

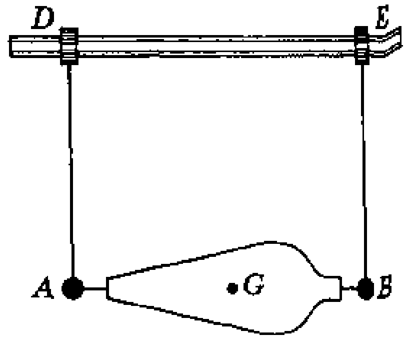
Тогда

$$x_1 = \frac{1}{2}(l + \Delta l).$$

Примечание. См. пояснения решения задачи 37.29.

Ответ: приведенную длину маятника надо уменьшить на $\Delta l = \dfrac{M_2(x-l)x}{M_1 a + M_2 x}$; $x_1 = \dfrac{1}{2}(l+\Delta l)$.

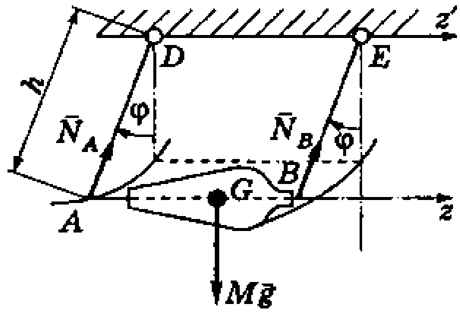
Задача 37.31



Для определения момента сил инерции I данного тела относительно некоторой оси AB, проходящей через центр масс G тела, его подвесили жестко скрепленными с ним стержнями AD и BE, свободно насаженными на неподвижную горизонтальную ось DE, так, что ось AB параллельна DE; приведя затем тело в колебательное движение, определили продолжительность T одного размаха. Как велик момент инерции I, если масса тела M и расстояние между осями AB и DE равно h? Массами стержней пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение тела, подвешенного на невесомых стержнях. Покажем на рисунке для положения, когда стержни AD и BE составляют угол φ с вертикалью, действующие силы: силу тяжести $M\bar{g}$, реакции $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ стержней.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения системы относительно оси z':

$$I_{z'}\ddot{\varphi} = \sum M_{z'}(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z', проходящей через ось DE:

$$\sum M_{z'}(\bar{F}_k^e) = -Mgh\sin\varphi = -Mgh\varphi, \qquad (2)$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$.

Момент инерции $I_{z'}$ тела определим по теореме Гюйгенса — Штейнера:

$$I_{z'} = I_z + Mh^2. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$(I_z + Mh^2)\ddot{\varphi} = -Mgh\varphi$$

и после преобразования получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{I_z + Mh^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Mgh}{I_z + Mh^2}$.

Это дифференциальное уравнение является уравнением колебаний тела относительно оси z'. Найдем полупериод колебаний

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{Mgh}{I_z + Mh^2}}} = \pi\sqrt{\frac{I_z + Mh^2}{Mgh}}$$

и определим значение момента инерции тела

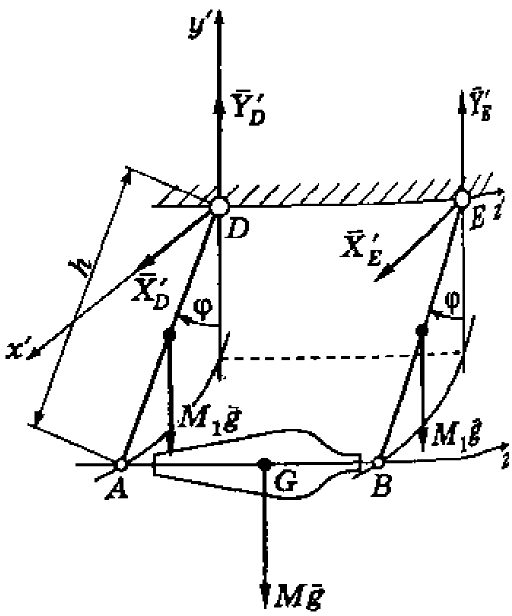
$$I_z = \frac{T^2}{\pi^2} Mgh - Mh^2 = hMg\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right).$$

Ответ: $I_z = hMg\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right).$

Задача 37.32

Решить предыдущую задачу с учетом массы тонких однородных прямолинейных стержней AD и BE, если масса каждого из них равна M_1.

Решение



Рассмотрим движение системы, состоящей из тела и двух стержней. Покажем на рисунке действующие на систему силы: силы тяжести тела $M\bar{g}$ и стержней $M_1\bar{g}$, реакции $\bar{X}'_D, \bar{Y}'_D$ и $\bar{X}'_E$, $\bar{Y}'_E$ опор.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения системы относительно оси z', проходящей через ось DE:

$$I_{\text{пр}z'}\ddot{\varphi} = \sum M_{z'}(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z':

$$\sum M_{z'}(\bar{F}_k^e) = -Mgh\sin\varphi - 2M_1 g\frac{h}{2}\sin\varphi = -(M + M_1)gh\varphi,$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$.

Приведенный момент инерции системы относительно оси z':

$$I_{\text{пр}z'} = I_{z'} + 2I_{z'}^{\text{ст}},$$

определим момент инерции тела относительно оси z':

$$I_{z'} = I_z + Mh^2$$

и момент инерции стержня относительно оси z'

$$I_{z'}^{\text{ст}} = \frac{M_1 h^2}{12} + M_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{M_1 h^2}{3}.$$

Тогда

$$I_{\text{пр}z'} = I_z + Mh^2 + 2 \cdot \frac{M_1 h^2}{3} = I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2.$$

Полученное значение подставим в уравнение (1):

$$\left(I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2\right) \ddot{\varphi} = -(M + M_1) g h \varphi$$

и после преобразования получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{(M + M_1) g h}{I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2} \varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{(M + M_1) g h}{I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2}$.

Найдем полупериод колебаний

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{(M + M_1) g h}{I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2}}} = \pi \sqrt{\frac{I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2}{(M + M_1) g h}}$$

и определим значение момента инерции тела

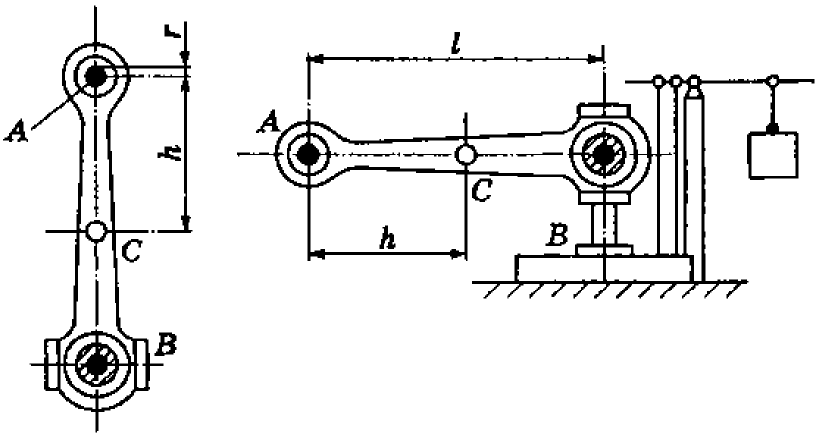
$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{I_z + \frac{3M + 2M_1}{3} h^2}{(M + M_1) g h},$$

$$I_z = h\left[\frac{T^2}{\pi^2}(M + M_1)g - \frac{3M + 2M_1}{3}h\right].$$

Ответ: $I_z = h\left[\frac{(M + M_1)gT^2}{\pi^2} - \frac{3M + 2M_1}{3}h\right].$

Задача 37.33

Для определения момента инерции шатуна его заставляют качаться вокруг горизонтальной оси, продев через втулку цапфы крейцкопфа тонкий цилиндрический стержень. Продолжительность ста размахов $100T = 100$ с, где T — половина периода.



Затем для определения расстояния $AC = h$ центра масс C от центра A отверстия шатун положили горизонтально, подвесив его в точке A к талям и оперев точкой B на платформу десятичных весов; давление на нее оказалось при этом равным P. Определить центральный момент инерции I шатуна относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка, имея следующие данные: масса шатуна M, расстояние между вертикалями, проведенными через точки A и B (см. правый рисунок) равно l, радиус цапфы крейцкопфа r.

Решение

Рассмотрим равновесие шатуна при его взвешивании на весах (рис. 1).

На него действуют силы: $\overline{N}_A$ — реакция нити, $M\overline{g}$ — вес и $\overline{N}_B$ — реакция платформы весов, которая равна силе давления $\overline{P}$.

Запишем уравнение моментов внешних сил относительно центра A (точки подвеса):

$$\sum M_A(\bar{F}_k^e) = 0,$$

$$Pl - Mgh = 0.$$

Найдем положение центра масс C шатуна

$$h = \frac{Pl}{Mg}.$$

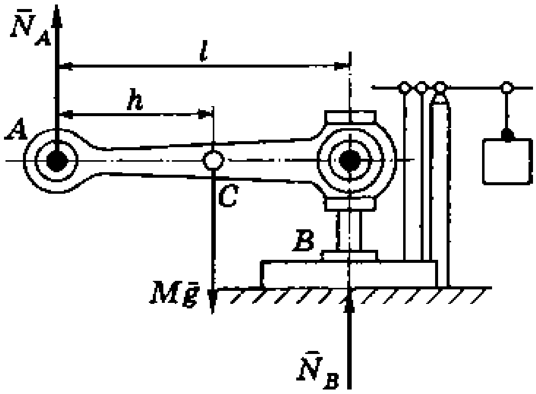


Рис. 1

Подвесим шатун на стержень и рассмотрим его движение (рис. 2).

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения вокруг оси Oz, проходящей через точку O подвеса:

$$I_O\ddot{\varphi} = \sum M_O(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси Oz:

$$\sum M_O(\bar{F}_k^e) = -Mg(h+r)\sin\varphi = -Mg(h+r)\varphi, \qquad (2)$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$.

Выразим момент инерции шатуна I_O через его центральный момент инерции:

$$I_O = I_C + M(h+r)^2. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$[I_C + M(h+r)^2]\,\ddot{\varphi} = -Mg(h+r)\varphi$$

и получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mg(h+r)}{I_C + M(h+r)^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} = k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Mg(h+r)}{I_C + M(h+r)^2}$.

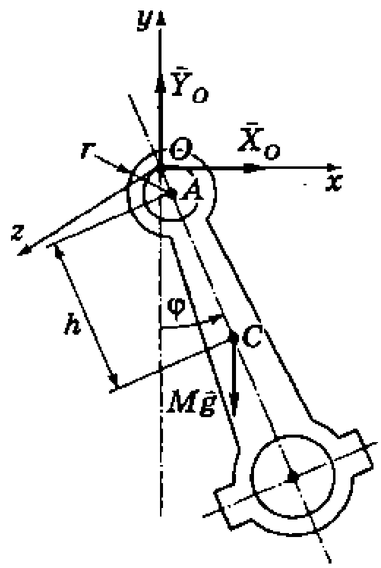


Рис. 2

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением колебаний шатуна.

Найдем полупериод колебаний:

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{Mg(h+r)}{I_C + M(h+r)^2}}}$$

и определим из этого равенства центральный момент инерции шатуна

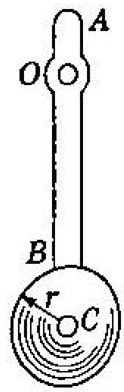
$$I = I_C = \frac{T^2}{\pi^2} Mg(h+r) - M(h+r)^2 = \frac{T^2}{\pi^2} Mg\left(\frac{Pl}{Mg} + r\right) - M\left(\frac{Pl}{Mg} + r\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{Pl}{Mg} + r\right)\left(\frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{MPl}{g} - Mr\right) = \frac{Pl + Mgr}{g}\left(\frac{gT^2}{\pi^2} - \frac{Pl}{Mg} - r\right).$$

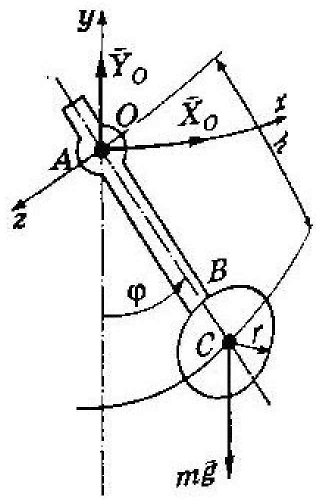
Ответ: $I = \dfrac{Pl + Mgr}{g}\left(\dfrac{gT^2}{\pi^2} - \dfrac{Pl}{Mg} - r\right)$.

Задача 37.34

Маятник состоит из стержня AB с прикрепленным к нему шаром массы m и радиуса r, центр которого C находится на продолжении стержня. Определить, пренебрегая массой стержня, в какой точке стержня нужно поместить ось подвеса для того, чтобы продолжительность одного размаха при малых качаниях имела данную величину T.



Решение



Рассмотрим движение маятника. Покажем на рисунке действующие силы: силу тяжести $m\bar{g}$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения маятника относительно оси z, проходящей через точку O подвеса:

$$I_z\ddot{\varphi} = -mgh\sin\varphi,$$

где h — расстояние от точки подвеса до центра масс C шара.

Так как для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, то можем записать

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgh}{I_z}\varphi=0$$

или

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

где $k^2=\dfrac{mgh}{I_z}$.

Найдем момент инерции шара относительно оси z:

$$I_z=I_C+m\cdot(OC)^2=\frac{2}{5}mr^2+mh^2.$$

Определим полупериод колебаний или продолжительность одного размаха

$$T=\frac{\pi}{k}=\frac{\pi}{\sqrt{\dfrac{mgh}{I_z}}}=\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}}=\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mr^2+mh^2}{mgh}}=\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}r^2+h^2}{gh}}.$$

Возведем в квадрат правую и левую части этого равенства и получим

$$T^2=\pi^2\left(\frac{\frac{2}{5}r^2+h^2}{gh}\right),$$

$$\frac{T^2}{\pi^2}gh=h^2+\frac{2}{5}r^2$$

или

$$h^2-\frac{T^2}{\pi^2}gh+\frac{2}{5}r^2=0. \qquad (1)$$

Решение квадратного уравнения (1) имеет вид

$$h=\frac{\dfrac{T^2g}{\pi^2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{T^2}{\pi^2}g\right)^2-\dfrac{8}{5}r^2}}{2},$$

а искомое значение $OC = h$:

$$h = \frac{1}{2\pi^2}\left[gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - \frac{8}{5}r^2\pi^4}\right].$$

Ответ: $OC = \dfrac{1}{2\pi^2}\left[gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6r^2\pi^4}\right]$.

Примечание. Так как должно быть $OC \geq r$, то решение возможно, если

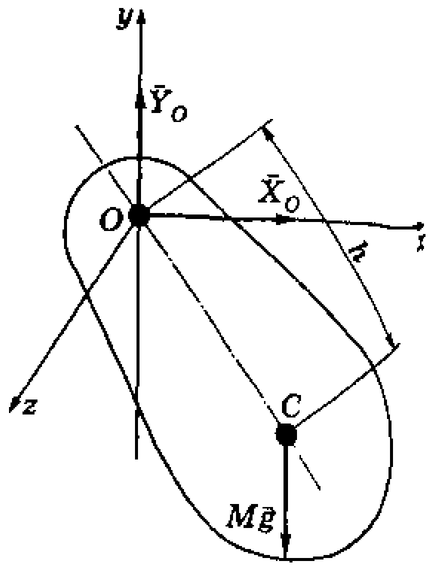
$$T^2 \geq 1{,}4\frac{\pi^2}{g}r;$$

решение, соответствующее знаку минус перед радикалом, невозможно.

Задача 37.35

На каком расстоянии от центра масс должен быть подвешен физический маятник, чтобы период его качаний был наименьшим?

Решение



Рассмотрим колебания физического маятника относительно оси Oz подвеса. Покажем на рисунке действующие силы: силу тяжести $M\bar{g}$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения маятника относительно оси z, проходящей через точку O подвеса:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mgh\sin\varphi.$$

Так как для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, можем записать

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{I_z}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Mgh}{I_z}$.

Найдем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Mgh}{I_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}}.$$

Момент инерции физического маятника относительно оси z

$$I_z = I_C + Mh^2.$$

Тогда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + Mh^2}{Mgh}}$$

или

$$T^2 = 4\pi^2\frac{I_C + Mh^2}{Mgh} = 4\pi^2\left(\frac{I_C}{Mgh} + \frac{h}{g}\right).$$

Продифференцируем полученное равенство по h:

$$\frac{d}{dh}(T^2) = \frac{4\pi^2}{g}\left[\frac{d\left(\dfrac{I_C}{Mh}\right)}{dh} + \frac{d(h)}{dh}\right] = \frac{4\pi^2}{g}\left[-\frac{I_C}{Mh^2} + 1\right]$$

и найдем минимальное значение h, когда

$$\frac{d(T^2)}{dh} = 0$$

или

$$-\frac{I_C}{Mh^2} + 1 = 0.$$

Откуда

$$h^2 = \frac{I_C}{M}.$$

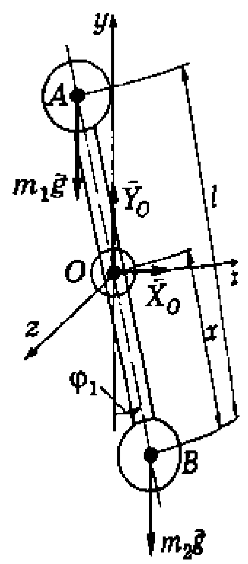
Отношение момента инерции тела к его массе равно квадрату радиуса инерции. Следовательно, расстояние от центра масс до точки подвеса маятника равно радиусу инерции маятника.

О т в е т: на расстоянии, равном радиусу инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости качаний.

Задача 37.36

Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно l; верхний груз имеет массу m_1, нижний — массу m_2. Определить, на каком расстоянии x от нижнего груза нужно поместить ось подвеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьшим; массой стержня пренебречь и грузы считать материальными точками.

Р е ш е н и е



Рассмотрим движение системы, состоящей из невесомого стержня AB и двух точечных грузов массами m_1 и m_2. Покажем на рисунке действующие на систему силы: силы тяжести грузов $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$, реакции $\overline{X}_O$ и $\overline{Y}_O$ в точке O.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения маятника относительно оси z, проходящей через точку O подвеса:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\overline{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = m_1 g(l-x)\sin\varphi - m_2 g x \sin\varphi \qquad (2)$$

и приведенный момент инерции системы относительно оси z:

$$I_z = I_{1z} + I_{2z}.$$

Моменты инерции точечных грузов A и B равны соответственно:

$$I_{1z} = m_1(l-x)^2,$$

$$I_{2z} = m_2 x^2.$$

Тогда

$$I_z = m_2 x^2 + m_1(l-x)^2. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$[m_2x^2 + m_1(l-x)^2]\ddot{\varphi} = [m_1(l-x) - m_2x]g\sin\varphi.$$

Для малых колебаний, так как $\sin\varphi \approx \varphi$, получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{[m_2x - m_1(l-x)]g}{m_2x^2 + m_1(l-x)^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{[m_2x - m_1(l-x)]g}{m_2x^2 + m_1(l-x)^2}$.

Найдем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{[m_2x - m_1(l-x)]g}{m_2x^2 + m_1(l-x)^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2x^2 + m_1(l-x)^2}{(m_2x - m_1(l-x))g}}.$$

Возведем в квадрат это выражение:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\,\frac{m_2x^2 + m_1(l-x)^2}{m_2x - m_1(l-x)}$$

и продифференцируем полученное равенство по x:

$$\frac{d}{dx}(T^2) = \frac{4\pi^2}{g}\times$$

$$\times\left\{\frac{[2x(m_1+m_2) - 2m_1l][(m_1+m_2)x - m_1l] - (m_1+m_2)\left[(m_1+m_2)x^2 - 2m_1lx + m_1l^2\right]}{[(m_1+m_2)x - m_1l]^2}\right\}.$$

Период качаний маятника будет иметь минимальное значение, когда

$$\frac{d(T^2)}{dx} = 0,$$

или

$$[2x(m_1+m_2) - 2m_1l][(m_1+m_2)x - m_1l] -$$

$$-(m_1+m_2)[(m_1+m_2)x^2 - 2m_1lx + m_1l^2] = 0,$$

$$x^2 - \frac{2m_1l}{m_1+m_2}x + \frac{m_1l^2(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)^2} = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,2} = l\,\frac{m_1 \pm \sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2},$$

искомое расстояние

$$x = l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}.$$

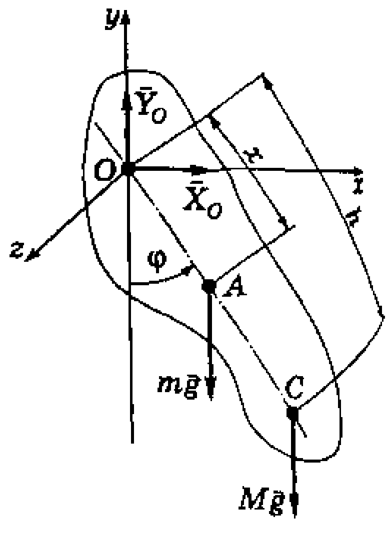
Ответ: $x = l\sqrt{m_1}\,\dfrac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}.$

Задача 37.37

На каком расстоянии от оси подвеса должен быть присоединен к физическому маятнику добавочный груз, чтобы период качаний маятника не изменился?

Решение

Вначале найдем период колебаний физического маятника без точечного груза A под действием силы тяжести маятника $M\bar{g}$ (см. рисунок).



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения физического маятника относительно оси z, проходящей через точку O подвеса:

$$I_z\ddot{\varphi} = -Mgh\sin\varphi,$$

где $h = OC$.

Так как для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, то

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh}{I_z}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} = k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Mgh}{I_z}.$

Тогда период колебаний физического маятника

$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Mgh}{I_z}}}=2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh}}.$$

Найдем период колебаний системы, состоящей из физического маятника и точечного груза A. Покажем на рисунке силы, действующие на эту систему: силы тяжести маятника $M\bar{g}$ и груза $m\bar{g}$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ в точке подвеса O.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения системы относительно оси z:

$$I_{\text{пр}}\ddot{\varphi}=\sum M_z(\bar{F}_k^e). \tag{1}$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e)=(-mgx-Mgh)\sin\varphi. \tag{2}$$

Определим приведенный момент инерции системы:

$$I_{\text{пр}}=I_z+I_z^A,$$

где I_z — момент инерции физического маятника относительно точки O подвеса.

Найдем момент инерции точечного груза A:

$$I_z^A=mx^2.$$

Тогда

$$I_{\text{пр}}=I_z+mx^2. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$(I_z+mx^2)\ddot{\varphi}=-(mx+Mh)g\varphi.$$

Так как $\sin\varphi\approx\varphi$, то

$$\ddot{\varphi}+\frac{mx+Mh}{I_z+mx^2}g\varphi=0$$

или

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

где $k^2=\dfrac{(mx+Mh)g}{I_z+mx^2}$.

Найдем период колебаний системы:

$$T^* = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(mx+Mh)g}{I_z+mx^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z+mx^2}{(mx+Mh)g}}.$$

Так как $T = T^*$, то

$$\frac{I_z}{Mgh} = \frac{I_z+mx^2}{(mx+Mh)g}$$

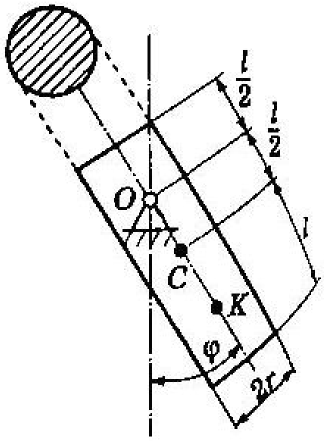
и тогда искомое расстояние

$$x = \frac{I_z}{Mh},$$

которое является приведенной длиной физического маятника.

О т в е т: на расстоянии приведенной длины физического маятника.

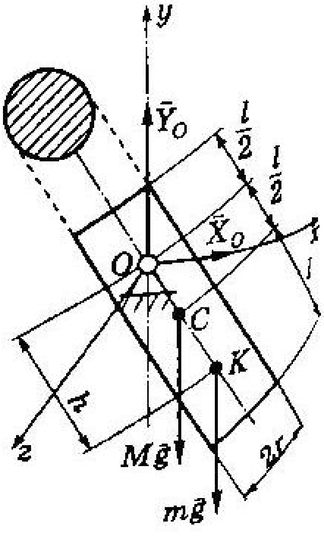
Задача 37.38



Круглый цилиндр массы M, длины $2l$ и радиуса $r = l/6$ качается около оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Как изменится период качаний цилиндра, если прикрепить к нему на расстоянии $OK = 85/72l$ точечную массу m?

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение системы, состоящей из круглого цилиндра и точечного груза K. Покажем на рисунке действующие на систему силы: силы тяжести цилиндра $M\bar{g}$ и груза $m\bar{g}$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ осей.



Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения системы относительно оси z, проходящей через точку O:

$$I_{\text{пр}}\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \tag{1}$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -Mg\frac{l}{2}\sin\varphi - mgh\sin\varphi. \tag{2}$$

Так как при малых значениях угла φ $\sin\varphi \approx \varphi$, то

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = -\left(Mg\frac{l}{2} + mh\right)g\varphi.$$

Значение приведенного момента инерции системы

$$I_{\text{пр}} = I_z^{\text{ц}} + I_z^{\text{гр}}.$$

Найдем момент инерции цилиндра

$$I_z^{\text{ц}} = I_C^{\text{ц}} + M\left(\frac{OC}{2}\right)^2 = M\left[\frac{r^2}{4} + \frac{(2l)^2}{12}\right] + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{85}{144}Ml^2$$

и момент инерции точечного груза K

$$I_z^{\text{гр}} = mh^2 = m\left(\frac{85}{72}l\right)^2.$$

Тогда

$$I_{\text{пр}} = \left(\frac{1}{2}M + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}l^2. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$\left(\frac{1}{2}M + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}l^2\ddot{\varphi} = -\left(M\frac{l}{2} + m\frac{85}{72}l\right)g\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\left(\frac{M}{2} + \frac{85}{72}m\right)gl}{\left(\frac{M}{2} + \frac{85}{72}m\right)\frac{85}{72}l^2}\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{72g}{85l}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{72g}{85l}$.

Найдем период колебаний системы:

$$T^* = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{72g}{85l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{85}{72}\frac{l}{g}}.$$

Уберем груз K и рассмотрим колебания цилиндра. Запишем дифференциальное уравнение колебаний цилиндра:

$$I_z^{ц}\ddot{\varphi}+Mg\frac{l}{2}\varphi=0$$

или

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mg\frac{l}{2}}{I_z^{ц}}\varphi=0.$$

С учетом найденного значения момента инерции цилиндра относительно оси z получим

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mg\frac{l}{2}}{\frac{85}{2\cdot 72}Ml^2}\varphi=0$$

или

$$\ddot{\varphi}+\frac{72g}{85l}\varphi=0.$$

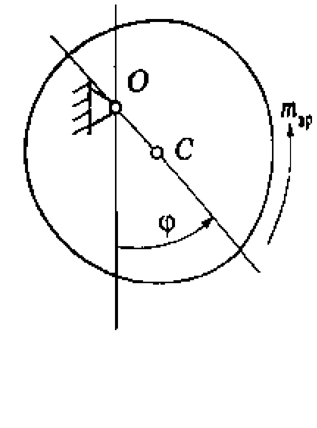
Период колебаний цилиндра

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{72g}{85l}}}=2\pi\sqrt{\frac{85l}{72g}}.$$

Таким образом, получили, что $T=T^*$, т.е. период колебаний не изменится.

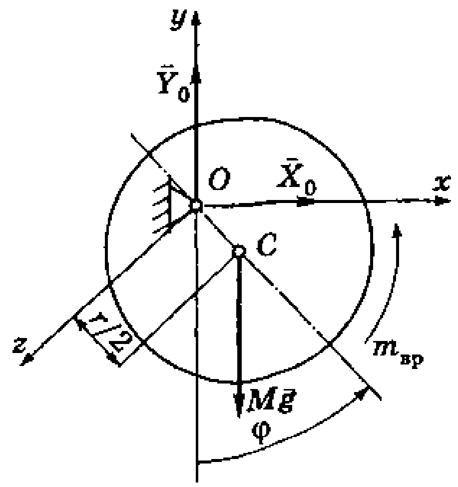
Ответ: период качаний не изменится, так как точечная масса добавлена в центре качаний цилиндра.

Задача 37.39



Найти уравнение малых колебаний однородного диска массы M и радиуса r, совершающего колебания вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной его плоскости и отстоящей от центра масс C диска на расстоянии $OC=r/2$. К диску приложен вращающийся момент $m_{вр}$, причем $m_{врz}=m_0\sin pt$, где m_0 и p — постоянные. В начальный момент диску, находившемуся в нижнем положении, была сообщена угловая скорость ω_0. Силами сопротивления пренебречь. Считая колебания малыми, принять $\sin\varphi \approx \varphi$.

Решение



Рассмотрим движение диска под действием приложенных к нему сил, показанных на рисунке.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения диска вокруг неподвижной оси z:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{вр} - Mg\cdot OC\cdot\sin\varphi = m_0\sin pt - Mg\frac{r}{2}\varphi, \qquad (2)$$

так как для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$.

Определим момент инерции диска относительно оси z:

$$I_z = I_C + M(OC)^2 = \frac{Mr^2}{2} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3Mr^2}{4}. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$\frac{3Mr^2}{4}\ddot{\varphi} = m_0\sin pt - Mg\frac{r}{2}\varphi.$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3r}\varphi = \frac{4m_0}{3Mr^2}\sin pt$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h\sin pt, \qquad (4)$$

где k — круговая частота собственных колебаний диска, $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$; $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$.

Уравнение (4) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний.

Общее решение дифференциального уравнения (4) ищем в виде суммы общего решения $\overline{\varphi}$ однородного дифференциального уравнения $\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$ и частного решения φ^*:

$$\varphi=\overline{\varphi}+\varphi^*.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$\overline{\varphi}=A\cos kt+B\sin kt.$$

Частное решение в случае, когда $p\neq k$, имеет вид

$$\varphi^*=D\sin pt.$$

Продифференцируем дважды это уравнение:

$$\dot{\varphi}^*=Dp\cos pt,$$

$$\ddot{\varphi}^*=-Dp^2\sin pt.$$

Найдем значение постоянной интегрирования D. Подставим значения φ и $\ddot{\varphi}$ в дифференциальное уравнение (4):

$$-Dp^2\sin pt+Dk^2\sin pt=h\sin pt,$$

откуда получим

$$D=\frac{h}{k^2-p^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (4) примет вид:

$$\varphi=A\cos kt+B\sin kt+D\sin pt.$$

Продифферинцируем это выражение по времени:

$$\dot{\varphi}=-Ak\sin kt+Bk\cos kt+Dp\cos pt.$$

Постоянные интегрирования A и B найдем из начальных условий: $t=0$, $\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=\omega_0$. Получим

$$A=\varphi_0=0,$$

$$B=\frac{\omega_0-Dp}{k}=\frac{1}{k}\left(\omega_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\right).$$

Тогда

$$\varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right)\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

Найдем частное решение в случае резонанса, т.е. когда $p = k$:

$$\varphi^* = Et\cos pt,$$

$$\dot{\varphi}^* = E\cos pt - Ept\cos pt,$$

$$\ddot{\varphi}^* = -Ep\sin pt - Ep\sin pt - Ep^2 t\cos pt.$$

Определим постоянную интегрирования E. Подставим значения φ^* и ϕ^* в дифференциальное уравнение (4):

$$-2Ep\sin pt - Ep^2 t\cos pt + k^2 Et\cos pt = h\sin pt$$

и получим

$$E = -\frac{h}{2p}.$$

Тогда общее уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\varphi = A\cos kt + B\sin kt + Et\cos pt,$$

$$\phi = -Ak\sin kt + Bk\cos kt + E\cos pt - Ept\sin pt.$$

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\phi_0 = \omega_0$. Получим

$$A = \varphi_0 = 0,$$

$$B = \frac{\dot{\varphi}_0 - E}{k} = \frac{\omega_0 + \dfrac{h}{2p}}{p} = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right).$$

Запишем уравнение малых колебаний с учетом полученных значений в случае резонанса:

$$\varphi = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right)\sin pt - \frac{h}{2p}t\cos pt.$$

Ответ: 1) при $p \neq \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{k}\left(\omega_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}\right)\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt$,

где $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$; $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$;

2) при $p = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi = \frac{1}{p}\left(\omega_0 + \frac{h}{2p}\right)\sin pt - \frac{h}{2p}t\cos pt$,

где $h = \frac{4m_0}{3Mr^2}$.

Задача 37.40

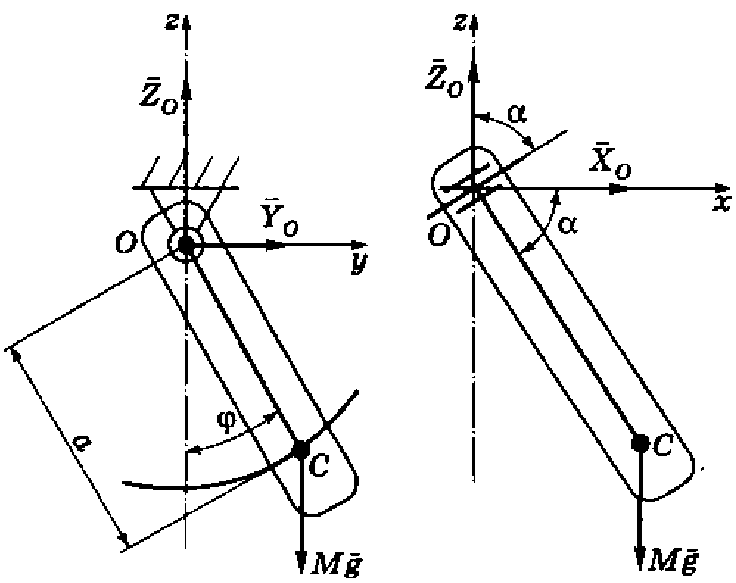
В сейсмографах — приборах для регистрации землетрясений — применяется физический маятник, ось подвеса которого образует угол α с вертикалью. Расстояние от оси подвеса до центра масс маятника равно a, момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси подвеса, равен I_C, масса маятника равна M. Определить период колебаний маятника.

Решение

Рассмотрим движение физического маятника, ось подвеса которого составляет угол α с вертикалью. Покажем на рисунке действующие на маятник силы: силу тяжести $M\bar{g}$, реакции $\bar{X}_O, \bar{Y}_O$ и $\bar{Z}_O$ опоры O.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы материальных точек относительно оси x:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x\left(\bar{F}_k^e\right). \quad (1)$$



Главный момент внешних сил, приложенных к маятнику, относительно оси x:

$$\sum M_x(\overline{F}_k^e) = -Mga\sin\alpha\sin\varphi = -Mga\varphi\sin\alpha, \qquad (2)$$

так как $\sin\varphi \approx \varphi$.

Главный момент количеств движения относительно оси x найдем, определив момент инерции маятника относительно оси подвеса по теореме Гюйгенса — Штейнера:

$$L_x = I_x\omega = (I_C + Ma^2)\omega. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$(I_C + Ma^2)\frac{d\omega}{dt} = -Mag\,\varphi\sin\alpha$$

или

$$(I_C + Ma^2)\ddot{\varphi} = -Mag\,\varphi\sin\alpha.$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mag\sin\alpha}{I_C + Ma^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Mag\sin\alpha}{I_C + Ma^2}$.

Это уравнение является дифференциальным уравнением колебаний маятника с круговой частотой

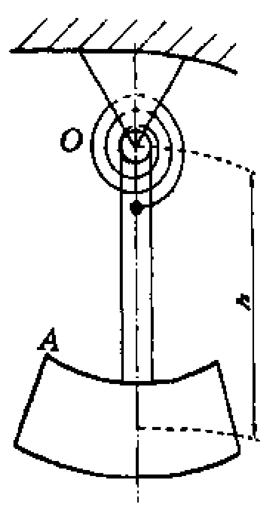
$$k = \sqrt{\frac{Mag\sin\alpha}{I_C + Ma^2}}.$$

Определим период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Mag\sin\alpha}{I_C + Ma^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + Ma^2}{Mag\sin\alpha}}.$$

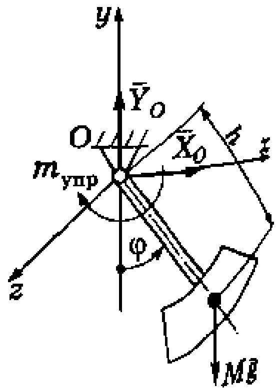
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_C + Ma^2}{Mag\sin\alpha}}$.

Задача 37.41



В вибрографе для записи горизонтальных колебаний фундаментов машин маятник OA, состоящий из рычага с грузом на конце, может качаться вокруг своей горизонтальной оси O, удерживаясь в вертикальном положении устойчивого равновесия собственной массой и спиральной пружиной. Определить период собственных колебаний маятника при малых углах отклонения, если максимальный статический момент силы тяжести маятника относительно той же оси вращения равен Mgh, момент инерции относительно той же оси равен I_z, коэффициент жесткости пружины, сопротивление которой пропорционально углу закручивания, равен c; при равновесном положении маятника пружина находится в ненапряженном состоянии. Сопротивлениями пренебречь.

Решение



Рассмотрим движение механической системы, состоящей из маятника OA и спиральной пружины. На систему действуют внешние силы: сила тяжести маятника $M\bar{g}$, момент сил упругости спиральной пружины $m_{упр} = -c\varphi$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ опоры O.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем главный момент количеств движения системы

$$L_z = I_z\omega \qquad (2)$$

и главный момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_{zx}(\bar{F}_k^e) = -Mgh\sin\varphi - c\varphi = -Mgh\varphi - c\varphi, \qquad (3)$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$.

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = -(Mgh + c)\varphi$$

или

$$I_z \ddot{\varphi} = -(Mgh + c)\varphi.$$

После преобразований получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgh + c}{I_z}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{Mgh + c}{I_z}}$.

Это уравнение является дифференциальным уравнением свободных колебаний, k — круговая частота колебаний маятника.

Найдем период колебаний маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{Mgh + c}{I_z}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{Mgh + c}}.$$

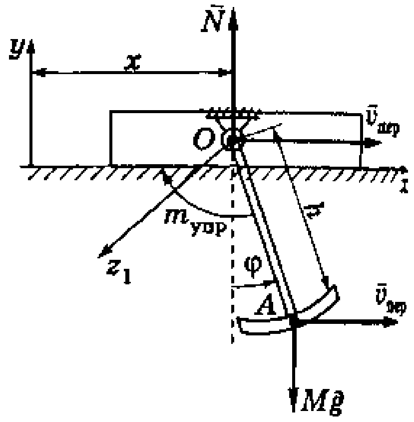
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_z}{c + Mgh}}$.

Задача 37.42

Виброграф (см. предыдущую задачу) закреплен на фундаменте, совершающем горизонтальные гармонические колебания по закону $x = a\sin\omega t$. Определить амплитуду a колебаний фундамента, если амплитуда вынужденных колебаний маятника вибрографа оказалась равной φ_0.

Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. На систему действуют силы: сила тяжести маятника $M\bar{g}$, момент сил упругости спиральной пружины $m_{\text{упр}} = -c\varphi$, реакция $\bar{N}$ фундамента. Покажем на рисунке положение вибрографа, когда угол отклонения стержня OA равен φ и направлен против часовой стрелки, а фундамент движется вправо со скоростью $\bar{v}_{пер}$.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы относительно оси z_1:

$$\frac{dL_{z_1}}{dt} = \sum M_{z_1}(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем сумму моментов внешних сил, приложенных к вибрографу, относительно оси z_1:

$$\sum M_{z_1}(\bar{F}_k^e) = -Mgh\sin\varphi - c\varphi = -(Mgh + c)\varphi, \qquad (2)$$

где $\sin\varphi \approx \varphi$, и кинетический момент вибрографа относительно этой оси:

$$L_{z_1} = L_{z_1}^{пер} + L_{z_1}^{отн}.$$

Виброграф совершает сложное движение: относительное — вращение вокруг оси z_1, переносное — поступательное вместе с фундаментом со скоростью $v_{пер} = \dot{x} = a\omega\cos\omega t$.

Кинетический момент в переносном движении:

$$L_{z_1}^{пер} = M_{z_1}(M\bar{v}_{пер}) = Ma\omega\cos\omega t \cdot h \cdot \cos\varphi = Ma\omega h\cos\omega t,$$

так как $\cos\varphi = 1$.

Кинетический момент в относительном движении

$$L_{z_1}^{отн} = I_{z_1}\dot{\varphi}.$$

Тогда

$$L_{z_1} = I_{z_1}\dot{\varphi} + Ma\omega h\cos\omega t. \qquad (3)$$

Значения (2) и (3) подставим в уравнение (1):

$$\frac{d(I_{z_1}\dot{\varphi} + Ma\omega h\cos\omega t)}{dt} = -(Mgh + c)\varphi$$

и получим

$$I_{z_1}\ddot{\varphi} - Ma\omega^2 h\sin\omega t = -(Mgh + c)\varphi.$$

После преобразований запишем

$$\ddot{\varphi}+\frac{Mgh+c}{I_{z_1}}\cdot\varphi=\frac{Ma\omega^2h}{I_{z_1}}\sin\omega t$$

или

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=H\sin\omega t, \qquad (4)$$

где $k=\sqrt{\dfrac{Mgh+c}{I_{z_1}}}$ — круговая частота собственных колебаний системы;

$H=\dfrac{Ma\omega^2h}{I_z}$.

Уравнение (4) является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний. Общее решение φ этого уравнения ищем в виде суммы общего решения $\overline{\varphi}$ однородного дифференциального уравнения $\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0$ и частного решения φ^*, т.е.

$$\varphi=\overline{\varphi}+\varphi^*,$$

где $\overline{\varphi}=A\cos kt+B\sin kt$; $\varphi^*=D\sin\omega t$.

Тогда уравнение движения примет вид

$$\varphi=A\cos kt+B\sin kt+D\sin\omega t.$$

Продифференцируем выражение φ^* дважды и подставим $\ddot{\varphi}^*$ и φ^* в уравнение (4), откуда найдем

$$D=\frac{H}{k^2-\omega^2}.$$

Вынужденные колебания описываются частным решением:

$$\varphi^*=D\sin\omega t=\frac{H}{k^2-\omega^2}\sin\omega t=\frac{Ma\omega^2h}{I_{z_1}\left(\dfrac{Mgh+c}{I_{z_1}}-\omega^2\right)}\sin\omega t,$$

значит, амплитуда вынужденных колебаний

$$\varphi_0=\frac{Ma\omega^2h}{Mgh+c-\omega^2I_{z_1}}.$$

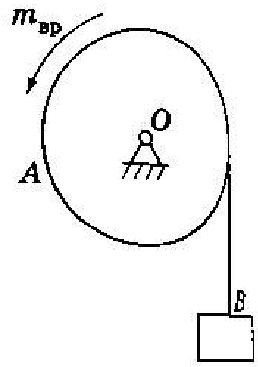
Тогда амплитуда колебаний фундамента

$$a = \frac{\varphi_0(Mgh + c - \omega^2 I_{z_1})}{Mh\omega^2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{\varphi_0(Mgh + c - \omega^2 I_{z_1})}{Mh\omega^2}$.

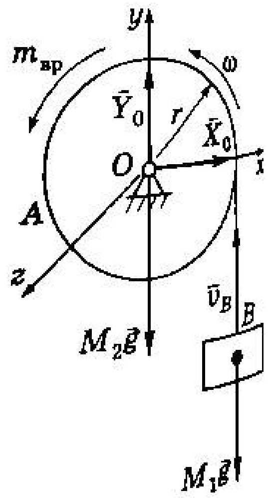
Задача 37.43

При пуске в ход электрической лебедки к барабану A приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный времени, причем $m_{вр} = at$, где a — постоянная. Груз B массы M_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы M_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.



Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. К системе приложены внешние силы: сила тяжести $M_1\bar{g}$ груза B, сила тяжести $M_2\bar{g}$ барабана A, вращающий момент $m_{вр}$, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ опоры O.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{вр} - M_1 gr = \alpha t - M_1 gr. \qquad (2)$$

Момент количеств движения системы

$$L_z = L_z^A + L_z^B.$$

Определим момент количеств движения барабана A

$$L_z^A = I_A\omega = \frac{M_2 r^2}{2}\omega$$

и момент количества движения груза B

$$L_z^B = m_z(M_1\bar{v}_B) = M_1 r^2\omega.$$

Тогда

$$L_z = (2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\omega. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и получим

$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = \alpha t - M_1 gr. \qquad (4)$$

В уравнении (4) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{t}(\alpha t - M_1 gr)dt,$$

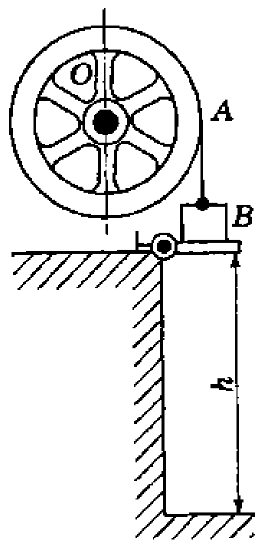
$$(2M_1 + M_2)\frac{r^2}{2}\omega = \frac{\alpha t^2}{2} - M_1 grt.$$

Откуда угловая скорость барабана A

$$\omega = \frac{\dfrac{\alpha t^2}{2} - M_1 grt}{(2M_1 + M_2)\dfrac{r^2}{2}} = \frac{(\alpha t - 2M_1 gr)t}{r^2(2M_1 + M_2)}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{(\alpha t - 2M_1 gr)t}{r^2(2M_1 + M_2)}$.

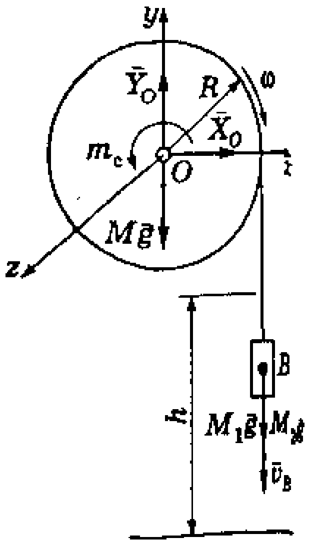
Задача 37.44



Для определения момента инерции I махового колеса A радиуса R относительно оси, проходящей через центр масс, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирю B массы M_1 и наблюдали продолжительность T_1 опускания гири с высоты h. Для исключения трения в подшипниках проделали второй опыт с гирей массы M_2, причем продолжительность опускания оказалась равной T_2 при прежней высоте. Считая момент силы трения постоянным и не зависящим от массы гири, вычислить момент инерции I.

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из махового колеса A и гири B. Покажем на рисунке внешние силы, которые действуют на систему: сила тяжести махового колеса $M\bar{g}$, сила тяжести гири $M_1\bar{g}$ или $M_2\bar{g}$, реакции $\bar{Y}_O$ и $\bar{X}_O$ опоры махового колеса, момент силы трения m_c в опоре O.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем момент внешних сил системы относительно оси z, когда подвешена гиря M_1:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = M_1 gR - m_c.$$

Момент количеств движения системы

$$L_z = L_z^A + L_z^B.$$

Определим момент количества движения барабана A

$$L_z^A = I\omega$$

и момент количества движения гири B

$$L_z^B = m_z(M_1\bar{v}_B) = M_1 R^2\omega.$$

Тогда

$$L_z = (I + M_1R^2)\omega.$$

Подставим найденные значения в уравнение (1) и получим

$$(I + M_1R^2)\frac{d\omega}{dt} = M_1gR - m_c. \qquad (2)$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (2):

$$(I + M_1R^2)\int d\omega = (M_1gR - m_c)\int dt,$$

$$(I + M_1R^2)\,\omega = (M_1gR - m_c)t + C_1. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из начальных условий: $\omega_0 = 0$ при $t = 0$, тогда $C_1 = 0$.

С учетом значения C_1 уравнение (3) примет вид

$$(I + M_1R^2)\omega = (M_1gR - m_c)t,$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Тогда

$$(I + M_1R^2)\frac{d\varphi}{dt} = (M_1gR - m_c)t. \tag{4}$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (4):

$$(I + M_1R^2)\int_0^{\varphi} d\varphi = (M_1gR - m_c)\int_0^{T_1} t\,dt,$$

$$(I + M_1R^2)\varphi = \frac{(M_1gR - m_c)T_1^2}{2}.$$

Найдем угол поворота колеса за время T_1:

$$\varphi = \frac{(M_1gR - m_c)T_1^2}{2(I + M_1R^2)}. \tag{5}$$

Заменим гирю массой M_1 на гирю массой M_2. Рассмотрим движение этой системы. Рассуждая аналогично, получим

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = M_2gR - m_c,$$

$$L_z = (I + M_2R^2)\omega.$$

Тогда

$$(I + M_2R^2)\frac{d\omega}{dt} = M_2gR - m_c.$$

Проинтегрируем это выражение дважды и найдем угол поворота колеса за время T_2:

$$(I + M_2R^2)\omega = (M_2gR - m_c)t,$$

$$(I + M_2R^2)\varphi = \frac{(M_2gR - m_c)T_2^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{(M_2gR - m_c)T_2^2}{2(I + M_2R^2)}. \tag{6}$$

Так как гиря B оба раза проходит один и тот же путь, то, вычитая из уравнения (5) уравнение (6), получим

$$\frac{2(I+M_1R^2)\varphi}{T_1^2}-\frac{2(I+M_2R^2)\varphi}{T_1^2}=M_1gR-m_c-M_2gR+m_c$$

или

$$2I\varphi\left(\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}\right)+2R^2\varphi\left(\frac{M_1}{T_1^2}-\frac{M_2}{T_2^2}\right)=gR(M_1-M_2).$$

Тогда момент инерции махового колеса

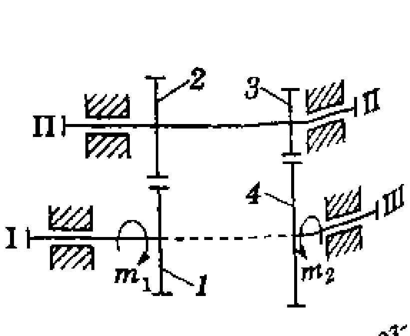
$$I=R^2\frac{\dfrac{g}{2R\varphi}(M_1-M_2)-\left(\dfrac{M_1}{T_1^2}-\dfrac{M_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2}-\dfrac{1}{T_2^2}}$$

или с учетом того, что $\varphi=\dfrac{h}{R}$,

$$I=R^2\frac{\dfrac{g}{2h}(M_1-M_2)-\left(\dfrac{M_1}{T_1^2}-\dfrac{M_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2}-\dfrac{1}{T_2^2}}.$$

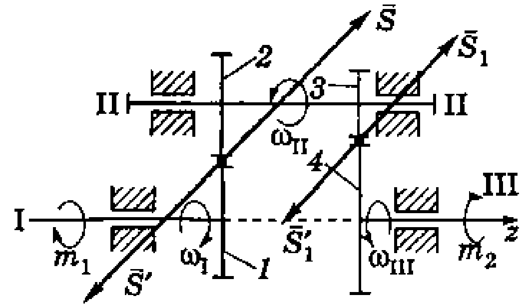
Ответ: $I=R^2\dfrac{\dfrac{g}{2h}(M_1-M_2)-\left(\dfrac{M_1}{T_1^2}-\dfrac{M_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2}-\dfrac{1}{T_2^2}}.$

Задача 37.45



К валу I присоединен электрический мотор, вращающий момент которого равен m_1. Посредством редуктора скоростей, состоящего из четырех зубчатых колес *1*, *2*, *3* и *4*, этот вращающий момент передается на шпиндель III токарного станка, к которому приложен моменты сопротивления m_2 (этот момент возникает при снятии резцом стружки с обтачиваемого изделия). Определить угловое ускорение шпинделя III, если моменты инерции всех вращающихся деталей, насаженных на валы I, II и III, соответственно равны I_{I}, I_{II}, I_{III}. Радиусы равны r_1, r_2, r_3 и r_4.

Решение



Рассмотрим механическую систему, представляющую редуктор скоростей, на которую действуют внешние силы: момент m_1 вращения электромотора, момент m_2 сопротивления, реакции опор валов.

Для каждого вала составим дифференциальное уравнение вращения вокруг неподвижной оси с учетом сил в зацеплении колес, или окружных усилий:

$$\bar{S} = -\bar{S}',$$

$$\bar{S}_1 = -\bar{S}_1'.$$

Тогда для вала I

$$I_{\text{I}}\varepsilon_{\text{I}} = m_1 - Sr_1, \tag{1}$$

для вала II

$$I_{\text{II}}\varepsilon_{\text{II}} = S'r_2 - S_1r_3, \tag{2}$$

для вала III

$$I_{\text{III}}\varepsilon_{\text{III}} = S_1'r_4 - m_2. \tag{3}$$

Выразим ε_{I} и ε_{II} через ε_{III}. Так как

$$\frac{\varepsilon_{\text{III}}}{\varepsilon_{\text{II}}} = \frac{r_3}{r_4}, \quad \frac{\varepsilon_{\text{II}}}{\varepsilon_{\text{I}}} = \frac{r_1}{r_2}$$

то

$$\varepsilon_{\text{II}} = \frac{\varepsilon_{\text{III}}r_4}{r_3}, \quad \varepsilon_{\text{I}} = \varepsilon_{\text{II}}\frac{r_2}{r_1} = \frac{\varepsilon_{\text{III}}r_2r_4}{r_1r_3}. \tag{4}$$

Подставим выражения (4) в уравнения (1) и (2), умножив уравнение (1) на r_2, а уравнение (2) на r_1:

$$I_{\text{I}}\frac{\varepsilon_{\text{III}}r_2r_4}{r_1 \cdot r_3}r_2 = m_1r_2 - Sr_1r_2,$$

$$I_{\text{II}}\frac{\varepsilon_{\text{III}}r_4}{r_3}r_1 = S'r_2r_1 - S_1r_3r_1,$$

так как $S = S'$, то, сложив эти уравнения, получим

$$\varepsilon_{III}\left(I_I \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} r_2 + I_{II}\frac{r_4}{r_3} r_1\right) = m_1 r_2 - S_1 r_3 r_1. \qquad (5)$$

Умножим уравнение (3) на $r_3 r_1$, а уравнение (5) на r_4 и сложим уравнения (3) и (5), учитывая, что $S_1 = S_1'$.

Тогда

$$\varepsilon_{III}\left(I_{III} r_1 r_3 + I_{II}\frac{r_4^2}{r_3} r_1 + I_I \frac{r_2^2 r_4^2}{r_1 r_3}\right) = m_1 r_2 r_4 - m_2 r_1 r_3.$$

Откуда угловое ускорение вала III:

$$\varepsilon_{III} = \frac{m_1 \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} - m_2}{\left(I_I \frac{r_2^2}{r_1^2} + I_{II}\right)\frac{r_4^2}{r_3^2} + I_{III}}$$

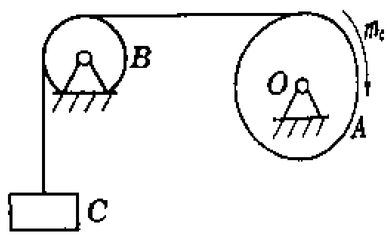
или

$$\varepsilon_{III} = \frac{m_1 k_{1,2}\cdot k_{3,4} - m_2}{(I_1 k_{1,2}^2 + I_{II})k_{3,4}^2 + I_{III}},$$

где $k_{1,2} = \frac{r_2}{r_1}$; $k_{3,4} = \frac{r_4}{r_3}$.

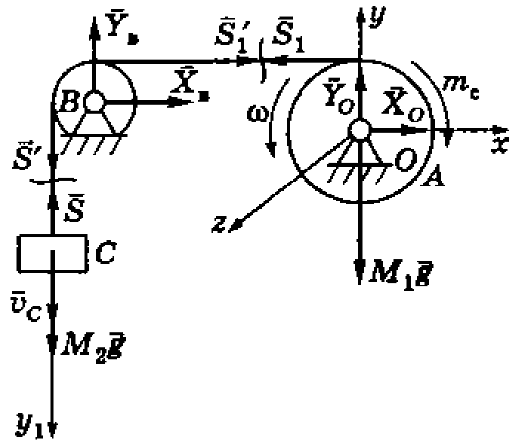
Ответ: $\varepsilon_{III} = \frac{m_1 k_{1,2}\cdot k_{3,4} - m_2}{(I_1 k_{1,2}^2 + I_{II})k_{3,4}^2 + I_{III}}$, где $k_{1,2} = \frac{r_2}{r_1}$; $k_{3,4} = \frac{r_4}{r_3}$.

Задача 37.46



Барабан A массы M_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза C массы M_2, привязанного к концу нерастяжимого троса. Трос переброшен через блок B и намотан на барабан A. К барабану A приложен момент сопротивления m_c, пропорциональный угловой скорости барабана; коэффициент пропорциональности равен α. Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое. Массами каната и блока B пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.

Решение



Рассмотрим механическую систему, состоящую из барабана A, груза C и невесомого блока. На систему действуют внешние силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$ барабана и $M_2\bar{g}$ груза, момент сопротивления m_c, реакции $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ опоры O. Нарисуем схему, разделив систему на три объекта движения (см. рисунок), и покажем силы натяжения троса: $\bar{S} = -\bar{S}'$ и $\bar{S}_1 = -\bar{S}_1'$. Так как блок идеальный и невесомый, то $|\bar{S}'| = |\bar{S}_1'|$, а следовательно, $|\bar{S}| = |\bar{S}_1'|$.

Применим к движению барабана теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e),$$

или

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} = S_1 r - m_c. \tag{1}$$

Для определения силы натяжения S_1 применим к движению груза C второй закон динамики в проекции на ось y_1:

$$M_2 a = M_2 g - S, \tag{2}$$

где $a = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt}r$ — ускорение груза, равное вращательному ускорению точек на ободе барабана.

Выразим S из уравнения (2) и, подставив в уравнение (1), получим

$$(I_z + M_2 r^2)\frac{d\omega}{dt} = M_2 g r - m_c. \tag{3}$$

С учетом того, что $I_z = \frac{M_1 r^2}{2}$, а $m_c = \alpha\omega$, уравнение (3) примет вид

$$\frac{r^2}{2}(M_1 + 2M_2)\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\left(\omega - \frac{M_2 g r}{\alpha}\right). \tag{4}$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение (4):

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\omega-\dfrac{M_2gr}{\alpha}}=-\frac{2\alpha}{r^2(M_1+2M_2)}\int_0^t dt,$$

$$\ln\left(\omega-\frac{M_2gr}{\alpha}\right)\Bigg|_0^{\omega}=-\frac{2\alpha t}{r^2(M_1+2M_2)}$$

или

$$\ln\left|\frac{\omega-\dfrac{M_2gr}{\alpha}}{-\dfrac{M_2gr}{\alpha}}\right|=-\frac{2\alpha t}{r^2(M_1+2M_2)}=-\beta t,$$

где $\beta=\dfrac{2\alpha}{r^2(M_1+2M_2)}$.

После преобразований найдем угловую скорость барабана

$$\omega=\frac{M_2gr}{\alpha}(1-e^{-\beta t}).$$

Ответ: $\omega=\dfrac{M_2gr}{\alpha}(1-e^{-\beta t})$, где $\beta=\dfrac{2\alpha}{r^2(M_1+2M_2)}$; $\lim\limits_{t\to\infty}\omega=\dfrac{M_2gr}{\alpha}=\text{const}$.

Задача 37.47

Определить угловое ускорение ведущего колеса автомашины массы M и радиуса r, если к колесу приложен вращающий момент $m_{вр}$. Момент инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс C перпендикулярно плоскости материальной симметрии, равен I_C; $f_к$ — коэффициент трения качения, $F_{тр}$ — сила трения. Найти также значение вращающего момента, при котором колесо катится с постоянной угловой скоростью.

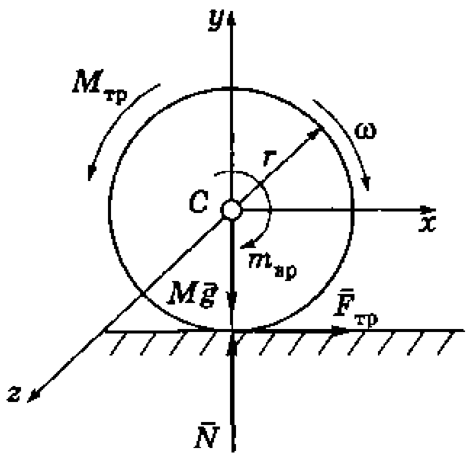
Решение

Рассмотрим движение колеса под действием внешних сил: силы тяжести колеса $M\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$, вращающего момента $m_{вр}$, момента $M_{тр}$ сопротивления качению, нормальной реакции $\bar{N}$ опорной поверхности.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \tag{1}$$

Найдем момент количеств движения колеса относительно оси z, проходящей через центр масс C:



$$L_z = I_C\omega$$

и главный момент внешних сил, действующих на колесо:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_{вр} - M_{тр} - F_{тр}r =$$

$$= m_{вр} - Mg\,f_к - F_{тр}r.$$

Подставим найденные значения в уравнение (1):

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = m_{вр} - Mg\,f_к - F_{тр}r, \tag{2}$$

где $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ — угловое ускорение.

Тогда

$$\varepsilon = \frac{m_{вр} - Mg\,f_к - F_{тр}r}{I_C}.$$

Найдем значение $m_{вр}$, при котором колесо катится с постоянной угловой скоростью, т.е. когда $\omega = \text{const}$, а $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$m_{вр} - Mg\,f_к - F_{тр}r = 0.$$

Откуда

$$m_{вр} = Mg\,f_к + F_{тр}r.$$

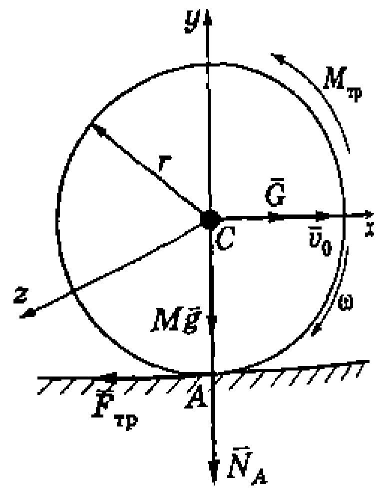
Ответ: $\varepsilon = \frac{m_{вр} - Mg\,f_к - F_{тр}r}{I_C}$; $m_{вр} = Mg\,f_к + F_{тр}r$.

Задача 37.48

Определить угловую скорость ведомого автомобильного колеса массы M и радиуса r. Колесо, катящееся со скольжением по горизонтальному шоссе, приводится в движение посредством горизонтально направленной силы, приложенной в его центре масс C. Момент инерции колеса относительно оси C, перпендикулярной плоскости материальной симметрии, равен I_C; $f_к$ — коэффициент трения качения, f — коэффициент трения при качении со скольжением. В начальный момент колесо находилось в покое.

Решение

Рассмотрим движение ведомого колеса под действием внешних сил, приложенных к нему: силы тяжести колеса $M\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$ скольжения, движущей силы $\bar{G}$, момента $M_{тр}$ сопротивления качению, реакции $\bar{N}_A$ связи.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Найдем момент количеств движения колеса

$$L_z = I_C\omega$$

и момент внешних сил относительно оси z:

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = F_{тр}r - M_{тр} = Nfr - Nf_к = Mg(fr - f_к).$$

Подставим эти значения в уравнение (1):

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = Mg(fr - f_к). \qquad (2)$$

Разделим переменные и проинтегрируем уравнение (2):

$$I_C\int_0^{\omega} d\omega = Mg(fr - f_к)\int_0^{t} dt.$$

Определим угловую скорость ведомого колеса

$$\omega = \frac{Mg}{I_C}(fr - f_к)t.$$

Ответ: $\omega = \frac{Mg}{I_C}(fr - f_к)t.$

Задача 37.49

Изменится ли угловая скорость колеса, рассмотренного в предыдущей задаче, если модуль силы, приложенной в его центр масс C, увеличиться в два раза?

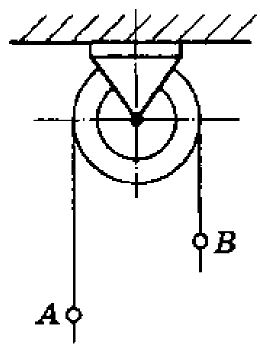
Решение

Смотрим решение задачи 37.48. Сила приложена к центру масс колеса C и не создает момента относительно оси, поэтому изменение модуля силы не влияет на угловую скорость колеса.

Ответ: не изменится.

Задача 37.50

Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку A каната ухватился человек, к точке B подвязан груз одинаковой массы с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью v относительно каната?



Решение

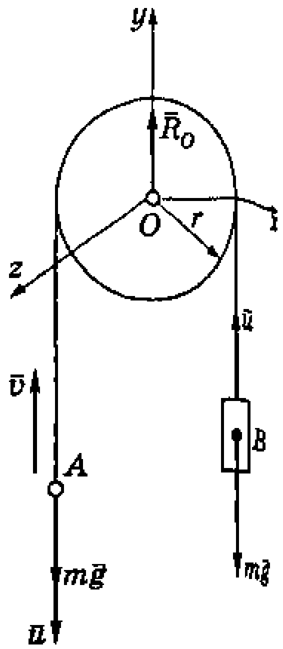
На механическую систему, состоящую из человека, груза и невесомых блока и каната, действуют внешние силы: сила тяжести человека $m\bar{g}$, сила тяжести груза $m\bar{g}$, реакция $\bar{R}_O$ опоры блока.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Найдем момент внешних сил относительно оси z, проходящей через ось блока:

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = mgr - mgr = 0.$$



Так как сумма моментов внешних сил равна нулю, то $L_z = \text{const}$.

Вначале система была в покое, т.е. $L_{O_z} = 0$.

Когда человек начал подниматься по канату с относительной скоростью $\overline{v}$, канат вместе с грузом получил скорость $\overline{u}$, а главный момент количеств движения системы стал:

$$L_{1z} = L_z^{\text{чел}} + L_z^{\text{гр}} = M_z(m\overline{v}_{\text{абс}}) + M_z(m\overline{u}) =$$

$$= m(u - v)r + mur = 0.$$

Откуда

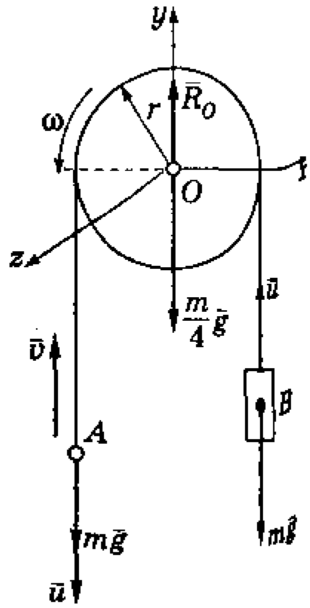
$$u = \frac{1}{2}v,$$

т.е. груз будет подниматься.

Ответ: груз будет подниматься с канатом со скоростью $v/2$.

Задача 37.51

Решить предыдущую задачу, принимая во внимание массу блока, которая в четыре раза меньше массы человека. Считать, что масса блока равномерно распределена по его ободу.



Решение

На механическую систему в этом случае действуют внешние силы: сила тяжести человека $m\overline{g}$, сила тяжести груза $m\overline{g}$, сила тяжести блока $\frac{1}{4}m\overline{g}$, реакция $\overline{R}_O$ опоры блока (см. рисунок).

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e).$$

Найдем момент внешних сил относительно оси z, проходящей через ось блока:

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = mgr - mgr = 0.$$

Поэтому главный момент количеств движения остается постоянным, т.е. $L_z = \text{const}$.

Первоначально система была в покое, значит, $L_{Oz} = 0$.

Когда человек стал подниматься по канату с относительной скоростью $\overline{v}$, то канат вместе с закрепленным на нем грузом начал перемещаться со скоростью $\overline{u}$, а блок поворачиваться с угловой скоростью

$$\omega = \frac{u}{r}.$$

Найдем главный момент количеств движения системы:

$$L_z = L_z^{\text{чел}} + L_z^{\text{гр}} + L_z^{\text{б}}.$$

Момент количества движения человека $L_z^{\text{чел}}$, совершающего сложное движение, состоящее из относительного движения вверх по канату со скоростью $\overline{v}_{\text{отн}} = \overline{v}$ и переносного — вместе с канатом вниз со скоростью $\overline{v}_{\text{пер}} = \overline{u}$, равен

$$L_z^{\text{чел}} = M_z(m\overline{v}_{\text{абс}}) = M_z(m\overline{v}_{\text{пер}}) + M_z(m\overline{v}_{\text{отн}}) = mur - mvr.$$

Момент количества движения груза $L_z^{\text{гр}}$, поднимающегося вместе с канатом со скоростью $\overline{u}$,

$$L_z^{\text{гр}} = M_z(m\overline{u}) = mur.$$

Момент количества движения блока

$$L_z^{\text{б}} = I_z\omega = \frac{mr^2}{4}\,\frac{u}{r} = \frac{1}{4}mur.$$

Тогда

$$L_z = mur - mvr + \frac{1}{4}mur + mur = m\left(2\frac{1}{4}u - v\right)r = 0.$$

Откуда скорость груза

$$u = \frac{4}{9}v,$$

т.е. груз будет подниматься.

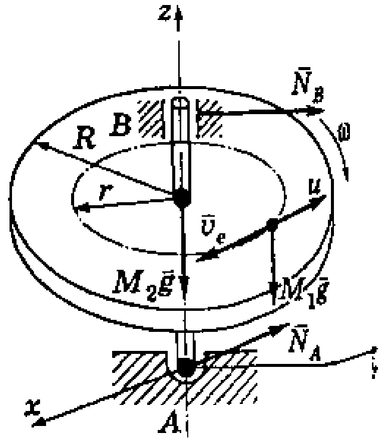
Ответ: груз будет подниматься со скоростью $\frac{4}{9}v$.

Задача 37.52

Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг неподвижной оси Oz, проходящей через ее центр O; по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz, равном r, идет с постоянной относительной скоростью u человек, масса которого равна M_1. С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если массу ее M_2 можно считать равномерно распределенной по площади круга радиуса R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю?

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На нее действуют силы: сила тяжести $M_2\bar{g}$ платформы, сила тяжести $M_1\bar{g}$ человека, реакции $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$ опор (см. рисунок).



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Главный момент сил, действующих на систему, относительно оси z

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = 0,$$

так как векторы внешних сил либо пересекают ось z, либо параллельный ей, следовательно, $L_z = \text{const}$.

В начальном положении система была в покое и поэтому $L_{0z} = 0$.

Главный момент количеств движения системы, когда по ней идет человек:

$$L_z = L_z^{\text{пл}} + L_z^{\text{чел}}. \tag{1}$$

Найдем момент количества движения платформы

$$L_z^{\text{пл}} = I_z\omega = \frac{M_2R^2}{2}\omega$$

и момент количества движения человека с учетом того, что он участвует в сложном движении,

$$L_z^{\text{чел}} = M_z(M_1\bar{v}_{\text{абс}}) = M_z[M_1(v_e - u)] = M_z[M_1(\omega r - u)] = M_1r^2\omega - M_1ru.$$

Найденные значения подставим в равенство (1) и приравняем его нулю:

$$L_z = \frac{M_2R^2}{2}\omega + M_1r^2\omega - M_1ru = 0.$$

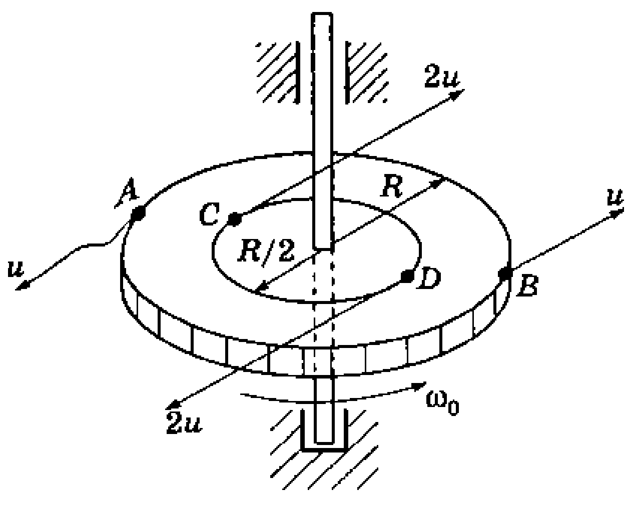
Откуда искомая угловая скорость вращения платформы

$$\omega = \frac{2M_1r}{M_2R^2 + 2M_1r^2}u.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{2M_1r}{M_2R^2 + 2M_1r^2}u.$

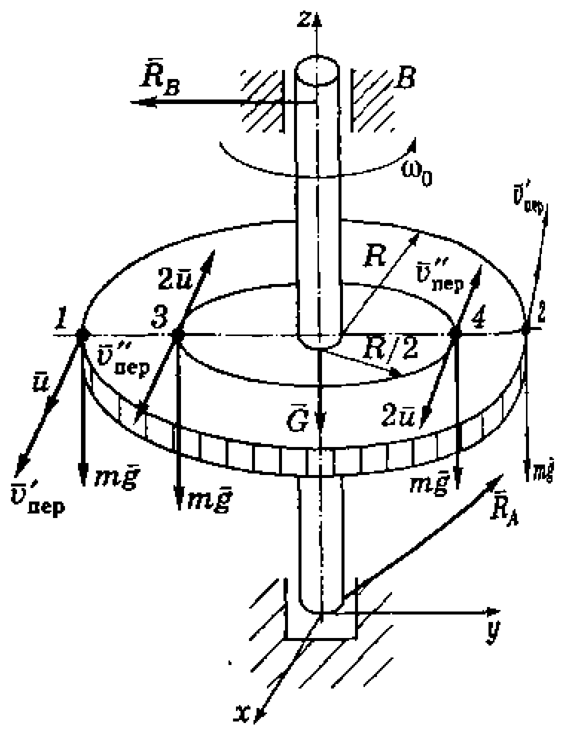
Задача 37.53

Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом на платформе стоят четыре человека одинаковой массы: два — на краю платформы, а два — на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы.



Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u, а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную строну с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу — круглым однородным диском.

Решение



На данную механическую систему действуют внешние силы (см. рисунок): сила тяжести $\bar{G}$ платформы, силы тяжести четырех человек, каждая равная $m\bar{g}$, реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ опор.

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Суммарный момент внешних сил относительно оси вращения z

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = 0,$$

так как векторы внешних сил либо пересекают ось z, либо параллельны ей. Поэтому

$$L_z = L_{0z} = L_{1z} = \text{const}. \tag{1}$$

Главный момент количеств движения в начальный момент времени

$$L_{0z} = L_{пл} + L_{ч1} + L_{ч2} + L_{ч3} + L_{ч4}.$$

Найдем момент количества движения платформы

$$L_{пл} = I_z\omega_0 = \frac{GR^2}{2g}\omega_0$$

и момент количеств движения людей:

а) неподвижно стоящих на краю платформы:

$$L_{ч1} = L_{ч2} = mR^2\omega_0;$$

б) на расстоянии $R/2$ от оси вращения:

$$L_{ч3} = L_{ч4} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

Тогда

$$L_{0z} = \frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0 = \frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2{,}5mR^2\omega_0. \qquad (2)$$

Главный момент количеств движения при перемещении людей по платформе:

$$L_{1z} = L_{пл} + L_{ч1} + L_{ч2} + L_{ч3} + L_{ч4}.$$

Найдем момент количества движения платформы

$$L_{пл} = I_z\,\omega_1 = \frac{GR^2}{2g}\omega_1$$

и момент количеств движения людей:

а) идущих по краю платформы в сторону ее вращения:

$$L_{ч1} = L_{ч2} = M_z(m\bar{v}_{абс}) = m(v'_{пер} + v'_{отн})R = m(\omega_1 R + u)R = mR^2\omega_1 + mRu,$$

где $v'_{пер} = \omega_1 R,\ v'_{отн} = u$;

б) движущихся на расстоянии $R/2$ от оси вращения в противоположную сторону:

$$L_{ч3} = L_{ч4} = M_z(m\bar{v}_{абс}) = m(v''_{пер} - v''_{отн}) =$$

$$= m\left(\omega_1\frac{R}{2} - 2u\right)\frac{R}{2} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_1 - 2mu\frac{R}{2},$$

где $v''_{пер} = \omega_1\dfrac{R}{2};\ v''_{отн} = 2u.$

Тогда

$$L_{1z} = \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2(mR^2\omega_1 + mRu) + 2\left[m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_1 - 2mu\frac{R}{2}\right] =$$

$$= \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2{,}5mR^2\omega_1. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в равенство (1) и получим

$$\frac{GR^2}{2g}\omega_0 + 2{,}5mR^2\omega_0 = \frac{GR^2}{2g}\omega_1 + 2{,}5mR^2\omega_1,$$

т.е. $\omega_0 = \omega_1$.

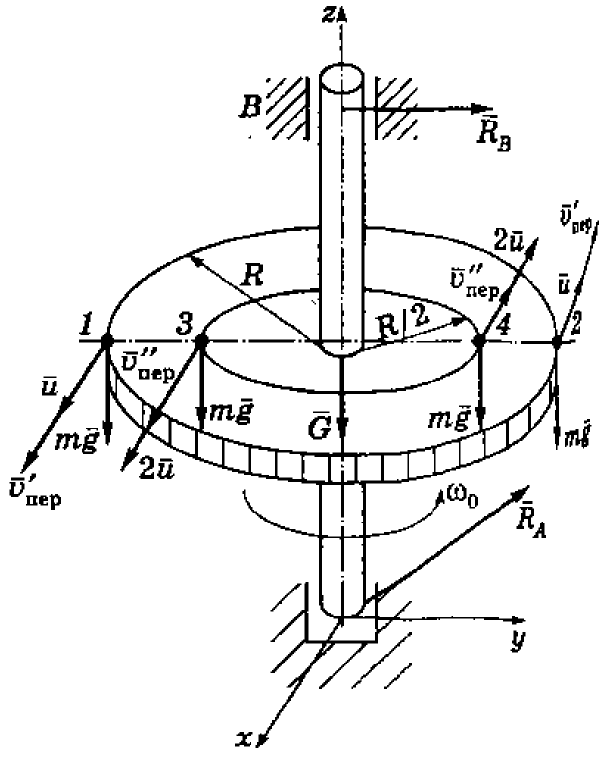
О т в е т: платформа будет вращаться с той же угловой скоростью.

Задача 37.54

Решить предыдущую задачу в предположении, что все люди движутся в сторону вращения платформы. Радиус платформы R, ее масса в четыре раза больше массы каждого из людей и равномерно распределена по всей ее площади. Выяснить также, чему должна быть равна относительная линейная скорость u для того, чтобы платформа перестала вращаться.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение данной механической системы, на которую действуют внешние силы: сила тяжести $\overline{G}$ платформы, силы тяжести четырех человек, каждая равная $m\bar{g}$, реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ опор.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e).$$

Главный момент сил, действующих на систему, относительно оси z

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = 0 \Rightarrow L_z = \text{const}.$$

Главный момент количества движения в начальный момент времени:

$$L_{0z} = L_{пл} + L_{ч1} + L_{ч2} + L_{ч3} + L_{ч4}.$$

Найдем момент количества движения платформы

$$L_{пл} = I_z\omega_0 = \frac{MR^2}{2}\omega_0$$

и момент количеств движения людей:

а) неподвижно стоящих на краю платформы:

$$L_{ч1} = L_{ч2} = mR^2\omega_0;$$

б) стоящих на расстоянии $R/2$ от оси вращения:

$$L_{ч3} = L_{ч4} = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

Тогда

$$L_{0z} = \frac{MR^2}{2}\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_0.$$

С учетом того, что $M = 4m$, получим

$$L_{0z} = 2mR^2\omega_0 + 2mR^2\omega_0 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0 = \frac{9}{2}mR^2\omega_0.$$

Главный момент количеств движения в момент перемещения людей по платформе:

$$L_{1z} = L_{пл} + L_{ч1} + L_{ч2} + L_{ч3} + L_{ч4}.$$

Найдем момент количества движения платформы

$$L_{пл} = I_z\omega = \frac{MR^2}{2}\omega = \frac{4mR^2}{2}\omega = 2mR^2\omega$$

и момент количеств движения людей (см. решение задачи 37.53):

а) идущих по краю платформы:

$$L_{ч1} = L_{ч2} = M_z(m\bar{v}_{абс}) = M_z[m(\omega R + u)] = mR^2\omega + mRu;$$

б) на расстоянии $\frac{R}{2}$ от оси вращения:

$$L_{ч3} = L_{ч4} = M_z(m\bar{v}_{абс}) = M_z\left[m\left(\omega\frac{R}{2} + 2u\right)\right] = \frac{mR^2}{4}\omega + mRu.$$

Тогда

$$L_{1z} = 2mR^2\omega + 2(mR^2\omega + mRu) + 2\left(\frac{mR^2}{4}\omega + mRu\right) = \frac{9}{2}mR^2\omega + 4mRu.$$

Найдем угловую скорость платформы, приравняв L_{0z} и L_{1z}:

$$L_z = L_{0z} = L_{1z}$$

или

$$\frac{9}{2}mR^2\omega_0 = \frac{9}{2}mR^2\omega + 4mRu.$$

Откуда

$$\omega = \omega_0 - \frac{8u}{9R}.$$

Определим значение скорости $\bar{u}$, при которой платформа остановится, т.е. когда $\omega = 0$:

$$u = \frac{9}{8}R\omega_0.$$

Ответ: $\omega = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$; $u = \frac{9}{8}R\omega_0$.

Задача 37.55

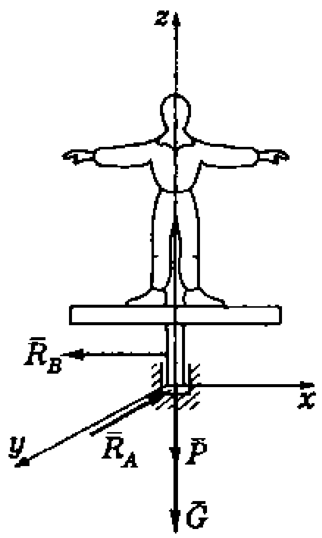
Человеку, стоящему на скамейке Жуковского, в то время, когда он вытянул руки в стороны, сообщают начальную угловую скорость, соответствующую 15 об./мин; при этом момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен 0,8 кг · м^2. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, если, приблизив руки к туловищу, он уменьшит момент инерции системы до 0,12 кг · м^2?

Решение

На данную механическую систему действуют внешние силы: сила тяжести $\bar{P}$ человека, сила тяжести $\bar{G}$ скамейки, реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ опор скамейки (см. рисунок).

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e).$$



Так как силы тяжести человека и скамейки, а также силы реакций опор $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ не создают моментов относительно оси z, то

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = 0,$$

поэтому

$$L_z = L_{0z} = L_{1z} = \text{const}.$$

Главный момент количеств движения системы вначале равен

$$L_{0z} = I_0\omega_0,$$

а когда человек приблизит руки к туловищу,

$$L_{1z} = I_1\omega_1.$$

Приравняем эти значения

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1.$$

Тогда

$$\omega_1 = \frac{I_0\omega_0}{I_1},$$

где $\omega_1 = \dfrac{\pi n_1}{30}$; $\omega_0 = \dfrac{\pi n_0}{30}$.

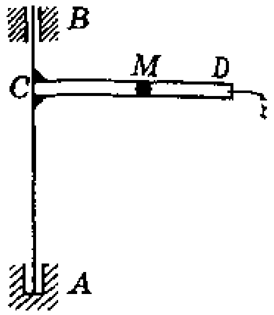
Следовательно, искомая угловая скорость вращения скамейки с человеком

$$n_1 = \frac{I_0 n_0}{I_0} = \frac{0{,}8 \cdot 15}{0{,}12} = 100 \text{ (об/мин)}.$$

Ответ: 100 об/мин.

Задача 37.56

Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB. Внутри трубки на расстоянии $MC = a$ от оси находится шарик M. В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0. Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен I, l — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m.



Решение

На данную механическую систему действуют внешние силы: сила тяжести $\overline{P}$ трубки, сила тяжести $m\overline{g}$ шарика, реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ опор (см. рисунок).

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e).$$

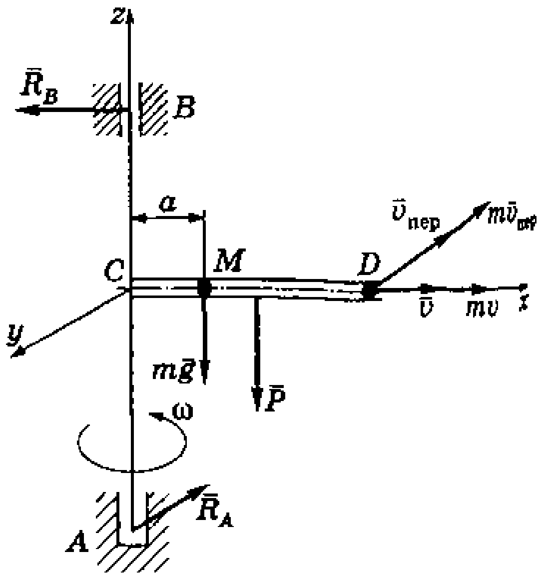
Так как силы тяжести трубки и шарика, а также силы реакций опор не создают моментов относительно оси z, то главный момент внешних сил

$$\sum M_z(\overline{F}_k^e) = 0,$$

поэтому

$$L_z = L_{0z} = L_{1z} = \text{const}.$$

Найдем главный момент количеств движения системы в момент, когда шарик M находится на расстоянии a от оси вращения:



$$L_{0z} = L_{\text{тр}} + L_{\text{ш}},$$

$$L_{\text{тр}} = I_{\text{тр}}\,\omega_0 = I\omega_0,$$

$$L_{\text{ш}} = ma^2\omega_0.$$

Тогда

$$L_{0z} = (I + ma^2)\omega.$$

Главный момент количеств движения системы в момент вылета шарика из трубки

$$L_{1z} = L_{тр} + L_{ш},$$

где $L_{тр} = I\omega$; $L_{ш} = ml^2\omega$.

Тогда

$$L_{1z} = (I + ml^2)\omega.$$

Приравняем полученные значения:

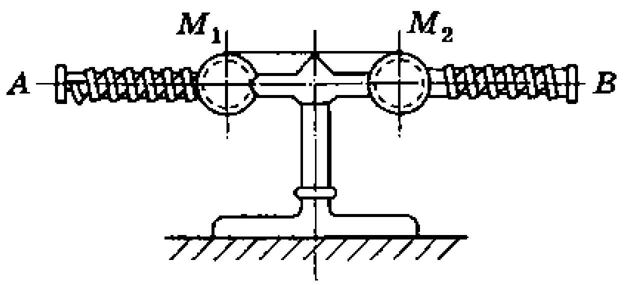
$$(I + ma^2)\omega_0 = (I + ml^2)\omega$$

и найдем угловую скорость трубки в момент вылета из нее шарика:

$$\omega = \frac{I + ma^2}{I + ml^2}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{I + ma^2}{I + ml^2}$.

Задача 37.57

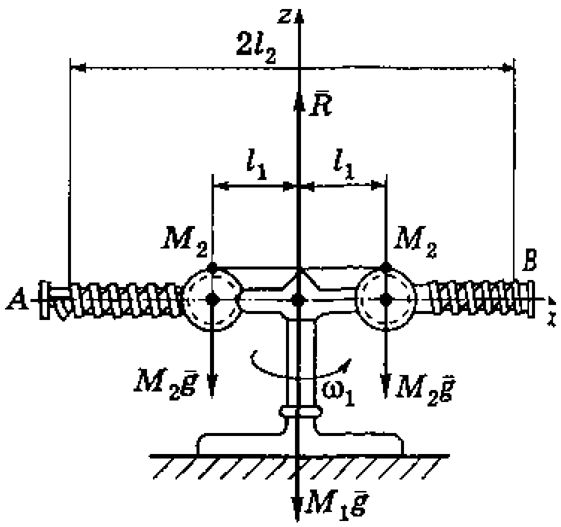


Стержень AB длины $2l = 180$ см и массы $M_1 = 2$ кг подвешен в устойчивом положении равновесия на острие так, что ось его горизонтальна. Вдоль стержня могут перемещаться два шарика массы $M_2 = 5$ кг каждый, прикрепленные к концам двух одинаковых пружин.

Стержню сообщается вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 64$ об/мин, причем шары расположены симметрично относительно оси вращения и центры их с помощью нити удерживаются на расстоянии $2l_1 = 72$ см друг от друга. Затем нить пережигается, и шары, совершив некоторое число колебаний, устанавливаются под действием пружин и сил трения в положение равновесия на расстоянии $2l_2 = 108$ см друг от друга. Рассматривая шары как материальные точки и пренебрегая массами пружин, определить новое число n_2 оборотов стержня в минуту.

Решение

К данной механической системе приложены внешние силы: сила тяжести $M_1\bar{g}$ стержня AB, силы тяжести шаров, каждая равная $M_2\bar{g}$, реакция $\bar{R}$ острия.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e).$$

Так как векторы внешних сил либо пересекают ось z, либо параллельны ей, то главный момент внешних сил

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = 0,$$

поэтому

$$L_z = L_{1z} = L_{2z} = \text{const}.$$

Главный момент количеств движения системы в момент, когда шары удерживаются нитью:

$$L_{1z} = L_{\text{ст}} + 2L_{\text{ш}}.$$

Определим момент количества движения стержня AB относительно оси z, проходящей через центр его тяжести:

$$L_{\text{ст}} = I_z\omega_1 = \frac{M_1(AB)^2}{12}\omega_1 = \frac{M_1(2l)^2}{12}\omega_1$$

и момент количества движения шара как точечного груза относительно оси z

$$L_{\text{ш}} = M_2 l_1^2 \omega_1.$$

Тогда

$$L_{1z} = \left(\frac{M_1(2l)^2}{12} + 2M_2 l_1^2\right)\omega_1 = \left(\frac{M_1 l^2}{3} + 2M_2 l_1^2\right)\frac{\pi n_1}{30}.$$

Главный момент количеств движения после пережигания нити, удерживавшей шары, когда шары будут находиться на расстоянии l_2 от оси вращения:

$$L_{2z} = L_{\text{ст}} + 2L_{\text{ш}}.$$

Найдем момент количества движения стержня AB относительно оси z, проходящей через центр его тяжести,

$$L_{\text{ст}} = I_z\omega_2 = \frac{M_1(2l)^2}{12}\omega_2$$

и момент количества движения шара относительно оси z

$$L_{\text{ш}} = M_2 l_2^2 \omega_2.$$

Тогда

$$L_{2z} = \left[\frac{M_1(2l)^2}{12} + 2M_2 l_2^2\right]\omega_2 = \left(\frac{M_1 l^2}{3} + 2M_2 l_2^2\right)\frac{\pi n_2}{30}.$$

Приравняем полученные значения главных моментов количеств движения системы:

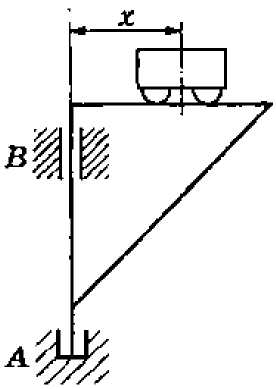
$$\left(\frac{M_1 l^2}{3} + 2M_2 l_1^2\right)\frac{\pi n_1}{30} = \left(\frac{M_1 l^2}{3} + 2M_2 l_2^2\right)\frac{\pi n_2}{30}.$$

Отсюда определим значение n_2:

$$n_2 = \frac{6M_2 l_1^2 + M_1 l^2}{6M_2 l_2^2 + M_1 l^2} n_1 = \frac{6\cdot 5\cdot (36)^2 + 2\cdot 90^2}{6\cdot 5\cdot (54)^2 + 2\cdot 90^2}\cdot 64 = 34 \text{ (об/мин)}.$$

Ответ: $n_2 = \dfrac{6M_2 l_1^2 + M_1 l^2}{6M_2 l_2^2 + M_1 l^2} n_1 = 34$ об/мин.

Задача 37.58

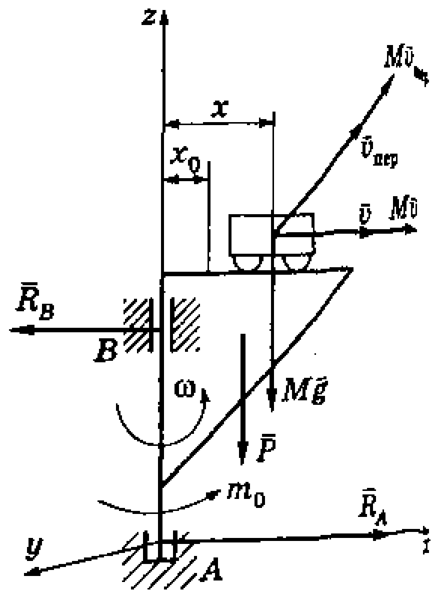


Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью v относительно стрелы. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный m_0. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния x тележки до оси вращения AB, если масса тележки с грузом равна M, I — момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения;

вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоя-
нии x_0 от оси AB.

Решение

К данной механической системе приложены внешние силы: сила тяжести $M\bar{g}$ тележки, силы тяжести $\bar{P}$ крана, момент m_0, реакции $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ опор.



Применим теорему об изменении главного момента количеств движения механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Главный момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = m_0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$\int_{L_{0z}}^{L_{1z}} dL_z = \int_0^t m_0 dt \Rightarrow L_{z_1} - L_{z_0} = m_0 t,$$

так как $L_{0z} = 0$, то кинетический момент системы в момент времени t

$$L_{1z} = m_0 t. \qquad (2)$$

С другой стороны, кинетический момент системы

$$L_{1z} = L_{кр} + L_т,$$

где $L_{кр}$ — момент количества движения подъемного крана, $L_{кр} = J\omega$; $L_т$ — момент количества движения тележки.

Тележка совершает сложное движение: переносное вместе с краном со скоростью $v_{пер} = \omega x$, относительное — со скоростью $v_{отн} = v$. Абсолютная скорость тележки

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}.$$

Тогда момент количества движения тележки

$$M_z(M\bar{v}_{абс}) = M_z(M\bar{v}_{пер}) + M_z(M\bar{v}_{отн}) = Mx^2\omega,$$

так как $M_z(M\bar{v}_{отн}) = 0$ (вектор $M\bar{v}_{отн}$ пересекает ось z).

Следовательно,

$$L_{1z} = I\omega + Mx^2\omega = (I + Mx^2)\omega.$$

Полученное значение главного момента количества движения подставим в равенство (2):

$$(I + Mx^2)\omega = m_0 t. \qquad (3)$$

Так как относительное движение тележки — это равномерное движение со скоростью $\bar{v}$, то

$$t = \frac{x - x_0}{v}.$$

Тогда из уравнения (3) определим угловую скорость вращения крана

$$\omega = \frac{m_0}{I + Mx^2} \frac{x - x_0}{v}.$$

Ответ: $\omega = \frac{m_0}{I + Mx^2} \frac{x - x_0}{v}.$

Задача 37.59

Сохранив условие предыдущей задачи, определить угловую скорость ω вращения крана, если мотор создает вращающий момент, равный $m_0 - \alpha\omega$, где m_0 и α — положительные постоянные.

Решение

К данной механической системе приложены внешние силы: сила тяжести $M\bar{g}$ тележки, сила тяжести $\bar{P}$ крана, вращающий момент $m_{вр} = m_0 - \alpha\omega$, силы реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ опор A и B (см. рисунок в решении задачи 37.58).

Применим теорему об изменении главного момента количеств движения системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \qquad (1)$$

Момент внешних сил относительно оси z

$$\sum M_z(\bar{F}_k^e) = m_0 - \alpha\omega.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = m_0 - \alpha\omega. \tag{2}$$

Главный момент количеств движения механической системы относительно оси z (см. решение задачи 37.85):

$$L_{1z} = L_{\text{кр}} + L_{\text{т}} = I\omega + Mx^2\omega = (I + Mx^2)\omega. \tag{3}$$

Продифференцируем по времени выражение (3) и подставим полученное выражение в уравнение (2):

$$2Mx\frac{dx}{dt}\omega + (I + Mx^2)\frac{d\omega}{dt} = m_0 - \alpha\omega. \tag{4}$$

Введем замену:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega dx}{dtdx} = \frac{vd\omega}{dx},$$

где $v = \dfrac{dx}{dt}$.

С учетом этого уравнение (4) примет вид

$$(2Mxv + \alpha)\omega + (I + Mx^2)\frac{vd\omega}{dx} - m_0 = 0. \tag{5}$$

Введем подстановку $\omega = pz$. Тогда

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{dp}{dx}z + p\frac{dz}{dx}.$$

Подставим это выражение в уравнение (5) и получим

$$(2Mxv + \alpha)pz + v(I + Mx^2)\left(\frac{dp}{dx}z + p\frac{dz}{dx}\right) - m_0 = 0.$$

Разобьем это уравнение на два уравнения:

$$\left[(2Mxv + \alpha)p + v(I + Mx^2)\frac{dp}{dx}\right]z = 0, \tag{6}$$

$$v(I + Mx^2)p\frac{dz}{dx} - m_0 = 0. \tag{7}$$

Решим уравнение (6). Так как $z \neq 0$, то

$$(2Mxv+\alpha)p+(I+Mx^2)\,v\frac{dp}{dx}=0.$$

Найдем значение p, при котором выполняется это условие. Разделим переменные и получим

$$\frac{(2Mxv+\alpha)dx}{v(I+Mx^2)}=-\frac{dp}{p}$$

или

$$\frac{\left(2x+\dfrac{\alpha}{Mv}\right)dx}{\dfrac{I}{M}+x^2}=-\frac{dp}{p}.$$

Проинтегрируем

$$\int\frac{2xdx}{\dfrac{I}{M}+x^2}+\int\frac{\dfrac{\alpha}{Mv}dx}{\dfrac{I}{M}+x^2}=-\int\frac{dp}{p},$$

$$\ln\left(\frac{I}{M}+x^2\right)+\frac{\alpha}{Mv}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{I}{M}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\dfrac{I}{M}}}=-\ln p.$$

Откуда

$$p=\frac{1}{\dfrac{I}{M}+x^2}e^{-\frac{\alpha}{Mv}\sqrt{\frac{M}{I}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{M}{I}}x}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{\alpha}{v}\sqrt{\frac{1}{IM}}=\mu,\quad \sqrt{\frac{I}{M}}=k,$$

тогда

$$p=\frac{M}{I+Mx^2}e^{-\mu\operatorname{arctg}\frac{x}{k}}. \tag{8}$$

Решим уравнение (7). Разделим переменные и подставим вместо p выражение (8). Тогда

$$dz = \frac{m_0 dx}{v(1 + Mx^2)\,p} = \frac{m_0(I + Mx^2)}{v(1 + Mx^2)\,M} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx.$$

Отсюда получим

$$z = \frac{m_0}{Mv} \int\limits_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx.$$

Тогда угловая скорость крана

$$\omega = pz = \frac{m_0}{v(I + Mx^2)} e^{-\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} \int\limits_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx.$$

О т в е т: $\omega = \dfrac{m_0}{v(I + Mx^2)} e^{-\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg}\frac{x}{k}} dx$, где $k = \sqrt{\dfrac{I}{M}}$; $\mu = \dfrac{\alpha}{v_x}\sqrt{\dfrac{1}{IM}}$

(ось x направлена вправо вдоль стрелы).

38. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Методические указания к решению задач

Кинетической энергией механической системы называется арифметическая сумма кинетических энергий всех материальных точек системы, т.е.

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (38.1)$$

Если механическая система состоит из соединенных между собой определенным образом твердых тел, то кинетическую энергию системы определяют как арифметическую сумму кинетических энергий всех тел

$$T = \sum T_k, \qquad (38.2)$$

где T_k — кинетическая энергия k-го твердого тела.

Формулы для определения кинетической энергии твердого тела в зависимости от вида его движения.

При *поступательном движении*

$$T = \frac{Mv^2}{2}. \qquad (38.3)$$

При *вращении тела* вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}, \qquad (38.4)$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси вращения; ω — угловая скорость вращения тела.

При *плоскопараллельном движении*

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_{C_z} \omega^2}{2}, \qquad (38.5)$$

где v_C — скорость центр масс тела; I_{Cz} — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

При плоскопараллельном движении твердого тела его кинетическую энергию можно определять так же, как при вращательном вокруг мгновенной оси вращения:

$$T = \frac{I_p \omega^2}{2}, \qquad (38.6)$$

где I_p — момент инерции тела относительно оси, проходящей через мгновенный центр скоростей.

При *сферическом движении* тела

$$T = \frac{I_\omega \omega^2}{2}, \qquad (38.7)$$

где I_ω — момент инерции относительно мгновенной оси вращения; ω — абсолютная угловая скорость тела.

Кинетическая энергия тела может быть вычислена также по формуле

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{zx}\omega_z\omega_x), \qquad (38.8)$$

где I_x, I_y, I_z — осевые моменты инерции; I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} — центробежные моменты инерции; ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора абсолютной угловой скорости на оси координат Ox, Oy и Oz, связанные с движущимся телом.

Если за координатные оси Ox, Oy, Oz принять главные оси инерции (частный случай), то $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2). \qquad (38.9)$$

Формула (38.9) применима для вычисления кинетической энергии тела, участвующего во вращательных движениях вокруг не более трех пересекающихся осей, если они являются главными осями инерции или параллельны им.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы может быть записана в дифференциальной и интегральной формах.

Дифференциальная форма

$$dT = \sum dA(\overline{F}_k^e) + \sum dA(\overline{F}_k^i), \qquad (38.10)$$

дифференциал от кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ внешних $\overline{F}_k^e$ и внутренних $\overline{F}_k^i$ сил.

Эта формула обычно применяется тогда, когда требуется определить закон движения какого-либо тела механической системы или время, в течение которого происходит изменение скорости его движения. В этом случае решение задачи сводится к составлению дифференциального уравнения и его интегрированию.

Интегральная, или *конечная*, *форма*

$$T_2 - T_1 = \sum A(\overline{F}_k^e) + \sum A(\overline{F}_k^i) \tag{38.11}$$

показывает, что изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему при этом перемещении.

Для неизменной системы, например, абсолютно твердого тела или совокупности таких тел, связанных между собой нерастяжимыми связями, сумма работ внутренних сил равна нулю и теорема об изменении кинетической энергии механической системы может быть записана так:

дифференциальная форма

$$dT = \sum dA(\overline{F}_k^e) = dA^e, \tag{38.10'}$$

интегральная форма

$$T_2 - T_1 = \sum A(\overline{F}_k^e) = A^e, \tag{38.11'}$$

где dA^e, A^e — соответственно элементарная работа и работа на конечном перемещении приложенных к системе внешних сил.

Закон сохранения полной механической энергии:

если на механическую систему действуют только потенциальные, или консервативные, силы, т.е. силы, работа которых определяется начальными и конечными положениями точек системы и не зависит от вида траекторий этих точек, то в любом положении механической системы сумма ее кинетической T и потенциальной $П$ энергии остается величиной постоянной:

$$T_1 + П_1 = T_2 + П_2. \tag{38.12}$$

Потенциальная энергия системы определяется как работа консервативных сил при перемещении системы из некоторого положения в нулевое положение, в котором потенциальная энергия точек системы равна нулю (так называемый нулевой уровень).

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить механическую систему в конечном, а иногда и в начальном положении.

2. В случае неизменяемой механической системы показать на рисунке все внешние силы, действующие на систему.

3. Записать в общем виде теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной [формула (38.10)] или интегральной [формула (38.11)] форме.

4. Если механическая система неизменяемая и начинает движение из состояния покоя, приравнять кинетическую энергию в начальном положении и сумму работ внутренних сил нулю. Если система начинает движение с некоторой скоростью и движется до остановки, приравнять нулю кинетическую энергию в конечном положении.

5. Определить кинетическую энергию системы в конечном или начальном положениях как сумму кинетических энергий тел, входящих в данную систему, выразив ее через искомую угловую или линейную скорость указанного в условии задачи тела. Для этого следует показать на схеме направление угловых скоростей тел и линейных скоростей характерных точек тел, установив кинематические связи между этими скоростями.

6. Определить сумму либо элементарных работ всех приложенных к системе внешних сил, либо работу этих сил на конечном перемещении системы, выразив ее на конечном перемещении системы через перемещение (угловое или линейное) того тела, скорость которого по условию задачи следует найти.

7. Подставить выражения кинетической энергии и работы внешних сил в формулу теоремы об изменении кинетической энергии системы, записанную в соответствии с пп. 2 и 3.

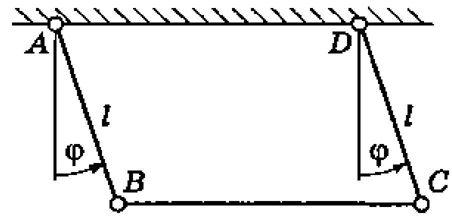
8. Выразить из полученного уравнения искомую величину в общем виде, затем подставить числовые данные и выполнить вычисления.

9. При использовании теоремы в дифференциальной форме необходимо выполнить пп. 1–5, составить дифференциальное уравнение движения тела и проинтегрировать полученное уравнение с учетом начальных условий движения.

Задачи и решения

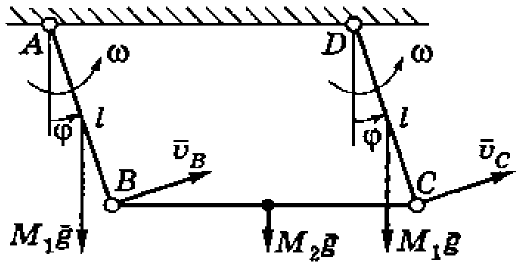
Задача 38.1

Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней AB, BC и CD, прикрепленных цилиндрическими шарнирами A и D к потолку и соединенных между собой шарнирами B и C. Масса каждого из стержней AB и CD длины l равна M_1, масса стержня BC равна M_2, причем $BC = AD$. Стержни AB и DC вращаются с угловой скоростью ω.



Решение

Рассмотрим движение плоского механизма. Покажем на рисунке угловые скорости звеньев AB и CD и силы тяжести звеньев AB, BC и CD. Определим характер движения каждого звена.



Звено AB совершает вращательное движение с угловой скоростью ω_{AB}. Звено CD совершает вращательное движение с угловой скоростью ω_{CD}. Звено BC совершает поступательное движение со скоростью $\bar{v}_B$. Так как скорости точек B и C равны и параллельны, то

$$v_B = \omega_{AB} \cdot AB = \omega l,$$

$$v_C = \omega_{CD} \cdot CD = \omega l.$$

Найдем кинетическую энергию механизма как сумму кинетических энергий отдельных звеньев:

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия звеньев AB и CD:

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_A \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 (AB)^2}{3} \omega_{AB}^2 = \frac{1}{6} M_1 l^2 \omega^2,$$

$$T_{CD} = \frac{1}{2} I_D \omega_{CD}^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 (CD)^2}{3} \omega_{CD}^2 = \frac{1}{6} M_1 l^2 \omega^2.$$

Кинетическая энергия звена BC:

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} v_B^2 = \frac{1}{2} M_2 \omega^2 l^2.$$

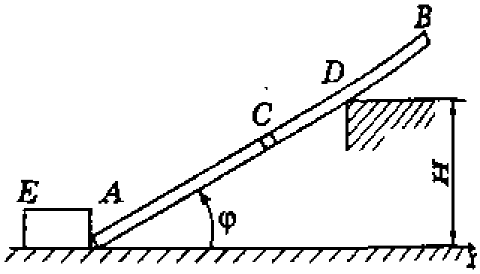
Тогда согласно формуле (1) кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{6} M_1 l^2 \omega^2 + \frac{1}{6} M_1 l^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M_2 l^2 \omega^2 = \frac{2M_1 + 3M_2}{6} l^2 \omega^2.$$

Ответ: $T = \dfrac{2M_1 + 3M_2}{6} l^2 \omega^2.$

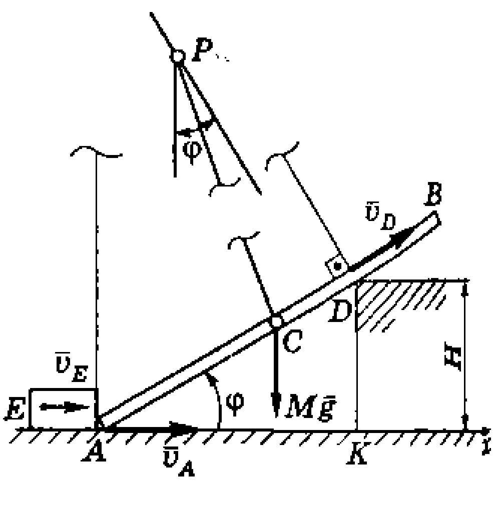
Задача 38.2

Однородный тонкий стержень AB массы M опирается на угол D и концом A скользит по горизонтальной направляющей. Упор E перемещается вправо с постоянной скоростью v. Определить кинетическую энергию стержня в зависимости от угла φ, если длина стержня равна $2l$, а превышение угла D над горизонтальной направляющей равно H.



Решение

Рассмотрим плоскопараллельное движение стержня AB. Найдем мгновенный центр скоростей для стержня AB как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и D к векторам скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_D$ (см. рисунок). Рассмотрим полученные треугольники ADK и APD.



Из $\Delta\, ADK$

$$AD = \frac{DK}{\sin\varphi} = \frac{H}{\sin\varphi},$$

из $\Delta\, APD$

$$AP = \frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{H}{\sin^2\varphi}.$$

Из ΔAPC найдем

$$PC=\sqrt{AP^2+AC^2-2\cdot AP\cdot AC\cdot\cos(90°-\varphi)}=$$

$$=\sqrt{\frac{H^2}{\sin^4\varphi}+l^2-\frac{2Hl}{\sin^2\varphi}\cos(90°-\varphi)}=\sqrt{\frac{H^2}{\sin^4\varphi}+l^2-\frac{2Hl}{\sin\varphi}}.$$

Определим угловую скорость стержня AB:

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{v}{H}\sin^2\varphi \qquad (1)$$

и скорость центра масс стержня, точки C:

$$v_C=\omega_{AB}\cdot PC=\frac{v}{H}\sin^2\varphi\sqrt{\frac{H^2}{\sin^4\varphi}+l^2-\frac{2Hl}{\sin\varphi}}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия стержня AB, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T=\frac{1}{2}Mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega_{AB}^2$$

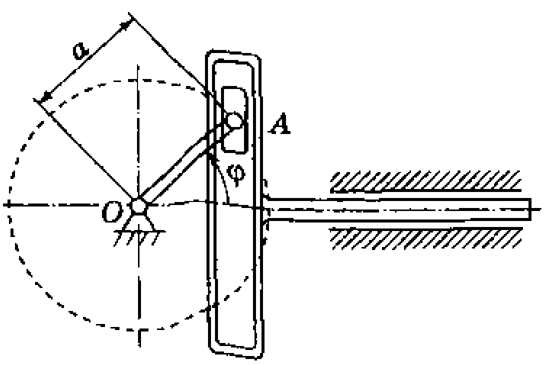
или с учетом выражений (1) и (2)

$$T=\frac{1}{2}M\frac{v^2}{H^2}\sin^4\varphi\left(\frac{H^2}{\sin^4\varphi}+l^2-\frac{2Hl}{\sin\varphi}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{M(2l)^2}{12}\frac{v^2}{H^2}\sin^4\varphi=\frac{Mv^2}{2}\left(1+\frac{4l^2}{3H^2}\sin^4\varphi-\frac{2l}{H}\sin^3\varphi\right).$$

Ответ: $T=\dfrac{Mv^2}{2}\left(1+\dfrac{4l^2}{3H^2}\sin^4\varphi-\dfrac{2l}{H}\sin^3\varphi\right)$.

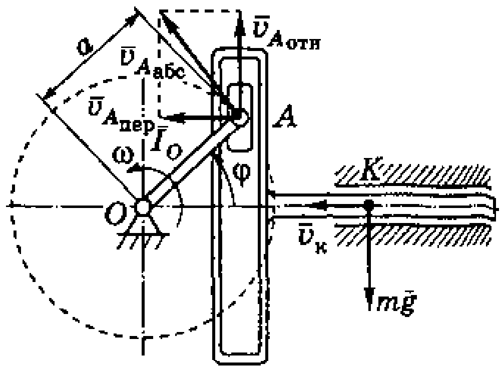
Задача 38.3



Вычислить кинетическую энергию кулисного механизма, если момент инерции кривошипа OA относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, равен I_0; длина кривошипа равна a, масса кулисы равна m, массой камня A пренебречь. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. При каких положениях кинетическая энергия достигает наибольшего и наименьшего значений?

Решение

Рассмотрим движение кулисного механизма, состоящего из кривошипа OA, камня A и кулисы AK. Покажем на рисунке заданные силы. Выразим скорости всех частей механизма через заданную угловую скорость кривошипа OA.



Камень A совершает сложное движение, состоящее из переносного $\bar{v}_{A_{\text{пер}}}$ вместе с кулисой и относительного $\bar{v}_{A_{\text{отн}}}$ вдоль паза кулисы. Абсолютным для камня A является его движение по окружности радиусом a вместе с кривошипом OA:

$$v_{A_{\text{абс}}} = \omega a.$$

Переносную скорость камня A найдем из плана скоростей

$$\bar{v}_{A_{\text{пер}}} = v_{A_{\text{абс}}} \sin\varphi = \omega a \sin\varphi.$$

Определяем кинетическую энергию кривошипа OA, совершающего вращательное движение:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2.$$

Поскольку массой камня A пренебрегаем, то его кинетическая энергия равна нулю.

Определим кинетическую энергию кулисы, совершающей поступательное движение:

$$T_{\text{к}} = \frac{1}{2} m v_{\text{к}}^2 = \frac{1}{2} m (\omega a \sin\varphi)^2.$$

Тогда кинетическая энергия кулисного механизма

$$T = T_{OA} + T_{\text{к}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(I_0 + m a^2 \sin^2\varphi)\omega^2.$$

Максимального значения кинетическая энергия кулисного механизма достигнет при $\sin\varphi = \pm 1$, т.е.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

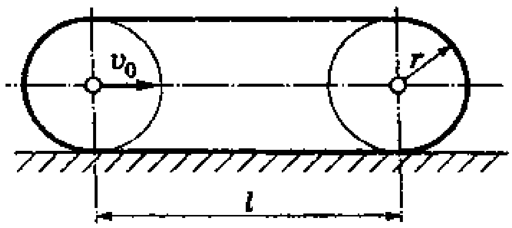
Минимальным значение кинетической энергии кулисного механизма будет при $\sin\varphi = 0$, т.е.

$$\varphi = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ответ: $T = \frac{1}{2}(I_0 + ma^2 \sin^2\varphi)\omega^2$. Наименьшая кинетическая энергия — при крайних положениях кулисы, наибольшая — при прохождении кулисой среднего положения.

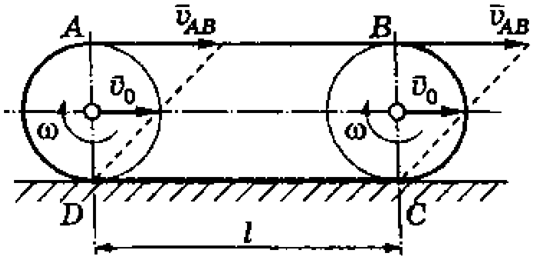
Задача 38.4

Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, масса одного погонного метра гусеничной цепи равна γ.



Решение

Рассмотрим движение гусеницы трактора. Отдельные части гусеницы совершают разные движения (см. рисунок).



Часть гусеницы AB длиной l и массой γl совершает поступательное движение, скорость которого $2v_0$, и ее кинетическая энергия

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB}(2v_0)^2 = 2\gamma l v_0^2.$$

Часть гусеницы BC длиной πr и массой $\gamma\pi r$ совершает плоскопараллельное движение. Ее кинетическая энергия

$$T_{BC} = \frac{1}{2} m_{BC} v_0^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2}\gamma\pi r v_0^2 + \frac{1}{2}\gamma\pi r^3 \frac{v_0^2}{r^2} = \gamma\pi r v_0^2.$$

Часть гусеницы CD лежит неподвижно на земле, поэтому ее кинетическая энергия равна нулю, т.е. $T_{CD} = 0$.

Часть гусеницы DA совершает плоскопараллельное движение. Ее кинетическая энергия равна кинетической энергии части гусеницы BC, т.е.

$$T_{DA} = T_{BC} = \gamma\pi r v_0^2.$$

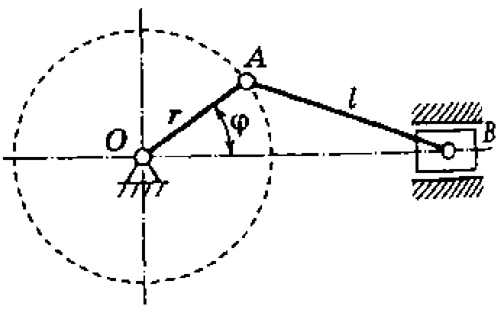
Кинетическая энергия всей гусеницы трактора

$$T = T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DA} = 2\gamma l v_0^2 + \gamma\pi r v_0^2 + \gamma\pi r v_0^2 = 2\gamma(l + \pi r)v_0^2.$$

Ответ: $T = 2\gamma(l + \pi r)v_0^2$.

Задача 38.5

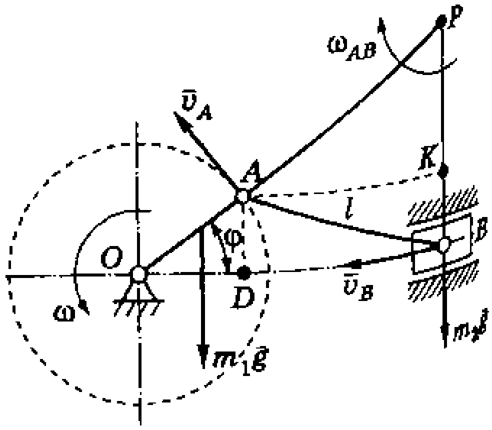
Вычислить кинетическую энергию кривошипно-ползунного механизма, если масса кривошипа m_1, длина кривошипа r, масса ползуна m_2, длина шатуна l. Массой шатуна пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем. Угловая скорость вращения кривошипа ω.



Решение

Покажем на рисунке заданные силы: $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$. Рассмотрим движение кривошипно-ползунного механизма. Скорость шарнира A:

$$v_A = \omega r.$$



Определим скорость ползуна B. Для этого найдем мгновенный центр скоростей шатуна AB, который согласно построению лежит в точке P.

Составим пропорцию:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}.$$

Тогда скорость ползуна B

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP}{AP} = \frac{\omega r \cdot BP}{AP}. \qquad (1)$$

Рассмотрим ΔOAD: $OA = r$ — по условию, $AD = r\sin\varphi$. Из $\Delta\, ABD$ найдем

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$

Из рисунка видно, что $BD = AK$, а $AD = KB$. Из $\Delta\, APK$

$$AP = \frac{AK}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

$$PK = AP\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\sin\varphi.$$

Тогда

$$BP = KB + PK = r\sin\varphi + \frac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\sin\varphi.$$

Подставим значения AP и BP в формулу (1) и получим

$$v_B = \omega r\,\frac{r\sin\varphi + \dfrac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}\sin\varphi}{\dfrac{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}} = \omega r\left(\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}} + 1\right)\sin\varphi =$$

$$= \omega r\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Кривошип OA совершает вращательное движение и его кинетическая энергия

$$T_{OA} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 r^2}{3}\,\omega^2.$$

Кинетическая энергия ползуна B, совершающего поступательное движение:

$$T_B = \frac{1}{2}m_2 v_B^2 = \frac{1}{2}m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}}\right]^2 r^2\omega^2.$$

Определим кинетическую энергию всего механизма:

$$T = T_{OA} + T_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 r^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\omega^2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\} r^2\omega^2.$$

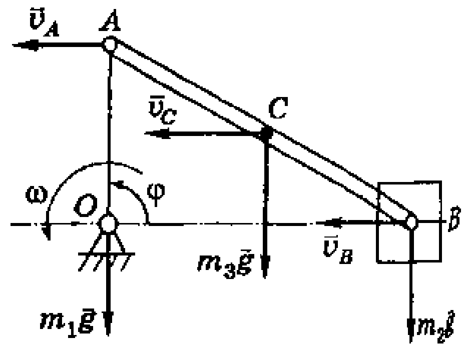
Ответ: $T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\} r^2\omega^2.$

Задача 38.6

Решить предыдущую задачу для положения, когда кривошип OA перпендикулярен направляющей ползуна; учесть массу шатуна m_3.

Решение

Рассмотрим движение кривошипно-ползунного механизма. Покажем заданные силы: $m_1\bar{g}$, $m_2\bar{g}$, $m_3\bar{g}$ (см. рисунок).



Определим движение всех звеньев механизма.

Кривошип OA совершает вращательное движение

$$v_A = \omega r.$$

Шатун AB совершает мгновенное поступательное движение, следовательно,

$$v_A = v_B = v_C = \omega r,$$

$$\omega_{AB} = 0.$$

Ползун B также совершает поступательное движение.

Кинетическая энергия всего механизма:

$$T = T_{OA} + T_{AB} + T_B,$$

где $T_{OA} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 r^2\omega^2$, $T_{AB} = \frac{1}{2}m_{AB}v_C^2 = \frac{1}{2}m_3 r^2\omega^2$,

$T_B = \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_2 r^2\omega^2.$

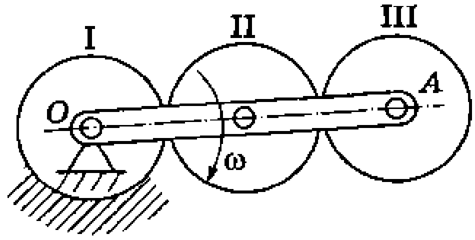
Тогда

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m_1 r^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3 r^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right)r^2\omega^2.$$

Ответ: $T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right)r^2\omega^2.$

Задача 38.7

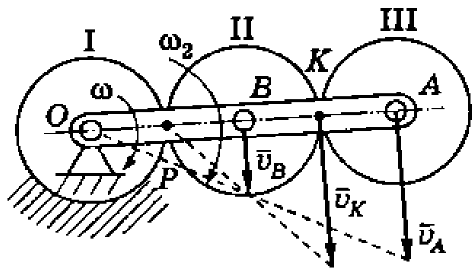
Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом OA, соединяющим оси трех одинаковых колес I, II и III. Колесо I неподвижно; кривошип вращается с угловой скоростью ω. Масса каждого из колес равна M_1, радиус каждого из колес равен r, масса кривошипа равна M_2.



Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к колесу III?

Решение

Рассмотрим движение планетарного механизма. Определим характер движения всех частей механизма.



Кривошип OA совершает вращательное движение, при этом (см. рисунок)

$$v_B = \omega\cdot OB = 2\omega r,$$

$$v_A = \omega\cdot OA = 4\omega r.$$

Колесо II совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса II лежит в точке P. Угловую скорость колеса II

$$\omega_2 = \frac{v_B}{BP} = \frac{2\omega r}{r} = 2\omega.$$

Скорость точки K

$$v_K = \omega_2\cdot PK = 2\omega\cdot 2r = 4\omega r.$$

Рассмотрим движение колеса III. Скорости точек K и A этого колеса $\bar{v}_K$ и $\bar{v}_A$ равны и параллельны, следовательно, это колесо совершает поступательное движение со скоростью

$$v_K = v_A = 4\omega r.$$

Кинетическую энергию механизма

$$T = T_{OA} + T_{\text{II}} + T_{\text{III}}, \tag{1}$$

где T_{OA} — кинетическая энергия кривошипа; T_{II}; T_{III} — кинетическая энергия соответственно колеса II и III.

Вычислим

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M_2 (OA)^2 \omega^2 = \frac{M_2 \cdot 16 r^2 \omega^2}{6} = \frac{8 M_2 r^2 \omega^2}{3};$$

$$T_{\text{II}} = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_1 \cdot 4 r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{M_1 r^2}{2} 4\omega^2 = 3 M_1 r^2 \omega^2;$$

$$T_{\text{III}} = \frac{1}{2} M_1 v_A^2 = \frac{1}{2} M_1 16 r^2 \omega^2 = 8 M_1 r^2 \omega^2.$$

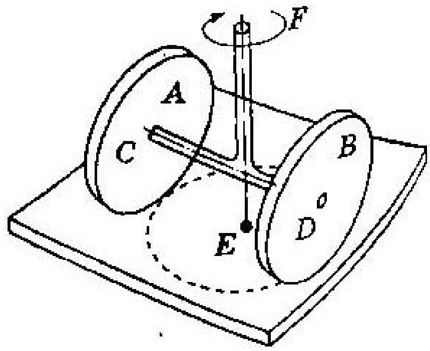
Тогда согласно формуле (1)

$$T = \frac{8 M_2 r^2 \omega^2}{3} + 3 M_1 r^2 \omega^2 + 8 M_1 r^2 \omega^2 = \frac{r^2 \omega^2}{3} (33 M_1 + 8 M_2).$$

Ответ: $T = \dfrac{r^2 \omega^2}{3} (33 M_1 + 8 M_2)$; работа равна нулю.

Задача 38.8

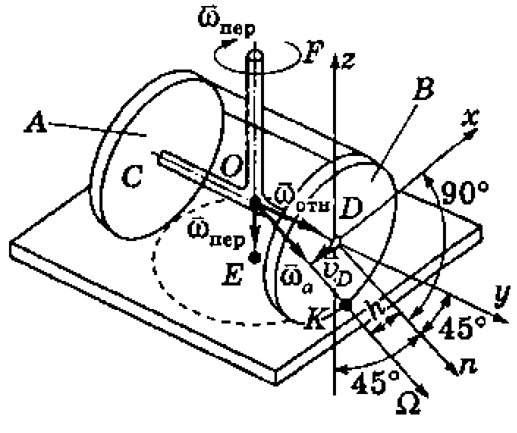
Мельничные бегуны A и B засажены на горизонтальную ось CD, которая вращается вокруг вертикальной оси EF; масса каждого бегуна 200 кг; диаметры бегунов одинаковы, каждый равен 1 м; расстояние между ними CD равно 1 м. Найти кинетическую энергию бегунов, когда ось CD совершает 20 об/мин, допуская, что при вычислении моментов инерции бегуны можно рассматривать как однородные тонкие диски.



Решение

Мельничные бегуны участвуют в двух вращениях вокруг пересекающихся осей.

Сначала рассмотрим движение только одного из них, например B (см. рисунок).



Применим теорему о сложении вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_{пер} + \overline{\omega}_{отн}.$$

На рисунке покажем параллелограмм угловых скоростей. Переносная угловая скорость

$$|\overline{\omega}_{пер}| = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 20}{60} = 2{,}09 \text{ (рад/с)}.$$

Найдем скорость точки D в центре бегуна B:

$$v_D = \omega_{пер} \cdot OD = 2{,}09 \cdot 0{,}5 = 1{,}045 \text{ (м/с)}.$$

Так как качение происходит без скольжения, то мгновенный центр скоростей в относительном движении лежит в точке K. Найдем относительную угловую скорость $\omega_{отн}$ этой точки:

$$\omega_{отн} = \frac{v_D}{DK} = \frac{1{,}045}{0{,}5} = 2{,}09 \text{ (рад/с)}.$$

Вектор мгновенной (абсолютной) угловой скорости бегуна B лежит на мгновенной оси Ω, проходящей через точки O и K. Векторы $\overline{\omega}_{пер}$ и $\overline{\omega}_{отн}$ взаимно перпендикулярны, поэтому

$$|\overline{\omega}_a| = \sqrt{\omega_{пер}^2 + \omega_{отн}^2} = \sqrt{2{,}09^2 + 2{,}09^2} = 2{,}95 \text{ (рад/с)}.$$

Кинетическая энергия бегуна

$$T = \frac{1}{2} I_\Omega \omega_a^2,$$

где I_Ω — момент инерции бегуна относительно мгновенной оси вращения.

Рассчитаем момент инерции

$$I_\Omega = (I_n + mh^2) = \left[(I_y \cos^2 45° + I_x \cos^2 90° + I_z \cos^2 45° + mh^2)\right] =$$

$$= \left[\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{mr^2}{4} \cdot 0 + \frac{mr^2}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{7}{8} mr^2 =$$

$$= \frac{7 \cdot 200 \cdot 0{,}5^2}{8} = 43{,}75 \text{ (кг} \cdot \text{м}^2).$$

Тогда кинетическая энергия одного бегуна B

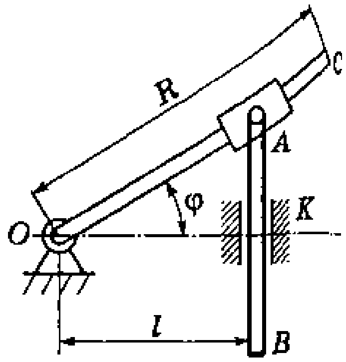
$$T_B = \frac{1}{2} I_\Omega \omega_a^2 = \frac{1}{2} \cdot 43{,}75 \cdot 2{,}95^2 = 191{,}5 \text{ (Н} \cdot \text{м)},$$

а обоих

$$T = T_A + T_B = 191{,}5 + 191{,}5 = 383 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Ответ: 383 Н · м.

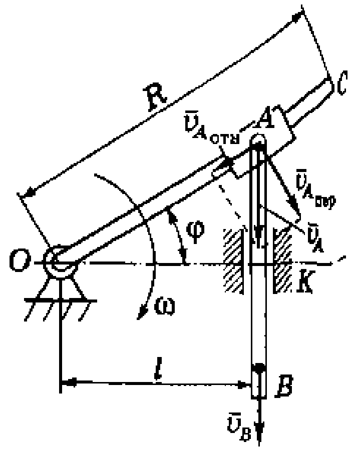
Задача 38.9



В кулисном механизме при качении рычага OC вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Рычаг OC длины R считать однородным стержень с массою m_1, масса ползуна равна m_2, масса стержня AB равна m_3, $OK = l$.

Выразить кинетическую энергию механизма в функции от угловой скорости и угла поворота рычага OC. Ползун считать точечной массой.

Решение



Рассмотрим движение кулисного механизма. Определим характер движения и скорости каждого звена механизма (см. рисунок).

Рычаг OC совершает вращательное движение с угловой скоростью ω.

Ползун A совершает сложное движение; определим переносную $v_{\text{пер}A}$ и абсолютную v_A скорости ползуна A:

$$v_{\text{пер}A} = \omega \cdot OA = \omega \frac{l}{\cos\varphi},$$

$$v_A = \frac{V_{\text{пер}A}}{\cos\varphi} = \omega \frac{l}{\cos^2\varphi}.$$

Стержень AB совершает поступательное движение со скоростью $\bar{v}_A$, т.е.

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = T_{OC} + T_A + T_{AB},$$

где T_{OC}, T_A, T_{AB} — кинетическая энергия соответственно рычага, ползуна и стержня.

Найдем

$$T_{OC} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{3} \omega^2,$$

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{l^2}{\cos^4 \varphi} \omega^2,$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} v_A^2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{l^2}{\cos^4 \varphi} \omega^2.$$

Тогда

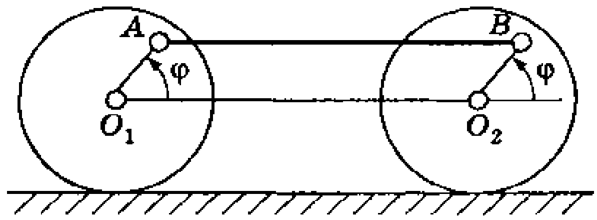
$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{3} \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{l^2}{\cos^4 \varphi} \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{l^2}{\cos^4 \varphi} \omega^2 =$$

$$= \frac{\omega^2}{6 \cos^4 \varphi} [m_1 R^2 \cos^4 \varphi + 3l^2 (m_2 + m_3)].$$

Ответ: $T = \dfrac{\omega^2}{6 \cos^4 \varphi} [m_1 R^2 \cos^4 \varphi + 3l^2 (m_2 + m_3)]$.

Задача 38.10

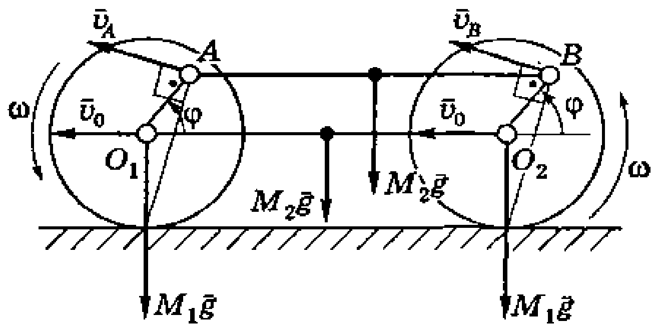
Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником AB и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Масса каждого колеса равна M_1. Спарник AB и соединительный стержень O_1O_2 имеют одинаковую массу M_2. Масса колес равномерно распределена по их ободам: $O_1A = O_2B = r/2$, где r — радиус колес. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.



Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. Определим характер движения каждого звена механизма (см. рисунок).

Колеса совершают плоскопараллельное движение со скоростью v_0 и угловой скоростью $\omega = v_0/r$.



Стержень O_1O_2 совершает поступательное движение со скоростью $\bar{v}_0$. Спарник AB совершает поступательное движение, так как $\bar{v}_A = \bar{v}_B$, то

$$v_A = \frac{v_0}{r}\sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4} - 2\cdot\frac{r^2}{2}\cos(90°+\varphi)} = \frac{v_0\sqrt{5+4\sin\varphi}}{2}.$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = 2T_{\text{кол}} + T_{O_1O_2} + T_{AB},$$

где $T_{\text{кол}}$, $T_{O_1O_2}$, T_{AB} — кинетическая энергия соответственно колеса, стержня O_1O_2 и спарника AB.

Найдем

$$T_{\text{кол}} = \frac{1}{2}M_1v_0^2 + \frac{1}{2}M_1r^2\frac{v_0^2}{r^2} = M_1v_0^2,$$

$$T_{O_1O_2} = \frac{1}{2}M_2v_0^2,$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M_2v_A^2 = \frac{1}{8}M_2v_0^2(5+4\sin\varphi).$$

Тогда

$$T = 2M_1v_0^2 + \frac{1}{2}M_2v_0^2 + \frac{1}{8}M_2v_0^2(5 + 4\sin\varphi) = \frac{v_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)].$$

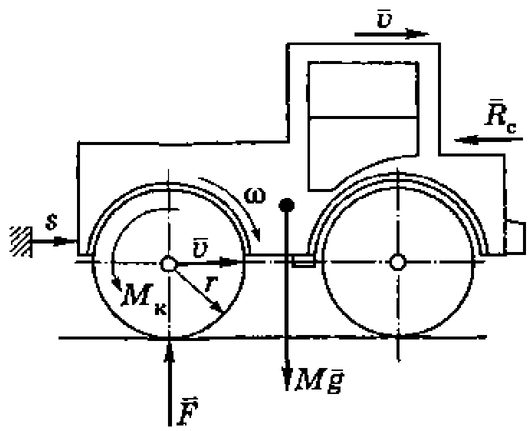
Ответ: $T = \frac{v_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)]$.

Задача 38.11

Автомобиль массы M движется прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью v. Коэффициент трения качения между колесами автомобиля и дорогой равен $f_к$, радиус колес r, сила аэродинамического сопротивления $\overline{R}_c$ воздуха пропорциональная квадрату скорости: $R_c = \mu Mgv^2$, где μ — коэффициент, зависящий от формы автомобиля. Определить мощность N двигателя, передаваемую на оси ведущих колес, в установившемся режиме.

Решение

Рассмотрим движение автомобиля под действием приложенных сил. Покажем на рисунке заданные силы: силу тяжести $M\overline{g}$ автомобиля, суммарную силу реакции дороги $\overline{F}$, суммарный момент сил $M_к$ трения качения, силу сопротивления $\overline{R}_c$ воздуха, а также перемещение автомобиля s и его скорость $\overline{v}$. Угловая скорость колес автомобиля $\omega = v/r$ и при движении колеса повернутся на угол $\varphi = s/r$.



Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum A(\overline{F}_k^e) + \sum A(\overline{F}_k^i) = 0, \qquad (1)$$

так как автомобиль движется равномерно, то $T - T_0 = 0$.

Найдем работу внешних сил, приложенных к автомобилю. Работа силы сопротивления, с учетом того, что автомобиль движется с $v = \text{const}$,

$$A_c = -\int_0^s R_c ds = -\mu Mgv^2 s.$$

Работа момента трения качения

$$A_M = -M_к\varphi = -Mg f_к \frac{s}{r}.$$

Работа остальных внешних сил равна нулю.

Тогда

$$\sum A(\overline{F}_k^e) = -Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)s.$$

Найдем работу внутренних сил, действующих на автомобиль. Единственной не уравновешенной внутренней силой является движущая сила мотора. Следовательно,

$$\sum A(\overline{F}_k^i) = A_{дв},$$

где $A_{дв}$ — работа движущей силы мотора.

Подставим найденные значения в уравнение (1) и получим

$$A_{дв} - Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)s = 0$$

или

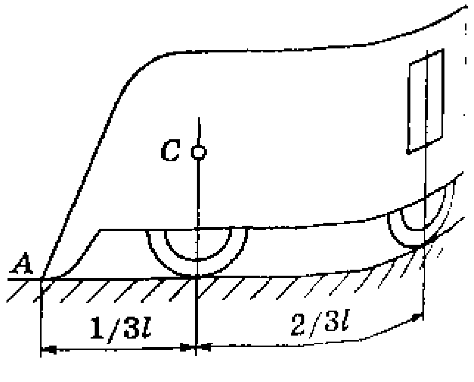
$$A_{дв} = Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)s.$$

Для определения мощности двигателя продифференцируем это равенство. Тогда

$$N = \frac{dA_{дв}}{dt} = Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)\frac{ds}{dt} = Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)v.$$

О т в е т: $N = Mg\left(\frac{f_к}{r} + \mu v^2\right)v.$

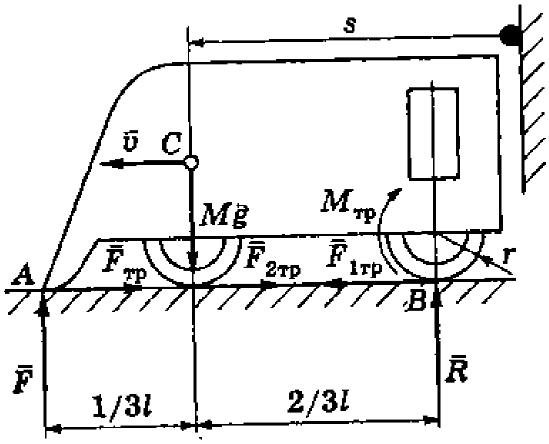
Задача 38.12



Машина массы M для шлифовки льда движется равномерно и прямолинейно со скоростью v по горизонтальной плоскости катка. Положение центра масс C указано на рисунке. Вычислить мощность N двигателя, передоваемую на оси колес радиуса r, если $f_к$ — коэффициент трения качения между колесами машины и льдом, f — коэффициент трения скольжения между шлифующей кромкой A и льдом. Колеса катятся без скольжения.

Решение

Рассмотрим движение машины. Покажем на рисунке заданные силы: силу тяжести $M\bar{g}$ машины, силу трения $\bar{F}_{тр}$ скольжения между шлифующей кромкой A и льдом, момент $M_{тр}$ сил трения качения, силы реакции $\bar{F}$ и $\bar{R}$.



Машина движется равномерно и прямолинейно, поэтому для определения реакций связей воспользуемся уравнениями статики:

$$\sum M_B(\bar{F}_k^e) = -Nl + Mg\,\frac{2}{3}l = 0,$$

откуда

$$N = \frac{2}{3}Mg;$$

$$\sum F_{ky} = N + R - Mg = 0,$$

откуда

$$R = Mg - N = \frac{1}{3}Mg.$$

Найдем силу трения скольжения:

$$F_{тр} = Nf = \frac{2}{3}Mgf$$

и моменты сил трения качения:

$$M_{тр} = Rf_к = \frac{1}{3}Mgf_к.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Машина движется с постоянной скоростью v, поэтому изменение ее кинетической энергии равно нулю, т.е.

$$T - T_0 = 0.$$

Тогда

$$\sum A_k^l + \sum A_k^i = 0. \qquad (1)$$

Работа внешних сил при перемещении s

$$\sum A_k^e = A_{\text{тр}} + A_{\text{к}} + A + A_R.$$

Определим работу силы трения скольжения:

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} s = -\frac{2}{3} Mg\, fs;$$

работу момента трения качения:

$$A_{\text{к}} = -M_{\text{тр}}\varphi = -\frac{1}{3} Mg\, f_{\text{к}}\, \frac{s}{r}.$$

Работа силы тяжести машины A и работа сил реакций A_R равны нулю.

Тогда

$$\sum A_k^e = -\frac{2}{3} Mgfs - \frac{1}{3} Mgf_{\text{к}} \frac{s}{r} = -\frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right)s.$$

Это значение подставим в уравнение (1) и получим

$$\frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right)s + \sum A_k^i = 0$$

или

$$\sum A_k^i = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right)s.$$

Работа внутренних сил осуществляется двигателем машины, поэтому мощность двигателя

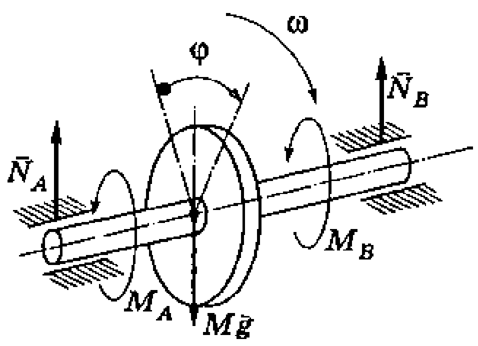
$$N = \frac{d(\sum A_k^i)}{dt} = \frac{Mg}{3}\left(2f + \frac{f_{\text{к}}}{r}\right)v.$$

Ответ: $N = \dfrac{Mg}{3}\left(2f + \dfrac{f_{\text{к}}}{r}\right)v.$

Задача 38.13

На вал диаметром 60 мм насажен маховик диаметром 50 см, делающий 180 об/мин. Определить коэффициент трения скольжения f между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал 90 оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу. Массой вала пренебречь.

Решение



Рассмотрим вращение маховика, насаженного на вал, под действием приложенных к нему сил. Покажем на рисунке действующие внешние силы: силу тяжести $M\bar{g}$, силу реакции в опорах $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$, моменты M_A и M_B сил трения скольжения в опорах, а также угловое перемещение маховика φ.

Применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A(\bar{F}_k^e) + \sum A(\bar{F}_k^i). \qquad (1)$$

По условию задачи маховик остановился, т.е. $T = 0$. Найдем кинетическую энергию маховика в начальный момент времени:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} MR^2\omega^2.$$

Определим работу внешних сил при повороте маховика на угол φ. Работа момента сил трения скольжения в опорах A и B:

$$A_{\text{тр}A} = -M_A\varphi = -N_A f r\varphi,$$

$$A_{\text{тр}B} = -M_B\varphi = -N_B f r\varphi.$$

Тогда

$$\sum A(\bar{F}_k^e) = -(N_A + N_B) f r\varphi.$$

Если центр масс маховика расположен на оси его вращения, то динамические составляющие реакций в опорах равны нулю и тогда

$$N_A = N_B = \frac{Mg}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum A(\overline{F}_k^i) = -Mgfr\varphi.$$

Работа внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum A(\overline{F}_k^i) = 0.$$

Подставим найденные значения в уравнение (1) и получим

$$-\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = -Mgfr\varphi.$$

Отсюда коэффициент трения скольжения

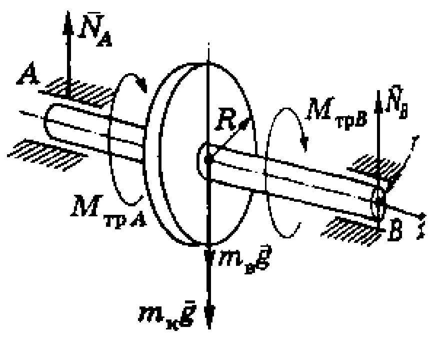
$$f = \frac{R^2\omega^2}{2gr\varphi} = \frac{\pi n^2 R^2}{30^2 \cdot 4grN} = \frac{3{,}14 \cdot 180^2 \cdot 0{,}25^2}{900 \cdot 4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}03 \cdot 90} = 0{,}07.$$

Ответ: $f = 0{,}07$.

Задача 38.14

Цилиндрический вал диаметра 10 см и массы 0,5 т, на которой насажано маховое колесо диаметра 2 м и массы 3 т, вращается в данный момент с угловой скоростью 60 об/мин, а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов еще сделает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05? Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу.

Решение



Рассмотрим вращение вала с насаженным на него маховым колесом под действием приложенных сил: силы тяжести $m_{\text{в}}\bar{g}$ вала, силы тяжести $m_{\text{к}}\bar{g}$ махового колеса, реакций $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ опор, моментов сил трения $M_{\text{тр}_A}$ и $M_{\text{тр}_B}$ в опорах (см. рисунок).

Найдем суммарный момент сил трения $M_{\text{тр}}$ в опорах вала A и B:

$$M_{\text{тр}} = M_{\text{тр}_A} + M_{\text{тр}_B} = N_A fr + N_B fr = (m_{\text{в}} + m_{\text{к}})gfr =$$
$$= (500 + 3000) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 = 85{,}8 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как данная система является абсолютно твердым телом, то $\sum A_k^i = 0$.

В конце движения вал с маховым колесом остановится и его кинетическая энергия будет равна нулю, т.е. $T = 0$.

Тогда выражение (1) примет вид

$$-T_0 = \sum A_k^i. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию вала и махового колеса в начале движения. Вал совершает вращательное движение и его кинетическая энергия

$$T_\text{в} = I_x \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_\text{в} r^2}{2} \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_\text{в} r^2}{4} \omega^2.$$

Маховое колесо совершает вращательное движение и его кинетическая энергия

$$T_\text{к} = I_x \frac{\omega^2}{2} = m_\text{к} R^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{m_\text{к} R^2}{2} \omega^2.$$

Тогда

$$T_0 = T_\text{в} + T_\text{к} = \frac{m_\text{в} r^2}{4} \omega^2 + \frac{m_\text{к} R^2}{2} \omega^2 = \left(\frac{m_\text{в} r^2 + 2m_\text{к} R^2}{4} \right) \omega^2 =$$

$$= \left(\frac{500 \cdot 0{,}05^2 + 2 \cdot 3000 \cdot 1^2}{4} \right) \left(\frac{2\pi \cdot 60}{60} \right)^2 = 59\ 169{,}4\ (\text{Н} \cdot \text{м}).$$

Работа внешних сил

$$\sum A_k^e = A_\text{в} + A_\text{к} + A_\text{тр} + A_N.$$

Работа сил тяжести вала $A_\text{в}$ и махового колеса $A_\text{к}$ равна нулю.
Работа момента трения

$$A_\text{тр} = -M_\text{тр} \varphi = -85{,}8\varphi.$$

Работа сил реакции A_N в опорах A и B равна нулю.

Тогда

$$\sum A_k^e = A_{\text{тр}} = -85{,}8\varphi.$$

Подставим полученные значения в уравнение (2):

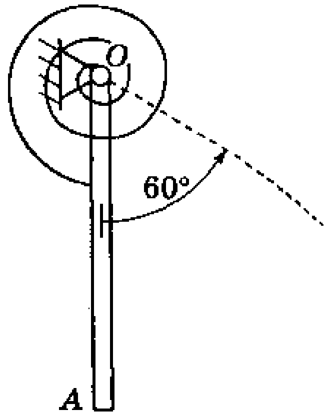
$$-59\ 169{,}4 = -85{,}8\varphi.$$

Откуда $\varphi = 689{,}6$ рад или в оборотах

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{689{,}6}{2 \cdot 3{,}14} = 109{,}8 \text{ (об)}.$$

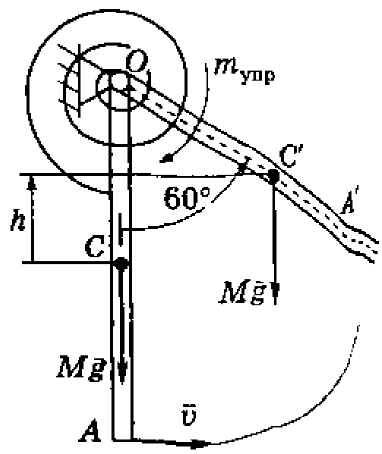
Ответ: 109,8 об.

Задача 38.15



Однородный стержень OA длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости рисунка. Спиральная пружина, коэффициент упругости которой равен c, одним концом скреплена с неподвижной осью O, а другим — со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована. Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол, равный 60°?

Решение



Рассмотрим движение стержня OA под действием приложенных к нему сил: силы тяжести $M\bar{g}$, момента сил упругости спиральной пружины $m_{\text{упр}} = c\varphi$. Покажем на рисунке начальное и конечное положение стержня, а также действующие силы.

Применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$

Так как в конечном положении стержень остановится, то $T=0$. Тогда выражение (1) примет вид

$$-T_0 = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим кинетическую энергию стержня в начальном положении

$$T_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2}\left[I_C + M\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}\right)\frac{v^2}{l^2} = \frac{Mv^2}{6}.$$

Найдем работу внешних сил при перемещении, соответствующем отклонению стержня на угол 60°:

$$\sum A_k^e = A_{\text{т}} + A_{\text{упр}},$$

где работа силы тяжести

$$A_{\text{т}} = -Mgh = -Mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos 60°\right) = -\frac{Mgl}{4};$$

работа силы упругости спиральной пружины

$$A_{\text{упр}} = -\int_0^{\varphi} m_{\text{упр}} d\varphi = -\frac{c\varphi^2}{2} = -\frac{c\pi^2}{18}.$$

Тогда

$$\sum A_k^e = -\frac{Mgl}{4} - \frac{c\pi^2}{18}.$$

Найденные значения подставим в равенство (2):

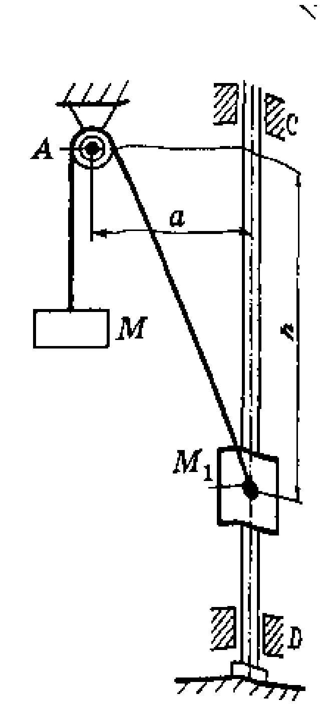
$$-\frac{Mv_A^2}{6} = -\frac{Mgl}{4} - \frac{c\pi^2}{18}.$$

Откуда скорость конца стержня

$$v = \sqrt{\frac{9Mgl + 2\pi^2 c}{6M}}.$$

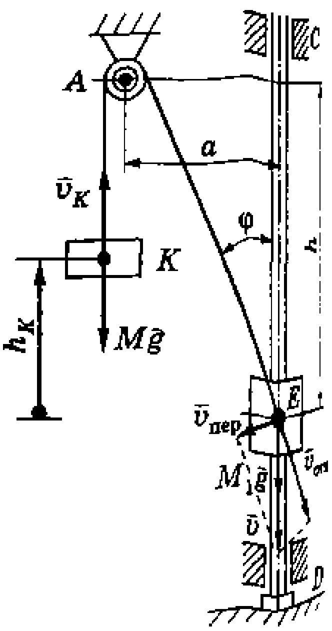
Ответ: $v = \sqrt{\frac{9Mgl + 2\pi^2 c}{6M}}$.

Задача 38.16



К концам гибкой нерастяжимой нити, переброшенной через ничтожно малый блок A, подвешены два груза. Груз массы M_1 может скользить вдоль гладкого вертикального стержня CD, отстоящего от оси блока на расстоянии a; центр тяжести этого груза в начальный момент находился на одном уровне с осью блока; под действием силы тяжести этот груз начинает опускаться без начальной скорости. Найти зависимость между скоростью первого груза и высотой его опускания h. Масса второго груза равна M.

Решение



Рассмотрим движение механической системы, состоящей из грузов массой M и M_1, соединенных нерастяжимой нитью EK (см. рисунок).

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

В начальный момент система была в покое и $T_0 = 0$.

Работа внутренних сил системы тоже равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Тогда выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^i. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда груз E опустился на расстояние h:

$$T = T_E + T_K,$$

где T_E, T_K — кинетическая энергия соответственно груза E и груза K:

$$T_E = \frac{1}{2} M_1 v^2.$$

$$T_K = \frac{1}{2} M v_K^2.$$

Найдем скорость груза K, которая равна скорости нити KA.

Абсолютная скорость конца нити E равна $\bar{v}$, она состоит из переносной $\bar{v}_{пер}$ и относительной $\bar{v}_{отн}$ скоростей:

$$\bar{v}_{отн} = \frac{d(\overline{AE})}{dt} = \bar{v}_K.$$

Из параллелограмма скоростей (см. рисунок) найдем:

$$v_{отн} = v\cos\varphi = v\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

Тогда

$$T_K = \frac{1}{2}M\frac{v^2h^2}{(h^2+a^2)}.$$

Определим работу сил тяжести грузов:

$$A_E = M_1gh,$$

$$A_K = -Mgh_к = Mg(\sqrt{h^2+a^2}-a).$$

Тогда

$$\sum A_k^e = M_1gh - Mg\,(\sqrt{h^2+a^2}-a).$$

Подставим полученные значения в уравнение (2):

$$\frac{1}{2}M_1v^2 + \frac{1}{2}M\frac{v^2h^2}{h^2+a^2} = M_1gh - Mg\,(\sqrt{h^2+a^2}-a)$$

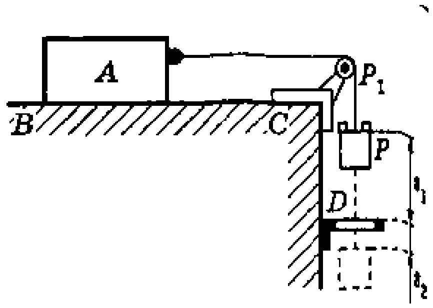
и найдем искомую зависимость:

$$v^2 = 2g(h^2+a^2)\frac{M_1h - M(\sqrt{h^2+a^2}-a)}{M_1(h^2+a^2)+Mh^2}.$$

Ответ: $v^2 = 2g(h^2+a^2)\dfrac{M_1h - M(\sqrt{h^2+a^2}-a)}{M_1(h^2+a^2)+Mh^2}$.

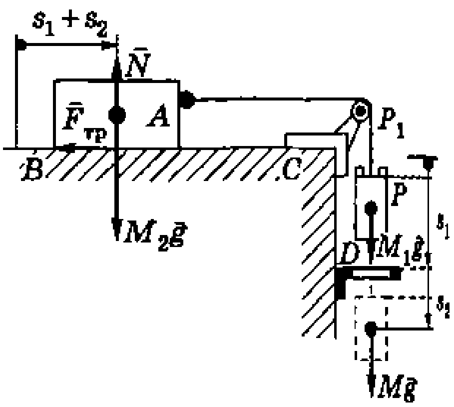
Задача 38.17

Груз P массы M с наложенным на него дополнительным грузом массы M_1 посредством шнура, перекинутого через блок, приводит в движение из состояния покоя тело A массы M_2, находящееся на негладкой горизонтальной плоскости BC. Опустившись на расстояние s_1, груз M проходит через кольцо D, которое снимет дополнительный груз M_1, после чего груз M, опустившись на расстояние s_2, приходит в состояние покоя. Определить коэффициент трения f между телом A и плоскостью, пренебрегая массой шнура и блока и трением в блоке; дано $M_2 = 0{,}8$ кг, $M = M_1 = 0{,}1$ кг, $s_1 = 50$ см, $s_2 = 30$ см.



Решение

Рассмотрим движение данной системы под действием сил тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$, $M\bar{g}$ и силы трения $\bar{F}_{тр}$ тела A (см. рисунок).



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Работа внутренних сил $\sum A_k^i = 0$.

Система приводится в движение из состояния покоя, когда $T_0 = 0$, и в конце пути она также приходит в состояние покоя, т.е. $T = 0$.

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\sum A_k^i = 0$$

или

$$\sum A_k^e = A_M + A_{M_1} + A_{M_2} + A_{тр} + A_N = 0. \qquad (2)$$

Работа силы тяжести груза p

$$A_M = Mg(s_1 + s_2).$$

Работа силы тяжести дополнительного груза

$$A_{M_1} = M_1 g s_1.$$

Работа силы тяжести тела A

$$A_{M_2} = 0.$$

Работа силы трения тела A

$$A_{тр} = -F_{тр}(s_1 + s_2) = -M_2 g f (s_1 + s_2).$$

Работа силы реакций N

$$A_N = 0.$$

Подставим эти значения в формулу (2) и найдем коэффициент трения:

$$f = \frac{M(s_1+s_2)+M_1 s_1}{M_2(s_1+s_2)} = \frac{0{,}1(0{,}5+0{,}3)+0{,}1\cdot 0{,}5}{0{,}8(0{,}5+0{,}3)} = 0{,}2.$$

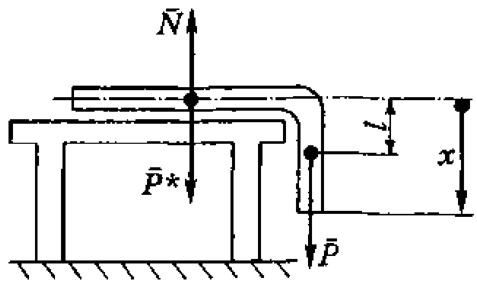
Ответ: $f = \dfrac{M(s_1+s_2)+M_1 s_1}{M_2(s_1+s_2)} = 0{,}2.$

Задача 38.18

Однородная нить длины L, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием силы тяжести другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени t, по истечении которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна l, а начальная скорость равна нулю.

Решение

Рассмотрим движение части однородной нити под действием силы тяжести $\bar{P}$ свешивающейся части нити (см. рисунок). Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:



$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как нить нерастяжима, то сумма работ внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum A_k^i = 0.$$

Вначале скорость нити равна нулю, значит $T_0 = 0$. Поэтому уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию нити:

$$T=\frac{1}{2}mv^2,$$

где m — масса всей нити; $v=\frac{dx}{dt}$ — скорость нити; x — длина свешивающейся части нити.

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{P^*}+A_P+A_N.$$

Работа силы тяжести части нити, лежащей на столе, равна нулю, т.е.

$$A_{P^*}=0.$$

Работа силы тяжести свешивающейся части нити

$$A_P=\int_l^x \frac{m}{L} g\,x\,dx=\frac{m}{2L}g(x^2-l^2).$$

Работа силы реакции гладкого стола равна нулю.

Следовательно,

$$\sum A_k^e = A_P.$$

Подставим полученные значения в уравнение (2):

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{m}{2L}g(x^2-l^2)$$

или

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{g}{L}}\sqrt{x^2-l^2}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\int_0^t dt=\sqrt{\frac{L}{g}}\int_l^L \frac{dx}{\sqrt{x^2-l^2}}.$$

Тогда

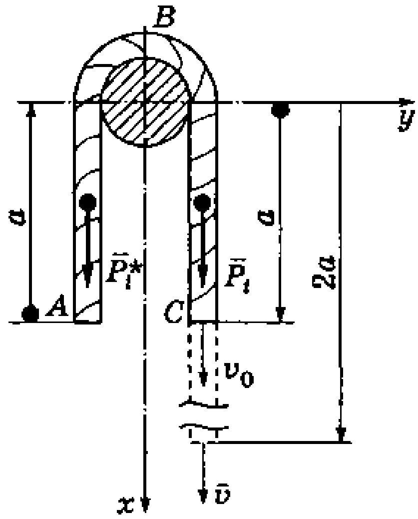
$$t=\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right).$$

Ответ: $t=\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right).$

Задача 38.19

Однородная нить длины $2a$, висевшая на гладком штифте и находившаяся в покое, начинает двигаться с начальной скоростью v_0. Определить скорость нити в тот момент, когда она сойдет со штифта.

Решение



Рассмотрим движение однородной нити под действием силы тяжести. Сила тяжести участка нити (см. рисунок)

$$\bar{P}_i = \frac{m}{2a} x \bar{g},$$

где m — масса всей нити; x — длина участка нити.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как нить нерастяжимая, то сумма работ внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum A^i = 0.$$

Определим кинетическую энергию нити в начале движения:

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

и тогда, когда она сойдет со штифта,

$$T = \frac{1}{2} m v^2.$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{AB} + A_{BC}.$$

Работа силы тяжести $\bar{P}_i$ поднимающейся ветви AB нити

$$A_{AB} = \int_a^0 \frac{mg}{2a} x dx = -\frac{mga}{4}.$$

Работа силы тяжести $\bar{P}_i$ опускающейся ветви BC нити

$$A_{BC} = \int_a^{2a} \frac{mg}{2a} x dx = \frac{3mga}{4}.$$

Тогда

$$\sum A_k^e = \frac{3mga}{4} - \frac{mga}{4} = \frac{mga}{2}.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1):

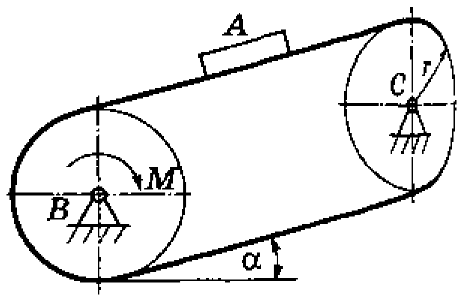
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{mga}{2}$$

и найдем скорость нити в тот момент, когда она сойдет со штифта:

$$v = \sqrt{ag + v_0^2}.$$

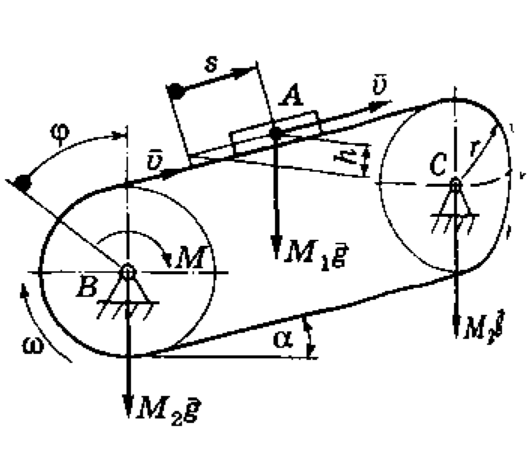
Ответ: $v = \sqrt{ag + v_0^2}$.

Задача 38.20



Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M. Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s, если масса поднимаемого груза A равна M_1, а шкивы B и C радиуса r и массы M_2 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.

Решение



Рассмотрим движение данной механической системы. Покажем на рисунке начальное и конечное положение груза A, угол поворота шкива и действующие силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, вращающий момент M.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как лента транспортера нерастяжима, то сумма работ внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum A_k^i = 0.$$

Транспортер приходит в движение из состояния покоя, значит, $T_0 = 0$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы, когда груз A переместился на величину s:

$$T = T_A + T_B + T_C.$$

Кинетическая энергия груза A

$$T_A = \frac{1}{2} M_1 v^2.$$

Кинетическая энергия шкивов B и C

$$T_B = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{4},$$

$$T_C = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{4}.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2} M_1 v^2 + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{M_2 v^2}{4} = (M_1 + M_2) \frac{v^2}{2}.$$

Найдем работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_A + A_M.$$

Работа силы тяжести тела A

$$A_A = -M_1 g h = -M_1 g s \sin\alpha.$$

Работа вращающего момента M, приложенного к шкиву B,

$$A_M = M\varphi = M \frac{s}{r}.$$

Тогда

$$\sum A_k^e = M\frac{s}{r} - M_1 gs\cdot\sin\alpha.$$

Подставим полученные значения в уравнение (2):

$$(M_1 + M_2)\frac{v^2}{2} = M\frac{s}{r} - M_1 g s\sin\alpha$$

и найдем скорость ленты транспортера:

$$v = \sqrt{\frac{2(M - M_1 g r\sin\alpha)}{r(M_1 + M_2)}s}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2(M - M_1 g r\sin\alpha)}{r(M_1 + M_2)}s}.$

Задача 38.21

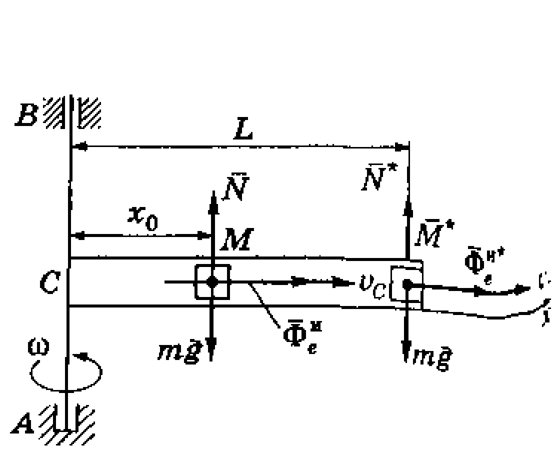
Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB (см. рисунок к задаче 37.56). Внутри трубки на расстоянии $MC = x_0$ от оси лежит тело M. В некоторый момент времени трубке сообщена начальная угловая скорость ω_0.

Определить скорость v тела M относительно трубки в момент, когда тело вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен I, L — длина трубки; трением пренебречь. Тело считать материальной точкой массы m.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 37.56.

Решение

Рассмотрим движение тела M внутри трубки CD (см. рисунок).



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении:

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_{r0}^2}{2} =$$

$$= \sum \int_{M}^{M^*} F_i dS_r \cos(\overline{F}_i;\ \overline{v}_r) + \sum \int_{M}^{M^*} \Phi_e^{\text{и}} dS_r \cos(\overline{\Phi}_e^{\text{и}};\ \overline{v}_r), \tag{1}$$

где v_r — скорость тела M в момент, когда оно вылетает из трубки.

В начальный момент времени тело M относительно трубки CD было в покое, т.е. $v_{r_0} = 0$.

Так как трубка CD вращается в горизонтальной плоскости, то работа силы тяжести тела M:

$$\sum \int_{M}^{M^*} F_i\ dS_r \cos(\overline{F}_i;\ \overline{v}_r) = 0.$$

Найдем работу переносной силы инерции $\Phi_e^{\text{и}}$:

$$\sum \int_{M}^{M^*} \Phi_e^{\text{и}} dS_r \cos(\Phi_e^{\text{и}};\ \overline{v}_r) = \int_{x_0}^{L} m\omega^2 x dx = \left.\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right|_{x_0}^{L} = \frac{m\omega^2 L^2}{2} - \frac{m\omega^2 x_0^2}{2}.$$

Значение угловой скорости трубки CD при вылете из нее тела M (см. решение задачи 37.56):

$$\omega = \omega_0 \frac{I + m x_0^2}{I + mL^2}.$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{L} m\omega^2 x\, dx = \frac{m\omega_0^2}{2}\left[\frac{I + m x_0^2}{I + mL^2}(L^2 - x_0^2)\right].$$

Подставим полученные значения в уравнение (1):

$$\frac{m v_r^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2}\left[\frac{I + m x_0^2}{I + mL^2}(L^2 - x_0^2)\right]$$

и найдем скорость тела M:

$$v_r = \omega_0 \sqrt{\frac{I + m x_0^2}{I + mL^2}(L^2 - x_0^2)}.$$

Ответ: $v_r = \omega_0 \sqrt{\frac{I + m x_0^2}{I + mL^2}(L^2 - x_0^2)}$.

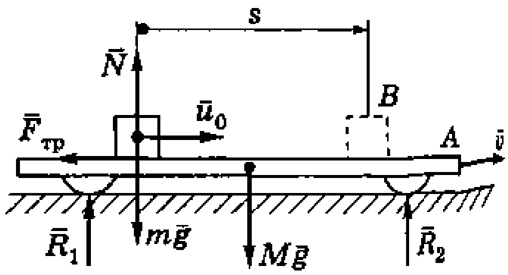
Задача 38.22

По горизонтальной платформе A, движущейся при отсутствии трения, перемещается тело B с постоянной относительной скоростью u_0 (см. рисунок к задаче 36.9). При затормаживании тела B между ним и платформой A возникают силы трения. Определить работу сил трения между телом B и платформой A от момента начала торможения до полной остановки тела B относительно платформы A, если их массы соответственно равны m и M.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 36.9.

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из платформы A и тела B, под действием заданных сил. Покажем на рисунке начальное и конечное положения тела B.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Работа внешних сил (силы тяжести $m\bar{g}$ и реакции $\bar{N}$ платформы) равна нулю, т.е.

$$\sum A_k^e = 0.$$

Определим кинетическую энергию системы в начальном положении:

$$T_0 = T_{A_0} + T_{B_0}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия платформы A

$$T_{A_0} = \frac{1}{2} M v_0^2.$$

Кинетическая энергия тела B, совершающего сложное движение:

$$T_{B_0} = \frac{1}{2} m v_{абс}^2 = \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$T_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2.$$

Кинетическая энергия системы в конечном положении

$$T = \frac{1}{2}(M + m) v^2. \tag{3}$$

С учетом ответа к задаче 36.9 найдем

$$v = v_0 + \frac{m}{M + m} u_0.$$

Подставим это выражение в формулу (3) и получим

$$T = \frac{1}{2}(M + m)\left(v_0 + \frac{m}{M + m} u_0\right)^2 = \frac{M + m}{2} v_0^2 + m v_0 u_0 + \frac{m^2}{2(M + m)} u_0^2.$$

Значения T_0 и T подставим в уравнение (1):

$$\frac{M + m}{2} v_0^2 + m v_0 u_0 + \frac{m^2}{2(M + m)} u_0^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 - \frac{1}{2} m (u_0 + v_0)^2 = \sum A_k^i$$

и определим работу сил трения:

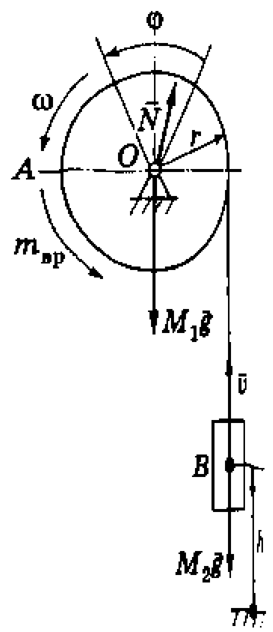
$$\sum A_k^i = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} u_0^2.$$

Ответ: $\sum A_k^i = -\frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} u_0^2.$

Задача 38.23

С помощью электромотора лебедки к валу барабана A радиуса r и массы M_1 приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный углу поворота φ барабана, причем коэффициент пропорциональности равен a (см. рисунок к задаче 37.43). Определить скорость поднимаемого груза B массы M_2 в зависимости от высоты его подъема h. Барабан A считать сплошным цилиндром. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

Решение



Рассмотрим движение механической системы, состоящей из барабана A и груза B. Покажем на рисунке действующие на нее внешние силы: силу тяжести $M_1\bar{g}$ барабана, вращающий момент $m_{вр}$, а также перемещения элементов системы, которые выразим через заданное перемещение груза B:

$$\varphi = \frac{h}{r}.$$

Скорости элементов системы ω выразим через искомую скорость поднимаемого груза B:

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum A(\bar{F}_k^e) + \sum A(\bar{F}_k^i). \quad (1)$$

Кинетическая энергия системы в начале подъема равна нулю, т.е.

$$T_0 = 0.$$

В конце подъема груза B

$$T = T_A + T_B. \quad (2)$$

Кинетическая энергия барабана A, совершающего вращательное движение,

$$T_A = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия груза B, совершающего поступательное движение,

$$T_B = \frac{1}{2} M_2 v^2.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$T = (M_1 + 2M_2)\frac{v^2}{4}.$$

Работа внутренних сил системы равна нулю, т.е.

$$\sum A(\overline{F}_k^i) = 0.$$

Работа внешних сил, приложенных к системе,

$$\sum A(\overline{F}_k^e) = A_M + A_A + A_B. \tag{3}$$

Работа вращающего момента $m_{\text{вр}}$

$$A_M = \int_0^{\varphi} m_{\text{вр}} d\varphi = a\int_0^{\varphi} \varphi d\varphi = \frac{1}{2}a\varphi^2 = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2}.$$

Работа силы тяжести барабана A_B равна нулю.

Работа силы тяжести груза B

$$A_B = -M_2 gh.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$\sum A(\overline{F}_k^e) = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2} - M_2 gh.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1):

$$(M_1 + 2M_2)\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}a\frac{h^2}{r^2} - M^2 gh$$

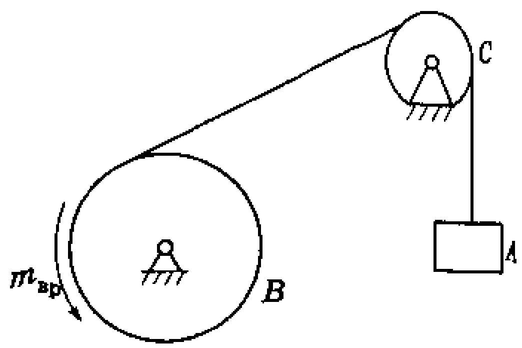
и найдем скорость поднимаемого груза:

$$v = \sqrt{\frac{2h(ah - 2M_2 gr^2)}{r^2(M_1 + 2M_2)}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2h(ah - 2M_2 gr^2)}{r^2(M_1 + 2M_2)}}$.

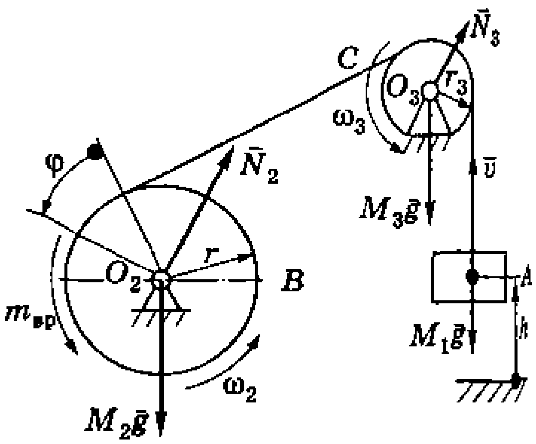
Задача 38.24

На рисунке изображен подъемный механизм лебедки. Груз A массы M_1, поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r массы M_2. К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\text{вр}} = a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимается на высоту h. Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C — сплошной диск массы M_3. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. На систему действуют внешние силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и $M_3\bar{g}$, вращающий момент $m_{вр}$, силы реакции связей $\bar{N}_2$ и $\bar{N}_3$. Покажем на рисунке начальное и конечное положения тел системы.



Для конечного положения системы, когда груз A поднялся на высоту h, покажем действующие силы, скорости тел, входящих в систему, а также их перемещения из начального в конечное положение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как трос можно считать нерастяжимым, то работа внутренних сил системы равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия в начальном положении, когда система находилась в покое, была равна нулю, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого уравнение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \tag{3}$$

Кинетическая энергия груза A, совершающего поступательное движение,

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блоков B и C, совершающих вращательное движение,

$$T_2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 v^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_0 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r_3^2}{2} \frac{v^2}{r_3^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{M_3 v^2}{4} = (2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4}. \qquad (4)$$

Найдем работу внешних сил при перемещении системы из начального в конечное положение:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_{m_{\text{вр}}} + A_{N_2} + A_{N_3}. \qquad (5)$$

Работа силы тяжести груза A

$$A_1 = -M_1 g h.$$

Работа A_2 силы тяжести барабана B и работа A_3 силы тяжести блока C равны нулю.

Работа вращающего момента $m_{\text{вр}}$, приложенного к барабану B,

$$A_{m_{\text{вр}}} = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi = \frac{a\varphi^3}{3}.$$

Если выразить угол поворота барабана φ через длину наматываемого троса h

$$\varphi = \frac{h}{r},$$

то

$$A_{m_{\text{вр}}} = \frac{ah^3}{3r^3}.$$

Работа сил реакций A_{N_2} и A_{N_3} равна нулю.

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = \frac{ah^3}{3r^3} - M_1gh = \frac{(ah^2 - 3M_1gr^3)h}{3r^3}. \quad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(2M_1 + 2M_2 + M_3)\frac{v^2}{4} = \frac{(ah^2 - 3M_1gr^3)h}{3r^3}$$

и найдем скорость груза A в момент, когда он поднялся на высоту h:

$$v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3M_1gr^3)}{3r^3(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}.$$

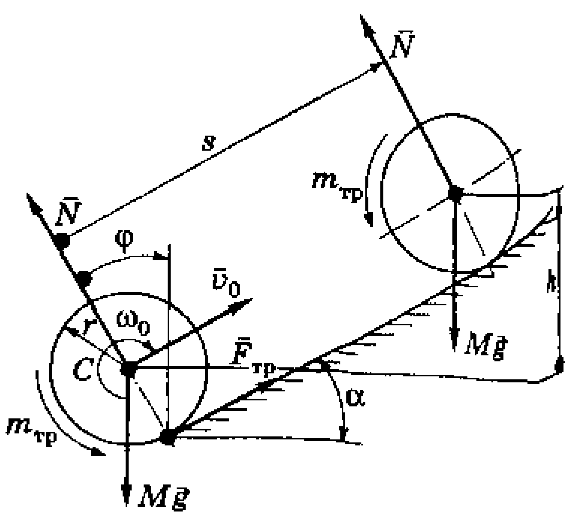
Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{4h(ah^2 - 3M_1gr^3)}{3r^3(2M_1 + 2M_2 + M_3)}}$.

Задача 38.25

Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса r для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту h по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен $f_к$. Колесо считать однородным диском.

Решение

Рассмотрим качение колеса по наклонной плоскости под действием приложенных к нему сил: силы тяжести $M\bar{g}$, силы реакций плоскости $\bar{N}$, момента трения качения $m_{тр}$. Покажем на рисунке начальное и конечное положения колеса, а также силы, действующие на колесо, скорость колеса и его перемещение.



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как колесо можно считать абсолютно твердым телом, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия колеса в конечном положении, когда оно остановилось, равна нулю, т.е. $T = 0$.

С учетом этого уравнение (1) примет вид

$$-T_0 = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Найдем кинетическую энергию колеса, совершающего плоскопараллельное движение, в начальном положении:

$$T_0 = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3Mv_0^2}{4}. \tag{3}$$

Определим работу внешних сил, приложенных к колесу при перемещении его из начального в конечное положение:

$$\sum A_k^e = A_M + A_N + AF_{\text{тр}} + A_{\text{тр}}. \tag{4}$$

Работа силы тяжести колеса

$$A_M = -Mgh.$$

Работа A_N реакций плоскости $\overline{N}$ и $AF_{\text{тр}}$ равна нулю.

Работа момента сил трения качения

$$A_{\text{тр}} = -m_{\text{тр}}\varphi = -Nf_{\text{к}}\,\frac{s}{r} = -Mg\cos\alpha\, f_{\text{к}}\,\frac{h}{r\sin\alpha} = -Mg\frac{f_{\text{к}}}{r} h \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$\sum A_k^e = -\left(Mgh + Mg\frac{f_{\text{к}}}{r} h \operatorname{ctg}\alpha\right) = -Mgh\left(1 + \frac{f_{\text{к}}}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right). \tag{5}$$

Подставим выражения (3) и (5) в равенство (2):

$$-\frac{3Mv_0^2}{4} = -\left(1 + \frac{f_{\text{к}}}{r}\operatorname{ctg}\,\alpha\right)Mgh$$

и найдем начальную скорость

$$v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\frac{f_\text{к}}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}.$$

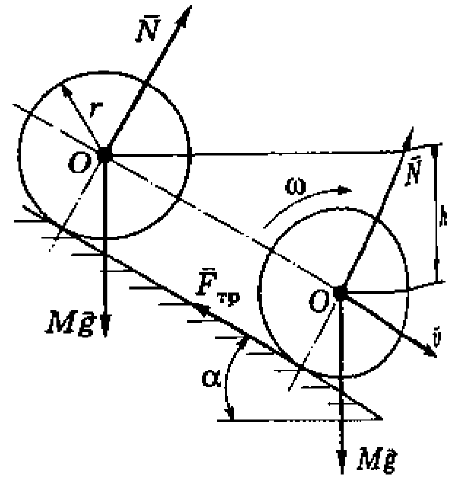
О т в е т: $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\frac{f_\text{к}}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$.

Задача 38.26

Два цилиндра одинаковой массы и радиуса скатываются без скольжения по наклонной плоскости. Первый цилиндр сплошной, массу второго цилиндра можно считать равномерно распределенной по его ободу. Найти зависимость между скоростями центров масс цилиндров при опускании их на одну и ту же высоту. В начальный момент цилиндры находились в покое.

Р е ш е н и е

Рассмотрим качение каждого цилиндра в отдельности по наклонной плоскости под действием только сил тяжести. Покажем на рисунке начальное и конечное положения цилиндра, а также скорость цилиндра $\bar{v}$ и высоту h.



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Так как цилиндры можно считать абсолютно твердыми телами, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия обоих цилиндров в начальном положении равнялась нулю, т.е. $T_0 = 0$, поэтому

$$T = \sum A_k^e. \tag{1}$$

Найдем кинетическую энергию первого (сплошного) цилиндра, когда он опускается на расстояние h:

$$T = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}I_O\omega_1^2 = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{3Mv_1^2}{4}. \tag{2}$$

Определим работу внешних сил при перемещении этого цилиндра из начального в конечное положение:

$$\sum A_k^e = A_M + A_N.$$

Работа сил тяжести

$$A_M = Mgh.$$

Работа A_N силы реакций $\overline{N}$ равна нулю.

Следовательно,

$$\sum A_k^e = Mgh. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и найдем скорость первого цилиндра:

$$v_1 = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$

Кинетическая энергия второго цилиндра, масса которого равномерно распределена по его ободу, когда он опускается на расстояние h:

$$T = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{1}{2} Mr^2 \frac{v_2^2}{r^2} = Mv_2^2.$$

Работа внешних сил при перемещении этого цилиндра из начального в конечное положение так же, как и в первом случае, равна

$$\sum A_k^e = A_M + A_N = Mgh.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1) и найдем скорость второго цилиндра:

$$v_2 = \sqrt{gh}.$$

Тогда искомое отношение скоростей цилиндров

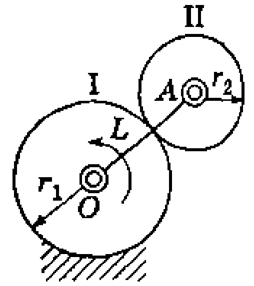
$$v_2/v_1 = \sqrt{3}/2.$$

Ответ: $v_2/v_1 = \sqrt{3}/2$.

Задача 38.27

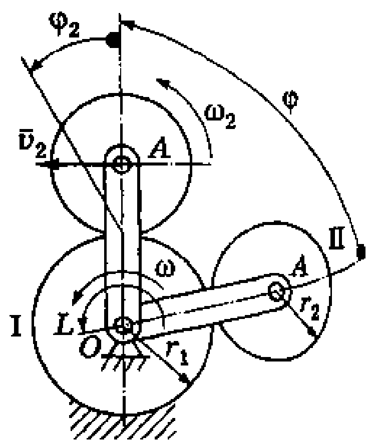
Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента L, приложенного к кривошипу OA.

Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо I имеет радиус r_1, подвижное колесо II — радиус r_2 и массу M_1, а кривошип OA — массу M_2. Колесо II считать однородным диском, а кривошип — однородным стержнем.



Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из неподвижного колеса I, кривошипа OA и подвижного колеса II. Покажем на рисунке начальное и конечное положения системы, вращающий момент L, скорости тел, входящих в систему, и их перемещения.



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

Система начинает движение из состояния покоя, поэтому $T_0 = 0$. С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_{OA} + T_{II}.$$

Кинетическая энергия кривошипа OA, совершающего вращательное движение относительно оси, проходящей через точку O,

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2}\left[I_c + M_2\left(\frac{OA}{2}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{M_2(OA)^2}{12} + \frac{M_2(OA)^2}{4}\right]\omega^2 =$$

$$= \frac{M_2(OA)^2\omega^2}{6} = \frac{M_2(r_1 + r_2)^2}{6}\omega^2.$$

Кинетическая энергия колеса II, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_{II} = \frac{M_1 v_2^2}{2} + \frac{1}{2} I_A \omega_2^2 = \frac{M_1 v_2^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r_2^2}{2}\,\frac{v_2^2}{r_2^2} = \frac{3M_1 v_2^2}{4}.$$

Выразим скорость центра A колеса II через угловую скорость кривошипа OA:

$$v_2 = \omega(r_1 + r_2).$$

Тогда

$$T_{II} = \frac{3M_1(r_1 + r_2)^2}{4}\omega^2,$$

$$T = \frac{3M_2(r_1 + r_2)^2}{6}\omega^2 + \frac{3M_1(r_1 + r_2)^2}{4}\omega^2 = (9M_1 + 2M_2)\frac{(r_1 + r_2)^2}{12}\omega^2. \quad (3)$$

Определим работу внешних сил при перемещении системы из начального в конечное положение:

$$\sum A_k^e = A_M + A_L = A_L,$$

так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то работа сил тяжести A_M всех его частей при перемещении φ равна нулю.

Работа вращающего момента L при перемещении φ

$$A_L = L\varphi.$$

Следовательно,

$$\sum A_k^e = L\varphi. \quad (4)$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2):

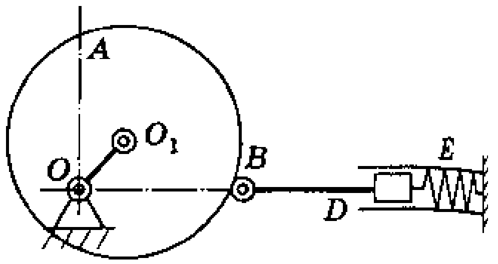
$$(9M_1 + 2M_2)\frac{(r_1 + r_2)^2}{12}\omega^2 = L\varphi$$

и найдем угловую скорость кривошипа:

$$\omega = \frac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\frac{3L\varphi}{9M_1 + 2M_2}}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{2}{r_1 + r_2}\sqrt{\dfrac{3L\varphi}{9M_1 + 2M_2}}$.

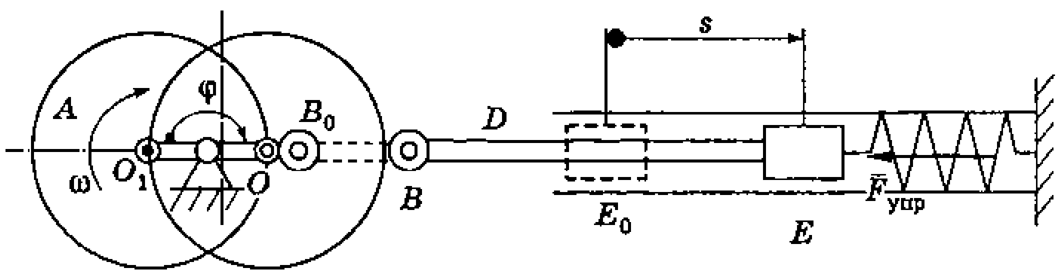
Задача 38.28



В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик A приводит в возвратно-поступательное движение ролик B со штангой D. Пружина E, соединенная со штангой, обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком. Масса эксцентрика равна M, эксцентриситет e равен половине его радиуса; коэффициент упругости пружины равен c. При крайнем левом положении штанги пружина не напряжена. Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику для того, чтобы он переместил штангу D из крайнего левого положения в крайнее правое? Массой ролика, штанги и пружины пренебречь. Эксцентрик считать однородным круглым диском.

Решение

Рассмотрим движение кулачкового механизма в горизонтальной плоскости. Покажем на рисунке начальное и конечное положения механизма. При движении эксцентрик A повернется на угол $\varphi = \pi$, а ролик B со штангой D переместится на величину $2OO_1 = 2e = r$.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Система неизменяема, поэтому работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

В конечном положении система остановилась и ее кинетическая энергия стала равна нулю, т.е. $T = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$-T_0 = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Найдем кинетическую энергию системы в начальном положении. Так как учитывается только масса эксцентрика A, то

$$T_0 = T_A.$$

Эксцентрик A совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O, поэтому

$$T_A = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2}(I_O + Me^2)\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{Mr^2}{2} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]\omega_0^2 = \frac{3Mr^2}{8}\omega^2. \tag{3}$$

Механизм перемещается в горизонтальной плоскости, поэтому сила тяжести эксцентрика работы не совершает.

Работу будет совершать только сила упругости пружины $F_{упр}$. Это значит, что

$$\sum A_k^e = A_{упр} = -\int_0^s cx\,dx = -\frac{cs^2}{2} = -\frac{cr^2}{2}. \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2):

$$-\frac{3Mr^2}{8}\omega^2 = -\frac{cr^2}{2}$$

и найдем угловую скорость

$$\omega = 2\sqrt{c/(3M)}.$$

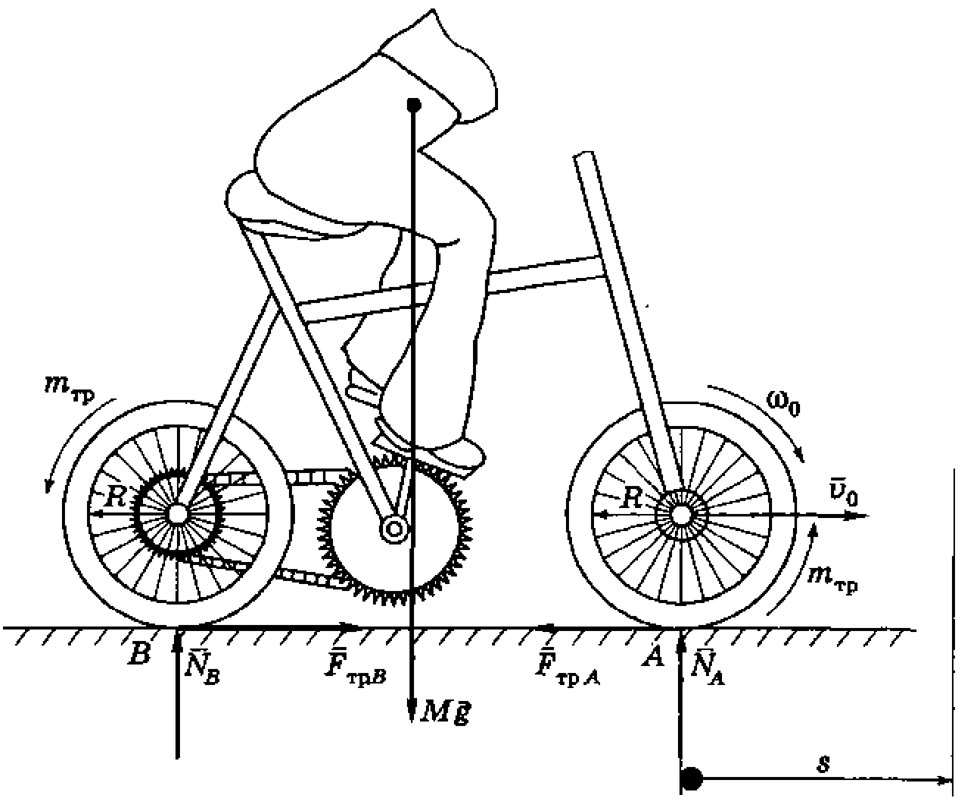
Ответ: $\omega = 2\sqrt{c/(3M)}$.

Задача 38.29

Какой путь проедет велосипедист, не вращая педалями, до остановки, если в начальный момент он двигался со скоростью 9 км/ч? Общая масса велосипеда и велосипедиста равна 80 кг. Масса каждого из колес равна 5 кг; массу каждого из колес считать равномерно распределенной по окружности радиуса 50 см. Коэффициент трения качения колес о землю равен 0,5 см.

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из велосипеда и велосипедиста на схеме. Покажем на рисунке начальное и конечное положения велосипеда, а также действующие силы: силу тяжести $M\bar{g}$ велосипеда вместе с велосипедистом, силы реакций $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$, силы $\bar{F}_{\text{тр}A}$ и $\bar{F}_{\text{тр}B}$ трения колес, а также момент сил трения качения $m_{\text{тр}}$, начальную скорость велосипеда и его путь до остановки.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1)$$

Так как система неизменяема, то работа внутренних сил равна нулю, т.е.

$$\sum A_k^i = 0.$$

В конце пути, когда велосипед остановится, его кинетическая энергия станет равна нулю, т.е. $T = 0$, поэтому выражение (1) примет вид

$$-T_0 = \sum A_k^e. \quad (2)$$

ическая энергия велосипеда в начальном положении

$$T_0 = 2T_к + T_п. \qquad (3)$$

ическая энергия колеса, совершающего плоскопараллель-ение,

$$T_к = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} M_1 R^2 \frac{v_0^2}{R^2} = M_1 v_0^2.$$

ическая энергия поступательно движущихся частей вело-велосипедиста

$$T_п = \frac{M v_0^2}{2}.$$

согласно формуле (3)

$$_1 v_0^2 + \frac{M v_0^2}{2} = \left(\frac{M}{2} + 2M_1\right) v_0^2 = 2{,}5^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 80 + 2 \cdot 5\right) = 312{,}5 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

елим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_м + A_{тр} + A_N + AF_{тр} = A_{тр},$$

ібота $A_м$ сил тяжести при движении по горизонталям, рабо-реакций $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ и $AF_{тр}$ равны нулю.

ι момента сил трения качения колес

$$A_{тр} = -m_{тр}\varphi = -(N_A + N_B) f_к \varphi = (2M_1 + M) g f_к \frac{s}{R} =$$

$$= -(2 \cdot 5 + 80) 9{,}8 \cdot 0{,}005 \cdot \frac{s}{0{,}5} = -8{,}82 s.$$

авим полученные значения T_0 и $\sum A_k^e$ в уравнение (2):

$$-312{,}5 = -8{,}82 s$$

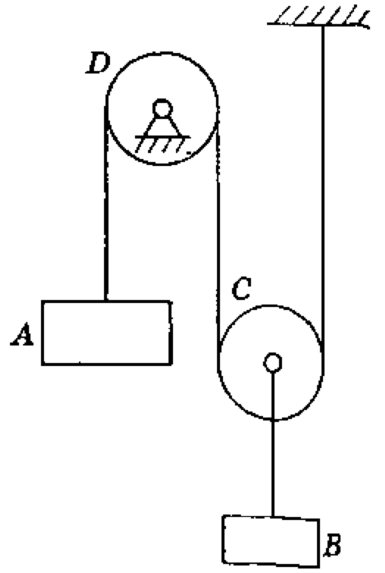
путь

$$s = 35{,}4 \text{ м}.$$

35,4 м.

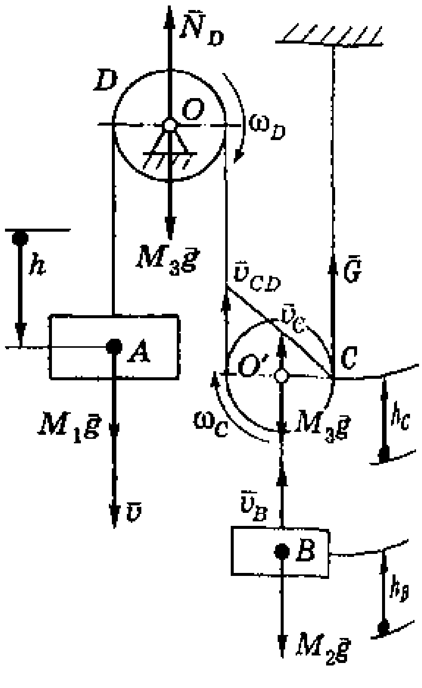
Задача 38.30

Груз A массы M_1, опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D, поднимает вверх груз B массы M_2, прикрепленный к оси подвижного блока C. Блоки C и D считать однородными сплошными дисками массы M_3 каждый. Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h. Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Решение

Рассмотрим движение данной механической системы. Покажем на рисунке конечное положение системы, когда груз A опустился на расстояние h. На систему действуют силы тяжести грузов $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, силы тяжести $M_3\bar{g}$ блоков C и D, силы реакций связей $\bar{N}_D$ и $\bar{G}$. Покажем на рисунке векторы скоростей и выразим их через скорость тела A:



$$\omega_D = \frac{v}{r},$$

$$v_{CD} = v,$$

$$v_C = v_B = \frac{v_{CD}}{2} = \frac{v}{2},$$

$$\omega_C = \frac{v}{2r}.$$

Перемещение блока C и груза B выразим через заданное перемещение h груза A. Так как перемещения пропорциональны скоростям, то

$$h_C = h_B = \frac{h}{2}.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как система неизменяема, то работа ее внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система была в покое, значит, $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D. \tag{3}$$

Кинетическая энергия грузов A и B, совершающих поступательное движение,

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2},$$

$$T_B = \frac{M_2 v_B^2}{2} = \frac{M_2 (v/2)^2}{2} = \frac{M_2 v^2}{8}.$$

Кинетическая энергия подвижного блока C, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_C = \frac{M_3 v_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_O\, \omega_C^2 = \frac{M_3 v_C^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M_3 r^2}{2}\,\frac{v_C^2}{r^2} = \frac{3 M_3 v^2}{16}.$$

Кинетическая энергия блока D, совершающего вращательное движение,

$$T_D = \frac{1}{2} I_O\, \omega_D^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M_3 r^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{8} + \frac{3 M_3 v^2}{16} + \frac{M_3 v^2}{4} = (8M_1 + 2M_2 + 7M_3)\frac{v^2}{16}. \tag{4}$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_D + A_N + A_G. \tag{5}$$

Работа сил тяжести груза A

$$A_A = M_1 gh.$$

Работа сил тяжести груза B

$$A_B = -M_2 gh_B = -M_2 g\frac{h}{2}.$$

Работа сил тяжести подвижного блока C

$$A_C = -M_3 gh_C = -M_3 g\frac{h}{2}.$$

Работа A_D сил тяжести блока D, работа A_N сил реакций $\bar{N}_D$ и $\bar{G}$ равны нулю.

Следовательно, согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = (2M_1 - M_2 - M_3)\frac{gh}{2}. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

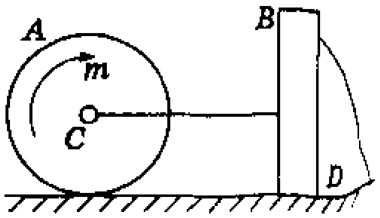
$$(8M_1 + 2M_2 + 7M_3)\frac{v^2}{16} = (2M_1 - M_2 - M_3)\frac{gh}{2}$$

и найдем скорость груза A:

$$v = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}.$$

Ответ: $v = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}.$

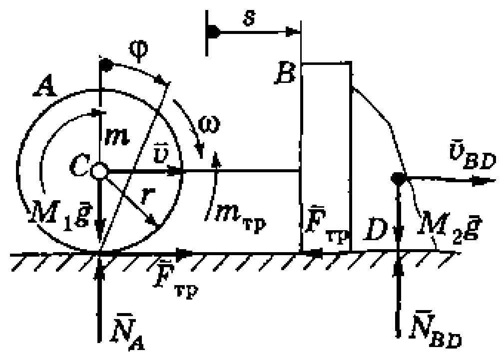
Задача 38.31



К ведущему колесу — барабану A — снегоочистителя приложен постоянный вращающий момент m. Массу барабана A можно считать равномерно распределенной по его ободу. Суммарная масса снега D, щита B и всех прочих поступательно движущихся частей постоянна и равна M_2. Коэффициент трения скольжения снега и щита о землю равен f, коэффициент трения качения барабана о землю равен $f_к$. Масса барабана равна M_1, его радиус r.

Определить зависимость между путем s, пройденным щитом B снегоочистителя, и модулем его скорости v, если в начальный момент система находилась в покое.

Решение



Рассмотрим движение данной системы. Изобразим расчетную схему для конечного положения, когда щит B прошел путь s. Покажем на рисунке действующие силы: силу тяжести $M_1\bar{g}$ тела A, силу тяжести $M_2\bar{g}$ щита B и снега, силу $\bar{F}_{тр}$ трения скольжения снега и щита по земле, силы реакций $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_{BD}$, а также вращающий момент m, момент сил трения качения барабана по земле $m_{тр}$.

Линейная скорость $\bar{v}$ центра барабана A равна скорости $\bar{v}_{BD}$ щита со снегом.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то работа ее внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система находилась в покое и ее кинетическая энергия была равна нулю, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда щит B прошел путь s:

$$T = T_A + T_{BD}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия барабана, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} M_1 r^2 \frac{v^2}{r^2} = M_1 v^2.$$

Кинетическая энергия щита со снегом

$$T_{BD} = \frac{M_2 v_{BD}^2}{2} = \frac{M_2 v^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = (2M_1 + M_2)\frac{v^2}{2}. \qquad (4)$$

Определим работу вешних сил при перемещении s:

$$\sum A_k^e = A_A + A_{BD} + A_N + A_m + A_{\text{тр}} + A_{\text{к}}. \qquad (5)$$

Снегоочиститель движется по горизонтальной поверхности, поэтому работа сил тяжести A_A и A_{BD} равны нулю.

Работа сил реакций связей $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_{BD}$ также равна нулю.

Работа вращающего момента m

$$A_m = m\varphi = m\frac{s}{r}.$$

Работа сил трения скольжения

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s = -N_{BD}fs = -M_2 gfs.$$

Работа момента сил трения качения

$$A_{\text{к}} = -m_{\text{тр}}\varphi = -N_A f_{\text{к}}\frac{s}{r} = -M_1 g\frac{f_{\text{к}}}{r}s.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = m\frac{s}{r} - M_1 g\frac{f_{\text{к}}}{r}s - M_2 gfs = (m - M_1 gf_{\text{к}} - M_2 gfr)\frac{s}{r}. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(2M_1 + M_2)\frac{v^2}{2} = (m - M_1 gf_{\text{к}} - M_2 gfr)\frac{s}{r}$$

и найдем путь щита B:

$$s = \frac{r}{2}\,\frac{2M_1 + M_2}{m - (M_1 f_{\text{к}} - M_2 fr)g}v^2.$$

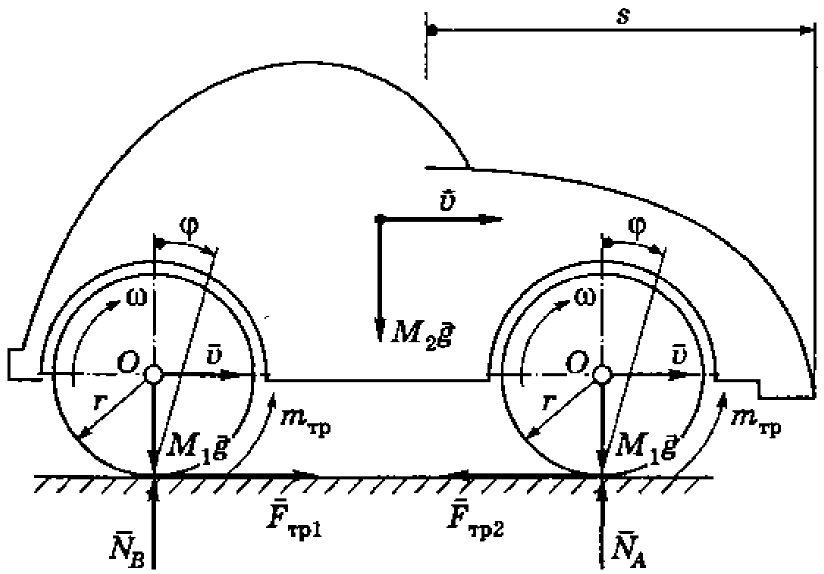
О т в е т: $s = \dfrac{r}{2}\,\dfrac{2M_1 + M_2}{m - (M_1 f_{\text{к}} - fM_2 r)g}v^2.$

Задача 38.32

ість автомашины, движущейся по прямой горизонтальной озросла от v_1 до v_2 за счет увеличения мощности мотора. [был пройден путь s. Вычислить работу, совершенную мо- этом перемещении автомашины, если M_1 — масса каждого ;х колес, M_2 — масса кузова, r — радиус колес; $f_к$ — коэф- грения качения колес о шоссе. Колеса, катящиеся без сколь- итать однородными сплошными дисками. Кинетической всех деталей, кроме колес и кузова, пренебречь.

ение

этрим движения автомобиля. Покажем на рисунке началь- іечное положения автомобиля.



ним теорему об изменении кинетической энергии меха- системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

кинетическую энергию системы в начале пути:

$$T_0 = T_2 + 4T_1. \qquad (1)$$

ческая энергия кузова, совершающего поступательное дви-

$$T_2 = \frac{M_2 v_0^2}{2}.$$

Кинетическая энергия одного из четырех колес, совершающи плоскопараллельное движение,

$$T_1 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r^2}{2}\,\frac{v_0^2}{r^2} = \frac{3M_1 v_0^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$T_0 = \frac{M_1 v_0^2}{2} + 4\left(\frac{3M_1 v_0^2}{4}\right) = (M_2 + 6M_1)\frac{v_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы в конце пути:

$$T = T_2 + 4T_1. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия кузова, совершающего поступательное движение,

$$T_2 = \frac{M_2 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия одного из четырех колес, совершающих плоскопараллельное движение,

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{3M_1 v^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_2 v^2}{2} + 4\left(\frac{3M_1 v^2}{4}\right) = (6M_1 + M_2)\frac{v^2}{2}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил при перемещении s:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_{\text{тр}} + A_N + AF_{\text{тр}} = A_{\text{тр}}. \qquad (5)$$

Автомобиль движется по горизонтальной дороге и работа сил тяжести A_1 и A_2 равна нулю.

Работа момента сил трения качения всех колес

$$A_{\text{тр}} = -m_{\text{тр}}\varphi = -Nf_{\text{к}}\frac{s}{r} = -(M_2 + 4M_1)gf_{\text{к}}\frac{s}{r}. \qquad (6)$$

Работа A_N сил реакций $\overline{N}$ и работа $AF_{\text{тр}}$ равны нулю.

Работа внутренних сил — это работа мотора, т.е.

$$\sum A_k^i = A_{\text{м}}. \tag{7}$$

Подставим выражения (2), (4), (6) и (7) в формулу (1):

$$(6M_1 + M_2)\frac{v^2}{2} - (6M_1 + M_2)\frac{v_0^2}{2} = -(4M_1 + M_2)\,g f_{\text{к}}\frac{s}{r} + A_{\text{м}}$$

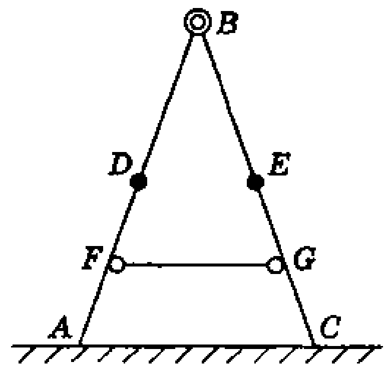
и найдем работу, совершаемую мотором:

$$A_{\text{м}} = \frac{6M_1 + M_2}{2}(v^2 - v_0^2) + \frac{f_{\text{к}}}{r}(4M_1 + M_2)gs.$$

Ответ: $A_{\text{м}} = \dfrac{6M_1 + M_2}{2}(v^2 - v_0^2) + \dfrac{f_{\text{к}}}{r}(4M_1 + M_2)gs.$

Задача 38.33

Стремянка ABC с шарниром B стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB = BC = 2l$, центры масс находятся в серединах D и E стержней, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр масс, равен ρ, расстояние шарнира B от пола равно h. В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стержня FG. Пренебрегая трением в шарнире, определить:



1) скорость точки B в момент удара ее о пол; 2) скорость точки B в момент, когда расстояние ее от пола будет равно $h/2$.

Решение

1) Рассмотрим движение стремянки ABC после разрыва стержня FG. Покажем на расчетной схеме (рис. 1) начальное и конечное положения стремянки.

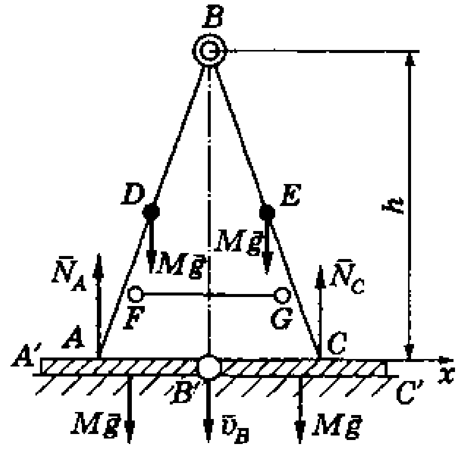


Рис. 1

Для определения характера движения стремянки во время падения используем теорему о движении центра масс системы в проекции на горизонтальную ось x:

$$M\ddot{x}_B = \sum F_x.$$

Так как $\sum F_x = 0$, то $x_B = \text{const}$ и шарнир B будет двигаться по вертикали BB'.

Для определения скорости $\bar{v}$ шарнира B применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + A_k^i. \tag{1}$$

Так как система неизменяема, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

Стремянка ABC приходит в движение из состояния покоя, поэтому ее кинетическая энергия в начальный момент равна нулю, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим кинетическую энергию лестницы AB в момент ее удара о пол. Скорость шарнира B направлена по вертикали вниз, а скорость конца A лестницы может быть направлена только вдоль пола.

Найдем мгновенный центр скоростей лестницы как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из начала векторов скоростей $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$ в точках B' и A'. Мгновенный центр скоростей лестницы AB — точка A', следовательно, в момент удара лестница совершает мгновенное вращательное движение вокруг точки A'.

Тогда

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2}\left[I_D + M(AD)^2\right]\frac{v^2}{(AB)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[M\rho^2 + Ml^2\right]\frac{v^2}{4l^2} = \frac{M(\rho^2 + l^2)v^2}{8l^2}.$$

Аналогично кинетическая энергия лестницы BC

$$T_{BC} = \frac{M(\rho^2 + l^2)v^2}{8l^2}.$$

Тогда кинетическая энергия стремянки в момент удара

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{M(\rho^2 + l^2)v^2}{4l^2}. \tag{3}$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{AB} + A_{BC} + A_N. \tag{4}$$

Работа силы тяжести лестницы AB

$$A_{AB} = Mg\frac{h}{2}.$$

Работа силы тяжести лестницы BC

$$A_{BC} = Mg\frac{h}{2}.$$

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ равна нулю.

Тогда согласно формуле (4)

$$A_k^e = 2Mg\frac{h}{2} = Mgh. \tag{5}$$

Подставим выражения (3) и (5) в уравнение (2):

$$\frac{M(\rho^2 + l^2)v^2}{4l^2} = Mgh$$

и найдем скорость точки B:

$$v = 2l\sqrt{\frac{gh}{\rho^2 + l^2}}.$$

2) Найдем скорость шарнира B в момент, когда расстояние до пола будет $h/2$. Покажем на расчетной схеме (рис. 2) начальное и конечное положения стремянки ABC.

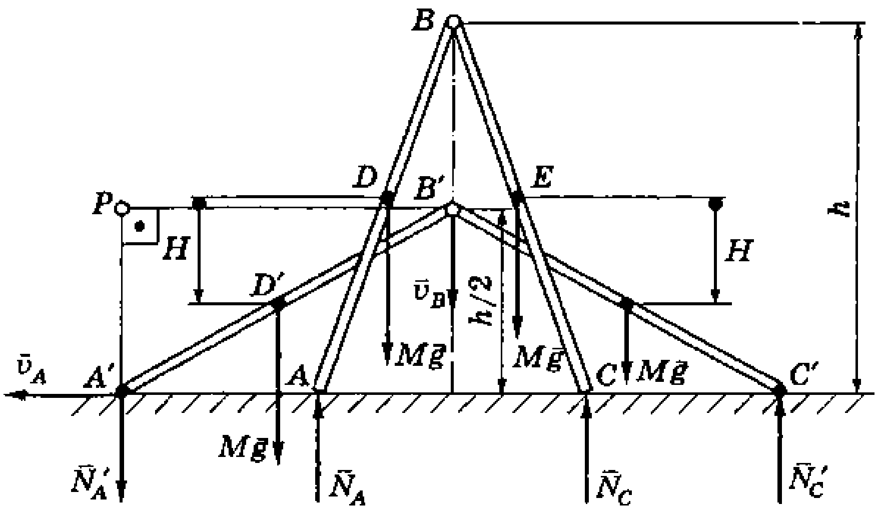


Рис. 2

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + A_k^i$$

или

$$T = \sum A_k^e. \tag{6}$$

Так как система неизменяема, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$, а стремянка ABC приходит в движение из состояния покоя, т.е. $T_0 = 0$.

Найдем кинетическую энергию лестницы AB в момент, когда шарнир B опустится на $h/2$. Скорость шарнира B направлена по вертикали вниз, скорость $\bar{v}_A$ конца лестницы A, скользящего по гладкому полу, направлена вдоль пола, по горизонтали влево. Мгновенный центр скоростей лестницы AB лежит в точке P. Угловую скорость ω_{AB} лестницы AB найдем из соотношения

$$\frac{v_B}{B'P} = \frac{v_A}{A'P} = \omega_{AB},$$

или

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{B'P} = \frac{v_B}{\sqrt{(A'B')^2 - (A'P)^2}} = \frac{v_B}{\sqrt{4l^2 - (h^2/4)}} = \frac{2v_B}{\sqrt{16l^2 - h^2}}.$$

Кинетическая энергия лестницы AB, совершающей плоскопараллельное движение,

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_P \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}\left[I_{D'} + m(D'P)^2\right]\omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}(M\rho^2 + Ml^2)\left(\frac{2v_B}{\sqrt{16l^2 - h^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2(\rho^2 + l^2)Mv_B^2}{16l^2 - h^2}.$$

Аналогично найдем кинетическую энергию лестницы BC:

$$T_{BC} = \frac{2(\rho^2 + l^2)Mv_B^2}{16l^2 - h^2}.$$

Тогда кинетическая энергия стремянки

$$T = T_{AB} + T_{BC} = \frac{4(\rho^2 + l^2)}{16l^2 - h^2}Mv_B^2. \tag{7}$$

Определяем работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{AB} + A_{BC} + A_N. \tag{8}$$

Работа сил тяжести лестниц AB и BC

$$A_{AB} = MgH = Mg\frac{h}{4},$$

$$A_{BC} = MgH = Mg\frac{h}{4}.$$

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ равна нулю. Следовательно, согласно формуле (8)

$$\sum A_k^e = 2Mg\frac{h}{4} = Mg\frac{h}{2}. \tag{9}$$

Подставим выражения (7) и (9) в формулу (6):

$$\frac{4(\rho^2 + l^2)}{16l^2 - h^2} Mv_B^2 = Mg\frac{h}{2}$$

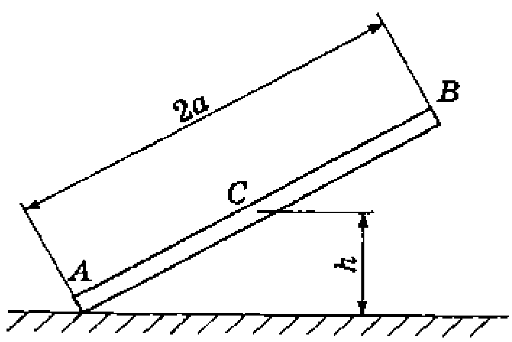
и найдем скорость точки B:

$$v_B = \frac{1}{2}\sqrt{gh\frac{16l^2 - h^2}{2(l^2 + \rho^2)}}.$$

Ответ: 1) $v = 2l\sqrt{\dfrac{gh}{l^2 + \rho^2}}$; 2) $v_B = \dfrac{1}{2}\sqrt{gh\dfrac{16l^2 - h^2}{2(l^2 + \rho^2)}}$.

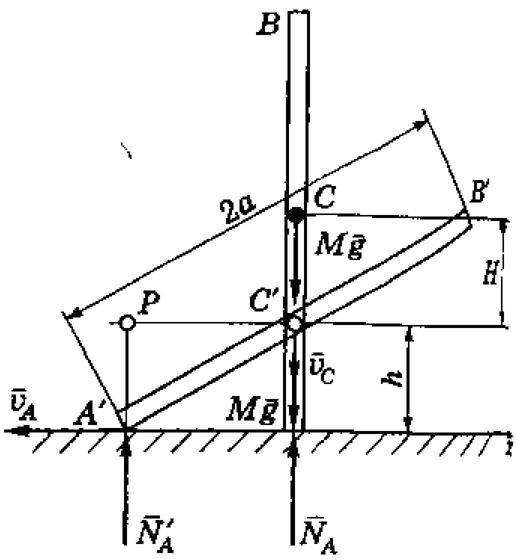
Задача 38.34

Стержень AB длины $2a$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом.



Решение

Покажем на рисунке начальное и конечное положения стержня.



Для определения характера движения стержня AB во время падения применим теорему о движении центра масс системы в проекции на горизонтальную ось x:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{xk}^e.$$

Так как $\sum F_{xk}^e = 0$ и $\dot{x}_C = 0$, то координата x_C центра масс стержня будет постоянной и точка C будет двигаться по вертикали вниз.

Для определения скорости центра масс, точки C, применим теорему об изменении кинетической энергии материальной системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как стержень AB абсолютно твердое тело, то $\sum A_k^i = 0$. В начальном положении стержень AB находился в покое, поэтому его кинетическая энергия была равна нулю, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим значение кинетической энергии стержня AB в конечном положении. В этот момент стержень совершает плоскопараллельное движение, и скорость точки C направлена вертикально вниз, а скорость конца стержня A, скользящего по гладкому полу, — вдоль пола влево.

Мгновенный центр скоростей найдем как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_C$. Он находится в точке P. Угловую скорость стержня ω_{AB} найдем из соотношения

$$\frac{v_A}{A'P} = \frac{v_C}{C'P} = \omega_{AB},$$

или

$$\omega_{AB}=\frac{v_C}{C'P}=\frac{v_C}{\sqrt{(A'C')^2-(C'P)^2}}=\frac{v_C}{\sqrt{a^2-h^2}}.$$

Найдем кинетическую энергию стержня, рассматривая его движение как мгновенное вращательное вокруг точки P:

$$T=\frac{1}{2}I_P\,\omega_{AB}^2=\frac{1}{2}[I_{C'}+M(PC')^2]\,\omega_{AB}^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{M(2a)^2}{12}+M(\sqrt{a^2-h^2})^2\right]\frac{v_C^2}{(a^2-h^2)}=\left[\frac{4a^2-3h^2}{6(a^2-h^2)}\right]Mv_C^2. \qquad (3)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e=A_{AB}+A_N=A_{AB}=MgH=Mg(a-h), \qquad (4)$$

так как работа A_N силы реакции связи $\overline{N}_A$ равна нулю.

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2):

$$\left[\frac{4a^2-3h^2}{6(a^2-h^2)}\right]Mv_C^2=Mg(a-h)$$

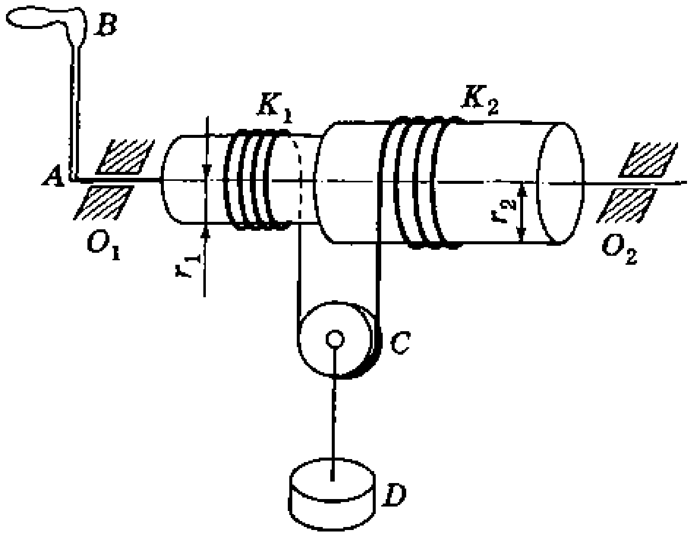
и найдем скорость центра масс стержня:

$$v_C=\sqrt{\frac{6g(a-h)(a^2-h^2)}{4a^2-3h^2}}=\sqrt{\frac{6g(a-h)(a-h)(a+h)}{4a^2-3h^2}}=(a-h)\sqrt{\frac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}}.$$

Ответ: $v_C=(a-h)\sqrt{\dfrac{6g(a+h)}{4a^2-3h^2}}$.

Задача 38.35

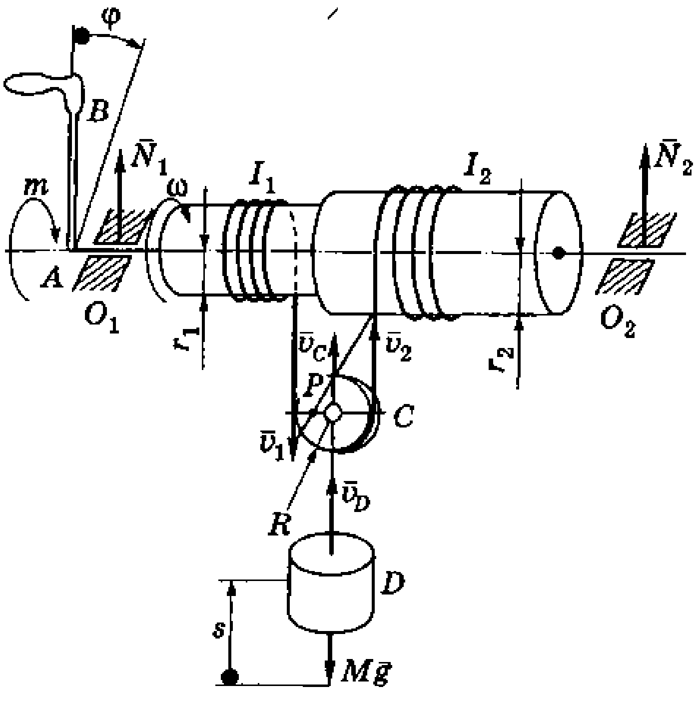
В дифференциальном вороте два жестко соединенных вала K_1 и K_2 с радиусами r_1 и r_2 и моментами инерции относительно оси O_1O_2 соответственно I_1 и I_2 приводятся во вращение рукояткой AB. Подвижный блок C подвешен на невесомой нерастяжимой нити, левая ветвь которой навита на вал K_1, а правая ветвь — на вал K_2. При вращении рукоятки AB левая ветвь нити сматывается с вала K_1, а правая ветвь наматывается на вал K_2. К рукоятке AB приложен постоянный вращающий момент m. К блоку C подвешен груз D массы M. Найти угловую



скорость вращения рукоятки в момент, соответствующий концу подъема груза D на высоту s. В начальный момент система находилась в покое. Массами рукоятки и блока пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение дифференциального ворота, соединенного с нерастяжимой нитью с блоком C и грузом D. Покажем на рисунке начальное положение системы.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема и нить нерастяжима, то $\sum A_k^i = 0$. В начальный момент система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$. С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Определим скорость всех частей системы и выразим их через угловую скорость ω вращения рукоятки:

$$v_1 = \omega r_1,$$

$$v_2 = \omega r_2.$$

Блок C совершает плоскопараллельное движение. Составим пропорцию:

$$\frac{v_1}{R-(PC)} = \frac{v_2}{R+(PC)} = \frac{v_C}{PC},$$

отсюда

$$PC = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} R = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} R.$$

Тогда

$$v_C = \frac{v_1 \cdot PC}{R-(PC)} = \frac{r_2 - r_1}{2} \omega.$$

Скорость груза D равна скорости блока C:

$$v_D = v_C = \frac{r_2 - r_1}{2} \omega.$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечный момент, когда груз D поднялся на высоту s:

$$T = T_1 + T_2 + T_D. \tag{3}$$

Кинетическая энергия вала K_1

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega^2.$$

Кинетическая энергия вала K_2

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega^2.$$

Кинетическая энергия груза D

$$T_D = \frac{Mv_D^2}{2} = \frac{M(r_2 - r_1)^2}{8}\omega^2.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \left[4(I_1 + I_2) + M(r_2 - r_1)^2\right]\frac{\omega^2}{8}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_D + A_m + A_N. \qquad (5)$$

Работа силы тяжести груза D

$$A_D = -Mgs.$$

Работа вращающего момента m

$$A_m = m\varphi = m\frac{2s}{r_2 - r_1}.$$

Работа A_N реакций связей $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ равна нулю.
Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = [2m - Mg(r_2 - r_1)]\frac{s}{r_2 - r_1}. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$\left[4(I_1 + I_2) + M(r_2 - r_1)^2\right]\frac{\omega^2}{8} = [2m - Mg(r_2 - r_1)]\frac{s}{r_2 - r_1}$$

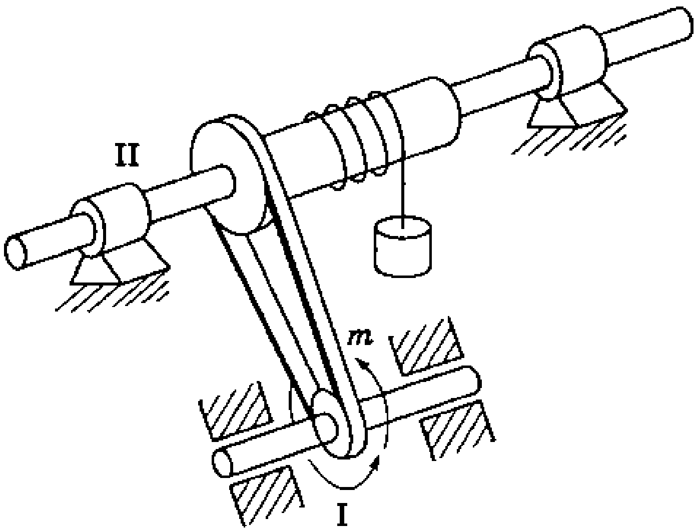
и найдем угловую скорость вращения рукоятки:

$$\omega = 2\sqrt{2s\frac{2m - Mg(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)\left[4(I_1 + I_2) + M(r_2 - r_1)^2\right]}}.$$

О т в е т: $\omega = 2\sqrt{2s\dfrac{2m - Mg(r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)\left[4(I_1 + I_2) + M(r_2 - r_1)^2\right]}}$.

Задача 38.36

Ворот приводится в движение посредством ременной передачи, соединяющей шкив II, сидящий на валу ворота, со шкивом I, сидящим на валу мотора. К шкиву I массы M_1 и радиуса r приложен постоянный вращающий момент m. Масса шкива II равна M_2, радиус его R. Масса барабана ворота M_3, радиус его r, масса поднимаемого груза M_4. Ворот приводится в движение из состояния покоя. Найти скорость груза в момент, когда он поднимается на высоту h. Массами ремня, каната и трением в подшипниках пренебречь. Шкивы и барабан считать однородными круглыми цилиндрами.



Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке систему в начальный момент.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

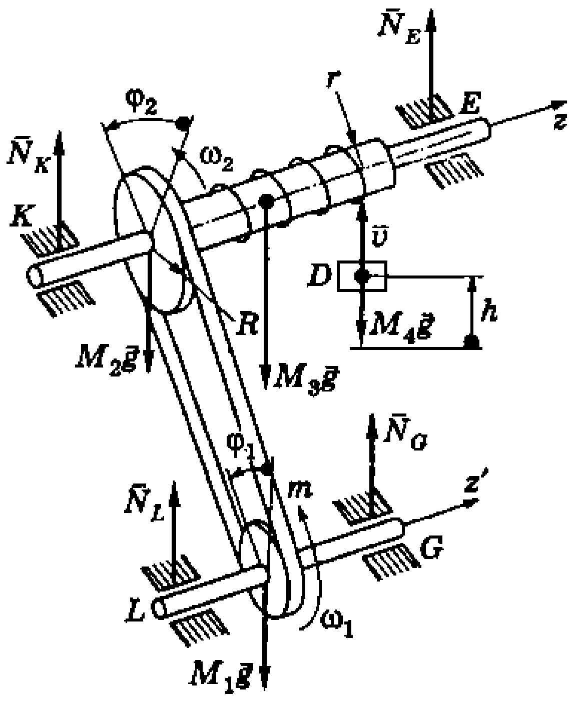
$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как система неизменяема, а ремень и канат нерастяжимы, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$



Найдем кинетическую энергию системы, когда груз D поднялся на высоту h:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия шкива I

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 r^2}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1 (R/r)^2 v^2}{4}$$

и шкива II

$$T_2 = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 R^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 (R/r)^2 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия барабана

$$T_3 = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия груза D

$$T_4 = \frac{M_4 v^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \left[\frac{M_1 (R/r)^2}{4} + \frac{M_2 (R/r)^2}{4} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_4}{2}\right] v^2 =$$

$$= [M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4]\frac{v^2}{4}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_N + A_m. \qquad (5)$$

Работа A_1 и A_2 силы тяжести шкива I и шкива II равны нулю.

Работа A_3 силы тяжести барабана и работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_K$ и $\overline{N}_E$ тоже равны нулю.

Работа силы тяжести груза D

$$A_4 = -M_4 gh.$$

Работа вращающего момента m:

$$A_m = m\varphi = m\frac{R}{r}\frac{h}{r} = \frac{mh}{r^2}.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = \frac{m}{r^2}h - M_4 gh = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g\right)h. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$T = \left[M_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + M_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{M_3}{4} + 2M_4\right]\frac{v^2}{4} = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g\right)h$$

и найдем скорость груза

$$v = 2\sqrt{\frac{h(m(R/r^2) - M_4 g)}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4}}.$$

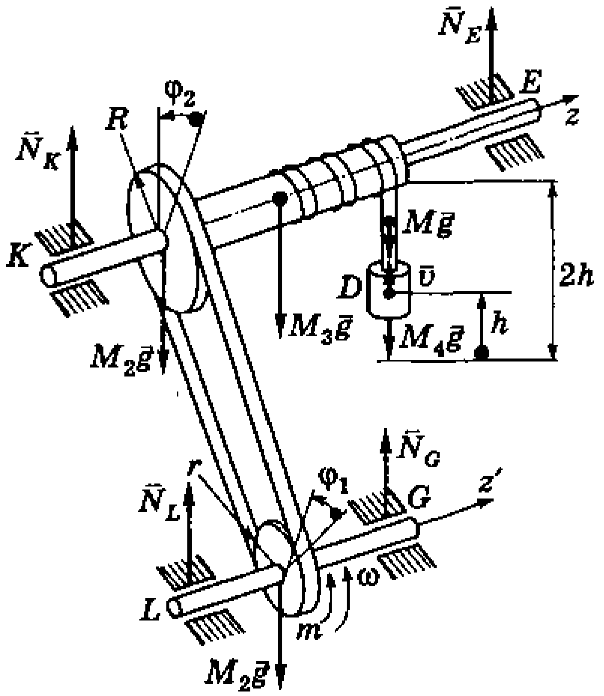
Ответ: $v = 2\sqrt{\dfrac{h(m(R/r^2) - M_4 g)}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4}}$.

Задача 38.37

Решить предыдущую задачу, принимая во внимание массу каната, к которому привязан груз. Длина каната l, масса единицы длины каната равна M. В начальный момент с вала барабана ворота свисала часть каната длиной $2h$.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке положение системы в начальный момент.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1)$$

Так как система неизменяема, то работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \quad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда груз D поднялся на высоту h:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_{\text{кан}}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия шкива 1

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r^2}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_1 (R/r)^2 v^2}{4},$$

шкива II

$$T_2 = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 R^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_2 (R/r)^2 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия барабана

$$T_3 = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{M_3 r^2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_4 = \frac{M_4 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия каната длиной l

$$T_{\text{кан}} = \frac{Mlv^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \left[M_1 (R/r)^2 + M_2 (R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2Ml \right] \frac{v^2}{4}. \tag{4}$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_N + A_m + A_{\text{кан}}. \tag{5}$$

Работа A_1 силы тяжести шкива I и работа A_2 силы тяжести шкива II равны нулю.

Работа A_3 силы тяжести барабана и работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_K$, $\overline{N}_E$, $\overline{N}_L$ и $\overline{N}_G$ тоже равны нулю.

Работа силы тяжести груза

$$A_4 = -M_4 gh.$$

Работа вращающего момента m

$$A_m = m\varphi_1 = m\frac{R}{r}\varphi_2 = m\frac{R}{r}\frac{h}{r} = m\frac{R}{r^2}h.$$

Работа силы тяжести каната

$$A_{\text{кан}} = \int\limits_{2h}^{h} Mgx\,dx = -\frac{3}{2}Mgh^2.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g - \frac{3}{2}Mgh\right)h. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

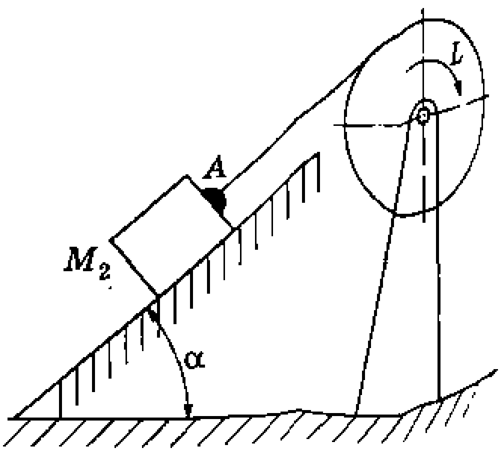
$$\left[M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2Ml\right]\frac{v^2}{4} = \left(m\frac{R}{r^2} - M_4 g - \frac{3}{2}Mgh\right)h$$

и найдем скорость груза с учетом массы каната:

$$v = 2\sqrt{\frac{h\left(m\dfrac{R}{r^2} - M_4 g - \dfrac{3}{2}Mgh\right)}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2Ml}}.$$

Ответ: $v = 2\sqrt{\dfrac{h\left(m\dfrac{R}{r^2} - M_4 g - \dfrac{3}{2}Mgh\right)}{M_1(R/r)^2 + M_2(R/r)^2 + M_3 + 2M_4 + 2Ml}}$.

Задача 38.38



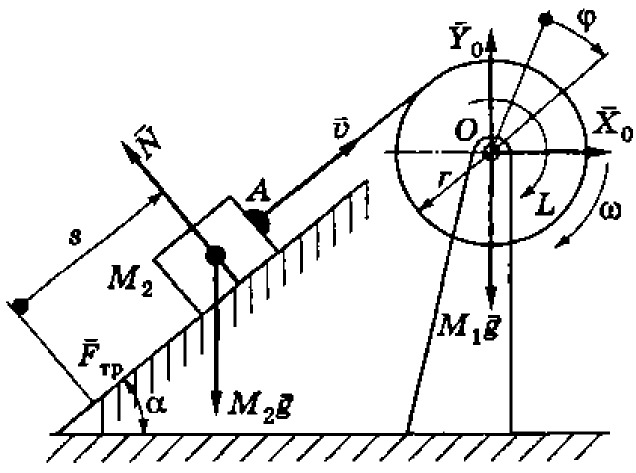
Постоянный вращающий момент L приложен к барабану ворота радиуса r и массы M_1. К концу A намотанного на барабан троса привязан груз массы M_2, который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретает барабан ворота, повернувшись на угол φ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f. Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке начальное положение системы.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$



Так как система неизменяема, то работа внутренних сил $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$. С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда барабан повернулся на угол φ:

$$T = T_б + T_{гр}. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия барабана

$$T_б = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r^2}{2}\omega^2 = \frac{M_1 r^2 \omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_{гр} = \frac{M_2 v^2}{2} = \frac{M_2(\omega r)^2}{2} = \frac{M_2 r^2 \omega^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 r^2 \omega^2}{4} + \frac{M_2 r^2 \omega^2}{2} = (M_1 + 2M_2)\frac{r^2 \omega^2}{4}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_б + A_{гр} + A_{тр} + A_N + A_L. \qquad (5)$$

Работа $A_б$ сил тяжести барабана равна нулю.

Работа силы тяжести груза

$$A_{\text{гр}} = -M_2 g s \sin\alpha = -M_2 g r \varphi \sin\alpha.$$

Работа силы трения груза о плоскость

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s = -Nfs = -M_2 g f s \cos\alpha = -M_2 g f r \varphi \cos\alpha.$$

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}$, $\overline{X}_0$ и $\overline{Y}_0$ равна нулю.
Работа вращающего момента L

$$A_L = L\varphi.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = L\varphi - (\sin\alpha + f\cos\alpha) M_2 g r \varphi =$$

$$= [L - (\sin\alpha + f\cos\alpha) M_2 g r]\varphi. \quad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(M_1 + 2M_2)\frac{r^2\omega^2}{4} = [L - (\sin\alpha + f\cos\alpha) M_2 g r]\varphi$$

и найдем угловую скорость барабана ворота:

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - M_2 g r(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + 2M_2}\varphi}.$$

Ответ: $\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{L - M_2 g r(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M_1 + 2M_2}\varphi}$.

Задача 38.39

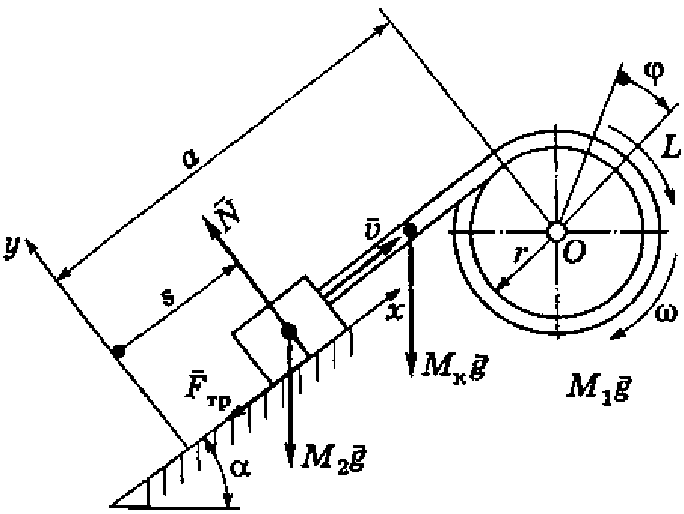
Решить предыдущую задачу с учетом массы троса, к которому привязан груз. Длина троса равна l, масса единицы длины троса равна M. В начальный момент с барабана ворота свисала часть троса длиной a. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке начальное положение системы.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$



Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.
В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.
С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда барабан повернулся на угол φ,

$$T = T_б + T_{гр} + T_т. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия барабана

$$T_б = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M_1 r^2}{2}\,\omega^2 = \frac{M_1 r^2 \omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_{гр} = \frac{M_2 v^2}{2} = \frac{M_2 (\omega r)^2}{2}.$$

Кинетическая энергия троса длиной l

$$T_т = \frac{M l v^2}{2} = \frac{M l r^2 \omega^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 r^2\omega^2}{4} + \frac{M_2 r^2\omega^2}{2} + \frac{Mlr^2\omega^2}{2} = (M_1 + 2M_2 + 2Ml)\frac{r^2\omega^2}{4}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_6 + A_{\text{гр}} + A_{\text{тр}} + A_{\text{т}} + A_N + A_L. \qquad (5)$$

Работа A_6 силы тяжести барабана равна нулю.

Работа силы тяжести груза

$$A_{\text{гр}} = -M_2 g s \sin\alpha = -M_2 g r\varphi \sin\alpha.$$

Работа силы трения скольжения груза о плоскость

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} s = -Nfs = -M_2 g f r\varphi\cos\alpha.$$

Работа силы тяжести троса

$$A_{\text{т}} = \int\limits_{a\sin\alpha}^{(a-r\varphi)\sin\alpha} Mgx\,dx - \frac{Mgx^2}{2}\Bigg|_{a\sin\alpha}^{(a-r\varphi)\sin\alpha} - \frac{1}{2}Mg\left[(a-r\varphi)^2\sin^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\right] =$$

$$= \frac{Mg}{2}(r^2\varphi^2 - 2ar\varphi)\sin\alpha = -\frac{Mgr}{2}(2a - r\varphi)\varphi\sin\alpha.$$

Работа A_N сил реакций связей равна нулю.

Работа вращающего момента L

$$A_L = L\varphi.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = L\varphi - (\sin\alpha + f\cos\alpha)M_2 g r\varphi - \frac{Mgr}{2}(2a - r\varphi)\varphi\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}[2L - 2M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)\varphi\sin\alpha]\varphi. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(M_1 + 2M_2 + 2Ml)\frac{r^2\omega^2}{4} =$$

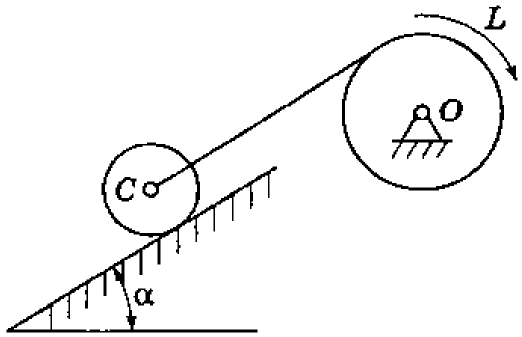
$$= \frac{1}{2}[2L - 2M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)\sin\alpha]\varphi$$

и найдем угловую скорость барабана ворота с учетом массы троса:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2L - 2M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)\sin\alpha}{M_1 + 2M_2 + 2Ml}\varphi}.$$

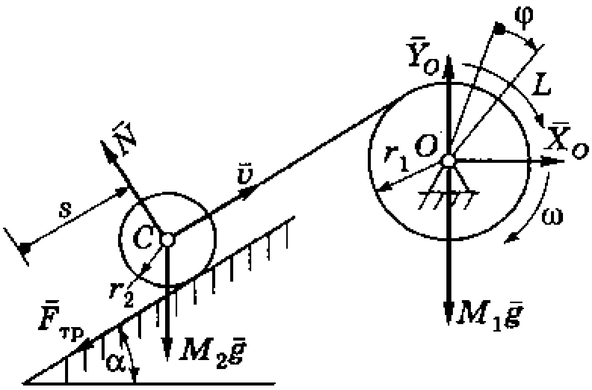
Ответ: $\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2L - 2M_2 gr(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Mgr(2a - r\varphi)\sin\alpha}{M_1 + 2M_2 + 2Ml}\varphi}$.

Задача 38.40



К барабану ворота радиуса r_1 и массы M_1 приложен постоянный вращающий момент L. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса массы M_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.

Решение



Рассмотрим движение системы, состоящей из барабана и колеса, соединенных тросом.

Покажем на рисунке конечное и начальное положения системы.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

Тогда выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечном положении, когда барабан повернулся на угол φ ($\varphi = 2\pi n$):

$$T = T_1 + T_2. \quad (3)$$

Кинетическая энергия барабана ворота

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 r_1^2}{2} \omega^2 = \frac{M_1 r_1^2 \omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия колеса, совершающего плоскопараллельное движение:

$$T_2 = \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2 r_2^2}{2} \frac{v^2}{r_2^2} = \frac{3 M_2 v^2}{4} = \frac{3 M_2 r_1^2 \omega^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 r_1^2 \omega^2}{4} + \frac{3 M_2 r_1^2 \omega^2}{4} = (M_1 + 3M_2) \frac{r_1^2 \omega^2}{4}. \quad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_N + A_L. \quad (5)$$

Работа A_1 силы тяжести барабана равна нулю.
Работа силы тяжести колеса

$$A_2 = -M_2 g s \sin\alpha = -M_2 g r_1 \varphi \sin\alpha = -2 M_2 g r_1 \pi n \sin\alpha.$$

Работа A_N сил реакций связей равна нулю.
Работа вращающего момента L

$$A_L = L\varphi = 2L\pi n.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = 2L\pi n - 2 M_2 g r_1 \pi n \sin\alpha = 2\pi n (L - M_2 g r_1 \sin\alpha). \quad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(M_1 + 3M_2) \frac{r_1^2 \omega^2}{4} = 2\pi n (L - M_2 g r_1 \sin\alpha)$$

и найдем угловую скорость барабана:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n \frac{L - M_2 g r_1 \sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}.$$

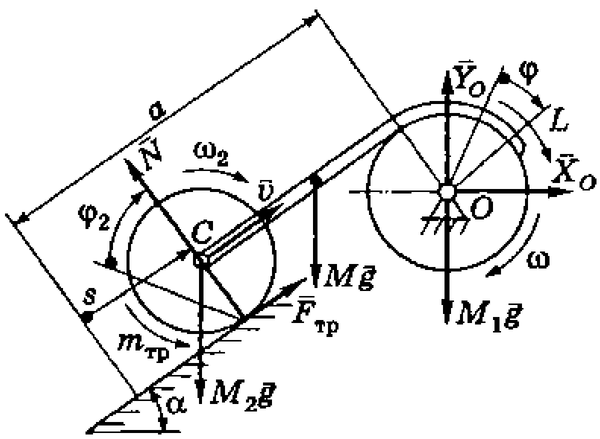
Ответ: $\omega = \dfrac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n \dfrac{L - M_2 g r_1 \sin\alpha}{M_1 + 3M_2}}$.

Задача 38.41

Решить предыдущую задачу с учетом массы троса и трения качения колеса о наклонную плоскость, если l — длина троса, M — масса его единицы длины, a – длина части троса, не намотанной на барабан в начальный момент, $f_к$ — коэффициент трения качения, r_2 — радиус колеса. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение системы, состоящей из барабана, каната и колеса. Покажем на рисунке начальное и конечное положения системы.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$. С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы, когда барабан повернется на угол φ ($\varphi = 2\pi n$):

$$T = T_1 + T_2 + T_т. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия барабана

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 r_1^2}{2} \omega^2 = \frac{M_1 r_1^2 \omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия колеса, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_2 = \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{M_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2 r_2}{2} \frac{v^2}{r^2} = \frac{3 M_2 v^2}{4} = \frac{3 M_2 r_1^2 \omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия троса

$$T_т = \frac{Mlv^2}{2} = \frac{M r_1^2 \omega^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 r_1^2 \omega^2}{4} + \frac{3 M_2 r_1^2 \omega^2}{4} + \frac{M r_1^2 \omega^2}{2} = (M_1 + 3M_2 + 2Ml) \frac{r_1^2 \omega^2}{4}. \quad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_1 + A_2 + A_т + A_N + A_L + A_{тр}. \quad (5)$$

Работа A_1 силы тяжести барабана равна нулю.

Работа силы тяжести колеса

$$A_2 = -M_2 g \sin\alpha = -M_2 g r_1 \varphi \sin\alpha = -2 M_2 g r_1 \pi n \sin\alpha.$$

Работа силы тяжести троса

$$A_т = \int\limits_{a\sin\alpha}^{(a-s)\sin\alpha} Mgx\,dx = \frac{Mgx^2}{2}\Bigg|_{a\sin\alpha}^{(a-s)\sin\alpha} = \frac{1}{2} Mg(s-2a)s\sin\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2} Mg r_1 (2a - r_1\varphi)\varphi \sin\alpha = 2 Mg r_1 (a - r_1 \pi n) \pi n \sin\alpha.$$

Работа A_N сил реакций связей равна нулю.

Работа вращающего момента

$$A_L = L\varphi = 2\pi n L.$$

Работа момента сил трения качения колеса

$$A_{тр} = -m_{тр}\varphi_2 = -N f_к \frac{r_1}{r_2} \varphi = -M_2 g f_к \frac{r_1}{r_2} \cdot 2\pi n \cos\alpha.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = 2\pi n L - 2M_2 g r_1 \pi n \sin\alpha - 2M_2 g f_\text{к} \frac{r_1}{r_2}\pi n \cos\alpha -$$

$$-2Mgr_1(a - r_1\pi n)\pi n \sin\alpha =$$

$$=2\pi n\left[L - M_2 g r_1\left(\sin\alpha + \frac{f_\text{к}}{r_2}\cos\alpha\right) - Mgr_1(a - r_1\pi n)\sin\alpha\right]. \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(M_1 + 3M_2 + 2Ml)\frac{r_1^2\omega^2}{4} =$$

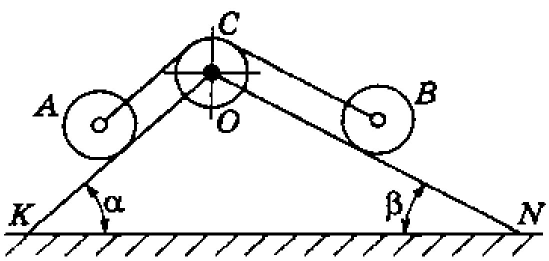
$$=2\pi n\left\{L - gr_1\left[M_2\left(\sin\alpha + \frac{f_\text{к}}{r_2}\cos\alpha\right) + M(a - \pi n r_1)\sin\alpha\right]\right\}$$

и найдем угловую скорость барабана с учетом массы троса и трения колеса:

$$\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - r_1 g\left[M_2\left(\sin\alpha + \frac{f_\text{к}}{r_2}\cos\alpha\right) + M(a - \pi n r_1)\sin\alpha\right]}{M_1 + 3M_2 + 2Ml}}.$$

Ответ: $\omega = \frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n\frac{L - r_1 g\left[M_2\left(\sin\alpha + \frac{f_\text{к}}{r_2}\cos\alpha\right) + M(a - \pi n r_1)\sin\alpha\right]}{M_1 + 3M_2 + 2Ml}}.$

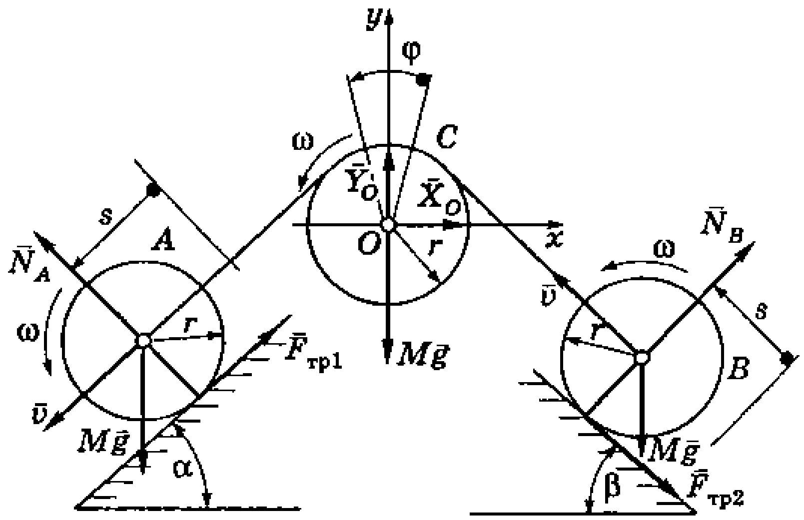
Задача 38.42



Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK, поднимая посредством нерастяжимого троса колесо B, которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON. Трос переброшен через блок C, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти скорость оси колеса A при ее перемещении параллельно линии OK на расстояние s. В начальный момент система была в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинаковой массы и радиуса. Массой троса пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем начальное и конечное положения системы.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечный момент:

$$T = T_A + T_B + T_C. \qquad (3)$$

Кинетическая энергия колес A и B, совершающих плоскопараллельное движение,

$$T_A = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{3Mv^2}{4},$$

$$T_B = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{3Mv^2}{4}.$$

Кинетическая энергия блока C, совершающего вращательное движение,

$$T_C = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{Mv^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{3Mv^2}{4} + \frac{3Mv^2}{4} + \frac{Mv^2}{4} = \frac{7Mv^2}{4}. \qquad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_N. \qquad (5)$$

Работа силы тяжести колеса A

$$A_A = Mgs\sin\alpha.$$

Работа силы тяжести колеса B

$$A_B = -Mgs\sin\beta.$$

Работа A_C силы тяжести блока C равна нулю.

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ равна нулю.

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = Mgs\sin\alpha - Mgs\sin\beta = Mgs(\sin\alpha - \sin\beta). \qquad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$\frac{7Mv^2}{4} = Mgs(\sin\alpha - \sin\beta)$$

и найдем скорость оси колеса:

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gs(\sin\alpha - \sin\beta)}.$$

Ответ: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gs(\sin\alpha - \sin\beta)}$.

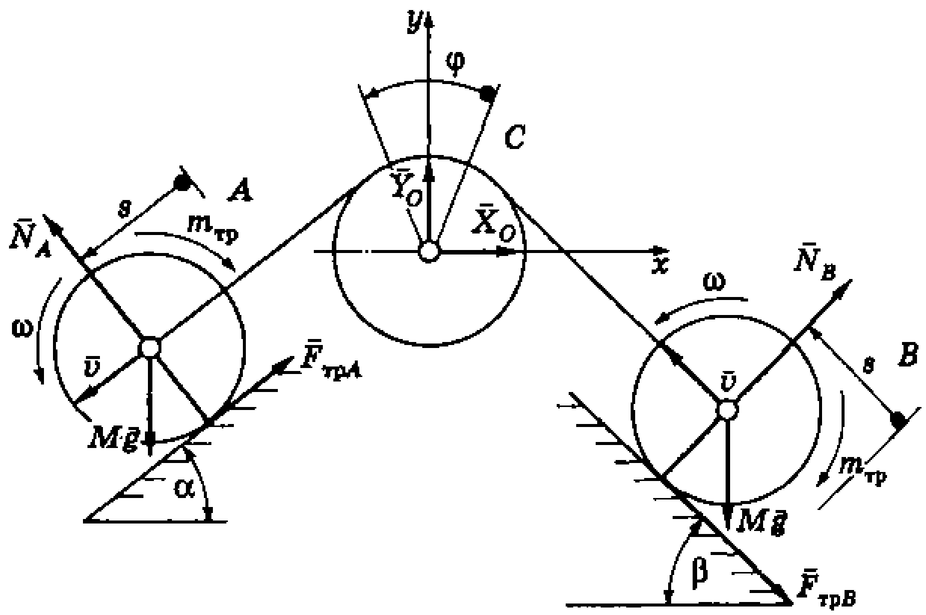
Задача 38.43

Решить предыдущую задачу, принимая во внимание трение качения колес о наклонные плоскости. Коэффициент трения качения равен $f_к$, радиусы колес равны r.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На расчетной схеме покажем конечное и начальное положения системы. Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1)$$



Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы в конечном положении (см. решение задачи 38.42)

$$T = \frac{3Mv^2}{4} + \frac{3Mv^2}{4} + \frac{Mv^2}{4} = \frac{7Mv^2}{4}. \quad (3)$$

Определяем работу внешних сил с учетом трения качения колес о наклонную плоскость:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_N + A_{трA} + A_{трB}. \quad (4)$$

Работа силы тяжести колеса A

$$A_A = Mgs\sin\alpha.$$

Работа силы тяжести колеса B

$$A_A = -Mgs\sin\beta.$$

Работа A_C силы тяжести блока C равна нулю.

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ и $\overline{F}_{тр}$ равна нулю.

Работа силы трения качения колеса A

$$A_{тр A} = -m_{тр}\varphi = -N_A f_к \frac{s}{r} = -Mgf_к \frac{s}{r}\cos\alpha,$$

колеса B

$$A_{тр B} = -m_{тр}\varphi = -N_B f_к \frac{s}{r} = -Mgf_к \frac{s}{r}\cos\beta.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$\sum A_k^e = Mgs\sin\alpha - Mgs\sin\beta - Mgsf_к \frac{s}{r}\cos\alpha - Mgf_к \frac{s}{r}\cos\beta =$$

$$= Mgs\left[(\sin\alpha - \sin\beta) - \frac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]. \qquad (5)$$

Подставим выражения (3) и (5) в уравнение (2):

$$\frac{7Mv^2}{4} = Mgs\left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]$$

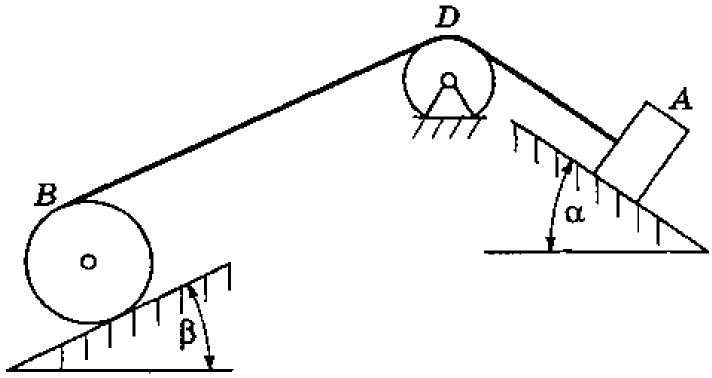
и найдем скорость оси колеса с учетом трения качения колес:

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}.$$

Ответ: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}.$

Задача 38.44

К грузу A массы M_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D массы M_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B массы M_3. При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.



Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути s, если в начальный момент система находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Силами трения и массой нити пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, отметив начальное.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

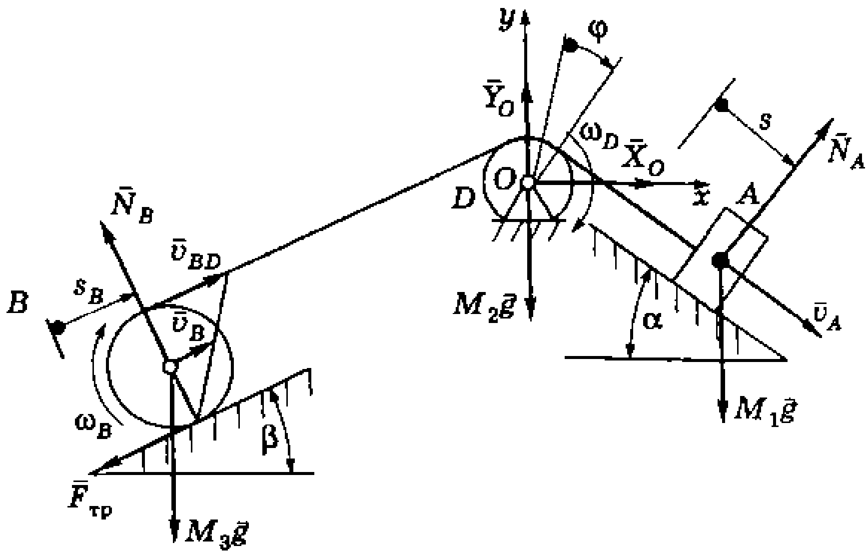
$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$



инетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_A + T_D + T_C. \tag{3}$$

:ская энергия груза A, совершающего поступательное дви-

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

совершающего вращательное движение,

$$T_D = \frac{1}{2} I \omega_D^2 = \frac{1}{2} \frac{M_2 r_D^2}{2} \frac{v^2}{r_D^2} = \frac{M_2 v^2}{4}.$$

іеская энергия катка B, совершающего плоскопараллель-
іие,

$$T_B = \frac{M_3 v_B^2}{2} + \frac{1}{2} I \omega_B^2 = \frac{M_3 v_B^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_3 r_B^2}{2} \frac{v_B^2}{(r_B)^2} =$$

$$= \frac{M_3 v^2}{4} + \frac{M_3 (v/2)^2}{4} = \frac{3 M_3 v^2}{16}.$$

огласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{3 M_3 v^2}{16} = (8M_1 + 4M_2 + 3M_3) \frac{v^2}{16}. \tag{4}$$

работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_D + A_N. \tag{5}$$

силы тяжести груза A

$$A_A = M_1 g s \sin\alpha,$$

$$A_B = -M_3 g s_B \sin\beta = -M_3 g \frac{s}{2} \sin\beta.$$

A_D силы тяжести блока D равна нулю.
A_N сил реакций связей $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$ и $\overline{F}_{тр}$ равна нулю.

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = M_1 gs\sin\alpha - M_3 g\,\frac{s}{2}\,\sin\beta = \frac{1}{2}(2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta)gs. \qquad (\!$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(8M_1 + 4M_2 + 3M_3)\frac{v^2}{16} = \frac{1}{2}(2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta)gs$$

и найдем скорость груза A:

$$v = 2\sqrt{2gs\frac{2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$$

О т в е т: $v = 2\sqrt{2gs\dfrac{2M_1\sin\alpha - M_3\sin\beta}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}$.

Задача 38.45

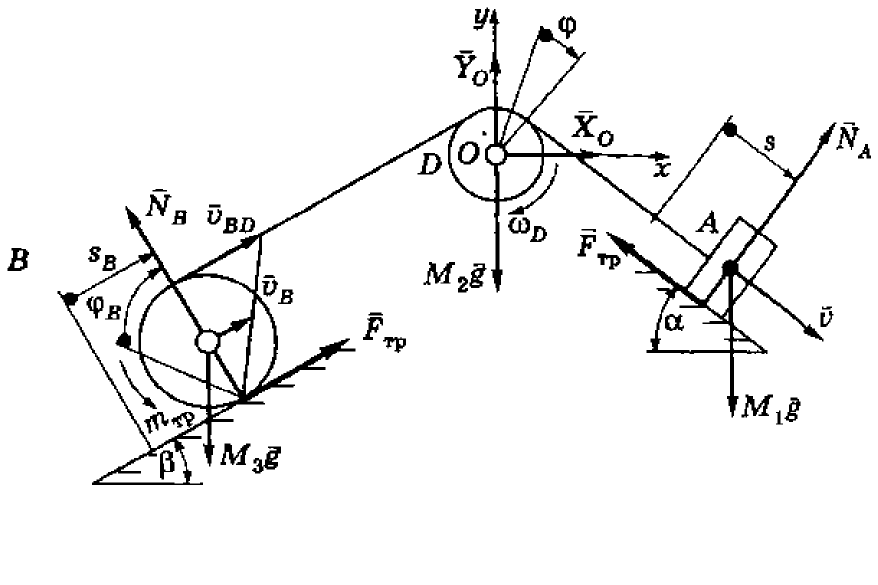
Решить предыдущую задачу в предположении, что коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны f и $f_к$. Радиус катка B равен r.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, отметив начальное.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1$$



Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы в конечном положении (см. решение задачи 38.44)

$$T = \frac{M_1 v^2}{4} + \frac{M_2 v^2}{4} + \frac{3M_3 v^2}{16} = (8M_1 + 4M_2 + 3M_3)\frac{v^2}{16}. \tag{3}$$

Найдем работу внешних сил с учетом сил трения:

$$\sum A_k^e = A_A + A_D + A_B + A_N + A_{\text{тр}A} + A_{\text{тр}B}. \tag{4}$$

Работа силы тяжести груза A

$$A_A = M_1 g s \sin\alpha.$$

Работа A_D силы тяжести блока D равна нулю.

Работа силы тяжести катка B

$$A_B = -M_3 g s_B \sin\beta = -M_3 g \frac{s}{2} \sin\beta.$$

Работа сил A_N реакций связей $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{X}_0$ и $\overline{Y}_0$ равна нулю.

Работа сил трения скольжения груза A о плоскость

$$A_{\text{тр}A} = -F_{\text{тр}} s = -N_A f s = -M_1 g f s \cos\alpha.$$

Работа сил трения качения катка B

$$A_{\text{тр}B} = -m_{\text{тр}} \varphi_B = -N_B f_{\text{к}} \frac{s_B}{r} = -M_3 g f_{\text{к}} \frac{s}{2r} \cos\beta.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$\sum A_k^e = M_1 g s \sin\alpha - M_3 g \frac{s}{2} \sin\beta - M_1 g f s \cos\alpha - M_3 g \frac{f_{\text{к}}}{2r} s \cos\beta =$$

$$= \frac{gs}{2}\left[2M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_3\left(\sin\beta + \frac{f_{\text{к}}}{r}\cos\beta\right)\right]. \tag{5}$$

Подставим выражения (3) и (5) в уравнение (2):

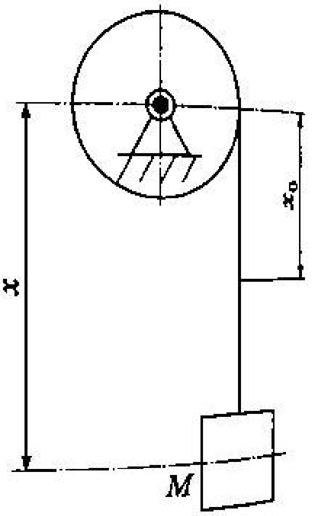
$$(8M_1 + 4M_2 + 3M_3)\frac{v^2}{16} = \frac{gs}{2}\left[2M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_3\left(\sin\beta + \frac{f_{\text{к}}}{r}\cos\beta\right)\right]$$

и найдем скорость груза A с учетом сил трения:

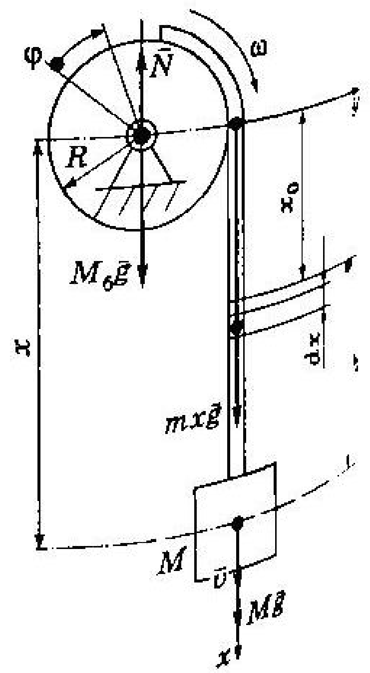
$$v = 2\sqrt{2gs\,\frac{2M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_3\left(\sin\beta + \frac{f_{\text{к}}}{r}\cos\beta\right)}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$$

Ответ: $v = 2\sqrt{2gs\,\frac{2M_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - M_3\left(\sin\beta + \frac{f_{\text{к}}}{r}\cos\beta\right)}{8M_1 + 4M_2 + 3M_3}}.$

Задача 38.46



Груз массы M подвешен на нерастяжимом однородном тросе длины l, навитом на цилиндрический барабан с горизонтальной осью вращения. Момент инерции барабана относительно оси вращения I, радиус барабана R, масса единицы длины каната m. Определить скорость груза в момент, когда длина свисающей части каната равна x, если в начальный момент скорость груза $v_0 = 0$, а длина свисающей части каната была равна x_0; трением на оси барабана, толщиной троса и изменением потенциальной энергии троса, навитого на барабан, пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, отметив начальное.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_{гр} + T_т + T_б. \tag{3}$$

Кинетическая энергия груза A, совершающего поступательное движение,

$$T_{гр} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия троса, каждая точка которого совершает поступательное движение,

$$T_т = \frac{mlv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия барабана, совершающего вращательное движение,

$$T_б = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mlv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2} = \left[(M + ml)R^2 + I\right] \frac{v^2}{2R^2}. \tag{4}$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{гр} + A_т + A_б + A_N. \tag{5}$$

Работа силы тяжести груза

$$A_{гр} = Mgh = Mg(x - x_0).$$

Работа силы тяжести троса

$$A_т = \int_{x_0}^{x} mgx\,dx = \frac{mg}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Работа $A_б$ силы тяжести барабана и работа A_N сил реакций связей равны нулю.

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = Mg(x - x_0) + \frac{mg}{2}(x^2 - x_0^2) = [2M + m(x + x_0)] \frac{g(x - x_0)}{2}. \tag{6}$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

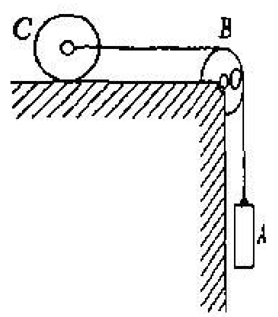
$$\left[(M+ml)R^2+I\right]\frac{v^2}{2R^2}=\left[2M+m(x+x_0)\right]\frac{g(x-x_0)}{2}$$

и найдем скорость груза:

$$v=R\sqrt{g\frac{\left[2M+m(x+x_0)\right](x-x_0)}{(M+ml)R^2+I}}.$$

Ответ: $v=R\sqrt{g\frac{\left[2M+m(x+x_0)\right](x-x_0)}{(M+ml)R^2+I}}$.

Задача 38.47



Груз A массы M_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длины L и массы M_2. Канат переброшен через блок B, вращающийся вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка C, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости.

Блок B и каток C — однородные круглые диски радиуса r и массы M_3 каждый. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен $f_к$. В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока B свисала часть каната длины l. Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h.

Решение

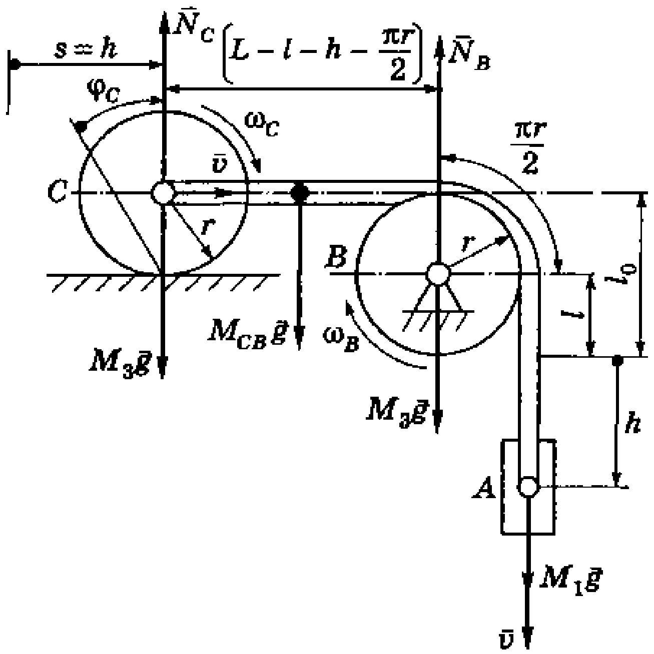
Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, когда груз A переместился на расстояние h, отметив также начальное положение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i. \quad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i=0$.

В начальном положении система находилась в покое, т.е. $T_0=0$



С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_A + T_B + T_C + T_\text{к}. \tag{3}$$

Кинетическая энергия груза A, совершающего поступательное движение,

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}.$$

Кинетическая энергия блока B, совершающего вращательное движение,

$$T_B = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M_3 r^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{M_3 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия катка C, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_C = \frac{M_3 v^2}{2} + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{M_3 v^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{M_3 r^2}{2}\,\frac{v^2}{r^2} = \frac{3M_3 v^2}{4}.$$

Кинетическая энергия каната, все точки которого движутся поступательно со скоростью $\bar v$,

$$T_\text{к} = \frac{M_2 v^2}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3)

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_3 v^2}{4} + \frac{3M_3 v^2}{4} + \frac{M_2 v^2}{2} = (M_1 + M_2 + 2M_3)\frac{v^2}{2}. \quad (4)$$

Определим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_A + A_B + A_C + A_{\text{к}} + A_N + A_{\text{тр}C}. \quad (5)$$

Работа силы тяжести груза A

$$A_A = M_1 gh.$$

Работа A_B силы тяжести блока B и работа A_C силы тяжести катка C равны нулю.

Работа силы тяжести каната

$$A_{\text{к}} = \int_{l_0}^{l_0+h} \frac{M_2 g}{L} x\,dx = \frac{M_2 g}{2L}\left[(l_0+h)^2 - l_0^2\right] =$$

$$= \frac{M_2 g}{2L}(2l_0 + h)h = \frac{M_2 g}{2L}(2l + 2r + h)h.$$

Работа A_N сил реакций связей $\overline{N}_C$ и $\overline{N}_B$ равна нулю.

Работа силы трения качения катка C

$$A_{\text{тр}C} = -m_{\text{тр}}\varphi = -N_C f_{\text{к}}\frac{s}{r} = -N_C\frac{f_{\text{к}}}{r}h.$$

Найдем значение реакции N_C катка:

$$N_C = M_3 g + \frac{M_2 g}{2L}\left(L - l - \frac{h}{2} - \frac{\pi r}{2}\right) = g\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right].$$

Следовательно,

$$A_{\text{тр}C} = -gh\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{h}{4L} - \frac{\pi r}{4L}\right)\right]\frac{f_{\text{к}}}{r}.$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\sum A_k^e = M_1 gh + \frac{M_2 g}{2L}(2l + 2r + h)h -$$

$$- gh\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right]\frac{f_{\text{к}}}{r}. \quad (6)$$

Подставим выражения (4) и (6) в уравнение (2):

$$(M_1 + M_2 + 2M_3)\frac{v^2}{2} =$$

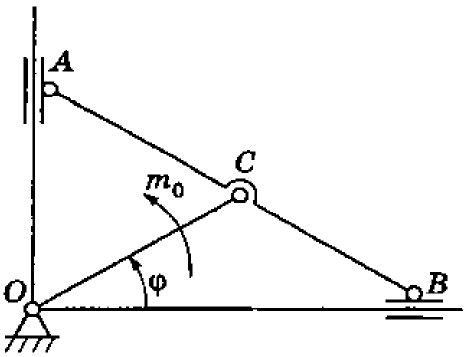
$$= gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2l + 2r + h) - \left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right]\frac{f_к}{r}\right\}$$

и найдем скорость груза A:

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2l + 2r + h) - \frac{f_к}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2gh\left\{M_1 + \frac{M_2}{2L}(2l + 2r + h) - \frac{f_к}{r}\left[M_3 + M_2\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{2L} - \frac{h}{4L}\right)\right]\right\}}{M_1 + M_2 + 2M_3}}$.

Задача 38.48



Механизм эллипсографа, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством постоянного вращающего момента m_0, приложенного к кривошипу OC. В начальный момент при $\varphi = 0$ механизм находился в покое. Найти угловую скорость кривошипа OC в момент, когда он сделал четверть оборота. Дано: M — масса стержня AB; $m_A = m_B = m$ — массы ползунов A и B; $OC = AC = BC = l$; массой кривошипа OC и силами сопротивления пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, когда кривошип OC повернется на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, отметив начальное положение механизма.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

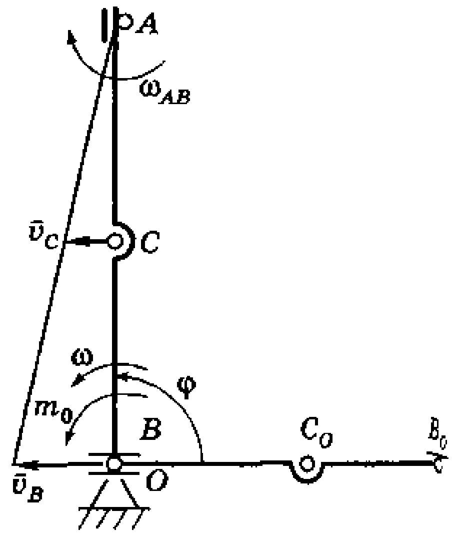
$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \tag{1}$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i = 0$.

В начальный момент механизм находился в покое, т.е. $T_0 = 0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T = \sum A_k^e. \qquad (2)$$



Механизм расположен в горизонтальной плоскости, поэтому силы тяжести отдельных его частей работы не совершают. Работу совершает только вращающий момент m_0, т.е.

$$\sum A_k^e = A_{m_0} = m_0\varphi = m_0 \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Найдем кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_{AB} + T_A + T_B. \qquad (4)$$

Кинетическая энергия стержня AB, совершающего мгновенное вращательное движение со скоростью $\omega_{AB} = \omega$ относительно мгновенного центра скоростей в точке A:

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_A \omega_{AB}^2 = \frac{1}{2}\left[I_C + M(AC)^2\right]\omega_{AB}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{M(AB)^2}{12} + M(AC)^2\right]\omega^2 = \frac{2Ml^2\omega^2}{3}.$$

Кинетическая энергия ползуна A равна нулю, так как в точке A находится мгновенный центр скоростей звена AB.

Кинетическая энергия ползуна B, совершающего поступательное движение,

$$T_B = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{m(2l\omega)^2}{2} = 2ml^2\omega^2.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$T = \frac{2Ml^2\omega^2}{3} + 2ml^2\omega^2 = \frac{2l^2\omega^2}{3}(M + 3m).$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2):

$$\frac{2l^2\omega^2}{3}(M+3m)=\frac{\pi}{2}m_0$$

и найдем угловую скорость кривошипа:

$$\omega=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}.$$

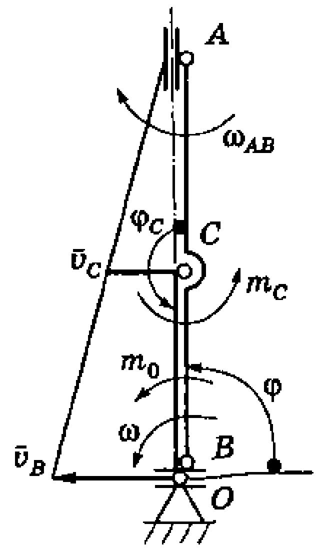
Ответ: $\omega=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}$.

Задача 38.49

Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента сопротивления m_C в шарнире C.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. На рисунке покажем конечное положение системы, когда кривошип OC повернулся на угол $\frac{\pi}{2}$.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i. \qquad (1)$$

Так как система неизменяема, то $\sum A_k^i=0$.

В начальный момент механизм находился в покое, т.е. $T_0=0$.

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$T=\sum A_k^e. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы в конечном положении (см. решение задачи 38.48)

$$T=\frac{2Ml^2\omega^2}{3}+2ml^2\omega^2=\frac{2l^2\omega^2}{3}(M+3m). \qquad (3)$$

Определяем работу внешних сил:

$$\sum A_k^e=A_{m_0}+A_{m_C}, \qquad (4)$$

так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, работа сил тяжести равна нулю.

Работа вращающего момента m_0

$$A_{m_0} = m_0\varphi = m_0 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Работа момента сопротивления m_C

$$A_{m_C} = -m_C\,\varphi_C = -\pi m_C.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$\sum A_k^e = \frac{\pi}{2}m_0 - \pi m_C = (m_0 - 2m_C)\frac{\pi}{2}, \qquad (5)$$

так как $\varphi_C = 2\varphi = \pi$.

Подставим выражения (3) и (5) в уравнение (2):

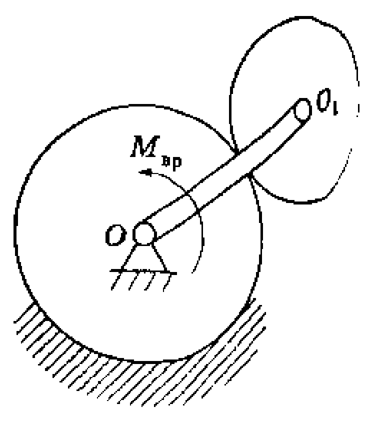
$$\frac{2l^2\omega^2}{3}(M + 3m) = (m_0 - 2m_C)\frac{\pi}{2}$$

и найдем угловую скорость кривошипа с учетом сопротивления шарнира:

$$\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi(m_0 - 2m_C)}{M + 3m}}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{3\pi(m_0 - 2m_C)}{M + 3m}}$.

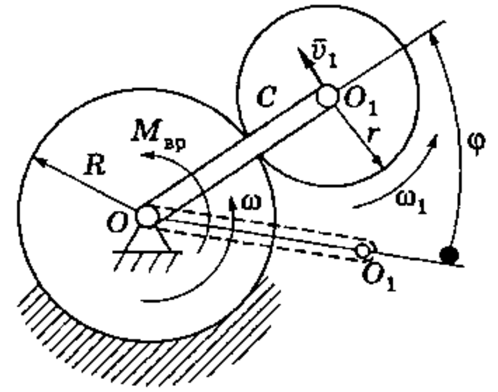
Задача 38.50



К кривошипу OO_1 эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен вращающий момент $M_{вр} = M_0 - \alpha\omega$, где M_0 и α — положительные постоянные, а ω — угловая скорость кривошипа. Масса кривошипа равна m, M — масса сателлита (подвижного колеса). Считая кривошип однородным стержнем, а сателлит — однородным круглым диском радиуса r, определить угловую скорость ω кривошипа как функцию времени. В начальный момент система находилась в покое. Радиус неподвижной шестерни равен R; силами сопротивления пренебречь.

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Решение



Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке положение механизма в момент времени t, отметив начальное положение кривошипа.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum \delta A_k^e. \tag{1}$$

Найдем кинетическую энергию системы:

$$T = T_{кр} + T_c. \tag{2}$$

Кинетическая энергия кривошипа OO_1, совершающего вращательное движение,

$$T_{кр} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m(OO_1)^2}{12} + m\left(\frac{OO_1}{2}\right)^2\right]\omega^2 = \frac{m(OO_1)^2}{6}\omega^2 = \frac{m(R+r)^2}{6}\omega^2.$$

Кинетическая энергия сателлита C, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_c = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2} I_{O_1}\omega_1^2 = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{Mr^2}{2}\,\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{3Mv_1^2}{4} = \frac{3M\omega^2(R+r)^2}{4}.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$T = \frac{m\omega^2(R+r)^2}{6} + \frac{3M\omega^2(R+r)^2}{4} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)\frac{\omega^2(R+r)^2}{2} =$$

$$= \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)\frac{(R+r)^2}{2}\dot{\varphi}^2. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3):

$$dT=\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\,\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}. \quad (4)$$

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то силы тяжести работы совершать не будут. Вычислим элементарную работу вращающего момента $M_{\text{вр}}$:

$$\delta A=M_{\text{вр}}d\varphi=(M_0-\alpha\omega)d\varphi=(M_0-\alpha\dot{\varphi})d\varphi. \quad (5)$$

Подставим выражения (4) и (5) в дифференциальное уравнение (1):

$$\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\,\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}=(M_0-\alpha\dot{\varphi})d\varphi,$$

сократим на $d\varphi$, разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\int\limits_0^{\omega}\frac{d\dot{\varphi}}{\alpha\dot{\varphi}-M_0}=-\int\limits_0^{t}dt,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\ln\left|\frac{\alpha\omega-M_0}{-M_0}\right|=-t,$$

$$\frac{\alpha\omega-M_0}{-M_0}=e^{-\frac{\alpha t}{I_{\text{пр}}}},$$

где $I_{\text{пр}}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2.$

Найдем угловую скорость кривошипа:

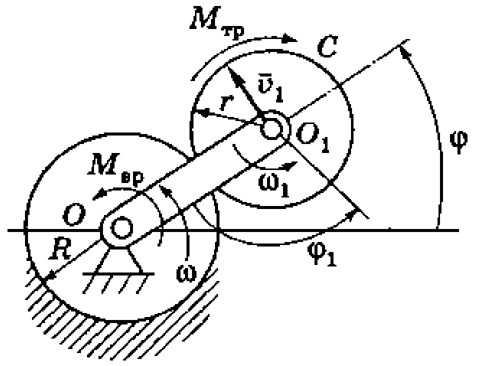
$$\omega=\frac{M_0}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{I_{\text{пр}}}t}\right).$$

Ответ: $\omega=\frac{M_0}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{I_{\text{пр}}}t}\right)$, где $I_{\text{пр}}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2.$

Задача 38.51

Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента трения $M_{тр}$ на оси O_1 сателлита.

Решение



Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке положение механизма в момент времени t.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum \delta A_k^e. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы [см. решение задачи 38.50, формула (3)]

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{пр}\omega^2 = \frac{1}{2}I_{пр}\dot{\varphi}^2,$$

где $I_{пр} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right)(R+r)^2$.

Тогда

$$dT = I_{пр}\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = I_{пр}\frac{d\varphi}{dt}d\dot{\varphi}. \qquad (2)$$

Определим сумму элементарных работ внешних сил, действующих на систему:

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{вр} + \delta A_{тр}. \qquad (3)$$

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то силы тяжести работы совершать не будут.

Вычислим элементарную работу момента трения на оси сателлита:

$$\delta A_{тр} = -M_{тр}d\varphi_1, \qquad (4)$$

где φ_1 — угол поворота сателлита относительно кривошипа.

Так как угол поворота пропорционален угловой скорости, то

$$\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Из соотношения

$$\frac{\omega_{\text{пер}}}{\omega_1} = \frac{r}{R}$$

определим

$$\omega_1 = \frac{\omega_{\text{пер}} R}{r} = \frac{\omega R}{r}.$$

Тогда угол поворота

$$\varphi_1 = \frac{\varphi R}{r}$$

и согласно формуле (4)

$$\delta A_{\text{тр}} = -M_{\text{тр}} \frac{R}{r} d\varphi.$$

Элементарная работа вращающего момента $M_{\text{вр}}$ [см. формулу (5) в решении задачи 38.50]

$$\delta A_{\text{вр}} = (M_0 - \alpha\dot{\varphi})\, d\varphi.$$

С учетом этого согласно формуле (3) получим

$$\sum \delta A_k^e = \left[(M_0 - \alpha\dot{\varphi}) - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right] d\varphi = -\left[\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)\right] d\varphi. \quad (5)$$

Подставим выражения (2) и (5) в дифференциальное уравнение (1):

$$I_{\text{пр}} \frac{d\varphi}{dt} d\dot{\varphi} = \left[\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)\right] d\varphi.$$

Сократим на $d\varphi$, разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$I_{\text{пр}} \int_0^{\omega} \frac{d\dot{\varphi}}{\alpha\dot{\varphi} - \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)} = -\int_0^t dt,$$

$$\frac{I_{\text{пр}}}{\alpha} \ln \left| \frac{\alpha\omega - \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)}{-\left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)} \right| = -t,$$

$$\frac{\alpha\omega - \left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)}{-\left(M_0 - \frac{R}{r} M_{\text{тр}}\right)} = e^{-\frac{\alpha}{I_{\text{пр}}} t}.$$

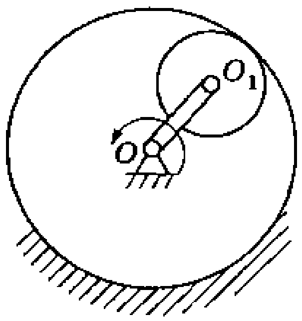
Найдем угловую скорость кривошипа:

$$\omega = \frac{M_0 - \frac{R}{r} M_{тр}}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{I_{пр}} t} \right).$$

Ответ: $\omega = \dfrac{M_0 - \frac{R}{r} M_{тр}}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{I_{пр}} t} \right)$, где $I_{пр} = \left(\dfrac{m}{3} + \dfrac{3M}{2} \right)(R+r)^2$.

Задача 38.52

Кривошип OO_1 гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени двигатель был отключен и под действием постоянного момента $M_{тр}$ сил трения на оси сателлита (подвижного колеса) механизм остановился.



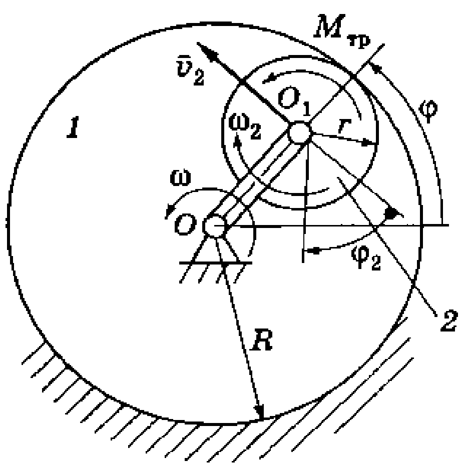
Определить время τ торможения и угол φ поворота кривошипа за это время, если его масса равна M_1, M_2 — масса сателлита, R и r — радиусы большого и малого колес. Кривошип принять за однородный тонкий стержень, сателлит — за однородный диск.

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Решение

Рассмотрим движение данной системы, состоящей из кривошипа OO_1 и двух колес: неподвижного колеса *1* и подвижного колеса *2* — сателлита.

Покажем на рисунке положение механизма в момент t, отметив начальное положение.



Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum \delta A_k^e. \tag{1}$$

Найдем кинетическую энергию системы:

$$T = T_{\text{кр}} + T_2. \tag{2}$$

Кинетическая энергия кривошипа OO_1, совершающего вращательное движение,

$$T_{\text{кр}} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 (OO_1)^2}{3} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1 (R-r)^2}{3} \omega^2.$$

Кинетическая энергия сателлита, совершающего плоскопараллельное движение,

$$T_2 = \frac{M_2 v_2^2}{2} + \frac{1}{2} I_{O_1} \omega_2^2 = \frac{M_2 v_2^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \frac{v_2^2}{r^2} = \frac{3 M_2 v_2^2}{4}.$$

Найдем скорость v_2 оси сателлита:

$$v_2 = \omega \cdot OO_1 = (R-r)\omega.$$

Тогда

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{3 M_2 (R-r)^2}{2} \omega^2.$$

Кинетическая энергия системы согласно формуле (2)

$$T = \frac{1}{2} \frac{M_1 (R-r)^2}{3} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{3 M_2 (R-r)^2}{3} \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M_1}{3} + \frac{3 M_2}{2} \right) (R-r)^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \dot{\varphi}^2,$$

где $I_{\text{пр}} = \left(\frac{M_1}{3} + \frac{3 M_2}{2} \right) (R-r)^2.$

Вычислим дифференциал кинетической энергии:

$$dT = I_{\text{пр}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = I_{\text{пр}} \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi. \tag{3}$$

Так как механизм расположен в горизонтальной плоскости, то силы тяжести работы не совершают, т.е.

$$\delta A_k^e = \delta A_{\text{тр}}.$$

Определим элементарную работу момента трения $M_{\text{тр}}$:

$$\delta A_{\text{тр}} = -M_{\text{тр}} d\varphi_2.$$

Выразим угол поворота сателлита φ_2 через угол поворота кривошипа φ:

$$\varphi_2 = \frac{R-r}{r}\varphi,$$

$$d\varphi_2 = \frac{R}{r} d\varphi.$$

Тогда

$$\delta A_{\text{тр}} = -\frac{R}{r} M_{\text{тр}} d\varphi. \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в дифференциальное уравнение (1):

$$I_{\text{пр}} \frac{d\varphi}{dt} d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r} M_{\text{тр}} d\varphi. \tag{5}$$

Сократим на $d\varphi$, разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$I_{\text{пр}} \int_{\omega_0}^{0} d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r} M_{\text{тр}} \int_0^t dt,$$

$$-I_{\text{пр}} \omega_0 = -\frac{R}{r} M_{\text{тр}} t.$$

Отсюда время торможения

$$\tau = \frac{r I_{\text{пр}}}{R M_{\text{тр}}} \omega_0.$$

Для определения угла поворота кривошипа φ запишем дифференциальное уравнение (5) в виде

$$I_{\text{пр}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = -\frac{R}{r} M_{\text{тр}} d\varphi.$$

Проинтегрируем

$$I_{\text{пр}}\int\limits_{\omega_0}^{0}\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=-\frac{R}{r}M_{\text{тр}}\int\limits_{0}^{\varphi}d\varphi$$

и получим

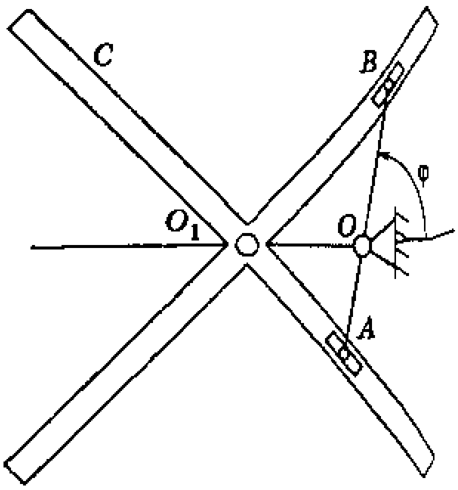
$$-I_{\text{пр}}\frac{\omega_0^2}{2}=-\frac{R}{r}M_{\text{тр}}\varphi.$$

Откуда угол поворота кривошипа

$$\varphi=\frac{1}{2}\;\frac{rI_{\text{пр}}}{RM_{\text{тр}}}\omega_0^2.$$

О т в е т: $\tau=\dfrac{rI_{\text{пр}}}{RM_{\text{тр}}}\omega_0$; $\varphi=\dfrac{1}{2}\;\dfrac{rI_{\text{пр}}}{RM_{\text{тр}}}\omega_0^2$, где $I_{\text{пр}}=\left(\dfrac{M_1}{3}+\dfrac{3}{2}M_2\right)(R-r)^2$.

Задача 38.53

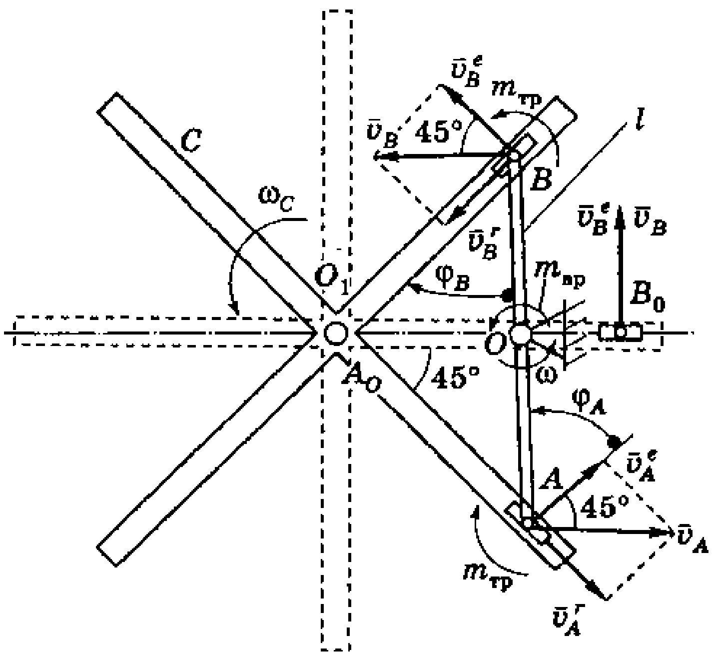


Крестовина C приводится во вращение вокруг неподвижной оси O_1 посредством однородного стержня AB, вращающегося вокруг неподвижной оси O (оси O и O_1 перпендикулярны плоскости рисунка). При этом ползуны A и B, соединенные при помощи шарниров со стержнем AB, скользят вдоль взаимно перпендикулярных прорезей крестовины C. Вращение стержня происходит под действием постоянного вращающего момента $m_{\text{вр}}$. Определить угловую скорость стерж- ня AB в момент, когда он сделает четверть оборота, если в начальный момент при $\varphi=0$ он имел угловую скорость ω_0.

Величина момента сопротивления, возникающего в каждом и: шарниров ползунов A и B, в два раза меньше $m_{\text{вр}}$. Прочими силами сопротивления пренебречь. Масса стержня равна m; момент инер- ции крестовины C относительно оси O_1 равен I: $OO_1=OA=OB=l$

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке конечное положение системы, когда стержень AB повернулся на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, отметив ее начальное положение штриховой линией.



Найдем угловую скорость крестовины в конечном положении.

Ползуны A и B совершают сложное движение: абсолютное вместе со стрежнем AB, переносное – вращательное вместе с крестовиной, относительное — вдоль прорезей крестовины.

Выразим абсолютную скорость ползунов A и B через угловую скорость стержня AB:

$$v_A = v_B = \omega l.$$

Из параллелограмма скоростей ползунов A и B (см. рисунок) найдем

$$v_A^e = v_A \cos 45°,$$

$$v_B^e = v_A \cos 45°.$$

Определим угловую скорость крестовины C:

$$\omega_C = \frac{v_A^e}{O_1 A} = \frac{\omega l \cos 45°}{l / \cos 45°} = \omega \cos^2 45° = \frac{\omega}{2}.$$

Найдем угловую скорость крестовины ω_{C_0} в начальном положении.

Абсолютная скорость $\bar{v}_B$ ползуна B в начальном положении (положение B_0) равна переносной скорости v_B^e:

$$v_B = v_B^e = \omega_0 \cdot OB_0 = \omega l.$$

Тогда

$$\omega_{C_0} = \frac{v_B^e}{O_1 B_0} = \frac{\omega_0 l}{2l} = \frac{\omega_0}{2}.$$

Найдем угол поворота ползунов A и B относительно их шарниров.

Из ΔAO_1O найдем: $\angle O_1OA = \varphi$ — по построению;

$$\angle OO_1A = \frac{180° - \varphi}{2}.$$

Тогда

$$\varphi_A = 90° - \angle OO_1A = \frac{\varphi}{2}.$$

Аналогично найдем

$$\varphi_B = \frac{\varphi}{2}.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \qquad (1)$$

Найдем кинетическую энергию системы в начальном положении:

$$T_0 = T_{AB} + T_C.$$

Кинетическая энергия стержня AB, совершающего вращательное движение,

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2}\ \frac{m(2l)^2}{12}\ \omega_0^2 = \frac{ml^2}{6}\omega_0^2.$$

Кинетическая энергия крестовины C, совершающей вращательное движение,

$$T_C = \frac{1}{2} I\omega_{C_0}^2 = \frac{1}{2} I\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 = \frac{I}{8}\omega_0^2.$$

Тогда

$$T_0 = \frac{1}{6}ml^2\omega_0^2 + \frac{1}{8}I\omega_0^2 = \frac{4ml^2+3I}{24}\omega_0^2. \quad (2)$$

Определим кинетическую энергию системы в конечном положении:

$$T = T_{AB} + T_C.$$

Кинетическая энергия стержня AB, совершающего вращательное движение:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m(2l)^2}{12}\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Кинетическая энергия крестовины C, совершающей вращательное движение,

$$T_C = \frac{1}{2}I\omega_C^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}I\omega^2.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{1}{8}I\omega^2 = \frac{4ml^2+3I}{24}\omega^2. \quad (3)$$

Вычислим работу внешних сил:

$$\sum A_k^e = A_{\text{вр}} + A_A + A_B. \quad (4)$$

Работа постоянного вращательного момента $m_{\text{вр}}$, приложенного к стержню AB,

$$A_{\text{вр}} = m_{\text{вр}}\varphi = \frac{\pi}{2}m_{\text{вр}}.$$

Работа момента сопротивления в шарнире ползуна A

$$A_A = -m_C\varphi_A = -\frac{m_{\text{вр}}}{2}\,\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{4}m_{\text{вр}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8}m_{\text{вр}}$$

и в шарнире ползуна B

$$A_B = -m_{\text{вр}}\varphi_B = -\frac{m_{\text{вр}}}{2}\,\frac{\varphi}{2} = -\frac{\pi}{8}m_{\text{вр}}.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$\sum A_k^e = \frac{\pi}{2} m_{\text{вр}} - \frac{\pi}{8} m_{\text{вр}} - \frac{\pi}{8} m_{\text{вр}} = \frac{\pi}{4} m_{\text{вр}}. \tag{5}$$

Так как система неизменяема, то

$$\sum A_k^i = 0. \tag{6}$$

Подставим выражения (2), (3), (5) и (6) в уравнение (1):

$$\frac{4ml^2 + 3I}{24}\omega^2 - \frac{4ml^2 + 3I}{24}\omega_0^2 = \frac{\pi}{4} m_{\text{вр}}$$

и найдем угловую скорость стержня:

$$\omega = \sqrt{\frac{6\pi m_{\text{вр}}}{4ml^2 + 3I} + \omega_0^2}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{6\pi m_{\text{вр}}}{4ml^2 + 3I} + \omega_0^2}$.

39. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Методические указания к решению задач

Плоскопараллельное движение твердого тела представляет собой совокупность двух простейших движений — поступательного вместе с полюсом и вращательного вокруг этого полюса. При решении задач этого параграфа в качестве полюса выбирается центр масс тела, тогда для описания динамики плоскопараллельного движения можно применить теорему о движении центра масс механической системы при поступательном движении:

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e \tag{39.1}$$

и теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси, проходящей через центр масс, при вращательном движении:

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}(\bar{F}_k^e) = M_{Cz}^e. \tag{39.2}$$

Так как кинетический момент L_{Cz} при вращательном движении тела

$$L_{Cz} = I_{Cz}\omega, \tag{39.3}$$

то, подставив выражение (39.3) в (39.2), получим

$$I_{Cz}\frac{d\omega}{dt} = I_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\bar{F}_k^e) = M_{Cz}^e, \tag{39.4}$$

где $\ddot{\varphi} = \dfrac{d\omega}{dt}$, так как $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, φ — угол поворота тела.

Уравнение (39.4) — это *дифференциальное уравнение вращательного движения.*

Спроецировав векторное равенство (39.1) на оси x и y, получим два дифференциальных уравнения, описывающих поступательные движения, которые в совокупности с уравнением (39.4) будут описывать динамику плоскопараллельного движения тела.

Таким образом, *дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения* тела имеют вид

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e, \\ I_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum m_{Cz}(\bar{F}_k^e). \end{aligned}\right\} \quad (39.5)$$

Уравнения (39.5) позволяют решать две задачи динамики плоского движения:

• при известных внешних силах определить закон движения центра масс тела и закон его вращения вокруг центра масс;

• при известном законе движения центра масс определить главный вектор $\bar{R}^e$ внешних сил, при известном законе вращательного движения — главный момент M_{Cz}^e внешних сил.

Эти уравнения также позволяют определить одну из неизвестных внешних сил.

Последовательность решения задач данного параграфа:

1. Выбрать систему отсчета (систему координатных осей). Оси направить по направлению движения.

2. Изобразить тело в произвольном положении и определить начальные условия движения.

3. Показать все внешние силы, действующие на тело.

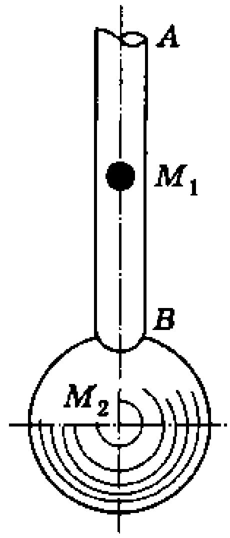
4. Записать дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения и решить их, определив искомую величину в общем виде с учетом начальных условий движения.

5. При необходимости подставить в полученное выражение числовые значения и подсчитать результат.

Задачи и решения

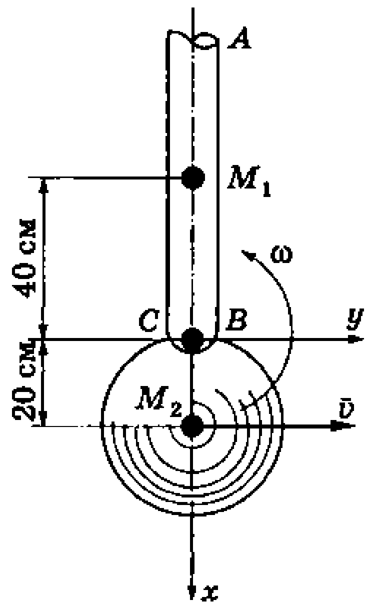
Задача 39.1

Тяжелое тело состоит из стержня AB длины 80 см и массы 1 кг и прикрепленного к нему диска радиуса 20 см и массы 2 кг. В начальный момент при вертикальном положении стержня телу сообщено такое движение, что скорость центра масс M_1 стержня равна нулю, а скорость центра масс M_2 диска равна 360 см/с и направлена по горизонтали вправо. Найти последующее движение тела, принимая во внимание только действие силы тяжести.



Решение

Стержень и диск представляют собой единую механическую систему, центр масс которой находится на отрезке M_1M_2 на расстоянии (см. рисунок)



$$M_1C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot M_1M_2}{m_1 + m_2} = \frac{60 \cdot 2}{1+2} = 40 \text{ (см)}$$

от точки M_1 (таким образом точка C совпадает с точкой B). Так как в начальный момент скорость точки M_1 равна нулю, то она является мгновенным центром скоростей механической системы, совершающей плоское движение.

Тогда

$$v_B(t=0) = \frac{v}{M_1M_2} \cdot M_1B = \frac{360}{60} \cdot 40 = 240 \text{ (см/с)},$$

$$\omega(t=0) = \frac{v}{M_1M_2} = \frac{360}{60} = 6 \text{ (рад/с)}.$$

Дальнейшее плоскопараллельное движение твердого тела в системе координат с началом в точке B, ось y направлена по горизонтали вправо, а ось x — вниз, будет описываться дифференциальными уравнениями вида:

$$M\ddot{x}_C = Mg, \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_C = 0, \tag{2}$$

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (1) следует, что

$$\ddot{x}_C = g,$$

$$x_C = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

С учетом начальных условий: $x_C(0) = 0$, $\dot{x}_C(0) = 0$, определим $C_1 = C_2 = 0$.

Следовательно,

$$x_C = \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\dot{y}_C = C_3,$$

$$y_C = C_3 t + C_4.$$

С учетом этого $\dot{y}_C(0) = v_B(t = 0) = 240$ см/с, а $y_C(0) = 0$, тогда

$$y_C = 240t. \tag{5}$$

Из равенства (5) найдем

$$t = \frac{y_C}{240}.$$

Подставим это значение в формулу (4), получим

$$x_C = \frac{980 y_C^2}{2 \cdot 240^2}$$

или

$$y_C^2 = 117{,}5 x_C. \tag{6}$$

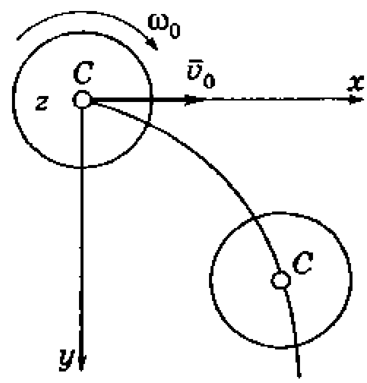
Уравнение (6) — уравнение параболы.

Из уравнения (3) следует, что $\omega = \text{const}$, т.е.

$$\omega = \omega(t=0) = 6 \text{ рад/с}.$$

Ответ: тело равномерно вращается с угловой скоростью 6 рад/с вокруг своего центра масс, который описывает параболу $y_C^2 = 117{,}5x_C$ (начало координат в точке B, ось y направлена по горизонтали вправо, ось x — вниз).

Задача 39.2



Диск падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω_0, а центр масс C, находившийся в начале координат, имел горизонтально направленную скорость $\bar{v}_0$. Найти уравнения движения диска. Оси x, y изображены на рисунке. Силами сопротивления пренебречь.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения для диска, совершающего плоскопараллельное движение под действием силы тяжести, в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_C = 0, \tag{1}$$

$$M\ddot{y}_C = Mg, \tag{2}$$

$$I_C\ddot{\varphi} = 0, \tag{3}$$

где M – масса диска; I_C — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс.

Из уравнения (1)следует:

$$\ddot{x}_C = 0,$$

$$x_C = C_1 t + C_2. \tag{4}$$

С учетом начальных условий: $\dot{x}_C = v_0$, $x_C(0) = 0$, определим постоянные интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = 0.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в выражение (4) и получим

$$x_C = v_0 t.$$

Из уравнения (2) найдем

$$\ddot{y}_c = g,$$

$$y_C = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

В соответствии с начальными условиями: $\dot{y}_C(0) = 0$, $y_C(0) = 0$, определим постоянные интегрирования C_3 и C_4:

$$C_3 = C_4 = 0.$$

Тогда

$$y_C = \frac{gt^2}{2}.$$

Из уравнения (3) следует, что

$$\ddot{\varphi} = 0,$$

$$\varphi = C_5 t + C_6.$$

Так как $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, $\varphi(0) = 0$, то $C_5 = \omega_0$, $C_6 = 0$.
Тогда $\varphi = \omega_0 t$.

Ответ: $x_C = v_0 t$, $y_C = \dfrac{gt^2}{2}$, $\varphi = \omega_0 t$, где φ — угол поворота диска, образованный осью x и диаметром, занимавшим в начальный момент горизонтальное положение.

Задача 39.3

Решить предыдущую задачу, считая, что момент m_c сопротивления движению относительно подвижной горизонтальной оси, проходящей через центр масс C диска перпендикулярно плоскости движения его, пропорционален первой степени угловой скорости диска, причем коэффициент пропорциональности равен β. Момент инерции диска относительно этой оси равен I_C.

Решение

Дифференциальные уравнения (1) и (2) (см. решение задачи 39.2), как и начальные условия, остаются без изменения и поэтому их решения имеют тот же вид, что и в предыдущей задаче:

$$I_C\varphi = 0.$$

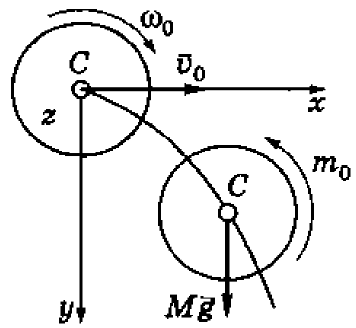
Уравнение с учетом сил сопротивления примет вид

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = -m_c,$$

где $m_c = \beta\omega$.

Тогда

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = -\beta\omega. \qquad (1)$$



Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\beta}{I_C}dt,$$

проинтегрируем

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\beta}{I_C}\int\limits_0^t dt,$$

и получим

$$\ln\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega} = -\frac{\beta}{I_C}t\Big|_0^t,$$

$$\ln\omega - \ln\omega_0 = -\frac{\beta}{I_C}t,$$

$$\ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\beta}{I_C}t.$$

Откуда

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{\beta}{I_C}t}. \qquad (2)$$

Представим ω как $\dfrac{d\varphi}{dt}$ и запишем выражение (2) в виде

$$d\varphi = \omega_0 e^{-\frac{\beta}{I_C}t}\,dt.$$

Проинтегрируем и получим

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^{t} e^{-\frac{\beta}{I_C}t}\,dt,$$

$$\varphi\Big|_0^{\varphi} = -\frac{I_C\omega_0}{\beta} e^{-\frac{\beta}{I_C}t}\Bigg|_0^{t},$$

$$\varphi = \frac{I_C\omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{I_C}t}\right).$$

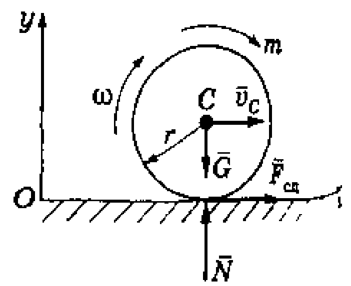
Ответ: $x_C = v_0 t$; $y_C = \dfrac{gt^2}{2}$; $\varphi = \dfrac{I_C\omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{I_C}t}\right)$.

Задача 39.4

Ведущее колесо автомашины радиуса r и массы M движется горизонтально и прямолинейно. К колесу приложен вращающий момент m. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

Решение

Покажем действующие на колесо силы (см. рисунок), а также угловую скорость и скорость центра масс.



Запишем дифференциальные уравнения движения колеса:

$$M\ddot{x}_C = F_{сц}, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = G - N, \tag{2}$$

$$I_C\ddot{\varphi} = m - F_{сц}r, \tag{3}$$

где $F_{сц}$ – сила сцепления колеса с поверхностью; $I = M\rho^2$ — момент инерции колеса относительно центра масс.

Чтобы колесо катилось без скольжения, должно выполняться условие

$$F_{сц} \le fG = fMg. \tag{4}$$

Во время движения колеса $y_C = R$, значит, $\ddot{y}_C = 0$. Тогда из уравнения (2) следует, что $N = G$. Зная, что качение колеса происходит без проскальзывания, т.е. $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}_C$, запишем уравнения (1) и (3) в виде

$$Mr\ddot{\varphi}_C = F_{сц}, \tag{5}$$

$$M\rho^2\ddot{\varphi}_C = m - F_{сц}r. \tag{6}$$

Из уравнения (5) найдем

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{сц}}{Mr}$$

и подставим это выражение в уравнение (6). Откуда

$$m = \left(r + \frac{\rho^2}{r}\right)F_{сц} = \frac{r^2 + \rho^2}{r}F_{сц}.$$

С учетом формы (4) окончательно получим

$$m \le fMg\frac{r^2 + \rho^2}{r}.$$

О т в е т: $m \le fMg\dfrac{r^2 + \rho^2}{r}$.

Задача 39.5

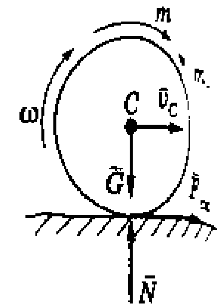
Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен $f_к$.

Р е ш е н и е

В этом случае к силам, показанным на рисунке в решении задачи 39.4, добавится момент сопротивления качению (см. рисунок),

$$m_c = f_кN = f_кMg.$$

Как и при решении предыдущей задачи, получим



$$M r \ddot{\varphi} = F_{сц}, \qquad (1)$$

$$M \rho^2 \ddot{\varphi} = m - F_{сц} r - M g f_к. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) найдем

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{сц}}{M r},$$

подставим это выражение в уравнение (2). Откуда

$$m = F_{сц} \frac{r^2 + \rho^2}{r} + M g f_к.$$

Принимая во внимание, что $F_{сц} \le f M g$, окончательно получим

$$m \le f M g \frac{r^2 + \rho^2}{r} + M g f_к.$$

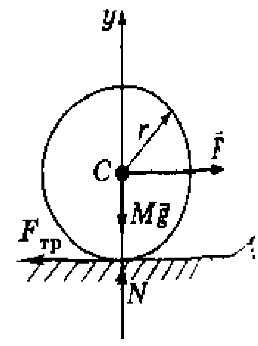
Ответ: $m \le f M g \dfrac{r^2 + \rho^2}{r} + M g f_к$.

Задача 39.6

Ось ведомого колеса автомашины движется горизонтально и прямолинейно. К оси колеса приложена горизонтально направленная движущая сила $\bar{F}$. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Радиус колеса равен r, масса колеса равна M. Какому условию должна удовлетворять величина силы $\bar{F}$ для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения колеса под действием внешних сил (см. рисунок):



$$M \ddot{x}_C = F - F_{тр}, \qquad (1)$$

$$M \ddot{y}_C = N - M g, \qquad (2)$$

$$M \rho^2 \ddot{\varphi} = F_{тр} \cdot r. \qquad (3)$$

Так как $\ddot{y}_C = 0$, то $N = Mg$. Тогда

$$F_{\text{тр}} = fN = fMg.$$

Из условия отсутствия скольжения следует, что $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$, поэтому уравнения (1) и (3) запишем в следующем виде:

$$M\ddot{x}_C = F - fMg,$$

$$M\rho^2 \frac{\ddot{x}_C}{r} = fMgr.$$

Тогда

$$F - fMg = f\frac{Mgr^2}{\rho^2}.$$

Откуда получим, что предельное значение силы, при котором отсутствует скольжение,

$$F = \frac{fMg(r^2 + \rho^2)}{\rho^2}.$$

Следовательно, отсутствовать скольжение будет при

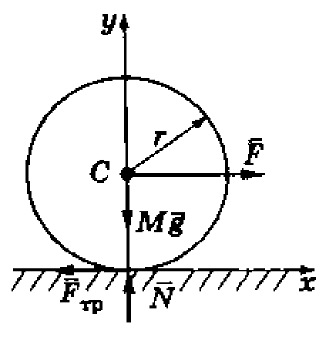
$$F \le fMg\frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}.$$

Ответ: $F \le fMg\dfrac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}$.

Задача 39.7

Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен $f_\text{к}$.

Решение



С учетом трения качения изменится только уравнение (3) в решении задачи 39.6, зная, что момент сопротивления качению $m_c = f_\text{к}N$, это уравнения примет вид

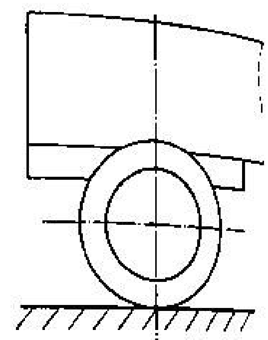
$$M\rho^2\ddot{\varphi} = fNr - f_\text{к}N.$$

Выполнив те же действия, что и в предыдущей задаче, получим

$$F \le \frac{fMg(r^2+\rho^2) - f_к Mgr}{\rho^2}.$$

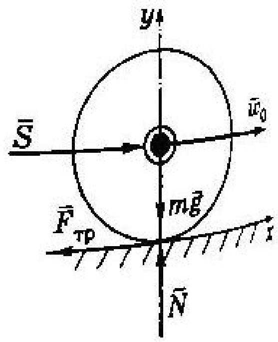
Ответ: $F \le \dfrac{fMg(r^2+\rho^2) - f_к Mgr}{\rho^2}$.

Задача 39.8



Автомобильный прицеп движется замедленно с ускорением w_0 до остановки. При этом тормоз в одном из его колес не включается. Давление колеса на дорогу равно N. Коэффициент сцепления колеса с дорогой равен f. Дано: r — радиус колеса, m — его масса, ρ — радиус инерции. Определить силу горизонтального давления S колеса на его ось.

Решение



Запишем дифференциальные уравнения плоского движения колеса автомобильного прицепа под действием внешних сил (см. рисунок):

$$mw_0 = S - fN,$$

$$m\rho^2\ddot{\varphi} = fNr.$$

1) При отсутствии проскальзывания должно выполняться условие: $w_0 \le r\ddot{\varphi}$.

Следовательно, при $w_0 \le f\dfrac{N}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}$

$$S = mw_0 + fN = mw_0 + m\frac{\rho^2\ddot{\varphi}}{r} = mw_0\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

2) При наличии проскальзывания

$$fN \ne \frac{m\rho^2\ddot{\varphi}}{r},$$

т.е. если $w_0 > f\dfrac{N}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}$, давление $S = mw_0 + fN$.

Ответ: 1) $w_0 \le f\dfrac{N}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}$, $S = mw_0\left(1+\dfrac{\rho^2}{r^2}\right)$;

2) $w_0 > f\dfrac{N}{m}\dfrac{r^2}{\rho^2}$, $S = mw_0 + fN$.

Задача 39.9

Колесо радиуса r катится по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента $m_{вр} = \dfrac{5}{2}fMgr$, где f – коэффициент трения скольжения, M — масса колеса. Определить скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом (скорость проскальзывания). Масса колеса равномерно распределена по его ободу. Трением качения пренебречь. В начальный момент колесо находилось в покое.

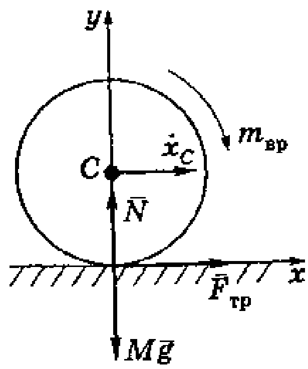
Решение

Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения колеса под действием приложенных к нему сил (с. рисунок):

$$M\ddot{x}_C = F_{тр}, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = N - Mg, \qquad (2)$$

$$Mr^2\ddot{\varphi} = m_{вр} - F_{тр}r. \qquad (3)$$



Так как $\ddot{y}_C = 0$, то согласно уравнению (2) $N = Mg$. Тогда

$$F_{тр} = fMg.$$

При отсутствии проскальзывания $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$,

$$Mr\ddot{x}_C = \frac{5}{2}fMgr - fMgr = \frac{3}{2}fMgr,$$

откуда

$$\ddot{x}_C = \frac{3}{2}fg,$$

$$\dot{x}_C = \frac{3}{2}fgt.$$

Такую скорость имеют точки обода колеса. Из уравнения (1) следует, что $\dot{x}_C = fgt$. Поэтому возникает проскальзывание, скорость которого

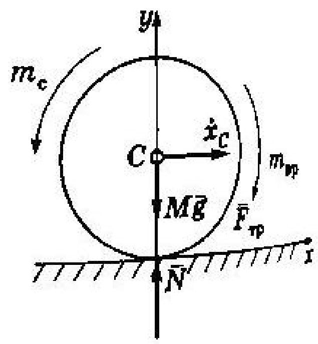
$$v = \frac{3}{2}fgt - fgt = \frac{fgt}{2}.$$

Ответ: $v = \frac{fgt}{2}$.

Задача 39.10

Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения $f_к = \frac{1}{4}fr$.

Решение



В этом случае по сравнению с решением задачи 39.9 изменится лишь дифференциальное уравнение (3) вращения колеса. Трение качения:

$$m_c = f_к Mg.$$

Тогда

$$Mr^2\ddot{\varphi} = m_{вр} - F_{тр}r - f_к Mg,$$

$$Mr^2\ddot{\varphi} = \frac{5}{2}fMgr - fMgr - f_к Mg =$$

$$= \frac{3}{2}fMgr - \frac{fr}{4}Mg = \frac{5fMgr}{4}.$$

Откуда

$$\ddot{\varphi} = \frac{5fg}{4r},$$

$$\dot{x}_C = \frac{5fgt}{4}.$$

Следовательно, скорость проскальзывания с учетом трения качения

$$v = \frac{5}{4} fgt - fgt = \frac{fgt}{4}.$$

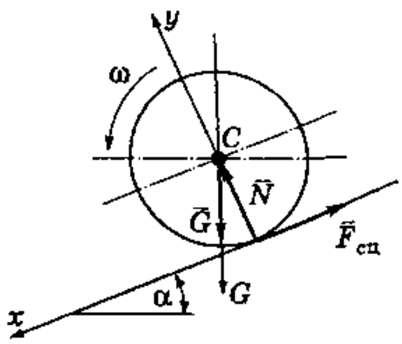
Ответ: $\frac{fgt}{4}$.

Задача 39.11

Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести по наклонной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра, предполагая, что при движении цилиндра скольжение отсутствует. Сопротивлением качения пренебречь.

Решение

Рассмотрим плоскопараллельное движение цилиндра под действием приложенных к нему сил (см. рисунок). Составим дифференциальные уравнения:



$$m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = G\sin\alpha - F_{сц}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = N - G\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$I_C\varphi = \sum M^e_{kC} = F_{сц}r. \qquad (3)$$

Так как $I_C = \frac{mr^2}{2}$, $\varphi = \frac{\ddot{x}_C}{r}$, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{сц}r.$$

Откуда

$$\frac{m\ddot{x}_C}{2} = F_{сц}. \qquad (4)$$

С учетом выражения (4) уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - \frac{m\ddot{x}_C}{2} \qquad (5)$$

или

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha.$$

Откуда

$$\ddot{x}_C = a_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$F_{\text{сц}} = \frac{m\ddot{x}_C}{2} = \frac{1}{3}mg\sin\alpha.$$

Для определения наклона плоскости, при котором начнется скольжение, используем зависимость

$$F_{\text{сц}} \le F_{\text{сц}}^{\max} = f_{\text{сц}}N,$$

где $N = G\cos\alpha$.

Тогда

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le f_{\text{сц}}mg\cos\alpha$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha \le 3f,$$

$$\alpha \le \operatorname{arctg} 3f.$$

О т в е т: $\alpha \le \operatorname{arctg} 3f$; $a_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha$.

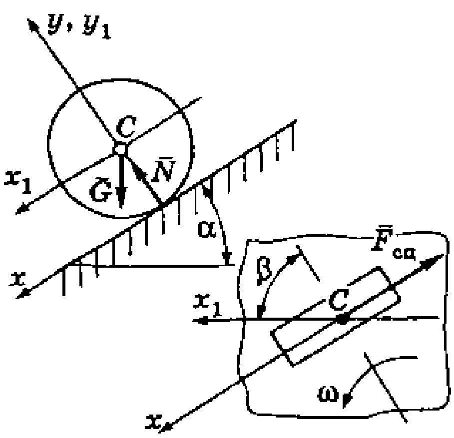
Задача 39.12

Однородный сплошной круглый диск катится без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Ось диска образует угол β с линией наибольшего ската. Определить ускорение центра масс диска, считая, что его качение происходит в одной вертикальной плоскости.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение диска под действием приложенных сил (см. рисунок).

Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения диска:



$$m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = G\sin\alpha\,\sin\beta - F_{\text{сц}}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = -N + G\cos\alpha, \quad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M^e_{kC} = F_{\text{сц}}r. \quad (3)$$

Так как момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс, $I_C = \dfrac{mr^2}{2}$, $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{r}$, то уравнение (3) примет вид

$$\frac{mr^2}{2}\,\frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{\text{сц}}r.$$

Откуда

$$\frac{m\ddot{x}_C}{2} = F_{\text{сц}}. \quad (4)$$

Из уравнения (1) имеем

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha\,\sin\beta - F_{\text{сц}}. \quad (5)$$

Сложим почленно уравнения (4) и (5) и получим

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha\,\sin\beta.$$

Отсюда найдем ускорение центра масс диска

$$\ddot{x}_C = a_C = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,\sin\beta.$$

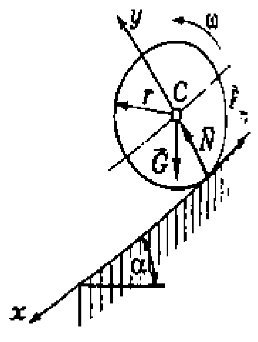
Ответ: $a_C = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha\,\sin\beta$.

Задача 39.13

Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием силы тяжести со скольжением по наклонной плоскости при коэффициенте трения скольжения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра.

Р е ш е н и е

Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения цилиндра со скольжением (см. рисунок):



$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = G\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = -N + G\cos\alpha, \quad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M_{kC}^e = F_{\text{тр}}r. \quad (3)$$

Движение без скольжения возможно, если выполняется условие $\alpha \leq \operatorname{arctg} 3f$ (см. решение задачи 39.11).

Следовательно, при $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$ цилиндр будет катиться со скольжением и сила $F_{\text{тр}}$ будет иметь предельное значение:

$$F_{\text{тр}} = fN = fG\cos\alpha = fmg\cos\alpha.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha.$$

Отсюда найдем ускорение оси цилиндра

$$\ddot{x}_C = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

О т в е т: $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$, $\ddot{x}_C = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

Задача 39.14

Однородное колесо радиуса r скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. При каком значении коэффициента трения качения $f_{\text{к}}$ центр масс колеса будет двигаться равномерно, а колесо при этом будет равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его плоскости?

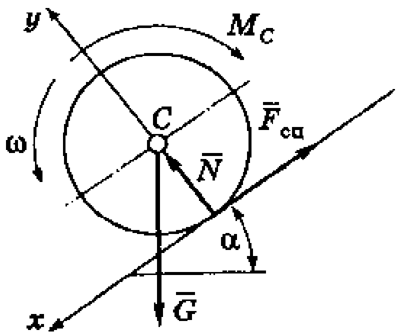
Р е ш е н и е

Рассмотрим качение колеса под действием приложенных к нему сил (см. рисунок). Запишем дифференциальные уравнения его плоского движения:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = G\sin\alpha - F_{\text{сц}}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = N - G\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M_{kC}^e = F_{сц}r - M_C. \qquad (3)$$



Так как по условию $v_C = \text{const}$, то $\ddot{x}_C = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$. Тогда из уравнения (1)

$$G\sin\alpha = F_{сц}$$

и из уравнения (3)

$$F_{сц} = \frac{M_C}{r}.$$

Момент сопротивления качению

$$M_C = fN = f_к G\cos\alpha.$$

Следовательно,

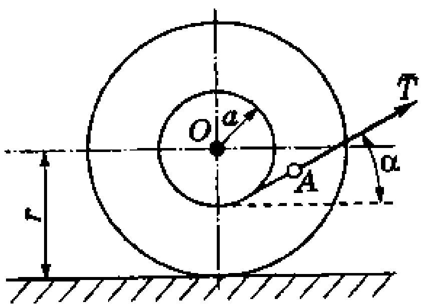
$$G\sin\alpha = \frac{M_C}{r} = \frac{f_к G\cos\alpha}{r}.$$

Откуда

$$f_к = r\operatorname{tg}\alpha.$$

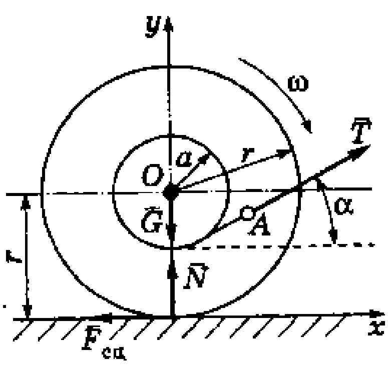
Ответ: $f_к = r\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 39.15



На барабан однородного катка массы m и радиуса r, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана нить, к которой приложена сила $\bar{T}$ под углом α к горизонту. Радиус барабана a, радиус инерции катка ρ. Определить закон движения оси катка O. В начальный момент каток находится в покое, затем катится без скольжения.

Решение



Рассмотрим процесс качения катка под действием приложенных к нему сил (см. рисунок).

Дифференциальные уравнения его плоского движения имеют вид

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = -F_{сц} + T\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = -G + N + T\sin\alpha, \quad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M^e_{kC} = -Ta + F_{\text{сц}}r. \quad (3)$$

Поскольку скольжение отсутствует, то $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r}$, $I_C = m\rho^2$.

Тогда запишем уравнения (1) и (3) в виде

$$mr\ddot{x}_C = Tr\cos\alpha - F_{\text{сц}}r, \quad (4)$$

$$m\rho^2\frac{\ddot{x}_C}{r} = F_{\text{сц}}r - Ta. \quad (5)$$

Сложим почленно уравнения (4) и (5), получим

$$m\ddot{x}_C\left(r + \frac{\rho^2}{r}\right) = T(r\cos\alpha - a).$$

Откуда

$$\ddot{x}_C = \frac{Tr(r\cos\alpha - a)}{m(r^2 + \rho^2)}.$$

Проинтегрируем дважды это выражение:

$$\dot{x}_C = \frac{Tr(r\cos\alpha - a)}{m(r^2 + \rho^2)}t + C_1,$$

$$x_C = \frac{Tr(r\cos\alpha - a)}{2m(r^2 + \rho^2)}t^2 + C_1t + C_2. \quad (6)$$

Зная начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, определим C_1 и C_2: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

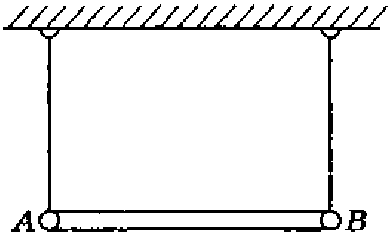
Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (6) и запишем закон движения оси катка:

$$x_C = \frac{Tr(r\cos\alpha - a)}{2m(r^2 + \rho^2)}t^2.$$

Ответ: $x_C = \frac{Tr(r\cos\alpha - a)}{2m(r^2 + \rho^2)}t^2$, причем ось x направлена слева направо

Задача 39.16

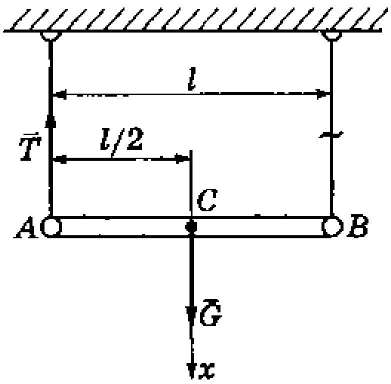
Однородный стержень AB массы M горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



Указание. Составить дифференциальные уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом обрыва нити, пренебрегая изменением направления стержня и изменением расстояния центра масс стержня от другой нити.

Решение

В момент обрыва одной из нитей стержень AB будет совершать плоскопараллельное движение. Покажем на рисунке силы, действующие на стержень.



Составим дифференциальные уравнения движения стержня:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = G - T, \qquad (1)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M_{kC}^e = T\frac{l}{2}, \qquad (2)$$

где I_C — момент инерции стержня, $I_C = \dfrac{Ml^2}{12}$; $\ddot{\varphi} = \dfrac{\ddot{x}_C}{l/2} = \dfrac{2\ddot{x}_C}{l}$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{Ml^2}{12}\,\frac{2\ddot{x}_C}{l} = \frac{Tl}{2}.$$

Откуда

$$M\ddot{x}_C = 3T.$$

С учетом этого выражения уравнение (1) примет вид

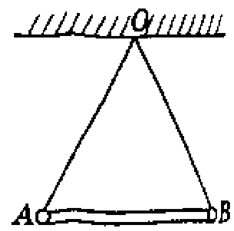
$$G - T = 3T.$$

Отсюда найдем натяжение нити в момент разрыва:

$$T = \frac{G}{4} = \frac{Mg}{4}.$$

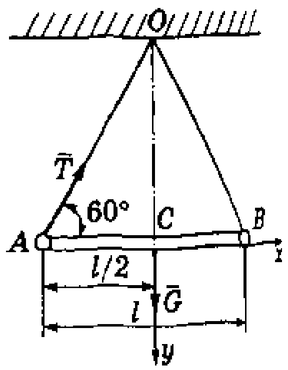
Ответ: $T = \frac{Mg}{4}$.

Задача 39.17



Однородный стержень AB массы M подвешен в точке O на двух нитях равной с ним длины. Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой. (См. указание к задаче 39.16.)

Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на стержень AB в момент обрыва нити.

Запишем дифференциальные уравнения плоского движения стержня в момент обрыва нити в точке B:

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = T\cos 60°, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = G - T\sin 60°, \qquad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = \sum M_{kC}^e = T\frac{l}{2}\sin 60°. \qquad (3)$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс,

$$I_C = \frac{Ml^2}{12}.$$

Составим еще одно уравнение, устанавливающее зависимость между $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ и $\ddot{\varphi}$.

Согласно уравнениям (1) и (2) после обрыва нити точка C – центр масс, движется одновременно вдоль осей x и y, а стержень AB совершает сложное движение, которое можно представить как вращение вокруг параллельных осей, проходящих через точки A и O.

Так как

$$\varphi_1 = -\frac{y_C}{l/2},$$

$$\varphi_2 = \frac{x_C}{CO} = \frac{x_C}{(l/2)\cdot \mathrm{tg}60^\circ}$$

(отрицательное направление угла поворота принято по ходу часовой стрелки), тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{2x_C}{l\,\mathrm{tg}60^\circ} - \frac{2y_C}{l}.$$

Тогда

$$\frac{l}{2}\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C \mathrm{tg}\, 30^\circ - \ddot{y}_C$$

и

$$\frac{1}{2}M\ddot{\varphi} = M\ddot{x}_C \mathrm{tg}\, 30^\circ - M\ddot{y}_C. \quad (4)$$

Из уравнения (3) получим, что

$$\frac{Ml^2}{12}\ddot{\varphi} = -\frac{l}{2}T\sin 60^\circ$$

или

$$M\frac{l}{2}\ddot{\varphi} = -3T\sin 60^\circ.$$

Подставим это выражение в уравнение (4) и с учетом формул (1) и (2) получим

$$-3T\sin 60^\circ = T\cos 60^\circ \mathrm{tg}\, 30^\circ - G + T\sin 60^\circ,$$

$$G = T(3\sin 60^\circ + \cos 60^\circ \mathrm{tg} 30^\circ + \sin 60^\circ).$$

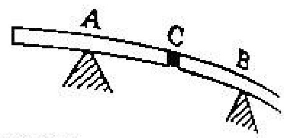
Отсюда

$$T = \frac{G}{3\sin 60^\circ + \cos 60^\circ \mathrm{tg}\, 30^\circ + \sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{Mg}{3\cdot 0{,}866 + 0{,}5\cdot 0{,}577 + 0{,}866} = 0{,}266Mg.$$

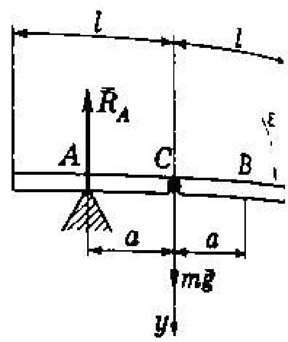
Ответ: $T = 0{,}266Mg$.

Задача 39.18



Однородный тонкий стержень длины $2l$ и массы M лежит на двух опорах A и B; центр масс C стержня находится на одинаковых расстояниях от опор, причем $CA = CB = a$; давление на каждую опору равно $1/2P$. Как изменится давление на опору A в тот момент, когда опора B будет мгновенно удалена? (См. указание к задаче 39.16.)

Решение



После удаления опоры B стержень будет совершать плоскопараллельное движение (см. рисунок).

Составим дифференциальные уравнения движения стержня, выбрав начало координат в центре масс стержня:

$$M\ddot{y}_C = Mg - R_A, \qquad (1)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = R_A a. \qquad (2)$$

Зная, что

$$I_C = \frac{Ml^2}{3}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}_C}{a},$$

формула (2) примет вид

$$\frac{Ml^2}{3}\frac{\ddot{y}_C}{a} = R_A a$$

или

$$M\ddot{y}_C = \frac{3a^2R_A}{l^2}. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в уравнение (1):

$$\frac{3a^2R_A}{l^2} = Mg - R_A.$$

Откуда

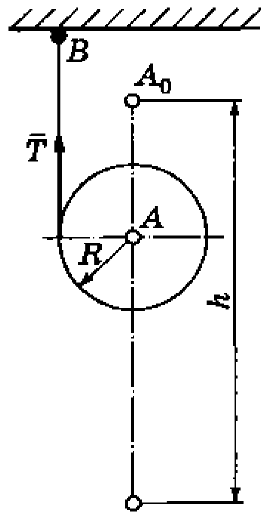
$$R_A = \frac{Mgl^2}{l^2 + 3a^2}.$$

Найдем изменение давления ΔR_A на опору A, учитывая, что $R_A^{\text{ст}} = \frac{Mg}{2}$:

$$\Delta R_A = R_A - R_A^{\text{ст}} = \frac{Mgl^2}{l^2+3a^2} - \frac{Mg}{2} = \frac{l^2-3a^2}{2(l^2+3a^2)}Mg.$$

Ответ: давление на опору A получит приращение, равное
$\frac{l^2-3a^2}{2(l^2+3a^2)}Mg.$

Задача 39.19



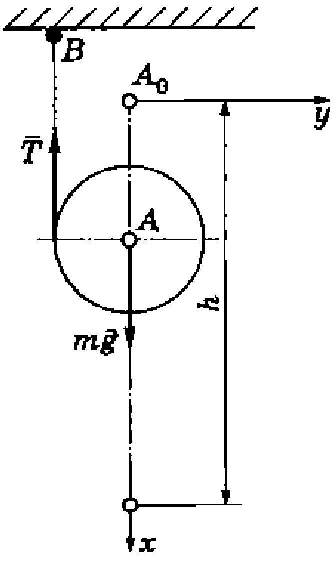
Тяжелый круглый цилиндр A массы m обмотан посредине тонкой нитью, конец которой B закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить. Определить скорость оси цилиндра, после того как эта ось опустится на высоту h, и найти натяжение $\overline{T}$ нити.

Решение

Выберем начало координат в точке A_0 и запишем два дифференциальных уравнения:

$$m\ddot{x}_A = mg - T, \tag{1}$$

$$I_{Az}\ddot{\varphi} = TR. \tag{2}$$



Найдем

$$I_{Az} = \frac{mR^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_A}{R}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{mR^2}{2}\frac{\ddot{x}_A}{R} = TR$$

или

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_A = T. \tag{3}$$

Сложим уравнения (1) и (3):

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_A = mg$$

или

$$\ddot{x}_A = \frac{2}{3}g. \tag{4}$$

Преобразуем $\ddot{x}_A$ следующим образом:

$$\ddot{x}_A = \frac{d\dot{x}_A}{dt} = \frac{dx_A}{dt}\,\frac{d\dot{x}_A}{dx_A} = \dot{x}_A\frac{d\dot{x}_A}{dx_A}. \tag{5}$$

Подставим выражение (5) в равенство (4) и получим

$$\dot{x}_A d\dot{x}_A = \frac{2}{3}g\,dx_A. \tag{6}$$

Проинтегрируем выражение (6):

$$\int_0^v \dot{x}_A d\dot{x}_A = \int_0^h g\,dx_A$$

и получим

$$\left.\frac{\dot{x}_A^2}{2}\right|_0^v = \left.\frac{2}{3}gx_A\right|_0^h$$

или

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}.$$

Для определения T подставим выражение (4) в уравнение (1):

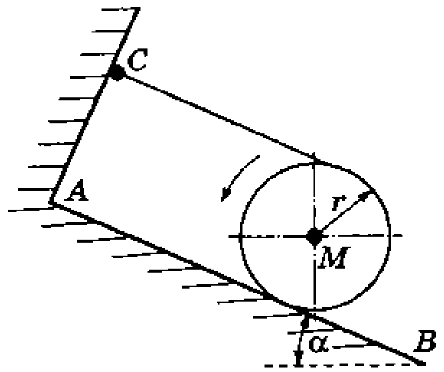
$$\frac{2}{3}mg = mg - T.$$

Откуда

$$T = \frac{1}{3}mg.$$

Ответ: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $T = \frac{1}{3}mg$.

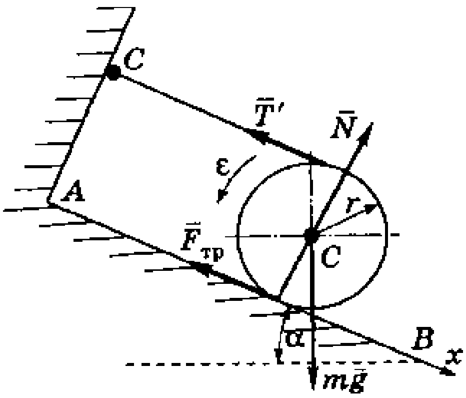
Задача 39.20



Две гибкие нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра массы M и радиуса r так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельно основаниям. Цилиндр помещен на наклонной плоскости AB так, что его образующие перпендикулярны линии наибольшего ската, а концы C нитей закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости AB. Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, причем коэффициент трения равен f.

Определить путь s, пройденный центром масс цилиндра за время t, и натяжение T нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.

Решение



На цилиндр при движении действуют сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция $\bar{N}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$, натяжение $\bar{T}'$ двух нитей (см. рисунок). Под действием этих сил он совершает плоскопараллельное движение.

Составим дифференциальные уравнения движения цилиндра:

$$M\ddot{x}_C = -T' - F_{тр} + Mg\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$M\ddot{y}_C = -Mg\cos\alpha + N, \qquad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi} = T'r - F_{тр}r. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) найдем:

$$N = Mg\cos\alpha.$$

Поэтому

$$F_{тр} = fN = fMg\cos\alpha.$$

Зная, что

$$I_{Cz} = \frac{Mr^2}{2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r},$$

запишем уравнение (3) в виде

$$\frac{M\ddot{x}_C}{2} = T' - F_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Сложим уравнения (1) и (4) и получим

$$\frac{3}{2}M\ddot{x}_C = -2F_{\text{тр}} + Mg\sin\alpha = Mg(\sin\alpha - 2f\cos\alpha).$$

Откуда

$$\ddot{x}_C = \frac{d\dot{x}_C}{dt} = \frac{2}{3}g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha). \quad (5)$$

Разделим переменные и проинтегрируем выражение (5):

$$d\dot{x}_C = \frac{2}{3}g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)dt,$$

$$\dot{x}_C = \frac{dx_C}{dt} = \frac{2}{3}gt(\sin\alpha - 2f\cos\alpha) + C_1.$$

При $t=0$ $v_{C_0}=0$, тогда $C_1=0$.
Получим, что

$$s = x_C = \frac{gt^2}{3}(\sin\alpha - 2f\cos\alpha).$$

Найдем натяжение нитей, подставив уравнение (5) в выражение (4):

$$\frac{Mg}{2}(\sin\alpha - 2f\cos\alpha) = T' - fMg\cos\alpha.$$

Откуда

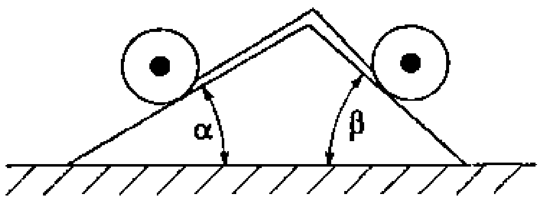
$$T' = \frac{1}{3}Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Так как $T' = 2T$, то

$$T = \frac{1}{6}Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Ответ: $s = \frac{1}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)\, t^2$; $T = \frac{1}{6} Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$. Цилиндр остается в покое, если $\operatorname{tg}\alpha < 2f$.

Задача 39.21

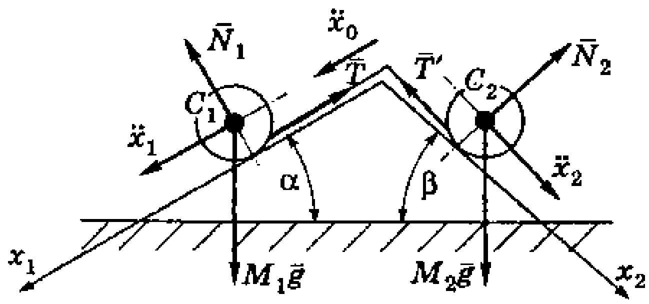


Два цилиндрических вала массы M_1 и M_2 скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы α и β с горизонтом. Валы соединены нерастяжимой нитью, концы которой намотаны на валы и к ним прикреплены. Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.

Решение

Рассмотрим движение вала C_1 под действием силы тяжести $M_1\bar{g}$ и натяжения нити $\bar{T}$ (см. рисунок). Считаем, что нить движется в сторону скатывания вала и ускорение его центра масс равно сумме ускорений вала $\ddot{x}_1$ и нити $\ddot{x}_0$, т.е.

$$\ddot{x}_{C_1} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_0.$$



Запишем дифференциальные уравнения плоского движения вала C_1:

$$M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_0) = M_1 g \sin\alpha - T, \tag{1}$$

$$I_{C_1} = \varepsilon_1 = Tr_1 \tag{2}$$

и вала C_2 под действием силы тяжести $M_2\bar{g}$ и натяжения нити T', учитывая, что $\ddot{x}_{C_2} = \ddot{x}_2 + \ddot{x}_0$:

$$M_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_0) = M_2 g \sin\alpha - T', \tag{3}$$

$$I_{C_2} = \varepsilon_2 = T' r_2. \tag{4}$$

Найдем моменты инерции валов:

$$I_{C_1} = \frac{M_1 r_1^2}{2},$$

$$I_{C_2} = \frac{M_2 r_2^2}{2}.$$

Тогда уравнения (2) и (4) примут вид

$$\frac{M_1 r_1 \varepsilon_1}{2} = T, \tag{5}$$

$$\frac{M_2 r_2 \varepsilon_2}{2} = T'. \tag{6}$$

С учетом того, что $T = T'$, получим

$$\frac{M_1 r_1 \varepsilon_1}{2} = \frac{M_2 r_2 \varepsilon_2}{2}$$

или

$$M_1 r_1 \varepsilon_1 = M_2 r_2 \varepsilon_2 = 2T. \tag{7}$$

Поскольку $x_1 = r_1\varphi_1$, $x_2 = r_2\varphi_2$, то $\ddot{x}_1 = r_1\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{x}_2 = r_2\ddot{\varphi}_2$, где $\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$, $\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$.

Подставим полученные соотношения в выражение (7):

$$M_1\ddot{x}_1 = M_2\ddot{x}_2. \tag{8}$$

Из уравнения (1) вычтем уравнение (3):

$$M_1(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0) - M_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_0) = M_1 g \sin\alpha - M_2 g \sin\beta$$

и, учитывая равенство (8), получим

$$\ddot{x}_0(M_1 + M_2) = M_1 g \sin\alpha - M_2 g \sin\beta,$$

откуда

$$\ddot{x}_0 = g\frac{M_1 \sin\alpha - M_2 \sin\beta}{M_1 + M_2}. \tag{9}$$

Подставим выражение (9) в уравнение (1):

$$M_1\ddot{x}_1+\frac{M_1g(M_1g\sin\alpha-M_2g\sin\beta)}{M_1+M_2}=M_1g\sin\alpha-T. \qquad (10)$$

Тогда, учитывая, что $M_1\ddot{x}_1=2T$,

$$3T=M_1g\sin\alpha-\frac{M_1g(M_1g\sin\alpha-M_2g\sin\beta)}{M_1+M_2}. \qquad (11)$$

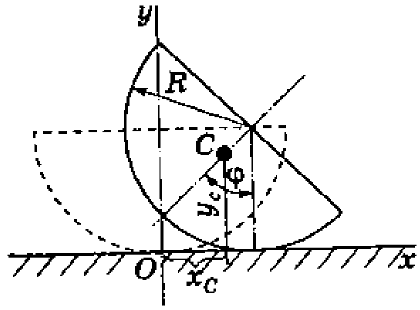
Из равенства (11) найдем

$$T=g\,\frac{M_1M_2(\sin\alpha+\sin\beta)}{3(M_1+M_2)}.$$

Ответ: $T=g\,\dfrac{M_1M_2(\sin\alpha+\sin\beta)}{3(M_1+M_2)}$; $\ddot{x}_0=g\,\dfrac{M_1\sin\alpha-M_2\sin\beta}{M_1+M_2}$.

Задача 39.22

Определить период малых колебаний однородного полукруглого диска радиуса R, находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может катиться без скольжения.

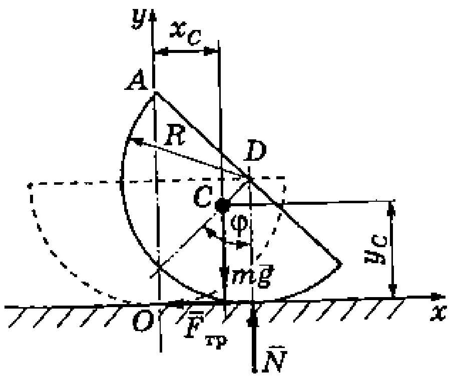


Решение

Составим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела. Начало координат выберем в точке касания тела и плоскости в момент равновесия (см. рисунок). Учтем, что

$$CD=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}=l,$$

где точка C — центр тяжести полудиска.



Тогда

$$m\ddot{x}_C=-F_{тр}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C=-mg+N, \qquad (2)$$

$$I_C\ddot{\varphi}=F_{тр}(R-l\cos\varphi)-Nl\sin\varphi. \qquad (3)$$

Из уравнения (2)

$$N = m\ddot{y}_C + mg. \tag{4}$$

Подставим в уравнение (3) выражения (1) и (4):

$$I_C\ddot{\varphi} = -(R - l\cos\varphi)m\ddot{x}_C - (m\ddot{y}_C + mg)l\sin\varphi. \tag{5}$$

Так как диск катится без скольжения, то

$$x_C = R\varphi - l\sin\varphi,$$

$$y_C = R - l\cos\varphi.$$

Поскольку рассматриваем малые колебания, для которых $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, то

$$x_C = (R - l)\varphi, \quad \ddot{x}_C = (R - l)\ddot{\varphi};$$

$$y_C = R - l, \quad \ddot{y}_C = 0.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$I_C\ddot{\varphi} = -m(R - l)^2\ddot{\varphi} - mgl\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_C + (R - l)^2 m}\varphi = 0. \tag{6}$$

Найдем момент инерции полудиска

$$I_C = I_D - ml^2 = \frac{mR^2}{2} - ml^2 = \frac{m}{2}(R^2 - 2l^2).$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2gl}{(R^2 - 2l^2) + 2(R - l)^2}\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} = k^2\varphi = 0,$$

Найдем период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{(R^2 - 2l^2) + (R - l)^2}{2gl}}. \qquad (7)$$

Подставим в выражение (7) значение $l = \dfrac{4R}{3\pi}$ и после преобразований получим:

$$T = \frac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi - 16)R}.$$

Ответ: $T = \dfrac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi - 16)R}$.

40. Приближенная теория гироскопов

Методические указания к решению задач

Гироскопом называется симметричное твердое тело, совершающ движение вокруг неподвижной точки, расположенной на его ос симметрии. Таким телом является волчок или тяжелый однородны диск, который одновременно может вращаться вокруг двух или бо лее пересекающихся в одной точке осей. Следовательно, движени гироскопа может рассматриваться как сферическое, т.е. как движе ние тела с одной закрепленной точкой, или как составное движени вокруг пересекающихся осей. Поэтому при постановке и решени задач по теории гироскопов целесообразно пользоваться термино логией сферического или составного движения тела.

Так, при сферическом движении положение тела в неподвижны осях определяется *углами Эйлера*: ψ — угол прецессии, φ — угол соб ственного вращения, θ — угол нутации. При этом неподвижну систему координат следует обозначить $Oxyz$, а подвижную — связан ную с телом, — $Ox_1y_1z_1$, где z_1 — ось симметрии тела. Тогда согласн терминологии сферического движения вращение тела вокруг оси является собственным вращением, а по терминологии составного дв жения — относительным. При этом угловая скорость вращения это угловая скорость собственного вращения или угловая скорост относительного движения, которую обозначают соответственно ω_φ или ω_r.

Вращение вокруг оси z по терминологии сферического движен называется ***прецессией***, по терминологии составного движения — *пе реносным движением*. Угловая скорость обозначается $\omega_\psi = \dot\psi$ (углов скорость прецессии) или ω_e (угловая скорость переносного движени

Угол нутации θ — это угол между осями z и z_1. Если $\theta = \text{const}$, $\omega_\psi = \text{const}$ и $\omega_\varphi = \text{const}$ и имеет место так называемая *регулярная пре цессия*, играющая важную роль в технике и в частности в таких у ройствах, которыми являются гироскопы.

Задачи этого параграфа решают с использованием элементарн или приближенной, теории гироскопов. Сущность этой теории в т что для быстровращающегося гироскопа угловая скорость прецес ала по сравнению с угловой скоростью собственного вращения, а угол нутации остается практически постоянным, поэтому *абсолютная угловая скорость гироскопа*

$$\overline{\omega} \approx \overline{\omega}_\varphi. \qquad (40.1)$$

Тогда кинетический момент быстровращающегося гироскопа относительно неподвижной точки O

$$\overline{L}_O = I_O\overline{\omega} \approx I_O\overline{\omega}_\varphi \qquad (40.2)$$

и направлен он по оси собственного вращения.

Согласно теореме Резаля

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_i^e) = \overline{u}, \qquad (40.3)$$

где $\overline{u}$ – скорость конца вектора $\overline{L}_O$. Геометрически $\overline{u}$ равна главному моменту внешних сил относительно точки O:

$$\overline{M}_O^e = \sum \overline{M}_O(\overline{F}_i^e),$$

т.е.

$$\overline{u} = \overline{M}_O^e. \qquad (40.4)$$

Поэтому, если $\overline{M}_O^e \neq 0$, то конец вектора кинетического момента $\overline{L}_O$ движется со скоростью $\overline{u}$, это значит, что ось собственного вращения гироскопа будет вращаться вокруг оси прецессии с некоторой угловой скоростью $\overline{\omega}_\psi$. Тогда скорость $\overline{u}$ может быть определена аналогично скорости любой точки тела при вращении вокруг неподвижной оси по *формуле Эйлера*:

$$v = \overline{\omega} \times \overline{r},$$

где $\overline{r}$ – радиус-вектор, проведенный из некоторой точки на оси вращения в данную точку.

Поэтому

$$\overline{u} = \overline{\omega}_\psi \times \overline{L}_O = \overline{\omega}_\psi \times I_O\overline{\omega}_\varphi. \qquad (40.5)$$

Выражения (40.4) и (40.5) позволяют определить угловую скорость прецессии ω_ψ при известных значениях угловой скорости собственного вращения гироскопа и главного момента внешних сил, так как

$$|\overline{M}_O^e| = |\overline{\omega}_\psi \times I_O\overline{\omega}_\varphi| = I_O\omega_\psi\omega_\varphi \sin\theta. \qquad (40.6)$$

Отсюда

$$\omega_\psi = \frac{\left| \overline{M}_O^e \right|}{I_O \omega_\varphi \sin\theta}. \tag{40.7}$$

Если же заданы угловая скорость прецессии и угловая скорость собственного вращения, то момент внешних сил можно определить по формуле (40.6).

Если гироскоп представляет диск, вращающийся вокруг пересекающихся осей (рис. 40.1), причем ось собственного вращения закреплена в некоторых опорах A и B, то момент внешних сил относительно точки пересечения осей O будет создаваться реакциями этих опор, расположенных в плоскости, к которой $\overline{M}_O^e$, а следовательно, и вектор $\overline{u}$ перпендикулярны. Если гироскоп расположен симметрично относительно опор, то величина их реакций

$$R_A = R_B = \frac{I_O \omega_\psi \omega_\varphi \sin\theta}{AB}. \tag{40.8}$$

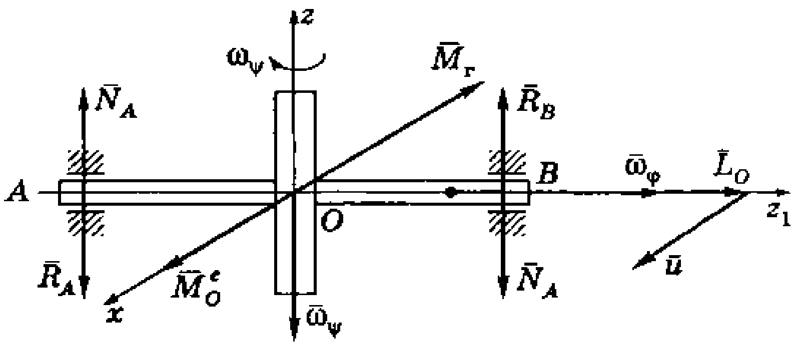


Рис. 40.1

В свою очередь в опорах будут возникать давления $\overline{N}$, равные по величине реакциям, но направленные противоположно им, т.е.

$$\overline{N}_A = -\overline{R}_A, \quad \overline{N}_B = -\overline{R}_B.$$

Если к вращающемуся гироскопу приложить главный момент сил инерции гироскопа относительно его неподвижной точки $\overline{M}_O^{ин}$, то в соответствии с принципом Даламбера получим уравновешенную систему сил:

$$\overline{M}_O^{ин} + \overline{M}_O^e = 0 \Rightarrow \overline{M}_O^{ин} = -\overline{M}_O^e. \tag{40.9}$$

Так как

$$\overline{M}_O^e = \overline{\omega}_\psi \times I_O \overline{\omega}_\varphi = I_O(\overline{\omega}_\psi \times \overline{\omega}_\varphi), \tag{40.10}$$

то

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -I_O(\overline{\omega}_\psi \times \overline{\omega}_\varphi) = I_O(\overline{\omega}_\varphi \times \overline{\omega}_\psi). \tag{40.11}$$

Выражение $I_O(\overline{\omega}_\varphi \times \overline{\omega}_\psi)$ в теории гироскопов называют ***гироскопическим моментом*** и обозначают $\overline{M}_\text{г}$. Таким образом,

$$\overline{M}_\text{г} = \overline{M}_O^{\text{ин}} = I_O(\overline{\omega}_\varphi \times \overline{\omega}_\psi). \tag{40.12}$$

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, которыми и являются силы давления в опорах, т.е.

$$\overline{M}_\text{г} = \overline{M}(\overline{N}_A, \overline{N}_B).$$

Значение этих сил определяют по формуле

$$N_A = N_B = \frac{|\overline{M}_\text{г}|}{AB} = \frac{I_O \omega_\varphi \omega_\psi \sin\theta}{AB}, \tag{40.13}$$

которая аналогична выражению (40.8).

Действие гироскопической пары сил можно определить по *правилу Жуковского*:

если быстровращающемуся гироскопу сообщить прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся расположить ось гироскопа параллельно оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения имели одинаковое направление.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Показать на рисунке внешние силы, действующие на гироскоп (реакции опор, силу тяжести, направление главного момента внешних сил и гироскопического момента).

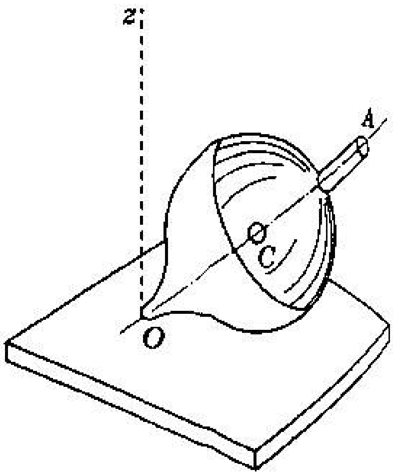
2. Изобразить неподвижные $Oxyz$ и подвижные $Ox_1y_1z_1$ оси координат. Начало координат выбрать в неподвижной точке, ось z_1 направить по оси симметрии гироскопа, ось z — по оси прецессии.

3. Показать на рисунке направление кинетического момента и направление угловых скоростей собственного вращения и прецессии.

4. Записать применительно к данной задаче теорему Резаля или с использованием гироскопического момента уравнение равновесия в виде формулы (40.9). При определении статических давлений (реакций) возможны и другие уравнения равновесия.

Задачи и решения

Задача 40.1

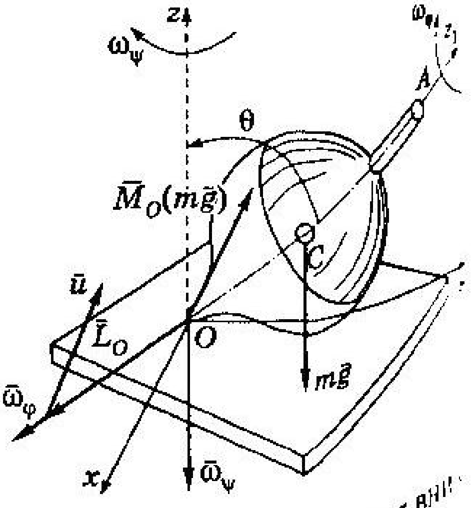


Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси OA с постоянной угловой скоростью $\omega = 600$ рад/с; ось OA наклонена к вертикали; нижний конец оси O остается неподвижным, центр масс C волчка находится на оси OA на расстоянии $OC = 30$ см от точки O; радиус инерции волчка относительно оси равен 10 см. Определить движение оси волчка OA, считая, что главный момент количеств движения волчка относительно оси OA равен $I\omega$.

Решение

Применим теорему Резаля:

$$\frac{dL_O}{dt} = \sum \overline{M}_O(\overline{F}^e) = \overline{u}.$$



Расположим ось z_1 собственного вращения волчка в плоскости yz. Тогда вектор $\overline{M}_O(m\overline{g})$ направлен в сторону, противоположную направлению оси x, а скорость $\overline{u}$ конца вектора кинетического момента $\overline{L}_O$ направлена согласно теореме Резаля в ту же сторону.

Вектор $\overline{\omega}_\psi$ угловой скорости прецессии направлен по оси z вни
Тогда теорему Резаля запишем в виде

$$\overline{u} = \overline{M}_O(m\overline{g})$$

и найдем u:

$$u = \omega_\psi L_O \sin\theta, \qquad (2)$$

где $L_O = I_{z_1}\omega_\varphi$.

Но $I_{z_1} = I = m\rho^2$, тогда

$$u = \omega_\psi \omega_\varphi m\rho^2 \sin\theta.$$

Найдем главный момент внешних сил относительно точки O:

$$M_O(m\bar{g}) = mg \cdot OC \cdot \sin\theta. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$\omega_\psi \omega_\varphi m\rho^2 \sin\theta = mg \cdot OC \cdot \sin\theta$$

и найдем угловую скорость

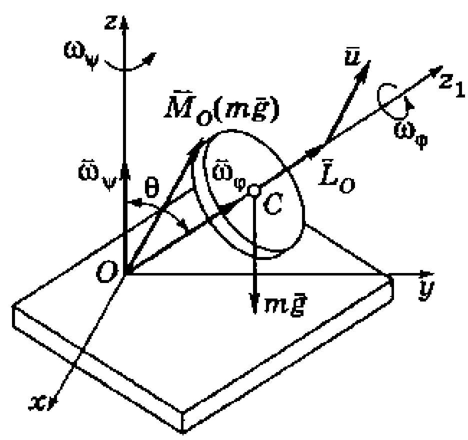
$$\omega_\psi = \frac{g \cdot OC}{\rho^2 \omega_\varphi} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}3}{0{,}1^2 \cdot 600} = 0{,}49 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ: ось OA вращается вокруг вертикали Oz по часовой стрелке, описывая круговой конус, с постоянной угловой скоростью $\omega_\psi = 0{,}49$ рад/с.

Задача 40.2

Волчок, имея форму диска диаметра 30 см, вращается с угловой скоростью 80 рад/с вокруг своей оси симметрии. Диск насажен на ось длины 20 см, расположенную вдоль оси симметрии волчка. Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка, полагая, что его главный момент количества движения равен $I\omega$.

Решение



Считаем, что ось собственного вращения расположена в плоскости Oyz и диск вращается против часовой стрелки (см. рисунок). Тогда вектор $\bar{L}_O$ направлен по оси z_1, вектор $\bar{M}_O(m\bar{g})$ — противоположно оси x, скорость $\bar{u}$ конца вектора кинетического момента в соответствии с теоремой Резаля — в сторону вектора $\bar{M}_O(m\bar{g})$.

Следовательно, вектор $\overline{\omega}_\psi$ угловой скорости прецессии направле- по оси z вверх.

Запишем теорему Резаля:

$$\overline{u} = \overline{M}_O(m\overline{g}).$$

Найдем скорость конца вектора L_O:

$$u = \omega_\psi L_O \sin\theta, \qquad (1)$$

где $L_O = I_{z_1}\omega_\varphi = \frac{mr^2}{2}$, так как $I_{z_1} = I = \frac{mr^2}{2}$.

Тогда

$$u = \omega_\psi \omega_\varphi \frac{mr^2}{2}\sin\theta. \qquad (2)$$

Определим главный момент внешних сил относительно точки O:

$$M_O(m\overline{g}) = mg \cdot OC \cdot \sin\theta. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$\omega_\psi \omega_\varphi \frac{mr^2}{2}\sin\theta = mg \cdot OC \cdot \sin\theta.$$

Откуда найдем угловую скорость регулярной прецессии волчка:

$$\omega_\psi = \frac{g \cdot OC \cdot 2}{r^2 \omega_\varphi} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 2}{0{,}15^2 \cdot 80} = 2{,}18 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ: 2,18 рад/с.

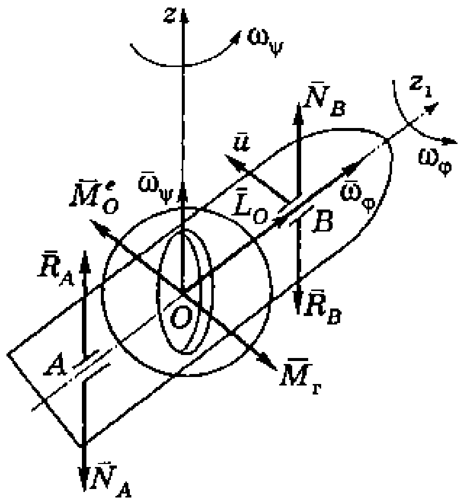
Задача 40.3

Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 1500 об/мин. Масса вращающихся частей 6 т, радиус инерции $\rho = 0{,}7$ м. Определить гироскопические давления на подшипники, если судно описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси, поворачиваясь на 10° в секунду. Расстояние между подшипниками $l = 2{,}7$ м.

Решение

Циркуляция судна вокруг вертикальной оси — это вынужденная прецессия вокруг оси z (см. рисунок).

Так как турбина вращается вокруг собственной оси z_1, то в соответствии с правилом Жуковского возникает гироскопический момент, стремящийся повернуть ось гироскопа параллельно оси прецессии. Поэтому в подшипниках возникают вертикальные давления $\bar{N}_A$ и $\bar{N}_B$, направления которых противоположны реакциям $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_B$. Так как $N_A = N_B = N$, то гироскопический момент



$$M_г = Nl = I_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi, \qquad (1)$$

где $I_{z_1} = M\rho^2$; $\omega_\psi = \dfrac{10\pi}{180} = \dfrac{\pi}{18}$; $\omega_\varphi = \dfrac{\pi n}{30}$.

Тогда из формулы (1) найдем гироскопическое давление

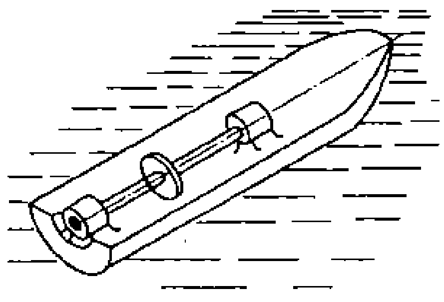
$$N = \frac{\omega_\psi M\rho^2 \frac{\pi n}{30}}{l} = \frac{\frac{\pi}{18}\cdot 6\cdot 10^3\cdot 0{,}7^2\cdot\frac{\pi\cdot 1500}{30}}{2{,}7} =$$

$$= \frac{\pi^2\cdot 10^3\cdot 0{,}7^2\cdot 50}{3\cdot 2{,}7} = 30{,}4\ (\text{кН}).$$

Ответ: 30,4 кН.

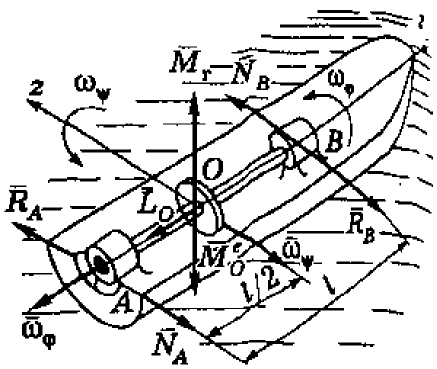
Задача 40.4

Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 с вокруг оси, перпендикулярной оси ротора. Ротор турбины массы 3500 кг с радиусом инерции 0,6 м делает 3000 об/мин. Расстояние между подшипниками 2 м.



Р е ш е н и е

Определим кинетический момент турбины относительно продольной оси Oz_1, проходящей через центр масс турбины (см. рисунок):



$$L_O = I_{z_1}\omega_\varphi = m\rho^2\frac{\pi n}{30} =$$

$$= 3500\cdot 0{,}6^2\cdot\frac{3{,}14\cdot 3000}{30} =$$

$$= 395\ 640\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2)/\text{с}.$$

Предположим, что килевая качка происходит по закону

$$\psi = \psi_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Тогда угловая скорость

$$\omega_\psi = \frac{d\psi}{dt} = \frac{2\pi}{T}\psi_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$\omega_\psi(\max) = \frac{2\pi\psi_0}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 3{,}14\cdot 9}{15\cdot 180} = 0{,}0657\ (\text{рад/с}).$$

Гироскопический момент

$$M_г = M_O^e = R_A l,$$

где $R_A = R_B$ — реакции подшипников; $M_г = I_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi$.

Тогда

$$I_z\omega_\psi\omega_\varphi = R_A l.$$

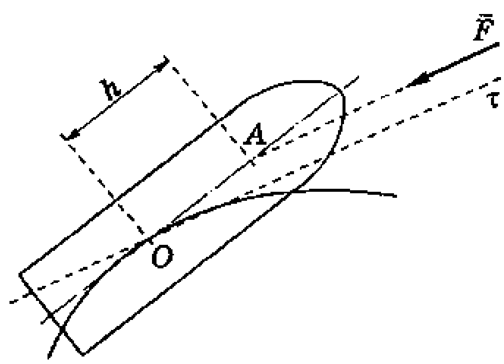
Откуда

$$R_A = R_B = \frac{I_{z_1}\omega_\psi\omega_\varphi}{l} = \frac{395\ 640\cdot 0{,}0657}{2} = 12\ 996{,}8\ \text{Н} = 13\ (\text{кН}).$$

Силы давления равны реакциям подшипников и направлены противоположно им.

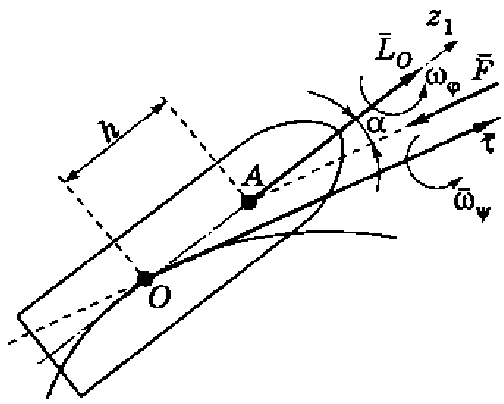
О т в е т: 13 кН.

Задача 40.5



Определить время T полного оборота оси симметрии артиллерийского снаряда вокруг касательной к траектории центра масс снаряда. Это движение происходит в связи с действием силы сопротивления воздуха $F = 6{,}72$ кН, приближенно направленной параллельно касательной и приложенной к оси снаряда на расстоянии $h = 0{,}2$ м от центра масс снаряда. Момент количества движения снаряда относительно его оси симметрии равен 1850 кг · м^2/с.

Решение



Угловую скорость вращения оси симметрии снаряда вокруг касательной определим (см. рисунок), применив теорему Резаля:

$$\bar{u} = \overline{M}_O^e,$$

где $u = L_{Oz_1}\omega_\psi \sin\alpha$; $M_O^e = Fh\sin\alpha$.

Тогда

$$L_{Oz_1}\omega_\psi \sin\alpha = Fh\sin\alpha.$$

Откуда

$$\omega_\psi = \frac{Fh}{L_{Oz_1}}. \qquad (1)$$

Так как

$$\omega_\psi = \frac{2\pi}{T},$$

то с учетом выражения (1) время полного оборота оси симметрии снаряда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\psi} = \frac{2\pi L_{Oz_1}}{Fh} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1850}{6{,}72\cdot 10^3\cdot 0{,}2} = 8{,}64 \text{ (c)}.$$

Ответ: 8,64 с.

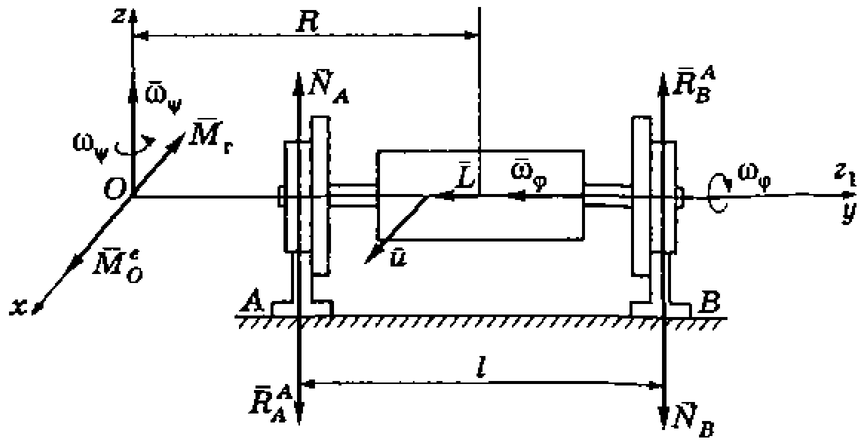
Задача 40.6

Газотурбовоз приводится в движение турбиной, ось которой параллельна оси колес и вращается в ту же сторону, что и колеса, делая 1500 об/мин. Момент инерции вращающихся частей турбины относительно оси вращения $I = 200$ кг · м^2. Как велика добавочная сила давления на рельсы, если газотурбовоз идет по закруглению радиуса 250 м со скоростью 15 м/с? Ширина колеи 1,5 м.

Решение

Определим кинетический момент турбины относительно оси вращения z_1 (см. рисунок):

$$L_O = I_{Oz_1}\omega_\varphi = I_{Oz_1}\frac{\pi n}{30} = 200\cdot\frac{3{,}14\cdot 1500}{30} = 31\ 400 \ (\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}).$$



По теореме Резаля

$$\bar{u} = \bar{M}_O^e,$$

тогда

$$M_O^e = u = L_O\omega_\psi = L_O\frac{v}{R} = 31\ 400\cdot\frac{15}{250} = 1884 \ (\text{Н}\cdot\text{м}).$$

Гироскопический момент турбины

$$M_г = M_O^e = R_A\cdot AB.$$

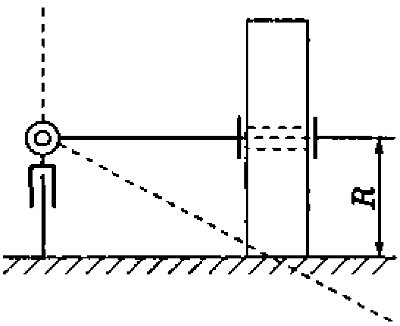
Откуда динамические реакции:

$$R_A = R_B = \frac{M_г}{AB} = \frac{1884}{1{,}5} = 1256 \ (\text{Н}).$$

Динамические давления $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ равны динамическим реакциям, но направлены в противоположные им стороны.

Ответ: на один рельс 1256 Н вниз, на другой рельс 1256 Н вверх.

Задача 40.7



В дробилке с бегунами каждый бегун имеет массу $M = 1200$ кг, радиус инерции относительно его оси $\rho = 0{,}4$ м, радиус $R = 0{,}5$ м, мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину линии касания бегуна с дном чаши. Определить силу давления бегуна на горизонтальное дно чаши, если переносная угловая скорость вращения бегуна вокруг вертикальной оси соответствует $n = 60$ об/мин.

Решение

Выберем оси координат x и z (оси x_1 и z_1 — подвижные), начало координат в точке O. Введем обозначения: ω_1 — угловая скорость вращения бегуна вокруг оси z (угловая скорость прецессии); ω_2 — угловая скорость вращения бегуна вокруг оси z_1 (угловая скорость собственного вращения); ω — абсолютная скорость вращения.

Мгновенная ось вращения бегуна направлена по линии OA, поэтому

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_\psi + \overline{\omega}_\varphi.$$

Так как $\Delta OAC \sim \Delta OED$, то

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{AC}{OC} = \frac{R}{l},$$

где $OC = l$.

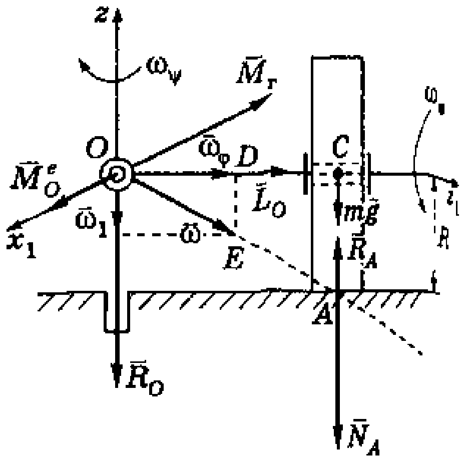
Найдем

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{l}{R}$$

или

$$\omega_\varphi = \omega_\psi \frac{l}{R}.$$

Динамические реакции R_A и R_O образуют пару сил с моментом $M_O^e = R_A l$ и равны гироскопическому моменту:



$$M_г = I_{Cz_1}\omega_1\omega_2,$$

где $I_{Cz_1} = m\rho^2$. Тогда

$$M_г = \frac{m\rho^2\omega_1^2 l}{R}.$$

Найдем динамические реакции:

$$R_A = R_O = \frac{M_г}{l} = \frac{m\rho^2\omega_1^2}{R}.$$

Гироскопическое давление равно по модулю динамическим реакциям, т.е.

$$N_A = R_A = \frac{m\rho^2\omega_1^2}{R}.$$

Следовательно, полное давление бегуна на дно

$$N = mg + N_A = m\left(g + \frac{\rho^2\omega_1^2}{R}\right),$$

где $\omega_1 = \dfrac{\pi n}{30} = 2\pi.$

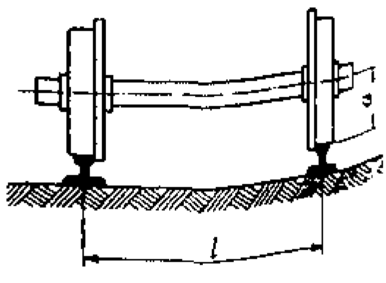
Подставив численные значения в это выражение, получим

$$N = 1200\left(9{,}81 + \frac{0{,}4^2 \cdot 4\pi^2}{0{,}5}\right) = 26\ 900\ (\text{Н}) = 26{,}9\ (\text{кН}).$$

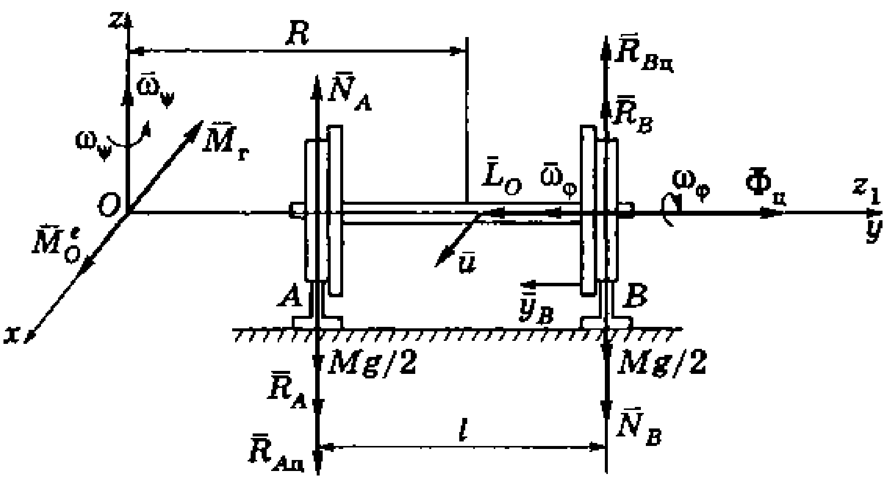
Ответ: $N = 26{,}9$ кН.

Задача 40.8

Колесный скат массы $M = 1400$ кг, радиуса $a = 75$ см и с радиусом инерции относительно своей оси $\rho = \sqrt{0{,}55}\,a$ движется равномерно со скоростью $v = 20$ м/с по закруглению радиуса $R = 200$ м, лежащему в горизонтальной плоскости. Определить силу давления ската на рельсы, если расстояние между рельсами $l = 1{,}5$ м.



ı начало подвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ в точке O. силами являются реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ рельсов и сила тяже- $Mg/2$ (см. рисунок).



скат вращается вокруг оси z против часовой стрелки. Тогда ψ направлен вверх, а вектор $\overline{\omega}_\varphi$ — влево. Найдем динамиче- :ции. Применим теорему Резаля:

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \overline{M}^e_O = \overline{u} = \overline{\omega}_\psi \times \overline{L}_O = \overline{\omega}_\psi \times I_{z_1} \overline{\omega}_\varphi.$$

целим момент внешних сил:

$$M^e_O = R_B l = I_{z_1} \omega_\psi \omega_\varphi.$$

да

$$R_B = \frac{I_{z_1} \omega_\psi \omega_\varphi}{l},$$

$$= \frac{v}{R}; \; I_{z_1} = M\rho^2 = 0{,}55a^2M; \; \omega_\varphi = \frac{v}{a}.$$

а

$$R_B = \frac{M\rho^2 v^2}{Ral} = \frac{0{,}55Mav^2}{Rl} = \frac{1400 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}75 \cdot 20^2}{200 \cdot 1{,}5} = 770 \text{ (Н)}$$

влена вверх, а $R_A = R_B$, но направлена вниз.

Однако при движении колесного ската по закруглению возникают дополнительные динамические реакции за счет центробежной силы инерции, которая направлена по оси Oz_1:

$$\Phi_ц = Ma_n = M\frac{v^2}{R}.$$

Обозначим динамические реакции, возникающие вследствие силы инерции $R_{Aц}$ и $R_{Bц}$. Тогда согласно принципу Даламбера запишем

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = R_{Bц}l - a\Phi_ц = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = R_{Aц}l - a\Phi_ц = 0. \qquad (2)$$

Откуда

$$R_{Aц} = R_{Bц} = \frac{a\Phi_ц}{l} = \frac{aMv^2}{Rl}.$$

Подставим численные значения и получим

$$R_{Aц} = R_{Bц} = \frac{1400\cdot 20^2\cdot 0{,}75}{200\cdot 1{,}5} = 1400\ (\text{Н}).$$

Так как гироскопические и центробежные динамические реакции направлены в одну сторону, то

$$R_A = R_B = R_A + R_{Aц} = 770 + 1400 = 2170\ (\text{Н}).$$

Статические реакции

$$R_A^{ст} = R_B^{ст} = \frac{Mg}{2} = \frac{1400\cdot 9{,}8}{2} = 6860\ (\text{Н}).$$

Обе реакции направлены вверх.

Суммарные давления под колесами равны суммарным реакциям и направлены противоположно им.

Тогда

$$|\overline{N}_A| = R_A^{ст} - R_A = 6{,}86 - 2{,}17 = 4{,}69\ (\text{кН}),$$

$$|\overline{N}_B| = R_A^{ст} + R_A = 6{,}86 + 2{,}17 = 9{,}03\ (\text{кН}).$$

Примечание. Если поменять направление поворота ската на противоположное, принятому выше, то величина давления под колесами будет

$$N_A = 6{,}86 + 2{,}17 = 9{,}03 \text{ (кН)},$$

$$N_B = 6{,}86 - 2{,}17 = 4{,}69 \text{ (кН)}.$$

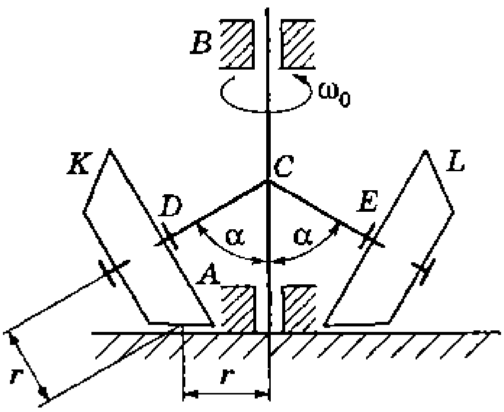
Поэтому в общем виде можно записать так:

$$N = 6{,}86 \pm 2{,}17 \text{ кН}.$$

Ответ: $N = 6{,}87 \pm 0{,}77$ кН.

Задача 40.9

На рисунке изображен узел поворотной части разводного моста. Вал AB с шарнирно прикрепленными к нему под углом α стержнями CD и CE вращается с угловой скоростью ω_0. При этом конические шестерни K и L, свободно насаженные на стержни CD и CE, катятся без скольжения по неподвижной плоской горизонтальной шестерне.



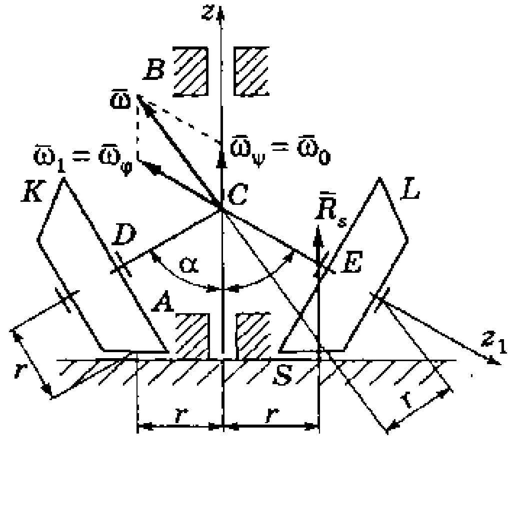
Определить силу дополнительного динамического давления шестерен K и L массы M каждая на неподвижную горизонтальную шестерню, если радиусы всех шестерен равны r. Подвижные шестерни считать сплошными однородными дисками.

Решение

Найдем угловую скорость вращения ω_φ шестерни относительно оси z_1. Учтем, что

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_\psi + \bar{\omega}_\varphi = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1,$$

где $\bar{\omega}$ – абсолютная угловая скорость.



Направления угловых скоростей показаны на рисунке. Из рисунка видно, что $\omega_0 = \omega_1$, так как мгновенная ось вращения CS — биссектриса угла ACE. Найдем гироскопический момент

$$\bar{M}_\Gamma = I_{z_1}(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_0)$$

или

$$\overline{M}_г = I_{z_1}(\overline{\omega}_\varphi \times \overline{\omega}_\psi),$$

$$|\overline{M}_г| = I_{z_1}\omega_0\omega_1 \sin\alpha = I_{z_1}\omega_0^2 \sin\alpha, \quad (1)$$

где $I_{z_1} = \dfrac{Mr^2}{2}.$

Тогда выражение (1) примет вид

$$M_г = \frac{Mr^2\omega_0^2 \sin\alpha}{2}. \quad (2)$$

С другой стороны,

$$M_г = M_C^e = M_C(\overline{R}_S) = R_S r. \quad (3)$$

Из выражений (2) и (3) получим

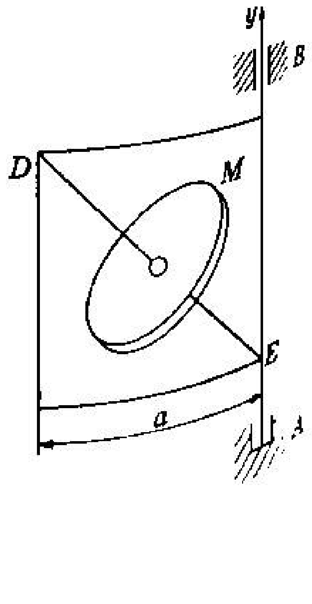
$$R_S = \frac{Mr\omega_0^2 \sin\alpha}{2}.$$

Динамическое давление $N_S = R_S$.

Ответ: $\dfrac{Mr\omega_0^2 \sin\alpha}{2}$.

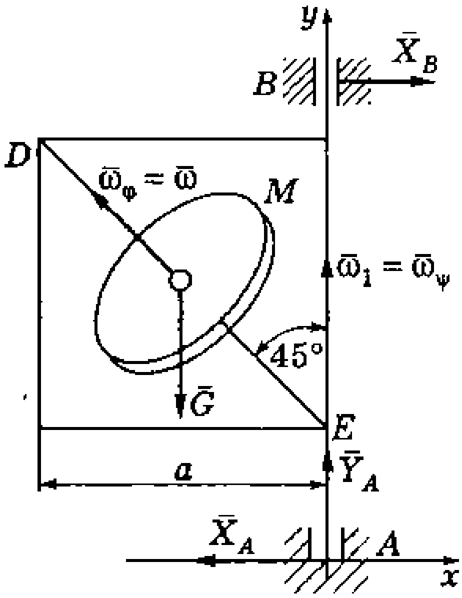
Задача 40.10

Квадратная рама со стороной $a = 20$ см вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. Вокруг оси ED, совмещенной с диагональю рамы, вращается диск M радиуса $r = 10$ см с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с. Определить отношение дополнительных сил бокового давления на опоры A и B к соответствующим статическим давлениям. Массой рамы пренебречь. Массу диска считать равномерно распределенной по ободу.



ı уравнения статики

$$\sum X_k = 0$$



$$X_B^{ст} - X_A^{ст} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0$$

$$G\frac{a}{2} - X_B^{ст}\cdot AB = 0. \qquad (2)$$

ические реакции (см. рисунок):

$$X_A^{ст} = X_B^{ст} = \frac{Ga}{2\cdot AB} = \frac{Mga}{2\cdot AB}. \qquad (3)$$

щении рамы возникает гироскопический момент

$$M_г = I\omega\omega_1 \sin 45°.$$

мические реакции

$$X_A^д = X_B^д = \frac{M_г}{AB} = \frac{\sqrt{2}I\omega_1\omega}{2\cdot AB},$$

мент инерции.

масса диска равномерно распределена по его ободу, то следовательно,

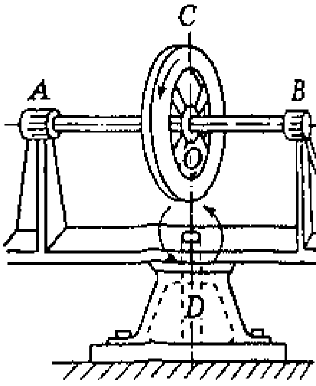
$$X_A^д = X_B^д = \frac{Mr^2\omega_1\omega_2}{\sqrt{2}\cdot AB}. \qquad (4)$$

м выражений (3) и (4) определим искомое отношение

$$\frac{X_B^д}{X_B^{ст}} = \frac{Mr^2\omega_1\omega_2}{\sqrt{2}\cdot AB} : \frac{Mga}{2\cdot AB} = \frac{\sqrt{2}r^2\omega_1\omega_2}{ga} = \frac{1{,}414\cdot 10^2\cdot 2\cdot 300}{981\cdot 20} = 4{,}32.$$

Задача 40.11

Колесо радиуса a и массы $2M$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1; ось AB вращается вокруг вертикальной оси OD, проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью ω_2; направления вращений показаны стрелками. Найти силы давления N_A и N_B на подшипники A и B, если $AO = OB = h$; масса колеса равномерно распределена по его ободу.



Решение

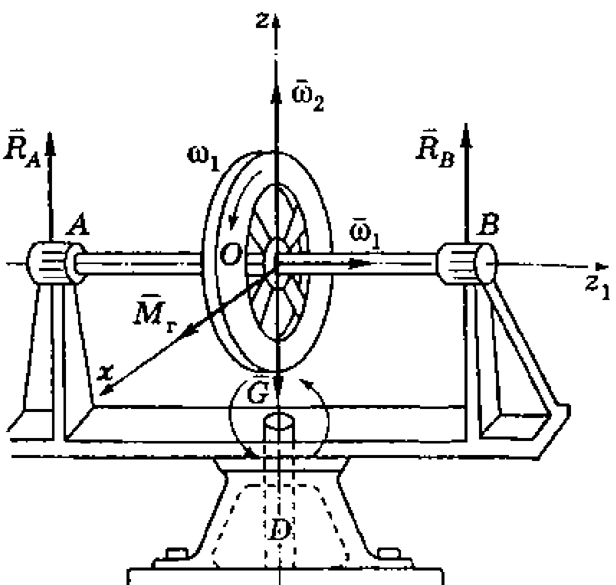
В результате одновременного вращения относительно двух осей колеса возникает гироскопический момент

$$\overline{M}_г = I_{z_1}(\overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2),$$

направленный в соответствии с правилом векторного произведения по оси x (см. рисунок). Кроме $\overline{M}_г$, к колесу приложена сила тяжести $\overline{G} = 2M\overline{g}$.

Уравнения динамического равновесия имеют вид

$$\sum Y_k = 0,$$



или

$$R_A + R_B - 2Mg = 0, \tag{1}$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0$$

или

$$-R_A h + R_B h + M_г = 0. \tag{2}$$

Так как масса колеса равномерно распределена по ободу, а угол между векторами $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ равен 90°, то

$$I_{z_1} = 2Ma^2,$$

$$M_г = 2Ma^2\omega_1\omega_2. \tag{3}$$

Умножим уравнение (1) на h и вычтем из него уравнение (2), с учетом выражения (3) получим

$$2R_A h - 2Mgh - 2Ma^2\omega_1\omega_2 = 0.$$

Следовательно,

$$R_A = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right).$$

Умножим уравнение (1) на h и прибавим к нему уравнение (2), с учетом выражения (3) получим

$$2R_B h - 2Mgh + 2Ma^2\omega_1\omega_2 = 0.$$

Откуда

$$R_B = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right),$$

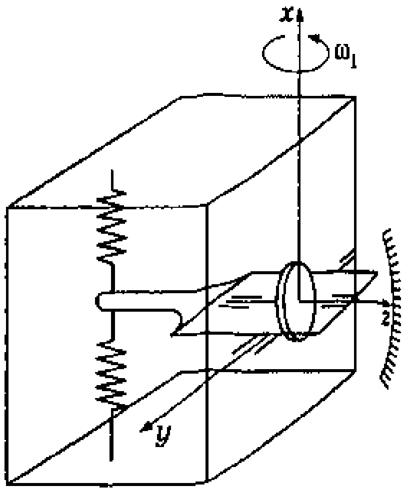
где $\omega_1 = \omega_\varphi$, $\omega_2 = \omega_\psi$.

Если $a^2\omega_1\omega_2/gh > 1$, то направление вектора $\overline{R}_B$ противоположно указанному на рисунке. Давление на подшипники A и B численно равно значениям величин реакций опор, т.е. $N_A = R_A$, $N_B = R_B$, но направлено противоположно им.

Ответ: $N_A = Mg\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$; $N_B = Mg\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$.

Задача 40.12

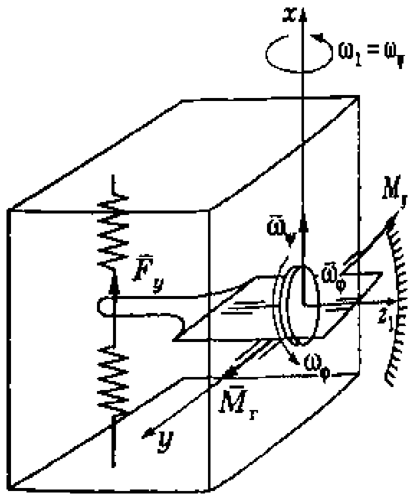
Простейший гиротахометр состоит из гироскопа, рамка которого соединена с двумя пружинами, прикрепленными к корпусу прибора. Момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения равен I, угловая скорость гироскопа равна ω. Определить угол α, на который повернется ось гироскопа вместе с его рамкой, если прибор установлен на платформе, вращающейся с угловой скоростью ω_1 вокруг оси x, перпендикулярной оси y вращения рамки. Коэффициенты жесткости пружин равны c; угол α считать малым; расстояние от оси вращения рамки до пружин равно a.



Решение

Вследствие одновременного вращения относительно двух осей на гиротахометр действует гироскопический момент

$$\overline{M}_г = I(\overline{\omega}_\varphi \times \overline{\omega}_\psi).$$



Вектор $\overline{M}_г$ направлен вдоль оси y (см. рисунок) и стремится повернуть раму вместе со стрелкой z вокруг оси y. В свою очередь пружина деформируется и возникает сила упругости, момент которой $M_y(\overline{F}_{упр})$ относительно оси y уравновешивает $M_г$, т.е.

$$M_y(\overline{F}_{упр}) = M_г. \qquad (1)$$

Так как $\overline{\omega}_\psi \perp \overline{\omega}_\varphi$ и $\sin 90° = 1$, то

$$M_г = I\omega_\psi\omega_\varphi. \qquad (2)$$

Поскольку $F_{упр} = 2ca\alpha$, то

$$M_y(F_{упр}) = F_{упр}a = 2ca^2\alpha. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в равенство (1) и получим

$$2ca^2\alpha = I\omega_1\omega.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{I\omega}{2ca^2}\omega_1,$$

где $\omega = \omega_\varphi$, $\omega_1 = \omega_\psi$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{I\omega}{2ca^2}\omega_1$.

41. Метод кинетостатики

Методические указания к решению задач

Метод кинетостатики — общий метод решения задач динамики, с помощью которого уравнениям движения, т.е. уравнениям динамики, придается вид уравнений «равновесия», т.е. уравнений статики.

Метод основан на использовании *принципа Даламбера* для материальной точки или для механической системы. В соответствии с этим принципом вводят силы инерции материальной точки или системы материальных точек, движущихся с некоторым ускорением в инерциальной системе отсчета. Силы инерции называют ***силами Даламбера*** или просто силами инерции.

Условимся обозначать силу инерции $\overline{\Phi}$, т.е. так же, как и в случае относительного движения точки, и считать, что она равна произведению массы точки на ее ускорение, взятому со знаком минус, т.е.

$$\overline{\Phi} = -m\overline{a}, \tag{41.1}$$

или в проекциях на оси декартовых координат:

$$\Phi_x = -m\ddot{x},$$
$$\Phi_y = -m\ddot{y},$$
$$\Phi_z = -m\ddot{z}. \tag{41.2}$$

При движении материальной точки по кривой силу инерции можно разложить на две составляющие: касательную силу инерции $\overline{\Phi}_\tau$ и нормальную — $\overline{\Phi}_n$, причем

$$\overline{\Phi}_\tau = -m\overline{a}_\tau,$$
$$\overline{\Phi}_n = -m\overline{a}_n, \tag{41.3}$$

где $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$; $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$.

Пусть несвободная материальная точка движется под действием равнодействующей $\overline{F}$ активных сил и равнодействующей $\overline{R}$ реакций связей, наложенных на нее. Тогда в соответствии со вторым законом динамики точка приобретает ускорение

$$\bar{a} = \frac{\bar{F} + \bar{R}}{m}. \tag{41.4}$$

Сила инерции этой точки

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(\bar{F} + \bar{R}).$$

Равенство, выражающее *принцип Даламбера для несвободной материальной точки*, можно записать следующим образом:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \tag{41.5}$$

т.е. для несвободной материальной точки в любой момент времени ее движения геометрическая сумма активных (задаваемых) сил, сил реакций связей и силы инерции равна нулю.

Принцип Даламбера для несвободной механической системы можно сформулировать так:

если ко всем точкам механической системы приложить равнодействующие активных сил и сил реакций связей, а также фиктивных сил инерции, то полученная система сил будет эквивалентна нулю, т.е. механическая система условно будет находиться в равновесии.

Из статики известно, что если под действием системы сил тело находится в равновесии, то главный вектор и главный момент этих сил относительно некоторого центра равны нулю. Поэтому *принцип Даламбера для механической системы* можно записать в виде

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \tag{41.6}$$

$$\sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) + \sum \bar{M}_O(\bar{R}_k) + \sum \bar{M}_O(\bar{\Phi}_k) = 0. \tag{41.7}$$

В уравнениях (41.6) и (41.7) указанные силы представляют собой соответственно главные векторы и главные моменты активных сил, сил реакции связей и сил инерции всех материальных точек системы.

Таким образом, геометрическая сумма главных векторов активных сил, сил реакций связей и сил инерции всех точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов этих сил относительно некоторого центра для несвободной механической системы в любой момент времени равны нулю.

В учебной литературе можно также встретить следующую формулировку принципа Даламбера для механической системы:

геометрическая сумма главных векторов внешних и внутренних сил, сил инерции точек системы, а также геометрическая сумма главных моментов этих сил относительно некоторого центра равны нулю.

Такая формулировка вполне допустима, но следует дополнительно оговорить, что в число внешних сил наряду с активными входят силы реакций внешних связей, наложенных на механическую систему. Реакции внутренних связей как силы взаимодействия между телами механической системы по свойству внутренних сил взаимно уравновешиваются. Таким образом, при составлении уравнений (41.6) и (41.7) эти силы следует исключить. Тогда получим, что

$$\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{\Phi}_k = 0, \tag{41.8}$$

$$\sum \overline{M}_O(\overline{F}_k^e) + \sum \overline{M}_O(\overline{\Phi}_k) = 0. \tag{41.9}$$

При решении задач методом кинетостатики важным является определение главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела при любом его движении. Их определение основывается на известном из статики *методе Пуансо* о приведении произвольной системы сил к заданному центру. Поэтому можно записать, что система сил при движении твердого тела эквивалентна главному вектору сил инерции $\overline{\Phi}^*$ и главному моменту $\overline{M}_C^\Phi$ этих сил относительно центра масс:

$$\overline{\Phi}^* = \sum \overline{\Phi}_k = -\sum m_k \overline{a}_k = -\sum m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = -\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k \overline{r}_k\right) =$$

$$= -\frac{d^2}{dt^2}(M\overline{r}_C) = -M\overline{a}_C, \tag{41.10}$$

$$\overline{M}_C^\Phi = \sum M_C(\overline{\Phi}_k) = -\sum (\overline{r}_k \times m_k \overline{a}_k). \tag{41.11}$$

Формулы (41.10) и (41.11) в частных случаях движения твердого тела имеют следующий вид:

- при поступательном движении

$$\overline{\Phi}^* = -M\overline{a}_C, \quad \overline{M}_C^\Phi = 0; \tag{41.12}$$

• вращении твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс тела,

$$\overline{\Phi}^* = 0, \quad \overline{M}_C^\Phi = -I_C \bar{\varepsilon}, \tag{41.13}$$

где I_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; $\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение тела;

• вращении твердого тела относительно оси, не проходящей через центр масс,

$$\overline{\Phi}^* = -M\bar{a}_C, \quad \overline{M}_O^\Phi = -I_O \bar{\varepsilon}; \tag{41.14}$$

• плоскопараллельном движении

$$\overline{\Phi}^* = -M\bar{a}_C, \quad \overline{M}_C^\Phi = -I_O \bar{\varepsilon}. \tag{41.15}$$

В случае вращения тела относительно оси, не проходящей через центр масс, и при плоскопараллельном движении главный вектор $\overline{\Phi}^*$ сил инерции приложен в центре масс. Если силы инерции точек тела привести к некоторой точке O, лежащей на оси вращения, то

$$\overline{\Phi}^* = -M\bar{a}_C,$$

но приложен он в точке O:

$$\overline{M}_O^\Phi = -I_O \bar{\varepsilon},$$

где I_O – момент инерции тела относительно оси вращения.

За центр приведения можно принять такую точку тела, относительно которой главный момент сил инерции окажется равным нулю. Тогда силы инерции всех точек будут эквивалентны одной равнодействующей силе, равной по модулю главному вектору сил инерции, линия действия которой будет отстоять от точки O на расстоянии

$$d = \frac{M_O^\Phi}{\Phi^*}.$$

К аналогичному выводу придем и в случае плоскопараллельного движения твердого тела.

Если уравнения (41.8) и (41.9) записать в виде

$$\sum \overline{F}_k^e - \frac{d\overline{K}}{dt} = 0, \tag{41.8$'$}$$

$$\sum \overline{M}_O(\overline{F}_k^e) - \frac{d\overline{L}_O}{dt} = 0, \tag{41.9'}$$

то выражение (41.8′) представляет собой теорему об изменении количества движения, а выражение (41.9′) — теорему об изменении момента количества движения системы.

Сравнивая формулы (41.8) и (41.8′), (41.9) и (41.9′), получим формулы для вычисления главного вектора и главного момента сил инерции системы через количество движения и кинетический момент:

$$\overline{\Phi}^* = \sum \overline{\Phi}_k = -\frac{d\overline{K}}{dt}, \tag{41.16}$$

$$\overline{M}_O^{\Phi} = \sum \overline{M}_O(\overline{\Phi}_k) = -\frac{d\overline{L}_O}{dt}. \tag{41.17}$$

Так как количество движения системы $\overline{K} = M\overline{v}_C$, то

$$\overline{\Phi}^* = -M\frac{d\overline{v}_C}{dt} = -M\overline{a}_C. \tag{41.10'}$$

Проецируя векторное равенство (41.17) на ось z, являющуюся осью вращения тела, получим

$$M_z^{\Phi} = \sum M_z(\overline{\Phi}_k) = -\frac{dL_z}{dt}. \tag{41.18}$$

Так как кинетический момент тела при вращении вокруг оси z $L_z = I_z\omega$, то

$$M_z^{\Phi} = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon, \tag{41.19}$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси; ε — угловое ускорение вращения тела.

По формуле (41.19) вычисляют главный момент сил инерции тела при вращении вокруг оси, проходящей через любую точку тела.

Последовательность решения задач данного параграфа:

1. Изобразить на рисунке тело или механическую систему (систему тел), движение которой рассматривается в задаче.

2. Показать все внешние силы, действующие на тело или систему тел, включая силы реакций внешних связей, а также силы инерции всех тел.

3. Главный вектор и главный момент сил инерции тел определить в зависимости от вида их движения по формулам (41.12)–(41.15), выразив их через линейное или угловое ускорение одного из тел.

4. Выбрать систему координат.

5. Составить необходимые уравнения «равновесия» (уравнения статики) для одного тела или для каждого из тел, входящих в данную механическую систему, предварительно разбив систему на отдельные тела, и показать силы взаимодействия между ними.

6. Решить составленную систему уравнений и определить искомые величины.

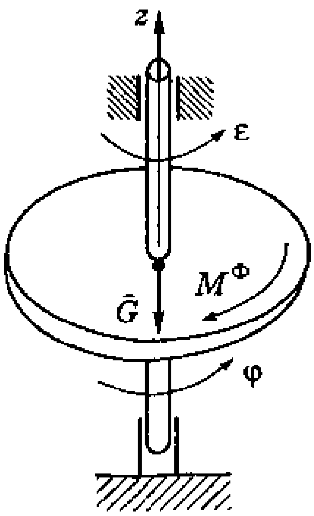
Задачи и решения

Задача 41.1

Определить силу тяжести, действующую на круглый однородный диск радиуса 20 см, вращающийся вокруг оси по закону $\varphi = 3t^2$. Ось проходит через центр диска перпендикулярно его плоскости; главный момент сил инерции диска относительно оси вращения равен 4 Н · см.

Решение

Главный момент сил инерции диска относительно оси z (см. рисунок):



$$\overline{M}^\Phi = -I_z\bar{\varepsilon}$$

или по модулю

$$M^\Phi = I_z\varepsilon. \qquad (1)$$

Момент инерции диска

$$I_z = \frac{mR^2}{2} = \frac{GR^2}{2g},$$

ускорение

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 6t.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$M^{\Phi} = \frac{GR^2}{2g} \cdot \varepsilon.$$

Откуда

$$G = \frac{2gM^{\Phi}}{\varepsilon R^2} = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 20^2 \cdot (10^{-2})^2} = 3{,}27 \text{ (Н)}.$$

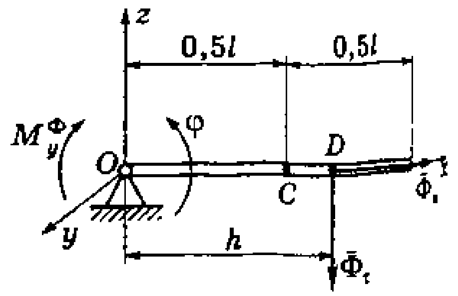
Ответ: 3,27 Н.

Задача 41.2

Тонкий прямолинейный однородный стержень длины l и массы M вращается вокруг оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец, по закону $\varphi = at^2$. Найти величины и направления равнодействующих Φ_n и Φ_τ центробежных и вращательных сил инерции частиц стержня.

Решение

Центробежные и вращательные силы инерции стержня при неравномерном вращении (см. рисунок):



$$\overline{\Phi}_n = -M\overline{a}_C^n,$$

$$\overline{\Phi}_\tau = -M\overline{a}_C^\tau, \qquad (1)$$

где $\overline{a}_C^n$ — центростремительное ускорение центра масс стержня; $\overline{a}_C^\tau$ — вращательное ускорение центра масс стержня.

Равнодействующие этих сил

$$\Phi_n = Ma_C^n, \quad \Phi_\tau = Ma_C^\tau. \qquad (2)$$

Найдем центростремительное и вращательное ускорения центра масс стержня:

$$a_C^n = \frac{1}{2}\omega^2 l,$$

$$a_C^\tau = \frac{1}{2}\varepsilon l,$$

где $\omega = 2at$; $\varepsilon = 2a$.

Тогда

$$a_C^n = 2a^2t^2l,$$

$$a_C^\tau = al. \qquad (3)$$

Подставим выражения (3) в выражения (2) и получим

$$\Phi_n = 2Ma^2lt^2,$$

$$\Phi_\tau = Mal.$$

Для определения линии действия равнодействующей вращательных сил инерции найдем главный момент сил инерции относительно оси вращения Oy:

$$M_y^\Phi = I_y\varepsilon = \frac{Ml^2}{3}\cdot 2a = \frac{2}{3}Mal^2.$$

Из равенства главного момента сил инерции и момента равнодействующей вращательных сил инерции относительно точки O определим расстояние от линии действия равнодействующей $\overline{\Phi}_\tau$ до оси вращения:

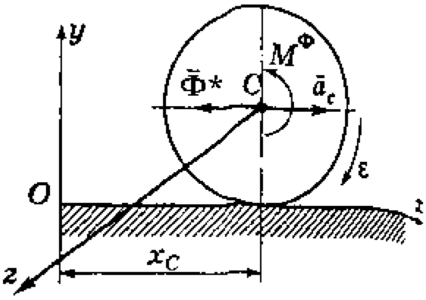
$$h = \frac{M_y^\Phi}{\Phi_\tau} = \frac{\frac{2}{3}Mal^2}{Mal} = \frac{2}{3}l.$$

Ответ: равнодействующая вращательных сил инерции $\Phi_\tau = Mal$ направлена перпендикулярно стержню на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от оси вращения; равнодействующая центробежных сил инерции $\Phi_n = 2Ma^2lt^2$ направлена вдоль стержня от оси вращения.

Задача 41.3

Колесо массы M и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу. Определить главный вектор и главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс колеса перпендикулярно плоскости движения. Колесо считать сплошным однородным диском. Центр масс C движется по закону $x_C = at^2/2$, где a – постоянная положительная величина. Ось x направлена вдоль рельса.

Решение



Колесо совершает плоское движение (см. рисунок), следовательно, силы инерции его приводятся к главному вектору $\overline{\Phi}^*$ и главному моменту сил инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости движения, где точка C — центр масс колеса.

Значение главного вектора сил инерции по модулю

$$\Phi^* = Ma_C = M\ddot{x}_C = Ma,$$

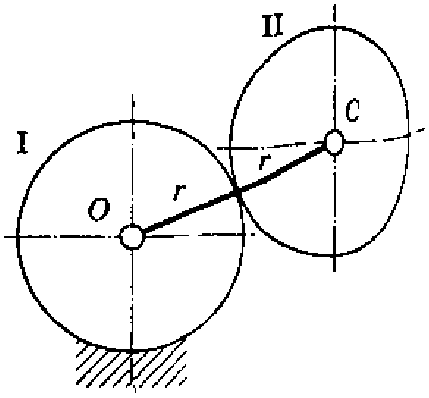
вектор $\overline{\Phi}^*$ направлен противоположно вектору $\bar{a}_C$.

Тогда главный момент сил инерции

$$M^{\Phi} = I_{Cz}\varepsilon = \frac{Mr^2}{2}\,\frac{\ddot{x}_C}{r} = \frac{Mr^2}{2}\,\frac{a}{r} = \frac{Mar}{2}.$$

Ответ: главный вектор сил инерции равен по модулю Ma и направлен параллельно оси в отрицательном направлении; главный момент сил инерции равен по абсолютной величине $1/2Mar$.

Задача 41.4



Определить главный вектор и главный момент сил инерции подвижного колеса II планетарного механизма относительно оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости движения. Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω. Масса колеса II равна M. Радиусы колес равны r.

Решение

Колесо II совершает плоское движение, поэтому его силы инерции приводятся к главному вектору $\overline{\Phi}^*$, приложенному в центре масс C (см. рисунок):

$$\bar{\Phi}^* = M\bar{a}_C,$$

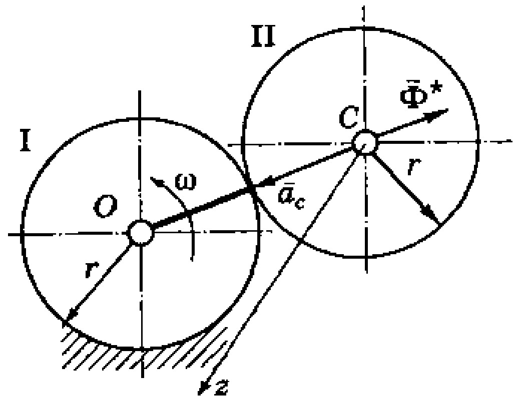
$$\Phi^* = Ma_C = M\omega^2 2r = 2M\omega^2 r$$

к главному моменту сил инерции $\bar{M}^{\Phi}$.

В этом случае

$$M^{\Phi} = I_{C_z}\varepsilon = 0,$$

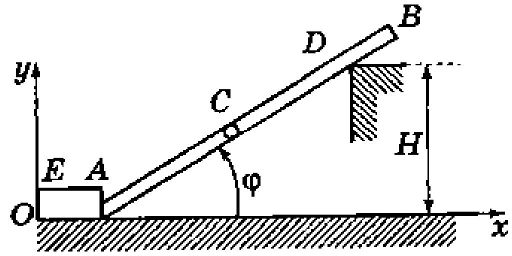
так как $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$.



Ответ: главный вектор сил инерции параллелен кривошипу OC и равен $2M\omega^2 r$; главный момент сил инерции равен нулю.

Задача 41.5

Конец A однородного тонкого стержня AB длины $2l$ и массы M перемещается по горизонтальной направляющей с помощью упора E с постоянной скоростью v, причем стержень все время опирается на угол D. Определить главный вектор и главный момент сил инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс C стержня перпендикулярно плоскости движения, в зависимости от угла φ.



Решение

Главный вектор сил инерции

$$\bar{\Phi} = -M\bar{a}_C.$$

Главный момент сил инерции

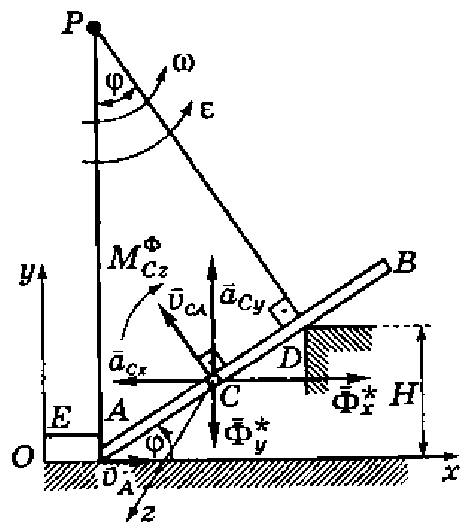
$$\bar{M}^{\Phi} = -I_C\bar{\varepsilon}.$$

Стержень AB совершает плоское движение, точка P — МЦС (см. рисунок).

Угловая скорость стержня

$$\omega = \frac{v_A}{AP},$$

где $AP = \dfrac{AD}{\sin\varphi}$, $\quad AD = \dfrac{H}{\sin\varphi}$.



Тогда

$$\omega = \frac{v_A \sin^2\varphi}{H}.$$

Угловое ускорение стержня

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{v_A}{H}\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2v_A}{H}\omega\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2v_A^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Главный момент сил инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости движения,

$$M_{Cz}^{\Phi} = -I_{Cz}\,\varepsilon_z,$$

где $I_{Cz} = \dfrac{Ml^2}{3}$; $\varepsilon_z = \varepsilon$.

Тогда

$$M_{Cz}^{\Phi} = -\frac{2v_A^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi\cdot\frac{Ml^2}{3} = -\frac{2}{3}Ml^2\frac{v_A^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Скорость центра масс C определим по формуле сложения скоростей при плоском движении:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}$$

или

$$v_{Cx} = v_A - v_{CA}\sin\varphi,$$

$$v_{Cy} = v_{CA}\cos\varphi,$$

где $v_{CA} = \omega l = \dfrac{v_A l}{H}\sin^2\varphi$.

Тогда

$$v_{Cx} = v_A - \frac{v_A l}{H}\sin^3\varphi,$$

$$v_{Cy} = \frac{v_A l}{H}\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Продифференцируем эти выражения по времени, приняв, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

и получим проекции ускорений центра масс C на оси x и y:

$$a_{Cx} = -\frac{v_A l}{H}\cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi\cdot\omega = -3\,\frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^4\varphi\cos\varphi,$$

$$a_{Cy} = \frac{v_A l}{H}(2\sin\varphi\cos^2\varphi\cdot\omega - \sin^2\varphi\sin\varphi\cdot\omega) = \frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^3\varphi(3\cos^2\varphi - 1).$$

Проекции главного вектора сил инерции на оси x и y

$$\Phi_x^* = -Ma_{Cx} = 3M\frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^4\varphi\cos\varphi,$$

$$\Phi_y^* = -Ma_{Cy} = M\frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^3\varphi(1 - 3\cos^2\varphi).$$

Ответ: $\Phi_x^* = 3M\frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^4\varphi\cos\varphi$; $\Phi_y^* = M\frac{v_A^2 l}{H^2}\sin^3\varphi(1-3\cos^2\varphi)$;

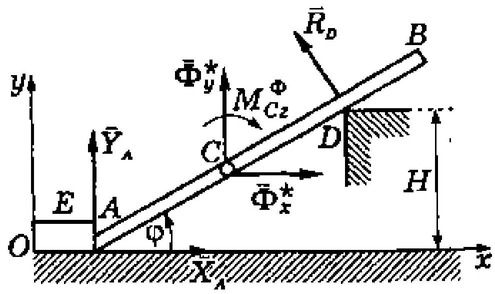
$$M_{Cz}^{\Phi} = -\frac{2}{3}Ml^2\frac{v_A^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

Задача 41.6

По данным предыдущей задачи определить динамическое давление N_D стержня на угол D.

Решение

Для определения силы динамического давления $\bar{N}_D$ стержня на угол D применим принцип Даламбера. Покажем на рисунке динамические силы: силы инерции $\bar{\Phi}_x^*$ и $\bar{\Phi}_y^*$, момент сил инерции M_{Cz}^{Φ}, силы реакций $\bar{R}_D$, $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$.



Силу реакции $\bar{R}_D$ найдем из уравнения

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0,$$

$$R_D\cdot AD - M_{Cz}^{\Phi} - \Phi_x^*\cdot AC\cdot\sin\varphi + \Phi_y^*\cdot AC\cdot\cos\varphi = 0$$

или

$$R_D = \frac{M_{Cz}^{\Phi} + \Phi_x^* \cdot AC \cdot \sin\varphi - \Phi_y^* \cdot AC \cdot \cos\varphi}{AD}.$$

Используя результаты решения предыдущей задачи, получим

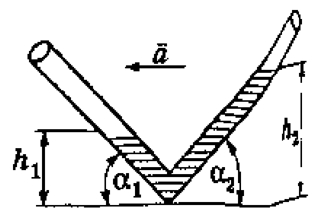
$$R_D = \left(\frac{2}{3} Ml^2 \frac{v^2}{H^2} \sin^3\varphi\cos\varphi + 3M\frac{v^2 l}{H^2}\sin^4\varphi\cos\varphi \cdot l\sin\varphi -\right.$$

$$\left. - M\frac{v^2 l}{H^2}\sin^3\varphi(1-\cos^2\varphi)\, l\cos\varphi\right) \Big/ H/\sin\varphi =$$

$$= \frac{Ml^2v^2}{H^3}\sin^4\varphi\cos\varphi\left(\frac{2}{3} + 3\sin^2\varphi - 1 + 3\cos^2\varphi\right) = \frac{8Mv^2l^2}{3H^3}\sin^4\varphi\cos\varphi.$$

О т в е т: $N_D = \dfrac{8}{3}\dfrac{v^2 l^2}{H^3} M \sin^4\varphi\cos\varphi.$

Задача 41.7



Для экспериментального определения замедления троллейбуса применяется жидкостный акселерометр, состоящий из изогнутой трубки, наполненной маслом и расположенной в вертикальной плоскости. Определить величину замедления троллейбуса при торможении, если при этом уровень жидкости в конце трубки, расположенном в направлении движения, повышается до величины h_2, а в противоположном конце понижается до h_1. Положение акселерометра указано на рисунке: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, $h_1 = 25$ мм, $h_2 = 75$ мм.

Р е ш е н и е

Применим принцип Даламбера для столбов жидкости в различных частях трубки в отдельности (рис. 1 и 2). Покажем на рисунках силы инерции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$, реакции $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ стенок трубки, силы тяжести $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$, силы гидростатического давления жидкости $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$.

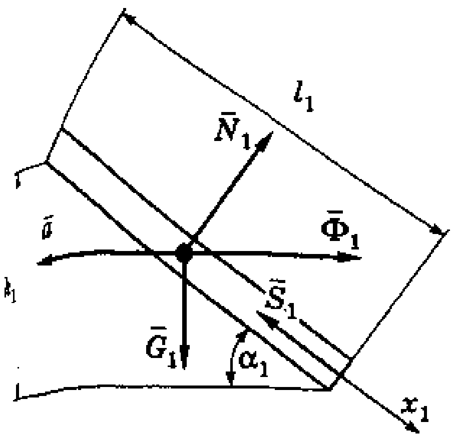


Рис. 1

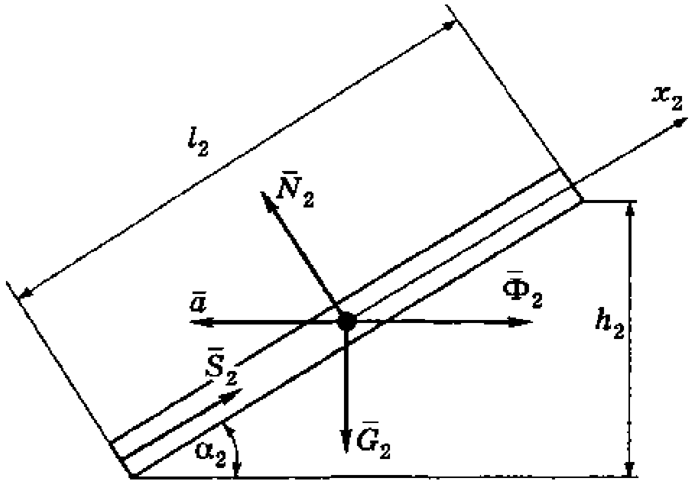


Рис. 2

Выберем оси координат x_1 и x_2, тогда

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{kx_1} &= 0,\\ \sum F_{kx_2} &= 0;\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}-S_1+\Phi_1\cos\alpha_1+G_1\sin\alpha_1 &= 0,\\ S_2+\Phi_2\cos\alpha_2-G_2\sin\alpha_2 &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\Phi_1=m_1a$; $\Phi_2=m_2a$; $G_1=m_1g$; $G_2=m_2g$.

Выразим массу жидкости в обоих концах трубки через ее плотность ρ:

$$\left.\begin{aligned}m_1 &= \rho l_1=\rho\frac{h_1}{\sin\alpha_1},\\ m_2 &= \rho l_2=\rho\frac{h_2}{\sin\alpha_2}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Сложим уравнения системы (1), подставив выражения (2):

$$\rho\frac{h_1}{\sin\alpha_1}a\cos\alpha_1+\rho\frac{h_1}{\sin\alpha_1}g\sin\alpha_1+\rho\frac{h_2}{\sin\alpha_2}a\cos\alpha_2-\rho\frac{h_2}{\sin\alpha_2}g\sin\alpha_2=0.$$

Откуда

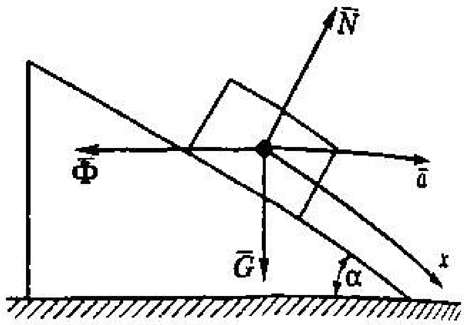
$$a=\frac{g(h_2-h_1)}{h_2\operatorname{ctg}\alpha_2+h_1\operatorname{ctg}\alpha_1}=\frac{g(h_2-h_1)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{h_2\operatorname{tg}\alpha_1+h_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{(0{,}075-0{,}025)g}{0{,}075+0{,}025}=0{,}5g.$$

Ответ: $a=\dfrac{g(h_2-h_1)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{h_2\operatorname{tg}\alpha_1+h_1\operatorname{tg}\alpha_2}=0{,}5g.$

Задача 41.8

С каким ускорением должна двигаться по горизонтальной плоскости призма, боковая грань которой образует угол α с горизонтом, чтобы груз, лежащий на боковой грани, не перемещался относительно призмы?

Решение



При рассмотрении равновесия груза на призме применим принцип Даламбера. Покажем на рисунке силы, действующие на груз: силу тяжести $\overline{G}$, силу инерции $\overline{\Phi} = -m\bar{a}$, реакцию $\overline{N}$ плоскости.

Тогда $\sum F_{kx} = 0$, т.е.

$$G\sin\alpha - \Phi\cos\alpha = 0$$

или

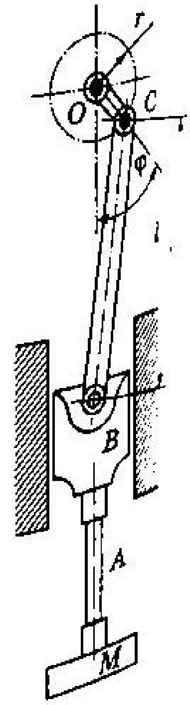
$$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0.$$

Откуда ускорение призмы

$$a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Ответ: $a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Задача 41.9

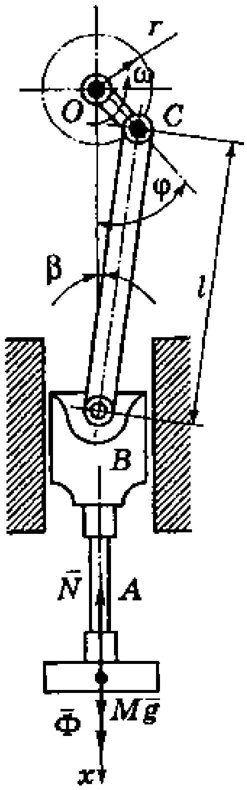


Для исследования влияния быстро чередующихся растягивающих и сжимающих сил на металлический брусок (испытание на усталость) испытуемый брусок A прикрепляют за верхний конец к ползуну B кривошипного механизма BCO, а к нижнему концу подвешивают груз массы M. Найти силу, растягивающую брусок, в том случае, когда кривошип OC вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω.

Указание. Выражение $\sqrt{1-(r/l)^2\sin^2\varphi}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение r/l в степени выше второй.

Решение

Найдем координату точки B. Примем, что $\angle CBO = \beta$.



Тогда

$$OB = r\cos\varphi + l\cos\beta. \qquad (1)$$

По теореме синусов:

$$\frac{r}{\sin\beta} = \frac{l}{\sin\varphi}$$

или

$$\sin\beta = \frac{r\sin\varphi}{l}.$$

С учетом того, что

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi},$$

согласно формуле (1) получим

$$OB = r\cos\varphi + l\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}. \qquad (2)$$

Обозначим

$$\frac{r}{l} = \lambda.$$

С учетом того, что $\frac{r}{l} << 1$, $\varphi = \omega t$, а $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} = 1-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi$, выражение (2) примет вид

$$OB = r\cos\varphi + l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi} = r\cos\varphi + l\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\varphi\right) =$$

$$= r\left(\cos\varphi + \frac{\lambda}{4}\cos 2\varphi\right) + l - \frac{\lambda}{4}r =$$

$$= r\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right) + l - \frac{\lambda r}{4}. \qquad (3)$$

Продифференцируем выражение (3) по времени дважды:

$$v_B = \frac{d}{dt}(OB) = r\omega\left(-\sin\omega t - \frac{\lambda}{2}\sin 2\omega t\right),$$

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = r\omega^2(-\cos\omega t - \lambda\cos 2\omega t).$$

Приложим к системе активную силу $M\bar{g}$ и силу инерции $\bar{\Phi}$ и найдем

$$\Phi = Ma_B = Mr\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t).$$

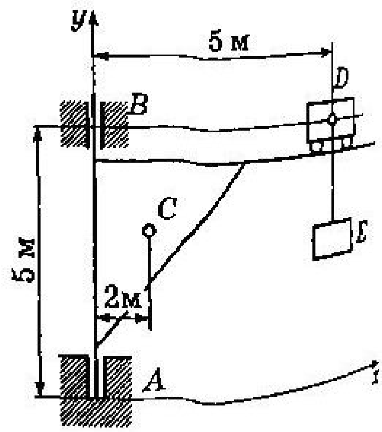
Тогда сила, растягивающая брусок,

$$N = Mg + \Phi = Mg + Mr\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right).$$

Ответ: $Mg + Mr\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

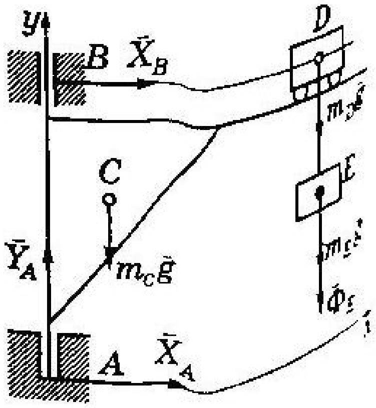
Задача 41.10

Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана при поднимании груза E массы 3 т с ускорением $1/3g$. Масса крана равна 2 т, а его центр масс находится в точке C. Масса тележки D равна 0,5 т. Кран и тележка неподвижны. Размеры указаны на рисунке.



Решение

Покажем на рисунке активные силы, силы реакций связей X_A, Y_A, X_B и силы инерции. Определим силу инерции:



$$\Phi_E = m_E a_E = 3000\cdot\frac{1}{3}g = 1000g.$$

Составим уравнения равновесия, согласно принципу Даламбера:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B = 0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - (m_C + m_E + m_D)g - \Phi_E = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -5X_B - 2m_C g - 5(m_E + m_D)g - 5\Phi_E = 0. \tag{3}$$

Из уравнения (2) найдем

$$Y_A = (m_C + m_E + m_D)g + \Phi_E =$$

$$= (2000 + 3000 + 500)g + 1000g = 63\ 900\ (\text{Н}).$$

Из уравнения (3)

$$X_B = -\frac{1}{5}[2m_C g + 5(m_E + m_D)g + 5\Phi_E] =$$

$$= -\frac{1}{5}[2000g \cdot 2 + (500 + 3000)g \cdot 5 + 1000g \cdot 5] = -52\ 100\ (\text{Н}).$$

Из уравнения (1) следует, что

$$X_A = -X_B = 52\ 100\ \text{Н}.$$

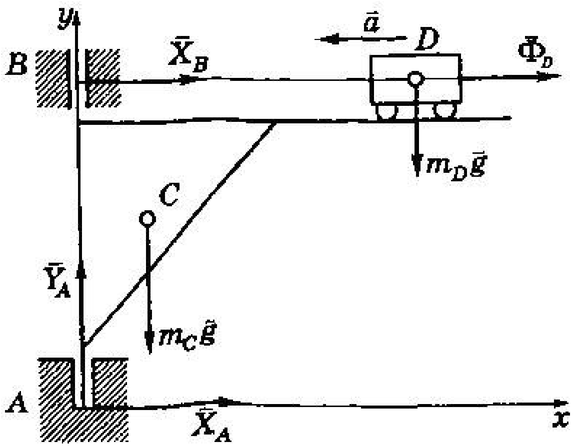
Ответ: $X_A = -X_B = 52,1$ кН; $Y_A = 63,9$ кН.

Задача 41.11

Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана, рассмотренного в предыдущей задаче, при перемещении тележки влево с ускорением $0,5g$ при отсутствии груза E. Центр масс тележки находится на уровне опоры B.

Решение

Покажем на рисунке активные силы, силы реакций связей X_A, Y_A, X_B и силы инерции.



Определим силу инерции тележки

$$\Phi_D = m_D a_D = 0,5 m_D g =$$

$$= 250g = 250 \cdot 9,8 = 2450\ (\text{Н}).$$

Составим три уравнения согласно принципу Даламбера:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + \Phi_D = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - m_C g - m_D g = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = -5X_B - 2m_C g - 5m_D g - 5\Phi_D = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) найдем

$$Y_A = g(m_C + m_D) = 9{,}8\,(2000 + 500) = 24\ 500 \text{ (Н)}.$$

Из уравнения (3)

$$X_B = -\frac{1}{5}(2m_C g + 5m_D g + 5\Phi_D) =$$

$$= -\frac{1}{5}(2000 \cdot 2 + 500 \cdot 5 + 250 \cdot 5)\,9{,}8 = -15\ 190 \text{ (Н)}.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$X_A = -X_B - \Phi_D.$$

Тогда

$$X_A = 15\ 190 - 2450g = 12\ 750 \text{ (Н)}.$$

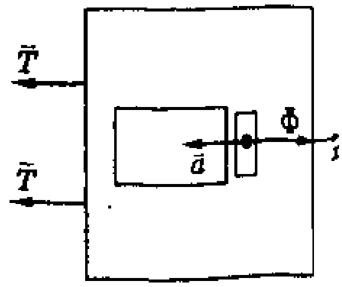
Ответ: $X_A = 12{,}8$ кН; $X_B = -15{,}2$ кН; $Y_A = 24{,}5$ кН.

Задача 41.12

На паром, привязанный к берегу двумя параллельными канатами, въезжает грузовик массы 7 т со скоростью 12 км/ч; тормоза останавливают грузовик на протяжении 3 м. Предполагая, что сила трения колес о настил парома постоянна, определить натяжение канатов. Массой и ускорением парома пренебречь.

Решение

Покажем на рисунке действующие активные силы: натяжение канатов T и силу инерции $\Phi = ma$.



Найдем ускорение по формулам кинематики:

$$v_0 - at = 0, \quad (1)$$

$$v_0 t - \frac{at^2}{2} = s. \quad (2)$$

Из уравнения (1)

$$t=\frac{v_0}{a}.$$

Подставим это значение в формулу (2):

$$\frac{v_0^2}{a}-\frac{v_0^2}{2a}=s.$$

Откуда

$$a=\frac{v_0^2}{2s}=\left(\frac{12\ 000}{3600}\right)^2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}=1{,}85\ (\text{м/с}^2).$$

Тогда определим силу инерции

$$\Phi=ma=7000\cdot 1{,}85=12\ 950\ (\text{Н}).$$

Затем составим уравнение:

$$\sum F_{kx}=\Phi-2T=0$$

и определим натяжение канатов

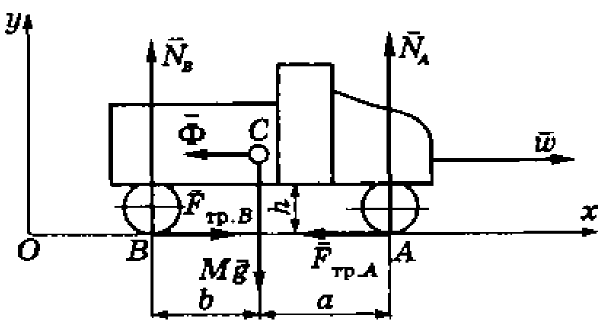
$$T=\frac{\Phi}{2}=6475\ (\text{Н}).$$

Ответ: $T=6{,}48$ кН.

Задача 41.13

Автомобиль массы M движется прямолинейно с ускорением w. Определить вертикальное давление передних и задних колес автомобиля, если его центр масс C находится на высоте h от поверхности грунта. Расстояния передней и задней осей автомобиля от вертикали, проходящей через центр масс, соответственно равны a и b. Массами колес пренебречь. Как должен двигаться автомобиль, чтобы давления передних и задних колес оказались равными?

Решение.



Покажем на рисунке активные силы, реакции связей N_A, N_B и силу инерции. Сила инерции

$$\Phi=Mw.$$

Составим уравнения согласно принципу Даламбера:

$$\sum F_{ky} = N_B + N_A - Mg = 0, \tag{1}$$

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = \Phi h + N_A(a+b) - Mgb = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (2) найдем

$$N_A = \frac{Mgb - \Phi h}{a+b} = \frac{M(gb - wh)}{a+b},$$

из уравнения (1)

$$N_B = Mg - N_A = \frac{M(ga + wh)}{a+b}.$$

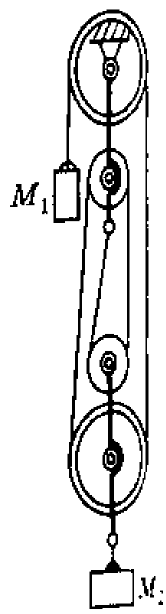
Ускорение автомобиля найдем из равенства $N_A = N_B$:

$$\frac{M(ga - wh)}{a+b} = \frac{M(ga + wh)}{a+b},$$

$$w = -\frac{g(a-b)}{2h}.$$

Ответ: $N_A = \dfrac{M(gb - wh)}{a+b}$; $N_B = \dfrac{M(ga + wh)}{a+b}$; при торможении автомобиля с замедлением $w = \dfrac{g(a-b)}{2h}$.

Задача 41.14



С каким ускорением a опускается груз массы M_1, поднимая груз массы M_2 с помощью полиспаста, изображенного на рисунке? Каково условие равномерного движения груза M_1? Массами блоков и троса пренебречь.

Указание. Ускорение груза M_2 в четыре раза меньше ускорения груза M_1.

Решение

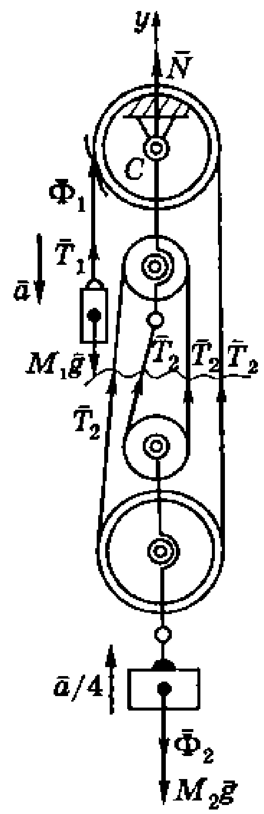
Применим принцип Даламбера. Для этого мысленно остановим движущуюся систему: добавим к действую-

...им на нее силам силы инерции $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$, направленные в противоположную сторону ускорениям движущихся грузов массы M_1 и M_2 (см. рисунок).

В соответствии с указанием $a_1 = a$, $a_2 = a/4$. Тогда

$$\Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 a,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = \frac{M_2 a}{4}. \qquad (1)$$



Рассмотрим движение груза массой M_1. На основании принципа освобождаемости от связей заменим действие троса его реакций $\overline{T}_1$. Применим принцип Даламбера и составим уравнение «равновесия» груза в проекции на ось y под действием силы тяжести $M_1\bar{g}$, силы инерции $\overline{\Phi}_1$ и силы $\overline{T}_1$:

$$\sum Y_i = 0$$

или

$$T_1 + \Phi_1 - M_1 g = 0. \qquad (2)$$

Откуда

$$T_1 = M_1 g - \Phi_1.$$

Рассмотрим теперь «равновесие» груза массой M_2 и системы подвижных блоков:

$$\sum Y_i = 0 \quad \text{или} \quad 4T_2 - M_2 g - \Phi_2 = 0. \qquad (3)$$

Откуда

$$T_2 = \frac{M_2 g + \Phi_2}{4}.$$

Учитывая, что $T_2 = T_1$, получим

$$4(M_1 g - \Phi_1) = M_2 g + \Phi_2. \qquad (4)$$

Подставим выражения (1) в формулу (4) и определим ускорение груза массой M_1:

$$4M_1 g - 4M_1 a = M_2 g + M_2 \frac{a}{4},$$

$$a = 4g\frac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}.$$

При равномерном движении $a = 0$, следовательно,

$$4M_1 - M_2 = 0$$

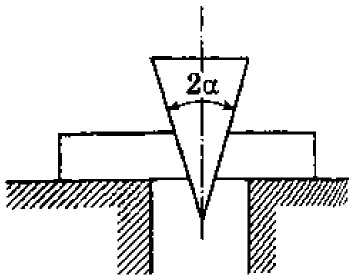
или

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $a = 4g\dfrac{4M_1 - M_2}{16M_1 + M_2}$; $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{1}{4}$.

Задача 41.15

Гладкий клин массы M и с углом 2α при вершине раздвигает две пластины массы M_1 каждая, лежащие в покое на гладком горизонтальном столе. Написать уравнение движения клина и пластин и определить силу давления клина на каждую из пластин.



Решение

Рассмотрим движение клина. Действующие на клин силы реакций пластин $\overline{N}$ (см. рис. 1) равны между собой, так как равны массы пластин. В результате клин будет двигаться вертикально вниз с некоторым ускорением $\overline{a}$.

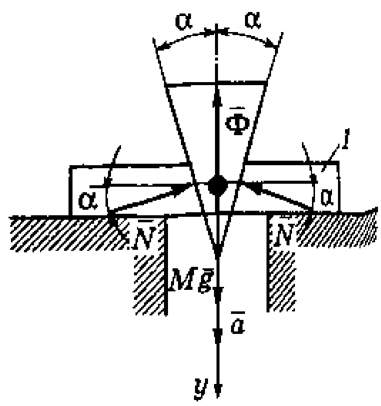


Рис. 1

Мысленно остановим движение клина, добавив к действующим силам силу инерции $\overline{\Phi}$, противоположно направленную ускорению $\overline{a}$.

На основании принципа Даламбера, действующая на клин система сил находится в равновесии. Составим уравнение:

$$\sum Y_i = 0$$

или

$$Mg - \Phi + 2N\sin\alpha = 0. \tag{1}$$

$$\Phi = Ma. \tag{2}$$

нив принцип Даламбера для правой
1 (рис. 2), запишем уравнение:

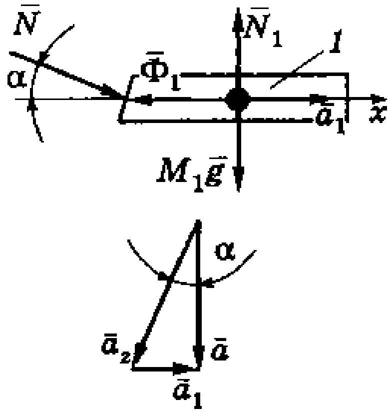


Рис. 2

$$\sum X_i = 0$$

$$N\cos\alpha - \Phi_1 = 0. \tag{3}$$

ıнерции в этом случае

$$\Phi_1 = M_1 a_1. \tag{4}$$

. 1 получим зависимость между a и a_1:

$$a_1 = a\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{5}$$

ıвнения (3)

$$N = \frac{\Phi_1}{\cos\alpha}.$$

гом выражений (4) и (5)

$$N = \frac{M_1 a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}. \tag{6}$$

:авим выражения (6) и (2) в уравнение (1):

$$Mg - Ma + 2M_1 a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = 0.$$

: учетом того, что

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha},$$

ıм

$$a = g\frac{M}{M + 2M_1\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} = g\frac{M\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{M\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 2M_1\,\mathrm{tg}\,\alpha}. \tag{7}$$

н движения клина:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

рение a определяется по формуле (7).
ıластины (1) получим

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2},$$

$a\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

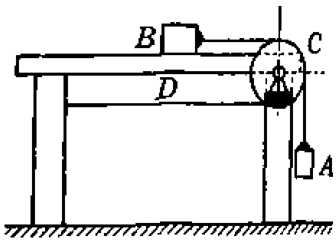
Сила давления

$$N = \frac{M_1 a_1}{\cos\alpha}.$$

О т в е т: уравнение движения клина: $s = \frac{at^2}{2}$, где $a = g\frac{M\operatorname{ctg}\alpha}{M\operatorname{ctg}\alpha + 2M_1\operatorname{tg}\alpha}$; уравнение движения пластин: $s_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$, где $a_1 = a\operatorname{tg}\alpha$; сила давления $N = \frac{M_1 a_1}{\cos\alpha}$.

Задача 41.16

Груз A массы M_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B массы M_2. Определить силу давления стола D на пол, если масса стола равна M_3. Массой нити пренебречь.



Р е ш е н и е

Сначала рассмотрим механическую систему, включающую стол D, блок C и грузы A и B. Мысленно остановим движение грузов, добавив к действующим на систему внешним силам силы инерции: $\bar{\Phi}_1 = -M_1\bar{a}_1$, $\bar{\Phi}_2 = -M_2\bar{a}_2$ (рис. 1). Так как по модулю $a_1 = a_2 = a$, то

$$\Phi_1 = M_1 a, \quad \Phi_2 = M_2 a. \qquad (1)$$

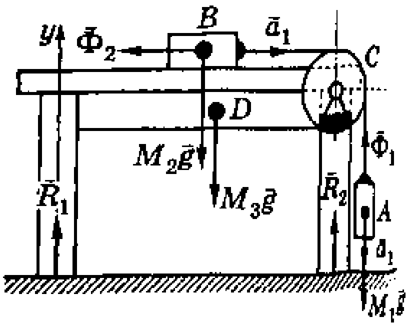


Рис. 1

В соответствии с принципом Даламбера, полученная механическая система является уравновешенной. В частности, сумма проекций всех сил на вертикальную ось y будет равна нулю, и тогда

$$R - M_1 g - M_2 g - M_3 g + \Phi_1 = 0, \qquad (2)$$

где R — суммарная реакция со стороны пола на ножки стола.

Из уравнения (2) с учетом выражений (1) найдем

$$R=(M_1+M_2+M_3)g-M_1a. \qquad (3)$$

Далее рассмотрим движение груза A (рис. 2). На основании принципа освобождаемости от связей заменим действие нити ее натяжением $\overline{T}_A$.

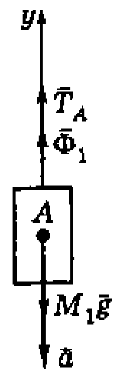


Рис. 2

Применим принцип Даламбера и составим уравнение «равновесия» груза в проекции на ось y под действием силы тяжести $M_1\overline{g}$, силы инерции $\overline{\Phi}_1$ и силы $\overline{T}_A$:

$$\sum Y_i=0$$

или

$$T_A+\Phi_1-M_1g=0. \qquad (4)$$

Из уравнения (4)

$$T_A=M_1g-\Phi_1=M_1g-M_1a. \qquad (5)$$

Рассмотрим движение груза B, на который действуют сила тяжести $M_2\overline{g}$, реакция $\overline{N}_2$ связи, сила инерции $\overline{\Phi}_2$ и натяжение нити $\overline{T}_B$ (рис. 3).

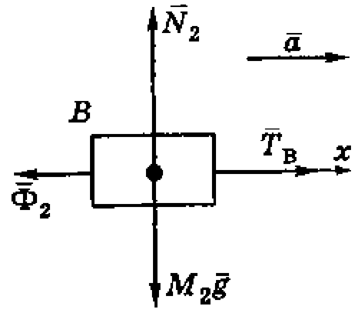


Рис. 3

Применим принцип Даламбера и составим уравнение «равновесия» в проекции на ось x:

$$\sum X_i=0$$

или

$$T_B-\Phi_2=0.$$

Откуда

$$T_B=\Phi_2=M_2a. \qquad (6)$$

Рассмотрим равновесие блока C, на который действуют силы натяжения $\overline{T}'_A$ и $\overline{T}'_B$, а также реакции опоры $\overline{X}_O$ и $\overline{Y}_O$ (рис. 4).

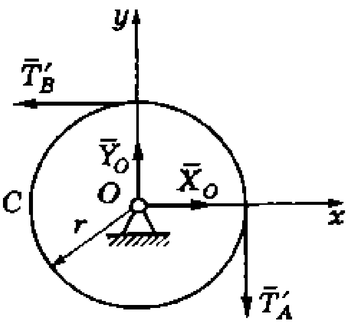


Рис. 4

Составим уравнение моментов сил относительно центра O:

$$\sum M_O=0$$

или

$$-T'_Ar+T'_Br=0.$$

Откуда

$$T'_A = T'_B$$

или

$$T_A = T_B. \quad (7)$$

Подставим выражения (5) и (6) в формулу (7):

$$M_1 g - M_1 a = M_2 a,$$

откуда

$$a = \frac{M_1}{M_1 + M_2} g. \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в формулу (3) и получим

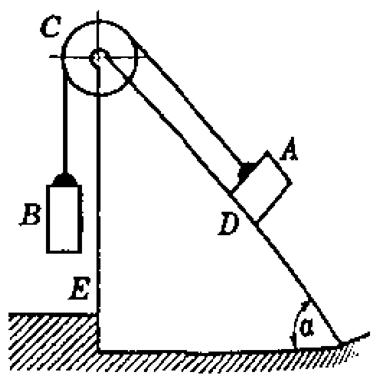
$$R = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} \right) g.$$

Давление стола N на пол равно суммарной реакции R, т.е. $R = N$.

Ответ: $N = \left(M_1 + M_2 + M_3 - \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} \right) g.$

Задача 41.17

Груз A массы M_1, опускаясь вниз по наклонной плоскости D, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B массы M_2. Определить горизонтальную составляющую давления наклонной плоскости D на выступ пола E. Массой нити пренебречь.



Решение

Покажем на рис. 1 силы инерции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$, которые надо приложить к движущимся телам A и B:

$$\Phi_1 = M_1 a, \quad \Phi_2 = M_2 a. \quad (1)$$

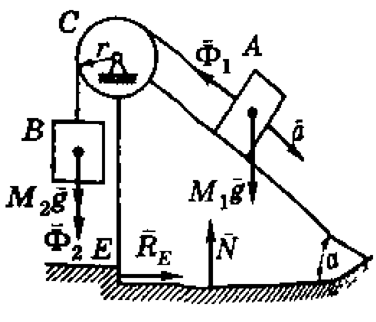


Рис. 1

На основании принципа Даламбера запишем условие «равновесия» механической системы под действием активных сил, реакций связей и сил инерции в проекции на ось x:

$$\sum X_i = 0$$

или

$$R_E - \Phi_1 \cos\alpha = 0,$$

из которого с учетом выражений (1)

$$R_E = M_1 a \cos\alpha. \qquad (2)$$

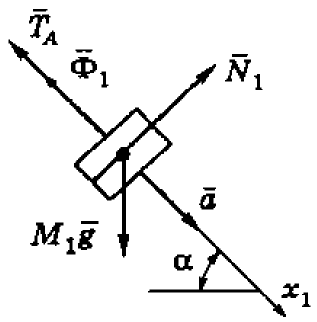


Рис. 2

В соответствии с принципом Даламбера рассмотрим равновесие груза A под действием силы тяжести $M_1\bar{g}$, натяжения нити $\bar{T}_A$ и силы инерции $\bar{\Phi}_1$ и составим уравнение «равновесия» в проекции на ось x_1 (рис. 2):

$$\sum F_{kx_1} = M_1 g \sin\alpha - T_A - \Phi_1 = 0. \qquad (3)$$

Откуда

$$T_A = M_1 g \sin\alpha - \Phi_1 = M_1 g \sin\alpha - M_1 a. \qquad (4)$$

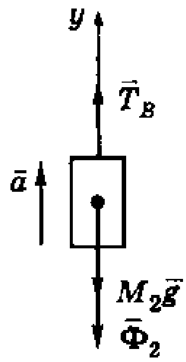


Рис. 3

Далее рассмотрим равновесие груза B под действием силы тяжести $M_2\bar{g}$, натяжения нити $\bar{T}_B$ и силы инерции $\bar{\Phi}_2$.

Составим уравнение «равновесия» в проекции на ось y (рис. 3):

$$\sum F_{ky} = T_B - M_2 g - \Phi_2 = 0. \qquad (5)$$

Откуда

$$T_B = M_2 g + \Phi_2 = M_2 g + M_2 a. \qquad (6)$$

Рассмотрим равновесие блока C под действием натяжений $\bar{T}_A'$ и $\bar{T}_B'$ нити и реакции оси блока $\bar{X}_O$ и $\bar{Y}_O$ (рис. 4).

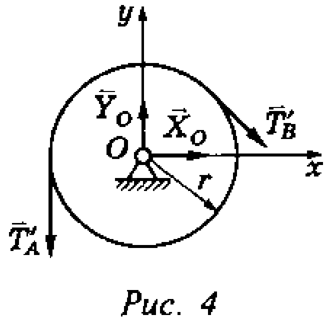


Рис. 4

Составим уравнения моментов относительно центра O:

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = T_B' r - T_A' r = 0.$$

Откуда

$$T'_A = T'_B$$

или

$$T_A = T_B. \qquad (7)$$

Подставим выражения (4) и (6) в равенство (7):

$$M_1 g \sin\alpha - M_1 a = M_2 g + M_2 a,$$

откуда найдем

$$a = \frac{M_1 \sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} g. \qquad (8)$$

Подставим выражение (8) в формулу (2) и найдем

$$R_E = M_1 g \frac{M_1 \sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} \cos\alpha,$$

равное давлению клина на выступ, т.е. $N = R_E$.

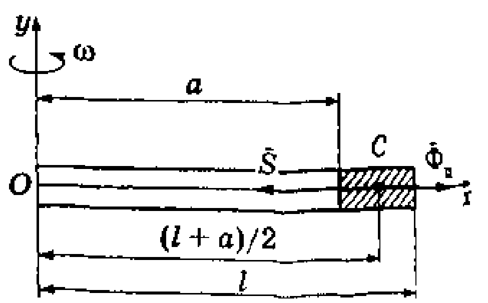
Ответ: $N = M_1 g \dfrac{M_1 \sin\alpha - M_2}{M_1 + M_2} \cos\alpha.$

Задача 41.18

Однородный стержень массы M и длины l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить растягивающую силу в поперечном сечении стержня, отстоящем от оси вращения на расстоянии a.

Решение

Выделим из стержня на расстоянии a от оси вращения.и рассмотрим заштрихованный участок (см. рисунок). В выделенном участке возникает сила $\bar{S}$, представляющая собой силу взаимодействия между рассматриваемым участком и остальной частью стержня.



Согласно принципу Даламбера к выделенному участку приложим центробежную силу инерции $\overline{\Phi}_ц$ и составим уравнение «равновесия» в проекции на ось x:

$$\sum F_{kx} = \Phi_ц - S = 0. \qquad (1)$$

Центробежная сила инерции

$$\Phi_ц = M_1 a_ц. \qquad (2)$$

Определим массу выделенной части стержня:

$$M_1 = \frac{l-a}{l} M$$

и центростремительное ускорение центра масс C этой части стержня:

$$a_ц = \frac{l+a}{2}\omega^2.$$

Подставим найденные значения в выражение (2) и из уравнения (1) определим

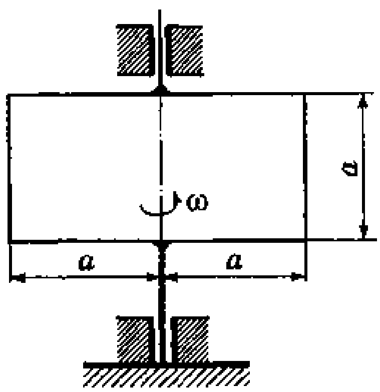
$$S = \frac{M(l^2 - a^2)\omega^2}{2l}.$$

Сила S численно равна растягивающей силе F, т.е. $F = S$.

Ответ: $F = \dfrac{M(l^2 - a^2)\omega^2}{2l}$.

Задача 41.19

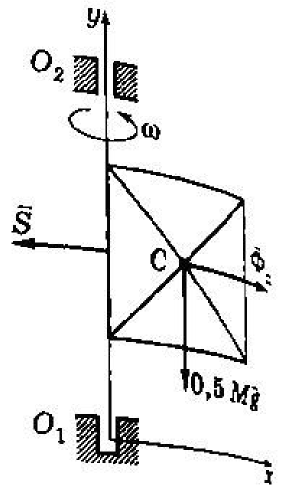
Однородная прямоугольная пластинка массы M равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определить силу, разрывающую пластину в направлении, перпендикулярном оси вращения, в сечении, проходящем через ось вращения.



Решение

Мысленно разрежем пластину по оси вращения и рассмотрим правую полупластинку (см. рисунок). Приложим силу $\overline{S}$, которая будет равнодействующей сил взаимодействия отброшенной и рассматриваемой полупластины.

В результате вращения полупластины с постоянной угловой скоростью возникает центробежная сила инерции:



$$\Phi_ц = \frac{M}{2} a_C^ц = \frac{M}{2}\frac{a}{2}\omega^2 = \frac{Ma}{4}\omega^2.$$

Согласно принципу Даламбера составим уравнения «равновесия» в проекции на ось x:

$$\sum F_{kx} = \Phi_ц - S = 0,$$

откуда

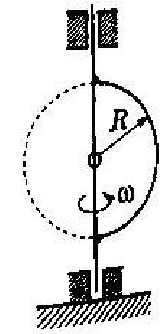
$$S = \Phi_ц = \frac{Ma}{4}\omega^2.$$

Сила, разрывающая пластину, равна силе S.

О т в е т: $Ma\omega^2/4$.

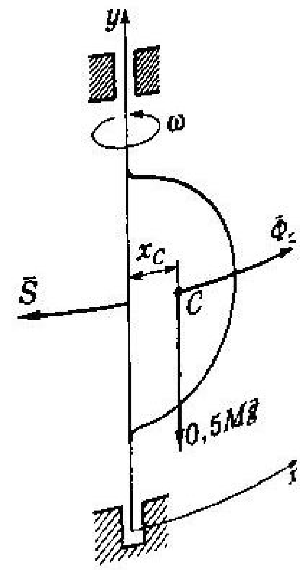
Задача 41.20

Однородный круглый диск радиуса R и массы M вращается с постоянной скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра. Определить силу, разрывающую диск по диаметру.



Р е ш е н и е

Мысленно разрежем диск по диаметру и рассмотрим правый полудиск (см. рисунок). Приложим силу $\bar{S}$, которая будет равнодействующей сил взаимодействия отброшенного и рассматриваемого полудиска. В центре масс C полудиска приложим центробежную силу инерции. Так как угловая скорость вращения постоянна, то



$$\Phi_ц = \frac{M}{2} a_C^ц = \frac{M}{2} x_C \omega^2,$$

где $x_C = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Тогда

$$\Phi_ц = \frac{M}{2}\,\frac{4R}{3\pi}\omega^2 = \frac{2}{3}\,\frac{MR}{\pi}\omega^2.$$

Согласно принципу Даламбера составим уравнения «равновесия» в проекции на ось x:

$$\sum F_{kx} = \Phi_ц - S = 0.$$

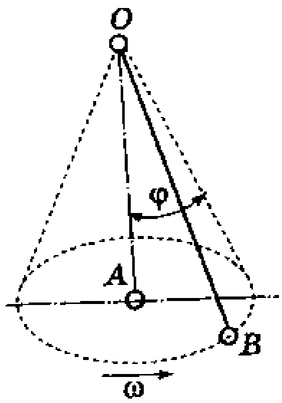
Откуда

$$S = \Phi_ц = \frac{2MR}{3\pi}\,\omega^2.$$

Сила, разрывающая пластину, равна силе S.

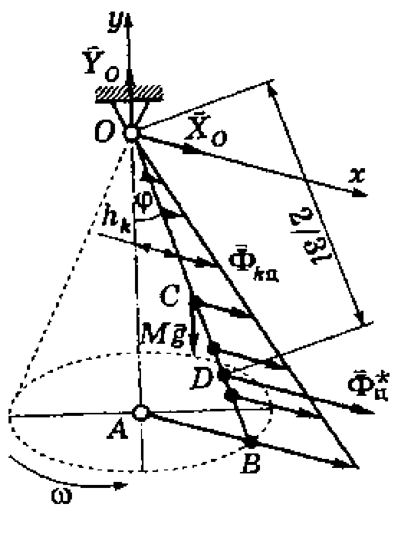
Ответ: $\dfrac{2MR\omega^2}{3\pi}$.

Задача 41.21



Тонкий прямолинейный однородный стержень длины l и массы M вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью OA и вершиной в точке O. Вычислить угол отклонения стержня от вертикального направления, а также величину N давления стержня на шарнир O.

Решение



Свяжем подвижную систему отсчета — оси x и y — так, чтобы стержень лежал в плоскости Oxy. Покажем на рисунке действующие на стержень внешние силы: силу тяжести, силу реакции шарнира.

Согласно принципу Даламбера добавим к этим силам силу инерции стержня. Так как стержень вращается с постоянной угловой скоростью, то центробежная сила инерции каждого k-го элемента стержня

$$\Phi_{k\text{ц}} = \Delta M a_{k\text{ц}},$$

где $a_{k\text{ц}} = h_k \omega^2$ (h_k — расстояние от k-го элемента до оси вращения).

Тогда

$$\Phi_{k\text{ц}} = \Delta M h_k \omega^2.$$

Все силы инерции $\Phi_{k\text{ц}}$ пропорциональны h_k, эпюра параллельных сил образует треугольник и их можно заменить равнодействующей, равной главному вектору сил инерции, линия действия которой будет проходить через центр тяжести этого треугольника на расстоянии $\frac{2}{3}l$, т.е. через точку D.

Главный вектор сил инерции

$$\Phi_{\text{ц}}^* = M a_{C\text{ц}},$$

где $a_{C\text{ц}}$ — центростремительное ускорение центра масс C,

$$a_{C\text{ц}} = \frac{l}{2}\omega^2 \sin\varphi.$$

Тогда

$$\Phi_{\text{ц}}^* = \frac{Ml\omega^2}{2}\sin\varphi.$$

По принципу Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения «равновесия»:

$$\sum M_O(\bar{F}_k) = \Phi_{\text{ц}}^* \frac{2}{3} l\cos\varphi - Mg\frac{l}{2}\sin\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{kx} = X_O + \Phi_{\text{ц}}^* = 0, \tag{2}$$

$$\sum F_{ky} = Y_O - Mg = 0. \tag{3}$$

і значение $\Phi_ц^*$ в уравнение (1) и получим

$$\frac{Ml\omega^2}{2}\sin\varphi\cdot\frac{2}{3}l\cos\varphi - Mg\frac{l}{2}\sin\varphi = 0$$

$$\frac{l\omega^2}{3}\cos\varphi - \frac{g}{2} = 0.$$

$$\cos\varphi = \frac{3g}{2l\omega^2},$$

$$\varphi = \arccos\frac{3g}{2l\omega^2}.$$

ний (2) и (3) найдем силы реакций

$$X_O = -\Phi_ц^* = -\frac{Ml\omega^2}{2}\sin\varphi,$$

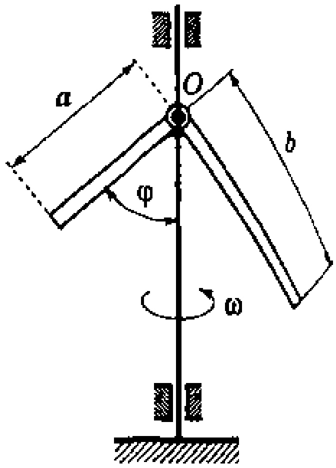
$$Y_O = Mg.$$

на шарнир

$$N = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}$$

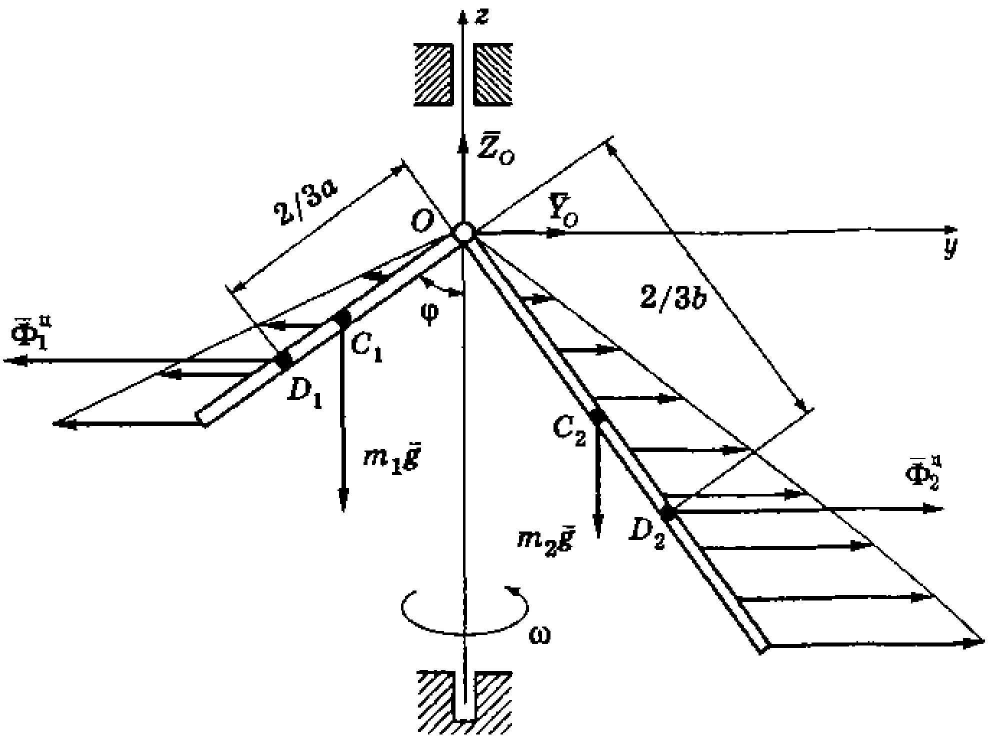
Задача 41.22

В центробежном тахометре два тонких однородных прямолинейных стержня длины a и b жестко соединены под прямым углом, вершина которого O шарнирно соединена с вертикальным валом; вал вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти зависимость между ω и углом отклонения φ, образованным направлением стержня длины a и вертикалью.



Решение

Введем вращающиеся вместе со стержнями координатные оси Ozy (см. рисунок). Применив принцип освобождаемости от связей, в шарнире O покажем реакции $\bar{Z}_O$ и $\bar{Y}_O$ связей.



Согласно принципу Даламбера приложим силы инерции (см. решение задачи 41.21):

$$\Phi_1^ц = m_1 a_{C_1}^ц, \quad \Phi_2^ц = m_2 a_{C_2}^ц,$$

где m_1, m_2 — масса стержней; $a_{C_1}^ц$, $a_{C_2}^ц$ — центростремительные ускорения центров масс стержней.

ринять плотность единицы длины стержня равной ρ, то

$$m_1 = \rho a, \quad m_2 = \rho b. \tag{1}$$

[центров масс стержней равны соответственно

$$a^{ц}_{C_1} = \frac{a}{2}\omega^2 \sin\varphi, \quad a^{ц}_{C_2} = \frac{b}{2}\omega^2 \cos\varphi.$$

$$\Phi^{ц}_1 = \rho\frac{a^2\omega^2}{2}\sin\varphi, \quad \Phi^{ц}_2 = \rho\frac{b^2\omega^2}{2}\cos\varphi. \tag{2}$$

приложения сил инерции — D_1 и D_2 соответственно. По Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции равновешенную систему сил. Для полученной плоской си- составим уравнение моментов относительно точки O:

$$\bar{F}_k) = \frac{a}{2}m_1 g\sin\varphi - \frac{b}{2}m_2 g\cos\varphi - \frac{2}{3}a\,\Phi^{ц}_1\cos\varphi + \frac{2}{3}b\,\Phi^{ц}_2\sin\varphi = 0. \tag{3}$$

вим выражения (1) и (2) в уравнение (3):

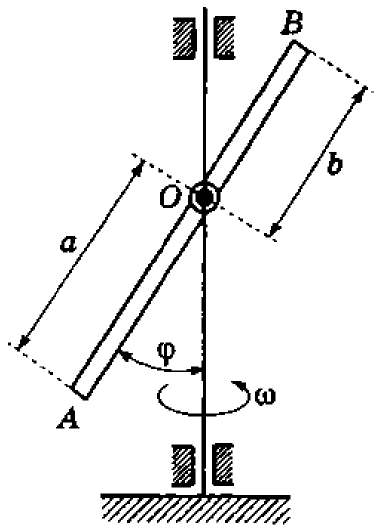
$$-\frac{b^2}{2}\rho g\cos\varphi - \rho\frac{a^2\omega^2}{2}\sin\varphi\cdot\frac{2}{3}a\cos\varphi + \rho\frac{b^2\omega^2}{2}\cos\varphi\cdot\frac{2}{3}b\sin\varphi = 0.$$

найдем зависимость между ω и углом отклонения φ

$$\omega^2 = 3g\frac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}.$$

$$)^2 = 3g\frac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}.$$

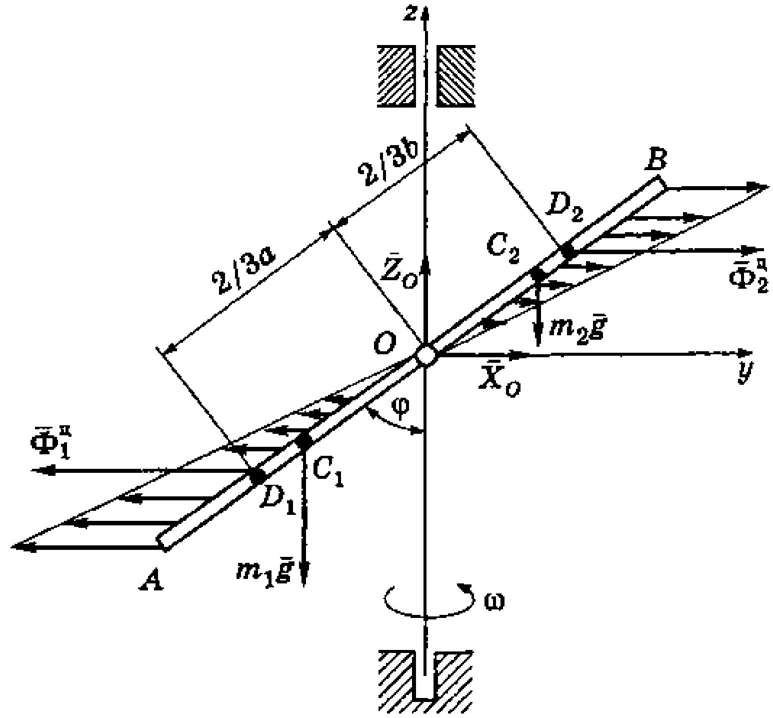
Задача 41.23



однородный прямолинейный стер- шарнирно соединен с вертикальным чке O. Вал вращается с постоянной ω. Определить угол отклонения φ вертикали, если $OA = a$ и $OB = b$.

н и е

вращающиеся вместе со стержнем ко- е оси Ozy. Применив принцип освобождаемости от связей, в шарнире O покажем реакции $\bar{Z}_O$ и $\bar{Y}_O$ связей (см. рисунок).



Согласно принципу Даламбера к стержням OA и OB приложим силы инерции (см. решение задачи 41.21):

$$\Phi_1^ц = m_1 a_{C_1}^ц, \quad \Phi_2^ц = m_2 a_{C_2}^ц,$$

где m_1, m_2 — масса каждой части стержня; $a_{C_1}^ц$, $a_{C_2}^ц$ — центростремительное ускорение центра масс частей OA и OB соответственно.

Если принять плотность единицы длины стержня равной ρ, то

$$m_1 = \rho a, \quad m_2 = \rho b. \tag{1}$$

Ускорение центра масс частей OA и OB равны соответственно:

$$a_{C_1}^ц = \frac{a}{2}\omega^2 \sin\varphi, \quad a_{C_2}^ц = \frac{b}{2}\omega^2 \sin\varphi.$$

Тогда

$$\Phi_1^ц = \rho\frac{a^2\omega^2}{2}\sin\varphi, \quad \Phi_2^ц = \rho\frac{b^2\omega^2}{2}\sin\varphi. \tag{2}$$

Силы $\bar{\Phi}_1^ц$ и $\bar{\Phi}_2^ц$ приложены в точках D_1 и D_2 соответственно. По принципу Даламбера приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил, для которой составим уравнение моментов относительно точки O:

$$\sum M_O(\overline{F}_k)=\frac{a}{2}m_1g\sin\varphi-\frac{b}{2}m_2g\sin\varphi-\frac{2}{3}a\,\Phi_1^{\text{ц}}\cos\varphi-\frac{2}{3}b\,\Phi_2^{\text{ц}}\cos\varphi=0. \quad (3)$$

Подставим выражения (1) и (2) в уравнение (3) и получим

$$\frac{a^2}{2}\rho g\sin\varphi-\frac{b^2}{2}\rho g\sin\varphi-\rho\frac{\omega^2a^2}{2}\sin\varphi\cdot\frac{2}{3}a\cos\varphi-\rho\frac{\omega^2b^2}{2}\sin\varphi\cdot\frac{2}{3}b\cos\varphi=0,$$

$$\left[\frac{1}{2}g(a^2-b^2)-\frac{\omega^2}{3}(a^3-b^3)\cos\varphi\right]\sin\varphi=0,$$

или

$$\frac{1}{2}g(a^2-b^2)-\frac{\omega^2}{3}(a^3-b^3)\cos\varphi=0.$$

Откуда значение косинуса угла отклонения стержня от вертикали

$$\cos\varphi=\frac{3g(a^2-b^2)}{2\omega^2(a^3+b^3)}=\frac{3g(a-b)}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}.$$

Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{3g(a-b)}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}$.

42. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения

Методические указания к решению задач

Для решения задач данного типа применяется принцип Даламбера. К телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, кроме активных сил и реакций опор прикладывают силы инерции этого тела и получают уравновешенную систему сил, для которой составляют необходимые уравнения статики. При этом находят полные реакции. Однако в ряде задач требуется определить только динамические реакции или давление на ось, что вызывается вращением неуравновешенной массы или тем, что ось вращения не является главной осью инерции. Поэтому при определении динамических давлений на ось возможны следующие способы решения задач.

1. Условие задачи позволяет определить по известным формулам силы инерции вращающихся масс и точки их приложения. Тогда к телу прикладывают силы инерции и динамические реакции и составляют необходимые уравнения равновесия. К этому типу задач относятся задачи, в которых к вертикальному либо горизонтальному вращающемуся валу с помощью невесомых стержней прикреплены точечные массы или однородные стержни.

Это наиболее простой способ решения, так как требуется только вычислить силы инерции и составить уравнения равновесия. При этом следует иметь в виду, что сила инерции стержня

$$\overline{\Phi} = -M\bar{a}_C$$

приложена не в центре масс, а на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от оси вала вращения (l — длина стержня).

2. Для решения некоторых задач можно применить уравнения равновесия тела, вращающегося вокруг вертикальной или горизонтальной оси, на которое действуют силы инерции. Так, если тело вращается вокруг вертикальной оси, нижняя опора которой подпятник A, а верхняя — подшипник B, то в координатных осях $Axyz$, где

равлена по оси вала, а начало координат — точка A, эти имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\sum X_k = 0,\ X_A^{д} + X_B^{д} + M\omega^2 x_C + M\varepsilon y_C = 0,\\
&\sum Y_k = 0,\ Y_A^{д} + Y_B^{д} + M\omega^2 y_C - M\varepsilon x_C = 0,\\
&\sum M_x(\overline{F}_k) = 0,\ -Y_B^{д} H - \omega^2 I_{yz} + \varepsilon I_{zx} = 0,\\
&\sum M_y(\overline{F}_k) = 0,\ X_B^{д} H + \omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (42.1)$$

расстояние между опорами (точками A и B).
уравнения (42.1), получим

$$\left.\begin{aligned}
&X_A^{д} = \frac{1}{H}(\omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz}) - M\omega^2 x_C - M\varepsilon y_C,\\
&X_B^{д} = -\frac{1}{H}(\omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz}),\\
&Y_A^{д} = -\frac{1}{H}(\varepsilon I_{zx} - \omega^2 I_{yz}) - M\omega^2 y_C + M\varepsilon x_C,\\
&Y_e^{д} = \frac{1}{H}(\varepsilon I_{zx} - \omega^2 I_{yz}).
\end{aligned}\right\} \qquad (42.2)$$

авнений (42.2) следует, что динамические давления равны ли $x_C = y_C = 0$, $I_{zx} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$, т.е. когда ось вращения прохо- центр масс тела, но не является главной осью инерции, то- ции

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&X_B^{д} = -\frac{1}{H}(\omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz}),\\
&X_A^{д} = \frac{1}{H}(\omega^2 I_{zx} + \varepsilon I_{yz})
\end{aligned}\right\} \Rightarrow X_A^{д} = -X_B^{д},\\
&\left.\begin{aligned}
&Y_B^{д} = \frac{1}{H}(\varepsilon I_{zx} - \omega^2 I_{yz}),\\
&Y_A^{д} = \frac{1}{H}(\omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{zx})
\end{aligned}\right\} \Rightarrow Y_A^{д} = -Y_B^{д}.
\end{aligned}\right\} \qquad (42.3)$$

равномерном вращении $\varepsilon = 0$, тогда

$$\left.\begin{aligned}
&X_A^{д} = \frac{1}{H}\omega^2 I_{zx},\ X_B^{д} = -\frac{1}{H}\omega^2 I_{zx};\\
&Y_B^{д} = -\frac{1}{H}\omega^2 I_{yz},\ Y_A^{д} = \frac{1}{H}\omega^2 I_{yz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (42.4)$$

Если начало координат O выбрано посередине отрезка AB, т.е. $OA = OB = h$, то в формулы (42.1)—(42.4) вместо H нужно подставить $2h$.

3. Этот способ предполагает использование тензора инерции. Главный момент инерционных сил относительно начала координат вычисляют по формуле

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -\frac{d(I\overline{\omega})}{dt} = -I\varepsilon - \overline{\omega}\times(I\overline{\omega}), \tag{42.5}$$

где I — тензор инерции,

$$I = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{vmatrix}. \tag{42.6}$$

Если в системе координат $Oxyz$ оси являются главными центральными, то

$$I = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \end{vmatrix}. \tag{42.7}$$

При вращении вала с постоянной угловой скоростью главный момент инерционных сил

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -\overline{\omega}\times(I\overline{\omega}). \tag{42.8}$$

Динамические давления $X_A^{\text{д}}$, $Y_A^{\text{д}}$, $X_B^{\text{д}}$ и $Y_B^{\text{д}}$ находим, проецируя векторное выражение (42.5) или (42.8) на оси координат и подставляя полученные выражения в уравнения равновесия вала в виде суммы моментов относительно осей Ox и Oy.

Главное достоинство этого способа — его универсальность. Он имеет явное преимущество тогда, когда известны главные оси инерции тела и нет необходимости вычислять центробежные моменты инерции.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Выбрать систему координат $Oxyz$, если она не указана в условии задачи. При этом ось z направить по оси вращения тела, а оси x и y — в соответствии с правой системой осей координат.

2. Показать активные силы, силы реакций опор и силы инерции вращающихся масс, а при определении динамических давлений на опоры только силы инерции и динамические реакции опор.

3. Составить уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на оси x и y и суммы моментов относительно этих осей.

4. Из полученных уравнений определить реакции опор. Давления на опоры будут равны реакциям, но направлены противоположно им.

5. При решении задач вторым или третьим способом следует выбрать систему координат, показать на рисунке реакции опор, а затем составить необходимые уравнения.

Задачи и решения

Задача 42.1

Центр масс махового колеса массы 3000 кг находится на расстоянии 1 мм от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой. Найти силы давления на подшипники, когда вал делает 1200 об/мин. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

Решение

Определим угловую скорость маховика:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{1200\pi}{30} = 40\pi.$$

На подшипники действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и центробежная сила инерции $\bar{\Phi}_ц$, возникающая вследствие эксцентриситета k (рис. 1).

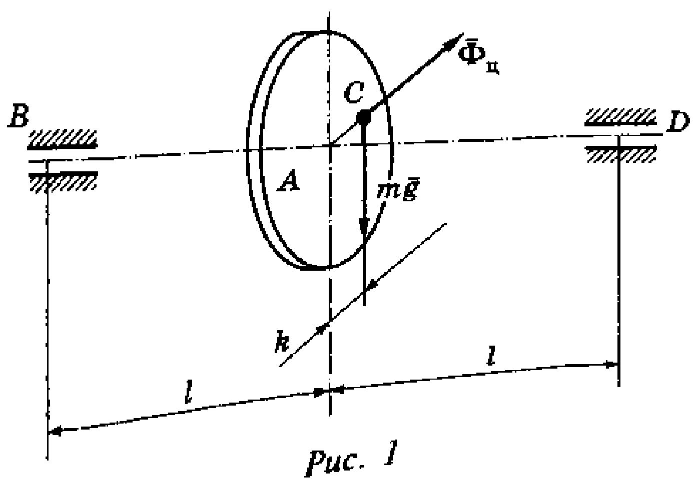


Рис. 1

Поэтому реакции связей имеют статическую и динамическую составляющие:

$$\overline{R}_B = \overline{R}_B^{ст} + \overline{R}_B^{д},$$

$$\overline{R}_D = \overline{R}_D^{ст} + \overline{R}_D^{д}.$$

Определим статические составляющие реакций (рис. 2) и составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = R_D^{ст} \cdot 2l - mgl = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_D(\overline{F}_k) = -R_B^{ст} \cdot 2l + mgl = 0, \qquad (2)$$

где $2l$ — длина волны BD.

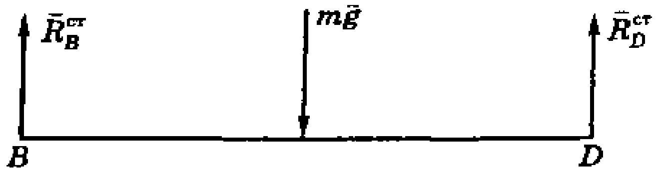


Рис. 2

Найдем из уравнения (1)

$$R_D^{ст} = \frac{mg}{2} = \frac{3000 \cdot 9{,}8}{2} = 14\ 700\ (\text{Н}),$$

із уравнения (2)

$$R_B^{ст} = \frac{mg}{2} = 14\ 700\ (\text{Н}).$$

Определим динамические составляющие реакции (рис. 3), котоые параллельны центробежной силе инерции. Учтем, что

$$\Phi_ц = ma_C = m\omega^2 k = 3000\,(40 \cdot 3{,}14)^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 47\ 326\ (\text{Н}).$$

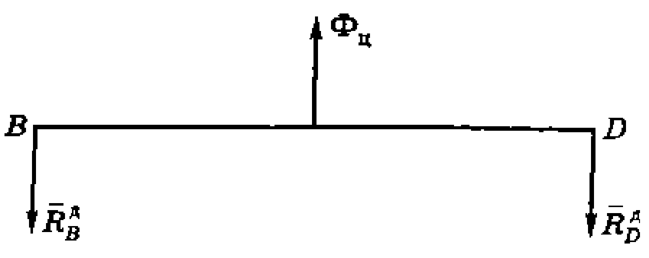


Рис. 3

Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = \Phi_ц l - R_D^д \cdot 2l = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_D(\overline{F}_k) = R_B \cdot 2l - \Phi_ц l = 0. \tag{4}$$

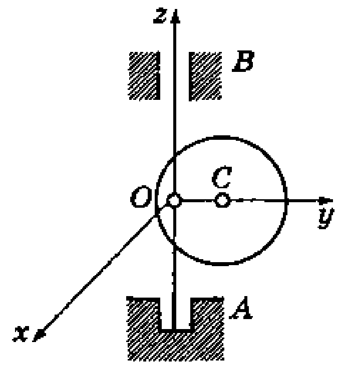
Согласно уравнениям (3) и (4)

$$R_D^д = R_B^д = \frac{\Phi_ц}{2} = \frac{47\ 326}{2} = 23\ 663\ (Н).$$

Ответ: сила давления на каждый из подшипников есть равнодействующая двух сил, из которых одна равна 14,7 кН и направлена по вертикали, а другая равна 23,663 кН и направлена параллельно прямой, соединяющей геометрический центр колеса, находящийся на оси вала, с центром масс колеса.

Задача 42.2

Однородный круглый диск массы M равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости диска и отстоящей от его центра масс C на расстоянии $OC = a$. Определить силы динамического давления оси на подпятник A и подшипник B, если $OB = OA$. Оси x и y неизменно связаны с диском.



Решение

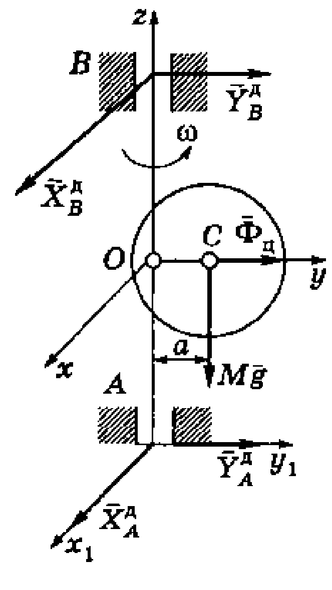
Покажем на рисунке динамические реакции: $\overline{X}_A^д$, $\overline{Y}_A^д$, $\overline{X}_B^д$ и $\overline{Y}_B^д$.

Так как диск вращается равномерно, т.е. $\omega = \text{const}$, то ускорение центра масс C диска

$$a_C = \omega^2 \cdot OC = \omega^2 a.$$

Тогда центробежная сила инерции направлена по оси y и равна

$$\Phi_ц = M\omega^2 a.$$



Составим уравнения равновесия, применив принцип Даламбера:

$$\sum X_k = 0, \quad X_A^{д} + X_B^{д} = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^{д} + Y_B^{д} + \Phi_ц = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_{x_1}(\overline{F}_k) = 0, \quad -\Phi_ц \cdot OA - Y_B^{д} \cdot AB = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{y_1}(\overline{F}_k) = 0, \quad X_B^{д} \cdot AB = 0. \tag{4}$$

Найдем из уравнений (4) и (1)

$$X_B^{д} = 0, \quad X_A^{д} = 0;$$

из уравнений (3) и (2)

$$Y_B^{д} = -\frac{\Phi_ц}{2} = -\frac{Ma\omega^2}{2},$$

$$Y_A^{д} = -\Phi_ц - Y_B = -\frac{Ma\omega^2}{2}.$$

Тогда

$$Y_A = -Y_A^{д} = \frac{Ma\omega^2}{2},$$

$$Y_B = -Y_B^{д} = \frac{Ma\omega^2}{2}.$$

О т в е т: $X_A = X_B = 0$; $Y_A = Y_B = \dfrac{Ma\omega^2}{2}$.

Задача 42.3

Решить предыдущую задачу в предположении, что при наличии сил сопротивления угловая скорость диска убывает по закону $\omega = \omega_0 - \varepsilon_0 t$, где ω_0 и ε_0 — положительные постоянные.

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке динамические реакции: $\overline{X}_A^{д}$, $\overline{Y}_A^{д}$, $\overline{X}_B^{д}$ и $\overline{Y}_B^{д}$, а также центробежную $\overline{\Phi}_ц$ и вращательную $\overline{\Phi}_в$ силы инерции:

$$\Phi_ц = Ma\omega^2,$$

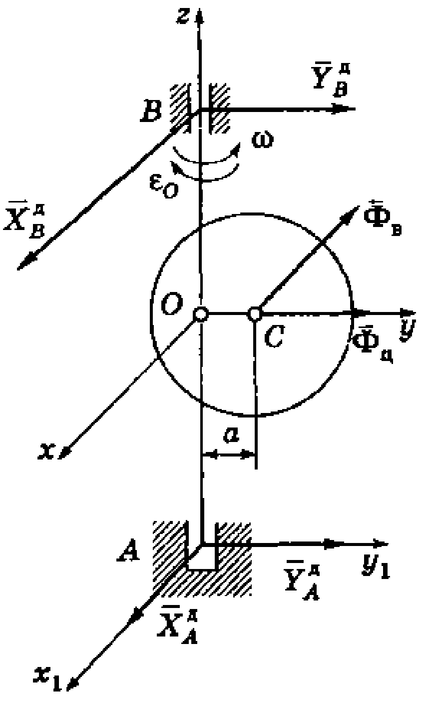
$$\Phi_в = Ma\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon = \dot{\omega} = -\varepsilon_0$, то

$$\Phi_в = Ma\varepsilon_0.$$

Направление $\Phi_в$ показано с учетом зна-
ка углового ускорения.

Составим уравнения равновесия, приме-
нив принцип Даламбера:



$$\sum X_k = 0, \quad X_A^д + X_B^д - \Phi_в = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^д + Y_B^д + \Phi_ц = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_{x_1}(\bar{F}_k) = 0, \quad -Y_B^д \cdot AB - \Phi_ц \cdot OA = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_{y_1}(\bar{F}_k) = 0, \quad X_B^д \cdot AB - \Phi_в \cdot AO = 0. \quad (4)$$

Найдем из уравнения (4)

$$X_B^д = \frac{\Phi_в}{2} = \frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

из уравнения (1)

$$X_A^д = -X_B + \Phi_в = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2} + M\varepsilon_0 a = \frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

из уравнения (3)

$$Y_B^д = -\frac{\Phi_ц}{2} = -\frac{Ma\omega^2}{2};$$

из уравнения (2)

$$Y_A^д = -Y_B^д - \Phi_ц = \frac{Ma\omega^2}{2} - M\omega^2 a = -\frac{Ma\omega^2}{2}.$$

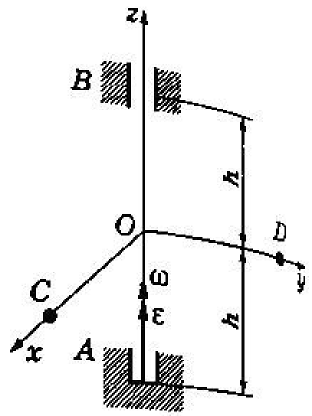
Силы динамического давления вала на опоры равны по модулю динамическим реакциям связей и направлены противоположно им. Поэтому

$$X_A = -X_A^д = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2}, \quad X_B = -X_B^д = -\frac{Ma\varepsilon_0}{2};$$

$$Y_A = -Y_A^д = \frac{Ma\omega^2}{2}, \quad Y_B = -Y_B^д = \frac{Ma\omega^2}{2}.$$

Ответ: $X_A = X_B = -\dfrac{Ma\varepsilon_0}{2}, \quad Y_A = Y_B = \dfrac{Ma\omega_0^2}{2}.$

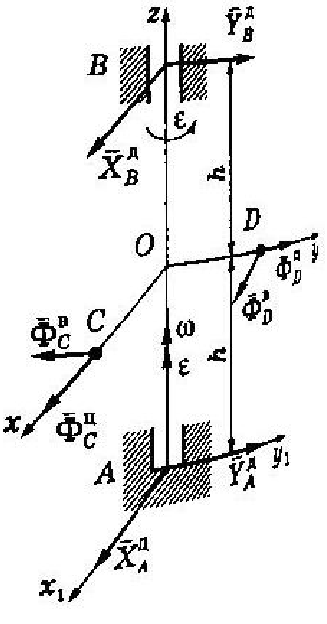
Задача 42.4



К вертикальной оси AB, вращающейся равноускоренно с угловым ускорением ε, прикреплены два груза C и D посредством двух перпендикулярных оси AB и притом взаимно перпендикулярных стержней $OC = OD = r$. Определить силы динамического давления оси AB на подпятник A и подшипник B. Грузы C и D считать материальными точками массы M каждый. Массами стержней пренебречь.

В начальный момент система находилась в покое. Оси x и y неизменно связаны со стержнями.

Решение



Покажем на рисунке динамические реакции: $\bar{X}_A^{\text{д}}, \bar{Y}_A^{\text{д}}, \bar{X}_B^{\text{д}}$ и $\bar{Y}_B^{\text{д}}$, а также силы инерции:

$$\Phi_D^{\text{ц}} = \Phi_C^{\text{ц}} = Mr\omega^2;$$

$$\Phi_C^{\text{в}} = \Phi_D^{\text{в}} = Mr\varepsilon.$$

Учтем, что $\omega = \varepsilon t$. Тогда

$$\Phi_D^{\text{ц}} = \Phi_C^{\text{ц}} = Mr(\varepsilon t)^2.$$

Составим уравнения равновесия, применив принцип Даламбера:

$$\sum X_k = 0, \quad X_A^{\text{д}} + X_B^{\text{д}} + \Phi_C^{\text{ц}} + \Phi_D^{\text{в}} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^{\text{д}} + Y_B^{\text{д}} + \Phi_D^{\text{ц}} - \Phi_C^{\text{в}} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_{x_1}(\bar{F}_k) = 0, \quad -Y_B^{\text{д}} \cdot 2h - \Phi_D^{\text{ц}} h + \Phi_C^{\text{в}} h = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_{y_1}(\bar{F}_k) = 0, \quad X_B^{\text{д}} \cdot 2h + \Phi_D^{\text{в}} h + \Phi_C^{\text{ц}} h = 0. \qquad (4)$$

Найдем из уравнения (4)

$$X_B^{\text{д}} = \frac{\Phi_D^{\text{в}} + \Phi_C^{\text{ц}}}{2} = \frac{Mr\varepsilon + Mr\varepsilon^2 t^2}{2} = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon t^2);$$

из уравнения (1)

$$X_A^{д} = -X_B^{D} - \Phi_C^{ц} - \Phi_D^{в} = \frac{Mr\varepsilon}{2}(1+\varepsilon t^2) - Mr(\varepsilon t)^2 - Mr\varepsilon =$$

$$= -\frac{Mr\varepsilon}{2}(1+\varepsilon t^2);$$

из уравнения (3)

$$Y_B^{д} = \frac{\Phi_C^{в} - \Phi_D^{ц}}{2} = \frac{Mr\varepsilon - Mr\varepsilon^2 t^2}{2} = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1);$$

из уравнения (2)

$$Y_A^{д} = -Y_B^{д} - \Phi_D^{ц} + \Phi_C^{в} = -\frac{Mr\varepsilon}{2}(1-\varepsilon t^2) - M(\varepsilon t)^2 r + Mr\varepsilon =$$

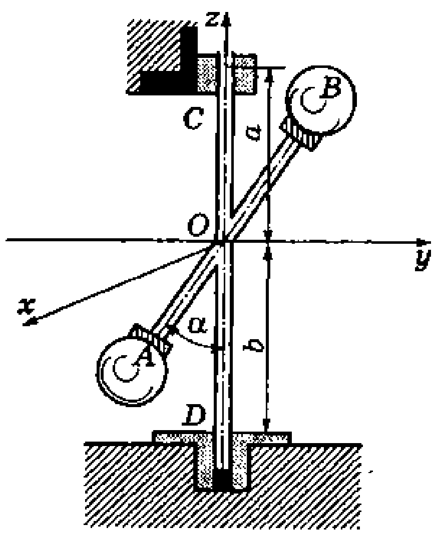
$$= -\frac{Mr\varepsilon}{2}(\varepsilon t^2 - 1).$$

Силы динамического давления вала на опоры равны по модулю динамическим реакциям связей и направлены противоположно им.

Ответ: $X_A = X_B = \dfrac{M}{2} r\varepsilon(\varepsilon t^2 + 1)$; $Y_A = Y_B = \dfrac{M}{2} r\varepsilon(\varepsilon t^2 - 1)$.

Задача 42.5

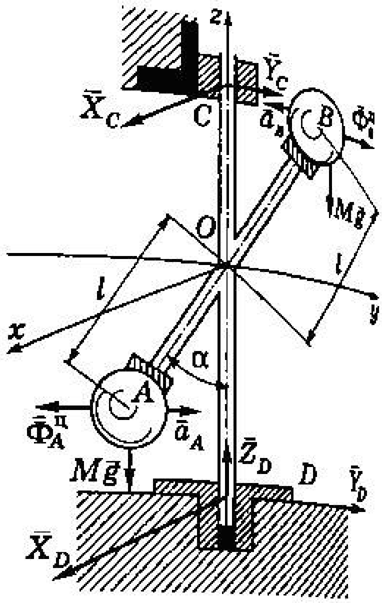
Стержень AB длины $2l$, на концах которого находятся грузы равной массы M, вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через середину O длины стержня.



Расстояние точки O от подшипника C равно a, от подпятника D равно b. Угол между стержнем AB и осью Oz сохраняет постоянную величину α. Пренебрегая массой стержня и размерами грузов, определить проекции сил давления на подшипник C и подпятник D в тот момент, когда стержень находился в плоскости Oyz.

Решение

Покажем на рисунке силы тяжести грузов и реакции подшипника C и подпятника D.



Определим силы инерции грузов и приложим их к валу:

$$\Phi_A^{ц} = Ma_A = Ml\omega^2 \sin\alpha,$$

$$\Phi_B^{ц} = Ma_B = Ml\omega^2 \sin\alpha.$$

Векторы $\overline{\Phi}_A^{ц}$ и $\overline{\Phi}_B^{ц}$ направлены в сторону, противоположную направлению соответствующих векторов центростремительных ускорений, $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{ц}$ и $\bar{a}_B = \bar{a}_B^{ц}$.

Составим уравнения равновесия, применив принцип Даламбера:

$$\sum X_i = 0, \quad X_C + X_D = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad Y_C + Y_D + \Phi_B^{ц} - \Phi_A^{ц} = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0, \quad Z_D - 2Mg = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad -\Phi_A^{ц} l\cos\alpha - \Phi_B^{ц} l\cos\alpha - Y_C a + Y_D b = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_{ky} = 0, \quad X_C a - X_D b = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_{kz} \equiv 0. \tag{6}$$

Из уравнений (1) и (5) следует, что

$$X_C = X_D = 0.$$

Из уравнений (2) и (4) с учетом значений $\Phi_A^{ц}$ и $\Phi_B^{ц}$ определим

$$-Y_C = Y_D = \frac{2Ml^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha}{a+b} = \frac{Ml^2\omega^2 \sin 2\alpha}{a+b},$$

из уравнения (3)

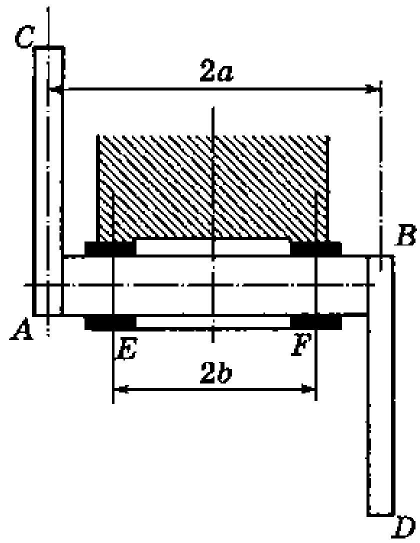
$$Z_D = 2Mg.$$

Проекции давлений на подшипник C и подпятник D направлены противоположно найденным реакциям, т.е. ответ надо записать с обратным знаком.

Ответ: $X_C = X_D = 0$; $Y_C = -Y_D = \dfrac{Ml^2\omega^2 \sin 2\alpha}{a+b}$; $Z_D = -2Mg$.

Задача 42.6

На концы оси AB надеты два одинаковых кривошипа AC и BD длины l и массы M_1 каждый, заклиненные под углом 180° относительно друг друга. Ось AB длины $2a$ и массы M_2 вращается с постоянной угловой скоростью ω в подшипниках E и F, расположенных симметрично на расстоянии $2b$ друг от друга. Определить силы давления $\overline{N}_E$ и $\overline{N}_F$ на подшипники в тот момент, когда кривошип AC направлен вертикально вверх. Массу каждого кривошипа считать равномерно распределенной вдоль его оси.



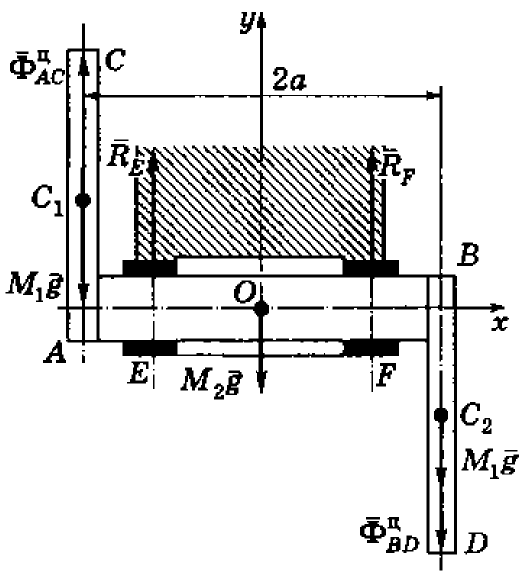
Решение

Добавим к силам тяжести и реакции опор E и F, действующим на механическую систему, силы инерции:

$$\Phi^{\text{ц}}_{AC} = M_1 a^{\text{ц}}_{C_1} = M_1\omega^2 \frac{l}{2},$$

$$\Phi^{\text{ц}}_{BD} = M_1 a^{\text{ц}}_{C_2} = M_1\omega^2 \frac{l}{2},$$

направления которых противоположны направлениям центростремительных ускорений точек C_1, C_2, расположенных посередине стержней AB и BD (см. рисунок).



Применив принцип Даламбера, составим уравнения равновесия для полученной плоской системы параллельных сил:

$$\sum Y_k = 0,$$

или

$$\Phi^{ц}_{AC} - 2M_1 g + R_E + R_F - M_2 g - \Phi^{ц}_{BD} = 0. \quad (1)$$

$$\sum M_O = 0,$$

или

$$-\Phi^{ц}_{AC} a + M_1 g a - R_E b + R_F b - M_1 g a - \Phi^{ц}_{BD} a = 0. \quad (2)$$

После сокращения в уравнении (1) равных по величине слагаемых $\Phi^{ц}_{AC}$ и $\Phi^{ц}_{BD}$ оно примет вид

$$R_E + R_F - 2M_1 g - M_2 g = 0. \quad (3)$$

Сократив в уравнении (2) слагаемые $M_1 g a$, с учетом значений $\Phi^{ц}_{AC}$ и $\Phi^{ц}_{BD}$ получим

$$R_F - R_E - \frac{M_1 l a \omega^2}{b} = 0. \quad (4)$$

Сложим уравнения (3) и (4) и найдем

$$R_F = \frac{1}{2} M_2 g + M_1 g + \frac{M_1 l a \omega^2}{2b}.$$

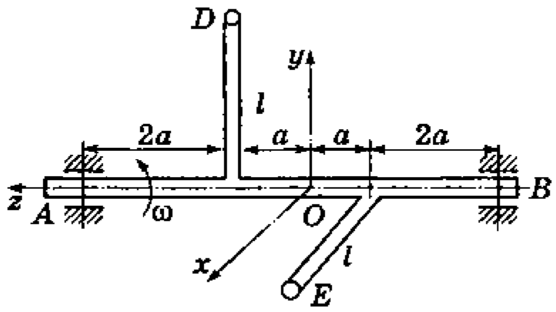
Затем вычтем из уравнения (3) уравнение (4) и получим

$$R_E = \frac{1}{2} M_2 g + M_1 g - \frac{M_1 l a \omega^2}{2b}.$$

Силы давлений на подшипники N_E и N_F численно равны силам реакций R_E и R_F, но направлены в противоположную сторону.

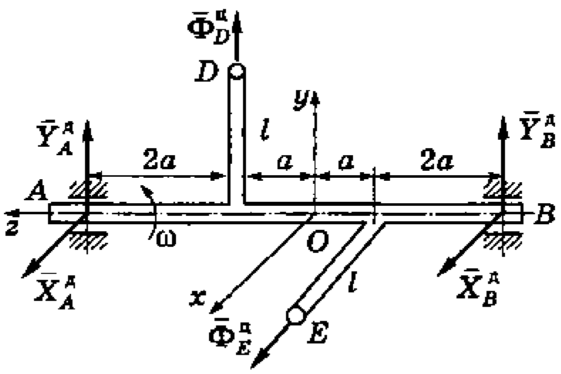
Ответ: сила давления $N_E = \frac{1}{2} M_2 g + M_1 g - \frac{M_1 a l \omega^2}{2b}$; при $N_E > 0$ направлена по вертикали вниз, при $N_E < 0$ — вверх. Сила давления $N_F = \frac{1}{2} M_2 g + M_1 g + \frac{M_1 a l \omega^2}{2b}$ направлена по вертикали вниз.

Задача 42.7



К горизонтальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, прикреплены два равных, перпендикулярных ему стержня длины l, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рисунок). На концах стержней расположены шары D и E массы m каждый. Определить силы динамического давления на опоры A и B. Шары считать материальными точками; массами стержней пренебречь.

Решение



При определении сил динамического давления вала на опоры будем учитывать центробежные силы инерции. Так как $\omega = \text{const}$, то

$$\Phi_E^{ц} = \Phi_D^{ц} = ml\omega^2.$$

Составим уравнения равновесия, применив принцип Даламбера:

$$\sum X_k = 0, \quad X_A^{д} + X_B^{д} + \Phi_E^{ц} = 0; \tag{1}$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^{д} + Y_B^{д} + \Phi_D^{ц} = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad -Y_A^{д} \cdot 3a - \Phi_D^{ц} a + Y_B^{д} \cdot 3a = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_{ky} = 0, \quad X_A^{д} \cdot 3a - \Phi_E^{ц} a - X_B^{д} \cdot 3a = 0. \tag{4}$$

Из уравнений (1) и (4) найдем

$$X_A^{д} = -\frac{1}{3}\Phi_E^{ц} = -\frac{1}{3}ml\omega^2,$$

$$X_B^{д} = -\frac{2}{3}\Phi_E^{ц} = -\frac{2}{3}ml\omega^2.$$

Аналогично из уравнений (2) и (3) получим:

$$Y_A^{д} = -\frac{2}{3}\Phi_D^{ц} = -\frac{2}{3}ml\omega^2,$$

$$Y_B^{д} = -\frac{1}{3}\Phi_D^{ц} = -\frac{1}{3}ml\omega^2;$$

$$R_A^{д} = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}ml\omega^2,$$

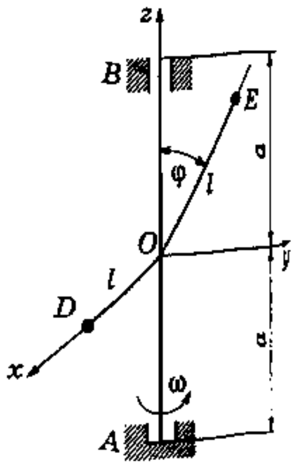
$$R_B^{д} = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}ml\omega^2.$$

Силы динамического давления вала на опоры численно равны найденным динамическим реакциям опор, т.е.

$$N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3}ml\omega^2.$$

О т в е т: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3}ml\omega^2$.

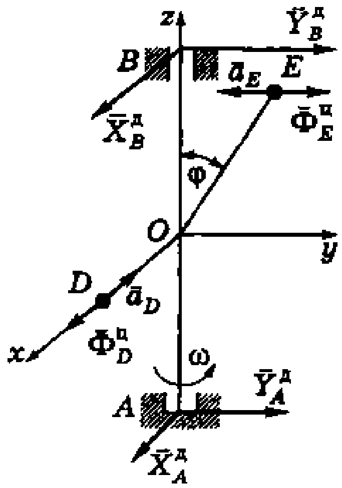
Задача 42.8



К вертикальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, жестко прикреплены два стержня. Стержень OE образует с валом угол φ, стержень OD перпендикулярен плоскости, содержащей вал AB и стержень OE. Даны размеры: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. К концам стержней прикреплены два шара E и D массы m каждый. Определить силы динамического давления вала на опоры A и B. Шары D и E считать точечными массами; массами стержней пренебречь.

Р е ш е н и е

Силы динамического давления на опоры A и B возникают только за счет наличия сил инерции $\overline{\Phi}_D^{ц}$ и $\overline{\Phi}_E^{ц}$, показанных на рисунке. Они направлены от оси вращения, противоположно соответствующим центростремительным ускорениям точек D и E.



Составим уравнения равновесия, применив принцип Даламбера:

$$\sum X_k = 0, \quad X_A^{д} + X_B^{д} + \Phi_D^{ц} = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^{д} + Y_B^{д} + \Phi_E^{ц} = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad Y_A^{д} a - Y_B^{д} a - \Phi_E^{ц} l \cos\varphi = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_{ky} = 0, \quad X_B^{д} a - X_A^{д} a = 0. \qquad (4)$$

В уравнениях (1)–(4)

$$\Phi_D^{ц} = m a_D = m l \omega^2, \qquad (5)$$

$$\Phi_E^{ц} = m a_E = m l \omega^2 \sin\varphi. \qquad (6)$$

Из уравнений (1) и (4) с учетом выражения (5) найдем

$$X_A^{д} = X_B^{д} = -\frac{m l \omega^2}{2}.$$

Проекции сил динамического давления вала на ось x противоположны по знаку найденным реакциям, т.е.

$$X_A = -X_A^{д}, \quad X_B = -X_B^{д}.$$

Тогда

$$X_A = X_B = \frac{m l \omega^2}{2}.$$

Из уравнений (2) и (3) с учетом выражения (6) определим

$$Y_A^{д} = -\frac{m l \omega^2 (a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a};$$

$$Y_B^{д} = -\frac{m l \omega^2 (a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$

Проекции сил динамического давления вала на ось y также противоположны по знаку найденным реакциям, т.е.

$$Y_A = -Y_A^{д}, \quad Y_B = -Y_B^{д}.$$

Ответ: $X_A = X_B = \dfrac{ml\omega^2}{2}$; $Y_A = \dfrac{ml\omega^2(a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$;

$$Y_B = \frac{ml\omega^2(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}.$$

Задача 42.9

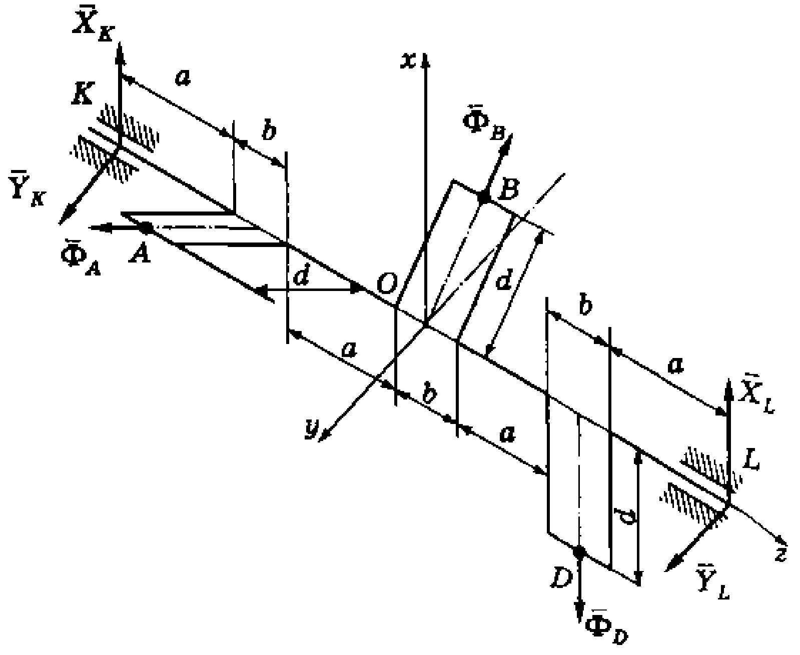
Использовав условие задачи 34.1, определить силы динамического давления коленчатого вала на подшипники K и L. Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω. При решении можно воспользоваться ответами к задачам 34.1 и 34.23.

Решение

Используя решение задач 34.1 и 34.23, запишем:

$$x_C = y_C = 0,$$

$$I_{xz} = -\frac{3}{2}md(a+b),$$



$$I_{yz} = -\frac{\sqrt{3}}{2}md(a+b),$$

$$I_{xy} = 0.$$

Вычислим главный момент инерционных сил:

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -\frac{d(I\overline{\omega})}{dt} = -\overline{\omega}\times(I\overline{\omega}),$$

где $I = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$ — тензор инерции коленчатого вала в точке O (в начале координат); $\overline{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix}$ — вектор угловой скорости.

Проекции главного момента инерционных сил на оси координат

$$M_x^{\text{ин}} = I_{yz}\omega^2, \quad M_y^{\text{ин}} = -I_{xz}\omega^2, \quad M_z^{\text{ин}} = 0.$$

Поэтому уравнения моментов сил относительно осей координат запишем в виде

$$\sum M_{kx} = 0, \quad Y_K\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) - Y_L\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) + I_{yz}\omega^2 = 0;$$

$$\sum M_{ky} = 0, \quad -X_K\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) + X_L\left(2a+b+\frac{b}{2}\right) - I_{xz}\omega^2 = 0.$$

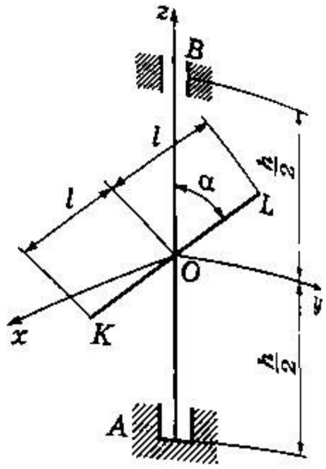
При $X_K = -X_L$ и $Y_K = -Y_L$ найдем

$$X_K = -X_L = \frac{3}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b},$$

$$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}.$$

Ответ: $X_K = -X_L = \frac{3}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}$; $Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2}md\frac{(a+b)\omega^2}{4a+3b}$.

Задача 42.10



Однородный стержень KL, прикрепленный в центре под углом α к вертикальной оси AB, вращается равноускоренно вокруг этой оси с угловым ускорением ε. Определить силы динамического давления оси AB на подпятник A и подшипник B, если M — масса стержня, $2l$ — его длина, $OA = OB = h/2$; $OK = OL = l$. В начальный момент система находилась в покое.

Решение

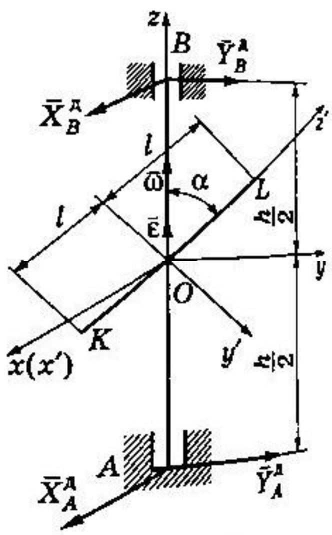


Рис. 1

Вычислим главный момент инерционных сил относительно начала координат (см. рисунок):

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -\frac{d(I\,\overline{\omega})}{dt} = -I\cdot\overline{\varepsilon} - \overline{\omega}\times(I\,\overline{\omega}).$$

Тензор инерции определим в главных центральных осях $Ox'y'z'$, т.е.

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{Ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\overline{\omega} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega\sin\alpha \\ \omega\cos\alpha \end{vmatrix},$$

$$\overline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\varepsilon\sin\alpha \\ \varepsilon\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

В результате умножения получим

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = \bar{i}\,\frac{Ml^2}{3}\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - \bar{j}'\frac{Ml^2}{3}\varepsilon\sin\alpha.$$

Заметим, что орт $\bar{j}'$ направлен вдоль оси Oy'.

Составим уравнения равновесия в форме моментов относительно осей координат Ox и Oy:

$$\sum M_{kx} = 0,\quad Y_A^{\text{д}}\frac{h}{2} - Y_B^{\text{д}}\frac{h}{2} + \frac{Ml^2}{3}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_{ky} = 0,\quad -X_A^{\text{д}}\frac{h}{2} + X_B^{\text{д}}\frac{h}{2} - \frac{Ml^2}{3}\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

При $Y_A^{\text{д}} = -Y_B^{\text{д}}$ и $X_A^{\text{д}} = -X_B^{\text{д}}$ найдем

$$X_A^{\text{д}} = -X_B^{\text{д}} = -\frac{Ml^2}{6h}\varepsilon\sin 2\alpha,$$

$$Y_A^{\text{д}} = -Y_B^{\text{д}} = \frac{Ml^2\omega^2}{6h}\sin 2\alpha = \frac{Ml^2\varepsilon^2 t^2}{6h}\sin 2\alpha,$$

где $\omega = \varepsilon t$.

Ответ: $X_B = -X_A = \dfrac{Ml^2}{6h}\varepsilon\sin 2\alpha$; $Y_B = -Y_A = \dfrac{Ml^2\varepsilon^2 t^2}{6h}\sin 2\alpha$.

Примечание. Эту задачу можно решить первым способом, описанным в методических указаниях к этому параграфу.

Покажем на рис. 2 динамические реакции: центробежные $\overline{\Phi}_1^{\text{ц}}$ и $\overline{\Phi}_2^{\text{ц}}$, а также вращательные $\overline{\Phi}_1^{\text{в}}$ и $\overline{\Phi}_2^{\text{в}}$ силы инерции, которые приложены в точках C_1 и C_2 $\left(OC_1 = OC_2 = \dfrac{2l}{3}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^{\text{ц}} &= \Phi_2^{\text{ц}} = \frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}\omega^2\sin\alpha, \\ \Phi_1^{\text{в}} &= \Phi_2^{\text{в}} = \frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}\varepsilon\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

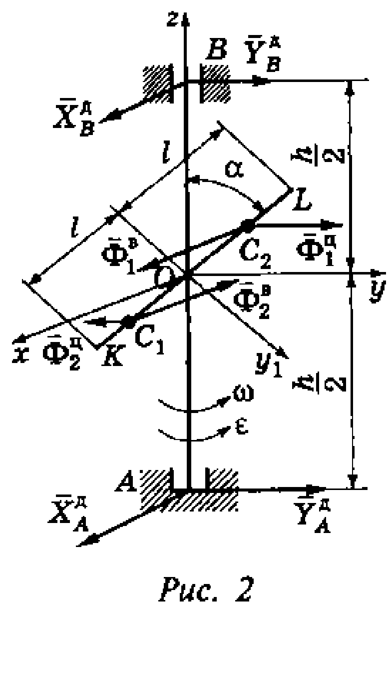


Рис. 2

Составим уравнения равновесия:

$$\sum X_k = 0, \quad X_A^д + X_B^д + \Phi_1^в - \Phi_2^в = 0; \tag{2}$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^д + Y_B^д + \Phi_1^ц - \Phi_2^ц = 0; \tag{3}$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad -Y_B^д \frac{h}{2} + Y_A^д \frac{h}{2} - \Phi_1^ц \frac{2}{3} l \cos\alpha - \Phi_2^ц \frac{2}{3} l \cos\alpha = 0; \tag{4}$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad X_B^д \frac{h}{2} - X_A^д \frac{h}{2} + \Phi_1^в \cdot \frac{2}{3} l \cos\alpha + \Phi_2^в \cdot \frac{2}{3} l \cos\alpha = 0. \tag{5}$$

Из уравнения (2) с учетом выражений (1) следует, что

$$X_A^д = -X_B^д. \tag{6}$$

Из уравнения (3)

$$Y_A^д = -Y_B^д.$$

Из уравнения (4) с учетом равенства (6) получим

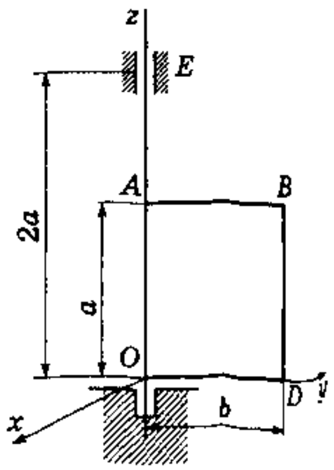
$$Y_A^д = -Y_B^д = \frac{Ml^2\omega^2 \sin 2\alpha}{6h} = \frac{Ml^2\varepsilon^2 t^2 \sin 2\alpha}{6h},$$

а из уравнения (5)

$$X_A^д = -X_B^д = \frac{Ml^2\varepsilon^2 \sin 2\alpha}{6h}.$$

Следовательно, направление проекций реакции подшипника B ($X_B^д$ и $Y_B^д$) противоположны указанным на рисунке. Силы же динамического давления на опоры в свою очередь противоположны реакциям.

Задача 42.11



Однородная прямоугольная пластинка $OABD$ массы M со сторонами a и b, прикрепленная стороной OA к валу OE, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Расстояние между опорами $OE = 2a$. Вычислить боковые силы динамического давления вала на опоры O и E.

Решение

Найдем моменты инерции пластинки относительно показанных на рисунке осей координат:

$$I_x = \frac{M}{3}(a^2 + b^2), \quad I_{xy} = 0, \quad I_{xz} = 0;$$

$$I_y = \frac{Ma^2}{3}, \quad I_{yz} = \frac{Mab}{4}, \quad I_{xz} = \frac{Mb^2}{3}$$

и главный момент инерциальных сил

$$\overline{M}_O^{\text{ин}} = -\overline{\omega} \times (I\,\overline{\omega}) = -\bar{i}\,\frac{Mab\omega^2}{4}.$$

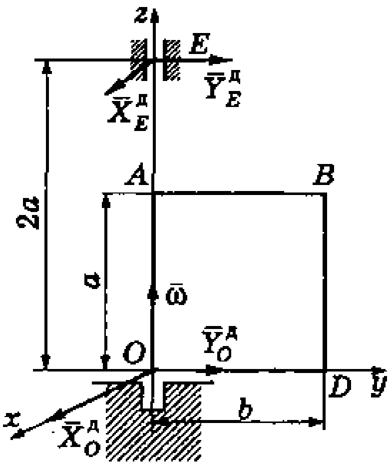


Рис. 1

Составим уравнение равновесия:

$$\sum Y_k = Y_O^{\text{д}} + Y_E^{\text{д}} + \frac{Mb\omega^2}{2} = 0, \tag{1}$$

$$\sum M_{kx} = Y_E^{\text{д}} \cdot 2a - \frac{Mab}{4}\omega^2 = 0. \tag{2}$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$Y_O^{\text{д}} = -\frac{Ma\omega^2}{2} - Y_E^{\text{д}} = -\frac{3Mb\omega^2}{8},$$

$$Y_E^{\text{д}} = -\frac{Mb\omega^2}{8}.$$

Реакции $X_O^{\text{д}}$ и $X_E^{\text{д}}$ равны нулю, так как пластинка находится в плоскости Oyz.

Силы динамического давления N_{Ox}, N_{Ex}, N_{Oy}, N_{Ey} равны найденным реакциям в точках O и E, но противоположно направлены, т.е.

$$N_{Ox} = -X_O^{\text{д}} = 0, \quad N_{Ex} = -X_O^{\text{д}} = 0,$$

$$N_{Oy} = -Y_O^{\text{д}} = \frac{3}{8}Mb\omega^2, \quad N_{Ey} = -Y_E^{\text{д}} = \frac{1}{8}Mb\omega^2.$$

Ответ: $N_{Ox} = N_{Ex} = 0$; $N_{Oy} = \frac{3}{8}Mb\omega^2$; $N_{Ey} = \frac{1}{8}Mb\omega^2$.

Примечание. Решить эту задачу можно первым способом, описанным в методических указаниях к этому параграфу.

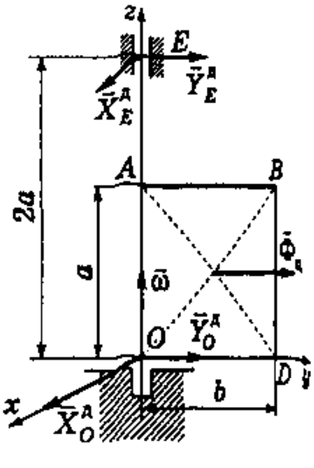


Рис. 2

Приложим к пластинке центробежную силу инерции

$$\Phi_ц = Ma_C^ц = M\omega^2 \frac{b}{2}. \quad (1)$$

Поскольку пластинка расположена в плоскости Oyz, то $X_O = X_E = 0$.

Для системы параллельных сил, расположенных в плоскости Oyz, составим два уравнения равновесия:

$$\sum Y_k = 0, \quad Y_E^д + Y_O^д + \Phi_ц = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{kx} = 0, \quad -Y_E^д \cdot 2a + \Phi_ц \frac{a}{2} = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) с учетом выражения (1) получим

$$Y_E^д = -\frac{1}{2} a \cdot M\omega^2 \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2a} = -\frac{Mb\omega^2}{8}, \quad (4)$$

из уравнения (2) с учетом выражений (1) и (4) получим

$$\bar{Y}_O^д = -\bar{Y}_E^д - \Phi_ц = \frac{Mb\omega^2}{8} - \frac{Mb\omega^2}{2} = -\frac{3Mb\omega^2}{8}.$$

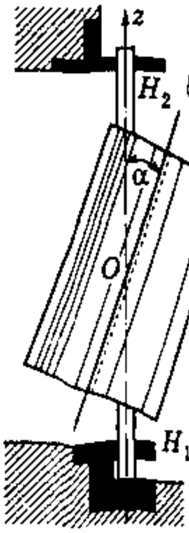
Реакции $\bar{Y}_E^д$ и $\bar{Y}_O^д$ направлены в стороны, противоположные указанным на рис. 2.

Силы динамического давления

$$N_{Oy} = \frac{3Mb\omega^2}{8}, \quad N_{Ey} = \frac{Mb\omega^2}{8}.$$

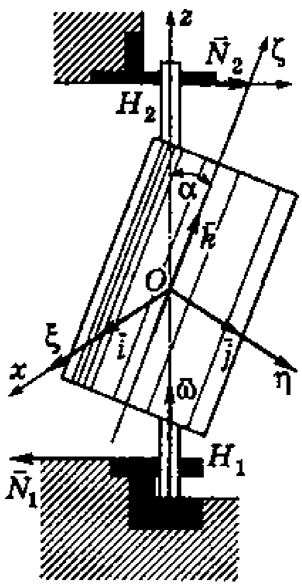
Задача 42.12

Прямой однородный круглый цилиндр массы M, длины $2l$ и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр масс O цилиндра; угол между осью цилиндра $O\zeta$ и осью Oz сохраняет при этом постоянную величину α. Расстояние H_1H_2 между подпятником и подшипником равно h. Определить боковые силы давления: $\bar{N}_1$ на подпятник и $\bar{N}_2$ на подшипник.



Решение

Определим тензор инерции в осях ξ, η, ζ (см. рисунок):



$$I = \begin{vmatrix} \frac{Mr^2}{4} + \frac{Ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Mr^2}{4} + \frac{Ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Mr^2}{2} \end{vmatrix}.$$

Найдем главный момент инерционных сил, учитывая, что $\bar{\omega} = -\omega \sin\alpha \cdot \bar{j} + \omega\cos\alpha \cdot \bar{k}$:

$$\bar{M}_O^{\text{ин}} = -\bar{\omega} \times (I\bar{\omega}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega\sin\alpha & \omega\cos\alpha \\ 0 & -\left(\frac{Mr^2}{4} + \frac{Ml^2}{3}\right)\omega\sin\alpha & \frac{Mr^2}{2}\omega\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\frac{Mr^2}{2}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha - \bar{i}\frac{Mr^2}{4}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha -$$

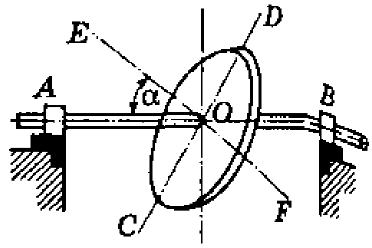
$$-\bar{i}\frac{Ml^2}{3}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \bar{i}\left(\frac{Mr^2}{4} - \frac{Ml^2}{3}\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Из уравнения моментов относительно оси x определим боковые силы давления на подпятник и на подшипник, которые одинаковы по величине, но противоположны по направлению:

$$N = \frac{\left|\bar{M}_O^{\text{ин}}\right|}{h} = \frac{M\omega^2 \sin 2\alpha}{2h}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right).$$

Ответ: $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ имеют одинаковую величину $\dfrac{M\omega^2\sin 2\alpha}{2h}\left(\dfrac{l^2}{3} - \dfrac{r^2}{4}\right)$ и противоположны по направлению.

Задача 42.13



Вычислить силы давления в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого круглого диска CD паровой турбины, предполагая, что ось AB проходит через центр O диска, но вследствие неправильного рассверливания втулки составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол $AOE = \alpha = 0{,}02$ рад. Дано: масса диска 3,27 кг, радиус его 20 см, угловая скорость соответствует 30 000 об/мин, расстояние $AO = 50$ см, $OB = 30$ см; ось AB считать абсолютно твердой и принять $\sin 2\alpha = 2\alpha$.

Решение

Определим статические силы давления в подшипниках:

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0, \quad R_B^{\text{ст}} \cdot AB - G \cdot AO = 0;$$

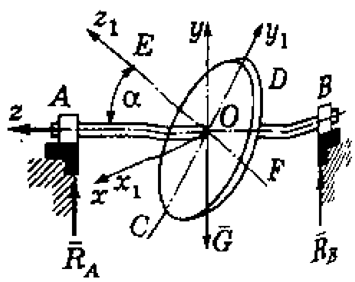
$$\sum M_B(\overline{F}_k) = 0, \quad G \cdot OB - R_A^{\text{ст}} \cdot AB = 0,$$

где $G = mg$.

Откуда

$$R_B^{\text{ст}} = mg \cdot \frac{AO}{AB} = 3{,}27 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{50}{80} = 20{,}0 \text{ (Н)},$$

$$R_A^{\text{ст}} = mg \cdot \frac{OB}{AB} = 3{,}27 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{30}{80} = 12{,}01 \text{ (Н)}.$$



Статические силы давления N_A и N_B равны по модулю реакциям подшипников, т.е.

$$N_A = R_A^{\text{ст}}, \quad N_B = R_B^{\text{ст}}.$$

Определим динамические силы давления в подшипниках:

$$\sum Y_k = 0, \quad R_A^{\text{д}} + R_B^{\text{д}} = 0 \Rightarrow R_A^{\text{д}} = -R_B^{\text{д}};$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0, \quad R_B^{\text{д}} \cdot OB - R_A^{\text{д}} \cdot AO - I_{yz}\,\omega^2 = 0.$$

Вычислим центробежный момент инерции диска

$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_{z_1} - I_{y_1})\sin 2\alpha,$$

где $I_{z_1} = \dfrac{mr^2}{2}$; $I_{y_1} = \dfrac{mr^2}{4}$; r — радиус диска.

Тогда

$$I_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2}{4}\right)\sin 2\alpha = \frac{mr^2}{8}\sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$R_B^{д} = \frac{I_{yz}\omega^2}{AO + OB} = \omega^2\frac{mr^2 \sin 2\alpha}{8 \cdot AB} = \frac{2mr^2\alpha}{8 \cdot AB}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 =$$

$$= \frac{3{,}27 \cdot 0{,}2^2 \cdot 2 \cdot 0{,}02\,(3{,}14 \cdot 30\,000)^2}{8 \cdot 0{,}8 \cdot 30^2} = 8064 \text{ (Н)},$$

$$R_A^{д} = -R_B^{д} = -8064 \text{ Н},$$

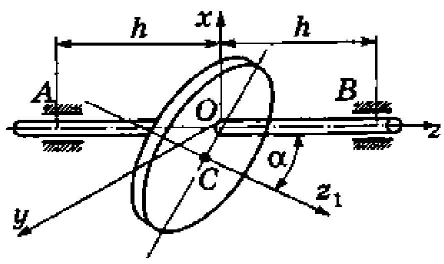
где $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Динамические силы давления $\overline{N}^{д}$ в подшипниках обратны по направлению реакциям $\overline{R}^{д}$ подшипников.

Ответ: силы давления от веса диска: 12,01 Н на подшипник A и 20,0 Н на подшипник B; силы давления на подшипники, вызываемые вращением диска, имеют одинаковую величину 8,06 кН и противоположные направления.

Задача 42.14

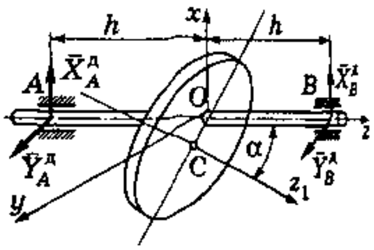
В результате неточной сборки круглого диска паровой турбины плоскость диска образует с осью AB угол α, а центр масс C диска не лежит на этой оси. Эксцентриситет $OC = a$. Найти боковые силы динамического давления на подшипники A и B, если масса диска равна M, радиус его R, а $AO = OB = h$; угловая скорость вращения диска постоянна и равна ω.



Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.27.

Решение

Согласно решению задачи 34.27 центробежные моменты инерции диска



$$I_{xy} = I_{yz} = 0,$$

$$I_{xz} = \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha.$$

Определим дополнительные динамические реакции (см. рисунок):

$$X_A^{д} + X_B^{д} = -\omega^2 M x_C - \varepsilon M y_C, \qquad (1)$$

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = -\omega^2 M y_C + \varepsilon M x_C, \qquad (2)$$

$$Y_A^{д} h - Y_B^{д} h = \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz}, \qquad (3)$$

$$X_B^{д} h - X_A^{д} h = -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz}. \qquad (4)$$

Так как $\omega = \mathrm{const}$, то $\varepsilon = 0$; $y_C = 0$, $x_C = -OC \cdot \cos\alpha = -a\cos\alpha$. Тогда уравнения (1)–(4) примут вид

$$X_A^{д} + X_B^{д} = \omega^2 M a \cos\alpha, \qquad (5)$$

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = 0, \qquad (6)$$

$$Y_A^{д} h - Y_B^{д} h = 0, \qquad (7)$$

$$X_B^{д} h - X_A^{д} h = -\omega^2 I_{xz} = -\omega^2 \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha. \qquad (8)$$

Решим совместно уравнения (6) и (7) и получим

$$Y_A^{д} = Y_B^{д} = 0.$$

Разделим уравнение (8) на h, полученное уравнение сначала сложим с уравнением (5), а затем вычтем его из уравнения (5):

$$X_B^{д} = -\frac{\omega^2 M}{2}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) - a\cos\alpha\right],$$

$$X_A^{д} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right) + a\cos\alpha\right].$$

Силы динамического давления обратны реакциям подшипников,

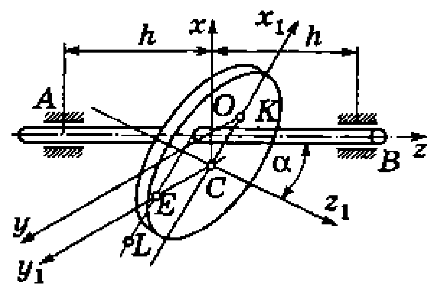
$$N_{Bx} = X_B = -X_B^{д}, \quad N_{Ax} = X_A = -X_A^{д}.$$

Ответ: $Y_A = Y_B = 0;\; X_A = -\dfrac{M}{2}\left[\left(\dfrac{R^2}{4} + a^2\right)\dfrac{\sin 2\alpha}{2h} + a\cos\alpha\right]\omega^2;$

$$X_B = \frac{M}{2}\left[\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h} - a\cos\alpha\right]\omega^2.$$

Задача 42.15

Однородный круглый диск массы M и радиуса R насажен на ось AB, проходящую через точку O диска и составляющую с его осью симметрии Cz_1 угол α. OL — проекция оси z, совмещенной с осью AB, на плоскость диска, причем $OE = a, OK = b$. Вычислить боковые силы динамического давления на подшипники A и B, если диск вращается с постоянной угловой скоростью ω, а $AO = OB = h$.



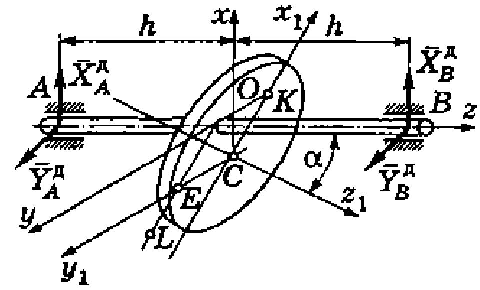
Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.28.

Решение

Из решения задачи 34.28 известно, что центробежные моменты инерции диска

$$I_{xz} = M\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$I_{yz} = Mab\sin\alpha.$$



Определим динамические реакции подшипников (см. рисунок):

$$X_A^{д} + X_B^{д} = -\omega^2 Mx_C - \varepsilon My_C, \tag{1}$$

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = -\omega^2 My_C + \varepsilon Mx_C, \tag{2}$$

$$Y_A^{д}h - Y_B^{д}h = \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz}, \tag{3}$$

$$X_B^{д}h - X_A^{д}h = -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz}. \tag{4}$$

Так как $\varepsilon = 0$, $x_C = -OE\cdot\cos\alpha = -a\cos\alpha$, $y_C = -OK = -b$, то уравнения (1)–(4) примут вид

$$X_A^{д} + X_B^{д} = \omega^2 Ma\cos\alpha, \tag{5}$$

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = \omega^2 Mb, \tag{6}$$

$$Y_A^{д}h - Y_B^{д}h = \omega^2 Mab\sin\alpha, \tag{7}$$

$$X_B^{д}h - X_A^{д}h = -\omega^2\frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha. \tag{8}$$

Решим совместно уравнения (6) и (7):

$$2Y_A^{д} = \omega^2 Mb + \omega^2 Mb\frac{a}{h}\sin\alpha \Rightarrow Y_A^{д} = \frac{\omega^2 Mb}{2}\left(1 + \frac{a}{h}\sin\alpha\right),$$

$$2Y_B^{д} = \omega^2 Mb - \omega^2 Mb\frac{a}{h}\sin\alpha \Rightarrow Y_B^{д} = \frac{\omega^2 Mb}{2}\left(1 - \frac{a}{h}\sin\alpha\right),$$

затем уравнения (1) и (4):

$$2X_B^{д} = \omega^2 Ma\cos\alpha - \frac{\omega^2 M}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_B^{д} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[a\cos\alpha - \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h}\right],$$

$$2X_A^{д} = \omega^2 Ma\cos\alpha + \frac{\omega^2 M}{2h}\left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\sin 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_A^{д} = \frac{\omega^2 M}{2}\left[a\cos\alpha + \left(\frac{R^2}{4} + a^2\right)\frac{\sin 2\alpha}{2h}\right].$$

Направления сил давления обратны направлениям реакций подшипников, значит,

$$N_{Ax} = X_A = -X_A^{д}, \quad N_{Bx} = X_B = -X_B^{д},$$

$$N_{Ay} = Y_A = -Y_A^{д}, \quad N_{By} = Y_B = -Y_B^{д}.$$

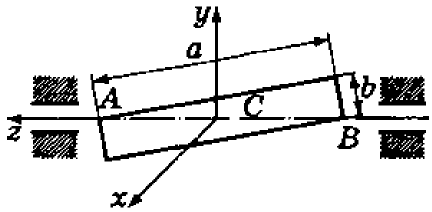
Ответ: $X_A = -\frac{1}{2}Ma\omega^2\cos\alpha - \frac{M}{4h}\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\omega^2\sin 2\alpha;$

$$X_B = -\frac{1}{2}Ma\omega^2\cos\alpha + \frac{M}{4h}\left(\frac{1}{4}R^2 + a^2\right)\omega^2\sin 2\alpha;$$

$$Y_A = -\frac{Mb}{2}\left(1 + \frac{a}{h}\sin\alpha\right)\omega^2; \quad Y_B = -\frac{Mb}{2}\left(1 - \frac{a}{h}\sin\alpha\right)\omega^2.$$

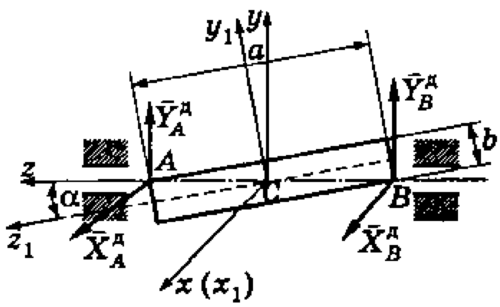
Задача 42.16

Однородная прямоугольная пластинка массы M равномерно вращается вокруг своей диагонали AB с угловой скоростью ω. Определить силы динамического давления пластинки на опоры A и B, если длины сторон равны a и b.



Решение

Для определения динамических реакций применим принцип Даламбера, считая, что расстояние между опорами $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рисунок):



$$\sum Y_k = 0, \quad Y_A^д + Y_B^д = 0; \qquad (1)$$

$$\sum X_k = 0, \quad X_B^д + X_A^д = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad Y_B^д \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - Y_A^д \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \omega^2 I_{yz} = 0; \qquad (3)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad X_A^д \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - X_B^д \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \omega^2 I_{xz} = 0. \qquad (4)$$

Так как ось Cx является главной осью инерции, то $I_{xz} = 0$. Решив совместно уравнения (2) и (4), получим

$$X_A^д = X_B^д = 0.$$

Вычислим I_{z_1} и I_{y_1}:

$$I_{y_1} = \frac{Ma^2}{12},$$

$$I_{z_1} = \frac{Mb^2}{12}.$$

Тогда с учетом того, что

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

определим центробежный момент инерции пластинки

$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_{y_1} - I_{z_1})\sin 2\alpha = (I_{y_1} - I_{z_1})\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \left(\frac{Ma^2}{12} - \frac{Mb^2}{12}\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{Mab(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)}.$$

Решим совместно уравнения (1) и (3):

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = 0,$$

$$Y_B^{д} - Y_A^{д} = \frac{2\omega^2}{\sqrt{a^2+b^2}} I_{yz} = \frac{\omega^2 Mab}{6}\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

Сложим эти уравнения и получим

$$Y_B^{д} = \frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

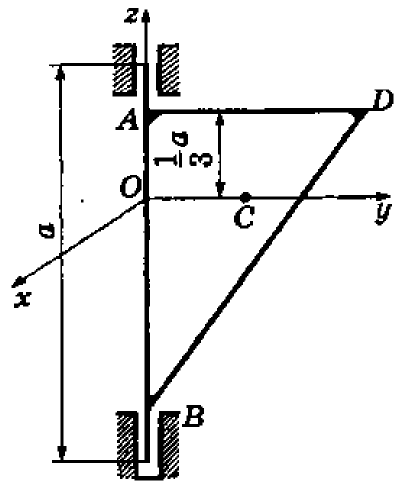
Тогда из уравнения (1) определим

$$Y_A^{д} = -\frac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

Ответ: $X_A = 0$, $Y_A = -\dfrac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}$; $X_B = 0$, $Y_B = \dfrac{Mab\omega^2(a^2-b^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}$.

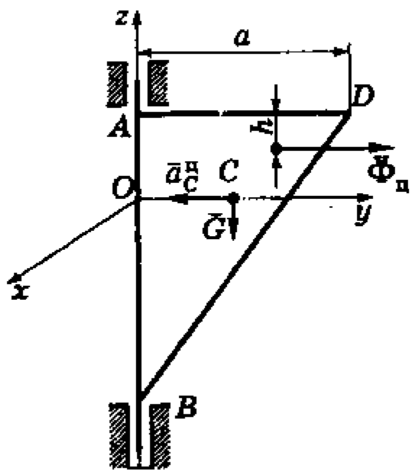
Задача 42.17

С какой угловой скоростью должна вращаться вокруг катета $AB = a$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD, чтобы сила бокового давления на нижнюю опору B равнялась нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета AB.



Решение

Чтобы динамическая реакция в опоре B была равна нулю, должно выполняться условие (см. рисунок):



$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \Phi_ц h - G\frac{1}{3}a = 0. \qquad (1)$$

Найдем силу инерции:

$$\Phi_ц = ma_C^ц = \frac{1}{3}ma\omega^2.$$

Определим положение линии действия силы инерции

$$h = \frac{\left|M_A^\Phi\right|}{\Phi_ц},$$

где $\left|M_A^\Phi\right| = \omega^2 I_{yz} = \omega^2 \dfrac{ma^2}{12}$.

Тогда

$$h = \frac{\omega^2 ma^2}{12}\,\frac{3}{\omega^2 ma} = \frac{a}{4}.$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{ma\omega^2}{3}\frac{a}{4} = \frac{mga}{3}.$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{4g}{a}, \quad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Ответ: $\omega = 2\sqrt{g/a}$.

Задача 42.18

Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длины L и массы M_1, противовеса E и груза K массы M_2 каждый. (См. рисунок к задаче 34.31.) При включении постоянного тормозящего момента кран, вращаясь до этого с угловой скоростью, соответствующей $n = 1{,}5$ об/мин, останавливается через 2 с.

Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, противовес с грузом как точечные массы, определить динамические реакции опор A и B крана в конце его торможения. Расстояние между опорами крана $AB = 3$ м, $M_2 = 5$ т, $M_y = 8$ т, $\alpha = 45°$, $L = 30$ м, $l = 10$ м, центр масс всей системы находится на оси вращения; отклонением груза от плоскости крана пренебречь.

Оси x, y связаны с краном. Стрела CD находится в плоскости yz.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.31 (положив $M_2 = M_3$).

Решение

Из решения задачи 34.31 знаем, что

$$I_{xy} = I_{xz} = 0,$$

$$I_{yz} = \frac{M_3 + 1/3M_1}{2} L^2 \sin 2\alpha - M_3 L l \sin\alpha.$$

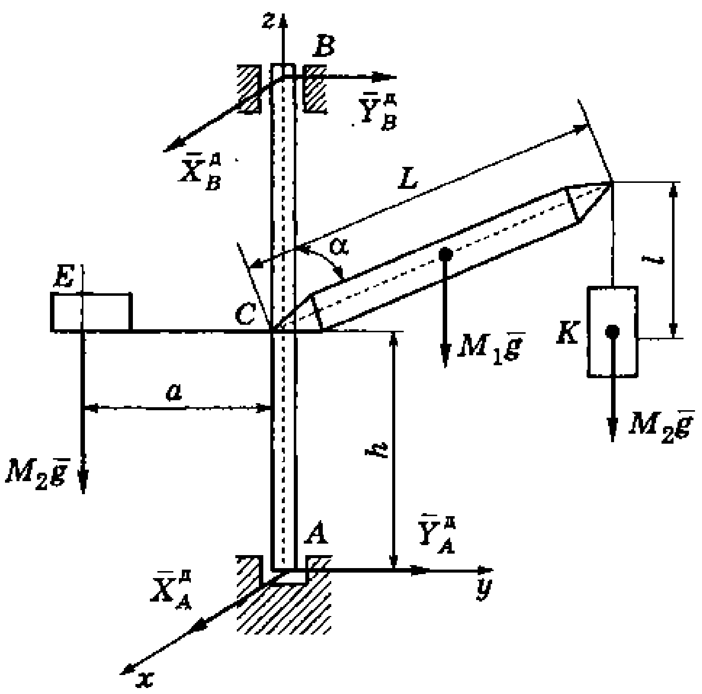
Определим динамические реакции опор (см. рисунок):

$$X_A^{д} + X_B^{д} = -\omega^2 M x_C - \varepsilon M y_C, \qquad (1)$$

$$Y_A^{д} + Y_B^{д} = -\omega^2 M y_C + \varepsilon M x_C, \qquad (2)$$

$$-Y_B^{д} AB = \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz}, \qquad (3)$$

$$X_B^{д} AB = -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz}. \qquad (4)$$



Поскольку согласно условию центр масс крана находится на оси AB, то $x_C = y_C = 0$. Динамические реакции необходимо определить в конце торможения крана, поэтому $\omega \approx 0$. Найдем угловое замедление крана при торможении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Так как $\omega = 0$, то

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\pi n}{30t}.$$

С учетом этого уравнения (1)–(4) примут вид

$$X_A^д + X_B^д = 0, \tag{5}$$

$$Y_A^д + Y_B^д = 0, \tag{6}$$

$$-Y_B^д \cdot AB = 0, \tag{7}$$

$$X_B^д \cdot AB = \frac{\pi n}{30t}\left(\frac{M_3 + \frac{M_1}{3}}{2} L^2 \sin 2\alpha - M_3 L l \sin\alpha\right). \tag{8}$$

Решив совместно уравнения (7) и (6), получим

$$Y_A = -Y_B = 0.$$

Из уравнения (8) найдем

$$X_B^{д} = \frac{\pi n}{AB \cdot 30t}\left(\frac{M_3 + \frac{M_1}{3}}{2}L^2 \sin 2\alpha - M_3 L l \sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 1,5}{3 \cdot 30 \cdot 2}\left(\frac{5000 + \frac{8000}{3}}{2} \cdot 30^2 \cdot \sin 90° - 5000 \cdot 30 \cdot 10 \cdot \sin 45°\right) =$$

$$= 62\ 525\ (\text{Н}) = 62,5\ (\text{кН}).$$

Тогда согласно уравнению (5)

$$X_A^{д} = -X_B^{д} = -62,5\ \text{кН}.$$

Примечание. В задачнике дан неточный ответ.

Ответ: $Y_A = -Y_B = 0, \ X_B = -X_A = 62,5$ кН.

43. Смешанные задачи

Методические указания к решению задач

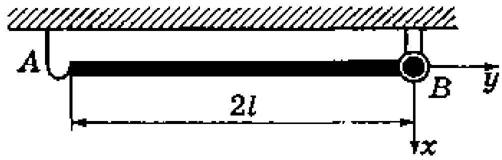
Для решения смешанных задач требуется знание всех теорем динамики.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить тело, движение которого рассматривается.
2. Показать на рисунке все силы, действующие на тело, включая реакции связей.
3. Записать в общем виде применяемые теоремы (следствия теорем) или уравнения.
4. Составить аналитические выражения для данной задачи и найти в общем виде искомые величины.

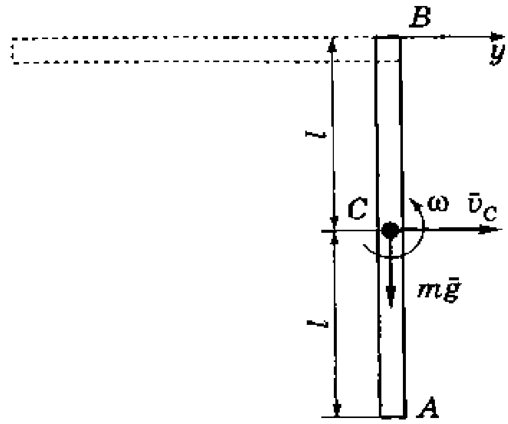
Задачи и решения

Задача 43.1



Однородная тяжелая балка AB длины $2l$ при закрепленных концах находится в горизонтальном положении. В некоторый момент конец A освобождается, и балка начинает падать, вращаясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец B; в момент, когда балка становится вертикальной, освобождается и конец B. Определить в последующем движении балки траекторию ее центра масс и угловую скорость ω.

Решение



Когда стержень достигает вертикального положения и освобождается от связи, в точке B осуществляется переход от вращательного движения к плоскопараллельному. Вычислим скорость центра масс стержня v_C в вертикальном положении и угловую скорость ω (см. рисунок).

По теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_k^e$$

или

$$T = \sum A_k^e, \qquad (1)$$

$T_0 = 0$, так как стержень начал вращаться из состояния покоя.

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{1}{2} I_B \omega^2,$$

где $I_B = \frac{1}{3} m(2l)^2 = \frac{4}{3} ml^2$ — момент инерции.

Тогда

$$T = \frac{2}{3} ml^2 \omega^2. \qquad (2)$$

Суммарная работа внешних сил характеризуется работой силы тяжести $m\bar{g}$ при переходе стержня из горизонтального в вертикальное положение, т.е. при его повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. При этом центр тяжести C опускается на расстояние l и тогда

$$\sum A_k^e = mgl. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$\frac{2}{3} ml^2 \omega^2 = mgl.$$

Откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}. \qquad (4)$$

Найдем скорость центра масс

$$v_C = \omega l = \sqrt{\frac{3}{2} gl}. \qquad (5)$$

Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения стержня:

$$m\ddot{x}_C = mg, \tag{6}$$

$$m\ddot{y}_C = 0, \tag{7}$$

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = 0. \tag{8}$$

Из равенства (6) следует, что

$$\ddot{x}_C = g \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_C = gt + C_1, \\ x_C = \dfrac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{cases} \tag{9}$$

Используя начальные условия:

$$t = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \ \ x(0) = l,$$

из системы уравнений (9) найдем, что $C_1 = 0$, $C_2 = l$, тогда

$$x = \frac{gt^2}{2} + l. \tag{10}$$

Из уравнения (7) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_C &= C_3, \\ y_C &= C_3 t + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}(0) = v_C$, $y(0) = 0$, из системы (11) найдем, что $C_3 = v_C$, $C_4 = 0$.

Тогда

$$y = v_C t.$$

Откуда

$$t = \frac{y}{v_C}.$$

Подставив полученное значение t в формулу (10), определим уравнение траектории в координатной форме:

$$x = \frac{gy^2}{2v^2} + l. \tag{12}$$

Подставим в уравнение (12) выражение (5), получим

$$x = \frac{2gy^2}{2 \cdot 3gl} + l$$

или

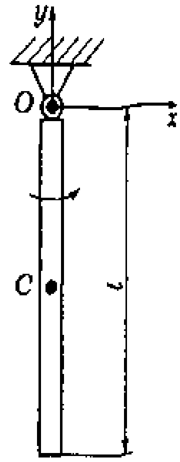
$$y^2 = 3lx - 3l^2.$$

Из уравнения (8) следует, что

$$\omega = \text{const}.$$

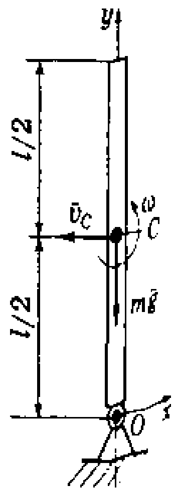
Ответ: парабола $y^2 = 3lx - 3l^2$; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

Задача 43.2



Тяжелый однородный стержень длины l подвешен своим верхним концом на горизонтальной оси O. Стержню, находившемуся в вертикальном положении, была сообщена угловая скорость $\omega_0 = 3\sqrt{g/l}$. Совершив пол-оборота, он отделяется от оси O. Определить в последующем движении стержня траекторию его центра масс и угловую скорость вращения ω.

Решение



Найдем скорость центра масс v_C и угловую скорость ω стержня в момент его отделения от точки O, т.е. до начала плоскопараллельного движения.

Скорость центра масс определим по теореме об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (1)$$

В данном случае кинетическая энергия, сообщенная стержню в начальном положении,

$$T_0 = \frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \cdot 9\frac{g}{l} = \frac{3}{2} mgl. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия стержня в конечном (наивысшем) положении

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2. \qquad (3)$$

Тогда работа внешних сил (силы тяжести $m\bar{g}$) по перемещению стержня из низшего в наивысшее положение, т.е. когда угол поворота стержня $\varphi = \pi$ и центр его тяжести поднялся на высоту $h = l$,

$$\sum A_k^e = -mgl. \tag{4}$$

Подставим выражения (2)–(4) в формулу (1), получим

$$\frac{1}{6}ml^2\omega^2 - \frac{3}{2}mgl = -mgl \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \tag{5}$$

Определим скорость центра масс

$$v_C = \omega\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3g}{4}l}. \tag{6}$$

Составим дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения стержня:

$$m\ddot{x}_C = 0, \tag{7}$$

$$m\ddot{y}_C = -mg, \tag{8}$$

$$\frac{Id\omega}{dt} = 0. \tag{9}$$

Из уравнения (7) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_C &= C_1, \\ x_C &= C_1 t + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $\dot{x}_C(0) = -v_C$, $x_C(0) = 0$, из системы уравнений (10) найдем: $C_1 = -v_C$, $C_2 = 0$.

Тогда с учетом значений постоянных интегрирования

$$x_C = -v_C t.$$

Откуда

$$t = \frac{x_C}{v_C}. \tag{11}$$

Из уравнения (8) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_C &= -gt + C_3, \\ y_C &= -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}_C(0) = 0$, $y_C(0) = \frac{l}{2}$, из системы уравнений (12) найдем, что

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{l}{2}.$$

Тогда

$$y_C = -\frac{gt^2}{2} + \frac{l}{2}. \tag{13}$$

Подставим выражение (11) в равенство (13) и определим уравнение траектории центра масс стержня в координатной форме:

$$y_C = -\frac{gx_C^2}{2v_C^2} + \frac{l}{2}.$$

Это уравнение с учетом выражения (6) примет вид

$$y_C = \frac{l}{2} - \frac{4gx_C^2}{2 \cdot 3gl}$$

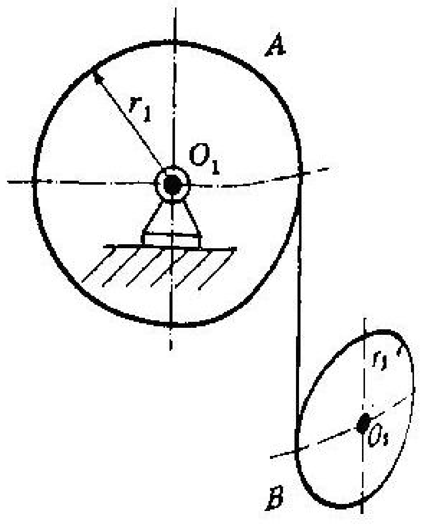
или

$$y_C = \frac{l}{2} - \frac{2}{3l}x_C^2$$ — уравнение параболы.

Ответ: парабола $y_C = \frac{l}{2} - \frac{2}{3l}x_C^2$; $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.

Задача 43.3

Два однородных круглых цилиндра A и B, массы которых соответственно равны M_1 и M_2, а радиусы оснований r_1 и r_2, обмотаны двумя гибкими нитями, завитки которых расположены симметрично относительно средних плоскостей, параллельных основаниям цилиндров; оси цилиндров горизонтальны, причем образующие их перпендикулярны линиям наибольших скатов. Ось цилиндра A неподвижна; цилиндр B падает из состояния покоя под действием силы тяжести.



определить в момент t после начала движения, предполагая, что в этот момент нити еще остаются намотанными на оба цилиндра: 1) угловые скорости ω_1 и ω_2 цилиндров, 2) пройденный центром масс цилиндра B путь s и 3) натяжение T нитей.

Решение

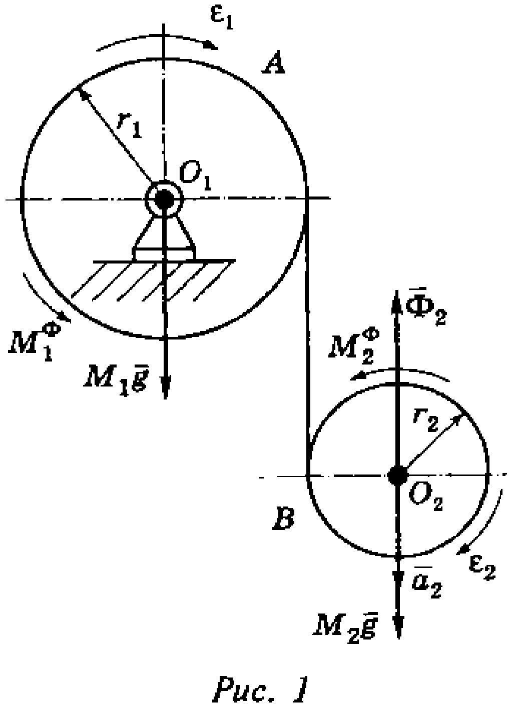


Рис. 1

Мысленно остановим механическую систему, уравновешивая ее силой инерции Φ_2 второго цилиндра и моментами сил инерции M_1^Φ и M_2^Φ (рис. 1):

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2(a_2^e + a_2^r) = M_2(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2),$$

$$M_1^\Phi = I_1\varepsilon_1 = \frac{1}{2} M_1 r_1^2 \varepsilon_1, \qquad (1)$$

$$M_2^\Phi = I_2\varepsilon_2 = \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \varepsilon_2.$$

При этом учтено, что векторы переносного и относительного ускорений $\bar{a}_2^e$ и $\bar{a}_2^r$ параллельны и, следовательно, их можно складывать алгебраически, а также то, что цилиндры однородные, т.е.

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 r_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{2} M_2 r_2^2.$$

Выберем в качестве уравнения «равновесия» уравнение

$$\sum M_{O_1} = 0,$$

или

$$M_1^\Phi + M_2^\Phi + \Phi_2(r_1 + r_2) - M_2 g(r_1 + r_2) = 0. \qquad (2)$$

С учетом выражений (1) уравнение (2) примет вид

$$M_1 r_1^2 \varepsilon_1 + M_2 r_2^2 \varepsilon_2 + 2M_2(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2)(r_1 + r_2) - 2M_2 g(r_1 + r_2) = 0$$

или

$$(M_1 r_1^2 + 2M_2 r_1^2 + 2M_2 r_1 r_2)\varepsilon_1 + (3r_2^2 + 2r_1 r_2)M_2\varepsilon_2 - 2M_2 g(r_1 + r_2) = 0. \qquad (3)$$

Если рассмотреть цилиндры отдельно и учесть, что цилиндр B совершает плоскопараллельное движение, то получим:

для цилиндра A (рис. 2)

$$\sum M_{O_1} = 0$$

или

$$M_1^{\Phi} - Tr_1 = 0; \tag{4}$$

для цилиндра B (рис. 3)

$$\sum M_{O_2} = 0$$

или

$$M_2^{\Phi} - Tr_2 = 0. \tag{5}$$

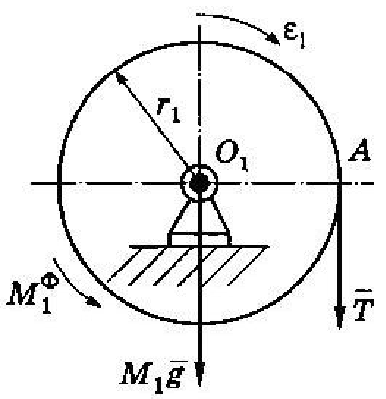


Рис. 2

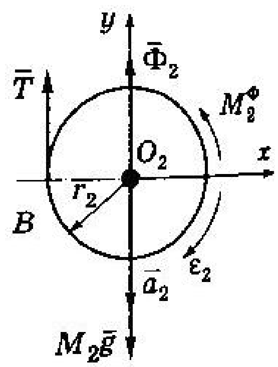


Рис. 3

Приравняем значения T из выражений (4) и (5):

$$\frac{M_1^{\Phi}}{r_1} = \frac{M_2^{\Phi}}{r_2},$$

учитывая выражения (1), получим

$$M_1 r_1 \varepsilon_1 = M_2 r_2 \varepsilon_2. \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что

$$\varepsilon_2 = \frac{M_1 r_1}{M_2 r_2}\varepsilon_1. \tag{7}$$

Подставим выражение (7) в формулу (3):

$$(3M_1 r_1^2 + 3M_1 r_1 r_2 + 2M_2 r_1^2 + 2M_2 r_1 r_2)\varepsilon_1 - 2M_2 g(r_1 + r_2) = 0$$

После преобразований получим

$$r_1(3M_1+2M_2)(r_1+r_2)\varepsilon_1 = 2M_2g(r_1+r_2).$$

Откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{2M_2g}{r_1(3M_1+2M_2)}.$$

Подставим это значение ε_1 в выражение (7), тогда

$$\varepsilon_2 = \frac{2M_1g}{r_2(3M_1+2M_2)}.$$

Из уравнения (4) найдем натяжение нити

$$T = \frac{M_1M_2g}{3M_1+2M_2}.$$

Так как движение началось из состояния покоя, т.е. $\omega_1(0)=0$, $\omega_2(0)=0$, то в момент времени t угловые скорости цилиндров будут:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t = \frac{2gM_2}{r_1(3M_1+2M_2)}t,$$

$$\omega_2 = \varepsilon_2 t = \frac{2gM_1}{r_2(3M_1+2M_2)}t.$$

Ускорение a_2 центра масс цилиндра B найдем из выражения для Φ_2 [см. формулы (1)]:

$$a_2 = a_2^e + a_2^r = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 = \frac{2(M_1+M_2)g}{3M_1+2M_2}.$$

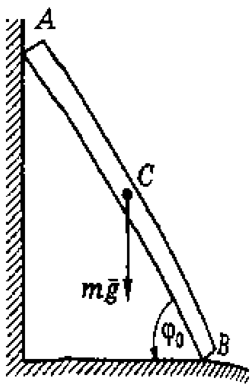
Отсюда с учетом того, что $\dot{s}(0)=0$, $s(0)=0$, получим

$$s = \frac{a_2t^2}{2} = \frac{g(M_1+M_2)}{3M_1+2M_2}t^2.$$

Ответ: 1) $\omega_1 = \dfrac{2gM_2}{r_1(3M_1+2M_2)}t$, $\omega_2 = \dfrac{2gM_1}{r_2(3M_1+2M_2)}t$;

2) $s = \dfrac{g(M_1+M_2)}{3M_1+2M_2}t^2$; 3) $T = \dfrac{M_1M_2g}{3M_1+2M_2}$.

Задача 43.4



Однородный стержень AB длины a поставлен в вертикальной плоскости под углом φ_0 к горизонту так, что концом A он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом B — на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости. 1) Определить угловую скорость и угловое ускорения стержня. 2) Найти, какой угол φ_1 будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены.

Решение

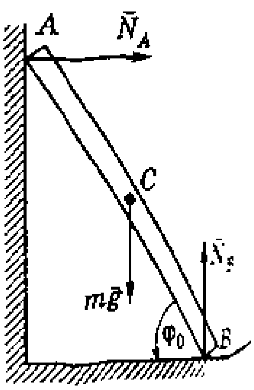
1) Применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \tag{1}$$

где T_0 — кинетическая энергия при $\varphi = \varphi_0$, $T_0 = 0$; T — кинетическая энергия при произвольном угле φ — вычисляется по формуле (теорема Кенига):

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + I_C\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left[\dot{x}_C = \frac{a}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \dot{y}_C = -\frac{a}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad I_C = \frac{ma^2}{12}\right] =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{a^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right) + \frac{ma^2}{12}\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6}.$$



Работа силы тяжести $m\bar{g}$ при изменении угла от φ_0 до φ (см. рисунок)

$$\sum A_k^e = \frac{mga}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{ma^2\dot{\varphi}^2}{6} = \frac{mga}{2}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi).$$

Откуда

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi).$$

Значит, угловая скорость стержня AB

$$\dot\varphi=\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}. \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) и найдем угловое ускорение $\ddot\varphi$ стержня:

$$\frac{d\dot\varphi^2}{dt}=2\dot\varphi\ddot\varphi=-\frac{3g}{a}\dot\varphi\cos\varphi,$$

откуда

$$\ddot\varphi=-\frac{3g}{2a}\cos\varphi.$$

2) Реакция стены в точке A

$$N_A=m\ddot x_C=\frac{ma}{2}(\ddot\varphi\sin\varphi+\dot\varphi^2\cos\varphi)=$$

$$=\frac{ma}{2}\left[-\frac{3g}{2a}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)\cos\varphi\right].$$

В момент, когда стержень отойдет от стены, $N_A=0$, т.е.

$$\sin\varphi_1=\frac{2}{3}\sin\varphi_0.$$

Ответ: 1) $\dot\varphi=\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}$; $\ddot\varphi=-\frac{3g}{2a}\cos\varphi$; 2) $\sin\varphi_1=\frac{2}{3}\sin\varphi_0$.

Задача 43.5

Использовав условие предыдущей задачи, определить угловую скорость $\dot\varphi$ стержня и скорость нижнего его конца в момент падения стержня на пол.

Решение

После отделения стержня AB от стены горизонтальная скорость его центра масс постоянна и равна

$$v_{Cx}=\frac{a}{2}\dot\varphi\sin\varphi\Big|_{\varphi=\arcsin\frac{2}{3}\sin\varphi}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3g}{a}\left(\sin\varphi_0-\frac{2}{3}\sin\varphi_0\right)}\frac{2}{3}\sin\varphi_0=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{a}\sin\varphi_0}\cdot\frac{2}{3}\sin\varphi_0=\frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}.$$

В момент отделения от стены стержень совершает мгновенно-поступательное движение. Поэтому

$$\dot{v}_B = v_{Cx} = \frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}.$$

Кинетическая энергия стержня AB после отделения от стены

$$T = \frac{m}{2}(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) + \frac{ma^2}{12}\frac{\dot\varphi^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{ga}{9}\sin^3\varphi_0 + \frac{a^2}{4}\dot\varphi^2\cos^2\varphi\right) + \frac{ma^2\dot\varphi^2}{24};$$

при падении, т.е. при $\varphi = 0$,

$$T_{\varphi=0} = \frac{mga}{18}\sin^3\varphi_0 + \frac{ma^2\dot\varphi^2}{6}.$$

Итак, применив теорему об изменении кинетической энергии в промежутке от $\varphi = \arcsin\frac{2}{3}\sin\varphi_0$ до $\varphi = 0$, найдем угловую скорость стержня при падении:

$$\frac{mag}{18}\sin^3\varphi_0 + \frac{ma^2\dot\varphi^2}{6} - \frac{mga}{6}\sin\varphi_0 = \frac{mga}{2}\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_0 - \sin 0°\right),$$

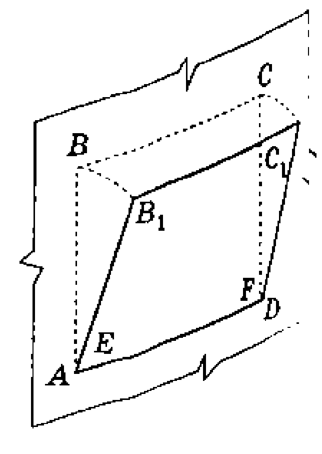
$$\frac{ma^2\dot\varphi^2}{6} = \frac{mga}{2}\sin\varphi_0\left(1 - \frac{\sin^2\varphi_0}{9}\right),$$

откуда

$$\dot\varphi|_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}.$$

Ответ: $\dot\varphi = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}$; $v_B = \frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}$.

Задача 43.6

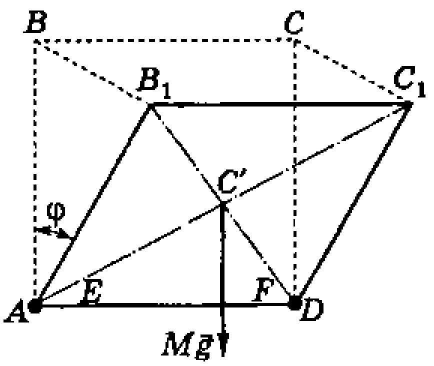


Тонкая однородная доска $ABCD$ прямоугольной формы прислонена к вертикальной стене и опирается на два гвоздя E и F без головок; расстояние AD равно FE. В некоторый момент доска начинает падать с ничтожно малой начальной угловой скоростью, вращаясь вокруг прямой AD. Исключая возможность скольжения доски вдоль гвоздей, определить

$\angle BAB_1$, при котором горизонтальная составляющая реакции направление, и угол α_2 в момент отрыва доски от гвоздей.

н и е

ним теорему об изменении кинеэнергии:



$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

$$T = \frac{m \cdot AB^2}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{2};$$

$$\cdot \frac{AB}{2}(1 - \cos\varphi), \quad \varphi = \angle BAB_1 = \alpha.$$

ювании теоремы о движении центра масс (в данном случае запишем:

$$m\ddot{x}_{C'} = N_x, \quad m\ddot{y}_{C'} = N_y - mg.$$

м угловую скорость доски

$$\dot{\varphi} = \frac{m \cdot AB^2 \cdot \dot{\varphi}^2}{6} = \frac{mg \cdot AB}{2}(1 - \cos\varphi),$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g(1 - \cos\varphi)}{AB}. \tag{1}$$

фференцируем это выражение и найдем угловое ускорение

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{3g\sin\varphi}{AB}\dot{\varphi},$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g\sin\varphi}{2AB}. \tag{2}$$

инаты центра масс доски (см. рисунок)

$$x_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot \sin\varphi, \quad y_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot \cos\varphi,$$

$$\dot{x}_{C'} = \frac{AB}{2} \cdot \dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{y}_{C'} = -\frac{AB}{2} \cdot \dot{\varphi}\sin\varphi;$$

$$\ddot{x}_{C'} = \frac{AB}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi),$$

$$\ddot{y}_{C'} = -\frac{AB}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi). \qquad (3)$$

Горизонтальная составляющая реакции изменит направление при $N_x = m\ddot{x}_C = 0$, т.е. при

$$\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

Подставим в уравнение (4) выражения (1) и (2) и определим угол φ_1, при котором изменяется направление горизонтальной реакции N_x:

$$\frac{3g\sin\varphi\cos\varphi}{2AB} - \frac{3g(1-\cos\varphi)\sin\varphi}{AB} = 0$$

или

$$\cos\varphi_1 - 2 + 2\cos\varphi_1 = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi_1 = \frac{2}{3}, \quad \varphi_1 = \alpha_1 = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'.$$

Вертикальная составляющая реакции изменит направление при $N_y = m\ddot{y}_C + mg = 0$, т.е. при

$$\ddot{y}_{C'} + g = 0. \qquad (5)$$

Найдем угол φ_2, при котором произойдет отрыв доски от гвоздей. Подставим выражение (3) в уравнение (5):

$$-\frac{AB}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + g = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{3\sin^2\varphi}{2} + 3(1-\cos\varphi)\cos\varphi\right] + 1 = 0,$$

$$4 - 3\sin^2\varphi - 6\cos\varphi + 6\cos^2\varphi = 0,$$

$$9\cos^2\varphi - 6\cos\varphi + 1 = 0.$$

Тогда

$$\cos\varphi_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'.$$

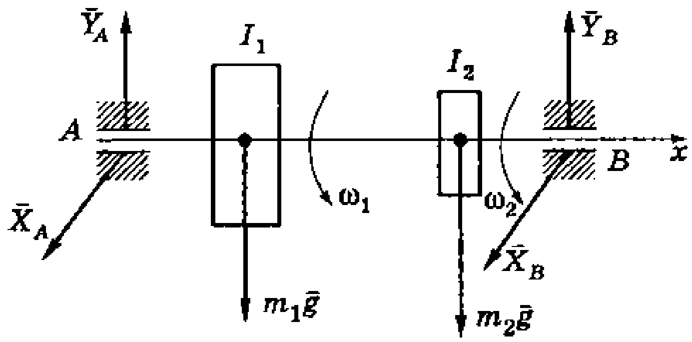
Ответ: $\alpha_1 = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$; $\alpha_2 = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

Задача 43.7

Два диска вращаются вокруг одной и той же оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2; моменты инерции дисков относительно этой оси равны I_1 и I_2. Определить потерю кинетической энергии в случае, когда оба диска будут внезапно соединены фрикционной муфтой. Массой ее пренебречь.

Решение

Поскольку моменты внешних сил, действующих на вращающиеся диски (см. рисунок), относительно оси вращения x равны нулю, то кинетический момент остается постоянным (векторы внешних сил пересекают ось x).



Следовательно,

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2},$$

где ω — угловая скорость дисков после соединения.

Для определения потери кинетической энергии применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$\Delta T = T_2 - T_1,$$

где T_2 — кинетическая энергия системы до соединения дисков; T_1 — кинетическая энергия соединенных дисков.

Найдем

$$T_2 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\right)^2.$$

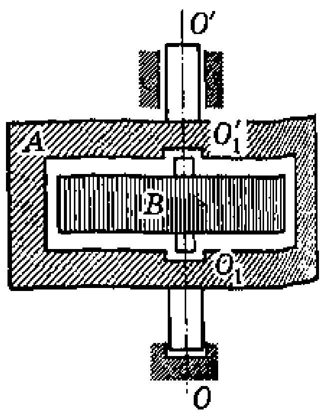
Тогда

$$\Delta T = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\right)^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{I_1^2\omega_1^2 + 2I_1\omega_1 I_2\omega_2 + I_2^2\omega_2^2}{I_1 + I_2} = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Ответ: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$

Задача 43.8



Тело A вращается без трения относительно оси OO' с угловой скоростью ω_A. В теле A на оси O_1O_1' помещен ротор B, вращающийся в ту же сторону с относительной скоростью ω_B. Оси OO' и O_1O_1' расположены на одной прямой. Моменты инерции тела A и ротора B относительно этой прямой равны I_A и I_B. Пренебрегая потерями, определить работу, которую должен совершить мотор, установленный в теле A, для сообщения ротору B такой угловой скорости, при которой тело A остановится.

Решение

Применим к вращающимся телам A и B теорему об изменении кинетического момента механической системы:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e).$$

В этом случае момент мотора — внутренний фактор, действующий как на тело A, так и на тело B. Следовательно кинетический момент системы постоянен, т.е.

$$I_A\omega_A + I_B(\omega_A + \omega_B) = I_B\omega \Rightarrow \omega = \frac{I_A}{I_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B.$$

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = A,$$

где A – работа мотора.

Начальная энергия системы

$$T_0 = \frac{I_A\omega_A^2}{2} + \frac{I_B(\omega_A + \omega_B)^2}{2}.$$

Конечная энергия системы

$$T = \frac{I_B\omega^2}{2} = \frac{1}{2}I_B\left(\frac{I_A}{I_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B\right)^2.$$

Тогда работа, которую должен совершить мотор,

$$A = \frac{1}{2}I_B\left(\frac{I_A}{I_B}\omega_A + \omega_A + \omega_B\right)^2 - \frac{I_A\omega_A^2}{2} - \frac{I_B(\omega_A + \omega_B)^2}{2} =$$

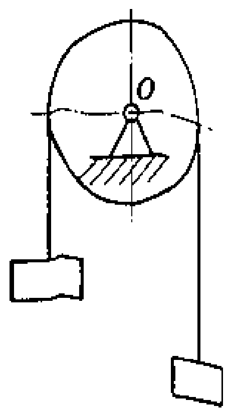
$$= \frac{1}{2}I_B\left(\frac{I_A^2}{I_B^2}\omega_A^2 + \omega_A^2 + \omega_B^2 + 2\frac{I_A}{I_B}\omega_A^2 + 2\frac{I_A}{I_B}\omega_A\omega_B + 2\omega_A\omega_B\right) - \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 -$$

$$-\frac{1}{2}I_B\omega_A^2 - I_B\omega_A\omega_B - \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 = \frac{1}{2}I_A\left[\omega_A^2\left(1 + \frac{I_A}{I_B}\right) + 2\omega_A\omega_B\right].$$

Ответ: $A = \frac{1}{2}I_A\left[\omega_A^2\left(1 + \frac{I_A}{I_B}\right) + 2\omega_A\omega_B\right].$

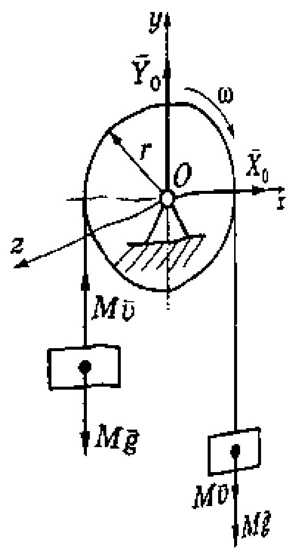
Задача 43.9

На шкив, вращающийся без сопротивления вокруг горизонтальной оси O с угловой скоростью ω_0, накинули ремень с двумя грузами на концах. Шкив — однородный диск массы m и радиуса r, масса каждого из грузов $M = 2m$. Считая начальные скорости грузов равными нулю, определить, с какой скоростью они будут двигаться после того, как скольжение ремня о шкив прекратится. Найти также работу сил трения ремня о шкив.



Решение

Применим теорему об изменении кинетического момента системы (шкив и два груза) относительно оси z, перпендикулярной плоскости рисунка:



$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}(\bar{F}_k^e).$$

Так как $\sum M_{Oz}(\bar{F}_k^e) = 0$, то $L_{Oz} = \text{const}$. Тогда

$$I\omega_0 = I\omega + 2Mvr,$$

где v — скорость груза, $v = \omega r$.

Следовательно,

$$\frac{mr^2}{2}\omega_0 = \frac{mr^2}{2}\omega + 2 \cdot 2m\omega r^2 \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{9}.$$

Значит, скорость каждого груза

$$v = \omega r = \frac{1}{9}\omega_0 r.$$

Для определения работы сил трения $A_{\text{тр}}$ применим теорему об изменении кинетической энергии системы, имея в виду, что суммарная работа сил тяжести грузов равна нулю:

$$A_{\text{тр}} = T - T_0 \left[T = \frac{I\omega^2}{2} + 2 \cdot \frac{Mv^2}{2},\ T_0 = \frac{I\omega_0^2}{2} \right] \Rightarrow$$

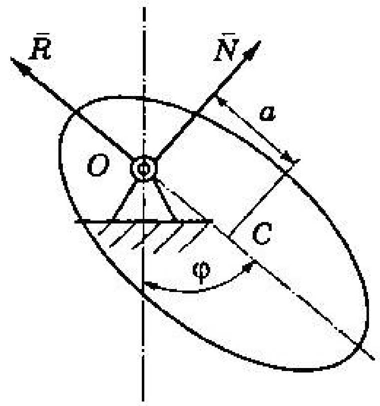
$$\Rightarrow A_{\text{тр}} = \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2} - \frac{2\cdot 2mv^2}{2} = \frac{1}{2}(I\omega_0^2 - I\omega^2 - 4m\omega^2r^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2\omega_0^2}{2} - \frac{mr^2}{2}\,\frac{\omega_0^2}{9^2} - 4m\frac{\omega_0^2}{9^2}r^2\right) = \frac{1}{2}mr^2\omega_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{81} - \frac{4}{81}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}m\omega_0^2r^2.$$

Ответ: $v = \frac{1}{9}\omega_0 r$; $A_{\text{тр}} = \frac{2}{9}m\omega_0^2r^2$.

Задача 43.10



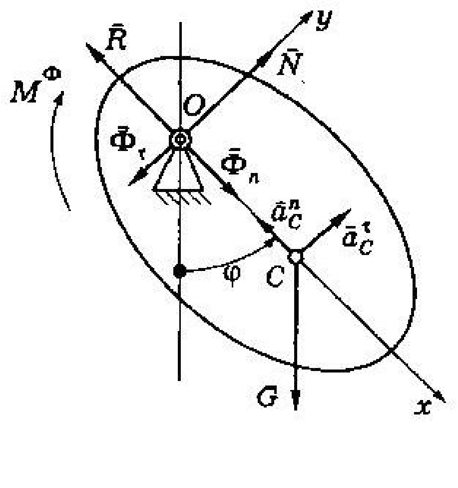
Твердое тело массы M качается вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Расстояния от оси подвеса до центра масс C равно a; радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка, равен ρ. В начальный момент тело было отклонено из положения равновесия на угол φ_0 и отпущено без начальной скорости. Определить две составляющие реакции оси $\bar{R}$ и $\bar{N}$, расположенные вдоль направления, проходящего через точку подвеса и центр масс тела, и перпендикулярно ему. Выразить их в зависимости от угла φ отклонения тела от вертикали.

Решение

Рассмотрим колебательное движение тела.

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения тела относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка:

$$I\ddot{\varphi} = -Ga\sin\varphi.$$



Так как $I = M(\rho^2 + a^2)$, то

$$\ddot{\varphi} = -\frac{ga}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi$$

или

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{ga}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ga}{\rho^2 + a^2}\cos\varphi + C.$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, найдем постоянную интегрирования:

$$C = -\frac{ga}{\rho^2 + a^2}\cos\varphi_0.$$

Тогда

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{ga}{\rho^2 + a^2}\cos\varphi - \frac{ga}{\rho^2 + a^2}\cos\varphi_0 = \frac{ga}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Силы инерции тела приводим к точке качения O:

$$\overline{\Phi}_\tau = -M\bar{a}_C^\tau, \quad \overline{\Phi}_n = -M\bar{a}_C^n, \quad \overline{M}^\Phi = -I_0\bar{\varepsilon}.$$

Для определения реакции опоры O применим принцип Даламбера:

$$\sum X_k = 0, \quad -R + G\cos\varphi + \Phi_n = 0; \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = 0, \quad N - \Phi_\tau - G\sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Определим

$$\Phi_n = Ma_C^n = M\omega^2 a = M\frac{2ga}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)a =$$

$$= \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

где $\omega = \dot{\varphi}$.

Тогда из уравнения (1) получим значение первой составляющей реакции оси:

$$R = Mg\cos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Поскольку

$$\Phi_\tau = Ma_C^\tau = M\varepsilon a = M\left(\frac{ga}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi\right)a = -\frac{Mga^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi,$$

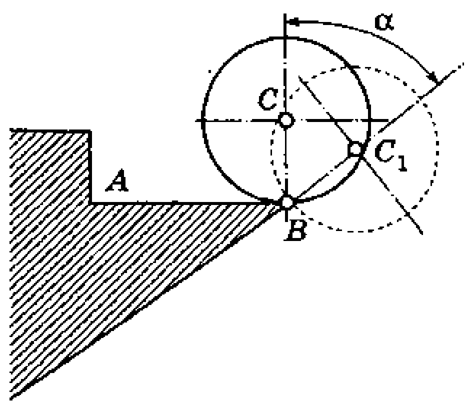
где $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, то из уравнения (2) найдем вторую составляющую реакции оси:

$$N = \Phi_\tau + G\sin\varphi = -\frac{Mga^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi + Mg\sin\varphi = Mg\sin\varphi\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2 + a^2}\right) =$$

$$= Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi.$$

Ответ: $R = Mg\cos\varphi + \dfrac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$; $N = Mg\dfrac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi$.

Задача 43.11

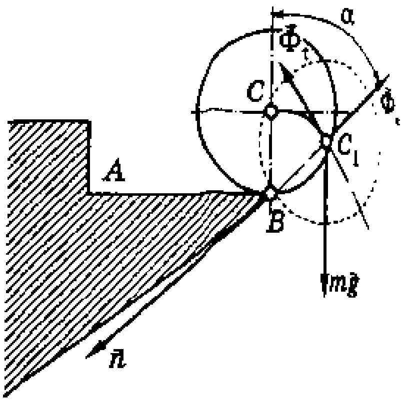


Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки AB, край которой B заострен и параллелен образующей цилиндра. Радиус основания цилиндра r. В момент отделения цилиндра от площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край B, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CBC_1 = \alpha$.

Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки, а также угол α. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Покажем на рисунке центробежную $\Phi_ц$ и тангенциальную $\overline{\Phi}_\tau$ силы инерции и силу тяжести $m\bar{g}$.



В момент отделения цилиндра от площадки реакция опоры равна нулю. На основании принципа Даламбера составим уравнение в проекции на ось $\bar{n}$:

$$mg\cos\alpha - \Phi_ц = 0,$$

где $\Phi_ц = m\omega^2 r$.

Тогда

$$r\omega^2 = g\cos\alpha. \tag{1}$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии, считая, что цилиндр до отделения вращается вокруг точки B:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Так как начальную скорость считаем равной нулю, то $T_0 = 0$. Тогда

$$T = \sum A_k^e. \tag{2}$$

Найдем кинетическую энергию цилиндра в момент отделения его от площадки:

$$T = \frac{I_B\,\omega^2}{2},$$

где $I_B = I_C + mr^2$ — по теореме Гюйгенса – Штейнера, $I_C = \dfrac{mr^2}{2}$ – момент инерции однородного цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс.

Тогда

$$I_B = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2,$$

$$T = \frac{3}{4}mr^2\omega^2. \tag{3}$$

Найдем работу внешних сил

$$\sum A_k^e = mgr\,(1-\cos\alpha). \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2):

$$\frac{3}{4}mr^2\omega^2 = mgr\,(1-\cos\alpha)$$

или

$$r\omega^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\alpha). \tag{5}$$

Приравняем правые части выражений (1) и (5):

$$g\cos\alpha = \frac{4}{3}g(1-\cos\alpha).$$

Откуда

$$\cos\alpha = \frac{4}{7}, \quad \alpha = \arccos\frac{4}{7} = 55{,}1°.$$

Подставим значение $\cos\alpha$ в уравнение (1):

$$r\omega^2 = \frac{4}{7}g$$

и определим угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}.$$

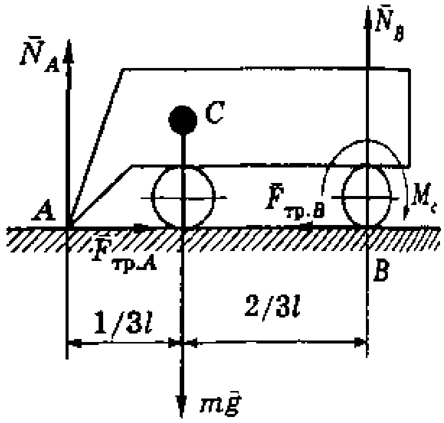
Ответ: $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{7r}}$; $\alpha = \arccos\dfrac{4}{7} = 55{,}1°$.

Задача 43.12

Автомашина для шлифовки льда движется прямолинейно по горизонтальной плоскости катка. Положение центра масс C указано на рисунке к задаче 38.12. В момент выключения мотора машина имела скорость v. Найти путь, пройденный машиной до остановки, если $f_к$ — коэффициент трения качения между колесами автомашины и льдом, а f — коэффициент трения скольжения между шлифующей кромкой A и льдом. Массой колес радиуса r, катящихся без скольжения, пренебречь.

Решение

Определим реакции $\bar{N}_A$, $\bar{N}_B$ и силу трения $\bar{F}_{тр.A}$ (см. рисунок), не учитывая момента сопротивления качения и реакции передних колес. Для этого составим два уравнения «равновесия»:



$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -mg\frac{1}{3}l + N_B l = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = mg\frac{2}{3}l - N_A l = 0. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получим

$$N_B = \frac{1}{3}mg, \quad N_A = \frac{2}{3}mg. \qquad (3)$$

Найдем

$$F_{тр.A} = fN_A = \frac{2}{3}fmg \qquad (4)$$

и момент сопротивления качению

$$M_c = f_к N_B = \frac{1}{3}f_к mg. \qquad (5)$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e = A(\bar{F}_{тр.A}) + A(M_c). \qquad (6)$$

Так как автомашина, пройдя путь s, остановилась, то T — конечная кинетическая энергия — равна нулю, а начальная кинетическая энергия

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (7)$$

Определим работу сил трения. С учетом выражения (4)

$$A(\overline{F}_{\text{тр.}A}) = -F_{\text{тр.}A}s = -\frac{2}{3}fmgs. \tag{8}$$

Работа момента сопротивления качению

$$A(M_{\text{c}}) = -M_{\text{c}}\varphi = -\frac{1}{3}f_{\text{к}}mg\frac{s}{r}. \tag{9}$$

Подставим выражения (7)–(9) в уравнение (6):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{2}{3}fmgs + \frac{1}{3}f_{\text{к}}mg\frac{s}{r}$$

и определим путь, пройденный машиной до остановки:

$$s = \frac{v^2}{2g}\frac{3r}{2fr + f_{\text{к}}}.$$

Ответ: $s = \dfrac{v^2}{2g}\dfrac{3r}{2fr + f_{\text{к}}}$.

Задача 43.13

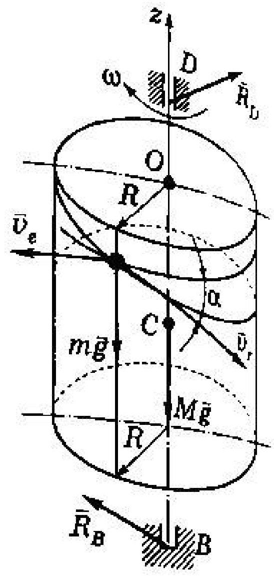
На боковой поверхности круглого цилиндра с вертикальной осью, вокруг которой он может вращаться без трения, вырезан гладкий винтовой желоб с углом подъема α. В начальный момент цилиндр находится в покое; в желоб опускают тяжелый шарик; он падает по желобу без начальной скорости и заставляет цилиндр вращаться. Дано: масса цилиндра M, радиус его R, масса шарика m; расстояние от шарика до оси считаем равным R и момент инерции цилиндра равным $\frac{1}{2}MR^2$. Определить угловую скорость ω, которую цилиндр будет иметь в тот момент, когда шарик опустится на высоту h.

Решение

Применим теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e) = 0. \tag{1}$$

Так как $\sum M_z(\bar{F}_k^e) = 0$, то $L_z = \mathrm{const}$, т.е. $L_z = L_{z0}$.



Поскольку в начальный момент система находилась в покое, то

$$L_{z0} = 0. \tag{2}$$

Кинетический момент системы L_z относительно оси z в произвольный момент времени:

$$L_z = L_z^{ц} + L_z^{ш}. \tag{3}$$

Кинетический момент цилиндра

$$L_z^{ц} = -I_z\omega = -\frac{MR^2\omega}{2}. \tag{4}$$

Момент количества движения шарика

$$L_z^{ш} = mv_{аб}R,$$

где $\bar{v}_{аб} = \bar{v}_r + \bar{v}_e = v_r\cos\alpha - v_e$.

Найдем $v_e = \omega R$, тогда

$$v_{аб} = v_r\cos\alpha - \omega R, \tag{5}$$

а момент количества движения шарика

$$L_z^{ш} = m(v_r\cos\alpha - \omega R)R. \tag{6}$$

Подставим выражения (4) и (6) в формулу (3):

$$L_z = -\frac{MR^2\omega}{2} + m(v_r\cos\alpha - \omega R)R = 0 \tag{7}$$

или

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)R\omega = mv_r\cos\alpha.$$

Откуда

$$v_r = \frac{(M + 2m)R\omega}{2m\cos\alpha}. \tag{8}$$

чим теорему об изменении кинетической энергии меха-
системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

так как $v_0 = 0$;

$$\sum A_k^e = mgh.$$

$$T = mgh. \tag{9}$$

ческая энергия системы

$$T = T_ц + T_ш. \tag{10}$$

ческая энергия цилиндра

$$T_ц = I_z \frac{\omega^2}{2} = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

ческая энергия шарика

$$T_ш = \frac{mv^2}{2}, \tag{11}$$

$$+ v_e^2 + 2v_e v_r \cos(180° - \alpha) = v_r^2 + v_e^2 - 2v_e v_r \cos\alpha.$$

$$T_ш = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_e^2 - 2v_e v_r \cos\alpha). \tag{12}$$

вим выражения (11) и (12) в формулу (10):

$$T = \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{m}{2}(v_r^2 + v_e^2 - 2v_e v_r \cos\alpha) =$$

$$= \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} - mv_r R\omega\cos\alpha =$$

$$= \frac{R^2\omega^2}{4}(M + 2m) + \frac{m}{2}(v_r^2 - 2v_r R\omega\cos\alpha), \tag{13}$$

а выражение (8) в формулу (13) и найдем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{R^2\omega^2}{4}(M+2m) + \frac{m}{2}\left[\frac{(M+2m)^2 R^2\omega^2}{4m^2\cos^2\alpha} - \frac{2(M+2m)R^2\omega^2}{2m}\right] =$$

$$= \frac{R^2\omega^2}{4}(M+2m) + \frac{1}{8}\frac{(M+2m)^2 R^2\omega^2}{m\cos^2\alpha} - \frac{(M+2m)R^2\omega^2}{2} =$$

$$= \frac{(M+2m)R^2\omega^2}{8}\frac{(M+2m\sin^2\alpha)}{m\cos^2\alpha}. \qquad (14)$$

Подставим выражение (14) в формулу (9):

$$\frac{(M+2m)R^2\omega^2}{8}\frac{(M+2m\sin^2\alpha)}{m\cos^2\alpha} = mgh,$$

откуда определим

$$\omega^2 = \frac{8m^2gh\cos^2\alpha}{(M+2m)R^2(M+2m\sin^2\alpha)}$$

и угловую скорость цилиндра:

$$\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}.$$

О т в е т: $\omega = \dfrac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\dfrac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.

44. Удар

Методические указания к решению задач

Ударом называется явление, при котором за бесконечно малый промежуток времени, т.е. почти мгновенно, скорости точек системы изменяются на конечную величину. Ударные явления можно рассматривать как разовое мгновенное наложение или снятие связей, например, столкновение поступательно движущегося тела с другим неподвижным телом или периодическое наложение и снятие связей (ковка, штамповка, забивка свай и т.п.).

Сила, действующая в течение ничтожно малого промежутка времени τ, но достигающая при этом очень больших значений, называется ***ударной силой*** и обозначается $\overline{F}_{\text{уд}}$. Промежуток времени τ действия $\overline{F}_{\text{уд}}$ называется ***временем удара***.

Так как ударные силы очень велики и за время удара могут изменяться в значительных пределах, то в качестве меры взаимодействия тел при ударе рассматриваются не сами силы, а их импульсы.

Ударным импульсом называют векторную величину

$$\overline{S}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \overline{F}_{\text{уд}} dt. \qquad (44.1)$$

В теории удара импульсами неударных сил (например, силы тяжести) из-за их малости по сравнению с ударными пренебрегают. Перемещениями точек тела за время удара также можно пренебречь, так как эти перемещения имеют порядок величины τ.

Многие величины, характеризующие удар, могут быть получены с помощью теорем динамики общих как для материальной точки, так и для системы материальных точек, а именно: теорем об изменении количества движения, о движении центра масс системы, об изменении кинетического момента и кинетической энергии.

Теорема об изменении количества движения материальной точки при ударе. Пусть скорость точки в начале удара $\overline{v}$, а в конце удара — $\overline{u}$. Тогда

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \overline{S}_{\text{уд}}, \qquad (44.2)$$

т.е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке.

Уравнение (44.2) является основным уравнением теории удара и в этом случае имеет такое же значение, как и основной закон динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ при изучении движения материальной точки под действием неударных сил.

Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Для k-й точки имеем

$$m_k\bar{u}_k - m_k\bar{v}_k = \bar{S}^e_{k\text{уд}} + \bar{S}^i_{k\text{уд}}, \tag{44.3}$$

где $\bar{S}^e_{k\text{уд}}$, $\bar{S}^i_{k\text{уд}}$ — ударные импульсы соответственно внешних и внутренних сил.

Для механической системы, просуммировав n уравнений (44.3) и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных, $\sum\bar{S}^i_{k\text{уд}} = 0$, получим

$$\bar{K} - \bar{K}_0 = \sum\bar{S}^e_{k\text{уд}}, \tag{44.4}$$

т.е. изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

В проекциях на оси декартовых координат

$$K_x - K_{0x} = \sum S^e_{kx},$$

$$K_y - K_{0y} = \sum S^e_{ky},$$

$$K_x - K_{0x} = \sum S^e_{kx}. \tag{44.5}$$

Если $\bar{S}^e_{k\text{уд}} = 0$, то, как следует из уравнения (44.4), количество движения системы за время удара не изменяется.

Теорема о движении центра масс системы при ударе. Выразим количество движения системы через скорость центра масс:

$$\bar{K} = M\bar{u}_C, \quad \bar{K}_O = M\bar{v}_C. \tag{44.6}$$

Тогда с учетом выражений (44.6) уравнение (44.4) примет вид

$$M(\bar{u}_C - \bar{v}_C) = \sum\bar{S}^e_{k\text{уд}}. \tag{44.7}$$

В проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S^e_{kx}, \\ M(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S^e_{ky}, \\ M(u_{Cz} - v_{Cz}) &= \sum S^e_{kz}. \end{aligned}\right\} \qquad (44.8)$$

Следствия из теоремы:

1. Если $\sum \bar{S}^e_{k\text{уд}} = 0$, то $\bar{u}_C = \bar{v}_C$, т.е. количество движения системы и скорость центра масс не изменяются, если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю.

2. Если $\sum S^e_{kx} = 0$, то $u_{Cx} = v_{Cx}$, т.е. проекция количества движения системы и скорости центра масс на ось x не изменяются, если сумма проекций внешних ударных импульсов на эту ось, приложенных к точкам системы, равна нулю.

Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе. Сначала рассмотрим изменение кинетического момента системы при ударе *относительно некоторого центра.*

Умножим векторное равенство (44.2) на радиус-вектор $\bar{r}$, который будет одним и тем же до и после удара. Получим

$$\bar{r} \times m\bar{u} - \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \bar{S}_{\text{уд}}. \qquad (44.9)$$

Это соотношение является выражением теоремы об изменении момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра O при ударе.

Применив аналогичные действия к каждой k-й точке системы (44.3) и просуммировав все выражения, получим

$$\bar{L}_O - \bar{L}^H_O = \sum \bar{M}_O(\bar{S}^e_{k\text{уд}}), \qquad (44.10)$$

где $\bar{L}_O = \sum(\bar{r}_k \times m_k\bar{u}_k)$ – кинетический момент системы относительно центра O после удара; $\bar{L}^H_O = \sum(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k)$ – кинетический момент системы относительно центра O до удара; $\sum \bar{M}_O(\bar{S}^e_{k\text{уд}})$ – геометрическая сумма моментов внешних ударных импульсов относительно центра O.

Следует заметить, что геометрическая сумма моментов внутренних ударных импульсов по свойству внутренних сил равна нулю.

Таким образом, изменение кинетического момента механической системы относительно некоторого центра за время удара равно геометрической сумме моментов внешних ударных импульсов относительно того же центра.

Рассмотрим изменение кинетического момента системы при ударе *относительно оси.*

Спроецируем векторное равенство (44.10) на оси декартовых координат и получим

$$\left.\begin{aligned} L_x - L_x^H &= \sum M_x(\overline{S}_{k\,уд}^e); \\ L_y - L_y^H &= \sum M_y(\overline{S}_{k\,уд}^e); \\ L_z - L_z^H &= \sum M_z(\overline{S}_{k\,уд}^e). \end{aligned}\right\} \tag{44.11}$$

Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси, например оси z, то

$$L_z = I_z\omega,$$
$$L_z^H = I_z\omega_0,$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси z; ω, ω_0 — соответственно угловая скорость вращения тела после и до удара.

Тогда последнее из равенств (44.11) примет вид

$$I_z(\omega - \omega_0) = \sum M_z(\overline{S}_{k\,уд}^e)$$

или

$$\omega - \omega_0 = \frac{\sum M_z(\overline{S}_{k\,уд}^e)}{I_z}. \tag{44.12}$$

В равенство (44.12) не входят моменты ударных импульсов реакций опор, так как они пересекают ось, а ударными импульсами сил трения в опорах пренебрегаем.

Следствия из теоремы:

1. Если $\sum \overline{M}_O(\overline{S}_{k\,уд}^e) = 0$, то из равенства (44.10) следует закон сохранения кинетического момента относительно центра при ударе:

$$\overline{L}_O = \overline{L}_O^H = \text{const}. \tag{44.13}$$

2. Если, например, $\sum M_z(\overline{S}_{k\,уд}^e) = 0$, то из равенства (44.11) получаем закон сохранения кинетического момента относительно оси при ударе

$$L_z = L_z^H = \text{const}. \tag{44.14}$$

Рассмотрим удар точки о неподвижную поверхность. Возможны два случая — прямой удар и косой удар.

Удар называют ***прямым***, если скорость точки $\bar{v}$ перед ударом направлена по нормали к поверхности в точке удара. После удара материальная точка отделится от поверхности в общем случае с некоторой скоростью $\bar{u}$, направленной тоже по нормали к поверхности.

Отношение числового значения скорости после удара $\bar{u}$ к числовому значению скорости до удара $\bar{v}$ называется ***коэффициентом восстановления при ударе***:

$$k = \frac{u}{v}. \tag{44.14}$$

Если $k = 1$, то удар называют *абсолютно упругим*; если $k = 0$, то удар считают *абсолютно неупругим*. При $0 < k < 1$ удар называют *частично упругим*.

Если тело падает с высоты H, а после удара поднимается на высоту h, то

$$k = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \tag{44.15}$$

Удар называется ***косым***, если скорость точки перед ударом направлена под некоторым углом α к нормали поверхности. Угол α называется *углом падения*. В общем случае скорость точки после удара составляет с нормалью некоторый угол β, называемый *углом отражения*. При косом ударе

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}. \tag{44.16}$$

При соударении двух движущихся тел (например, шаров) удар называют ***прямым*** и ***центральным***, если общая нормаль к поверхности тел в точке их касания проходит через центры масс, а скорости центров масс в начале удара направлены по этой нормали, называемой *линией удара*.

Обозначим массу ударяющего тела m_1, а массу ударяемого тела — m_2, скорости их центров масс в начале удара равны соответственно $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, в конце удара — $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ и направлены по линии удара. Для того чтобы удар произошел, до удара должно выполняться неравенство $v_1 > v_2$, а после удара — $u_2 \geq u_1$, так как ударяющее тело не может опередить ударяемое.

В этом случае

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}. \tag{44.17}$$

Если рассматривать соударяющиеся тела как одну систему, тогда ударные импульсы будут внутренними, а так как

$$\sum \bar{S}_k^e = 0,$$

то количество движения до и после удара не изменяется, т.е.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \tag{44.18}$$

Решая совместно уравнения (44.17) и (44.18), получим формулы для определения скорости тел после удара:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \tag{44.19}$$

В случае абсолютно упругого удара ($k = 1$) формулы (44.19) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 &= v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \end{aligned}\right\} \tag{44.20}$$

При абсолютно неупругом ударе ($k = 0$) скорости u_1 и u_2 будут равны. Тогда из равенства (44.18) или из формул (44.19) следует, что

$$u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{44.21}$$

Из формул (44.20) при $m_1 = m_2$ получим, что $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, т.е. при абсолютно упругом ударе тела обмениваются скоростями.

Если второй шар будет двигаться до удара со скоростью v_2 навстречу первому шару, то в формулах (44.19)–(44.21) скорость v_2 следует

ıивать как проекцию на ось, направленную в сторону дви-
ервого шара, и брать со знаком минус.

ма об изменении кинетической энергии при ударе двух тел. При ударе двух тел ($0 < k < 1$) происходит потеря кинетической

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}m_1(v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - u_2)^2\right] \tag{44.22}$$

$$T_0 - T_1 = (1-k^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{44.23}$$

удар абсолютно неупругий ($k = 0$), то $u_1 = u_2 = u$. Тогда

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}m_1(v_1 - u)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2 - u)^2. \tag{44.24}$$

ула (44.24) — это математическое выражение ***теоремы Карно***, может быть сформулирована следующим образом:

тическая энергия, потерянная системой двух тел при абсо-
о неупругом ударе, равна той кинетической энергии, кото-
ımела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными
остями.

янными скоростями называют разности скоростей соуда-
ся тел до и после удара, т.е. $(v_1 - u)$ и $(v_2 - u)$.

ые случаи теоремы Карно.

$v_2 = 0$ (тело неподвижно). Тогда

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2, \tag{44.25}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}T_0.$$

Возможны два случая:

• если $m_1 >> m_2$, то $T_1 \cong T_0$, т.е. потери кинетической энергии не происходит (забивка свай, гвоздей и т.п.);

• если $m_1 << m_2$, то $\frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx 0$, следовательно, $T_1 \approx 0$, т.е. при ударе почти полностью теряется кинетическая энергия, которая затрачивается на деформацию соударяющихся тел (ковка металла, клепка и т.п.).

Центр удара — это точка тела, через которую проходит ударный импульс, не вызывающий ударных реакций в опорах. Если ударный импульс приложить к телу, вращающемуся в некоторых опорах вокруг неподвижной оси, то в этих опорах могут возникнуть ударные реакции. Однако возможно такое условие, при котором ударные реакции будут равны нулю. На практике это имеет весьма важное значение; появление при ударе импульсных реакций нежелательно, так как может привести к поломке частей конструкции.

Чтобы при ударе по телу, закрепленному на оси z, в опорах не возникали ударные реакции, необходимо выполнение следующих условий:

• ударный импульс должен располагаться в плоскости Oxy, перпендикулярной оси z и проходящей через точку O тела, для которой ось z является главной осью инерции;

• удар должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C тела;

• ударный импульс необходимо приложить к телу с той стороны оси вращения, где находится центр масс тела на расстоянии

$$h = \frac{I_z}{Md}, \tag{44.26}$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси вращения; M — масса тела; d — расстояние от оси вращения до центра масс тела.

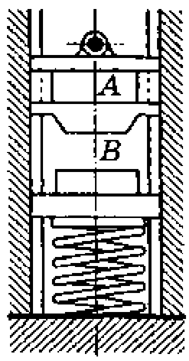
Формула (44.26) совпадает с формулой приведенной длины $l_{пр}$ физического маятника при качании его вокруг горизонтальной оси; точка маятника, отстоящая от оси привеса на расстояние $l_{пр}$, называется центром качаний физического маятника. Поэтому центр удара совпадает с центром качаний физического маятника.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Показать на рисунке соударяющиеся тела, направление векторов их скоростей до и после удара.
2. Показать оси(ось), использование которых при решении задач обязательно.
3. В зависимости от вида движения тел, особенностей удара и конечного результата применить соответствующие теоремы, т.е. воспользоваться формулами (44.2), (44.4), (44.5), (44.7), (44.8), (44.10)–(44.12) и (44.22)–(44.24), или следствия из теорем. При определении коэффициента восстановления при ударе, скорости тел после удара, положения центра удара лучше использовать формулы (44.14)–(44.17), (44.19), (44.20) и (44.26).
4. При решении задач, в которых рассматривается косой удар, векторы скоростей соударяющихся тел нужно разложить на составляющие по направлению общей нормали и общей касательной в точке касания, изучить характер изменения этих составляющих и определить их величину после удара.
5. Искомые величины выразить в общем виде, а затем вычислить их значения с учетом числовых данных.

Задачи и решения

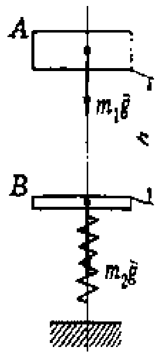
Задача 44.1



Баба A ударного копра падает с высоты 4,905 м и ударяет наковальню B, укрепленную на пружине. Масса бабы 10 кг, масса наковальни 5 кг. Определить, с какой скоростью начнется движение наковальни после удара, если баба будет двигаться вместе с ней.

Решение

Используем закон сохранения количества движения при ударе:



$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

Так как

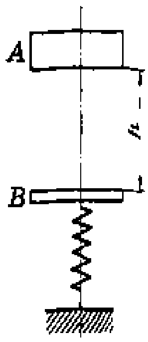
$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}905} = 9{,}81 \text{ (м/с)},$$

то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 9{,}81}{10 + 5} = 6{,}54 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 6,54 м/с.

Задача 44.2



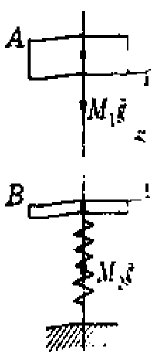
Груз A массы M_1 падает без начальной скорости с высоты h на плиту B массы M_2, укрепленную на пружине, которая имеет коэффициент жесткости c. Найти величину s сжатия пружины после удара в предположении, что коэффициент восстановления равен нулю.

Решение

Наибольшая величина сжатия пружины равна сумме статического сжатия и амплитуды гармонических колебаний плиты после удара, т.е.

$$s = \frac{M_1 g}{c} + a, \tag{1}$$

где a — амплитуда гармонических колебаний $x = a\sin(kt + \alpha)$.



Зная, что при $t = 0$

$$x_0 = -\frac{M_1 g}{c},$$

$$\dot{x}_0 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\sqrt{2gh},$$

получим

$$a\sin\alpha = -\frac{M_1 g}{c},$$

$$ak\cos\alpha = \sqrt{2gh}\,\frac{M_1}{M_1+M_2}.$$

Исключим из этих уравнений α и с учетом того, что

$$k = \sqrt{\frac{c}{M_1+M_2}},$$

получим

$$a^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = a^2 = \left(\frac{M_1 g}{c}\right)^2 + \frac{2ghM_1^2}{k^2(M_1+M_2)^2} =$$

$$= \left(\frac{M_1 g}{c}\right)^2 + \frac{2ghM_1^2}{c(M_1+M_2)},$$

откуда

$$a = \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + 2gh\frac{M_1^2}{c(M_1+M_2)}}.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$s = \frac{M_1 g}{c} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + 2gh\frac{M_1^2}{c(M_1+M_2)}}.$$

Замечание. **В условии задачи следовало бы более корректно поставить вопрос: найти максимальную величину сжатия пружины.**

Ответ: $s = \frac{M_1 g}{c} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{c^2} + 2gh\frac{M_1^2}{c(M_1+M_2)}}$.

Задача 44.3

В приборе для опытного определения коэффициента восстановления шарик из испытуемого материала падает без начальной скорости внутри вертикальной прозрачной трубки с заданной высоты = 50 см на неподвижно закрепленную горизонтальную пластинку из соответствующего материала. Найти коэффициент восстановления, если высота, на которую подскочил шарик после удара, оказалась равной $h_2 = 45$ см.

Решение

Коэффициент восстановления при ударе равен отношению скорости после удара u к скорости до удара v, т.е.

$$k = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{45}{50}} = 0{,}95.$$

Ответ: $k = \sqrt{h_2/h_1} = 0{,}95.$

Задача 44.4

Упругий шарик падает по вертикали с высоты h на горизонтальную плиту, отскакивает от нее вверх, вновь падает на плиту и т.д., продолжая эти движения. Найти путь, пройденный шариком до остановки, если коэффициент восстановления при ударе равен k.

Решение

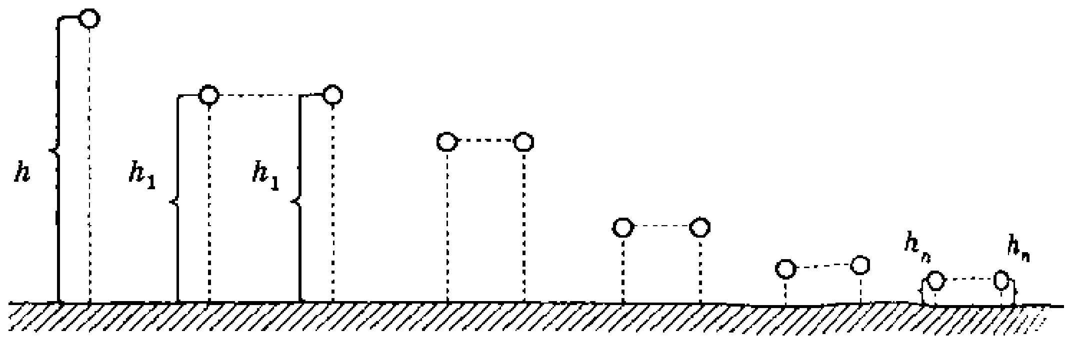
Путь, который пройдет упругий шарик до остановки,

$$s = h + 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_n. \qquad (1)$$

Коэффициент восстановления при ударе (см. рисунок)

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \Rightarrow h_1 = k^2 h,$$

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \Rightarrow h_2 = k^2 h_1 = k^4 h,$$



$$k = \sqrt{\frac{h_3}{h_2}} \Rightarrow h_3 = k^2 h_2 = k^6 h.$$

Таким образом, видна закономерность $h_n = k^{2n} h$.

Подставим найденные значения h_n в уравнение (1) и найдем сумму геометрической прогрессии, которая и будет равна пути, пройденному шариком до остановки:

$$s = h + 2k^2 h + 2k^4 h + 2k^6 h + \ldots + 2k^{2n} h = h + 2h(k^2 + k^4 + \ldots + k^{2n}) =$$

$$= h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n} = h\left(1 + \frac{2k^2}{1-k^2}\right) = \frac{1+k^2}{1-k^2} h, \quad 0 \le k < 1.$$

Ответ: $s = \dfrac{1+k^2}{1-k^2} h.$

Задача 44.5

Два тела массами m_1 и m_2 и коэффициентом восстановления k движутся поступательно по одному и тому же направлению. Каковы должны быть их скорости v_1 и v_2, чтобы после удара догоняющее тело m_1 остановилось, а тело m_2 получило бы заданную скорость u_2?

Решение

Запишем формулы для определения скоростей тел после удара:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2(1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

$$u_2 = v_2 + \frac{m_1(1+k)(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Согласно закону сохранения количества движения при ударе

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{3}$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2) и получим

$$u_1 - u_2 = -k(v_1 - v_2),$$

откуда

$$v_2 = v_1 + \frac{u_1 - u_2}{k}. \tag{4}$$

Тогда согласно формуле (3)

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_1+\frac{m_2(u_1-u_2)}{k},$$

откуда

$$v_1=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}-\frac{m_2(u_1-u_2)}{k(m_1+m_2)}. \qquad (5)$$

Подставим выражение (5) в формулу (4):

$$v_2=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}-\frac{m_2(u_1-u_2)}{k(m_1+m_2)}+\frac{u_1-u_2}{k}=\frac{m_1u_1+m_2u_2}{m_1+m_2}+\frac{m_1(u_1-u_2)}{k(m_1+m_2)}.$$

После удара $u_1=0$, следовательно,

$$v_1=\frac{m_2u_2}{m_1+m_2}+\frac{m_2u_2}{k(m_1+m_2)}=\frac{1+k}{k}\,\frac{m_2}{m_1+m_2}u_2,$$

$$v_2=\frac{m_2u_2}{m_1+m_2}-\frac{m_1u_2}{k(m_1+m_2)}=\frac{km_2-m_1}{k(m_1+m_2)}u_2.$$

Ответ: $v_1=\frac{1+k}{k}\,\frac{m_2}{m_1+m_2}u_2$; $v_2=\frac{km_2-m_1}{k(m_1+m_2)}u_2$.

Примечание. В задачнике для v_2 неправильно поставлены знаки плюс и минус.

Задача 44.6

Паровой молот массы 12 т падает со скоростью 5 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемой деталью равна 250 т. Найти работу A_1, поглощаемую отковываемой деталью, и работу A_2, потерянную на сотрясение фундамента, а также вычислить коэффициент η полезного действия молота; удар неупругий.

Решение

Работу A_1, поглощаемую отковываемой деталью, вычислим как разность кинетической энергии T_0 до и кинетической энергии системы T после удара:

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{n}A_i^e,$$

где $T_0=\frac{m_м v_м^2}{2}$; $T=\frac{mu^2}{2}$, $m=m_м+m_{нак}$.

Согласно закону сохранения количества движения

$$m_м v_м = mu,$$

тогда

$$A_1 = \frac{m_м v_м^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2} - \frac{262 \cdot 10^3}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 12}{262}\right)^2 = 150 \cdot 10^3 \cdot \left(1 - \frac{6}{131}\right) =$$

$$= \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 125}{131} = 143 \cdot 10^3 \text{ (Н} \cdot \text{м)} = 143 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Работу A_2, потраченную на сотрясение фундамента, определим как разность кинетической энергии до удара и энергии, поглощаемой отковываемой деталью:

$$A_2 = \frac{m_м v_м^2}{2} - A_1 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2} - 143 \cdot 10^3 = 6{,}83 \cdot 10^3 \text{ (Н} \cdot \text{м)} = 6{,}83 \text{ (кН} \cdot \text{м)}.$$

Рассчитаем коэффициент полезного действия молота

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{143 - 6{,}83}{143} = 0{,}95.$$

Ответ: $A_1 = 143$ (кН · м); $A_2 = 6{,}83$ (кН · м); $\eta = 0{,}95$.

Задача 44.7

Молот массы $m_1 = 10$ кг расплющивает заготовку до нужных размеров за 70 ударов. За сколько ударов эту операцию произведет молот массы $m_2 = 100$ кг, если приводной механизм сообщает ему такую же скорость, что и первому молоту. Масса наковальни $M = 200$ кг. Удар считать абсолютно неупругим.

Решение

Из условия равенства поглощаемой энергии (формула (44.44)) при работе молотов в 10 и 100 кг можно записать, что

$$A = 70\left[\frac{10v^2}{2} - \frac{210v^2}{2}\left(\frac{10}{210}\right)^2\right] = N\left[\frac{100v^2}{2} - \frac{300v^2}{2}\left(\frac{100}{300}\right)^2\right],$$

откуда рассчитаем, за сколько ударов N расплющит заготовку молот массой 100 кг:

$$N = 10.$$

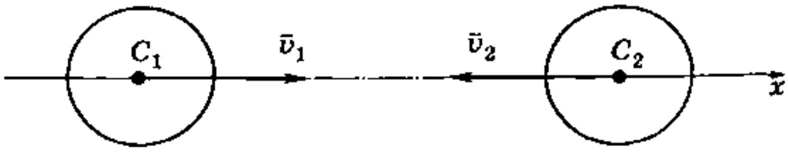
Ответ: 10 ударов.

Задача 44.8

Найти скорости после абсолютно неупругого удара двух одинаковых шаров, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2.

Решение

Изобразим положение шаров до удара (см. рисунок).



По формулам (44.19) найдем скорость u_1 первого шара после удара, зная, что $m_1 = m_2 = m$, $k = 1$:

$$u_1 = v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2) = v_1 - 2\cdot\frac{m}{2m}(v_1 + v_2) = -v_2$$

и скорость второго шара после удара

$$u_2 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 + v_2) = -v_2 + 2\,\frac{m}{2m}(v_1 + v_2) = v_1.$$

Получим, что $u_1 = -v_2$, $u_2 = v_1$, т.е. после удара шары обменялись скоростями.

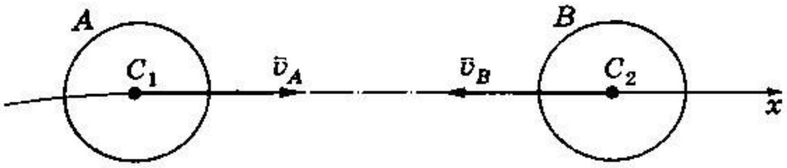
Ответ: шары после удара обмениваются скоростями.

Задача 44.9

Два одинаковых упругих шара A и B движутся навстречу друг другу. При каком соотношении между скоростями до удара шар A после удара остановится? Коэффициент восстановления при ударе равен k.

Решение

Изобразим положение шаров до удара (см. рисунок).



По формулам (44.19) определим скорость шара A после удара:

$$u_A = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}(v_A + v_B).$$

По условию $m_A = m_B = m$, $u_A = 0$, т.е.

$$0 = v_A - (1+k)\frac{m}{2m}(v_A + v_B)$$

или

$$0 = \frac{v_A}{v_B} - \frac{1}{2}(1+k)\left(\frac{v_A}{v_B} + 1\right).$$

Откуда

$$\frac{v_A}{v_B}\,\frac{1-k}{2} = \frac{1+k}{2},$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}.$$

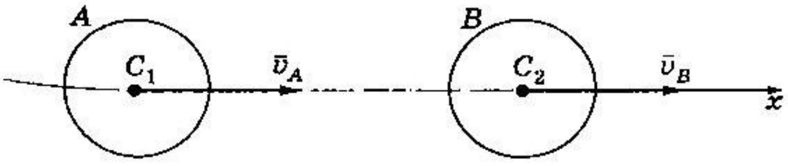
Ответ: $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{1+k}{1-k}.$

Задача 44.10

Тело A настигает тело B, имея в 3 раза бóльшую скорость. Каким должно быть соотношение масс этих тел, чтобы после удара тело A остановилось? Удар считать прямым центральным. Коэффициент восстановления $k = 0{,}8$.

Решение

Изобразим положение тел до удара (см. рисунок).



По формулам (44.19) определим скорость тела A после удара:

$$u_A = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B). \qquad (1)$$

По условию $\dfrac{v_A}{v_B} = 3$, $u_A = 0$.

Следовательно, согласно формуле (1)

$$0 = v_A - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B) = \frac{v_A}{v_B} - (1+k)\frac{m_B}{m_A + m_B}\left(\frac{v_A}{v_B} - 1\right)$$

или

$$3 - 3{,}6 \cdot \frac{m_B}{m_A + m_B} = 0.$$

Откуда

$$\frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{1}{1{,}2} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} + 1 = 1{,}2 \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 0{,}2 \Rightarrow \frac{m_B}{m_A} = 5.$$

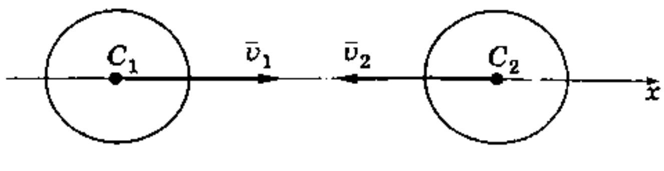
Ответ: $m_B/m_A = 5$.

Задача 44.11

Определить отношение масс m_1 и m_2 двух шаров в следующих двух случаях: 1) первый шар находится в покое; происходит центральный удар, после которого второй шар остается в покое; 2) шары встречаются с равными и противоположными скоростями; после центрального удара второй шар остается в покое. Коэффициент восстановления равен k.

Решение

Изобразим положение шаров до удара (см. рисунок).



Определим по формулам (44.19) скорость второго шара после удара:

$$u_2 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1+v_2).$$

Согласно условию задачи $u_2 = 0$, $v_1 = 0$.

Тогда

$$0 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}v_2.$$

Поскольку $v_2 \neq 0$, то

$$1+k = \frac{m_1+m_2}{m_1} = 1+\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = k.$$

2) Скорость второго шара после удара

$$u_2 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1+v_2).$$

По условию $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$, $u_2 = 0$. Следовательно,

$$0 = -v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}2v_2.$$

Так как $v_2 \neq 0$, то

$$1 = 2(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2} \Rightarrow 2(1+k) = \frac{m_1+m_2}{m_1} = 1+\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 1+2k.$$

Ответ: 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$; 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1+2k$.

Задача 44.12

Три абсолютно упругих шара с массами m_1, m_2 и m_3 лежат в гладком желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с некоторой начальной скоростью, ударяет во второй, покоящийся шар, который, начав двигаться, в свою очередь ударяет в третий, покоящийся шар. При какой величине массы m_2 второго шара третий шар получит наибольшую скорость?

Решение

Поскольку количество движения системы во время ударов остается неизменным, то наибольшей скорость третьего шара будет в случае, когда после удара первого и второго шаров первый шар останется в покое (скорость второго максимальна), а после удара второго и третьего шаров второй шар остановится.

Следовательно, согласно формулам (44.19) для первого удара

$$u_1 = v_1 - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2).$$

По условию задачи $k = 1$, $v_2 = 0$, так как должно выполнятся условие $u_1 = 0$, то

$$0 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_1 \;\Rightarrow\; \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{2},$$

поскольку $v_1 \neq 0$ по условию.

Для второго удара:

$$u_2' = v_2' - (1+k)\frac{m_3}{m_2+m_3}(v_2' - v_3),$$

где v_2' — скорость второго шара после первого удара перед вторым ударом; u_2' — скорость второго шара после второго удара, $u_2' = 0$; v_3 — скорость третьего шара до удара.

По условию $v_3 = 0$. Тогда

$$0 = v_2' - \frac{2m_3}{m_2+m_3}v_2'.$$

Так как $v_2' \neq 0$, то

$$\frac{m_3}{m_2+m_3} = \frac{1}{2}.$$

Объединим два результата и определим значение m_2, при котором третий шар получит наибольшую скорость:

$$\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_3}{m_2+m_3} \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2}+1 = \frac{m_2}{m_3}+1 \;\Rightarrow\; m_2 = \sqrt{m_1 m_3}.$$

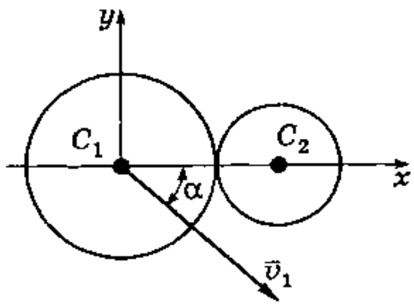
Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

Задача 44.13

Шар массы m_1, движущийся поступательно со скоростью v_1, встречает покоящийся шар массы m_2, так что скорость его образует при ударе угол α с линией, соединяющей центры шаров. Определить: 1) скорость первого шара после удара, считая удар абсолютно неупругим; 2) скорость каждого из шаров после удара в предположении, что удар упругий с коэффициентом восстановления k.

Решение

1) Шары совершают прямой удар, тогда согласно формулам (44.19) скорость первого шара после удара



$$u_{1x} = v_{1x} - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{1x} - v_{2x}),$$

где u_{1x}, v_{1x} — проекция на ось x скорости первого шара соответственно после и до удара (см. рисунок).

По условию задачи $k = 1$, $v_2 = 0$, следовательно,

$$u_{1x} = v_1\cos\alpha - \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1\cos\alpha = v_1\cos\alpha\frac{m_1}{m_1+m_2},$$

$$u_{1y} = v_{1y} = -v_1\sin\alpha.$$

Тогда

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{\left(v_1\cos\alpha\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + (v_1\sin\alpha)^2} =$$

$$= v_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}.$$

2) Скорость первого шара:

$$u_{1x} = v_1\cos\alpha - (1+k)\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1\cos\alpha =$$

$$= v_1\cos\alpha\left[1-(1+k)\frac{m_1}{m_1+m_2}\right] = v_1\frac{m_1 - km_2}{m_1+m_2}\cos\alpha,$$

$$u_{1y} = v_{1y} = -v_1\sin\alpha.$$

Тогда скорость первого шара после удара

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{v_1^2 \cos^2\alpha \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + v_1^2 \sin^2\alpha} =$$

$$= v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}.$$

Найдем скорость второго шара после удара, так как $v_2 = 0$, то

$$u_2 = v_2 + (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_{1x} - v_2) = (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos\alpha =$$

$$= v_1 \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} \cos\alpha.$$

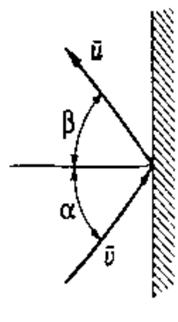
Ответ: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$; $u_2 = v_1 \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} \cos\alpha$.

Задача 44.14

Абсолютно упругий шар, центр которого движется прямолинейно со скоростью v, встречает под углом α гладкую вертикальную плоскость. Определить скорость шара после удара.

Решение



В случае косого удара шара о неподвижную плоскость (см. рисунок) коэффициент восстановления

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

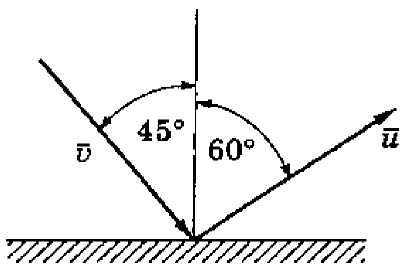
Так как удар абсолютно упругий, то $k = 1$. Тогда $\alpha = \beta$ и $u = v$.

Ответ: угол отражения равен углу падения, скорости до и после удара по модулю равны.

Задача 44.15

Стальной шарик падает на горизонтальную стальную плиту под углом 45° и отскакивает под углом 60° к вертикали. Определить коэффициент восстановления при ударе.

Решение



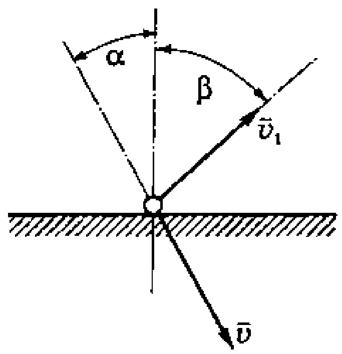
В случае косого упругого удара о неподвижную плоскость (см. рисунок) коэффициент восстановления

$$k = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{1}{1{,}73} = 0{,}58,$$

где α — угол падения; β — угол отражения.

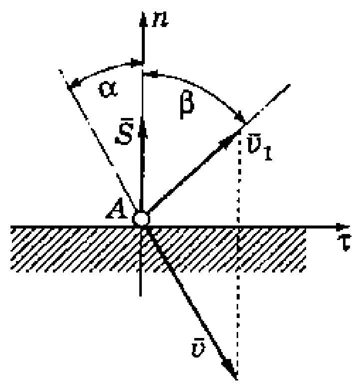
Ответ: $k = 0{,}58$.

Задача 44.16



Шарик падает наклонно со скоростью v на неподвижную горизонтальную плоскость и отскакивает от плоскости со скоростью $v_1 = v\sqrt{2}/2$. Определить угол падения α и угол отражения β, если коэффициент восстановления при ударе $k = \sqrt{3}/3$.

Решение



Применим теорему об изменении количества движения при ударе:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v} = \bar{S}. \qquad (1)$$

Спроецируем векторное равенство (1) на оси $\bar{n}$ и $\bar{\tau}$ (см. рисунок), получим

$$\left.\begin{aligned} v_{1\tau} - v_\tau &= 0, \\ v_{1n} - v_n &= \frac{S}{m}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned} |v_n| = v\cos\alpha;\ v_\tau = v\sin\alpha, \\ v_{1n} = v_1\cos\beta;\ v_{1\tau} = v_1\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Поэтому

$$v_1\sin\beta = v\sin\alpha. \tag{4}$$

Откуда

$$\sin\beta = \frac{v}{v_1}\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha. \tag{5}$$

Воспользуемся формулой

$$v_1 = v\sqrt{\sin^2\alpha + k^2\cos^2\alpha}$$

и найдем

$$(v_1/v)^2 = \sin^2\alpha + k^2(1 - \sin^2\alpha)$$

или

$$\sin^2\alpha(1 - k^2) + k^2 = (v_1/v)^2.$$

Откуда

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(v_1/v)^2 - k^2}{1 - k^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Тогда угол падения

$$\alpha = \frac{\pi}{6}.$$

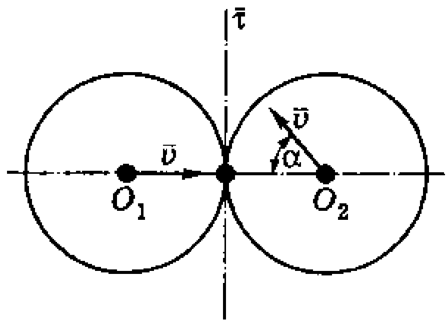
Из уравнения (5) найдем угол отражения:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}.$$

О т в е т: $\alpha = \pi/6$; $\beta = \pi/4$.

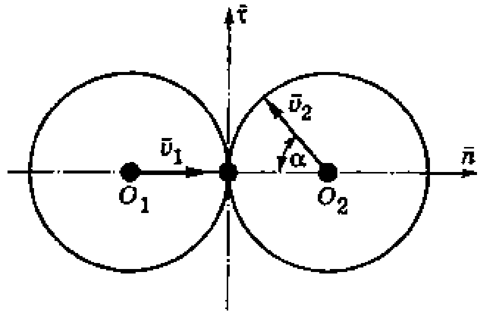
Задача 44.17

одинаковых абсолютно упругих вигаясь поступательно, соударя- іавными по модулю скоростями v. гь левого шара до удара направ- линии центров направо, а ско- завого шара до удара образует с ли- нтров угол α (см. рисунок). Найти и шаров после удара.



іение

ıслим проекции скоростей цен- ров на оси $\bar{n}$ и $\bar{\tau}$ до удара:



$$v_{1n} = v_1 = v, \quad v_{1\tau} = 0; \qquad (1)$$

$$_{2n} = -v_2 \cos\alpha = -v\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$v_{2\tau} = v_2 \sin\alpha = v\sin\alpha$$

ıию общей скорости на ось $\bar{n}$ по- ›лютно упругого удара:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

тавим в уравнение (3) известные величины, учитывая, что m, тогда

$$u_n = \frac{v - v\cos\alpha}{2} = \frac{v(1-\cos\alpha)}{2}. \qquad (4)$$

кции скоростей центров шаров в конце удара на ось $\bar{\tau}$:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau} = 0, \qquad (5)$$

$$u_{2\tau} = v_{2\tau} = v\sin\alpha \qquad (6)$$

$\bar{n}$ в случае абсолютно упругого удара:

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n}, \qquad (7)$$

$$u_{2n} = 2u_n - v_{2n} \qquad (8)$$

или с учетом выражений (1), (2) и (4)

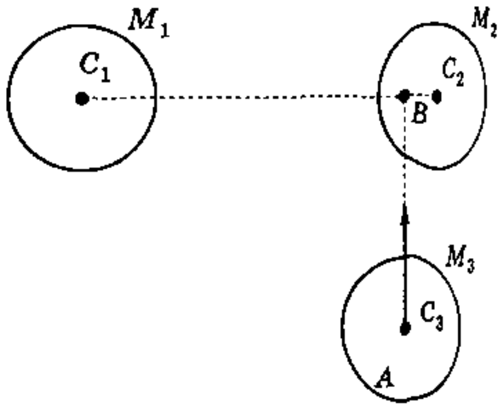
$$u_{1n} = v(1 - \cos\alpha) - v = -v\cos\alpha,$$

$$u_{2n} = v(1 - \cos\alpha) + v\cos\alpha = v.$$

Ответ: $u_{1n} = -v\cos\alpha$; $u_{1\tau} = 0$; $u_{2n} = v$; $u_{2\tau} = v\sin\alpha$. Ось $\bar{n}$ направлена по линии центров вправо, ось $\bar{\tau}$ — вверх.

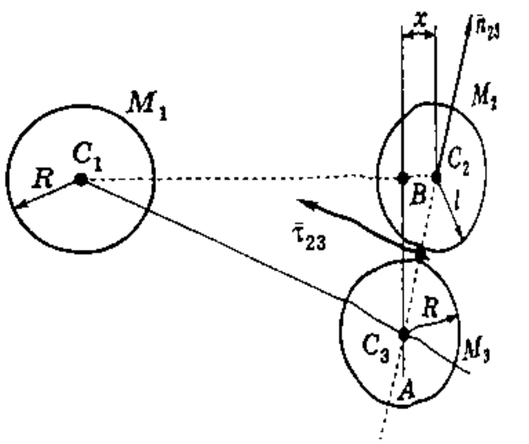
Задача 44.18

Имеются три одинаковых шара M_1, M_2, M_3 радиусов R, расстояние между центрами $C_1C_2 = a$. Определить, на какой прямой AB, перпендикулярной линии C_1C_2, должен находиться центр C_3 третьего шара для того, чтобы, получив некоторую скорость по направлению AB, этот шар после удара о шар M_2 нанес центральный удар шару M_1; шары абсолютно упругие и движутся поступательно.



Решение

Обозначим расстояние прямой AB от центра C_2, равное BC_2, через x. При движении шар M_3 нанесет удар по шару M_2, общая скорость этих шаров будет направлена по нормали, проходящей через их центры (см. рисунок). Тогда, чтобы шар M_3 нанес центральный удар по шару M_1, необходимо, чтобы его скорость была направлена по общей нормали к соударяемым поверхностям (нормаль проходит через центры масс шаров M_1 и M_3). Поэтому скорость шара M_3 после удара о шар M_2 должна быть направлена по прямой C_1C_3, параллельной касательной, проведенной



перпендикулярно нормали n_{23} в точке соприкосновения шаров M_2 и M_3. Тогда $\Delta C_1C_3C_2$ — прямоугольный и подобен ΔC_3BC_2, поэтому

$$\frac{C_2C_3}{x}=\frac{C_1C_2}{C_2C_3}$$

или

$$\frac{2R}{x}=\frac{a}{2R}.$$

Откуда

$$x=BC_2=\frac{4R^2}{a}.$$

Ответ: расстояние прямой AB от центра C_2 равно $BC_2=4R^2/a$.

Задача 44.19

Для укрепления грунта под фундаментом здания сваи массы $M=50$ кг вбивались копром, боек которого массы $M_1=450$ кг падал без начальной скорости с высоты $h=2$ м; при последних десяти ударах свая углубилась на $\delta=5$ см. Определить среднее сопротивление грунта при вбивании свай. Удар считать неупругим.

Решение

Вычислим потерю кинетической энергии при неупругом ударе

$$T_1-T_2=\frac{M_1M}{2(M_1+M)}(v_{1n}-v_{2n})^2, \qquad (1)$$

где T_1 — кинетическая энергия системы в начале удара; T_2 — кинетическая энергия системы в конце удара.

Так как свая в начале удара была неподвижна, то $v_{2n}=0$, а

$$v_{1n}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2}=6{,}26 \text{ (м/с)}.$$

В начале удара кинетическая энергия системы равна кинетической энергии бойка копра:

$$T_1=\frac{M_1v_{1n}^2}{2}.$$

Тогда выражение (1) примет вид

$$\frac{M_1 v_{1n}^2}{2} - T_2 = \frac{M_1 M v_{1n}^2}{2(M_1 + M)}.$$

Откуда

$$T_2 = \frac{M_1 v_{1n}^2}{2}\left(1 - \frac{M}{M_1 + M}\right) = \frac{450 \cdot 6{,}26^2}{2}\left(1 - \frac{50}{500}\right) = 7935.$$

Из равенства

$$10T_2 = S\delta$$

определим среднее сопротивление грунта

$$S = \frac{10T_2}{\delta} = \frac{10 \cdot 7935}{0{,}05} = 1\,590\,000\ (\text{Н}) = 1590\ (\text{кН}).$$

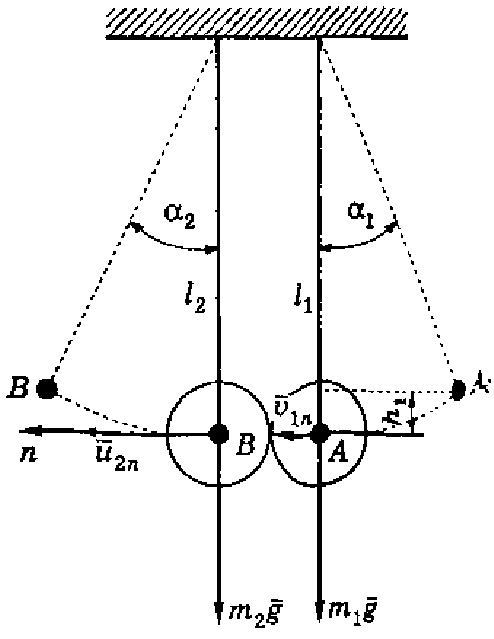
Ответ: $S = 1590$ кН.

Примечание. В задачнике была допущена опечатка.

Задача 44.20

Два шара массами m_1 и m_2 висят на параллельных нитях длин l_1 и l_2 так, что центры их находятся на одной высоте. Первый шар был отклонен от вертикали на угол α_1 и затем отпущен без начальной скорости. Определить угол предельного отклонения α_2 второго шара, если коэффициент восстановления равен k.

Решение



Воспользовавшись теоремой об изменении кинетической энергии, определим скорость первого шара до удара (см. рисунок):

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g h_1,$$

где $h_1 = l_1(1 - \cos\alpha_1)$.

Тогда

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g l_1 (1 - \cos\alpha_1).$$

откуда

$$v^2 = 2gl_1(1-\cos\alpha_1). \qquad (1)$$

Проекции скоростей шаров на ось n, проведенную через центры масс шаров до удара:

$$v_{1n} = v, \quad v_{2n} = 0.$$

Определим проекцию на ось n общей скорости после удара:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

и проекцию скорости второго шара после удара:

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = u_n(1+k) = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}(1+k).$$

Скорость u_{2n} является начальной скоростью второго шара, т.е.

$$u_{2n} = v_0.$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии составим уравнение для второго шара:

$$-\frac{m_2 v_0^2}{2} = -m_2 g h_2 = -m_2 g l_2 (1-\cos\alpha_2)$$

или

$$\frac{u_{2n}^2}{2} = g l_2 (1-\cos\alpha_2).$$

Откуда

$$(1-\cos\alpha_2) = \frac{u_{2n}^2}{2gl_2} = \frac{1}{2gl_2}\,\frac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)^2}(1+k)^2 = \frac{m_1^2(1+k)^2 l_1}{(m_1+m_2)^2 l_2}(1-\cos\alpha_1).$$

После преобразований получим

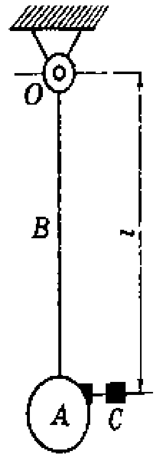
$$\sin^2\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1^2(1+k)^2 l_1}{(m_1+m_2)^2 l_2}\sin^2\frac{\alpha_1}{2}$$

или

$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{(m_1+m_2)}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\,\sin\frac{\alpha_1}{2}.$$

Ответ: $\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{(m_1+m_2)}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}.$

Задача 44.21



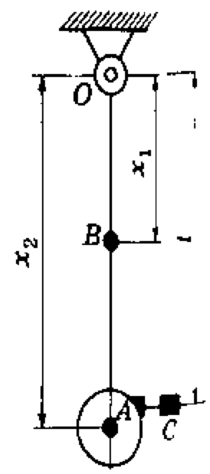
Маятник ударной машины состоит из стального диска A радиуса 10 см и толщины 5 см и из стального круглого стержня B диаметром 2 см и длины 90 см. На каком расстоянии l от горизонтальной плоскости, в которой лежит ось вращения O, должен быть помещен разбиваемый машиной брусок C, чтобы ось не испытывала удара? Ударный импульс лежит в плоскости рисунка и направлен горизонтально.

Решение

Ось вращения не будет испытывать удара, если разбиваемый брусок C помещен в центре удара, положение которого определяется по формуле

$$l = \frac{I_{Oz}}{mx}, \tag{1}$$

где m — масса системы; x — координата центра масс системы; I_{Oz} — момент инерции системы относительно оси, проходящей через точку O.



Введем обозначения: m_1 — масса стержня, a — длина стержня, r — диаметр стержня, m_2 — масса диска, R — диаметр диска, δ — толщина диска.

Найдем момент инерции системы

$$I_{Oz} = I_B + I_A,$$

где $I_B = \frac{m_1a^2}{3}$; $I_A = \frac{m_2R^2}{2} + m_2x_2^2.$

Тогда

$$I_{Oz} = \frac{m_1 a^2}{3} + \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 x_2^2. \qquad (2)$$

Определим массу стержня

$$m_1 = \rho \pi r^2 a$$

и диска

$$m_2 = \rho \pi R^2 \delta.$$

Найдем положение центра масс системы (см. рисунок), учитывая, что $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = a + R$:

$$mx = \sum m_k x_k = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

или

$$mx = \rho \pi r^2 a \, \frac{a}{2} + \rho \pi R^2 \delta (a + R) = \rho \pi \left[\frac{r^2 a^2}{2} + R^2 \delta (a + R) \right]. \qquad (3)$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1) и определим искомое расстояние:

$$l = \frac{\frac{m_1 a^2}{3} + \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 x_2^2}{\rho \pi \left[(r^2 a^2)/2 + R^2 \delta (a + R) \right]} = \frac{2 r^2 a^3 + 3 R^4 \delta + 6 R^2 x_2^2 \delta}{6 \left[(r^2 a^2)/2 + R^2 \delta (a + R) \right]} =$$

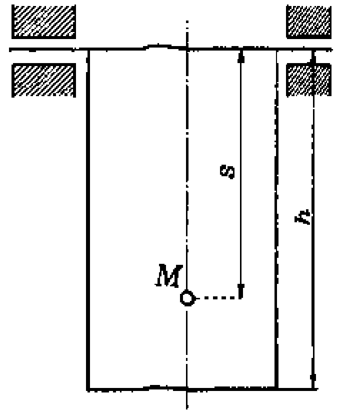
$$= \frac{2 r^2 a^3 + 3 R^4 \delta + 6 R^2 x_2^2 \delta}{3 \left[r^2 a^2 + 2 R^2 \delta (a + R) \right]} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1^2 \cdot 90^3 + 3 \cdot 10^4 \cdot 5 + 6 \cdot 10^2 \cdot 100^2 \cdot 5}{3 \left[1^2 \cdot 90^2 + 2^2 \cdot 10^2 \cdot 5 (90 + 10) \right]} = 97{,}5 \text{ (см)}.$$

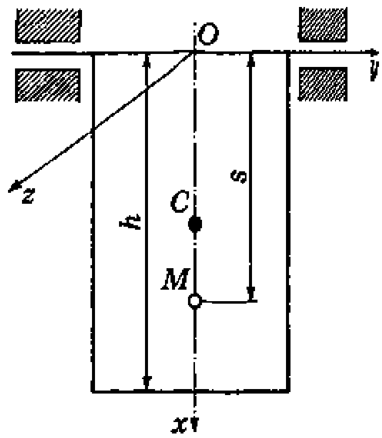
Ответ: $l = 97{,}5$ см.

Задача 44.22

Определить положение центра удара прямоугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h.



Решение



Ударный импульс должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через центр масс и ось вращения, т.е. плоскости мишени. Плоскость, перпендикулярная оси вращения, в которой расположен ударный импульс, должна дать точку пересечения O на оси вращения, для которой эта ось является главной осью инерции. Таким свойством обладает точка, расположенная на оси Oy, в которой плоскость мишени пересекается с плоскостью ее симметрии (см. рисунок). Расстояние до центра удара $OM = s$ найдем по формуле для определения приведенной длины физического маятника:

$$s = \frac{I_y}{m x_C},$$

где $x_C = \frac{h}{2}$; $I_y = \frac{mh^2}{3}$.

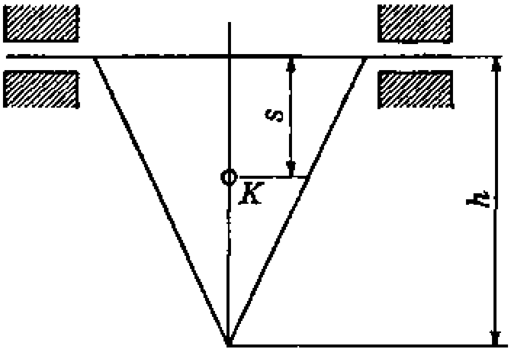
Тогда

$$s = \frac{mh^2}{3m \cdot h/2} = \frac{2}{3}h.$$

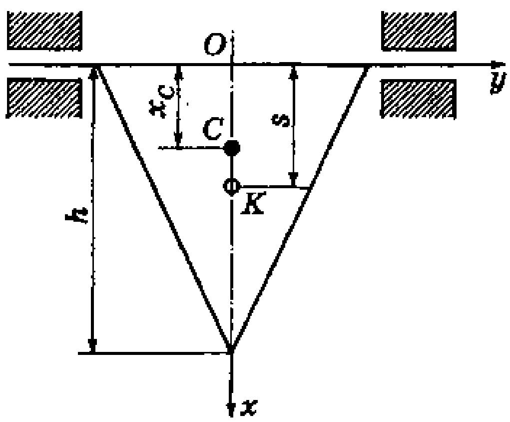
Ответ: $s = 2h/3$.

Задача 44.23

Определить положение центра удара K треугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h.



Решение



Ударный импульс не будет передаваться на точки закрепления оси, если он перпендикулярен плоскости пластины и при этом выполняется условие $I_{yz} = 0$, т.е. ось вращения мишени y должна быть для точки O главной осью инерции (см. рисунок). В данном случае это условие выполняется, так как ось x является осью симметрии, а точка K расположена на этой оси.

Рассчитаем расстояние s от точки O до центра удара K:

$$s = OK = \frac{I_y}{Mx_C}, \tag{1}$$

где I_y — момент инерции мишени относительно оси y; x_C — расстояние от оси вращения до центра тяжести C мишени.

По теореме Гюйгенса – Штейнера, воспользовавшись решением задачи 34.12, определим

$$I_y = \frac{1}{8}Mh^2 + M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}Mh^2.$$

Зная, что $x_C = h/3$, найдем положение центра удара:

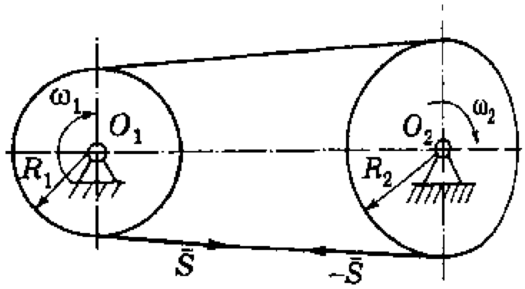
$$s = \frac{Mh^2/6}{Mh/3} = \frac{h}{2}.$$

Ответ: $s = h/2$.

Задача 44.24

Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловыми скоростями ω_{10} и ω_{20}. Определить угловые скорости шкивов ω_1 и ω_2 после того, как на них будет накинут ремень, считая шкивы круглыми дисками одинаковой плотности с радиусами R_1 и R_2 и пренебрегая скольжением и массой ремня.

Решение



Рассматривается случай, когда движущееся тело испытывает удар в результате того, что на него накинут ремень. Внешним ударным импульсом $\bar{S}$, приложенным к каждому из шкивов, в данном случае будет импульс ударной силы натяжения ремня (см. рисунок). При этом угловая скорость твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, изменится за время удара на величину, равную моменту ударного импульса относительно оси вращения, деленному на момент инерции тела относительно той же оси:

$$\omega = \omega_0 + \frac{m_z(\bar{S})}{I_z}. \qquad (1)$$

Применив формулу (1) для первого и для второго шкива, получим систему уравнений:

$$\omega_1 = \omega_{10} - \frac{SR_1}{I_1}, \qquad (2)$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \frac{SR_2}{I_2}. \qquad (3)$$

Умножим уравнение (2) на $R_2 I_1$, а уравнение (3) на $R_1 I_2$ и просуммируем их. В результате получим

$$\omega_1 R_2 I_1 + \omega_2 R_1 I_2 = \omega_{10} R_2 I_1 + \omega_{20} R_1 I_2. \qquad (4)$$

Имея в виду, что шкивы, соединенные ремнем, будут вращаться совместно и что скольжение ремня отсутствует, зависимость между угловыми скоростями шкивов будет определяться следующим равенством: $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Откуда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2}. \tag{5}$$

Подставим выражение (5) в формулу (4) и найдем

$$\omega_1 = \frac{R_2(\omega_{10} R_2 I_1 + \omega_{20} R_1 I_2)}{R_2^2 I_1 + R_1^2 I_2}. \tag{6}$$

Тогда согласно формуле (5)

$$\omega_2 = \frac{R_1(\omega_{10} R_2 I_1 + \omega_{20} R_1 I_2)}{R_2^2 I_1 + R_1^2 I_2}. \tag{7}$$

Так как по условию задачи шкивы являются круглыми дисками одинаковой плотности, то

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R_1^2 h) R_1^2 = \frac{1}{2}\rho\pi h R_1^4,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2}(\rho\pi R_2^2 h) R_2^2 = \frac{1}{2}\rho\pi h R_2^4,$$

где ρ — плотность; h — толщина диска; M_1, M_2 — массы шкивов: $M_1 = \rho\pi R_1^2 h$, $M_2 = \rho\pi R_2^2 h$.

Подставим значения I_1 и I_2 в формулы (6) и (7) и после преобразований запишем окончательный результат:

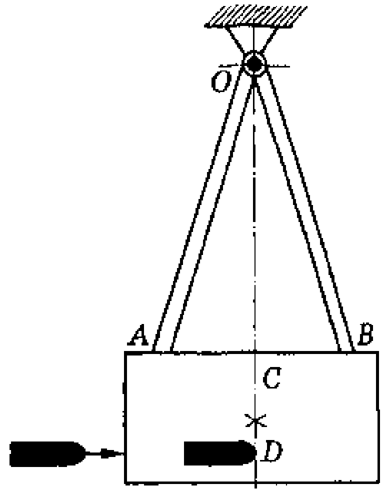
$$\omega_1 = \frac{\omega_{10} R_2^2 R_1^4 + \omega_{20} R_2^5 R_1}{R_2^2 R_1^4 + R_2^4 R_1^2} = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)},$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_{10} R_2 R_1^5 + \omega_{20} R_1^2 R_2^4}{R_2^2 R_1^4 + R_2^4 R_1^2} = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

Ответ: $\omega_1 = \dfrac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}$; $\omega_2 = \dfrac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}$.

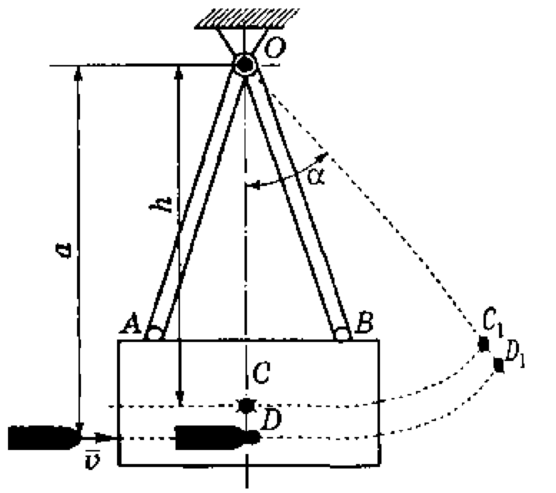
Задача 44.25

Баллистический маятник, употребляющийся для определения скорости снаряда, состоит из цилиндра AB, подвешенного к горизонтальной оси O; цилиндр открыт с одного конца A и наполнен песком; снаряд, влетающий в цилиндр, производит вращение маятника вокруг оси O на некоторый угол. Дано: M — масса маятника; $OC = h$ — расстояние от его центра масс C до оси O; ρ — радиус инерции относительно оси O; m — масса снаряда; $OD = a$ — расстояние от линии действия ударного импульса до оси; α – угол отклонения маятника. Определить скорость снаряда, предполагая, что ось маятника O не испытывает удара, причем $ah = \rho^2$.



Решение

Изобразим положение центра тяжести маятника и снаряда до и после удара (см. рисунок).



На маятник во время удара будет действовать ударный импульс $\bar{S}$, равный изменению количества движения снаряда:

$$\bar{S} = m\bar{u} - m\bar{v}, \qquad (1)$$

где $\bar{u} = 0$ — конечная скорость снаряда; $\bar{v}$ — начальная (искомая) скорость.

При этом момент ударного импульса относительно оси O вызовет изменение кинетического момента системы (маятник — снаряд) относительно той же оси, т.е.

$$I_A \omega = mva, \qquad (2)$$

где ω — угловая скорость маятника в момент попадания снаряда; I_A — момент инерции маятника вместе со снарядом относительно оси вращения A.

Найдем

$$I_A = M\rho^2 + ma^2. \tag{3}$$

Реактивные ударные импульсы в оси A не возникнут, если точка D будет для этой оси центром удара, т.е. согласно формуле (1) (см. решение задачи 44.23)

$$a = OD = \frac{I_y}{My_C} = \frac{M\rho^2}{Mh} = \frac{\rho^2}{h} \Rightarrow \rho^2 = ah.$$

Подставим это значение ρ^2 в формулу (3) и получим

$$I_A = Mah + ma^2 = a(Mh + ma).$$

Тогда согласно формуле (2)

$$\omega a(Mh + ma) = mva,$$

откуда

$$v = \frac{Mh + ma}{m}\omega. \tag{4}$$

Для определения угловой скорости маятника воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e, \tag{5}$$

которую применим к перемещению системы снаряд — маятник после удара. Так как конечная скорость равна нулю, то $T = 0$:

$$T_0 = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} a(Mh + ma)\omega^2,$$

$$\sum A_k^e = -Mgh(1 - \cos\alpha) - mga(1 - \cos\alpha) = -g(Mh + ma)(1 - \cos\alpha) =$$

$$= -g(Mh + ma)\, 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Подставим это выражение в формуле (5) и после преобразований получим

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

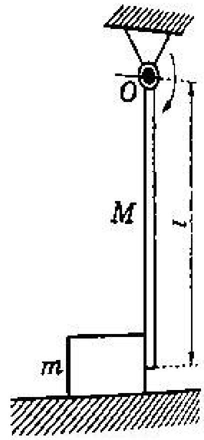
С учетом этого выражения найдем скорость снаряда по формуле (4):

$$v = \frac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $v = \frac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}.$

Задача 44.26

Однородный стержень массы M и длины l, прикрепленный своим верхним концом к цилиндрическому шарниру O, падает без начальной скорости из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет груз массы m, сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения скольжения f. Определить путь, пройденный грузом, считая удар неупругим.



Решение

Для определения ударного импульса $\bar{S}$ применим теорему об изменении кинетического момента при ударе (рис. 1):

$$L_z - L_z^{(0)} = \sum M_z(\bar{S}^e)$$

или

$$I_z(\omega - \omega_0) = -Sl. \qquad (1)$$

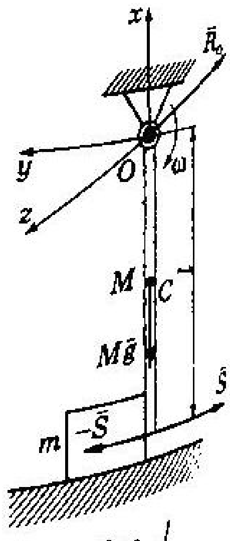


Рис. 1

По теореме об изменении кинетической энергии системы

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия стержня в момент столкновения с грузом

$$T_1 = \frac{1}{2}I_z\omega_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\omega_1^2 = \frac{1}{6}Ml^2\omega_1^2.$$

движение началось из состояния покоя, $T_0 = 0$.
ьку при повороте на угол $\varphi = \pi/2$ в поле сил тяжести центр ıустился на $h = l/2$, то

$$\sum A_k^e = Mg\frac{l}{2}.$$

зим эти значения в формулу (2):

$$\frac{1}{6}Ml^2\omega_1^2 = Mg\frac{l}{2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

вив значение ω_1 в формулу (1) при условии, что $\omega_0 = \omega_1$,

$$S = \frac{I_z(\omega_0 - \omega)}{l} = \frac{\frac{Ml^2}{3}(\omega_1 - \omega)}{l} =$$

$$= \frac{1}{3}Ml\sqrt{\frac{3g}{l}} - \frac{1}{3}Ml\omega = M\sqrt{\frac{gl}{3}} - \frac{1}{3}Mv, \qquad (3)$$

— скорость ударяющего конца стержня.

ой стороны, так как удар неупругий, подставив в формучение $S = mv$, найдем

$$v\left(\frac{1}{3}M + m\right) = M\sqrt{\frac{gl}{3}},$$

$$v = \frac{M\sqrt{3gl}}{M + 3m}. \qquad (4)$$

неупругого удара груз начнет двигаться по ͦой плоскости со скоростью u_0 (рис. 2), вы- формулой (4), под действием замедляю- ͥрения

$$ma = -F_{\text{тр}}$$

$$ma = -fmg,$$

$$a = -fg.$$

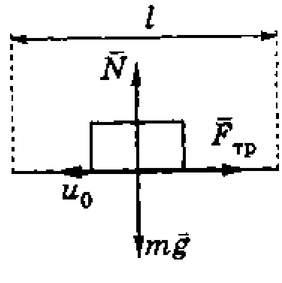


Рис. 2

Пройденный телом путь s определим с учетом того, что его конечная скорость $u=0$ по формуле

$$s=\frac{u^2-u_0^2}{2a}=\frac{v^2}{2fg}=\frac{3l}{2f}\cdot\frac{M^2}{(M+3m)^2}.$$

Отметим, что если рассмотреть систему стержень — груз и считать ударный момент со стороны груза равным нулю ввиду конечной величины силы трения и малой продолжительности удара, то формула (1) примет вид

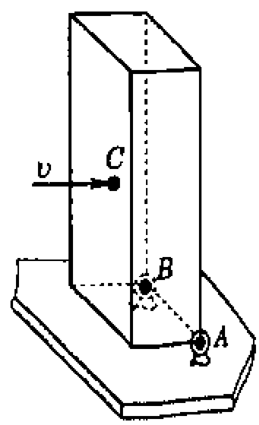
$$I_z(\omega-\omega_0)=-mvl,$$

где $\omega=M/l$, так как удар неупругий.

Легко убедиться, что и в этом случае результат не изменится.

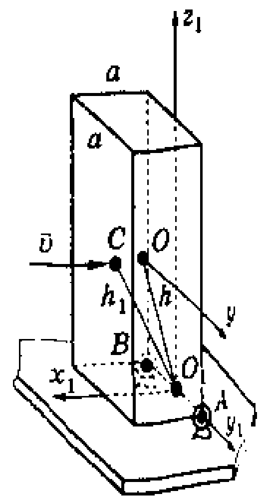
Ответ: $s=\frac{3l}{2f}\,\frac{M^2}{(M+3m)^2}$.

Задача 44.27



Однородная прямая призма с квадратным основанием стоит на горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг ребра AB, лежащего в этой плоскости. Ребро основания призмы равно a, высота ее $3a$, масса $3m$. В середину C боковой грани, противоположной ребру AB, ударяет шар массы m с горизонтальной скоростью v.

Предполагая, что удар неупругий и что масса шара сосредоточена в его центре, который после удара остается в точке C, определить наименьшую величину скорости v, при которой призма опрокинется.



Решение

Момент ударных сил относительно оси O_1y_1 равен нулю, так как ударные нагрузки приложены в точках A и B, лежащих на этой оси (см. рисунок). Поэтому момент количества движения до и после удара сохраняется, т.е.

$$3amv=I_{y_1}\omega, \qquad (1)$$

где $I_{y_1}=I_{y_1}^{\text{ш}}+I_{y_1}^{\text{пр}}$.

Момент инерции шара

$$I_{y_1}^{\text{ш}} = mh_1^2 = m\left[a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2\right] = \frac{13}{4}ma^2.$$

Момент инерции призмы по теореме Гюйгенса — Штейнера

$$I_{y_1}^{\text{пр}} = I_y + 3mh^2,$$

где $I_y = \int\limits_{(M)}(x^2+z^2)\,dm = \gamma\left(\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{3a}{2}}^{\frac{3a}{2}} x^2 dxdydz + \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{3a}{2}}^{\frac{3a}{2}} z^2 dxdydz\right) = \frac{5}{2}ma^2.$

В результате

$$I_{y_1}^{\text{пр}} = \frac{5ma^2}{2} + 3m\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2\right] = 10ma^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{13}{4}ma^2 + 10ma^2 = \frac{53}{4}ma^2.$$

Тогда из формулы (1)

$$\omega = \frac{6v}{53a}. \qquad (2)$$

Для определения наименьшей скорости, при которой призма опрокинется, применим теорему об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \qquad (3)$$

Найдем входящие в формулу (3) величины: $T = 0$, так как призма начинает опрокидываться с ничтожно малой скоростью;

$$T_0 = I_{y_1}\frac{\omega^2}{2} = \frac{53}{4}ma^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6^2}{53^2}\,\frac{v^2}{a^2} = \frac{9}{106}mv^2,$$

$$\sum A_k^e = -(m_{\text{ш}} + m_{\text{пр}})g\Delta h_C.$$

В момент удара координаты центра тяжести

$$x_{1C} = \frac{ma + \frac{1}{2}\cdot 3ma}{4m} = \frac{5}{8}a,$$

$$y_{1C} = \frac{3}{2}a.$$

Тогда

$$\Delta h_C = \sqrt{x_{1C}^2 + y_{1C}^2} - \frac{3}{2}a = \sqrt{\frac{25}{64}a^2 + \frac{9}{4}a^2} - \frac{3}{2}a = \frac{1}{8}a,$$

$$\sum A_k^e = -\frac{1}{2}mga.$$

Подставив найденные значения в формулу (3), получим

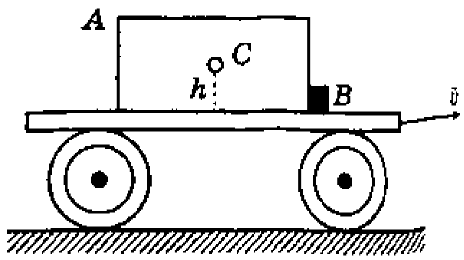
$$\frac{9}{106}mv^2 = \frac{1}{2}mga.$$

Откуда

$$v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}.$$

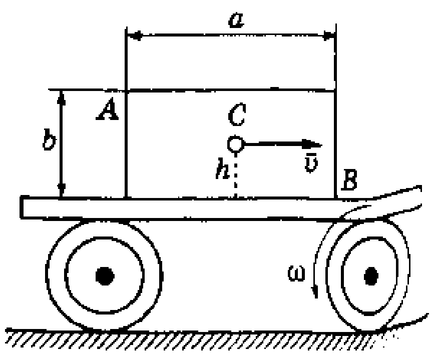
Ответ: $v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}$.

Задача 44.28



Платформа с помещенным на нее призматическим грузом AB катится по горизонтальным рельсам со скоростью v. На платформе имеется выступ, в который упирается ребро B груза, препятствуя последнему скользить по платформе вперед, но не препятствуя вращению его около ребра B. Дано: h — высота центра масс груза над платформой, ρ — радиус инерции груза относительно ребра B. Определить угловую скорость ω вращения груза около ребра B в момент мгновенной остановки платформы.

Решение



Покажем на рисунке вращение груза около ребра B.

При внезапной остановке платформы происходит удар. Момент ударного импульса опорного ребра B относительно оси, проходящей через точку B и перпендикулярной плоскости рисунка, равен нулю (см. решение задач 44.26 и 44.27).

Тогда уравнение

$$\bar{L}_B - \bar{L}_{B0} = \sum \bar{M}_B(\bar{S}^e_{\text{уд}})$$

примет вид

$$I_B\omega - Mvh = 0, \qquad (1)$$

где $I_B = M\rho^2$.

Из уравнения (1) найдем

$$\omega = \frac{Mvh}{I_B} = \frac{hv}{\rho^2}.$$

Ответ: $\omega = hv/\rho^2$.

Задача 44.29

Полагая при условиях предыдущей задачи, что груз представляет собой однородный прямоугольный параллелепипед, длина ребра которого вдоль платформы равна 4 м, а высота 3 м, найти, при какой скорости произойдет опрокидывание груза.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии механической системы

$$T - T_0 = \sum A^e_k, \qquad (1)$$

где $T_0 = \dfrac{1}{2} I_B\omega^2$.

В задаче 44.28 нашли, что

$$\omega = \frac{Mvh}{I_B} = \frac{Mvb}{2I_B},$$

тогда

$$T_0 = \frac{1}{2}\,\frac{M^2v^2b^2}{I_B}.$$

Согласно теореме Гюйгенса — Штейнера

$$I_B = I_C + M\cdot BC^2 = \frac{M}{12}(a^2+b^2) + M\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{M}{3}(a^2+b^2).$$

С учетом этого выражения

$$T_0 = \frac{3M}{8}\ \frac{v^2 b^2}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Так как опрокидывание происходит в наивысшем положении центра тяжести с нулевой угловой скоростью, $T = 0$.

Найдем

$$\sum A_k^e = -Mgh_C = -Mg\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{b}{2}\right). \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1) и найдем

$$v^2 = \frac{4g}{3b^2}(\sqrt{a^2+b^2} - b)(a^2+b^2) =$$

$$= \frac{4\cdot 9{,}8}{3\cdot 9}(\sqrt{4^2+3^2} - 3)(4^2+3^2) = 72{,}59.$$

Тогда

$$v = \sqrt{72{,}59} = 8{,}52\ (\text{м/с}) \approx 30{,}7\ (\text{км/ч}).$$

О т в е т: $v = 30{,}7$ км/ч.

45. Динамика точки и системы переменной массы (переменного состава)

Методические указания к решению задач

В классической механике в отличие от релятивистской механики масса каждой точки или частицы системы считается при движении величиной постоянной, независящей от скорости движения тела.

Однако в ряде случаев при движении тела его масса может увеличиваться или уменьшаться.

Увеличение массы тела может происходить за счет присоединения частиц (например, обледенение самолета при его посадке или взлете, налипание твердых частиц или конденсация частиц влаги на движущемся теле) или изменения геометрических размеров тела при движении (например, увеличение длины поднимаемого троса или цепи, увеличение диаметра барабана, шпули при наматывании на них троса или нити).

Масса тела может уменьшаться за счет отделения частиц (например, при движении ракеты или реактивного самолета в результате сгорания топлива) или за счет уменьшения геометрических размеров тела (например, уменьшение диаметра барабана или шпули при разматывании троса или нити, навитых на эти тела вращения).

Тело, масса которого непрерывно изменяется с течением времени вследствие присоединения к нему или отделения от него материальных частиц, называется ***телом переменной массы***. Если при движении тела переменной массы его размерами можно пренебречь по сравнению с пройденным расстоянием, то это тело можно рассматривать как точку переменной массы.

Основное уравнение динамики тела переменной массы при поступательном движении имеет вид

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e + \frac{dM}{dt}(\bar{u} - \bar{v}), \tag{45.1}$$

где M — масса тела (точки) в данный момент времени; $\bar{v}$ — абсолютная скорость тела переменной массы; $\bar{u}$ — абсолютная скорость отбрасываемых (отделяющихся) частиц; $\overline{F}^e$ — равнодействующая внешних сил, действующих на тело переменной массы; $\left|\dfrac{dM}{dt}\right|$ — секундный расход массы излучающего центра (тела).

Уравнение (45.1) впервые предложено И.В. Мещерским и названо в его честь *уравнением Мещерского.*

В соответствии с теоремой сложения скоростей точки в сложном движении абсолютная скорость отделяющейся частицы

$$\overline{u} = \overline{v}_r + \overline{v}_e. \tag{45.2}$$

Так как в данном случае переносной скоростью для частицы является скорость тела, то $\overline{v}_e = \overline{v}$. Тогда разность $\overline{u} - \overline{v}$ в уравнении (45.1) является относительной скоростью, т.е.

$$\overline{v}_r = \overline{u} - \overline{v}. \tag{45.3}$$

Поэтому уравнение (45.1) можно записать так:

$$M\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}^e + \frac{dM}{dt}\overline{v}_r, \tag{45.4}$$

где $\dfrac{dM}{dt}\overline{v}_r$ — реактивная сила.

Если M – величина убывающая, то $\dfrac{dM}{dt} < 0$, и, следовательно, реактивная сила направлена противоположно вектору $\overline{v}_r$. Введем обозначение

$$\frac{dM}{dt}\overline{v}_r = \overline{\Phi}. \tag{45.5}$$

Тогда уравнение (45.1) примет вид

$$M\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}^e + \overline{\Phi}. \tag{45.6}$$

Если в уравнении (45.1) слагаемое $\left(-\dfrac{dM}{dt}\overline{v}\right)$ перенести в левую часть, то это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(M\overline{v}) = \overline{F}^e + \frac{dM}{dt}\overline{u}. \tag{45.7}$$

В частном случае, когда $\bar{u} = 0$, уравнение (45.7) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(M\bar{v}) = \bar{F}^e. \tag{45.8}$$

Таким образом, если абсолютная скорость отделяющихся (присоединяющихся) частиц равна нулю, то производная по времени от количества движения тела переменной массы равна равнодействующей приложенных к нему внешних сил.

Когда $\bar{v}_r = 0$, то уравнение (45.4) принимает вид

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}^e. \tag{45.9}$$

Поэтому уравнение движения тела (точки) переменной массы записывается так же, как и для точки постоянной массы, но при этом следует иметь в виду, что $M = f(t)$. Применительно к движению ракеты в уравнении (45.4) $\frac{dM}{dt} < 0$, а следовательно, реактивная сила $\bar{\Phi}$ направлена в сторону, противоположную направлению относительной скорости истечения газов, и является тягой двигателя.

Определенное по формуле (45.5) значение силы тяги реактивного двигателя было бы верным, если бы отделяющиеся частицы не оказывали взаимного действия друг на друга. Фактически при полете ракеты в атмосфере продукты горения топлива выбрасываются в виде непрерывной газовой струи, частицы которой оказывают взаимное давление друг на друга и взаимодействуют с атмосферой. Поэтому сила тяги несколько больше рассчитанной по формуле (45.5).

Чтобы учесть это, вместо относительной скорости истечения газов $\bar{v}_r$ вводится некоторая эффективная скорость истечения $\bar{v}_e > \bar{v}_r$. В условиях задач в сборнике И.В. Мещерского задается именно эффективная скорость истечения газов v_e.

К.Э. Циолковским решены две задачи прямолинейного движения ракеты.

Рассмотрим решение ***первой задачи Циолковского***. Ракета движется прямолинейно под действием только реактивной силы. Относительная скорость истечения газов $\bar{v}_r$ постоянна и направлена в сторону, противоположную скорости $\bar{v}$ движения ракеты. Дифференциальное уравнение движения ракеты вдоль оси Ox, направленной в сторону движения ракеты,

$$M\frac{dv}{dt} = \Phi_x = -\frac{dM}{dt}v_r. \tag{45.10}$$

Разделив в уравнении (45.10) переменные и проинтегрировав его, получим

$$v = v_0 + v_r \ln\frac{M_0}{M}, \tag{45.11}$$

где v_0 — начальная скорость ракеты, направленная по реактивной силе; M_0 — начальная масса ракеты; M — конечная масса ракеты.

Обозначим массу корпуса ракеты со всем оборудованием $M_к$, а массу топлива $M_т$. Тогда

$$M_0 = M_к + M_т,$$

а M — конечная масса ракеты, когда все топливо будет израсходовано, равна $M_к$.

Подставим эти значения в равенство (45.11) и получим *формулу Циолковского* для определения скорости ракеты в конце активного участка движения (когда все топливо уже израсходовано):

$$v = v_0 + v_r \ln\left(1 + \frac{M_т}{M_к}\right). \tag{45.12}$$

Из формулы (45.12) следует, что скорость ракеты зависит:

- от ее начальной скорости v_0;
- относительной скорости $\bar{v}_r$;
- относительного запаса топлива $M_т/M_к$.

Отношение $\dfrac{M_т}{M_к}$ называют числом Циолковского и обозначают z.

Тогда формулу (45.12) можно записать так:

$$v = v_0 + v_r \ln(1 + z). \tag{45.13}$$

Однако при решении задач этого параграфа, связанных с движением ракет, в том числе и многоступенчатых, число Циолковского принимают равным отношению общей начальной массы $M_{об}$ ракеты к массе ее корпуса, т.е.

$$z = \frac{M_{об}}{M_к}.$$

Для многоступенчатой ракеты при условии, что эффективная скорость истечения газов v_e для всех ступеней одинакова, общее число Циолковского

$$z = e^{\frac{v_n}{n v_e}}, \tag{45.14}$$

где n — число ступеней ракеты; v_n — расчетная скорость последней ступени.

Для определения уравнения движения ракеты представим в формуле (45.12)

$$v = \frac{dx}{dt}$$

и проинтегрируем, считая, что при $t = 0$, $x_0 = 0$, тогда получим

$$x = v_0 t + v_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M}, \tag{45.15}$$

где $M = f(t)$.

В теоретических работах по ракетодинамике обычно рассматривают два закона изменения массы: линейный и показательный.

При линейном законе изменение массы точки с течением времени описывается уравнением

$$M = M_0(1 - \alpha t), \tag{45.16}$$

где α — удельный расход ($\alpha = \text{const}$); M_0 — масса точки в начальный момент времени.

С учетом уравнения (45.16), проинтегрировав выражение (45.15), получим *уравнение движения ракеты при линейном законе изменения ее массы:*

$$x = v_0 t + \frac{v_r}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t]. \tag{45.17}$$

При показательном законе изменение массы точки с течением времени описывается уравнением

$$M = M_0 e^{-\alpha t} \tag{45.18}$$

и *уравнение движения ракеты при показательном законе изменения ее массы* имеет вид

$$x = v_0 t + \frac{\alpha v_r t^2}{2}. \tag{45.19}$$

Вторая задача Циолковского — исследование вертикального движения ракеты в однородном поле земного притяжения ($g = \text{const}$) без учета сопротивления воздуха.

В этом случае *дифференциальное уравнение движения ракеты* имеет вид

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - \frac{dM}{dt} v_r. \tag{45.20}$$

Проинтегрировав уравнение (45.20), получим

$$v = v_0 - gt + v_r \ln\frac{M_0}{M}. \tag{45.21}$$

Заменим в выражении (45.21) v на $\frac{dx}{dt}$ и проинтегрируем его при начальных условиях движения: $t = 0$, $x_0 = 0$:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + v_r \int_0^t \ln\frac{M_0}{M} dt. \tag{45.22}$$

При линейном законе изменения массы после интегрирования выражения (45.22) получим

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t]. \tag{45.23}$$

При показательном законе изменения массы

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{\alpha v_r t^2}{2}. \tag{45.24}$$

Дифференциальное уравнение вращения тела переменной массы вокруг неподвижной оси можно записать по аналогии с уравнением Мещерского для точки переменной массы в следующем виде:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z(\overline{F}^e) + M_z(\overline{\Phi}), \tag{45.25}$$

где $M_z(\overline{F}^e)$ — момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси z; $M_z(\overline{\Phi})$ — момент реактивной силы,

$$M_z(\overline{\Phi}) = \Phi h = \frac{dM}{dt}(\overline{u} - \overline{v})h = \frac{dM}{dt}\overline{v}_r h, \tag{45.26}$$

где h — плечо реактивной силы относительно оси z.

Если относительная скорость отбрасываемых телом частиц равна нулю (частицы отделяются от вращающегося тела без ударов), то $M_z(\overline{\Phi}) = 0$ и уравнение (45.25) примет вид

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z(\overline{F}^e). \tag{45.27}$$

На практике это имеет место при вращении, например, барабанов, шпуль, веретен, с которых сматывается трос или нити. В этом случае отделяющиеся от тела частицы имеют скорости соответствующих точек тела, т.е. $u = v$, а следовательно, $v_r = 0$, и уравнение (45.27) отличается от уравнения вращательного движения тела постоянной массы тем, что $I_z = I_z(t)$.

Если абсолютная скорость отделяемых частиц равна нулю, то в уравнение вращения момент инерции тела входит под знаком производной и уравнение (45.27) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z(\overline{F}^e). \tag{45.28}$$

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Изобразить тело переменной массы, если это необходимо по условию задачи.

2. Показать на рисунке действующие на тело силы, включая реакцию связи и реактивную силу, если они имеют место.

3. Записать основное уравнение динамики тела переменной массы в виде формул (45.4), (45.8) или (45.9), а при вращении тела вокруг неподвижной оси в виде формул (45.25), (45.27) или (45.28).

4. Выбрать систему отсчета (декартовы оси координат или естественные оси) и записать уравнение движения в проекции на выбранные оси (ось) или дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

5. При решении задач, связанных с движением ракеты, можно записать уравнение Мещерского в проекции на ось, направленную по движению ракеты, или применить формулу Циолковского. В качестве числа z взять отношение общей начальной массы ракеты к массе корпуса.

6. Решить задачу в общем виде, а затем подставить численные значения и рассчитать значение искомой величины, если это требуется в условии задачи.

Задачи и решения

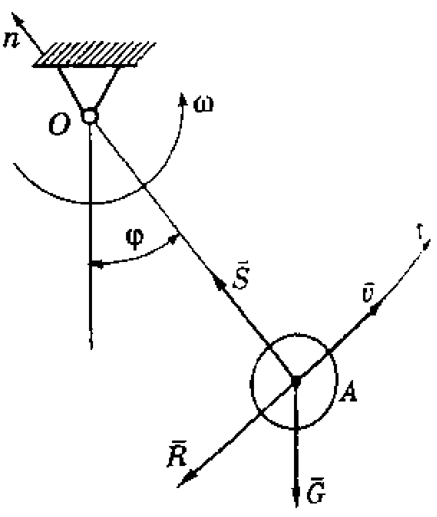
Задача 45.1

Составить уравнение движения маятника переменной массы в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Масса маятника изменяется по заданному закону $m = m(t)$ путем отделения частиц с относительной скоростью, равной нулю. Длина нити маятника l. На маятник действует также сила сопротивления, пропорциональная его угловой скорости: $R = -\beta\dot{\varphi}$.

Решение

Запишем уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \bar{v}_r\frac{dm}{dt}.$$



Так как $\bar{v}_r = 0$ по условию, то

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R} + \bar{G} + \bar{S}. \qquad (1)$$

Выберем естественные оси $A\tau n$ (см. рисунок) и запишем проекцию векторного уравнения (1) на ось τ, учитывая, что

$$v = \omega \cdot OA = \dot{\varphi} l.$$

ормула (1) примет вид

$$ml\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - mg\sin\varphi. \qquad (2)$$

в все члены выражения (2) на ml и перенеся их в левую ства, получим уравнение движения маятника:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0,$$

$$+\frac{\beta}{m(t)l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Задача 45.2

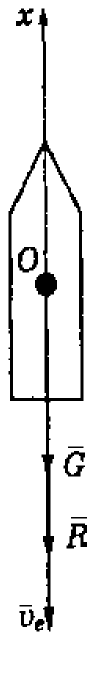
ить дифференциальное уравнение восходящего движения ффективную скорость v_e истечения газов (тяга реактивного определяется формулой $P_д = -\frac{dm}{dt}v_e$, где v_e — эффективная истечения) считать постоянной. Масса ракеты изменяется $m = m_0 f(t)$ (закон сгорания). Сила сопротивления воздуха заданной функцией скорости и положения ракеты: $R(x, \dot{x})$.

ние

ем уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \bar{v}_r\frac{dm}{dt}.$$

ии на ось Ox (см. рисунок):



$$m_0 f(t)\ddot{x} = -G - R - v_e\frac{d(m_0 f(t))}{dt}$$

$$m_0 f(t)\ddot{x} = -m_0 f(t)g - R(x, \dot{x}) - m_0\dot{f}(t)v_e,$$

Откуда получим дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты:

$$\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}.$$

О т в е т: $\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} v_e - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}$.

Задача 45.3

Проинтегрировать уравнение движения предыдущей задачи при $m = m_0(1 - \alpha t)$ и $R = 0$. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. На какой высоте будет находиться ракета в моменты $t = 10$; 30; 50 с при $v_e = 2000$ м/с и $\alpha = 1/100\ \text{с}^{-1}$?

Р е ш е н и е

Используем результат решения задачи 45.2:

$$\ddot{x} = -g - \frac{(1 - \alpha t)'}{1 - \alpha t} v_e = -g + \frac{\alpha v_e}{1 - \alpha t}$$

или

$$d\dot{x} = \left(-g + \frac{\alpha v_e}{1 - \alpha t}\right) dt. \qquad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1) дважды и получим

$$\dot{x} = -gt - v_e \ln(1 - \alpha t) + C_1, \qquad (2)$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + \frac{v_e}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) - (1 - \alpha t)] + C_1 t + C_2. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) найдем постоянные интегрирования с учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{v_e}{\alpha}$.

Тогда согласно формуле (3)

$$x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] - g\frac{t^2}{2}.$$

таем высоту подъема ракеты для заданных моментов времени:

$$= -\frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2} + \frac{2000}{1/100}\left[\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 10\right)\ln\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 10\right) + \frac{1}{100}\cdot 10\right] =$$

$$= 540 \text{ (м)} = 0{,}54 \text{ (км)};$$

$$= -\frac{9{,}81 \cdot 30^2}{2} + \frac{2000}{1/100}\left[\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 30\right)\ln\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 30\right) + \frac{1}{100}\cdot 30\right] =$$

$$= 5650 \text{ (м)} = 5{,}65 \text{ (км)};$$

$$= -\frac{9{,}81 \cdot 50^2}{2} + \frac{2000}{1/100}\left[\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 50\right)\ln\left(1 - \frac{1}{100}\cdot 50\right) + \frac{1}{100}\cdot 50\right] =$$

$$= 18\ 400 \text{ (м)} = 18{,}4 \text{ (км)}.$$

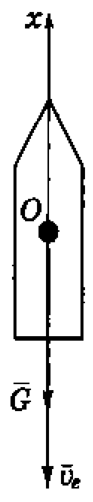
$$x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] - \frac{gt^2}{2};$$

$x(10) = 0{,}54$ км; $x(30) = 5{,}65$ км; $x(50) = 18{,}4$ км.

Задача 45.4

а начальной массы m_0 поднимается вертикально вверх в од-
и поле силы тяжести с постоянным ускорением ng (g — уско-
ного тяготения). Пренебрегая сопротивлением атмосферы
эффективную скорость v_e истечения газов постоянной, опре-
) закон изменения массы ракеты, 2) закон изменения массы
ри отсутствии поля тяготения.

ение



цем уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e + \bar{v}_r \frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$

роецируем векторное уравнение (1) на ось Ox
нок):

$$m\ddot{x} = -G - v_e \frac{dm}{dt}, \qquad (2)$$

$_e$; $G = mg$.

Так как $\ddot{x} = ng$, то уравнение (2) примет вид

$$mng = -mg - v_e \frac{dm}{dt}.$$

Откуда

$$mg(n+1) = -v_e \frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{dm}{m} = -\frac{g(n+1)}{v_e} dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$\ln m = -\frac{g(n+1)}{v_e} t + C. \qquad (3)$$

Найдем постоянную интегрирования с учетом начальных условий: $t = 0$, $m = m_0$; $C = \ln m_0$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{n+1}{v_c} gt.$$

Откуда

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{n+1}{v_e} gt\right).$$

2) Когда сила тяжести отсутствует, т.е. $G = 0$, уравнение (2) имеет вид

$$m\ddot{x} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{dm}{m} = -\frac{gn}{v_e} dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$\ln m = -\frac{gn}{v_e} t + C.$$

Найдем постоянную интегрирования C с учетом начальных условий: $t=0$, $m=m_0$; $C=\ln m_0$. Тогда

$$\ln\frac{m}{m_0}=-\frac{ng}{v_e}t.$$

Откуда

$$m=m_0\exp\left(-\frac{ng}{v_e}t\right).$$

Ответ: 1) $m=m_0\exp\left(-\frac{n+1}{v_e}gt\right)$; 2) $m=m_0\exp\left(-\frac{ng}{v_e}t\right)$.

Задача 45.5

Масса ракеты, описанной в задаче 45.2, изменяется до $t=t_0$ по закону $m=m_0e^{-\alpha t}$. Пренебрегая силой сопротивления, найти движение ракеты и, считая, что к моменту времени t_0 весь заряд практически сгорел, определить максимальную высоту подъема ракеты. В начальный момент ракета имела скорость, равную нулю, и находилась на земле.

Решение

Воспользуемся результатом решения задачи 45.2. Запишем дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты:

$$\ddot{x}=-g-\frac{(e^{-\alpha t})'}{e^{-\alpha t}}v_e=-g+\alpha v_e. \qquad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1) дважды:

$$\dot{x}=-gt+\alpha v_e t+C_1,$$

$$x=(\alpha v_e-g)\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом начальных условий: $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, $C_1=0$, $C_2=0$. Тогда

$$\dot{x}=(\alpha v_e-g)t, \qquad (2)$$

$$x=(\alpha v_e-g)\frac{t^2}{2}. \qquad (3)$$

Движение ракеты до достижения максимальной высоты разделим на два этапа.

I этап. Ракета движется до момента времени t_0. Для $t = t_0$ по формулам (2) и (3) найдем

$$\dot{x}(t_0) = (\alpha v_e - g)t_0,$$

$$x(t_0) = (\alpha v_e - g)\frac{t_0^2}{2}.$$

II этап. Топливо выгорело. Ракета движется только под действием силы тяжести, т.е.

$$\ddot{x} = -g.$$

Проинтегрируем это выражение дважды:

$$\dot{x} = -gt + C_3,$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Начальные условия для II этапа движения ракеты будут конечными для I этапа: $t = t_0$, $\dot{x}(t_0)$, $x(t_0)$. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha v_e - g)t_0 = -gt_0 + C_3, \\ &(\alpha v_e - g)\frac{t_0^2}{2} = -g\frac{t_0^2}{2} + C_3 t_0 + C_4. \end{aligned}\right\}$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = \alpha v_e t_0, \quad C_4 = -\alpha v_e \frac{t_0^2}{2}.$$

Тогда

$$\dot{x} = -gt + \alpha v_e t_0, \tag{4}$$

$$x = -g\frac{t^2}{2} + \alpha v_e t_0 t - \alpha v_e \frac{t_0^2}{2}. \tag{5}$$

При достижении ракетой максимальной высоты $x = H$, $t = T$, $v = 0$. Тогда согласно выражениям (4) и (5) получим

$$0 = -gT + \alpha v_e t_0 \Rightarrow T = \frac{\alpha v_e t_0}{g};$$

$$H = -\frac{g}{2}\left(\frac{\alpha v_e t_0}{g}\right)^2 + \alpha v_e t_0 \frac{\alpha v_e t_0}{g} - \alpha v_e \frac{t_0^2}{2} = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2.$$

Ответ: $H = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2$, где v_e — эффективная скорость истечения газов из ракеты.

Задача 45.6

При условиях предыдущей задачи определить значение α, отвечающее максимальной возможной высоте подъема ракеты H_{max}, и вычислить H_{max} (величину $\mu = \alpha t_0 = \ln(m_0/m_1)$ необходимо считать постоянной; m_1 — масса ракеты в момент t_0).

Решение

Согласно результатам решения задачи 45.5 максимальная высота подъема ракеты

$$H = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2$$

или

$$H = \frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - \frac{g}{\alpha}\right),$$

так как $\mu = \alpha t_0 = \text{const}$.

Найдем

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{\mu^2 v_e}{2\alpha^2},$$

$\frac{dH}{d\alpha} \to 0$ при $\alpha \to \infty$;

$$H_{max} = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - \frac{g}{\alpha}\right)\right] = \frac{\mu^2 v_e}{2g}\left(v_e - g\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g}.$$

Ответ: $\alpha = \infty$ (мгновенное сгорание); $H_{max} = \mu^2 v_e^2/(2g)$.

Задача 45.7

При условиях задач 45.5 и 45.6, задавшись коэффициентом перегрузки $k = \alpha v_e/g$, определить высоту подъема H ракеты в зависимости от H_{max}.

Решение

Из решения задачи 45.5 высота подъема ракеты

$$H = \frac{\alpha v_e}{2g}(\alpha v_e - g)t_0^2 = \frac{\alpha v_e}{2}\left(\frac{\alpha v_e}{g} - 1\right)t_0^2 = \frac{kg}{2}(k-1)t_0^2,$$

где $k = \dfrac{\alpha v_e}{g}$.

Согласно решению задачи 45.6

$$H_{max} = \frac{\mu^2 v_e^2}{2g} = \frac{\alpha^2 v_e^2 t_0^2}{2g} = \frac{k^2 t_0^2 g}{2},$$

где $\mu = \alpha t_0$.

Тогда высота подъема ракеты

$$H = \frac{kg}{2}(k-1)t_0^2 = \frac{k^2 t_0^2 g}{2} - \frac{k^2 t_0^2 g}{2k} =$$

$$= H_{max} - \frac{H_{max}}{k} = H_{max}\frac{k-1}{k}.$$

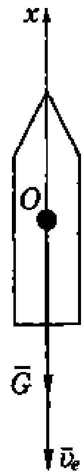
Ответ: $H = H_{max}(k-1)/k$.

Задача 45.8

Ракета стартует с Луны вертикально к ее поверхности. Эффективная скорость истечения $v_e = 2000$ м/с. Число Циолковского $z =$ (числом Циолковского называется отношение стартовой массы ракеты к массе ракеты без топлива). Определить, какое должно быть время сгорания топлива, чтобы ракета достигла скорости $v = 3000$ м/с (принять, что ускорение силы тяжести вблизи Луны постоянно и равно 1,62 м/с^2).

Решение

Запишем уравнение Мещерского в проекции на ось Ox:



$$m\frac{dv}{dt} = -mg_Л - v_e\frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -g_Л dt - v_e\frac{dm}{m}.$$

Проинтегрируем его:

$$\int_0^v dv = -g_Л\int_0^T dt - v_e\int_{mz}^m \frac{dm}{m}.$$

Откуда

$$v = -g_Л T - v_e \ln\frac{m}{mz} = -g_Л T + v_e \ln z.$$

Тогда время сгорания топлива

$$T = \frac{v_e \ln z - v}{g_Л} = \frac{2000\ln 5 - 3000}{1,62} = 135 \text{ (с)} = 2 \text{ мин } 15 \text{ с}.$$

Ответ: 2 мин 15 с.

Примечание. В задачнике допущена ошибка.

Задача 45.9

Ракета движется в однородном поле силы тяжести вверх с постоянным ускорением w. Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффектную скорость v_e истечения газов постоянной, определить время T, за которое масса ракеты уменьшится в два раза.

Р е ш е н и е

Запишем уравнение Мещерского в проекции на ось Ox (см. рис. к задаче 45.4):

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - v_e\frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$

Так как $\frac{dv}{dt} = w$, то уравнение (1) примет вид

$$w = -g - v_e\frac{dm}{mdt}$$

или

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w+g}{v_e}dt.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int_{m_0}^{m_0/2}\frac{dm}{m} = -\frac{w+g}{v_e}\int_0^T dt$$

и получим

$$\ln m\Big|_{m_0}^{m_0/2} = -\frac{w+g}{v_e}T \Rightarrow \ln 2 = \frac{w+g}{v_e}T.$$

Откуда найдем время T, за которое масса ракеты уменьшится в 2 раза:

$$T = \frac{v_e}{w+g}\ln 2.$$

О т в е т: $T = v_e\ln 2/(w+g)$.

Задача 45.10

Эффективная скорость истечения газов из ракеты v_e =2,4 км/с. Какой процент должен составлять вес топлива от стартового веса ракеты, чтобы ракета, движущаяся вне поля тяготения и вне атмосферы, приобрела скорость 9 км/с?

Решение

Уравнение Мещерского запишем в виде

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -v_e\frac{dm}{m}.$$

Найдем определенный интеграл:

$$\int_0^{9000} dv = -v_e\int_{m_0}^{km_0}\frac{dm}{m} \Rightarrow 9000 = -v_e\ln m\Big|_{m_0}^{km_0} = -v_e(\ln km_0 - \ln m_0) = -v_e\ln k.$$

Откуда

$$k = e^{-9000/v_e} = e^{-9000/2400} = 0{,}02,$$

где k — отношение остаточной массы ракеты к начальной.

Следовательно, масса ракеты без топлива составляет 2 % от стартовой массы, а топливо — 98 %.

Ответ: примерно 98 %.

Задача 45.11

Ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления среды. Эффективная скорость истечения газов $v_e = 2400$ м/с. Определить число Циолковского, если в момент полного сгорания топлива скорость ракеты будет равна 4300 м/с.

Решение

В данном случае уравнение Мещерского имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -v_e\frac{dm}{m}.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int_0^v dv = -v_e \int_{mz}^{m} \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -v_e \ln m\Big|_{zm}^{m} = -v_e \ln\frac{m}{zm} = v_e \ln z.$$

Откуда

$$z = e^{v/v_e} = e^{4300/2400} \approx 6.$$

Ответ: $z \approx 6$.

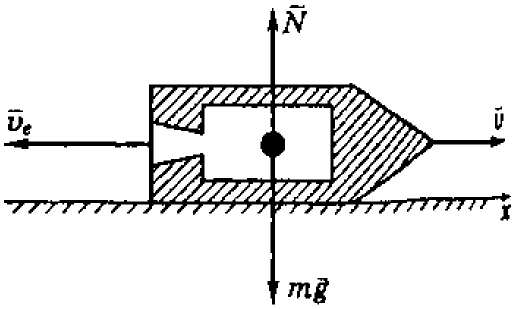
Задача 45.12

Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением w по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.

Решение

Составим дифференциальное уравнение движения тела переменной массы в проекции на горизонтальную ось x (см. рисунок):

$$m\ddot{x} = -v_e \frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$



Разделим переменные в уравнении (1) и, учитывая, что $\ddot{x} = w$, получим

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w}{v_e} dt. \qquad (2)$$

Проинтегрируем выражение (2):

$$\int_{m_0}^{m_0/k} \frac{dm}{m} = -\frac{w}{v_e}\int_0^t dt,$$

откуда

$$-\ln m\Big|_{m_0}^{\frac{m_0}{k}} = \frac{w}{v_e}t \Rightarrow t = \frac{v_e}{w}\ln k.$$

Путь, пройденный телом при равноускоренном движении,

$$s = \frac{wt^2}{2} = \frac{w}{2}\left(\frac{v_e \ln k}{w}\right)^2 = \frac{v_e^2(\ln k)^2}{2w}.$$

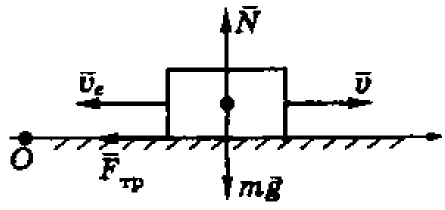
Ответ: $s = v_e^2(\ln k)^2/(2w)$.

Задача 45.13

Решить предыдущую задачу, предположив, что на тело действует сила трения скольжения.

Решение

Составим уравнение динамики тела переменной массы в проекции на горизонтальную ось (см. рисунок):



$$m\ddot{x} = -\frac{dm}{dt}v_e - F_{тр},$$

где $F_{тр} = Nf = fmg$.

Тогда

$$m\ddot{x} = -\frac{dm}{dt}v_e - fmg.$$

Разделим переменные и проинтегрируем, учитывая, что $\ddot{x} = w$:

$$-\int_{m_0}^{\frac{m_0}{k}} \frac{v_e dm}{m(a + fg)} = \int_0^t dt.$$

Получим

$$-\frac{v_e}{w + fg}\ln m\Bigg|_{m_0}^{\frac{m_0}{k}} = t.$$

Откуда

$$t = \frac{v_e}{w + fg}\ln k.$$

Следовательно, путь, пройденный телом при равноускоренном движении,

$$s=\frac{wt^2}{2}=\frac{w}{2}\left(\frac{v_e}{w+fg}\ln k\right)^2=\frac{wv_e^2}{2(w+fg)^2}(\ln k)^2.$$

О т в е т: $s=\frac{wv_e^2}{2(w+fg)^2}(\ln k)^2$, где f — коэффициент трения скольжения.

Задача 45.14

Тело переменной массы движется по специальным направляющим, проложенным вдоль экватора. Касательное ускорение $w_\tau = a$ постоянно. Не учитывая сопротивление движению, определить, во сколько раз уменьшится масса тела, когда оно сделает один оборот вокруг Земли, если эффективная скорость истечения газов $v_e = \text{const}$. Каково должно быть ускорение a, чтобы после одного оборота тело приобрело первую космическую скорость? Радиус Земли R.

Р е ш е н и е

Выберем естественные оси n (по радиусу к центру экватора) и τ (по касательной к экватору).

Запишем уравнение движения тела переменной массы в проекции на ось τ:

$$ma=-v_e\frac{dm}{dt}. \qquad (1)$$

Разделим переменные в выражении (1), проинтегрируем

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}=-\frac{a}{v_e}\int_0^t dt$$

и после преобразований получим

$$-\ln m\Big|_{m_0}^{m}=\frac{at}{v_e}$$

или

$$\ln\frac{m_0}{m}=\frac{at}{v_e}.$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{at}{v_e}}. \qquad (2)$$

вании выражения

$$S = \frac{at^2}{2} = 2\pi R$$

время t, за которое тело совершит один оборот:

$$t = \sqrt{\frac{4\pi R}{a}}. \qquad (3)$$

вим выражение (3) в уравнение (2) и найдем, во сколько лится масса тела:

$$\frac{m_0}{m} = e^{2\sqrt{\pi R a}/v_e} = \exp\left(2\sqrt{\pi R a}/v_e\right).$$

ı космическая скорость

$$v = \sqrt{gR}.$$

авноускоренном движении $v = at$.

$$\sqrt{gR} = at. \qquad (4)$$

авим выражение (3) в формулу (4):

$$\sqrt{gR} = \sqrt{4\pi R a}.$$

пределим значение ускорения

$$a = \frac{g}{4\pi}.$$

в $\exp(2\sqrt{\pi R a}/v_e)$ раз; $a = g/(4\pi)$.

Задача 45.15

ıелить в предыдущей задаче массу топлива, сгоревшую у, когда давление тела на направляющие будет равно нулю.

Решение

Свяжем с телом естественные оси n и τ и запишем уравнение движения тела в проекции на ось n в момент, когда давление тела на направляющие будет равно нулю:

$$\frac{mv^2}{R} = mg,$$

где m — масса тела в этот момент.

Отсюда

$$v = \sqrt{gR}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение движения тела в проекции на ось τ:

$$\frac{mdv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}. \qquad (2)$$

Проинтегрируем выражение (2):

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^{m} -v_e \frac{dm}{m}.$$

После преобразований получим

$$v = v_e \ln \frac{m_0}{m}$$

или

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_e}}.$$

Откуда

$$m = m_0 e^{-v/v_e}$$

или с учетом выражения (1)

$$m = m_0 e^{-\sqrt{gR}/v_e}.$$

Найдем массу сгоревшего топлива:

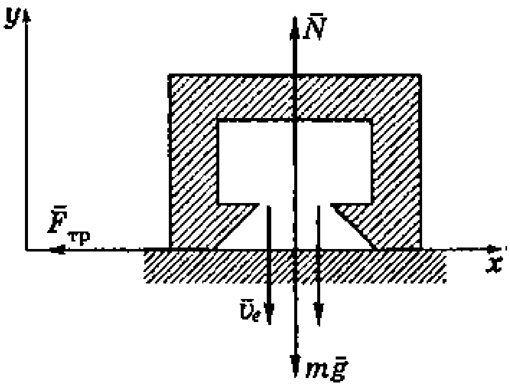
$$m_т = m_0 - m = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right).$$

Ответ: $m_т = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right).$

Задача 45.16

Тело скользит по горизонтальным рельсам. Истечение газа происходит вертикально вниз с постоянной эффективной скоростью v_e. Начальная скорость тела равна v_0. Найти закон изменения скорости тела и закон его движения, если изменение массы происходит по закону $m = m_0 - at$. Коэффициент трения скольжения равен f.

Решение



Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на горизонтальную ось x (см. рисунок):

$$m\ddot{x} = -F_{тр}. \qquad (1)$$

Зная, что

$$m = m_0 - at,$$

$$N = mg - v_e\frac{dm}{dt},$$

найдем силу трения

$$F_{тр} = fN = f\left(mg - v_e\frac{dm}{dt}\right).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$(m_0 - at)\ddot{x} = -fg(m_0 - at) + fv_e\frac{d(m_0 - at)}{dt}$$

или

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -fg + fv_e \frac{(-a)}{m_0 - at}. \qquad (2)$$

Разделим переменные в уравнении (2), проинтегрируем его:

$$\int_{v_0}^{v} d\dot{x} = -\int_0^t fg\,dt + \int_0^t fv_e \frac{d(m_0 - at)}{m_0 - at}$$

и получим

$$v - v_0 = -fgt + fv_e \ln(m_0 - at)\Big|_0^t$$

или

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - f\left(gt - v_e \ln\frac{m_0}{m_0 - at}\right). \qquad (3)$$

Разделим переменные в выражении (3), проинтегрируем его:

$$\int dx = \int v_0 dt - f\int\left(gt - v_e \ln\frac{m_0}{m_0 - at}\right)dt$$

и получим

$$x = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[t \ln m_0 + \frac{1}{a}(m_0 - at)(\ln(m_0 - at) - 1)\right]\right\} + C. \qquad (4)$$

Найдем постоянную интегрирования C, подставив в формулу (4) начальные условия: $x_0 = 0$ при $t = 0$:

$$C = -\frac{f v_e m_0}{a}(\ln m_0 - 1).$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$x = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[t \ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}(\ln(m_0 - at) - 1)\right]\right\} -$$

$$-\frac{fv_e m_0}{a}(\ln m_0 - 1).$$

После преобразований получим

$$s = x = v_0t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[t\ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1 - \frac{m_0}{a}(\ln m_0 - 1)\right)\right]\right\}.$$

Ответ: $v = v_0 - f\left[gt - v_e\ln\dfrac{m_0}{m_0 - at}\right]$;

$$s = v_0t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[t\ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1 - \frac{m_0}{a}(\ln m_0 - 1)\right)\right]\right\}.$$

Задача 45.17

Решить предыдущую задачу, если изменение топлива будет происходить по закону $m = m_0e^{-\alpha t}$. Определить, при каком α тело будет двигаться с постоянной скоростью v_0.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения тела переменной массы в проекции на горизонтальную ось x (см. решение задачи 45.16):

$$m\ddot{x} = -F_{\text{тр}}, \tag{1}$$

где $m = m_0e^{-\alpha t}$; $F_{\text{тр}} = f\left(mg - v_e\dfrac{dm}{dt}\right)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m_0e^{-\alpha t}\ddot{x} = -fgm_0e^{-\alpha t} + fv_e\alpha m_0e^{-\alpha t}$$

или

$$\ddot{x} = -fg + f\alpha v_e. \tag{2}$$

Проинтегрируем уравнение (2) дважды:

$$\dot{x} = -fgt + f\alpha v_et + C_1, \tag{3}$$

$$x = -f\frac{gt^2}{2} + f\frac{\alpha v_et^2}{2} + C_1t + C_2. \tag{4}$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2, подставив в формулы (3) и (4) начальные условия движения: $\dot{x}_0 = v_0$, $x_0 = 0$ при $t = 0$; $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, тогда выражения (3) и (4) примут вид

$$v = \dot{x} = v_0 - f(g - \alpha v_e)t, \tag{5}$$

$$s = x = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\frac{t^2}{2}. \tag{6}$$

Из равенства (5) найдем α, при котором тело будет двигаться с постоянной скоростью v_0:

$$v = v_0 = v_0 - f(g - \alpha v_e)t,$$

откуда

$$\alpha = \frac{g}{v_e}.$$

Ответ: $v = v_0 - f(g - \alpha v_e)t$; $s = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\frac{t^2}{2}$; $\alpha = \frac{g}{v_e}$.

Задача 45.18

Какой путь пройдет ракета на прямолинейном активном участке в пустоте и при отсутствии сил тяготения за время разгона от нулевой начальной скорости до скорости, равной эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e, если известна начальная масса ракеты m_0 и секундный расход β?

Решение

Запишем уравнение динамики ракеты переменной массы в проекции на направление ее движения:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -v_e\frac{dm}{m}. \tag{1}$$

Проинтегрируем уравнение (1):

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^{m_1} -v_e \frac{dm}{m}$$

и получим

$$v = -v_e(\ln m_1 - \ln m_0) = v_e \ln\frac{m_0}{m_1}. \quad (2)$$

Согласно формуле (2) при достижении ракетой скорости $v = v_e$

$$1 = \ln\frac{m_0}{m_1} = \ln e.$$

Откуда

$$m_1 = \frac{m_0}{e}. \quad (3)$$

В то же время

$$m_1 = m_0 - \beta t. \quad (4)$$

Приравняв выражения (3) и (4), найдем время, когда $v = v_e$:

$$T = \frac{m_0(e-1)}{\beta e}. \quad (5)$$

Равенство (2) запишем в виде

$$v = \frac{ds}{dt} = v_e(\ln m_0 - \ln m_1). \quad (6)$$

В выражении (6) разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^S dS = \int_0^T v_e \ln m_0 dt - v_e \int_0^T \ln(m_0 - \beta t)\,dt;$$

$$s = v_e \ln m_0 \cdot t\Big|_0^T + \frac{v_e}{\beta}\int_0^T \ln(m_0 - \beta t)\; d(m_0 - \beta t) = v_e \ln m_0 \cdot t\Big|_0^T +$$

$$+ \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta t)\ln(m_0 - \beta t)\Big|_0^T - \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta t)\Big|_0^T;$$

$$s = v_e T \ln m_0 + \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta t)\ln(m_0 - \beta t)\Big|_0^T - \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta t)\Big|_0^T;$$

$$s = v_e T \ln m_0 + \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta T)\ln(m_0 - \beta T) - \frac{v_e}{\beta} m_0 \ln m_0 -$$

$$- \frac{v_e}{\beta}(m_0 - \beta T) + \frac{v_e m_0}{\beta}. \qquad (7)$$

Подставим выражение (5) в формулу (7) и получим

$$s = v_e \frac{m_0(e-1)}{\beta e} \ln m_0 + \frac{v_e}{\beta}\left[m_0 - \frac{m_0(e-1)}{e}\right] \ln\left[m_0 - \frac{m_0(e-1)}{e}\right] - \frac{v_e}{\beta} m_0 \ln m_0 -$$

$$- \frac{v_e}{\beta}\left[m_0 - \frac{m_0(e-1)}{e}\right] + \frac{v_e m_0}{\beta} =$$

$$= \frac{v_e m_0}{\beta e}(e \ln m_0 - \ln m_0 + \ln m_0 - 1 - e \ln m_0 - 1 + e) = \frac{v_e m_0}{\beta e}(e-2).$$

Ответ: $s = \frac{v_e m_0}{\beta} \frac{e-2}{e}$, где e — Неперово число.

Задача 45.19

Ракета движется прямолинейно вне поля тяготения и при отсутствии сопротивления. Найти работу силы тяги к моменту, когда сгорит все топливо. Начальная масса ракеты m_0, конечная — m_1. Эффективная скорость истечения v_e постоянна.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение динамики ракеты переменной массы в проекции на направление ее движения:

$$m \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

или

$$dv = -v_e \frac{dm}{m}. \qquad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1):

$$\int_0^v dv = \int_{m_0}^{m} -v_e \frac{dm}{m}$$

и получим

$$v = v_e(\ln m_0 - \ln m). \qquad (2)$$

Работа силы тяги

$$A = \int F ds,$$

где $F = m\frac{dv}{dt}$; $ds = vdt$.

Тогда

$$A = \int mv\, dv. \qquad (3)$$

Подставим выражение (1) в формулу (3):

$$A = -\int v_e v\, dm, \qquad (4)$$

затем выражение (2) в формулу (4) и получим

$$A = -v_e^2 \int_{m_0}^{m_1} (\ln m_0 - \ln m)\, dm = -v_e^2 \ln m_0 \cdot m\Big|_{m_0}^{m_1} + v_e^2 m \ln m\Big|_{m_0}^{m_1} - v_e^2 m\Big|_{m_0}^{m_1} =$$

$$= -v_e^2 \ln m_0 \cdot (m_1 - m_0) + v_e^2 m_1 \ln m_1 - v_e^2 \ln m_0 \cdot m_0 - v_e^2 m_1 + v_e^2 m_0 =$$

$$= -v_e^2 m_1 \ln m_0 + v_e^2 m_0 \ln m_0 + v_e^2 m_1 \ln m_1 - v_e^2 m_0 \ln m_0 - v_e^2 m_1 + v_e^2 m_0 =$$

$$= m_1 v_e^2 \left[-(\ln m_0 - \ln m_1) + \frac{m_0}{m_1} - 1 \right].$$

Так как

$$\frac{m_0}{m_1} = z,$$

то

$$A = m_1 v_e^2 \,(z - 1 - \ln z). \qquad (5)$$

Ответ: $A = m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z)$, $z = m_0/m_1$.

Задача 45.20

При каком отношении z начальной m_0 и конечной m_1 масс ракеты, движущейся прямолинейно в пустоте и при отсутствии сил тяготения, ее механический к.п.д., определяемый как отношение кинетической энергии ракеты после выгорания топлива к затраченной энергии, имеет наибольшее значение?

Решение

Запишем выражение для вычисления к.п.д.:

$$\eta = \frac{T}{A} = \frac{m_1 v_1^2}{2A},$$

где T — кинетическая энергия ракеты после выгорания топлива; A – работа силы тяги.

Используем формулы (2) и (5) из решения задачи 45.19:

$$v_1 = v_e(\ln m_0 - \ln m_1)$$

или

$$v_1 = v_e \ln\frac{m_0}{m_1} = v_e \ln z,$$

$$A = m_1 v_e^2 (z - 1 - \ln z).$$

Тогда

$$\eta = \frac{m_1 v_e^2 \ln^2 z}{2m_1 v_e^2 (z-1-\ln z)} = \frac{\ln^2 z}{2(z-1-\ln z)}.$$

Для определения экстремума найдем производную этого выражения и приравняем ее нулю:

$$\eta'_z = \frac{2\frac{1}{z}(z-1-\ln z)\ln z - \left(1-\frac{1}{z}\right)\ln^2 z}{2(z-1-\ln z)^2} = 0.$$

Откуда

$$2(z-1-\ln z) - (z-1)\ln z = 0,$$

$$2(z-1) - 2\ln z - z\ln z + \ln z = 0$$

или

$$2(z-1)=(z+1)\ln z,$$

где z — корень уравнения $\ln z=\dfrac{2(z-1)}{1+z}$.

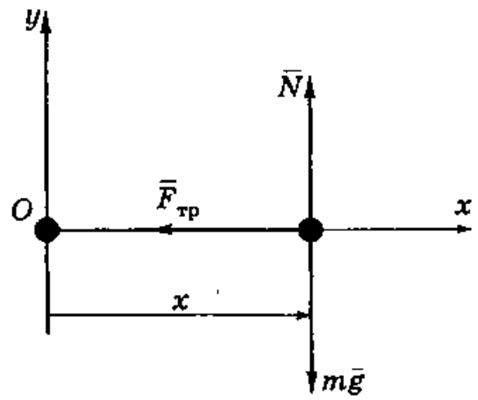
Ответ: z — корень уравнения $\ln z=\dfrac{2(z-1)}{1+z}$.

Задача 45.21

Самолет, имеющий массу m_0, приземляется со скоростью v_0 на полярный аэродром. Вследствие обледенения масса самолета при движении после посадки увеличивается согласно формуле $m=m_0+at$, где $a=\text{const}$. Сопротивление движению самолета по аэродрому пропорционально его весу (коэффициент пропорциональности f). Определить промежуток времени до остановки самолета с учетом (T) и без учета (T_1) изменения его массы. Найти закон изменения скорости с течением времени.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на самолет: силу тяжести $m\bar{g}$, силу трения $\bar{F}_{тр}$, реакцию $\bar{N}$ опоры.



Запишем уравнение движения самолета в проекции на ось x, приняв самолет за материальную точку:

$$\frac{d}{dt}(mv)=-F_{тр}, \qquad (1)$$

$$m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}=-fN=-fmg \qquad (2)$$

или

$$\frac{dv}{dt}+\frac{vdm}{mdt}=-fg.$$

Так как $m=m_0+at$, то $dm=adt$.

Тогда

$$\frac{dv}{dt}+\frac{vadt}{(m_0+at)dt}+fg=0 \tag{3}$$

или

$$\frac{dv}{dt}+\frac{av}{m_0+at}+fg=0. \tag{4}$$

Введем подстановку

$$v=uW=f(t). \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt}=u\frac{dW}{dt}+W\frac{du}{dt}. \tag{6}$$

С учетом выражений (5) и (6) уравнение (4) примет вид

$$u\frac{dW}{dt}+W\frac{du}{dt}+\frac{auW}{m_0+at}+fg=0. \tag{7}$$

Подберем u таким, чтобы выполнялось равенство

$$W\frac{du}{dt}+\frac{auW}{m_0+at}=0.$$

Тогда

$$\frac{du}{u}=-\frac{adt}{m_0+at}.$$

Проинтегрируем последнее выражение и получим

$$\ln u=-\ln(m_0+at)$$

или

$$\ln u=\frac{1}{\ln(m_0+at)}.$$

Откуда

$$u=\frac{1}{m_0+at}. \tag{8}$$

вим выражение (8) в уравнение (7) и получим

$$\frac{1}{m_0+at}\cdot\frac{dW}{dt}+fg=0$$

$$\frac{dW}{dt}=-fg\,(m_0+at),$$

$$dW=(-fgm_0-fgat)\,dt. \tag{9}$$

тегрируем выражение (9):

$$W=-fgm_0t-fga\frac{t^2}{2}+C_1. \tag{9'}$$

и постоянную интегрирования из выражения (9′) при $t=0$; ледовательно, согласно выражению (5)

$$v_0=u_0W_0,$$

$$W_0=\frac{v_0}{u_0}=v_0m_0.$$

$$W=-fgm_0t-fga\frac{t^2}{2}+v_0m_0. \tag{10}$$

вим выражения (8) и (10) в формулу (5) и получим закон а скорости с течением времени:

$$\frac{1}{m_0+at}\left(m_0v_0-fgm_0t-\frac{1}{2}fgat^2\right)=\frac{2m_0v_0-fg(2m_0+at)t}{2(m_0+at)}. \tag{11}$$

до остановки самолета определим из условия $v=0$:

$$m_0v_0-fgm_0t-\frac{1}{2}fgat^2=0$$

$$t^2+\frac{2m_0}{a}t-\frac{2m_0v_0}{fga}=0.$$

Корни квадратного уравнения

$$t_{1,2} = -\frac{m_0}{a} \pm \sqrt{\frac{m_0^2}{a^2} + \frac{2m_0 v_0}{fga}}.$$

Так как время не может быть отрицательным, то

$$T = \frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2av_0}{fgm_0}} - 1\right).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $m = m_0 = \text{const}$. Тогда

$$F_{\text{тр}_1} = fN_1, \tag{12}$$

где $N_1 = m_0 g$.

Подставим выражение (12) в уравнение (1):

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -fm_0 g$$

или

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} -fg dt.$$

После интегрирования получим

$$v - v_0 = -fgt$$

или

$$v = v_0 - fgt. \tag{13}$$

В момент остановки $t = T_1$, $v = 0$. Тогда из уравнения (13) получим

$$T_1 = \frac{v_0}{fg}.$$

Ответ: $T = \frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2av_0}{fgm_0}} - 1\right)$; $T_1 = \frac{v_0}{fg}$; $v = \frac{2m_0 v_0 - fg(2m_0 + at)t}{2(m_0 + at)}$.

Задача 45.22

Эффективные скорости истечения первой и второй ступени у двухступенчатой ракеты соответственно равны $v_e^{(1)} = 2400$ м/с и $v_e^{(2)} = 2600$ м/с. Определить, считая, что движение происходит вне поля тяготения ы, числа Циолковского для обеспечения конечной ско- 400 м/с первой ступени и конечной скорости $v_2 = 5400$ м/с іени.

ı и е

ъ ракеты в конце активного участка находим по формуле ого:

$$v = v_0 + v_e \ln z, \qquad (1)$$

— отношение начальной массы всей ракеты к массе ее

$_e$ — эффективная скорость истечения газов.

ьзуемся формулой (1) и получим

$$v_1 = v_0 + v_e^{(1)} \ln z_1,$$

льно, так как $v_0 = 0$,

$$z_1 = \exp\left(\frac{v_1}{v_e^{(1)}}\right) = \exp\left(\frac{2400}{2400}\right) = e = 2{,}72;$$

$$v_2 = v_1 + v_e^{(2)} \ln z_2,$$

льно,

$$z_2 = \exp\left(\frac{v_2 - v_1}{v_e^{(2)}}\right) = \exp\left(\frac{5400 - 2400}{2600}\right) = e^{15/13} = 3{,}17.$$

$z_1 = 2{,}72$; $z_2 = 3{,}17$.

Задача 45.23

ія, что у трехступенчатой ракеты числа Циолковского и эф- ые скорости v_e истечения у всех трех ступеней одинаковы, ісло Циолковского при $v_e = 2{,}4$ км/с, если после сгорания ллива скорость ракеты равна 9 км/с (влиянием поля тяготе- ıпротивлением атмосферы пренебречь).

Решение

Используя формулу Циолковского, запишем скорости ракеты на каждом из трех этапов:

1-й этап — $v_1 = v_e^{(1)} \ln z_1;$ (1)

2-й этап — $v_2 = v_1 + v_e^{(2)} \ln z_2;$ (2)

3-й этап — $v_3 = v_2 + v_e^{(3)} \ln z_3.$ (3)

Так как по условию задачи $v_e^{(1)} = v_e^{(2)} = v_e^{(3)} = v_e$ и $z_1 = z_2 = z_3 = z$, то, решив совместно уравнения (1)—(3), получим, что $v_3 = 3v_e \ln z$. Следовательно,

$$z = \exp\left(\frac{v_3}{3v_e}\right) = \exp\left(\frac{9}{3\cdot 2,4}\right) = e^{1,25} = e\cdot\sqrt[4]{e} = 2,718\cdot\sqrt[4]{2,718} = 3,49.$$

Ответ: $z = 3,49$.

Задача 45.24

Трехступенчатая ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления атмосферы. Эффективные скорости истечения и числа Циолковского для всех ступеней одинаковы и соответственно равны $v_e = 2500$ м/с, $z = 4$. Определить скорости ракеты после сгорания горючего в первой ступени, во второй и в третьей.

Решение

Воспользуемся формулой Циолковского и определим скорости ракеты на каждом из трех этапов:

1-й этап — $v_1 = v_e \ln z = 2500\cdot\ln 4 = 3465$ (м/с);

2-й этап — $v_2 = v_1 + v_e \ln z = 3465 + 2500\cdot\ln 4 = 6930$ (м/с);

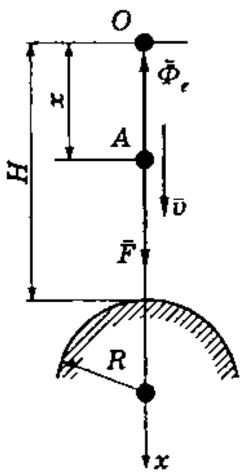
3-й этап — $v_3 = v_2 + v_e \ln z = 6930 + 2500\cdot\ln 4 = 10\ 395$ (м/с).

Ответ: $v_1 = 3465$ м/с; $v_2 = 6930$ м/с; $v_3 = 10\ 395$ м/с.

Задача 45.25

В момент, когда приближающийся к Луне космический корабль находится на расстоянии H от ее поверхности и имеет скорость v_0, направленную к центру Луны, включается тормозной двигатель. Учитывая, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от корабля до центра Луны и принимая, что масса корабля изменяется по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (m_0 — масса ракеты в момент включения тормозного двигателя, α — постоянное число), найти α, при котором корабль совершит мягкую посадку (т.е. будет иметь скорость прилунения, равную нулю). Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Радиус Луны R, ускорение силы тяжести на Луне $g_Л$.

Решение



Дифференциальное уравнение движения космического корабля в данном случае (см. рисунок) примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = F - \Phi_e, \qquad (1)$$

где $\Phi_e = \frac{dm}{dt}v_e$ — реактивная тяга; $F = G\frac{mM}{(R+H-x)^2}$ — сила притяжения ракеты Луной; M — масса Луны.

Подставим выражения Φ_e, F и m в уравнение (1):

$$m_0 e^{-\alpha t}\frac{dv}{dt} = G\frac{m_0 e^{-\alpha t} M}{(R+H-x)^2} - m_0 \alpha e^{-\alpha t} v_e$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{GM}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e. \qquad (2)$$

Полагая $v = v(x)$, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

тогда выражение (2) примет вид

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{GM}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e. \qquad (3)$$

На поверхности Луны выполняется условие

$$mg_{Л} = \frac{GmM}{R^2},$$

т.е. $GM = g_{Л} R^2$.

В результате выражение (3) можно записать в следующем виде:

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{g_{Л} R^2}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e = 0. \tag{4}$$

Разделив в уравнении (4) переменные и проинтегрировав, получим

$$\int_{v_0}^{0} v dv = g_{Л} R^2 \int_0^H \frac{dx}{(R+H-x)^2} - \alpha v_e \int_0^H dx$$

или

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{0} = g_{Л} R^2 \left.\frac{1}{R+H-x}\right|_0^H - \alpha v_e x\Big|_0^H.$$

Следовательно,

$$-\frac{v_0^2}{2} = g_{Л} R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) - \alpha v_e H.$$

Отсюда

$$\alpha v_e H = \frac{v_0^2}{2} + \frac{g_{Л} R^2 H}{R(R+H)}$$

или

$$\alpha = \frac{v_0^2}{2v_e H} + \frac{g_{Л} R}{v_e(R+H)}.$$

О т в е т: $\alpha = \dfrac{v_0^2}{2v_e H} + \dfrac{g_{Л} R}{v_e(R+H)}$.

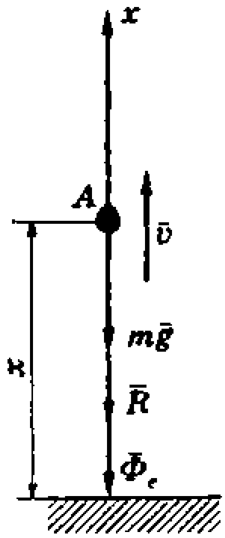
Задача 45.26

Найти закон изменения массы ракеты, начавшей движение вертикально вверх с нулевой начальной скоростью, если ее ускорение w постоянно, а сопротивление среды пропорционально квадрату ско-

— коэффициент пропорциональности). Поле силы тяжести однородным. Эффективная скорость истечения газа v_e по-

ение

шем уравнение Мещерского для движения ра- юле сил тяжести с учетом сил сопротивления унок):



$$mw = -mg - \Phi_e - R,$$

$v_e \dfrac{dm}{dt}$.

а

$$mw = -mg - v_e \frac{dm}{dt} - bv^2$$

$$v_e \frac{dm}{dt} + (w + g)m + bv^2 = 0. \qquad (1)$$

как

$$\frac{dv}{dt} = w,$$

том того, что $v_0 = 0$, получим $v = wt$ и тогда уравнение (1) при-

.

$$\frac{dm}{dt} + \frac{w+g}{v_e}m + \frac{bw^2}{v_e}t^2 = 0$$

$$\frac{dm}{dt} + \alpha m + \beta t^2 = 0, \qquad (2)$$

$\dfrac{w+g}{v_e}$; $\beta = \dfrac{bw^2}{v_e}$.

им однородное уравнение, соответствующее формуле (2):

$$\frac{dm}{dt} + \alpha m = 0,$$

тельно, $m = Ce^{-\alpha t}$.

В соответствии с методом вариации постоянных решение уравнения (2) ищем в виде

$$m = C(t)e^{-\alpha t}. \tag{3}$$

Подставим выражение (3) в уравнение (2):

$$\frac{dC}{dt}e^{-\alpha t} - C\alpha e^{-\alpha t} + C\alpha e^{-\alpha t} + \beta t^2 = 0$$

или

$$\frac{dC}{dt} = -\beta t^2 e^{\alpha t}.$$

Интегрируя по частям, получим

$$C = -\beta\int t^2 e^{\alpha t}dt + C_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\int t^2 de^{\alpha t} + C_1 = -\frac{\beta}{\alpha}t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha}\int te^{\alpha t}dt + C_1 =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2}\int t\,de^{\alpha t} + C_1 = -\frac{\beta}{\alpha}t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2}te^{\alpha t} - \frac{2\beta}{\alpha^2}\int e^{\alpha t}dt + C_1 =$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha}t^2 e^{\alpha t} + \frac{2\beta}{\alpha^2}te^{\alpha t} - \frac{2\beta}{\alpha^3}e^{\alpha t} + C_1.$$

Подставим это выражение в формулу (3):

$$m = C_1 e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}t^2 + \frac{2\beta}{\alpha^2}t - \frac{2\beta}{\alpha^3}. \tag{4}$$

Используя начальное условие $m(0) = m_0$ при $t = 0$, определим

$$C_1 = m_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3}.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$m = \left(m_0 + \frac{2\beta}{\alpha^3}\right)e^{-\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}t^2 + \frac{2\beta}{\alpha^2}t - \frac{2\beta}{\alpha^3}.$$

Возвращаясь к обозначениям α и β в формуле (2), получим

$$\frac{2\beta}{\alpha^3} = \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^3}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{bw^2}{w+g}, \quad \frac{2\beta}{\alpha^2} = \frac{2v_e bw^2}{(w+g)^2}$$

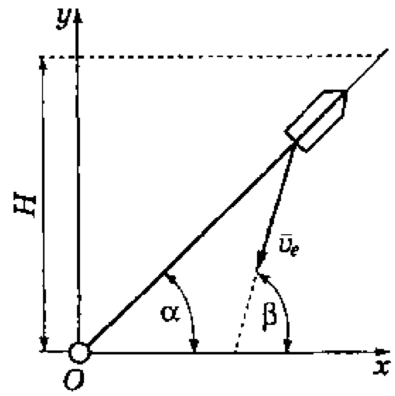
Запишем окончательный результат:

$$m=\left[m_0+\frac{2bv_e^2w^2}{(w+g)^3}\right]e^{-\frac{w+g}{v_e}t}-\frac{bw^2}{w+g}t^2+\frac{2v_e bw^2}{(w+g)^2}t-\frac{2v_e^2bw^2}{(w+g)^3}.$$

Ответ: $m=\left[m_0+\frac{2bv_e^2w^2}{(w+g)^3}\right]e^{-\frac{w+g}{v_e}t}-\frac{bw^2}{w+g}t^2+\frac{2v_e bw^2}{(w+g)^2}t-\frac{2v_e^2bw^2}{(w+g)^3}.$

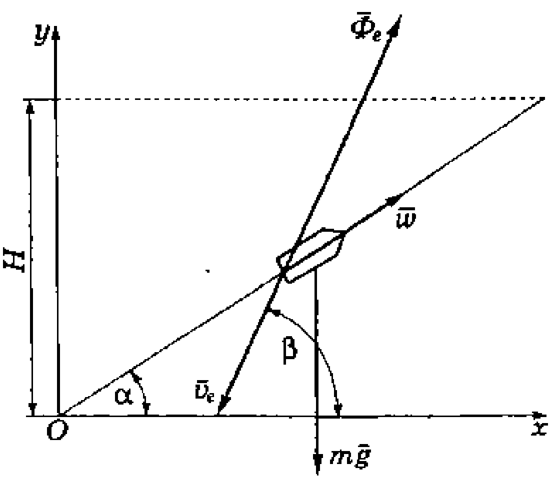
Задача 45.27

Ракета перемещается в однородном поле силы тяжести по прямой с постоянным ускорением w. Эта прямая образует угол α с горизонтальной плоскостью, проведенной к поверхности Земли в точке запуска ракеты. Предполагая, что эффективная скорость истечения газов v_e постоянна по величине и направлению, определить, каково должно быть отношение начальной массы ракеты к массе ракеты без топлива (число Циолковского), если к моменту сгорания топлива ракета оказалась на расстоянии H от указанной выше касательной плоскости.



Решение

Уравнение Мещерского, описывающее движение ракеты с постоянным ускорением w по прямой, расположенной под углом α к горизонту (см. рисунок), имеет в проекциях на оси координат x и y следующий вид:



$$mw\cos\alpha=-v_e\frac{dm}{dt}\cos\beta. \qquad (1)$$

$$mw\sin\alpha=-mg-v_e\frac{dm}{dt}\sin\beta. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{dm}{m} = -\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}dt \Rightarrow \ln m\Big|_{m_0}^{m} = -\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}t\Big|_0^T.$$

Отсюда

$$m = m_0 e^{-at}, \tag{3}$$

где $a = \dfrac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}$.

Подставив выражение (3) в уравнение (2), получим

$$m_0 e^{-at} w\sin\alpha = -m_0 e^{-at} g + v_e a m_0 e^{-at}\sin\beta$$

или

$$w\sin\alpha + g = v_e\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sin\beta.$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{w\sin\alpha + g}{w\cos\alpha},$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{w\sin\alpha + g}{w\cos\alpha}\right).$$

Проинтегрируем уравнение (1) по времени в пределах от 0 до T, T — время сгорания топлива. Тогда

$$\ln m\Big|_{m_0}^{m_k} = -at\Big|_0^T$$

или

$$\ln z = aT.$$

Откуда

$$z = e^{\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}T}. \tag{4}$$

Время T определим из условия

$$\frac{d^2y}{dt^2} = w\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$y=\frac{w\sin\alpha}{2}t^2+C_1t+C_2. \tag{5}$$

Используя начальные условия: $\dot{y}(0)=0$, $y(0)=0$, получим $C_1=C_2=0$. Так как при $t=T$ $y=H$, то выражение (5) примет вид

$$H=\frac{w\sin\alpha}{2}T^2.$$

Отсюда

$$T=\sqrt{\frac{2H}{w\sin\alpha}}.$$

Подставив это значение T в выражение (4), найдем

$$z=e^{\frac{w\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sqrt{\frac{2H}{w\sin\alpha}}}=e^{\frac{\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\sin\alpha}}}.$$

Ответ: $z=e^{\frac{\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\sin\alpha}}}$, где β — угол, образуемый скоростью $\bar{v}_e$ с касательной плоскостью, равный $\beta=\operatorname{arctg}\frac{w\sin\alpha+g}{w\cos\alpha}$.

Задача 45.28

Тело переменной массы движется вверх с постоянным ускорением w по шероховатым прямолинейным направляющим, составляющим угол α с горизонтом. Считая, что поле силы тяжести является однородным, а сопротивление атмосферы движению тела пропорционально первой степени скорости (b — коэффициент сопротивления), найти закон изменения массы тела. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна; коэффициент трения скольжения между телом и направляющими равен f.

Решение

Запишем уравнение Мещерского в проекции на ось x (см. рисунок):

$$mw=-mg\sin\alpha-F_c-F_{\text{тр}}+\Phi_e. \tag{1}$$

По условию задачи $F_c=bv=bwt$, так как $v=wt$, $w=\text{const}$.

Сила трения

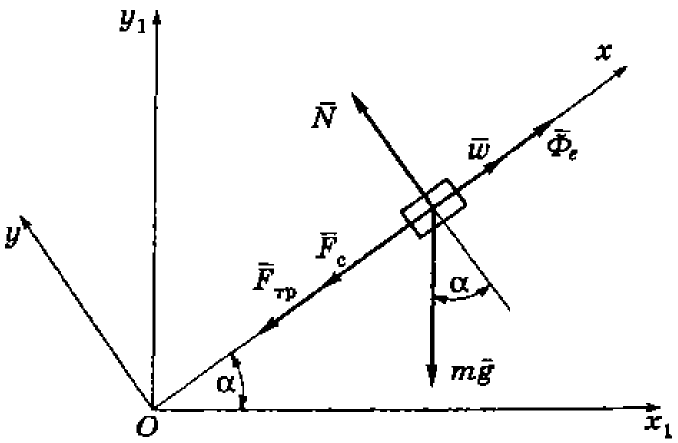
$$F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha.$$

Поскольку проекция $\bar{F}_{тр}$ на ось y равна нулю, т.е. $0 = N - mg\cos\alpha$, то

$$N = mg\cos\alpha.$$

Реактивная сила

$$\Phi_e = -v_e\frac{dm}{dt}.$$



С учетом этих выражений уравнение (1) примет вид

$$mw_1 = -bwt - v_e\frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{dm}{dt} + am + \gamma t = 0, \tag{2}$$

где $w_1 = w + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$; $a = \dfrac{w_1}{v_e}$; $\gamma = \dfrac{bw}{v_e}$.

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде

$$m = C(t)e^{-at}. \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в уравнение (2), получим

$$\frac{dC}{dt}e^{-at} - Cae^{-at} + Cae^{-at} + \gamma t = 0$$

или

$$\frac{dC}{dt}=-\gamma te^{at}. \qquad (4)$$

Проинтегрируем уравнение (4) по частям и определим

$$C=-\gamma\int te^{at}dt+C_1=-\frac{\gamma}{a}\int t\,de^{at}+C_1=-\frac{\gamma}{a}t\,e^{at}+\frac{\gamma}{a}\int e^{at}dt+C_1=$$

$$=-\frac{\gamma}{a}te^{at}+\frac{\gamma}{a^2}e^{at}+C_1.$$

Подставим это значение C в выражение (3):

$$m=-\frac{\gamma}{a}t+\frac{\gamma}{a^2}+C_1e^{-at}.$$

Используя начальное условие при $t=0$ $m(0)=m_0$, определим постоянную интегрирования

$$C_1=m_0-\frac{\gamma}{a^2}.$$

С учетом обозначений a и γ получим

$$m=\left(m_0-\frac{bwv_e}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{v_e}t}-\frac{bw}{w_1}\left(t-\frac{v_e}{w_1}\right).$$

Ответ: $m=\left(m_0-\frac{bwv_e}{w_1^2}\right)e^{-\frac{w_1}{v_e}t}-\frac{bw}{w_1}\left(t-\frac{v_e}{w_1}\right)$,

где $w_1=w+g(\sin\alpha+f\cos\alpha)$; m_0 — начальная масса тела.

Задача 45.29

Аэростат весом Q поднимается вертикально и увлекает за собой сложенный на земле канат. На аэростат действует подъемная сила P, сила тяжести и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости: $R=-\beta\dot{x}^2$. Вес единицы длины каната γ. Составить уравнение движения аэростата.

Р е ш е н и е

Масса аэростата увеличивается пропорционально длине поднятого каната. При этом абсолютная скорость поднимающейся части каната равна нулю. Следовательно, уравнение Мещерского примет вид

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum F_{kx}$$

или

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = P - mg - \beta\dot{x}^2$$

или

$$\frac{dm}{dt}\dot{x} + m\ddot{x} = P - mg - \beta\dot{x}^2. \qquad (1)$$

Так как

$$m = \frac{Q + \gamma x}{g},$$

то

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g}\dot{x}.$$

Подставим эти значения в уравнение (1) и получим

$$\frac{Q+\gamma x}{g}\ddot{x} = P - (Q+\gamma x) - \left(\beta + \frac{\gamma}{g}\right)\dot{x}^2.$$

Откуда

$$\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g + \gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2.$$

О т в е т: $\ddot{x} = -g + \dfrac{Pg}{Q+\gamma x} - \dfrac{\beta g + \gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2.$

Задача 45.30

При условиях предыдущей задачи определить скорость подъема аэростата. В начальный момент аэростат неподвижен и находится на высоте H_0.

Решение

Согласно решению задачи 45.29 дифференциальное. уравнение движения аэростата

$$\ddot{x}=-g+\frac{Pg}{Q+\gamma x}-\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2. \tag{1}$$

После преобразования

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\cdot\dot{x}=\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}$$

уравнение (1) примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}=-g+\frac{Pg}{Q+\gamma x}-\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2. \tag{2}$$

Сделаем в уравнении (2) замену переменных

$$\dot{x}^2=uv\Rightarrow\frac{d(\dot{x}^2)}{dx}=\frac{d(uv)}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$$

и получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u\right)=-g+\frac{Pg}{Q+\gamma x}-\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}uv.$$

Произведем группировку:

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}u=-\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}uv, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}v=-g+\frac{Pg}{Q+\gamma x}. \tag{4}$$

Из формулы (3) получим

$$\frac{dv}{v}=-2\,\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}dx.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int\frac{dv}{v}=-\frac{2(\beta g+\gamma)}{\gamma}\int\frac{d(Q+\gamma x)}{Q+\gamma x}$$

и найдем

$$\ln v = -\frac{2(\beta g+\gamma)}{\gamma}\ln(Q+\gamma x).$$

Откуда

$$v = \left(\frac{1}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)}. \qquad (5)$$

Из формулы (4) с учетом выражения (5) получим

$$\frac{du}{dx} = 2g\left[P(Q+\gamma x)^{1+\frac{2\beta g}{\gamma}} - (Q+\gamma x)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)}\right]. \qquad (6)$$

Разделив переменные в выражении (6) и проинтегрировав, найдем

$$u = 2g\left[\frac{P}{2\gamma+2\beta g}(Q+\gamma x)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)} - \frac{1}{3\gamma+2\beta g}(Q+\gamma x)^{\left(3+2\frac{\beta g}{\gamma}\right)} + C\right].$$

Используя начальные условия: $u = 0$, $x = H_0$, определим постоянную интегрирования

$$C = \frac{(Q+\gamma H_0)^{\left(3+2\frac{\beta g}{\gamma}\right)}}{3\gamma+2\beta g} - \frac{P(Q+\gamma H_0)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)}}{2\gamma+2\beta g}.$$

Тогда

$$\dot{x}^2 = uv = \frac{Pg}{(\beta g+\gamma)}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)}\right] - \frac{2g(Q+\gamma x)}{2\beta g+3\gamma}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{\left(3+2\frac{\beta g}{\gamma}\right)}\right].$$

Ответ: $\dot{x}^2 = \frac{Pg}{(\beta g+\gamma)}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\frac{\beta g}{\gamma}\right)}\right] - \frac{2g(Q+\gamma x)}{2\beta g+3\gamma}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{\left(3+2\frac{\beta g}{\gamma}\right)}\right].$

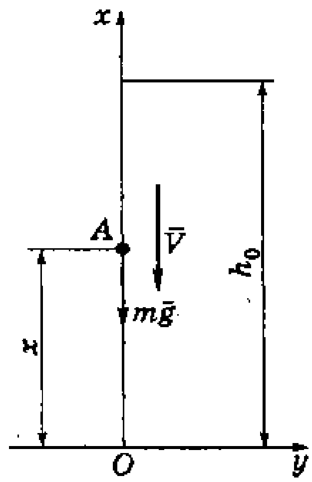
Задача 45.31

Шарообразная водяная капля падает вертикально в атмосфере, насыщенной водяными парами. Вследствие конденсации масса капли возрастает пропорционально площади ее поверхности (коэффициент пропорциональности α). Начальный радиус капли r_0, ее начальная скорость v_0, начальная высота h_0. Определить скорость капли и закон изменения ее высоты со временем (сопротивлением движению пренебречь).

Указание. Показать, что $dr = \alpha\, dt$, и перейти к новой независимой переменной r.

Решение

Масса капли пропорциональна ее объему V, который, в свою очередь, пропорционален площади S ее поверхности. В результате получим соотношение



$$\frac{dV}{dt} = \alpha S \Rightarrow 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dr = \alpha\, dt \Rightarrow r = r_0 + \alpha t.$$

Так как абсолютная скорость присоединенной массы равна нулю, то уравнение Мещерского в системе координат, ось которой проведена вертикально вверх, а начало расположено на поверхности Земли (см. рисунок), имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -mg. \qquad (1)$$

С учетом того, что

$$dr = \alpha\, dt \Rightarrow \frac{d}{dt} = \alpha \frac{d}{dr},$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\alpha \frac{d}{dr}\left(m\alpha \frac{dx}{dr}\right) = -mg$$

или

$$\alpha^2\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dr}\frac{dx}{dr}+\frac{d^2x}{dr^2}\right)=-g. \qquad (2)$$

Вычислим

$$\frac{dm}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\gamma\pi r^3\right)=\frac{4}{3}\cdot 3\pi r^2\gamma=\frac{3}{r}\gamma\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{3m}{r},$$

где γ — плотность воды.

Подставим это значение в формулу (2) и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{dx}{dr}=-\frac{g}{\alpha^2}. \qquad (3)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3), представим в виде $\bar{x}=r^{\lambda}$.

Подставим это соотношение в уравнение

$$\frac{d^2\bar{x}}{dr^2}+\frac{3}{r}\frac{d\bar{x}}{dr}=0,$$

получим

$$\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}+3\lambda r^{\lambda-2}=0,$$

$$\lambda(\lambda-1)+3\lambda=0$$

или

$$\lambda(\lambda+2)=0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1=0, \quad \lambda_2=-2.$$

Следовательно,

$$\bar{x}=C_1+\frac{C_2}{r^2}.$$

Частное решение уравнения (3) ищем в виде $x^*=Ar^2$. Подставим это равенство в формулу (3) и получим

$$2A+6A=-\frac{g}{\alpha^2}.$$

откуда

$$A = -\frac{g}{8\alpha^2},$$

$$x^* = -\frac{g}{8\alpha^2} r^2.$$

Запишем общее решение уравнения (3):

$$x = \bar{x} + x^*$$

или

$$x = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{g}{8\alpha^2} r^2, \qquad (4)$$

$$\dot{x} = v = \alpha \frac{dx}{dr} = -\frac{2\alpha C_2}{r^3} - \frac{gr}{4\alpha}. \qquad (5)$$

Постоянную C_2 определим из выражения (5) с учетом начальных условий:

$$v(r_0) = v_0 \Rightarrow C_2 = \frac{r_0^3}{2\alpha}\left(-\frac{gr_0}{4\alpha} - v_0\right).$$

Тогда согласно формуле (5) скорость капли

$$v = v_0 \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left(r - \frac{r_0^4}{r^3}\right).$$

Постоянную C_1 определим из формулы (4) с учетом начальных условий: $x_0 = h_0$, и значения постоянной C_2:

$$x(r_0) = h_0 \Rightarrow C_1 = h_0 - \frac{r_0}{2\alpha}\left(-\frac{gr_0}{4\alpha} - v_0\right) + \frac{g}{8\alpha^2} r_0^2 = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha} + \frac{gr_0^2}{4\alpha^2}.$$

В результате получим

$$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha} + \frac{gr_0^2}{4\alpha^2} - \frac{gr_0^4}{8\alpha^2 r^2} - \frac{v_0 r_0^3}{2\alpha r^2} - \frac{gr^2}{8\alpha^2} =$$

$$= h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right).$$

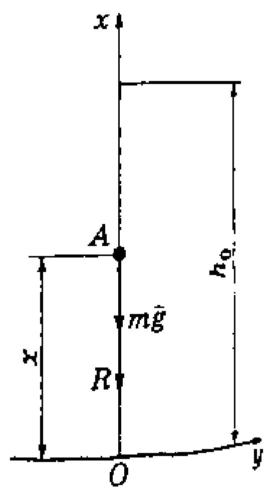
Ответ: $x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left(r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right)$;

$$v = v_0 \frac{r_0^3}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left(r - \frac{r_0^4}{r^3}\right), \text{ где } r = r_0 + \alpha t.$$

Задача 45.32

Решить предыдущую задачу в предположении, что на каплю кроме силы тяжести действует еще и сила сопротивления, пропорциональная площади максимального поперечного сечения и скорости капли $R = -4\beta\pi r^2 v$ (β — постоянный коэффициент).

Решение



Согласно условию задачи скорость возрастания массы капли прямо пропорциональна площади ее поверхности, т.е.

$$\frac{dm}{dt} = \alpha S,$$

где $m = \frac{4\pi r^3 \gamma}{3}$ (γ — плотность воды); $S = 4\pi r^2$.

Так как абсолютная скорость присоединяемых частиц равна нулю, то дифференциальное уравнение движения капли в проекции на вертикальную ось x (см. рисунок) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg - 4\pi\beta r^2 v. \quad (1)$$

Подставим в уравнение (1) вместо m и dt их значения:

$$m = \frac{4\pi r^3 \gamma}{3}, \quad dt = \frac{dr}{\alpha}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\alpha \frac{d(r^3 v)}{dr} + 3\beta r^2 v = -r^3 g. \quad (2)$$

Введем замену $r^3 v = W$ и представим уравнение (2) в виде

$$\frac{dW}{dr} + \frac{3\beta W}{\alpha r} = -\frac{r^3 g}{\alpha} \text{ (уравнение Бернулли).} \tag{3}$$

Решаем уравнение (3) с помощью подстановки:

$$W = uz. \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{dW}{dr} = u\frac{dz}{dr} + z\frac{du}{dr}. \tag{5}$$

С учетом выражений (4) и (5) уравнение (3) примет вид

$$u\frac{dz}{dr} + z\frac{du}{dr} + \frac{3\beta}{\alpha r}uz = -\frac{r^3 g}{\alpha},$$

или

$$u\frac{dz}{dr} + z\left(\frac{du}{dr} + \frac{3\beta}{\alpha r}u\right) = -\frac{r^3 g}{\alpha}. \tag{6}$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{du}{dr} + \frac{3\beta}{\alpha r}u = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{du}{u} + \frac{3\beta dr}{\alpha r} = 0,$$

$$\ln u + \frac{3\beta}{\alpha}\ln r = 0,$$

откуда

$$u = r^{-\frac{3\beta}{\alpha}}. \tag{7}$$

Теперь решим уравнение

$$u\frac{dz}{dr} = -\frac{r^3 g}{\alpha}$$

или, учитывая выражение (7),

$$r^{-\frac{3\beta}{\alpha}} \cdot \frac{dz}{dr} = -\frac{r^3 g}{\alpha}.$$

Разделим переменные:

$$dz = -\frac{g}{\alpha} r^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} dr,$$

и, интегрируя, получим

$$z = -\frac{g r^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} + C. \qquad (8)$$

Подставим выражения (7) и (8) в уравнение (4), получим

$$W = r^{-\frac{3\beta}{\alpha}} \left[\frac{-g r^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} + C \right].$$

Произвольную постоянную C найдем из условия: при $r = r_0$ $v = v_0$, $W_0 = r_0^3 v_0$.

Следовательно,

$$r_0^3 v_0 = r_0^{-\frac{3\beta}{\alpha}} \left[\frac{-g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} + C \right],$$

откуда

$$C = v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} + \frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta}$$

и окончательно

$$v = -\frac{gr}{4\alpha+3\beta} + r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} \left[v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} + \frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} \right].$$

Для нахождения x воспользуемся зависимостью

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dr} = \frac{v}{\alpha}, \quad \text{или} \quad dx = \frac{v}{\alpha} dr,$$

эсле интегрирования, учитывая, что $x_0 = 0$, получим

$$x = h_0 - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)} - \frac{1}{2\alpha+3\beta} \times$$

$$\times \left[r^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} \right] \left[v_0 r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)} - \frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} \right].$$

$$v = -\frac{gr}{4\alpha+3\beta} + \left[v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)} + \frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} \right] r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)};$$

$$x = h_0 - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)} - \frac{1}{2\alpha+3\beta} \left[r^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(2\alpha+3\beta)} \right] \times$$

$$\times \left[v_0 r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)} - \frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} \right], \text{ где } r = r_0 + \alpha t.$$

Задача 45.33

ıутая в клубок тяжелая однородная цепь лежит на краю го-
ıьного стола, причем в начале одно звено цепи неподвижно
ется со стола. Направляя ось x вертикально вниз и принимая,
ıальный момент $x = 0$, $\dot{x} = 0$, определить движение цепи.

е н и е

ıачим плотность материала цепи γ, составим дифференци-
равнение движения цепи при $\bar{u}_{абс} = 0$:

$$\frac{d}{dt}(\gamma x \dot{x}) = \gamma x g, \quad \frac{dx}{dx}\frac{d}{dt}(x\dot{x}) = xg, \quad \dot{x}\frac{d}{dx}(x\dot{x}) = xg,$$

$$x\dot{x}\frac{d}{dx}(x\dot{x}) = x^2 g. \qquad (1)$$

нтегрируем уравнение (1) и получим

$$\frac{(x\dot{x})^2}{2} = \frac{x^3 g}{3} + C_1.$$

С учетом начальных условий: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем $C_1 = 0$. Тогда

$$x\dot{x} = \sqrt{\frac{2gx^3}{3}},$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gx}{3}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2g}{3}}\,dt,$$

$$2\sqrt{x} = t\sqrt{\frac{2g}{3}} + C_2.$$

Найдем постоянную интегрирования C_2 с учетом начальных условий: $x = 0$ при $t = 0$; $C_2 = 0$. Тогда

$$4x = \frac{2t^2 g}{3}.$$

Откуда уравнение движения цепи

$$x = \frac{gt^2}{6}.$$

Ответ: $x = \frac{gt^2}{6}$.

Задача 45.34

Цепь сложена на земле и одним концом прикреплена к вагонетке, стоящей на наклонном участке пути, образующем угол α с горизонтом. Коэффициент трения цепи о землю f. Вес единицы длины цепи γ, вес вагонетки P. Скорость вагонетки в начальный момент v_0. Определить скорость вагонетки в любой момент времени и выяснить необходимое условие, при котором вагонетка может остановиться.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения вагонетки с цепью в проекции на ось x, учитывая, что абсолютная скорость присоединенной массы равна нулю (см. рисунок):

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = \sum F_{kx},$$

где $m = \frac{P + \gamma x}{g}$.

Тогда

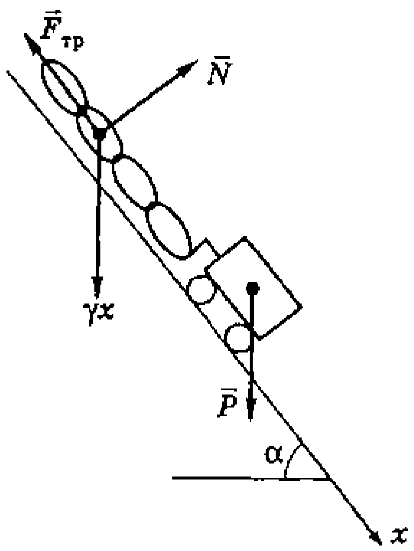
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{P+\gamma x}{g}\dot{x}\right]=P\sin\alpha+\gamma x\sin\alpha-F_{\text{тр}}.$$

Поскольку $F_{\text{тр}}=f\gamma x\cos\alpha$, то

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{P+\gamma x}{g}\dot{x}\right]=(P+\gamma x)\sin\alpha-f\gamma x\cos\alpha$$

или

$$\frac{(P+\gamma x)}{g}\ddot{x}+\frac{\gamma\dot{x}^2}{g}=(P+\gamma x)\sin\alpha-f\gamma x\cos\alpha. \quad (1)$$



Так как $\ddot{x}=\dfrac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$, то выражение (1) примет вид

$$(P+\gamma x)\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}+\gamma\dot{x}^2=(P+\gamma x)g\sin\alpha-fg\gamma x\cos\alpha. \quad (2)$$

Умножим уравнение (2) на $(P+\gamma x)dx$ и получим

$$(P+\gamma x)^2\dot{x}d\dot{x}+(P+\gamma x)\gamma\dot{x}^2dx=(P+\gamma x)^2g\sin\alpha dx-fg\gamma x(P+\gamma x)\cos\alpha dx. \quad (3)$$

Поскольку

$$(P+\gamma x)^2\dot{x}d\dot{x}+(P+\gamma x)\gamma\dot{x}^2dx=d\left[\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2}\right],$$

то уравнение (3) примет вид

$$d\left[\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2}\right]=(P+\gamma x)^2g\sin\alpha dx-fg\gamma x(P+\gamma x)\cos\alpha dx. \quad (4)$$

Проинтегрируем выражение (4):

$$\frac{(P+\gamma x)^2\dot{x}^2}{2}=\frac{g(P+\gamma x)^3}{3\gamma}\sin\alpha-fg\gamma P\frac{x^2}{2}\cos\alpha-fg\gamma^2\frac{x^3}{3}\cos\alpha+C. \quad (5)$$

Подставим начальные условия $x_0=0$, $\dot{x}_0=v_0$ в уравнение (5):

$$\frac{P^2v_0^2}{2}=\frac{gP^3}{3\gamma}\sin\alpha+C$$

и найдем постоянную интегрирования

$$C=\frac{P^2v_0^2}{2}-\frac{gP^3}{3\gamma}\sin\alpha.$$

Подставим значение C в уравнение (5), разделим на $(P+\gamma x)^2$ и получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{g(P+\gamma x)}{3\gamma}\sin\alpha-\frac{fg\gamma Px^2}{2(P+\gamma x)^2}\cos\alpha-\frac{fg\gamma^2x^3}{3(P+\gamma x)^2}\cos\alpha+$$

$$+\frac{P^2v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}-\frac{gP^3}{3\gamma(P+\gamma x)^2}\sin\alpha$$

или

$$\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{P^2v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}+\frac{Pg\sin\alpha}{3\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+\frac{1}{3}gx\sin\alpha-$$

$$-\frac{fg\gamma Px^2}{2(P+\gamma x)^2}\cos\alpha-\frac{fg\gamma^2x^3}{3(P+\gamma x)^2}\cos\alpha.$$

Ответ: $\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{P^2v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}+\frac{Pg\sin\alpha}{3\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+\frac{1}{3}gx\sin\alpha-$
$-\frac{fg\gamma Px^2}{2(P+\gamma x)^2}\cos\alpha-\frac{fg\gamma^2x^3}{3(P+\gamma x)^2}\cos\alpha$. Остановка может иметь место при выполнении неравенства $f>\operatorname{tg}\alpha$.

Примечание. Ответ в задачнике неточный.

Задача 45.35

Материальная точка массы m притягивается по закону всемирного тяготения Ньютона к неподвижному центру. Масса центра со временем меняется по закону $M=\frac{M_0}{1+\alpha t}$. Определить движение точки.

Указание. Перейти к новым координатам с помощью соотношений $\xi=\frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta=\frac{y}{1+\alpha t}$ и к приведенному времени $\tau=\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения движения в проекции на декартовы координаты:

$$m\ddot{x} = -\frac{fmMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{fmMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad (2)$$

где $M = \dfrac{M_0}{1+\alpha t}$; $x = \dfrac{\xi}{\alpha\tau}$; $y = \dfrac{\eta}{\alpha\tau}$.

Тогда

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{(1+\alpha t)^2}\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\alpha^2\tau^2}{\alpha}\left(\frac{\frac{d\xi}{d\tau}\tau-\xi}{\tau^2}\right) = \alpha\left(\frac{d\xi}{d\tau}\tau-\xi\right),$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -\alpha^2\tau^2(-\alpha)\left(\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\tau+\frac{d\xi}{d\tau}-\frac{d\xi}{d\tau}\right) = -\alpha^3\tau^3\frac{d^2\xi}{d\tau^2}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1):

$$\alpha^3\tau^3\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{fM_0\xi}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}(1+\alpha t)^3} = 0.$$

Сократим на $\alpha^3\tau^3$ и получим

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{fM_0\xi}{\rho^3} = 0,$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

Аналогично преобразуем и уравнение (2), которое примет вид

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{fM_0\eta}{\rho^3} = 0.$$

Ответ: уравнения движения в координатах ξ, η имеют вид (f – постоянная тяготения)

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+\frac{fM_0\xi}{\rho^3}=0; \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2}+\frac{fM_0\eta}{\rho^3}=0; \quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

т.е. отвечают обычным уравнениям в случае постоянных масс. Поэтому в зависимости от начальных условий в переменных ξ и η имеют место эллиптические, параболические или гиперболические орбиты.

Примечание. В задачнике в ответе опечатка: дано ρ^2 вместо ρ^3.

Задача 45.36

Для быстрого сообщения ротору гироскопа необходимого числа оборотов применяется реактивный запуск. В тело ротора вделываются пороховые шашки общей массой m_0, продукты сгорания которых выбрасываются через специальные сопла. Принять пороховые шашки за точки, расположенные на расстоянии r от оси вращения ротора. Касательная составляющая эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e постоянна.

Считая, что общий расход массы пороха в одну секунду равен q, определить угловую скорость ω ротора к моменту сгорания пороха, если на ротор действует постоянный момент сопротивления, равный M. Радиус ротора R. В начальный момент ротор находится в покое.

Решение

Запишем закон изменения массы пороха:

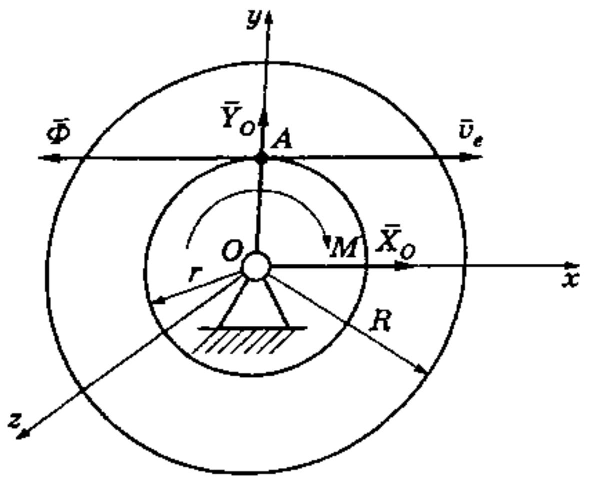
$$m=m_0-qt,$$

где t — время, которое изменяется от $t_1=0$ до $t_2=\frac{m_0}{q}$.

Дифференциальное уравнение вращения ротора относительно оси z (см. рисунок):

$$I\frac{d\omega}{dt}=M_z,$$

где $I=I_p+(m_0-qt)r^2$ — момент инерции ротора и пороховой шашки переменной массы; $M_z=v_eqR-M$ — момент реактивной силы и сил сопротивления относительно оси z.



Итак, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$[I_p + (m_0 - qt)r^2]\frac{d\omega}{dt} = v_e qR - M.$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{m_0/q} \frac{(v_e qR - M)dt}{I_p + (m_0 - qt)r^2}$$

и получим

$$\omega = -\frac{(v_e qR - M)}{r^2 q}\ln[I_p + (m_0 - qt)r^2]\Big|_0^{m_0/q} =$$

$$= \frac{Rqv_e - M}{r^2 q}\ln\frac{(I_p + m_0 r^2)}{I_p}.$$

Ответ: $\omega = \dfrac{Rqv_e - M}{r^2 q}\ln\dfrac{I_0}{I_p}$, где $I_0 = I_p + m_0 r^2$, I_p — момент инерции ротора относительно оси вращения.

Задача 45.37

По данным предыдущей задачи найти угловую скорость ротора после сгорания пороха, если на ротор действует момент сопротивления, пропорциональный его угловой скорости (b — коэффициент пропорциональности).

Решение

В этой задаче по сравнению с предыдущей вместо постоянного момента сопротивления M дан закон его изменения: $M_c = b\omega$. Тогда дифференциальное уравнение вращения ротора запишем в виде

$$[I_p + (m_0 - qt)r^2]\frac{d\omega}{dt} = v_e qR - b\omega.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это уравнение:

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{v_e qR - b\omega} = \int_0^{\frac{m_0}{q}} \frac{dt}{I_p + (m_0 - qt)r^2},$$

$$-\frac{1}{b}\ln(v_e qR - b\omega)\Big|_0^\omega = -\frac{1}{qr^2}\ln[I_p + (m_0 - qt)r^2]\Big|_0^{m_0/q},$$

$$\frac{v_e qR - b\omega}{v_e qR} = \left(\frac{I_p}{I_p + m_0 r^2}\right)^{\frac{b}{r^2 q}},$$

$$1 - \frac{b\omega}{v_e qR} = \left(\frac{I_p}{I_p + m_0 r^2}\right)^{\frac{b}{r^2 q}}.$$

Введем обозначение

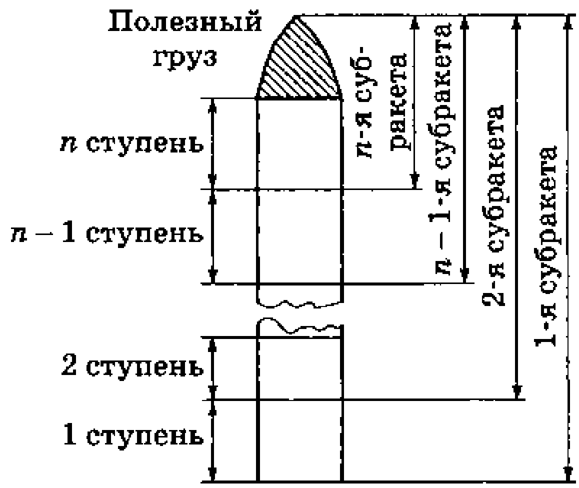
$$I_0 = I_p + m_0 r^2.$$

Тогда

$$\omega = \frac{Rv_e q}{b}\left[1 - \left(\frac{I_p}{I_0}\right)^{\frac{b}{qr^2}}\right].$$

Ответ: $\omega = \dfrac{Rv_e q}{b}\left[1 - \left(\dfrac{I_p}{I_0}\right)^{\frac{b}{qr^2}}\right]$.

Задача 45.38



Многоступенчатая ракета состоит из полезного груза и ступеней. Каждая ступень после израсходования топлива отделяется от остальной конструкции. Под субракетой понимается сочетание работающей ступени, всех неработающих ступеней и полезного груза, причем для данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз являются «полезным грузом», т.е. каждая ракета рассматривается как одноступенчатая ракета. На рисунке указана нумерация ступеней и субракеты.

Пусть q — вес полезного груза, P_i — вес топлива в i-й ступени, Q_i – сухой (без топлива) вес i-й ступени, G_i — полный вес i-й субракеты. Вводя в рассмотрение число Циолковского для каждой субракеты

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

и конструктивную характеристику (отношение полного веса ступени к ее сухому весу) для каждой ступени

$$s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i},$$

определить полный стартовый вес всей ракеты, вес k-й субракеты, вес топлива k-й ступени, сухой вес k-й ступени.

Указание. При решении задачи ввести α_i — «относительный вес» i-й субракеты, т.е. отношение начального веса субракеты к весу ее полезного груза: $\alpha_1 = G_1/G_2$, $\alpha_2 = G_2/G_3$, ..., $\alpha_n = G_n/g$.

Решение

Найдем число Циолковского для первой субракеты

$$z_i = \frac{G_1}{G_1 - P_1}. \qquad (1)$$

Полный вес второй субракеты

$$G_2 = G_1 - P_1 - Q_1.$$

Откуда полный вес первой субракеты

$$G_1 = G_2 + P_1 + Q_1. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в знаменатель уравнения (1) и найдем

$$z_1 = \frac{G_1}{G_2 + Q_1}.$$

Откуда

$$G_1 = z_1(G_2 + Q_1). \tag{3}$$

Определим конструктивный параметр для первой ступени

$$s_1 = \frac{Q_1 + P_1}{Q_1}. \tag{4}$$

Найдем вес топлива в первой ступени из выражения (4):

$$P_1 = Q_1(s_1 - 1) \tag{5}$$

и из выражения (1)

$$P_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1}. \tag{6}$$

Приравняем правые части выражений (5) и (6):

$$Q_1(s_1 - 1) = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1}$$

и найдем сухой вес первой ступени

$$Q_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1(s_1 - 1)}. \tag{7}$$

Подставим значение Q_1 в выражение (3):

$$G_1 = z_1(G_2 + Q_1) = z_1 G_2 + z_1 Q_1 = z_1 G_2 + \frac{G_1(z_1 - 1)}{s_1 - 1}$$

и определим полный стартовый вес первой субракеты

$$G_1 = \frac{z_1 G_2(s_1 - 1)}{s_1 - z_1}. \tag{8}$$

Рассуждая аналогично, найдем вес второй субракеты

$$G_2 = \frac{z_2 G_3 (s_2 - 1)}{s_2 - z_2}. \tag{9}$$

Вес n-й субракеты

$$G_n = \frac{q z_n (s_n - 1)}{s_n - z_n}. \tag{10}$$

Тогда полный стартовый вес всей ракеты

$$G_1 = q \prod_{i=1}^{n} z_1 \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}, \tag{11}$$

а вес k-й субракеты

$$G_k = q \prod_{i=k}^{n} z_1 \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}. \tag{12}$$

Согласно формуле (7) сухой вес k-й ступени

$$Q_k = \frac{G_k (z_k - 1)}{z_k (s_k - 1)}. \tag{13}$$

Вес топлива в k-й ступени определим по формуле (6):

$$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k. \tag{14}$$

Откуда

$$G_k = \frac{P_k z_k}{z_k - 1}. \tag{15}$$

Подставим выражение (15) в равенство (13) и получим

$$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}. \tag{16}$$

Ответ: $G_1 = q \prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}$; $G_k = q \prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_k}$; $P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k$;

$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}$ (формулы Фертрегта).

Задача 45.39

Двухступенчатая ракета предназначена сообщить полезному грузу $q = 1$ кН скорость $v = 6000$ м/с. Эффективные скорости истечения газов у ступеней одинаковы и равны $v_e = 2400$ м/с. Конструктивные характеристики первой и второй ступеней соответственно равны $s_1 = 4$, $s_2 = 5$ (см. задачу 45.38). Пренебрегая силой тяготения Земли и сопротивлением атмосферы, определить числа Циолковского для первой и второй субракет, при которых стартовый вес G_1 ракеты будет минимальный.

Решение

На основании формулы Циолковского запишем

$$\frac{v}{v_e} = \ln(z_1 z_2).$$

Откуда

$$z_1 z_2 = e^{v/v_e} = e^{6,0/2,4} = e^{2,5}. \qquad (1)$$

Стартовый вес ракеты вычислим по формуле (11) из решения задачи 45.38:

$$G_1 = \frac{z_1 z_2 q (s_1 - 1)(s_2 - 1)}{(s_1 - z_1)(s_2 - z_2)} = \frac{12 z_1 z_2 q}{(4 - z_1)(5 - z_2)} = \frac{12 q e^{2,5} z_1}{(4 - z_1)(5 z_1 - e^{2,5})}. \qquad (2)$$

Исследуем выражение (2) на минимум. Для этого продифференцируем его и приравняем к нулю:

$$\frac{dG_1}{dz_1} = \frac{12 q e^{2,5}\left[(4 - z_1)(5 z_1 - e^{2,5}) - z_1(-5 z_1 + e^{2,5} + 20 - 5 z_1)\right]}{(4 - z_1)^2 (5 z_1 - e^{2,5})^2} = 0.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$20 z_1 - 5 z_1^2 + z_1 e^{2,5} - 4 e^{2,5} + 10 z_1^2 - 20 z_1 - z_1 e^{2,5} = 0,$$

$$5 z_1^2 = 4 e^{2,5},$$

$$z_1 = e^{1,25}\sqrt{\frac{4}{5}} = 3,12.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$z_2 = \frac{e^{2,5}}{3,12} = 3,91.$$

На основании исследования перемены знака производной в точке $z_1 = 3{,}12$ убеждаемся, что стартовый вес G_1 достигает минимума, который рассчитаем по формуле (2):

$$G_{1\min} = \frac{e^{2,5} \cdot 12 \cdot 1}{0{,}88 \cdot 1{,}09} = 152 \text{ (кН)}.$$

Ответ: $z_1 = 3{,}12$; $z_2 = 3{,}91$; $G_1 = 152$ кН.

Задача 45.40

Используя данные предыдущей задачи, определить для каждой ступени вес топлива и сухой вес.

Указание. Использовать формулы ответа к задаче 45.38.

Решение

Вес топлива в первой ступени найдем по формуле (6) из решения задачи 45.38:

$$P_1 = \frac{G_1(z_1 - 1)}{z_1} = \frac{152(3{,}12 - 1)}{3{,}12} = 103{,}3 \text{ (кН)}.$$

Сухой вес первой ступени ракеты рассчитаем по формуле (16) (см. решение задачи 45.38):

$$Q_1 = \frac{P_1}{s_1 - 1} = \frac{103{,}3}{4 - 1} = 34{,}4 \text{ (кН)}.$$

Полный вес второй ступени найдем по формуле (10):

$$G_2 = qz_2 \frac{s_2 - 1}{s_2 - z_2} = \frac{1 \cdot 3{,}91(5 - 1)}{5 - 3{,}91} = 14{,}3 \text{ (кН)}.$$

Используя формулы ответа к задаче 45.38, рассчитаем вес топлива во второй ступени:

$$P_2 = \frac{z_2 - 1}{z_2} G_2 = \frac{3{,}91 - 1}{3{,}91} \cdot 14{,}34 = 10{,}7 \text{ (кН)}$$

и вес второй ступени без топлива

$$Q_2 = \frac{P_2}{s_2 - 1} = \frac{10,67}{5-1} = 2,7 \text{ (кН)}.$$

О т в е т: $P_1 = 103,3$ кН; $P_2 = 10,7$ кН; $Q_1 = 34,4$ кН; $Q_2 = 2,7$ кН.

П р и м е ч а н и е. Ответ в задачнике неточный.

Задача 45.41

Четырехступенчатая ракета состоит из четырех ракет. Конструктивная характеристика s и эффективная скорость v_e у всех ракет одинаковы и равны $s = 4,7$, $v_e = 2,4$ км/с. Каков должен быть стартовый вес ракеты, чтобы она грузу в 10 кН сообщила скорость $v = 9000$ м/с? (Воспользоваться формулами ответа к задаче 45.38.)

Р е ш е н и е

На основании формулы Циолковского, учитывая, что конструктивные характеристики и эффективная скорость у всех четырех ракет одинаковые, запишем

$$\frac{v}{v_e} = \ln z^4.$$

Откуда

$$z^4 = e^{v/v_e} = e^{3,75}.$$

Тогда

$$z = e^{3,75/4} = e^{0,9375}.$$

Стартовый вес G_1 четырехступенчатой ракеты рассчитаем по формуле из ответа к задаче 45.38:

$$G_1 = qz^4 \frac{(s-1)^4}{(s-z)^4} = 10\frac{3^{3,75}(4,7-1)^4}{(4,7-e^{0,9375})^4} = 3755 \text{ (кН)}.$$

О т в е т: 3755 кН.

П р и м е ч а н и е. Ответ в задачнике неточный.

Аналитическая механика — это область (раздел) механики, в которой изучается механическое движение или равновесие механических систем с помощью общих единых аналитических методов, применяемых для любых механических систем. При этом получаются уравнения равновесия или движения одной и той же структуры, независимой от вида механической системы. Преимущество аналитических методов и состоит в том, что они обладают исключительной общностью, т.е. применимы к исследованию движения или равновесия различных механических систем под действием сил. Достигается это за счет введения обощенных понятий, таких как обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные силы, а также понятий возможные (виртуальные) и действительные перемещения, возможная работа силы и понятия связей, в том числе и идеальных.

Методы аналитической механики базируются на использовании целого ряда аксиом и теоретических положений динамики и кинематики, таких как кинетическая и потенциальная энергия, работа силы, силы инерции, кинематические характеристики твердого тела и его точек и др.

При решении задач с помощью методов аналитической механики представляется возможным составлять уравнения равновесия или дифференциальные уравнения движения, не вводя реакций связей.

В основе аналитической механики лежат общие принципы механики, из которых аналитическим путем получают уравнения движения или равновесия механических систем.

Принципы механики представляют собой положения (утверждения), из которых как следствия вытекают другие частные положения. Как и аксиомы, они служат тем началом, которое может быть положено в основу дальнейших теоретических построений, доказательств и выводов. Но в отличие от аксиом это не очевидные положения, которые требуют в ряде случаев строгого математического доказательства.

Рассмотрим понятия, часто встречающиеся при решении задач методами аналитической механики.

Связями в аналитической механике называют любые ограничения, накладываемые на движения точек механической системы. Такими ограничениями могут быть не только тела, но и некоторые кинематические условия. Поэтому все эти ограничения (поверхности, линии, кинематические условия) могут быть записаны в виде уравнений или неравенств.

Связи, уравнения которых содержат только координаты точек, т.е. ограничения накладываются только на координаты точек, называются *геометрическими связями*. К ним относятся связи в виде тел, поверхностей, линий и т.п.

Связи, накладывающие ограничения не только на координаты точек, но и на их скорости, называются *дифференциальными связями*.

Все геометрические связи и те дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы, называются *голономными связями*.

Дифференциальные связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы, называются *неголономными связями*.

Геометрические и дифференциальные связи, в уравнения которых явно не входит время, называются *стационарными*. Связи, в уравнения которых явно входит время, т.е. с течением времени они изменяются, называются *нестационарными*.

Связи, ограничивающие движение точки в двух противоположных направлениях, называются *двусторонними* или *удерживающими* (не освобождающими). Такие связи описываются уравнениями. Связи, ограничивающие движение только в одном направлении, называются *односторонними* или *неудерживающими* (освобождающими) и всегда описываются неравенствами.

Возможными, или ***виртуальными***, ***перемещениями точек*** механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускают наложенные на систему связи. Возможные перемещения механической системы — это совокупность одновременных возможных перемещений точек системы, совместимых со связями. В случае нестационарных связей под возможными перемещениями точек системы понимаются воображаемые бесконечно малые перемещения при мгновенно остановленных (замороженных) связях.

Действительные перемещения — это также элементарные перемещения точек системы, которые не противоречат связям (допускают связи), но с учетом начальных условий движения и действующих на систему сил. Если положение точки определяется радиусом-вектором $\bar{r}$, то ее возможное перемещение будем обозначать $\delta\bar{r}$, а действительное — $d\bar{r}$.

Из сказанного выше следует, что действительное перемещение точки в случае стационарных связей будет совпадать с одним из ее возможных перемещений. Если связь нестационарная, то действительное перемещение с учетом данной связи будет иным, т.е. в этом случае действительное перемещение не может совпадать ни с одним из множества возможных перемещений, которые допускает наложенная связь.

Возможной работой силы $\bar{F}$ называется элементарная работа δA этой силы на возможном перемещении $\delta\bar{r}$ точки ее приложения, т.е.

$$\delta A = \bar{F} \times \delta\bar{r} = F\,\delta r \cos(\bar{F}, \delta\bar{r}). \qquad \text{(XI.1)}$$

Если под действием силы $\bar{F}$ тело совершает вращательное движение, то возможная работа силы

$$\delta A = \pm M_z(\bar{F})\,\delta\varphi, \qquad \text{(XI.2)}$$

где $M_z(\bar{F})$ — момент силы относительно оси вращения; $\delta\varphi$ — возможное угловое перемещение тела.

Возможная работа сил, приложенных к точкам механической системы,

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \times \delta\bar{r}_k. \qquad \text{(XI.3)}$$

В соответствии с принципом освобождаемости от связей несвободную механическую систему можно сделать свободной, если отбросить наложенные на точки системы связи и их действие заменить силами — реакциями связей. Используя понятие возможной работы, можно дать следующее определение идеальных связей.

Идеальными связями называют связи, алгебраическая сумма элементарных работ реакций которых на любых возможных перемещениях точек системы равна нулю, т.е.

$$\delta A^R = \sum \bar{R}_k \times \delta\bar{r}_k = \sum R_k \delta r_k \cos(\bar{R}_k, \delta\bar{r}_k) = 0. \qquad \text{(XI.4)}$$

Идеальными, как правило, являются связи без трения. В этом случае силы реакций связей и возможные перемещения точек приложения этих сил взаимно перпендикулярны. Если связи с трением, то полная реакция шероховатой поверхности может быть разложена на нормальную составляющую, перпендикулярную к поверхности. и на касательную — силу трения, работа которой на возможном перемещении не равна нулю. Однако в аналитической механике такую связь условно рассматривают как идеальную, но при этом силу трения относят к числу задаваемых сил.

Положение любой точки механической системы в выбранной системе отсчета может быть определено либо радиусом-вектором $\bar{r}$, либо декартовыми координатами (x, y, z). Для всей механической системы с n точками необходимо $3n$ координат, среди которых могут быть и зависимые координаты. Поэтому более удобным является определение положения точек механической системы с помощью обобщенных координат.

Обобщенные координаты — это независимые друг от друга величины, которыми однозначно определяется положение механической системы.

В качестве обобщенных координат могут выбираться угловые или линейные перемещения тел, входящих в систему. Общее обозначение обобщенных координат — q.

Производная по времени от обобщенной координаты называется ***обобщенной скоростью***, т.е.

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}.$$

Число степеней свободы механической системы с голономными связями равно числу обобщенных координат. Иногда числом степеней свободы механической системы называют число независимых возможных перемещений, которые можно сообщать ее точкам в фиксированный момент времени. Поэтому если механическая система из n точек имеет одну степень свободы, то возможные перемещения всех точек будут взаимосвязаны, зависимы друг от друга. При решении задач методами аналитической механики все эти перемещения необходимо выразить через какое-либо одно перемещение.

Декартовы координаты могут быть выражены через обобщенные, т.е. декартовы координаты являются функциями обобщенных координат.

Если система имеет S степеней свободы, то радиус-вектор k-й точки будет функцией от S обобщенных координат и времени t, т.е.

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_S, t). \tag{XI.5}$$

Действительное перемещение такой точки характеризуется приращением радиуса-вектора, которое с точностью до малых, второго порядка малости, определяется как полный дифференциал и математически выражается так:

$$d\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} dq_S + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} dt. \tag{XI.6}$$

В отличие от действительных, возможные перемещения представляют собой малые приращения радиуса-вектора точки, вызванные изменением независимо от фиксированного времени t.

Такого рода бесконечно малое перемещение радиуса-вектора k-й точки называется ***вариацией*** или ***приращением***. Вариация обозначается так:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S. \tag{XI.7}$$

Выражение (XI.7) можно представить в виде

$$\delta\bar{r}_k = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{XI.8}$$

Введение понятия обобщенных координат позволяет выразить возможную работу сил, приложенных к механической системе, в этих координатах. Для этого выражение (XI.3) перепишем с учетом (XI.8) и получим

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \times \delta\bar{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \times \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \times \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j, \tag{XI.9}$$

где $Q_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \times \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$ — обобщенная сила; δq_j — приращение обобщенной координаты с индексом j.

Представим выражение (XI.9) в виде

$$\delta A = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_{j=1} + Q_2 \delta q_{j=2} + \ldots + Q_S \delta q_S, \qquad \text{(XI.10)}$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_S$ — обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_S$.

Таким образом, ***обобщенной силой*** называется коэффициент, стоящий при приращении обобщенной координаты в выражении возможной работы сил, приложенных к механической системе. Для определения обобщенной силы по какой-либо обобщенной координате необходимо все другие обобщенные координаты считать неизменными. Тогда их приращения будут равны нулю, за исключением приращения той обобщенной координаты, по которой определяется обобщенная сила.

Определив возможную работу сил, приложенных к механической системе, по одной из обобщенных координат и разделив ее на приращение координаты, определим обобщенную силу, соответствующую этой обобщенной координате:

$$Q_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k\right)_j}{\delta q_j}, \quad j = 1, \ldots, S. \qquad \text{(XI.11)}$$

Обобщенная сила консервативных сил

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\delta \partial q_j}, \quad j = 1, \ldots, S, \qquad \text{(XI.12)}$$

где Π — потенциальная энергия системы.

Следует заметить, что размерность обобщенной силы зависит от того, какое перемещение, линейное или угловое, выбрано в качестве обобщенной координаты. *Размерность обобщенной силы* соответствует размерности момента силы, если в качестве обобщенной координаты выбрано угловое перемещение, и размерности силы, если в качестве обобщенной координаты выбрано линейное перемещение.

46. Принцип возможных перемещений

Методические указания к решению задач

Принцип возможных перемещений, или ***принцип Лагранжа***, выражает условия равновесия несвободной механической системы, находящейся под действием приложенных активных сил: необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил равнялась нулю на любом возможном перемещении системы из рассматриваемого положения равновесия при условии, что в начальный момент система неподвижна.

Общее аналитическое выражение принципа имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = 0. \qquad (46.1)$$

Выражение (46.1) можно представить в векторной:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \times \delta \overline{r}_k = 0 \qquad (46.2)$$

или скалярной форме:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k = 0. \qquad (46.3)$$

При решении задач с использованием принципа возможных перемещений уравнение (46.2) записывают в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \cdot \delta r_k \cos(\overline{F}_k, \delta \overline{r}_k) = 0. \qquad (46.4)$$

Если выражение (46.4) продифференцировать по времени, то получим

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k v_k \cos(\overline{F}_k, \overline{v}_k) = 0. \qquad (46.5)$$

Это выражение можно истолковать как *принцип возможных скоростей* или, более правильно, как *принцип возможных мощностей*.

В общем виде выражение (46.5) по аналогии с выражением (46.1) можно представить так:

$$\sum_{k=1}^{n} N_k^a = 0, \tag{46.6}$$

т.е. сумма возможных мощностей сил, приложенных к системе, равна нулю.

Если в качестве возможного перемещения выбрано угловое перемещение, то в выражения (46.4) и (46.5) вместо силы входит момент силы относительно оси вращения тела, а в выражение (46.5) вместо линейной скорости v — угловая скорость ω вращения тела.

Достоинством принципа возможных перемещений является то, что он позволяет в общей форме установить условие равновесия всей механической системы в целом, не расчленяя ее на отдельные тела, а также исключить из рассмотрения неизвестные реакции связей и внутренние силы взаимодействия между телами, входящими в данную механическую систему, и определить реакции связей.

Если требуется определить силу реакции какой-либо связи, то следует, применяя *принцип освобождаемости от связей*, отбросить соответствующую связь и заменить ее искомой реакцией связи. При составлении уравнения равновесия надо к задаваемым силам добавить эту силу реакции связи. Такой метод решения задач о равновесии системы твердых тел является чрезвычайно эффективным, так как искомая сила реакции связи определяется непосредственно из составленного уравнения равновесия. В то же время, применяя обычные методы статики, надо составить систему уравнений равновесия, в результате решения которой находят искомую силу.

Принцип возможных перемещений в обобщенных силах можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{S} Q_j \, \delta q_j = 0, \tag{46.7}$$

тогда при равновесии механической системы обобщенная сила

$$Q_j = 0, \quad j = 1, \ldots, S. \tag{46.8}$$

Число уравнений равновесия вида (46.1)–(46.8) соответствует числу степеней свободы механической системы и принцип их составления аналогичен методу определения обобщенной силы.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Выбрать объект равновесия.

2. При наличии неидеальных связей отнести соответствующие силы трения к числу активных задаваемых сил, после чего рассматривать связи как идеальные.

3. Показать на рисунке все активные силы, включая и силы трения неидеальных связей. Если нужно определить какую-либо силу реакции связи, то эту связь мысленно следует отбросить и заменить ее искомой силой.

4. Определить число степеней свободы механической системы. Дальнейший ход решения зависит от того, сколько степеней свободы имеет система.

а) Для системы с одной степенью свободы.

5. Сообщить возможное перемещение одной из точек или одному из тел системы и выразить возможные перемещения точек приложения сил в зависимости от одного из возможных перемещений. Все возможные перемещения показать на рисунке.

6. Записать сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих возможных перемещениях и приравнять эту сумму к нулю.

Если уравнение равновесия составляется в виде возможных скоростей или возможных мощностей, то следует установить соотношения между линейными скоростями точек приложения сил и угловыми скоростями тел, выразив их через какую-либо одну скорость. При этом линейные скорости точек приложения сил и угловые скорости тел должны быть показаны на рисунке.

7. Решить составленное уравнение равновесия, определить искомую величину.

б) Для системы с несколькими степенями свободы.

5. Выбрать независимые возможные перемещения точек системы, соответствующие числу степеней свободы.

6. Сообщить возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через одно из возможных перемещений.

7. Записать уравнение равновесия механической системы в виде суммы работ сил на возможных перемещениях и приравнять эту сумму к нулю.

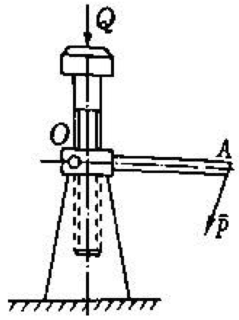
8. Последовательно осуществив действия, указанные в пп. 6 и 7 для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия по числу независимых возможных перемещений.

9. Решить систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

Задачи и решения

Задача 46.1

Груз Q поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $OA = 0{,}6$ м. К концу рукоятки, перпендикулярно ей, приложена сила $P = 160$ Н.

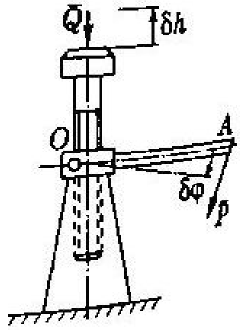


Определить величину силы тяжести груза Q, если шаг винта домкрата $h = 12$ мм.

Решение

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k = 0. \qquad (1)$$



Сообщим системе возможные перемещения δh и $\delta\varphi$ (см. рисунок). Тогда уравнение (1) примет вид

$$-Q\delta h + Pl\delta\varphi = 0. \qquad (2)$$

Выразим δh через $\delta\varphi$. Поворот ручки домкрата на угол 2π соответствует перемещению винта домкрата на величину шага винта — h, т.е.

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{\delta h}{\delta\varphi}$$

или

$$\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

Подставим выражение δh в уравнение (2):

$$-Q\frac{h}{2\pi}\delta\varphi + Pl\delta\varphi = 0$$

или

$$\delta\varphi\left(-Q\frac{h}{2\pi}+Pl\right)=0,$$

так как $\delta\varphi \neq 0$, то

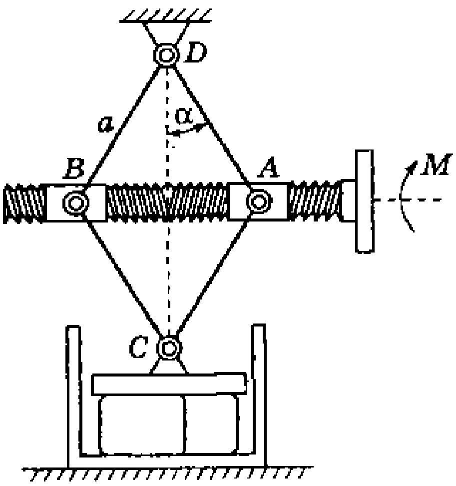
$$-Q\frac{h}{2\pi}+Pl=0.$$

Откуда

$$Q=\frac{Pl\cdot 2\pi}{h}=\frac{160\cdot 0{,}6\cdot 2\cdot 3{,}14}{0{,}012}=52\ 200\ (\text{Н}) = 52{,}2\ (\text{кН}).$$

Ответ: Q = 52,2 кН.

Задача 46.2



На маховичок коленчатого пресса действует вращающий момент M; ось маховичка имеет на концах винтовые нарезки шага h противоположного направления и проходит через две гайки, шарнирно прикрепленные к двум вершинам стержневого ромба со стороной a; верхняя вершина ромба закреплена неподвижно, нижняя прикреплена к горизонтальной плите пресса. Определить силу давления пресса на сжимаемый предмет в момент, когда угол при вершине ромба равен 2α.

Решение

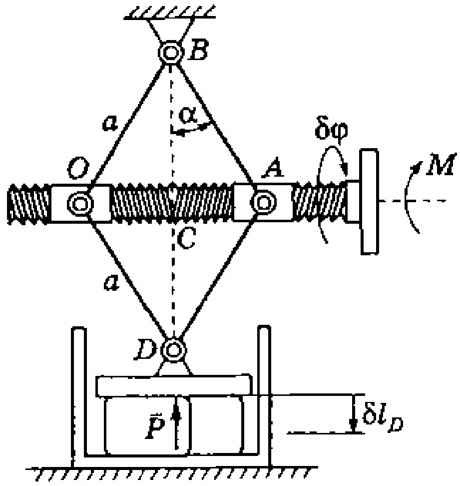


Рис. 1

Сообщим маховику возможное перемещение $\delta\varphi$. Поворот маховика на угол 2π соответствует перемещению гайки на величину шага. Поэтому поворот маховика на $\delta\varphi$ соответствует перемещению гайки на δs (рис. 1), т.е.

$$\frac{h}{2\pi}=\frac{\delta s}{\delta\varphi}$$

или

$$\delta s = \frac{h\delta\varphi}{2\pi}.$$

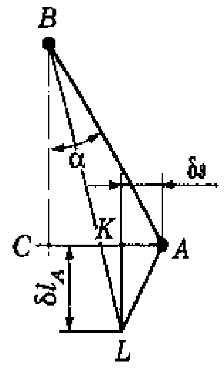


Рис. 2

Из подобия треугольников ACB и AKL (рис. 2) определим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\delta l_A}{\delta s}.$$

Откуда

$$\delta l_A = \delta s \operatorname{tg}\alpha.$$

Перемещение точки D

$$\delta l_D = 2\delta l_A = 2\,\delta s \operatorname{tg}\alpha,$$

отсюда

$$\delta l_D = \frac{h\delta\varphi}{\pi}\operatorname{tg}\alpha.$$

Запишем уравнение работы сил, выражающее принцип возможных перемещений:

$$M\delta\varphi - P\delta l_D = 0$$

или

$$M\delta\varphi - P\frac{h\delta\varphi}{\pi}\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Откуда

$$\delta\varphi\left(M - \frac{Ph}{\pi}\operatorname{tg}\alpha\right) = 0,$$

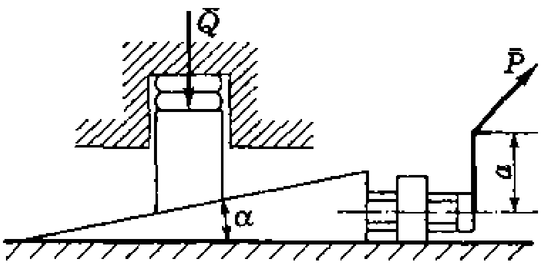
но $\delta\varphi \neq 0$. Тогда

$$P = \frac{M\pi}{h\operatorname{tg}\alpha} = \pi\frac{M}{h}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $P = \pi\frac{M}{h}\operatorname{ctg}\alpha.$

Задача 46.3

Определить зависимость между модулями сил $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ в клиновом прессе, если сила $\bar{P}$ приложена к концу рукоятки длины a перпендикулярно оси винта и рукоятки. Шаг винта равен h. Угол при вершине клина равен α.



Решение

Сообщим системе возможные перемещения δh и δs (рис. 1). Тогда (рис. 2):

$$\delta s = \delta h \operatorname{tg} \alpha.$$

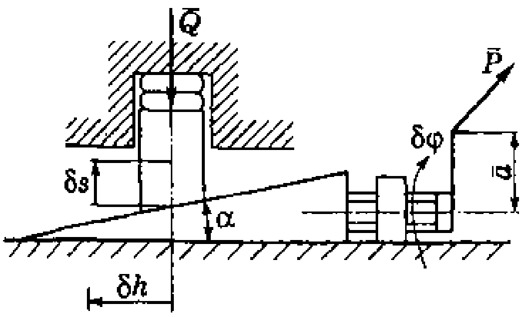


Рис. 1

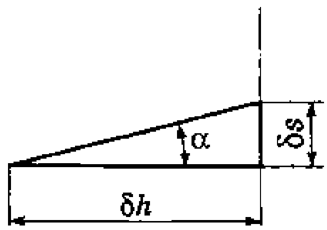


Рис. 2

Поворот винта на угол 2π соответствует перемещению клина на величину шага, т.е.

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{\delta h}{\delta \varphi}$$

или

$$\delta \varphi = \frac{2\pi \delta h}{h}. \qquad (1)$$

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$Pa\delta\varphi - Q\delta s = 0$$

или с учетом выражения (1)

$$Pa\frac{2\pi\delta h}{h}-Q\delta h\ \mathrm{tg}\ \alpha=0,$$

$$\delta h\left(Pa\frac{2\pi}{h}-Q\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)=0.$$

Но так как $\delta h\neq 0$, то

$$P\frac{2\pi a}{h}-Q\,\mathrm{tg}\,\alpha=0.$$

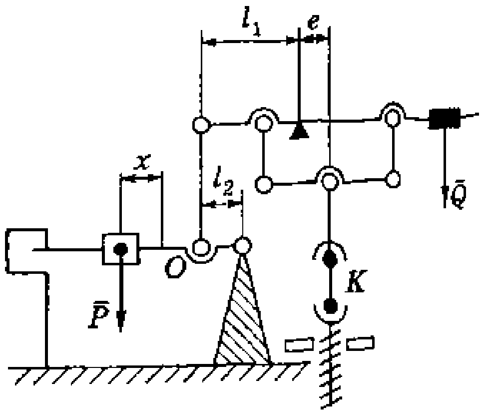
Откуда

$$Q=P\frac{2\pi a}{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Ответ: $Q=P\dfrac{2\pi a}{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Задача 46.4

Рисунок представляет схему машины для испытания образцов на растяжение. Определить зависимость между усилием X в образце K и расстоянием x от груза P массы M до его нулевого положения O, если при помощи груза Q машина уравновешена так, что при нулевом положении груза P и при отсутствии усилия в K все рычаги горизонтальны. Даны расстояния l_1, l_2 и e.



Решение

Определим величину силы $\bar{Q}$, которая уравновешивает вес груза $\bar{P}$, когда рычаги занимают горизонтальное положение (см. рисунок).

Обозначим: $DE = s$, $OB = a$. Тогда

$$P(a+l_2)-T_B l_2=0,$$

$$T_A l_1-Qs=0.$$

Однако

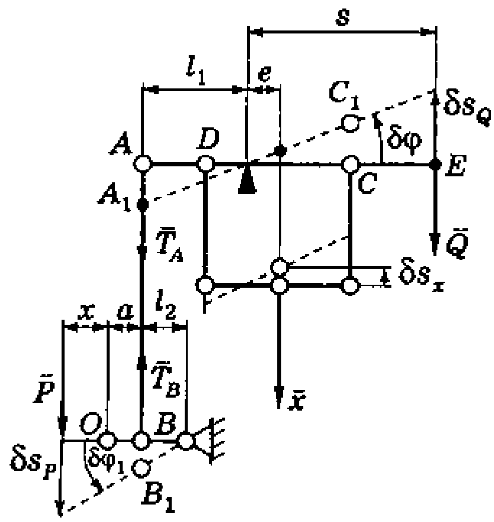
$$T_A = T_B = T,$$

значит

$$T = \frac{P(a+l_2)}{l_2} = \frac{Qs}{l_1}.$$

Откуда

$$Q = \frac{Pl_1(a+l_2)}{sl_2}. \qquad (1)$$



Сообщим системе возможные перемещения и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$P\delta s_P - X\delta s_x - Q\delta s_Q = 0. \qquad (2)$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi$:

$$\delta s_x = CC_1 = e\delta\varphi,$$

$$\delta s_Q = s\delta\varphi,$$

$$BB_1 = AA_1 = l_1\delta\varphi = l_2\delta\varphi_1$$

или

$$\delta\varphi_1 = \frac{l_1}{l_2}\delta\varphi.$$

Тогда

$$\delta s_P = (x+a+l_2)\,\delta\varphi_1 = (x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2}\delta\varphi.$$

Подставим выражения δs_X, δs_P, δs_Q в уравнение (2):

$$P(x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2}\delta\varphi - Xe\delta\varphi - Qs\delta\varphi = 0$$

или

$$\delta\varphi\left[P(x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - Qs\right] = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$P(x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - Qs = 0. \qquad (3)$$

Подставим выражение (1) в уравнение (3):

$$P(x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - \frac{Pl_1(a+l_2)}{l_2} = 0.$$

Откуда

$$Pxl_1 - Xel_2 = 0,$$

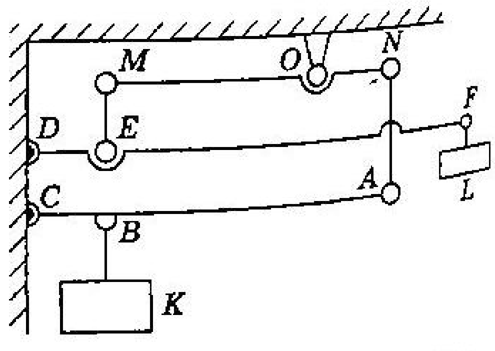
где $P = Mg$.

Тогда

$$X = P\frac{xl_1}{el_2} = Mg\frac{xl_1}{el_2}.$$

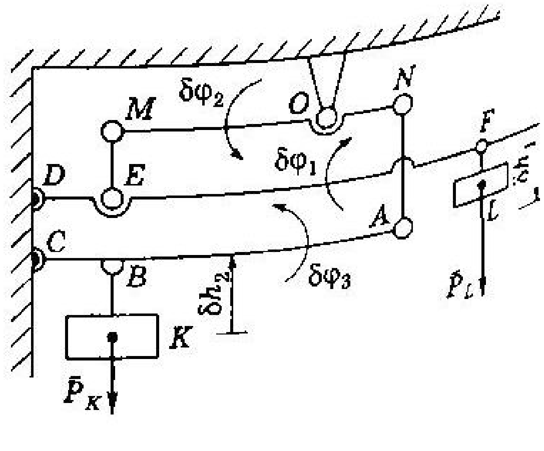
Ответ: $X = Mg\dfrac{xl_1}{el_2}$.

Задача 46.5



Грузы K и L, соединенные системой рычагов, изображенных на рисунке, находятся в равновесии. Определить зависимость между массами грузов, если дано:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}, \quad \frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}, \quad \frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}.$$



Решение

Сообщим системе возможные перемещения (см. рисунок) и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$P_L\delta h_1 - P_K\delta h_2 = 0. \qquad (1)$$

Найдем соотношение между перемещениями:

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta h_1}{DF},$$

$$\delta s_E = \delta\varphi_1 \cdot DE,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_E}{OM},$$

$$\delta s_N = ON \cdot \delta\varphi_2,$$

$$\delta s_A = ON \cdot \delta\varphi_2 = AC \cdot \delta\varphi_3,$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{ON}{AC} \cdot \delta\varphi_2,$$

$$\delta h_2 = BC \cdot \delta\varphi_3 = \frac{BC \cdot ON}{AC} \delta\varphi_2 =$$

$$= \frac{BC \cdot ON \cdot DE \cdot \delta h_1}{AC \cdot OM \cdot DF} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} \delta h_1 = \frac{\delta h_1}{300}. \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1):

$$P_L \delta h_1 - P_K \frac{\delta h_1}{300} = 0$$

или

$$\delta h_1 \left(P_L - \frac{P_K}{300} \right) = 0.$$

Так как $\delta h_1 \neq 0$, то

$$P_L - \frac{P_K}{300} = 0.$$

Отсюда

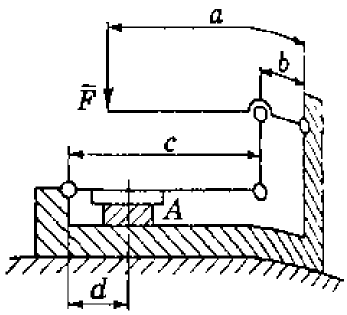
$$P_L = \frac{P_K}{300}$$

или

$$m_L = \frac{m_K}{300}.$$

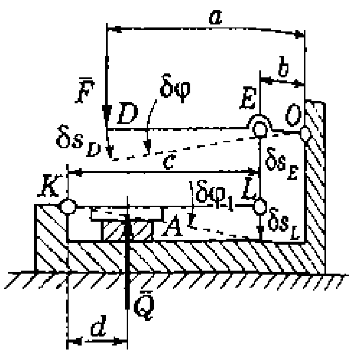
О т в е т: $m_L = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{ON}{OM} \cdot \frac{DE}{DF} m_K = \frac{m_K}{300}.$

Задача 46.6



Определить модуль силы $\overline{Q}$, сжимающей образец A, в рычажном прессе, изображенном на рисунке. Дано: $F = 100$ Н, $a = 60$ см, $b = 10$ см, $c = 60$ см, $d = 20$ см.

Решение



Механизм рычажного пресса с идеальными связями находится в равновесии под действием активных сил $\overline{F}$ и $\overline{Q}$ (см. рисунок). Для решения задачи применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{u=1}^{n} \delta A_k = 0. \tag{1}$$

Сообщим системе возможное угловое перемещение $\delta\varphi_1$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Fa \cdot \delta\varphi - Qd \cdot \delta\varphi_1 = 0. \tag{2}$$

Выразим $\delta\varphi_1$ через $\delta\varphi$. Тяга EL совершает мгновенное поступательное движение и $\delta s_E = \delta s_L$, но $\delta s_E = b \cdot \delta\varphi$, $\delta s_L = c \cdot \delta\varphi_1$.

Тогда

$$\delta\varphi_1 = \frac{b}{c}\delta\varphi,$$

а уравнение (2) примет вид

$$Fa \cdot \delta\varphi - Qd\frac{b}{c}\delta\varphi = 0,$$

$$\delta\varphi\left(Fa - Qd\frac{b}{c}\right) = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$Fa - Qd\frac{b}{c} = 0,$$

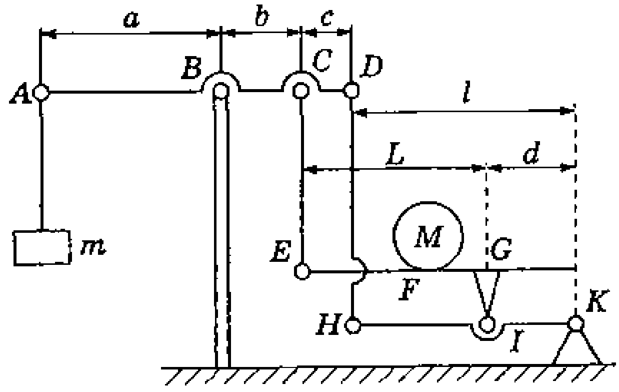
откуда

$$Q = F\frac{ac}{bd} = 100\cdot\frac{60\cdot 60}{10\cdot 20} = 1800\ (\text{Н}).$$

Ответ: $Q = 1800$ Н.

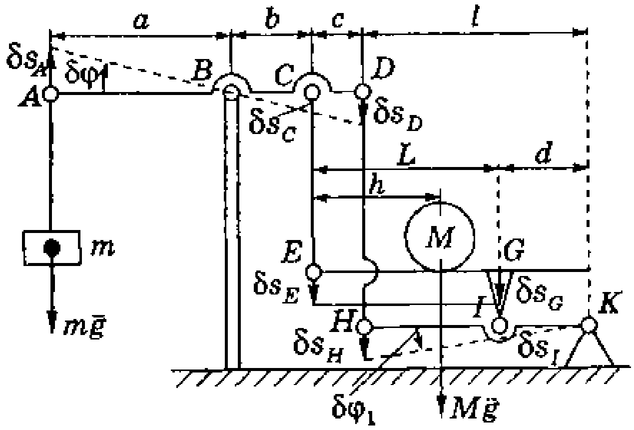
Задача 46.7

На платформе в точке F находится груз массы M. Длина $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $IK = d$; длина платформы $EG = L$. Определить соотношение между длинами b, c, d, l, при котором масса m гири, уравновешивающей груз, не зависит от положения его на платформе, и найти массу m гири в этом случае.



Решение

Рассмотрим равновесие платформы. Покажем на рисунке активные силы.



Механизм, подчиненный идеальным связям, находится в равновесии под действием сил тяжести груза $M\bar{g}$ и гири $m\bar{g}$.

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k = 0. \qquad (1)$$

Сообщим рычагу AD возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ по часовой стрелке вокруг шарнира B. Положение груза на платформе не будет влиять на равновесие, если платформа совершает поступательное движение, т.е. $\delta s_E = \delta s_G$.

Выразим возможные перемещения частей механизма через $\delta\varphi$:

$$\delta s_D = (b+c)\,\delta\varphi, \quad \delta s_C = b\delta\varphi, \quad \delta s_C = \delta s_E;$$

$$\delta s_H = l\delta\varphi_1, \quad \delta s_H = \delta s_D;$$

$$\delta s_I = d\delta\varphi_1; \quad \delta s_I = \delta s_G = \frac{d}{l}\delta s_H = \frac{(b+c)\,d}{l}\delta\varphi.$$

Найдем искомое соотношение:

$$\delta s_G = \delta s_E$$

или

$$b\delta\varphi = \frac{(b+c)\,d}{l}\delta\varphi.$$

Тогда

$$\frac{l}{d} = \frac{b+c}{b}.$$

Составим уравнение согласно формуле (1):

$$-mg \cdot \delta s_A + Mg \cdot \delta s_E = 0$$

или

$$-mga \cdot \delta\varphi + Mgb \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$(Mb - ma)\,\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$Mb - ma = 0.$$

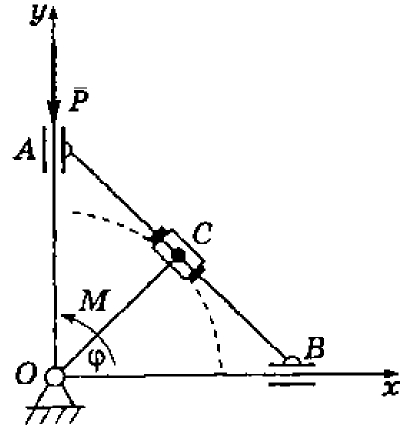
Отсюда

$$m = \frac{b}{a}M.$$

О т в е т: $\frac{l}{d} = \frac{b+c}{b}$; $m = \frac{b}{a}M$.

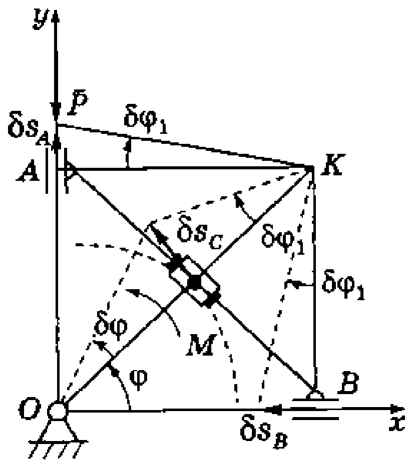
Задача 46.8

К ползуну A механизма эллипсографа приложена сила $\bar{P}$, направленная вдоль направляющей ползуна к оси вращения O кривошипа OC. Какой вращающий момент надо приложить к кривошипу OC для того, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип OC образует с направляющей ползуна угол φ? Механизм расположен в горизонтальной плоскости, причем $OC = AC = CB = l$.



Решение

Рассмотрим равновесие эллипсографа. Покажем на рисунке активные силы.



Механизм, подчиненный идеальным связям, находится в равновесии под действием силы $\bar{P}$ и вращающего момента M.

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$

Сообщим кривошипу возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ против часовой стрелки вокруг шарнира O. Тогда шарнир C и ползун A получат возможные перемещения δs_E и δs_A. Механизм имеет одну степень свободы. Выразим возможные перемещения точек механизма через $\delta\varphi$:

$$\delta s_C = OC \cdot \delta\varphi = l \cdot \delta\varphi.$$

Определим мгновенный центр вращения линейки AB, который лежит в точке K:

$$\frac{\delta s_A}{AK} = \frac{\delta s_C}{CK} = \frac{\delta s_B}{BK} = \delta\varphi_1.$$

Тогда $\delta s_A = 2l\cos\varphi \cdot \delta\varphi_1 = 2l\cos\varphi \cdot \delta\varphi$, так как

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{l} = \frac{l \cdot \delta\varphi}{l} = \delta\varphi.$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$M \cdot \delta\varphi - P \cdot \delta s_A = 0$$

или

$$M \cdot \delta\varphi - 2Pl\cos\varphi \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$(M - 2Pl\cos\varphi)\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

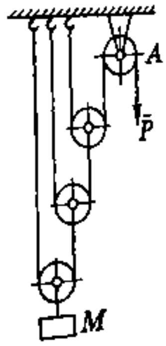
$$M - 2Pl\cos\varphi = 0.$$

Найдем значение вращающего момента:

$$M = 2Pl\cos\varphi.$$

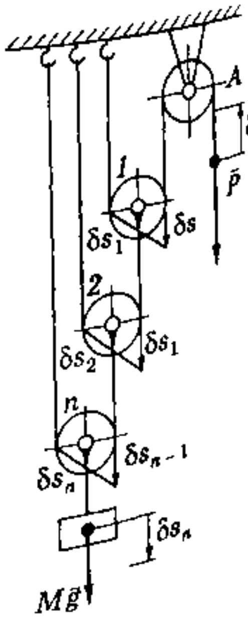
Ответ: $M = 2Pl\cos\varphi$.

Задача 46.9



Полиспаст состоит из неподвижного блока A и из n подвижных блоков. Определить в случае равновесия отношение массы M поднимаемого груза к силе $\overline{P}$, приложенной к концу каната, сходящего с неподвижного блока A.

Решение



Рассмотрим равновесие полиспаста, состоящего из неподвижного блока A и n подвижных блоков. Покажем на рисунке активные силы.

Полиспаст, подчиненный идеальным связям, находится в равновесии под действием силы $\overline{P}$ и силы тяжести груза $M\overline{g}$.

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$

Сообщим точке приложения силы $\overline{P}$ возможное перемещение — вертикально вверх. Тогда центр первого подвижного блока опустится на величину, равную половине перемещения силы $\overline{P}$:

$$\delta s_1 = \frac{1}{2}\delta s.$$

Каждый последующий подвижный блок опустится на величину, равную половине возможного перемещения предыдущего, т.е.

$$\delta s_k = \frac{1}{2}\delta s_{k-1}.$$

Тогда

$$\delta s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta s.$$

Составим уравнение (1):

$$-P\cdot\delta s + Mg\cdot\delta s_n = 0,$$

$$-P\cdot\delta s + Mg\left(\frac{1}{2}\right)^n \delta s = 0,$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n Mg - P\right]\delta s = 0.$$

Так как $\delta s \neq 0$, то

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n Mg - P = 0.$$

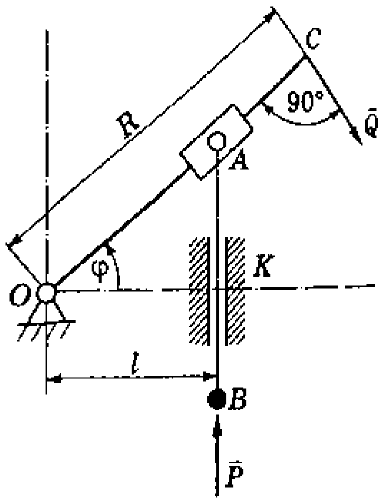
Следовательно, искомое соотношение

$$\frac{Mg}{P} = 2^n.$$

Ответ: $\dfrac{Mg}{P} = 2^n$.

Задача 46.10

В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг горизонтальной оси O ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Даны размеры: $OC = R$, $OK = l$. Какую силу $\overline{Q}$ надо приложить перпендикулярно кривошипу OC в точке C для того, чтобы уравновесить силу $\overline{P}$, направленную вдоль стержня AB вверх?



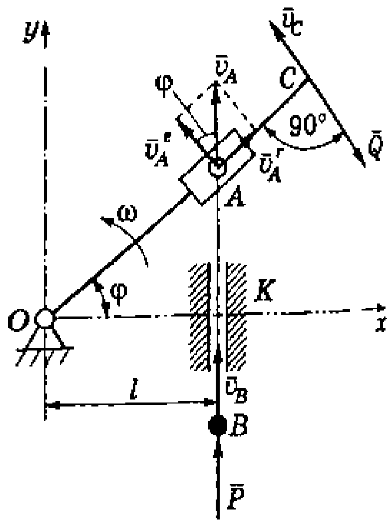
Решение

Рассмотрим равновесие кулисного механизма, состоящего из рычага OC, ползуна A и стержня AB. Покажем на рисунке активные силы.

Механизм, подчиненный идеальным связям, находится в равновесии под действием сил $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Применим принцип возможных скоростей:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\overline{F}_k, \overline{v}_k) = 0. \qquad (1)$$



Найдем скорости точек приложения сил и выразим их через угловую скорость вращения рычага OC:

$$v_C = \omega \cdot OC = \omega R. \qquad (2)$$

Абсолютная скорость ползуна A, который совершает сложное движение,

$$\overline{v}_A = \overline{v}_A^e + \overline{v}_A^r.$$

Построим параллелограмм скоростей, из которого (см. рисунок) найдем скорость ползуна в переносном вращении:

$$v_A^e = \omega \cdot OA = \frac{l\omega}{\cos\varphi}$$

абсолютную скорость ползуна

$$v_A = \frac{v_A^e}{\cos\varphi} = \frac{l\omega}{\cos^2\varphi}. \tag{3}$$

Стержень AB совершает поступательное движение:

$$v_B = v_A = \frac{l\omega}{\cos^2\varphi}. \tag{4}$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$Pv_B - Qv_C = 0. \tag{5}$$

Подставим в уравнение (5) выражения (2) и (4) и получим

$$P\frac{l\omega}{\cos^2\varphi} - Q\omega R = 0.$$

Откуда

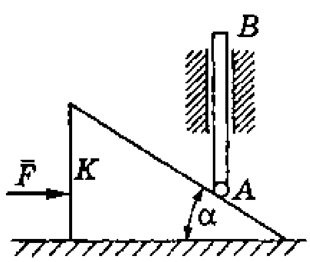
$$Q = \frac{Pl}{R\cos^2\varphi}.$$

Примечание. Вместо нахождения скорости v_A кинематическим способом можно было записать уравнение движения точки A по вертикали и затем проварьировать полученное выражение:

$$y_A = l\,\mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow \delta s_A = \delta y_A = \frac{l\cdot\delta\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow v_A = \frac{\delta s_A}{dt} = \frac{l\omega}{\cos^2\varphi}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

Задача 46.11



Кулак K массы M_1 находится в покое на гладкой горизонтальной плоскости, поддерживая стержень AB массы M_2, который расположен в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы $\overline{F}$, приложенной к кулаку K по горизонтали направо. Определить модуль силы $\overline{F}$, если боковая поверхность кулака образует с горизонтом угол α. Найти также область значений модуля силы $\overline{F}$ в случае негладкой горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения между основанием кулака K и горизонтальной плоскостью равен f.

Решение

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из кулака K и стержня AB, когда кулак находится в покое на гладкой горизонтальной плоскости.

Покажем на расчетной схеме активные силы (рис. 1). Система с идеальными связями находится в равновесии под действием сил тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и силы $\bar{F}$. Применим принцип возможных скоростей:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0. \qquad (1)$$

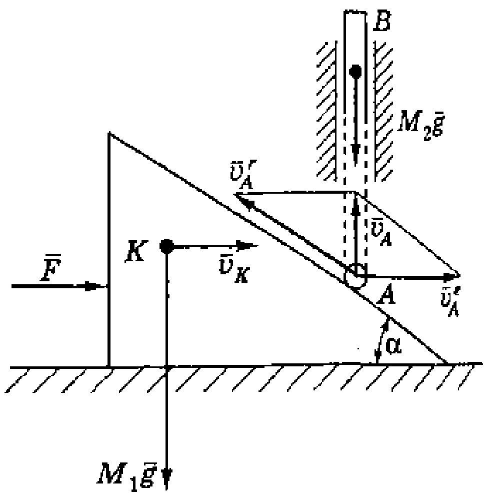


Рис. 1

Найдем скорость стержня AB, выразив ее через скорость кулака K. Разложим скорость конца A стержня AB на составляющие:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_A^e + \bar{v}_A^r.$$

Скорость конца A стержня AB в переносном движении равна скорости кулака K, т.е.

$$v_A^e = v_K.$$

Построим параллелограмм скоростей (см. рис. 1) и найдем абсолютную скорость конца A стержня AB:

$$v_A = v_A^e \operatorname{tg}\alpha = v_K \operatorname{tg}\alpha.$$

Стержень AB совершает поступательное движение вверх, следовательно, скорости всех его точек равны.

Запишем уравнение (1):

$$F v_K - M_2 g v_A = 0$$

или

$$F v_K - M_2 g v_K \operatorname{tg}\alpha = 0$$

и найдем значение искомой силы:

$$F = M_2 g \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим равновесие этой же системы с учетом силы трения между кулаком и плоскостью (рис. 2).

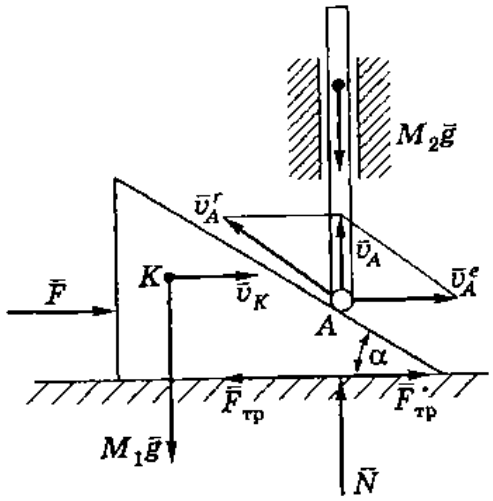


Рис. 2

Определим значение силы трения:

$$F_{тр} = Nf = (M_1 + M_2) g f.$$

Направление силы трения определим, считая, что она направлена в сторону, противоположную возможному движению.

Запишем уравнение (1) в виде

$$F v_K \pm F_{тр} v_K - M_2 g v_A = 0$$

или

$$F v_K \pm (M_1 + M_2) g v_K \operatorname{tg}\alpha - M_2 g v_K \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

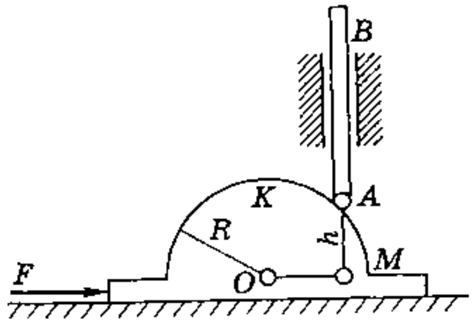
Найдем область значений модуля силы F:

$$M_2 g \operatorname{tg}\alpha + f(M_1 + M_2) g \geq F \geq M_2 g \operatorname{tg}\alpha - f(M_1 + M_2) g.$$

Ответ: $F = M_2 g \operatorname{tg}\alpha$;
$M_2 g \operatorname{tg}\alpha + f(M_1 + M_2) g \geq F \geq M_2 g \operatorname{tg}\alpha - f(M_1 + M_2) g$.

Задача 46.12

Круговой кулак K массы M_1 и радиуса R стоит на негладкой горизонтальной плоскости. Он соприкасается с концом A стержня AB массы M_2, расположенного в вертикальных направляющих. Система находится в покое под действием силы $\bar{F}$, приложенной к кулаку по горизонтали направо. При этом $AM = h$. Найти область значений модуля силы $\bar{F}$, если коэффициент трения скольжения кулака о горизонтальную плоскость равен f.

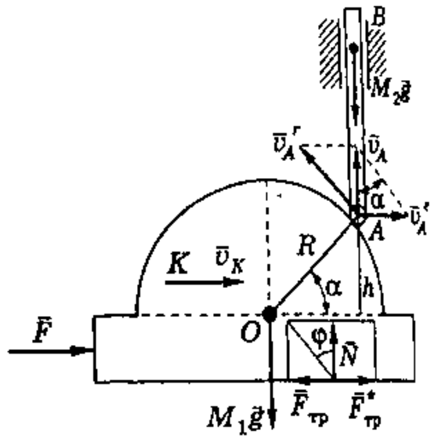


Р е ш е н и е

Рассмотрим равновесие системы, состоящей из стержня AB и кулака K, покоящегося на негладкой горизонтальной плоскости.

Покажем на рисунке активные силы и силу трения.

Применим принцип возможных скоростей:



$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0. \qquad (1)$$

Сообщим кулаку K скорость $\bar{v}_K$, направленную в сторону действия силы $\bar{F}$.

Определим скорость стержня AB, выразив ее через скорость кулака.

Разложим скорость точки A стержня на составляющие:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_A^e + \bar{v}_A^r.$$

Скорость точки A в переносном движении равна скорости кулака, т.е.

$$v_A^e = v_K.$$

Из параллелограмма скоростей (см. рисунок) найдем абсолютную скорость точки A стержня:

$$v_A = v_A^e \operatorname{ctg}\alpha = v_K \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}.$$

Стержень AB совершает поступательное движение, следовательно, скорости всех его точек равны.

Найдем значение силы трения

$$F_{тр} = Nf = (M_1 + M_2)gf.$$

Направление силы трения определим из условия, что она направлена в сторону, противоположную возможному движению.

Запишем уравнение (1):

$$Fv_K \pm F_{тр}v_K - M_2 g v_A = 0$$

для

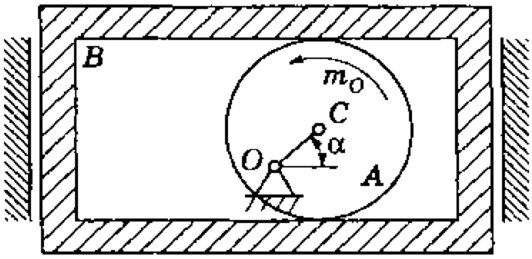
$$Fv_K \pm (M_1 + M_2) g f v_K - M_2 g v_K \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} = 0.$$

Найдем область значений модуля силы F:

$$\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g - f(M_1 + M_2) g \le F \le \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g + f(M_1 + M_2) g.$$

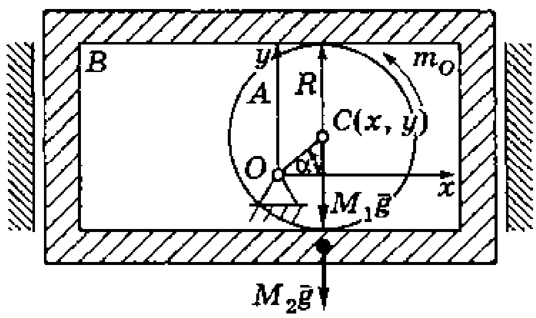
Ответ: $\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g - f(M_1 + M_2) g \le F \le \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} M_2 g + f(M_1 + M_2) g.$

Задача 46.13



Круглый эксцентрик A массы M_1 насажен на неподвижную горизонтальную ось O, перпендикулярную плоскости рисунка. Эксцентрик поддерживает раму массы M_2, имеющую вертикальные направляющие. Трением пренебречь. Эксцентриситет $OC = a$. Найти величину момента m_O, приложенного к эксцентрику, если при покое материальной системы OC образует с горизонталью угол α.

Решение



Рассмотрим равновесие системы, состоящей из эксцентрика A и рамы B.

Покажем на рисунке активные силы.

Система, подчиненная идеальным связям, находится в равновесии под действием сил тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ и момента m_O.

Применим принцип возможных перемещений в проекции на декартовы оси координат:

$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}\,\delta X_k + F_{ky}\,\delta Y_k + F_{kz}\,\delta Z_k) = 0. \qquad (1)$$

Сообщим эксцентрику A возможное угловое перемещение $\delta\alpha$ в направлении возрастания угла α. Считаем, что радиус эксцентрика R.

Для определения возможного вертикального перемещения центра масс эксцентрика A и рамы B найдем их координаты как функции угла α:

$$Y_C = a\sin\alpha,$$

$$Y_B = a\sin\alpha + R.$$

Учитывая, что возможное перемещение точки является вариацией соответствующей координаты, имеем

$$\delta Y_C = a\cos\alpha\cdot\delta\alpha,$$

$$\delta Y_B = a\cos\alpha\cdot\delta\alpha.$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$m_O\cdot\delta\alpha - M_1 g\, a\cos\alpha\cdot\delta\alpha - M_2 g\, a\cos\alpha\cdot\delta\alpha = 0$$

или

$$[m_O - (M_1 + M_2) g\, a\cos\alpha]\delta\alpha = 0.$$

Так как $\delta\alpha \neq 0$, то

$$m_O - (M_1 + M_2)\, g a\cos\alpha = 0.$$

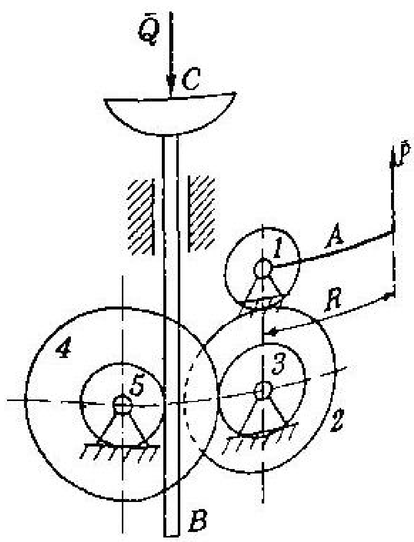
Откуда

$$m_O = (M_1 + M_2)\, g\, a\cos\alpha.$$

О т в е т: $m_O = (M_1 + M_2)\, g\, a\cos\alpha$.

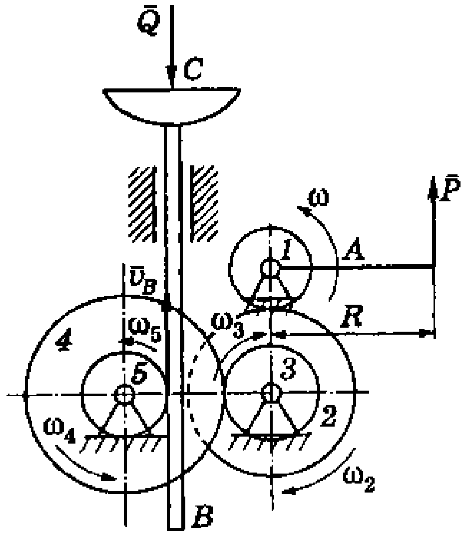
Задача 46.14

В механизме домкрата при вращении рукоятки A длины R начинают вращаться зубчатые колеса *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, которые приводят в движение зубчатую рейку B домкрата. Какую силу надо приложить перпендикулярно рукоятке в конце ее для того, чтобы чашка C при равновесии домкрата развила давление, равное 4,8 кН? Радиусы зубчатых колес соответственно равны: r_1 = 3 см, r_2 = 12 см, r_3 = 4 см, r_4 = 16 см, r_5 = 3 см, длина рукоятки R = 18 см.



Решение

Рассмотрим равновесие домкрата. Покажем на рисунке активные силы.



Система, подчиненная идеальным связям, находится в равновесии под действием сил $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Применим принцип возможных скоростей:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\overline{F}_k, \overline{v}_k) = 0. \qquad (1)$$

Сообщим рукоятке A угловую скорость ω, направленную против часовой стрелки. Найдем скорость v_B зубчатой рейки B, выразив ее через угловую скорость рукоятки A:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega, \quad \omega_3 = \omega_2;$$

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_3}{r_4}\omega, \quad \omega_5 = \omega_4;$$

$$v_B = \omega_5 r_5 = \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4}\omega.$$

Запишем равенство (1) в виде

$$PR\omega - Qv_B = 0$$

или

$$PR\omega - Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4}\omega = 0.$$

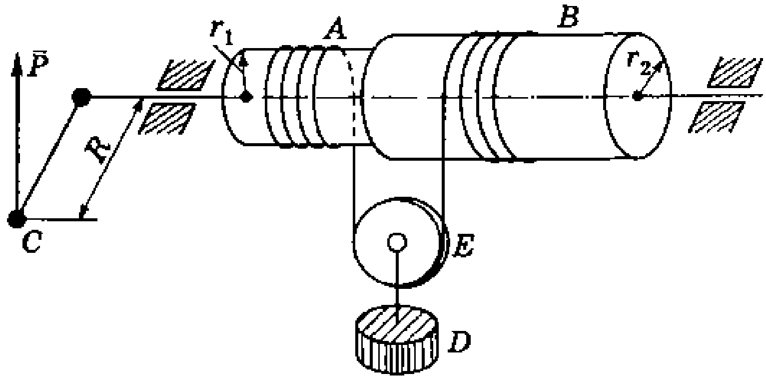
Из этого уравнения найдем

$$P = Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 4800 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{12 \cdot 16 \cdot 18} = 50 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $P = Q\dfrac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 50$ Н.

Задача 46.15

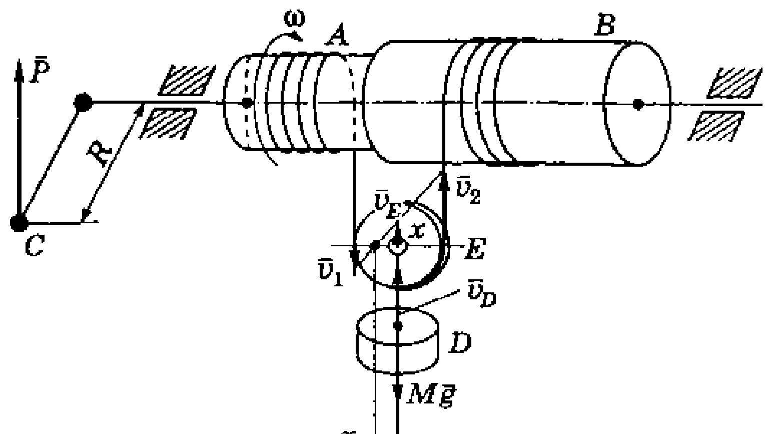
Дифференциальный ворот состоит из двух жестко связанных валов A и B, приводимых во вращение рукояткой C длины R. Поднимаемый груз D массы M прикреплен к подвижному блоку E, охваченному канатом.



При вращении рукоятки C левая ветвь каната сматывается с вала A радиуса r_1, а правая ветвь наматывается на вал B радиуса r_2 ($r_2 > r_1$). Какую силу $\bar{P}$ надо приложить перпендикулярно рукоятке в конце ее для того, чтобы уравновесить груз D, если $M = 720$ кг, $r_1 = 10$ см, $r_2 = 12$ см, $R = 60$ см?

Решение

Рассмотрим дифференциальный ворот. Покажем на рисунке активные силы. Система, подчиненная идеальным связям, находится в равновесии под действием силы тяжести груза $M\bar{g}$ и силы $\bar{P}$.



Применим принцип возможных скоростей:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0. \qquad (1)$$

Сообщим рукоятке C и жестко связанным с ней валам A и B угловую скорость ω. Найдем скорость v_E центра подвижного блока E, который совершает плоскопараллельное движение:

$$\frac{v_1}{r-x} = \frac{v_E}{x} = \frac{v_2}{r+x},$$

$$v_E = \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}\omega.$$

Скорость груза D

$$v_D = v_E = \frac{r_2 - r_1}{2}\omega.$$

Запишем равенство (1) в виде

$$PR\omega - Mgv_D = 0$$

или

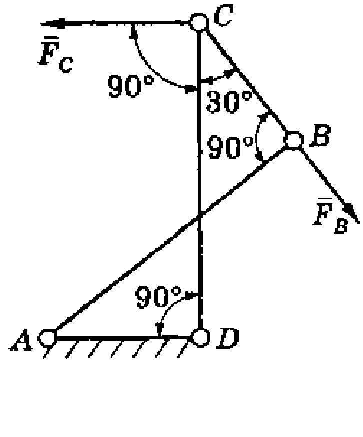
$$PR\omega - Mg\frac{r_2 - r_1}{2}\omega = 0.$$

Откуда

$$P = Mg\frac{r_2 - r_1}{2R} = 720 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{(12-10)}{2 \cdot 60} = 118 \text{ (H)}.$$

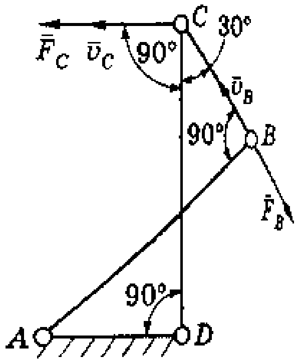
Ответ: $P = Mg\dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 118$ Н.

Задача 46.16



В механизме антипараллелограмма $ABCD$ звенья AB, CD и BC соединены цилиндрическими шарнирами B и C, а цилиндрическими шарнирами A и D прикреплены к стойке AD. К звену CD в шарнире C приложена горизонтальная сила $\bar{F}_C$. Определить модуль силы $\bar{F}_B$, приложенной в шарнире B перпендикулярно звену AB, если механизм находится в равновесии в положении, указанном на рисунке. Дано: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle DCB = 30°$.

Решение



Рассмотрим антипараллелограмм $ABCD$. Покажем на рисунке активные силы. Система подчинена идеальным связям и находится в равновесии под действием сил $\bar{F}_C$ и $\bar{F}_B$.

Применим принцип возможных скоростей:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0. \qquad (1)$$

Сообщим шарниру C скорость $\bar{v}_C$, тогда шарнир B получит скорость $\bar{v}_B$.

Скорость $\bar{v}_C$ направлена перпендикулярно стержню CD, $\bar{v}_B$ — перпендикулярно стержню AB. Стержень CB совершает плоскопараллельное движение:

$$\text{Пр}_{CB}(\bar{v}_C) = \text{Пр}_{CB}(\bar{v}_B),$$

$$v_C \cos 60° = v_B.$$

Равенство (1) запишем в виде

$$F_C v_C - F_B v_B = 0,$$

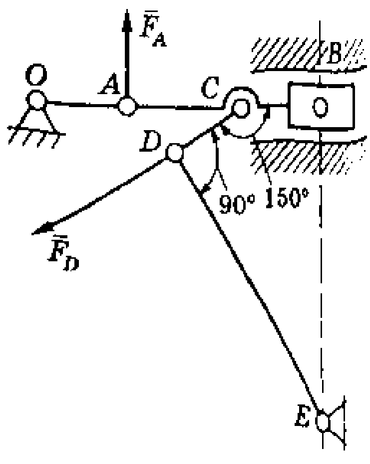
$$F_C v_C - F_B v_C \cos 60° = 0.$$

Отсюда

$$F_B = \frac{F_C}{\cos 60°} = 2F_C.$$

Ответ: $F_B = 2F_C$.

Задача 46.17



Кривошипно-ползунный механизм OAB связан в середине шатуна AB цилиндрическим шарниром C со стержнем CD. Стержни CD и DE соединены цилиндрическим шарниром D. Определить зависимость между модулями сил $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_D$, соответственно перпендикулярных стержням OA и DE, при равновесии механизма в положении, указанном на рисунке. Дано: $\angle DCB = 150°$, $\angle CDE = 90°$.

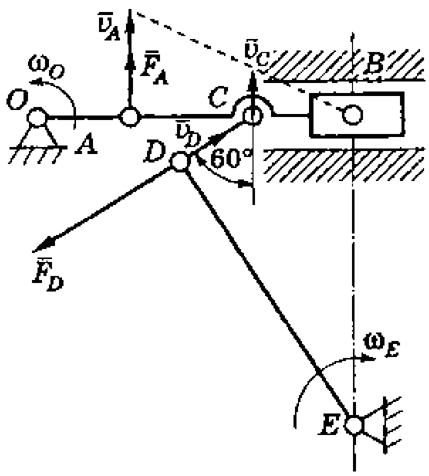
Решение

В соответствии с принципом возможных скоростей

$$\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos(\bar{F}_k, \bar{v}_k) = 0$$

запишем уравнение для этого случая:

$$F_A v_A - F_D v_D = 0. \qquad (1)$$



Из кинематики плоского движения следует, что в данном положении точка B — мгновенный центр скоростей шатуна AB.

Тогда (см. рисунок)

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{v_C}{v_A} = \frac{1}{2}\frac{BA}{BA} \Rightarrow v_C = \frac{1}{2} v_A.$$

По теореме о проекции скоростей точек твердого тела для звена DC

$$v_D = v_C \cos 60° \Rightarrow v_D = \frac{1}{4} v_A. \qquad (2)$$

Подставив значение v_D из выражения (2) в уравнение (1), вынесем v_A за скобки и получим

$$\left(F_A - \frac{1}{4} F_D\right) v_A = 0.$$

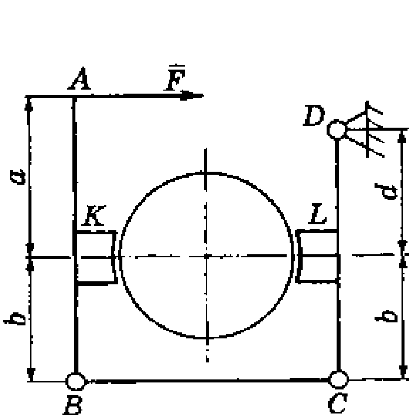
Так как возможная скорость $v_A \neq 0$, следовательно, нулю равно выражение в скобках, т.е.

$$F_D = 4F_A.$$

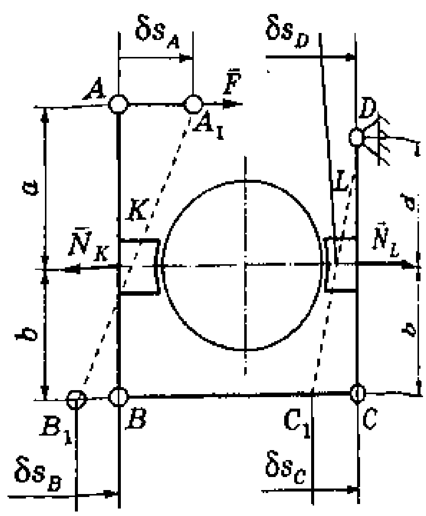
Ответ: $F_D = 4F_A$.

Задача 46.18

Колодочно-бандажный тормоз вагона трамвая состоит из трех тяг AB, BC и CD, соединенных шарнирами B и C. При действии горизонтальной силы $\bar{F}$ тормозные колодки K и L, соответственно прикрепленные к тягам AB и CD, прижимаются к колесу. Определить силы давления $\bar{N}_K$ и $\bar{N}_L$ колодок на колесо. Размеры указаны на рисунке. Вагон находится в покое.



Решение



Первоначально мысленно освободим от опоры колодку L, заменив ее силой реакции $\bar{N}_L$ (см. рисунок). При этом левая часть механизма (стержень AB) приобретет возможность вращаться вокруг точки K.

В соответствии с принципом возможных перемещений получим

$$F \cdot \delta s_A - N_L \cdot \delta s_L = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_B} = \frac{a}{b} \Rightarrow \delta s_A = \frac{a}{b} \delta s_B.$$

С учетом равенств $\delta s_B = \delta s_C$, $\dfrac{\delta s_C}{\delta s_L} = \dfrac{b+d}{d}$,

$$\delta s_A = \frac{a}{b} \frac{b+d}{d} \delta s_L.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1):

$$\left(F \frac{a}{b} \frac{b+d}{d} - N_L\right) \delta s_L = 0.$$

Так как $\delta s_L \neq 0$, то, приравняв к нулю выражение в скобках, найдем

$$N_L = F \frac{a}{b} \frac{b+d}{d}.$$

Мысленно освободимся от опоры в точке K. В результате стержни DC и BC будут неподвижны, а стержень AB будет вращаться вокруг точки B.

Принцип возможных перемещений в этом случае запишем в виде

$$F \cdot \delta s_A - N_K \cdot \delta s_K = 0. \qquad (2)$$

Из кинематики известно:

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_K} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \delta s_A = \frac{a+b}{b} \delta s_K.$$

Подставим полученные значения в уравнение (2), вынесем за скобки независимое возможное перемещение δs_K и приведем равенство (2) к виду:

$$\left(F\frac{a+b}{b} - N_K\right)\delta s_K = 0.$$

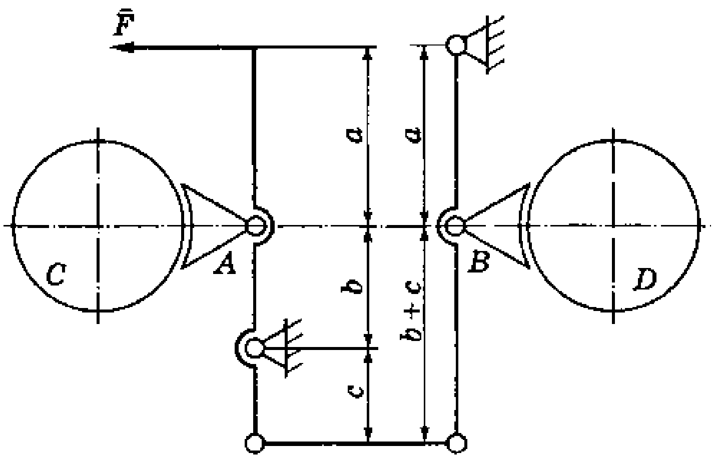
Так как $\delta s_K \neq 0$, то, приравняв к нулю выражение в скобках, получим

$$N_K = F\frac{a+b}{b}.$$

Ответ: $N_K = F\dfrac{a+b}{b}$; $N_L = F\dfrac{a}{b}\dfrac{b+d}{d}$.

Задача 46.19

На рисунке изображена схема колодочно-бандажного тормоза вагона трамвая. Определить зависимость между a, b и c, при наличии которой колодки A и B под действием силы $\overline{F}$ прижимаются с одинаковыми по модулю силами к бандажам колес C и D. Найти также величину этой силы. Колеса считать неподвижными.

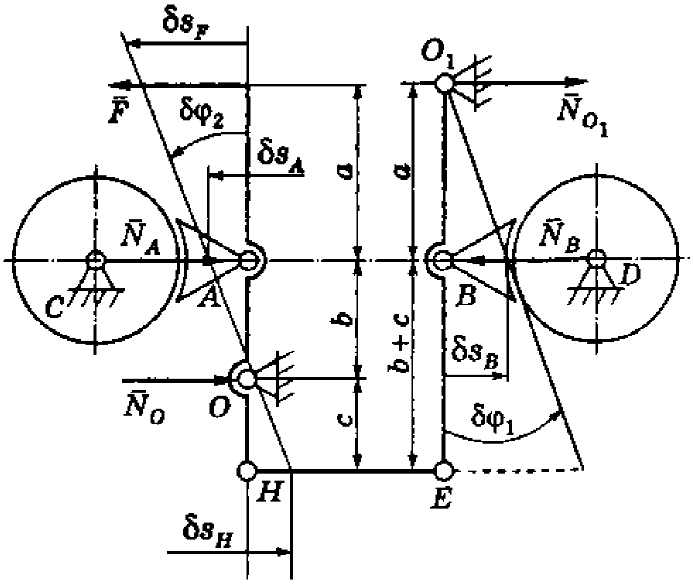


Решение

Мысленно освободим механизм от колодок A и B, заменив их соответствующими силами реакций. Сообщим возможные перемещения точкам приложения соответствующих сил (см. рисунок) и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$F \cdot \delta s_F - N_A \cdot \delta s_A - N_B \cdot \delta s_B = 0, \tag{1}$$

где $\delta s_F = (a+b)\delta\varphi$; $\delta s_A = b \cdot \delta\varphi$.



Определим

$$\delta s_B = a \cdot \delta\varphi_1,$$

$$c \cdot \delta\varphi = (a+b+c)\delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{c}{a+b+c}\delta\varphi,$$

где $\delta\varphi$, $\delta\varphi_1$ — возможные углы поворота соответственно вокруг шарниров O и O_1.

Тогда

$$\delta s_B = \frac{ca}{a+b+c}\delta\varphi \tag{2}$$

и уравнение (1) примет вид

$$F(a+b)(a+b+c) - N_A b\,(a+b+c) - N_B ac = 0. \tag{3}$$

Используя принцип возможных перемещений, запишем уравнение равновесия для механической системы, убрав колодку в точке A и заменив ее соответствующей реакцией:

$$F \cdot \delta s_F - N_A \cdot \delta s_A = 0. \tag{4}$$

Так как

$$\frac{\delta s_F}{\delta s_A} = \frac{a+b}{b},$$

получим

$$\delta s_F = \frac{a+b}{b}\delta s_A. \qquad (5)$$

Подставим выражение (5) в уравнение (4), с учетом того, что $\delta s_A \neq 0$, найдем

$$N_A = \frac{a+b}{b}F. \qquad (6)$$

Аналогично поступим и с колодкой B:

$$F \cdot \delta s_F - N_B \cdot \delta s_B = 0. \qquad (7)$$

Поскольку

$$\frac{\delta s_F}{\delta s_B} = \frac{a+b}{ac/(a+b+c)},$$

получим

$$\delta s_F = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ac}\delta s_B. \qquad (8)$$

Подставим выражение (8) в уравнение (7), с учетом того, что $\delta s_B \neq 0$, найдем

$$N_B = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ac}F. \qquad (9)$$

В соответствии с условием задачи $N_A = N_B$, следовательно,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ac}$$

или

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}. \qquad (10)$$

Из выражения (10) получим

$$ac = b(a+b+c).$$

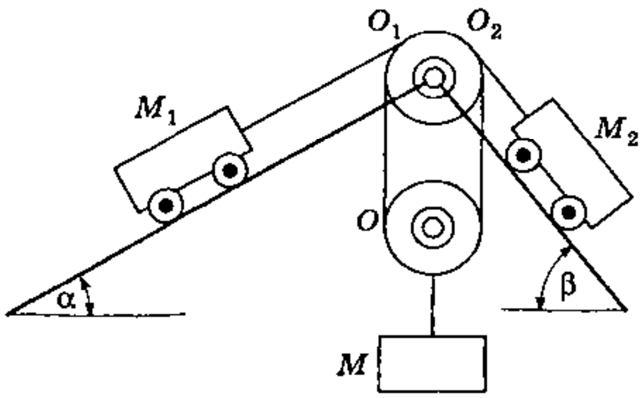
Подставим это значение в уравнение (3), с учетом равенства $N_A = N_B = Q$ найдем

$$Q = F\frac{a+b}{2b}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b+c}{c}$; $Q = F\dfrac{a+b}{2b}$.

Задача 46.20

Найти массы M_1 и M_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом массы M на плоскостях, наклоненных к горизонту под углами α и β, если грузы с массами M_1 и M_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза с массой M_1 через блок O_1, насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку O, и затем через блок O_2, насаженный на ось блока O_1, к грузу массы M_2. Блоки O_1 и O_2 — соосные. Трением, а также массами блоков и троса пренебречь.



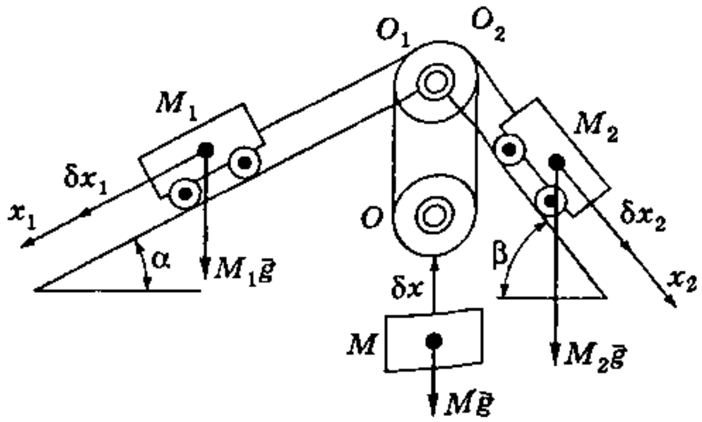
Решение

Покажем на рисунке активные силы, действуюшие на данную систему: $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$, $M\bar{g}$. Положение системы определяется двумя обобщенными координатами: $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$. Следовательно, система имеет две степени свободы. Задав возможные перемещения $\delta x_1 \neq 0$ и $\delta x_2 = 0$, получим перемещение груза M:

$$\delta x = \frac{\delta x_1}{2}.$$

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$



С учетом перемещения груза уравнение (1) примет вид

$$\delta A_1 = M_1 g \sin\alpha \cdot \delta x_1 - Mg\frac{\delta x_1}{2} = \left(M_1 g \sin\alpha - \frac{1}{2}Mg\right)\delta x_1.$$

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_1 = x_1$,

$$Q_1 = M_1 g \sin\alpha - \frac{1}{2}Mg. \qquad (2)$$

Аналогично для случая $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$ получим

$$\delta x = \frac{\delta x_2}{2};$$

$$\delta A_2 = \left(M_2 g \sin\beta - \frac{1}{2}Mg\right)\delta x_2.$$

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_2 = x_2$,

$$Q_2 = M_2 g \sin\beta - \frac{1}{2}Mg. \qquad (3)$$

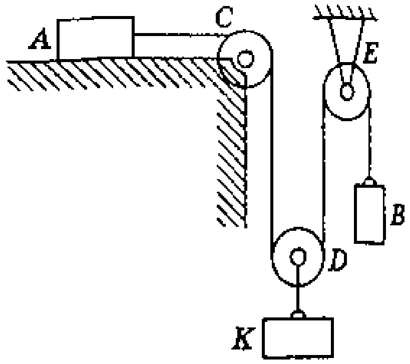
Используя условие равновесия системы в обобщенных координатах: $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, из выражений (2) и (3) получим

$$M_1 = \frac{M}{2\sin\alpha},$$

$$M_2 = \frac{M}{2\sin\beta}.$$

Ответ: $M_1 = \dfrac{M}{2\sin\alpha}$; $M_2 = \dfrac{M}{2\sin\beta}$.

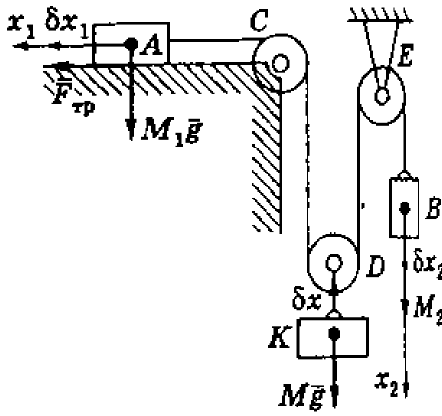
Задача 46.21



К концам нерастяжимой нити привязаны грузы A и B одинаковой массы. От груза A нить проходит параллельно горизонтальной плоскости, огибает неподвижный блок C, охватывает подвижный блок D, затем огибает неподвижный блок E, где к другому концу нити привязан груз B. К оси подвижного блока D подвешен груз K массы M.

Определить массу M_1 каждого из грузов A и B и коэффициент трения скольжения f груза A о горизонтальную плоскость, если система грузов находится в покое. Массой нити пренебречь.

Решение



Покажем на рисунке активные силы, действующие на данную систему: $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$, $M\bar{g}$ и $\bar{F}_{тр}$.

Механическая система имеет две степени свободы, потому что ее положение определяется двумя обобщенными координатами: $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$.

Применим принцип возможных перемещений:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \tag{1}$$

Найдем обобщенные силы Q_1 и Q_2, соответствующие обобщенным координатам. Для вычисления Q_1 полагаем, что $\delta x_1 \neq 0$, $\delta x_2 = 0$.

Тогда возможное перемещение груза K

$$\delta x = \frac{\delta x_1}{2},$$

а уравнение (1) примет вид

$$\delta A_1 = F_{тр} \cdot \delta x_1 - Mg \cdot \delta x = \left(fM_1 g - \frac{Mg}{2}\right)\delta x_1.$$

откуда

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1} = fM_1 g - \frac{Mg}{2}. \tag{2}$$

Для вычисления Q_2 полагаем, что $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 \neq 0$. Тогда

$$\delta x = \frac{\delta x_2}{2},$$

$$\delta A_2 = M_1 g \cdot \delta x_2 - Mg \cdot \delta x = \left(M_1 g - \frac{Mg}{2}\right)\delta x_2.$$

Откуда

$$Q_2 = M_1 g - \frac{1}{2}Mg. \tag{3}$$

В положении равновесия $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. Приравняв к нулю выражение (3), найдем

$$M_1 = \frac{M}{2}.$$

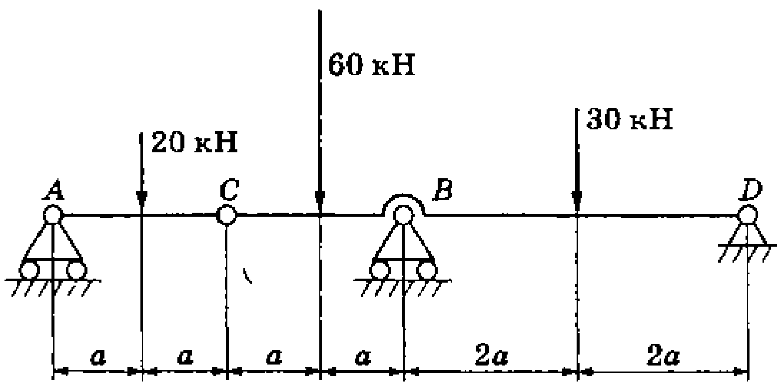
Коэффициент трения скольжения f найдем из выражения (2):

$$f = \frac{M}{2M_1} = 1.$$

Ответ: $M_1 = \dfrac{M}{2}$; $f = 1$.

Задача 46.22

Составная балка AD, лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке C. На балку действуют вертикальные силы, равные 20 кН, 60 кН, 30 кН. Размеры указаны на рисунке. Определить реакции опор A, B и D.



Решение

Имеем систему параллельных сил, поэтому на опоре D будет только вертикальная составляющая. Для определения реакции R_D заменим шарнирно-подвижную опору ползуном (рис. 1). Сообщим системе возможное перемещение. Ползун в точке D может перемещаться вертикально, а опора в точке B — горизонтально. Мгновенный центр вращения балки CBD найдем на пересечении перпендикуляров к перемещениям в точках D и B. Этой точкой будет точка B. Поэтому балка CBD будет вращаться вокруг опоры B.

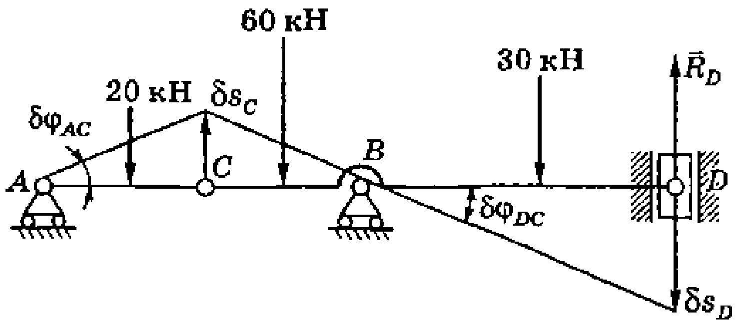


Рис. 1

Аналогично находим мгновенный центр вращения балки AC, который будет находиться в точке A. Поэтому балка AC будет вращаться вокруг опоры A. Найдем соотношение между углами поворота балок AC и CBD:

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AC}\cdot 2a = \delta\varphi_{DC}\cdot 2a \Rightarrow \delta\varphi_{AC} = \delta\varphi_{DC} = \delta\varphi.$$

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$-R_D 4a\cdot\delta\varphi + 30\cdot 2a\cdot\delta\varphi - 60a\cdot\delta\varphi - 20a\cdot\delta\varphi = 0$$

или

$$(60a - 60a - 20a - 4aR_D)\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$R_D = \frac{1}{4}(60 - 60 - 20) = -5 \text{ (кН)}.$$

Для определения реакции R_B мысленно освобождаемся от опоры B (рис. 2).

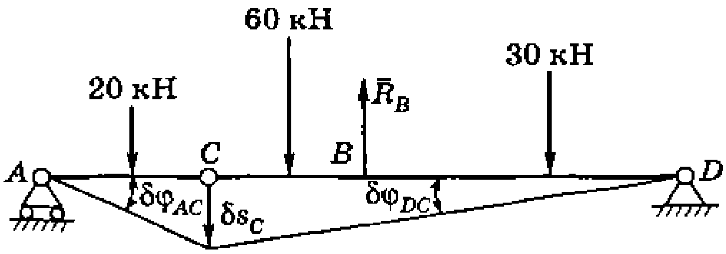


Рис. 2

Сообщим системе возможное перемещение, при котором балка *CBD* будет вращаться вокруг опоры *D*, а балка *AC* — вокруг опоры *A*, где будет находиться мгновенный центр вращения этой балки, найденный как и при определении реакции в точке *D*.

Найдем соотношение между углами поворота балок *AC* и *CBD*:

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AC} \cdot 2a = \delta\varphi_{DC} \cdot 6a \;\Rightarrow \delta\varphi_{AC} = 3\delta\varphi_{DC}.$$

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$20a \cdot \delta\varphi_{AC} + 60 \cdot 5a \cdot \delta\varphi_{DC} - 4R_B a \cdot \delta\varphi_{DC} + 30 \cdot 2a \cdot \delta\varphi_{DC} = 0$$

или

$$(60a + 300a - 4aR_B + 60a)\delta\varphi_{DC} = 0.$$

Так как $\delta\varphi_{DC} \neq 0$, то

$$R_B = \frac{1}{4}(60 + 300 + 60) = 105 \text{ (кН)}.$$

Для определения реакции R_A освобождаемся от опоры *A* (рис. 3).

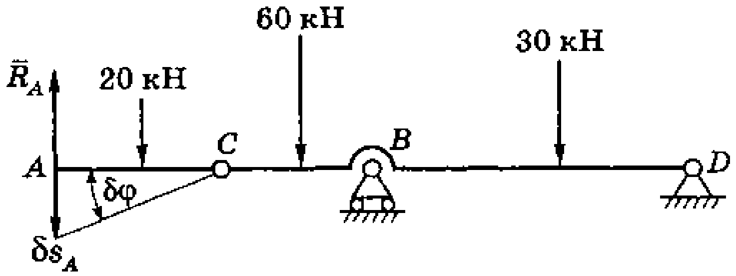


Рис. 3

Сообщим системе возможное перемещение. Балка *CBD* будет неподвижна, а балка *AC* будет вращаться вокруг точки *C*. Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$R_A \cdot 2a \cdot \delta\varphi - 20a \cdot \delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$R_A = \frac{20}{2} = 10 \text{ (кН)}.$$

О т в е т: $R_A = 10$ кН; $R_B = 105$ кН; $R_D = -5$ кН.

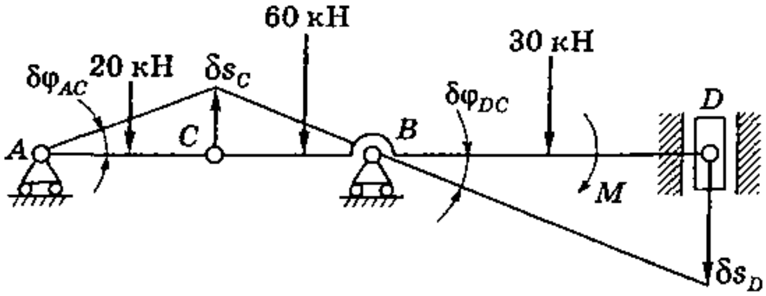
Задача 46.23

Определить вращающий момент, который надо приложить на участке BD к балке AD, рассмотренной в предыдущей задаче, для того, чтобы опорная реакция в D равнялась нулю.

Р е ш е н и е

Приложим вращающий момент M на участке BD по часовой стрелке (см. рисунок). Опору D заменим вертикальным ползуном. Сообщим системе возможное перемещение. Соотношение между углами поворота $\delta\varphi_{AC}$ и $\delta\varphi_{DC}$ возьмем из решения задачи 46.22:

$$\delta\varphi_{AC} = \delta\varphi_{DC} = \delta\varphi.$$



Запишем уравнение принципа возможных перемещений, учитывая, что реакция на опоре D должна быть равна нулю:

$$-20a \cdot \delta\varphi - 60a \cdot \delta\varphi + 30 \cdot 2a \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi = 0.$$

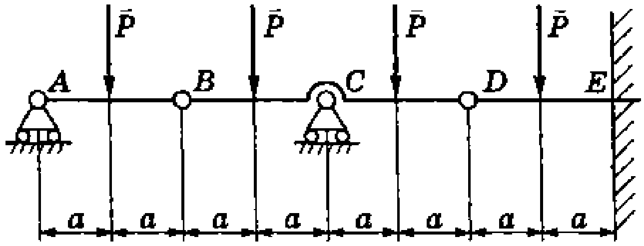
Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M = 20a + 60a - 60a = 20a.$$

О т в е т: $M = 20a$ кН·м.

Задача 46.24

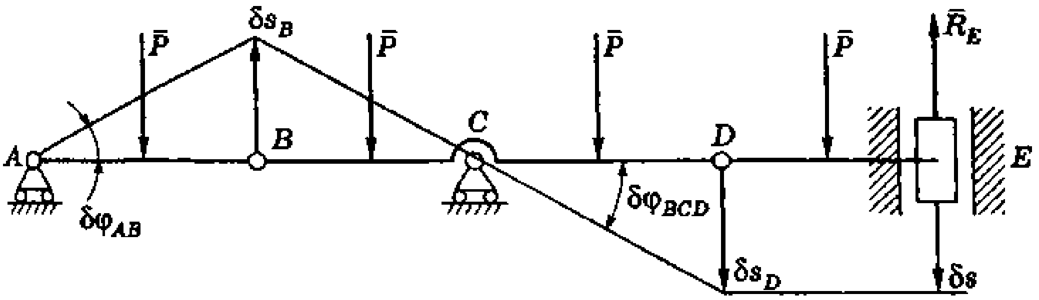
Составная балка AE, лежащая на двух опорах A и C, состоит из трех балок AB, BD и DE, шарнирно соединенных в B и D. Балка DE в сечении E защемлена в стене. Определить вертикальную составляющую реакции в сечении E. К балкам приложены четыре равные вертикальные силы $\bar{P}$. Размеры указаны на рисунке.



Решение

Для определения реакции $\bar{R}_E$ заменим заделку на опоре E жестким ползуном (см. рисунок). Сообщим системе возможное перемещение.

Тогда балка DE перемещается поступательно, балка BCD вращается вокруг мгновенного центра вращения (точка C), а балка AB — вокруг точки A.



Найдем соотношение между углами поворота балок AB и BCD:

$$\delta s = \delta\varphi_{AB} \cdot 2a = \delta\varphi_{BCD} \cdot 2a \Rightarrow \delta\varphi_{AB} = \delta\varphi_{BCD} = \delta\varphi.$$

Тогда

$$\delta s = \delta s_D = 2\,a \cdot \delta\varphi.$$

Составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$-Pa \cdot \delta\varphi - Pa \cdot \delta\varphi + Pa \cdot \delta\varphi + P \cdot \delta s - R_E \cdot \delta s = 0$$

или

$$\delta\varphi(-Pa - Pa + Pa + 2Pa - 2aR_E) = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$R_E = \frac{P}{2}.$$

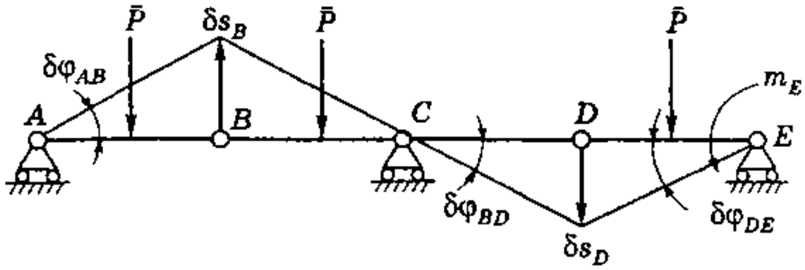
Ответ: $R_E = 0{,}5P$.

Задача 46.25

Определить момент m_E пары, возникающей в заделке балки DE, рассмотренной в предыдущей задаче.

Решение

Для определения момента m_E заделки заменим жесткую заделку шарнирно-неподвижной опорой. Сообщим системе возможное перемещение. Тогда балка DE будет вращаться вокруг точки E и повернется на угол $\delta\varphi_{DE}$ (см. рисунок).



Найдем мгновенный центр вращения балки BCD, который находится в точке пересечения перпендикуляров к перемещениям точек D и C, учитывая, что точка C может перемещаться горизонтально, а точка D — вертикально. Тогда балка BCD повернется вокруг точки C на угол $\delta\varphi_{BD}$.

Аналогично найдем, что балка AB будет поворачиваться на угол $\delta\varphi_{AB}$ вокруг точки A, которая является мгновенным центром вращения.

Определим соотношение между $\delta\varphi_{DE}$, $\delta\varphi_{BD}$ и $\delta\varphi_{AB}$:

$$\delta s_D = \delta\varphi_{DE} \cdot 2a = \delta\varphi_{BD} \cdot 2a \Rightarrow \delta\varphi_{DE} = \delta\varphi_{BD} = \delta\varphi;$$

$$\delta s_B = \delta\varphi_{BD} \cdot 2a = \delta\varphi_{AB} \cdot 2a \Rightarrow \delta\varphi_{AB} = \delta\varphi_{BD} = \delta\varphi_{DE} = \delta\varphi.$$

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$m_E \cdot \delta\varphi + Pa \cdot \delta\varphi + Pa \cdot \delta\varphi - Pa \cdot \delta\varphi - Pa \cdot \delta\varphi = 0$$

или

$$(m_E + Pa + Pa - Pa - Pa)\delta\varphi = 0.$$

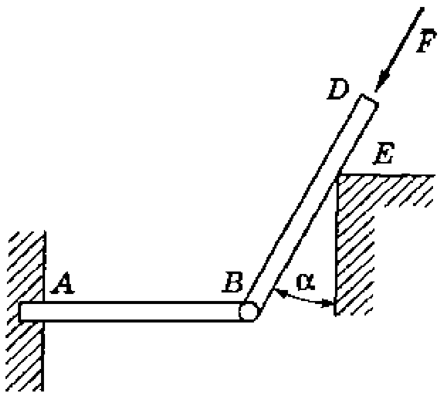
Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$m_E = Pa + Pa - Pa - Pa = 0.$$

Ответ: $m_E = 0$.

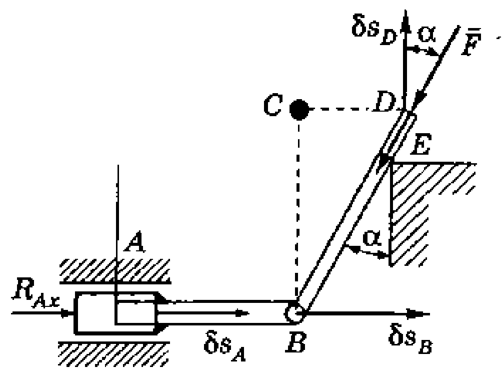
Задача 46.26

Балки AB и BD соединены цилиндрическим шарниром B. Горизонтальная балка AB защемлена в вертикальной стене сечением A. Балка BD, опирающаяся о гладкий выступ E, образует с вертикалью угол α. Вдоль балки BD действует сила $\overline{F}$. Определить горизонтальную составляющую реакции в защемленном сечении A. Массой балок пренебречь.



Решение

Для определения реакции $\overline{R}_{Ax}$ заменим заделку в опоре A горизонтальным жестким ползуном. Сообщим системе возможное перемещение (см. рисунок). Балка AB будет перемещаться поступательно, а балка BED — вращаться вокруг мгновенного центра вращения (точка C), в которой пересекаются перпендикуляры к возможным перемещениям точек B и E.



Тогда $\delta s_D \perp DC$, а угол между δs_D и $\overline{F}$ равен α.

Проецируя перемещения точек B и D на прямую, получим

$$\delta s_D \cos\alpha = \delta s_B \sin\alpha$$

или

$$\delta s_D = \delta s_B \,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$R_{Ax} \cdot \delta s_A - F \cdot \delta s_D \cos\alpha = 0, \tag{1}$$

так как

$$\delta s_A = \delta s_B,$$

подставив выражение δs_D в уравнение (1), получим

$$R_{Ax} \cdot \delta s_B - F \cdot \delta s_B \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha = 0$$

или

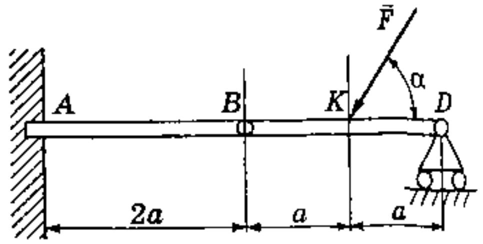
$$\delta s_B (R_{Ax} - F \sin\alpha) = 0.$$

Так как $\delta s_B \neq 0$, то

$$R_{Ax} = F \sin\alpha.$$

Ответ: $R_{Ax} = F\sin\alpha$.

Задача 46.27



Две горизонтальные балки AB и BD соединены цилиндрическим шарниром B. Опора D стоит на катках, а сечение A защемлено в стенке. К балке BD в точке K приложена сосредоточенная сила $\overline{F}$, образующая угол α с горизонтом. Размеры указаны на рисунке. Определить составляющие реакции в защемленном сечении A и реактивный момент m_p пары, возникающей в этом сечении. Массой балок пренебречь.

Решение

Найдем реактивный момент m_p. Для этого заменим заделку в точке A шарнирно-неподвижной опорой, приложив искомый момент m_p (рис. 1).

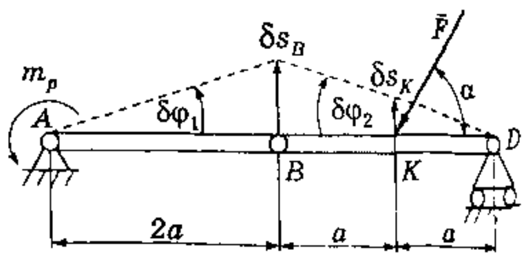


Рис. 1

Сообщим системе возможное перемещение и составим уравнение принципа возможных перемещений:

$$m_p \cdot \delta\varphi_1 - F\sin\alpha \cdot \delta s_K = 0. \tag{1}$$

Выразим δs_K через угол поворота

$$\delta s_K = a \cdot \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_B}{2a} a = \frac{1}{2}\delta s_B = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \delta\varphi_1 = a \cdot \delta\varphi_1$$

и подставим в уравнение (1):

$$m_p \cdot \delta\varphi_1 - F\sin\alpha \cdot a \cdot \delta\varphi_1 = 0 \Rightarrow m_p = Fa\sin\alpha.$$

Для определения вертикальной составляющей $\overline{R}_{Ay}$ реакции заделки заменим заделку в точке A ползуном в вертикальных направляющих, жестко связанным со стержнем AB, и приложим реакцию $\overline{R}_{Ay}$ (рис. 2). Сообщим системе возможное перемещение и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

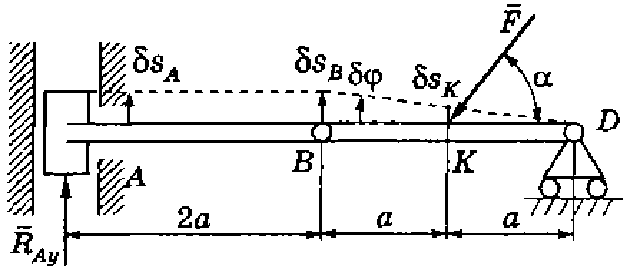


Рис. 2

$$R_{Ay} \cdot \delta s_A - F\sin\alpha \cdot \delta s_K = 0,$$

где $\delta s_K = a \cdot \delta\varphi = a\dfrac{\delta s_B}{2a} = \dfrac{1}{2}\delta s_B = \dfrac{1}{2}\delta s_A$.

Тогда

$$R_{Ay} \cdot \delta s_A - F\sin\alpha\frac{\delta s_A}{2} = 0,$$

откуда

$$R_{Ay} = \frac{F\sin\alpha}{2}.$$

Для определения горизонтальной составляющей реакции заделки заменим заделку в точке A ползуном в горизонтальных направляющих, жестко связанным со стержнем AB, и приложим реакцию $\overline{R}_{Ax}$ (рис. 3).

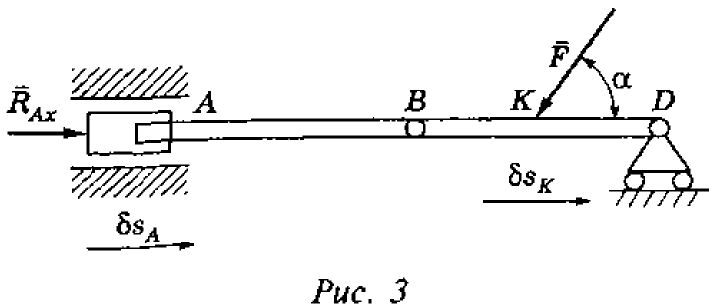


Рис. 3

Сообщим системе возможное перемещение и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$R_{Ax} \cdot \delta s_A - F\cos\alpha \cdot \delta s_K = 0,$$

где $\delta s_A = \delta s_K$.

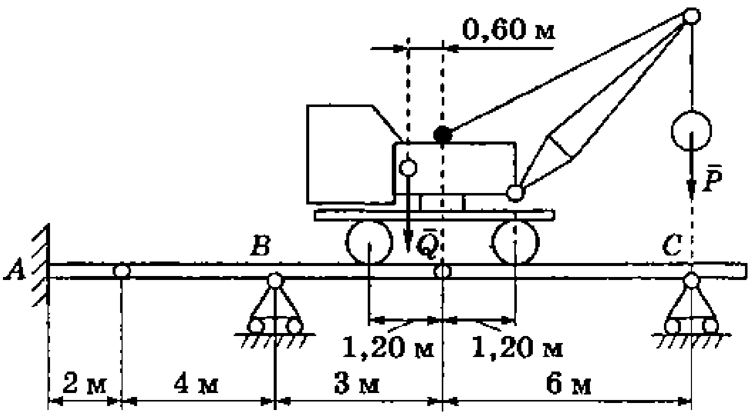
Тогда

$$R_{Ax} = F\cos\alpha.$$

Ответ: $R_{Ax} = F\cos\alpha$; $R_{Ay} = 1/2\,F\sin\alpha$; $m_p = Fa\sin\alpha$.

Задача 46.28

Железнодорожный кран опирается на рельсы, укрепленные на двух горизонтальных двухпролетных балках с промежуточными шарнирами. Кран несет груз $P = 30$ кН, силы тяжести крана $Q = 160$ кН. Определить момент реактивной пары в заделке в положении крана, указанном на рисунке.



Решение

Рассмотрим равновесие крана и определим силы давления крана на рельсы (рис. 1):

$$\sum M_L = 0; \quad -Q \cdot 0{,}6 + R_N \cdot 2{,}4 - P \cdot 7{,}2 = 0.$$

Откуда

$$R_N = \frac{0{,}6Q + 7{,}2\,P}{2{,}4} = 0{,}25Q + 3P.$$

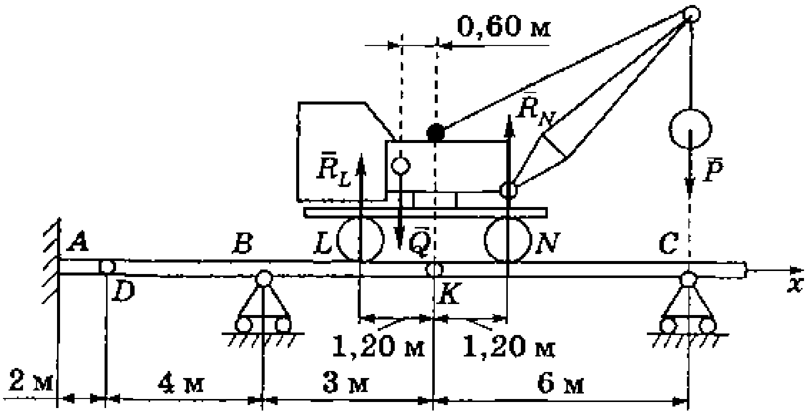


Рис. 1

Так как

$$\sum M_N = 0,$$

то

$$-R_L \cdot 2{,}4 + Q \cdot 1{,}8 - P \cdot 4{,}8 = 0.$$

Силы давления крана

$$\bar{R}'_N = -\bar{R}_N, \quad \bar{R}'_L = -\bar{R}_L.$$

Для определения момента реактивной пары в заделке заменим заделку шарнирно-неподвижной опорой и приложим реактивный момент M_A, направленным против часовой стрелки (рис. 2). Сообщим системе возможное перемещение и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$M_A \cdot \delta\varphi_1 + R'_L \cdot \delta s_L + R'_N \cdot \delta s_N = 0.$$

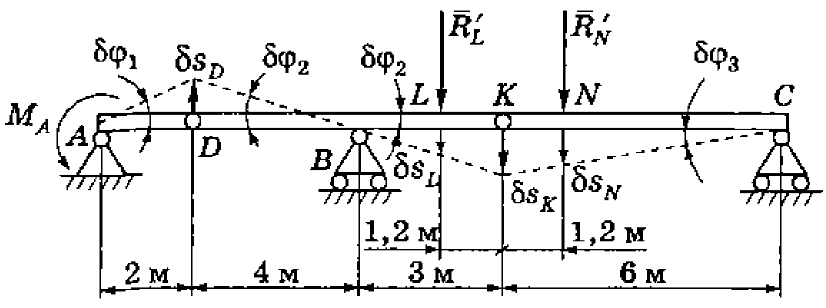


Рис. 2

Выразим возможные перемещения через $\delta\varphi_1$, учитывая, что балка AD вращается вокруг точки A, а балки DBK и KC — соответственно вокруг точек B и C, которые являются мгновенными центрами вращения этих балок:

$$\delta s_D = 2\delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_D}{4} = \frac{\delta\varphi_1}{2},$$

$$\delta s_L = 1{,}8\,\delta\varphi_2 = 0{,}9\,\delta\varphi_1,$$

$$\delta s_K = 3\,\delta\varphi_2 = 1{,}5\,\delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_K}{6} = \frac{1{,}5\,\delta\varphi_1}{6} = \frac{\delta\varphi_1}{4},$$

$$\delta s_N = 4{,}8\,\delta\varphi_3 = \frac{\delta\varphi_1}{4}\cdot 4{,}8 = 1{,}2\,\delta\varphi_1.$$

Тогда

$$-M_A\cdot\delta\varphi_1 + 0{,}9\,R'_L\cdot\delta\varphi_1 + 1{,}2\,R'_N\cdot\delta\varphi_1 = 0.$$

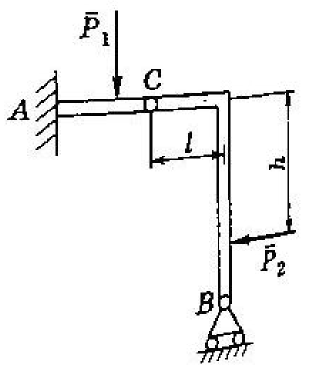
Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M_A = -0{,}9R'_L - 1{,}2\,R'_N = -0{,}9(0{,}75Q - 2\,P) - 1{,}2\,(0{,}25Q + 3P) =$$

$$= -(0{,}975Q + 1{,}8P) = -0{,}975\cdot 160 - 1{,}8\cdot 30 = -210\ (\text{кН}).$$

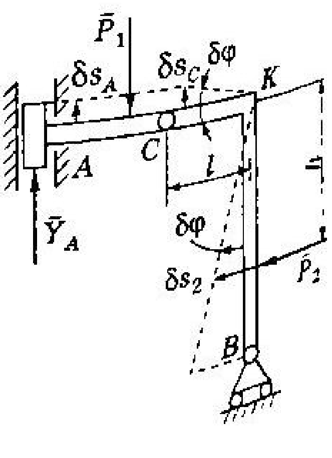
Ответ: $M_A = -210$ кН.

Задача 46.29



Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами C. Верхние концы рам жестко защемлены в бетонную стену, нижние — опираются на цилиндрические подвижные опоры. Определить вертикальную реакцию защемления при действии сил $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$.

Решение



Для определения вертикальной реакции защемления заменим заделку вертикальным ползуном, жестко связанным со стержнем AC, и приложим вертикальную реакцию $\bar{Y}_A$ (см. рисунок).

Сообщим системе возможное перемещение и запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$Y_A\cdot\delta s_A - P_1\cdot\delta s_1 + P_2\cdot\delta s_2 = 0. \qquad (1)$$

Так как стержень AC движется поступательно, то $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_1$. Балка BKC будет вращаться вокруг точки K, которая является мгновенным центром вращения. Тогда

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{l} = \frac{\delta s_A}{l},$$

$$\delta s_2 = h \cdot \delta\varphi = \frac{h}{l}\delta s_A.$$

Подставим значения δs_1 и δs_2 в уравнение (1), получим

$$Y_A \cdot \delta s_A - P_1 \cdot \delta s_A + P_2 \frac{h}{l}\delta s_A = 0.$$

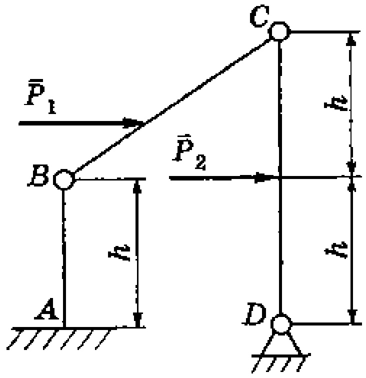
Откуда

$$Y_A = P_1 - P_2\frac{h}{l}.$$

Ответ: $Y_A = P_1 - P_2\frac{h}{l}$.

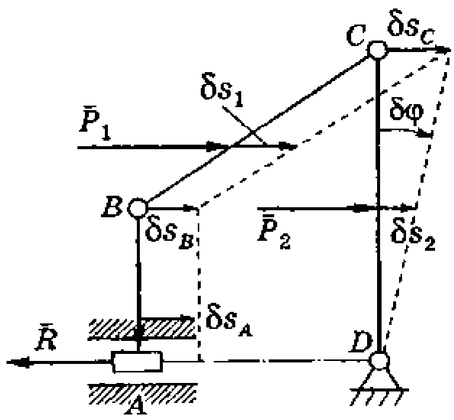
Задача 46.30

Две балки BC и CD шарнирно соединены в C, цилиндрическим шарниром B прикреплены к вертикальной стойке AB, защемленной в сечении A, а цилиндрическим шарниром D соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$. Определить горизонтальную составляющую реакции в сечении A. Размеры указаны на рисунке.



Решение

Для определения горизонтальной составляющей в заделке A заменим заделку горизонтальным ползуном, жестко связанным со стержнем AB, и приложим горизонтальную силу $\bar{R}$ (см. рисунок). Сообщим системе возможное перемещение, запишем уравнения принципа возможных перемещений:



$$R \cdot \delta s_A + P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot \delta s_2 = 0. \qquad (1)$$

Так как стержень AB движется поступательно, то

$$\delta s_A = \delta s_B.$$

Стержень BC совершает мгновенно-поступательное движение, поэтому

$$\delta s_B = \delta s_1 = \delta s_C.$$

Стержень CD совершает поворот вокруг точки D:

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{2h} = \frac{\delta s_A}{2h},$$

$$\delta s_2 = \delta\varphi h = \frac{\delta s_A}{2}.$$

Подставим значения δs_1 и δs_2 в уравнение (1) и получим

$$-R\cdot\delta s_A + P_1\cdot\delta s_A + P_2\cdot\frac{\delta s_A}{2} = 0,$$

откуда

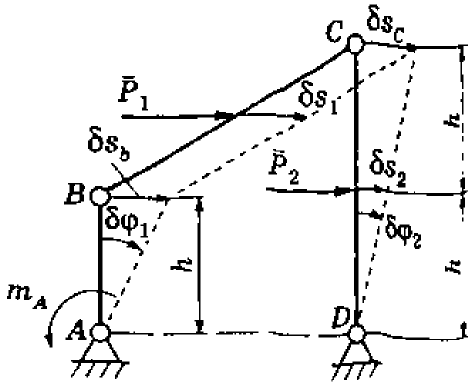
$$R = P_1 + \frac{P_2}{2}.$$

Ответ: $R = P_1 + \frac{P_2}{2}$.

Задача 46.31

Определить момент m_A реактивной пары, возникающей в заделке A стойки AB, рассмотренной в предыдущей задаче.

Решение



Для определения момента m_A реактивной пары в заделке A заменим заделку шарнирно-неподвижной опорной и приложим реактивный момент m_A (см. рисунок). Сообщим системе возможное перемещение, запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$-m_A\cdot\delta\varphi_1 + P_1\cdot\delta s_1 + P_2\cdot\delta s_2 = 0. \quad (1)$$

Стержень AB совершает поворот вокруг точки A, поэтому

$$\delta s_B = h\delta\varphi_1.$$

Так как стержень BC совершает мгновенно-поступательное движение, то

$$\delta s_B = \delta s_1 = \delta s_C = h\delta\varphi_1.$$

Стержень CD вращается вокруг точки D, поэтому

$$\delta s_2 = h \cdot \delta\varphi_2 = \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2},$$

так как

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{2h} = \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2h} = \frac{\delta\varphi_1}{2}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$-m_A \cdot \delta\varphi_1 + P_1 h \cdot \delta\varphi_1 + P_2 \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2} = 0,$$

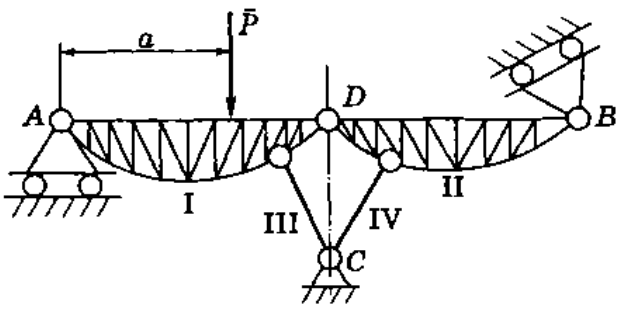
откуда

$$m_A = \left(P_1 + \frac{P_2}{2}\right)h.$$

Ответ: $m_A = \left(P_1 + \frac{P_2}{2}\right)h.$

Задача 46.32

Две фермы I и II, соединенные шарниром D, прикреплены к стержням III и IV с помощью шарнира C к земле; в точках A и B они имеют опоры на катках. Ферма I нагружена вертикальной силой $\bar{P}$ на расстоянии a от опоры A. Найти реакцию катка B.

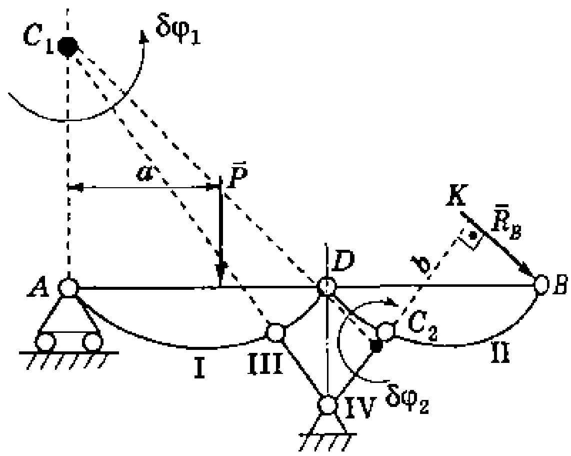


Указание. Предварительно определить положение мгновенных центров скоростей C_1 и C_2 ферм I и II.

Решение

Для определения реакции опоры B отбросим шарнирно-неподвижную опору B и заменим ее реакцией $\overline{R}_B$ (см. рисунок). Сообщим системе возможное перемещение. Определим положение мгновенных центров вращения ферм I и II: точка C_1 для фермы I и точка C_2 для фермы II. Запишем уравнение принципа возможных перемещений:

$$-M_{C_1}(\overline{P})\delta\varphi_1 + M_{C_1}(\overline{P}_B)\delta\varphi_2 = 0.$$



Так как точка D общая для левой и правой ферм, то

$$\delta s_D = \delta\varphi_1 \cdot DC_1 = \delta\varphi_2 \cdot DC_2$$

или

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \frac{DC_1}{DC_2}.$$

Введем обозначение:

$$C_2K = b,$$

где C_2K — плечо реакции $\overline{R}_B$ относительно мгновенного центра C_2.

Моменты заданных сил относительно мгновенных центров вращения:

$$M_{C_1}(\overline{P}) = Pa,$$

$$M_{C_2}(\overline{R}_B) = R_B b.$$

Следовательно,

$$-P_A \cdot \delta\varphi_1 + R_B b \cdot \delta\varphi_1 \cdot \frac{DC_1}{DC_2} = 0,$$

так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то

$$R_B = P\,\frac{a}{b}\,\frac{C_2D}{C_1D}.$$

Ответ: $R_B = P\,\dfrac{a}{b}\,\dfrac{DC_2}{DC_1}$, где b — плечо реакции $\overline{R}_B$ относительно мгновенного центра C_2. Реакция $\overline{R}_B$ направлена перпендикулярно плоскости скольжения катка B слева направо вниз.

47. Общее уравнение динамики

Методические указания к решению задач

Общее уравнение динамики, или ***принцип Лагранжа — Даламбера***, применяется к исследованию движения несвободных механических систем, тела или точки которых движутся с некоторыми ускорениями.

В соответствии с принципом Даламбера, если ко всем точкам несвободной механической системы приложить активные силы, силы реакций связей и силы инерции этих точек, то полученная совокупность сил будет эквивалентна нулю, т.е. механическая система под действием такой совокупности сил будет условно находиться в равновесии. Если к такой системе сил применить условия равновесия, выражаемые принципом возможных перемещений (принципом Лагранжа), то получим объединенный принцип Лагранжа — Даламбера: в любой момент времени при движении несвободной механической системы с двусторонними, идеальными, стационарными, голономными связями сумма элементарных работ всех приложенных к точкам системы активных сил и сил инерции на любых возможных перемещениях системы равна нулю.

Общее аналитическое выражение этого принципа

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^и = 0, \qquad (47.1)$$

где $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a$, $\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^и$ — сумма возможных работ соответственно активных сил и сил инерции.

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k,$$

а

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^и = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi}_k \delta \overline{r}_k,$$

то выражение (47.1) можно представить в векторной:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}+\overline{\Phi}_k)\delta\overline{r}_k=0 \tag{47.2}$$

и скалярной форме:

$$\sum_{k=1}^{n}[(F_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k+(F_{kz}+\Phi_{kz})\delta z_k]=0. \tag{47.3}$$

С учетом того, что сила инерции материальной точки $\overline{\Phi}_k=-m_k\overline{a}_k$, а ее проекции на оси координат

$$\Phi_{kx}=-m_k\ddot{x}_k,$$

$$\Phi_{ky}=-m_k\ddot{y}_k,$$

$$\Phi_{kz}=-m_k\ddot{z}_k,$$

уравнения (47.2) и (47.3) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}_k-m_k\overline{a}_k)\delta\overline{r}_k=0, \tag{47.2'}$$

$$\sum_{k=1}^{n}[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k)\delta y_k+(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k]=0. \tag{47.3'}$$

Если в качестве возможного перемещения выбрано угловое перемещение тела при вращении вокруг оси, то при составлении уравнения возможной работы сил она определяется как работа момента этих сил относительно оси вращения.

В методических указаниях к решению задач на принцип Даламбера (см. параграф 41) приведены формулы для вычисления главного вектора $\overline{\Phi}^*$ и главного момента $\overline{M}^{\text{и}}$ ($\overline{M}^{\Phi}$) сил инерции при различных движениях твердого тела.

При поступательном движении

$$\overline{\Phi}^*=-M\overline{a}_C, \quad \overline{M}^{\text{и}}=0, \tag{47.4}$$

где a_C — ускорение центра масс тела; M — масса тела.

При вращении тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела,

$$\overline{\Phi}^*=0, \quad \overline{M}^{\text{и}}_{Cz}=-I_{Cz}\overline{\varepsilon}, \tag{47.5}$$

где ε — угловое ускорение тела; I_{Cz} — момент инерции тела относительно оси.

При плоскопараллельном движении

$$\overline{\Phi}^{*} = -M\overline{a}_C, \quad \overline{M}_{Cz}^{\Phi} = -I_{Cz}\overline{\varepsilon}. \tag{47.6}$$

Общее уравнение динамики можно записать также в обобщенных силах или обобщенных координатах:

$$\sum (Q_j^q + Q_j^{\Phi})\delta q_j = 0, \quad j = 1, \ldots, S, \tag{47.7}$$

где S — число обобщенных координат, равное числу степеней свободы механической системы; Q_j^q — обобщенная сила активных сил; Q_j^{Φ} — обобщенная сила сил инерции.

Формулы для вычисления этих сил даны во введении к разделу «Аналитическая механика».

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Приложить к рассматриваемой механической системе активные силы, отнеся к ним и силы трения, если связи неидеальные, и силы инерции тел, входящих в систему.

2. Определить число степеней свободы механической системы.

а) Для систем с одной степенью свободы.

3. Сообщить возможное перемещение одной из точек (или тел) и показать на рисунке возможные перемещения точек приложения всех сил (или возможные перемещения тел).

4. Записать сумму элементарных работ активных сил и сил инерции на всех возможных перемещениях и приравнять ее к нулю.

5. Выразить возможные перемещения всех точек через перемещение одной из точек тела.

6. Определить силы инерции и моменты сил инерции тел, входящих в систему, выразив их через ускорение тела, которое по условию задачи требуется найти.

7. Подставить полученные зависимости в уравнение возможных работ, решив которое, определить искомую величину.

б) Для систем с несколькими степенями свободы.

3. Выбрать независимые возможные перемещения точек системы, число которых равно числу степеней свободы.

4. Сообщить возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю.

Показать на рисунке возможные перемещения точек приложенных сил, выразив их через какое-либо одно возможное перемещение.

5. Записать сумму элементарных работ приложенных к системе активных сил и сил инерции на выбранном возможном перемещении и приравнять ее к нулю.

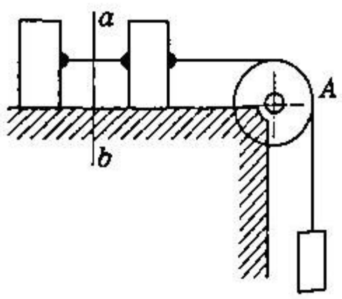
6. Последовательно проведя действия, указанные в пп. 4 и 5 для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений, число которых равно числу степеней свободы (числу независимых возможных перемещений).

7. Решив систему уравнений, определить искомые величины.

Задачи и решения

Задача 47.1

Три груза массы M каждый соединены нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный блок A. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально. Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab. Массой нити и блока пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы, состоящей из трех грузов, соединенных между собой нерастяжимой нитью.

Покажем на расчетной схеме (рис. 1) активные силы: силу тяжести $M\bar{g}$ грузов, силы реакций связей $\overline{N}$ и силы инерции $\overline{\Phi}$.

Сообщим грузу *1* возможное перемещение δs, такое же перемещение получат грузы *2* и *3*. Ускорение a груза *1*

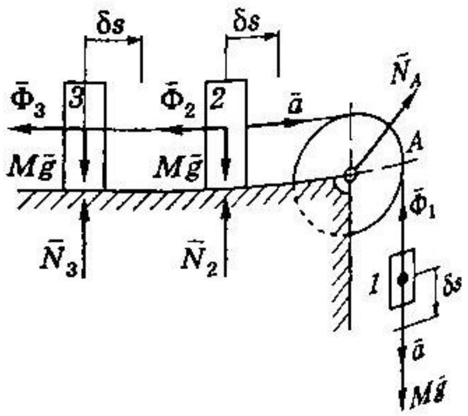


Рис. 1

направлено вниз, грузы *2* и *3* движутся с таким же ускорением. Силы инерции грузов

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = Ma. \qquad (1)$$

Составим общее уравнение динамики для системы грузов:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^u = 0,$$

$$Mg\delta s - \Phi_1\delta s - \Phi_2\delta s - \Phi_3\delta s = 0$$

или

$$(Mg - 3Ma)\delta s = 0.$$

Так как $\delta s \neq 0$, то

$$Mg - 3Ma = 0.$$

Откуда ускорение грузов:

$$a = \frac{1}{3}g. \qquad (2)$$

Для определения натяжения нити в сечении *ab* применим принцип Даламбера для груза *3*.

Составим расчетную схему (рис. 2). Приложим к грузу *3* активные силы тяжести $M\bar{g}$, силы реакций связей плоскости $\overline{N}_3$ и нити $\overline{T}$ и силу инерции $\overline{\Phi}_3$.

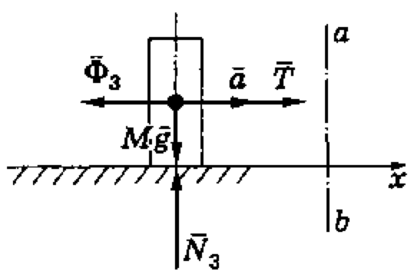


Рис. 2

Запишем уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось *x*:

$$\sum F_x = 0, \quad T - \Phi_3 = 0.$$

Тогда с учетом выражений (1) и (2)

$$T = \Phi_3 = Ma = M\,\frac{1}{3}g = \frac{1}{3}Mg.$$

Ответ: $a = \frac{1}{3}g$; $T = \frac{1}{3}Mg$.

Задача 47.2

Решить предыдущую задачу с учетом массы блока, считая, что при движении грузов блок A вращается вокруг неподвижной оси. Масса блока — сплошного однородного диска — равна $2M$.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на расчетной схеме (рис. 1) активные силы: силы тяжести грузов и блока, силы реакций связей, силы инерции грузов и момент сил инерции блока A.

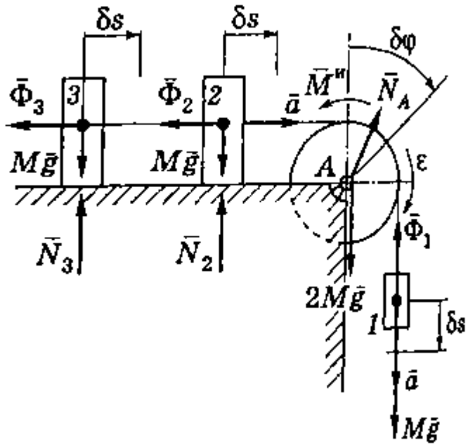


Рис. 1

Система имеет одну степень свободы. Считаем, что груз *1* движется с ускорением a, тогда угловое ускорение блока A

$$\varepsilon = \frac{a}{r},$$

ускорения грузов *2* и *3* равны по модулю, т.е.

$$a_2 = a_3 = a_1 = a.$$

Найдем абсолютные величины сил инерции тел и момента сил инерции блока, входящих в систему:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = Ma, \qquad (1)$$

$$M^{и} = I\varepsilon = \frac{2Mr^2}{2}\,\frac{a}{r} = Mra.$$

Сообщим грузу *1* возможное перемещение δs, такое же перемещение получат и два других груза. При этом возможное угловое перемещение блока A

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

Составим общее уравнение динамики для рассматриваемой системы, т.е. приравняем к нулю сумму работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях системы:

$$Mg\delta s - \Phi_1\delta s - M^{и}\delta\varphi - \Phi_2\delta s - \Phi_3\delta s = 0$$

или

$$\left(Mg - \Phi_1 - M^{и}\frac{1}{r} - \Phi_2 - \Phi_3\right)ds = 0.$$

Так как $\delta s \neq 0$, то

$$Mg - 3\Phi - M^{и}\frac{1}{r} = 0$$

или

$$Mg - 3Ma - Ma = 0.$$

Откуда ускорение груза

$$a = \frac{1}{4}g. \qquad (2)$$

Для определения натяжения нити в сечении *ab* применим принцип Даламбера для груза *3*. Нарисуем расчетную схему (рис. 2). Приложим к грузу активные силы: силу тяжести $M\bar{g}$, силы реакций связей плоскости $\bar{N}_3$ и нити $\bar{T}$, а также силу инерции $\bar{\Phi}_3$.

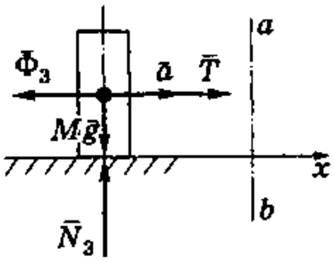


Рис. 2

Запишем уравнение равновесия в проекции на горизонтальную ось x:

$$\sum F_x = 0, \quad T - \Phi_3 = 0.$$

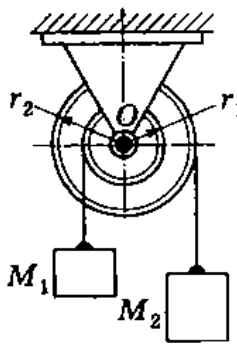
Тогда с учетом выражений (1) и (2)

$$T = \Phi_3 = Ma = M\,\frac{1}{4}g = \frac{1}{4}Mg.$$

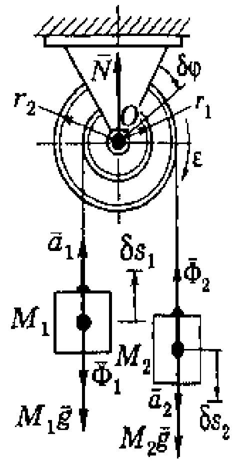
Ответ: $a = \frac{1}{4}g$; $T = \frac{1}{4}Mg$.

Задача 47.3

Два груза массы M_1 и M_2 подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на рисунке, на барабаны, имеющие радиусы r_1 и r_2 и насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести. Определить угловое ускорение ε барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей.



Решение



Рассмотрим движение данной системы, имеющей одну степень свободы. Покажем на рисунке активные силы: силы тяжести грузов, а также силы инерции грузов; считаем, что груз M_2 движется вниз.

Выразим ускорение грузов через угловое ускорение барабанов:

$$a_1 = \varepsilon r_1, \quad a_2 = \varepsilon r_2.$$

Найдем абсолютные величины сил инерции грузов:

$$\Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 r_1 \varepsilon,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2 r_2 \varepsilon.$$

Сообщим барабанам возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, тогда возможное перемещение груза M_1

$$\delta s_1 = r_1 \delta\varphi, \tag{1}$$

а груза M_2

$$\delta s_2 = r_2 \delta\varphi. \tag{2}$$

Составим общее уравнение динамики для рассматриваемой системы с идеальными связями, т.е. приравняем к нулю сумму работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях системы:

$$M_2 g \delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 - M_1 g \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 = 0$$

или с учетом выражений (1) и (2)

$$M_2 g r_2 \delta\varphi - M_2 r_2 \varepsilon r_2 \delta\varphi - M_1 g r_1 \delta\varphi - M_1 r_1 \varepsilon r_1 \delta\varphi = 0,$$

$$\left[(M_2 r_2 - M_1 r_1) g - (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\varepsilon\right] \delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1) g - (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\varepsilon = 0.$$

Откуда угловое ускорение барабанов

$$\varepsilon = g \frac{M_2 r_2 - M_1 r_1}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}.$$

Ответ: $\varepsilon = g \dfrac{M_2 r_2 - M_1 r_1}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}.$

Задача 47.4

При условии предыдущей задачи определить угловое ускорение ε и натяжения T_1 и T_2 нитей, принимая во внимание массы барабанов, при следующих данных: $M_1 = 20$ кг, $M_2 = 34$ кг, $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см; массы барабанов: малого 4 кг и большого 8 кг. Массы барабанов считать равномерно распределенными по их внешним поверхностям.

Решение

Рассмотрим движение данной системы, имеющей одну степень свободы.

Покажем на расчетной схеме (рис. 1) активные силы: силы тяжести грузов и барабанов, силы реакций в опоре оси барабанов, а также силы инерции грузов и моменты сил инерции барабанов, полагая, что они поворачиваются ускоренно по часовой стрелке.

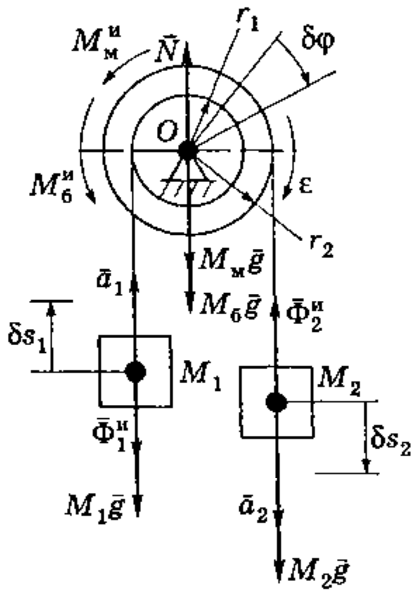


Рис. 1

Найдем абсолютные величины сил инерции грузов и моментов сил инерции малого $M_м^и$ и большого $M_б^и$ барабанов, выразив их через угловое ускорение ε:

$$\Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 r_1 \varepsilon,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2 r_2 \varepsilon,$$

$$M_м^и = I_м \varepsilon = M_м r_1^2 \varepsilon,$$

$$M_б^и = I_б \varepsilon = M_б r_2^2 \varepsilon.$$

Мысленно остановив систему, придадим барабанам возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ по часовой стрелке, тогда возможное перемещение груза M_1

$$\delta s_1 = r_1 \delta\varphi, \quad (1)$$

груза M_2

$$\delta s_2 = r_2 \delta\varphi. \quad (2)$$

Составим общее уравнение динамики для рассматриваемой системы с идеальными связями, т.е. приравняем к нулю сумму работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях системы:

$$M_2 g \delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 - M_м^и \delta\varphi - M_б^и \delta\varphi - M_1 g \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 = 0$$

или с учетом выражений (1) и (2)

$$\left[(M_2 g r_2 - M_1 g_1 r_1) - (\Phi_1 r_1 + \Phi_2 r_2 + M_{\text{м}}^{\text{и}} + M_{\text{б}}^{\text{и}})\right]\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1) g - (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_{\text{м}} r_1^2 + M_{\text{б}} r_2^2)\varepsilon = 0.$$

Откуда угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1) g}{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_{\text{м}} r_1^2 + M_{\text{б}} r_2^2} =$$

$$= \frac{(34 \cdot 0{,}1 - 20 \cdot 0{,}05) \cdot 9{,}81}{20 \cdot 0{,}05^2 + 34 \cdot 0{,}1^2 + 4 \cdot 0{,}05^2 + 8 \cdot 0{,}1^2} = 49 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Для определения натяжения нитей применим принцип Даламбера.

На груз M_1 действуют сила тяжести груза $M_1\bar{g}$, сила реакции нити $\bar{T}_1$, сила инерции груза $\bar{\Phi}_1$ (рис. 2).

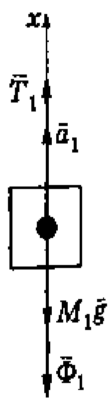


Рис. 2

Запишем уравнение статики в виде суммы проекции сил на вертикальную ось x:

$$\sum F_x = 0, \quad T_1 - M_1 g - \Phi_1 = 0.$$

Тогда

$$T_1 = M_1 g + M_1 a_1 = M_1(g + a_1) =$$

$$= M_1(g + r_1\varepsilon) = 20(9{,}81 + 0{,}05 \cdot 49) = 246 \text{ (Н)}.$$

На груз M_2 действуют сила тяжести $M_2\bar{g}$, сила реакции нити $\bar{T}_2$, сила инерции $\bar{\Phi}_2$ (рис. 3). Для полученной системы сил составим уравнение статики:

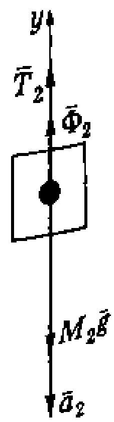


Рис. 3

$$\sum F_y = 0, \quad T_2 - M_2 g + \Phi_2 = 0.$$

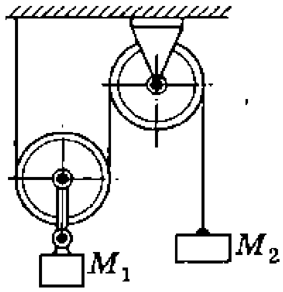
Тогда

$$T_2 = M_2 g - \Phi_2 = M_2 g - M_2 a_2 = M_2(g - r_2\varepsilon) =$$

$$= 34(9{,}81 - 0{,}1 \cdot 49) = 167 \text{ (Н)}.$$

О т в е т: $\varepsilon = 49$ рад/с^2; $T_1 = 246$ Н; $T_2 = 167$ Н.

Задача 47.5



К системе блоков, изображенной на рисунке, подвешены грузы: M_1 массы 10 кг и M_2 массы 8 кг. Определить ускорение a_2 груза M_2 и натяжение нити, пренебрегая массами блоков.

Решение

Так как грузы M_1 и M_2 движутся поступательно, то, приложив к ним силы тяжести $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$ и силы инерции $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ (рис. 1), можно в соответствии с принципом Даламбера считать систему, условно находящейся в равновесии.

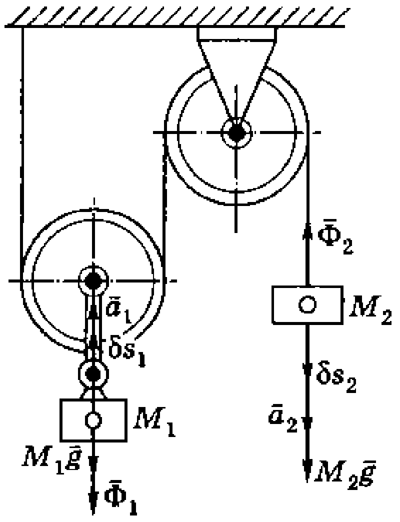


Рис. 1

Силы инерции по модулю

$$\Phi_1 = M_1 a_1;$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2$$

и направлены в сторону, противоположную ускорениям $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Сообщив системе возможное перемещение, составим общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^u = 0$$

или

$$(M_2 g - \Phi_2)\delta s_2 - (M_1 g + \Phi_1)\delta s_1 = 0. \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) соотношения

$$\Phi_2 = M_2 a_2, \quad \Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 \frac{a_2}{2}, \quad \delta s_2 = 2\delta s_1,$$

получим

$$\left(2M_2 g - 2M_2 a_2 - M_1 g - \frac{1}{2} M_1 a_2\right)\delta s_1 = 0.$$

Так как $\delta s_1 \neq 0$, то

$$2M_2 g - 2M_2 a_2 - M_1 g - \frac{1}{2} M_1 a_2 = 0.$$

Откуда ускорение груза M_2

$$a_2 = \frac{4M_2 - 2M_1}{4M_2 + M_1} g = \frac{4 \cdot 8 - 2 \cdot 10}{4 \cdot 8 + 10} \cdot 9{,}8 = 2{,}8 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Определим натяжения нити. Для этого мысленно перережем нить на крайнем правом ее участке и рассмотрим движение груза M_2. На основании принципа Даламбера система сил, состоящая из силы тяжести $M_2\bar{g}$, натяжения нити $\bar{T}$ и силы инерции $\bar{\Phi}_2$, эквивалентна нулю. Поэтому в проекции на ось y (рис. 2) получим

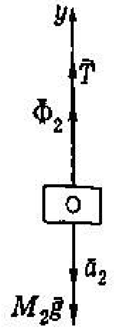


Рис. 2

$$T + M_2 a_2 - M_2 g = 0.$$

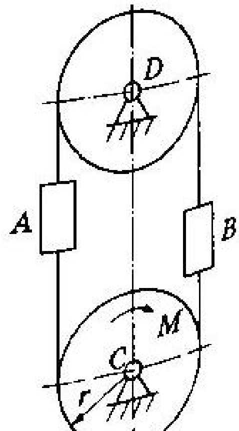
Откуда

$$T = M_2 (g - a_2) = 8(9{,}8 - 2{,}8) = 56 \text{ (Н)}.$$

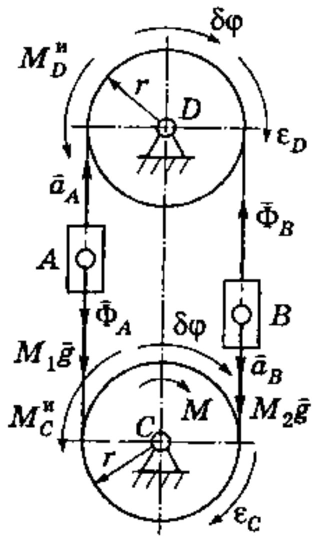
О т в е т: $a_2 = 2{,}8$ м/с^2; $T = 56$ Н.

Задача 47.6

К нижнему шкиву C подъемника приложен вращающий момент M. Определить ускорение груза A массы M_1, поднимаемого вверх, если масса противовеса B равна M_2, а шкивы C и D радиуса r и массы M_3 каждый представляют собой однородные цилиндры. Массой ремня пренебречь.



Решение



Под действием приложенного к нижнему шкиву C вращающего момента M и сил тяжести $M_1\bar{g}$, $M_2\bar{g}$ грузы A и B данной механической системы движутся поступательно. Предположив, что шкивы C и D вращаются ускоренно по часовой стрелке, приложим к грузам силы инерции $\bar{\Phi}_A$ и $\bar{\Phi}_B$, а к шкивам моменты сил инерции $M_C^и$ и $M_D^и$, направив их противоположно соответствующим ускорениям (см. рисунок).

Сообщим шкивам возможное перемещение δφ и составим общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^и = 0,$$

$$(M_2 g - \Phi_B) r\,\delta\varphi - (M_1 g + \Phi_A) r\,\delta\varphi + (M - M_C^и - M_D^и)\delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

Подставим в уравнение (1) значения

$$\Phi_A = M_1 a, \quad \Phi_B = M_2 a,$$

$$M_C^и = I_C \varepsilon_C = \frac{1}{2} M_3 r^2 \frac{a}{r} = \frac{1}{2} M_3 r a,$$

$$M_D^и = I_D \varepsilon_D = \frac{1}{2} M_3 r^2 \frac{a}{r} = \frac{1}{2} M_3 r a,$$

получим

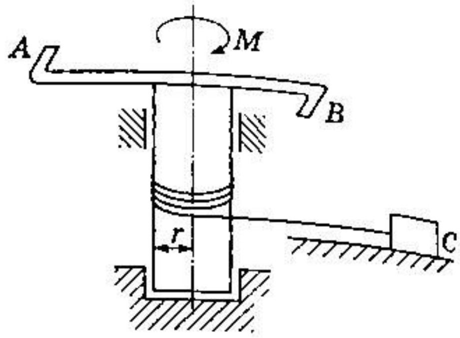
$$[M + (M_2 - M_1) g r - (M_1 + M_2 + M_3) a r]\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, следовательно, нулю равно выражение в квадратных скобках. Откуда

$$a = \frac{M + (M_2 - M_1) g r}{(M_1 + M_2 + M_3) r}.$$

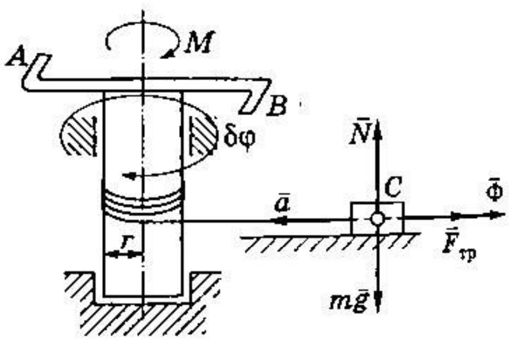
Ответ: $a = \dfrac{M + (M_2 - M_1) g r}{(M_1 + M_2 + M_3) r}$.

Задача 47.7



Вал кабестана — механизма для передвижения грузов — радиуса r приводится в движение постоянным вращающим моментом M, приложенным к рукоятке AB. Определить ускорение груза C массы m, если коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость равен f. Массой каната и кабестана пренебречь.

Решение



К действующим на груз силам: $m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ и вращающему моменту M добавим силу инерции $\bar{\Phi}$ (см. рисунок).

Тогда система сил, приложенных к валу кабестана и грузу, будет уравновешена. Сообщим валу кабестана возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, составим общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^u = 0,$$

$$M\delta\varphi - (F_{тр} + \Phi)r\delta\varphi = 0, \tag{1}$$

где $\Phi = ma$; $F_{тр} = fmg$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$(M - fmgr - mra)\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M - fmgr - mra = 0.$$

Откуда ускорение груза C

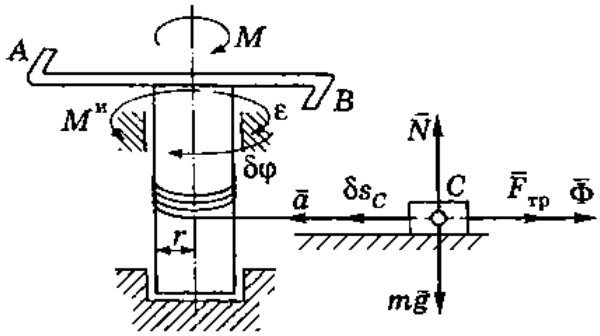
$$a = \frac{M - fmgr}{mr}.$$

Ответ: $a = \dfrac{M - fmgr}{mr}$.

Задача 47.8

Решить предыдущую задачу с учетом массы кабестана, момент инерции которого относительно оси вращения равен I.

Решение



Механическая система будет условно находиться в покое, если к действующим силам: $m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{тр}$ и вращающему моменту M, добавить силу инерции груза $\bar{\Phi}$ и момент сил инерции кабестана $M^и$, направления которых противоположны соответствующим ускорениям.

Сообщим валу кабестана возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, составим общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^и = 0,$$

$$(M - M^и)\delta\varphi - (F_{тр} + \Phi) r\delta\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\Phi = ma$; $F_{тр} = fmg$; $M^и = I\varepsilon = I\dfrac{a}{r}$; $r\delta\varphi = \delta s_C$ — возможное перемещение груза C.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\left[M - fmgr - \left(\frac{I}{r} + mr\right)a\right]\delta\varphi = 0.$$

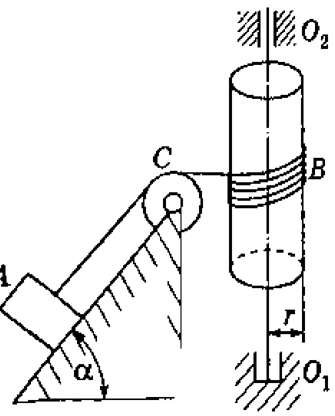
Так как $\delta\varphi \neq 0$, то нулю равно выражение в квадратных скобках. Откуда ускорение груза C

$$a = \frac{r(M - fmgr)}{I + mr^2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{r(M - fmgr)}{I + mr^2}$.

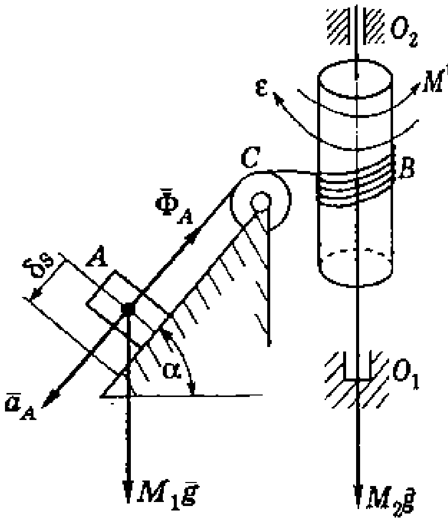
Задача 47.9

Груз A массы M_1, опускаясь по наклонной гладкой плоскости, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством нерастяжимой нити барабан B массы M_2 и радиуса r. Определить угловое ускорение барабана, если считать барабан однородным круглым цилиндром. Массой неподвижного блока C и нити пренебречь.



Решение

Приложим к грузу A и барабану B силы тяжести: $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, силу инерции груза A: Φ_A и момент сил инерции барабана:



$$M^{и} = I_z\varepsilon,$$

где $I_z = \dfrac{M_2r^2}{2}$ — момент инерции барабана относительно оси вращения.

Ускорение груза A

$$a_A = r\,\varepsilon.$$

Сообщим грузу возможное перемещение δs, при этом барабан повернется на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

Запишем общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n}A_k^и = 0,$$

$$M_1 g\delta s\sin a - \Phi_A\delta s - M^{и}\delta\varphi = 0,$$

где $\Phi_A = M_1a_A = M_1r\varepsilon$; $M^{и} = I_z\varepsilon = \dfrac{M_2r^2}{2}\varepsilon.$

Тогда

$$M_1 g\sin\alpha\cdot r\delta\varphi - M_1 r\varepsilon\cdot r\delta\varphi - \frac{M_2 r^2}{2}\varepsilon\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M_1 g\sin\alpha - M_1 r\varepsilon - \frac{M_2}{2} r\varepsilon = 0.$$

Откуда

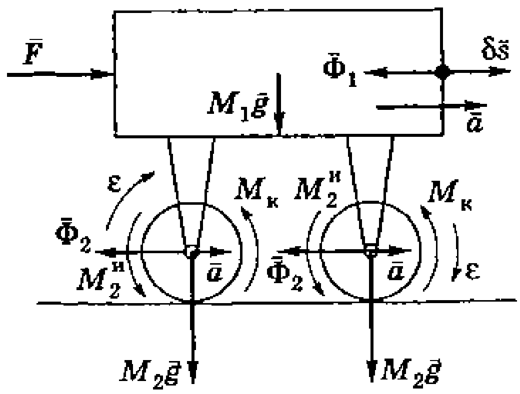
$$\varepsilon = \frac{2M_1 g\sin\alpha}{r(2M_1 + M_2)}.$$

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2M_1 g\sin\alpha}{r(2M_1 + M_2)}$.

Задача 47.10

Человек толкает тележку, приложив к ней горизонтальную силу $\bar{F}$. Определить ускорение кузова тележки, если масса кузова равна M_1, M_2 — масса каждого из четырех колес, r — радиус колес, $f_к$ — коэффициент трения качения. Колеса считать сплошными круглыми дисками, катящимися по рельсам без скольжения.

Решение



Покажем на рисунке силы, приложенные к тележке: силу тяжести кузова $M_1\bar{g}$, силы тяжести $M_2\bar{g}$ каждого колеса, силу инерции $\bar{\Phi}_1$ кузова, главный вектор $\bar{\Phi}_2$, главный момент сил инерции $M_2^и$ и момент сопротивления качению $M_к$ каждого колеса.

Сообщим тележке возможное перемещение δs. Такое же перемещение получит ось каждого колеса, в результате колесо повернется на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

Ускорение тележки a, а угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

Применим общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} A_k^u = 0,$$

$$F\delta s - 4M_к\delta\varphi - \Phi_1\delta s - 4(\Phi_2\delta s + M^и\delta\varphi) = 0, \qquad (1)$$

где $M_к = \left(\dfrac{M_1}{4} + M_2\right) g f_к$; $\Phi_1 = M_1 a$; $\Phi_2 = M_2 a$; $M^и = I\varepsilon = \dfrac{M_2 r^2}{2}\varepsilon = \dfrac{M_2 ra}{2}$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$F\delta s - 4\left(\frac{M_1}{4} + M_2\right) g f_к \cdot \frac{\delta s}{r} - M_1 a \delta s - 4\left(M_2 a + \frac{M_2 ra}{2} \cdot \frac{1}{r}\right)\delta s = 0.$$

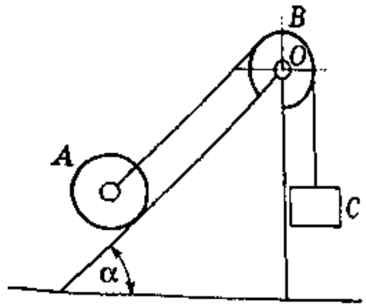
Сократим на δs и решим полученное уравнение относительно a:

$$F - \frac{f_к}{r}(M_1 + 4M_2) g = a(M_1 + 6M_2),$$

$$a = \frac{F - \dfrac{f_к}{r}(M_1 + 4M_2) g}{M_1 + 6M_2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{F - \dfrac{f_к}{r}(M_1 + 4M_2) g}{M_1 + 6M_2}$.

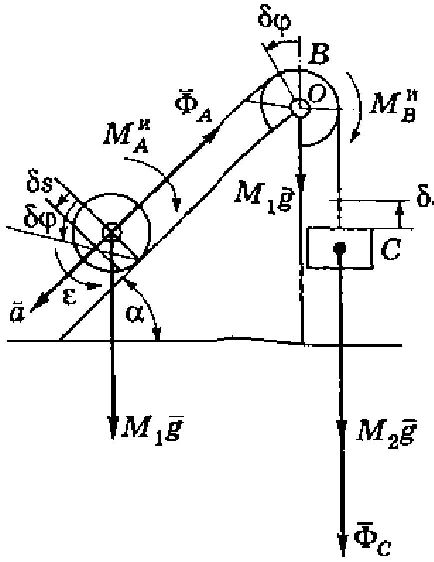
Задача 47.11



Каток A массы M_1, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством нерастяжимой нити, переброшенной через блок B, груз C массы M_2. При этом блок B вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной его плоскости. Каток A и блок B — однородные круглые диски одинаковой массы и радиуса. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. Определить ускорение оси катка. Массой нити пренебречь.

Решение

Покажем на рисунке приложенные к системе заданные активные силы $M_1\bar{g}$ и $M_2\bar{g}$, а также силы инерции $\bar{\Phi}_A$ катка A и $\bar{\Phi}_C$ груза C и моменты сил инерции $M_A^и$ катка и $M_B^и$ блока, выразив их через искомое ускорение оси катка:



$$\Phi_A = M_1 a,$$

$$\Phi_C = M_2 a,$$

$$M_A^и = M_B^и = \frac{M_1 r^2}{2}\,\frac{a}{r} = \frac{M_1 a r}{2},$$

где I — момент инерции относительно оси катка (блока) $\left(I = \dfrac{M_1 r^2}{2}\right)$;

$\frac{a}{r} = \varepsilon$ — угловое ускорение катка (блока).

Сообщим оси катка возможное перемещение δs, груз C получит такое же перемещение, а каток и блок повернутся на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}. \qquad (1)$$

Запишем общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^и = 0$$

или в развернутом виде

$$M_1 g \sin\alpha \cdot \delta s - M_2 g \delta s - \Phi_A \delta s - M_A^и \delta\varphi - M_B^и \delta\varphi - \Phi_C \delta s = 0. \qquad (2)$$

Подставим в уравнение (2) выражения сил инерции и моментов сил инерции тел, а также выражение (1). Тогда уравнение (1) примет вид

$$M_1 g \sin\alpha \cdot \delta s - M_2 g \delta s - M_1 a \delta s - \frac{M_1 a r}{2}\,\frac{\delta s}{r} - \frac{M_1 a r}{2}\,\frac{\delta s}{r} - M_2 a \delta s = 0. \quad (3)$$

Сократим уравнение (3) на $\delta s \neq 0$ и решим его относительно a:

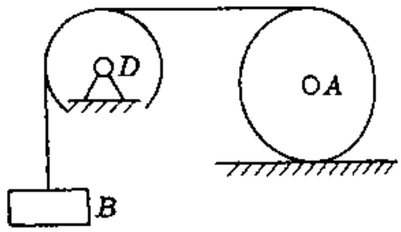
$$(M_1 \sin\alpha - M_2)g = a(2M_1 + M_2),$$

$$a = g\frac{M_1 \sin\alpha - M_2}{2M_1 + M_2}.$$

Ответ: $a = g\dfrac{M_1 \sin\alpha - M_2}{2M_1 + M_2}$.

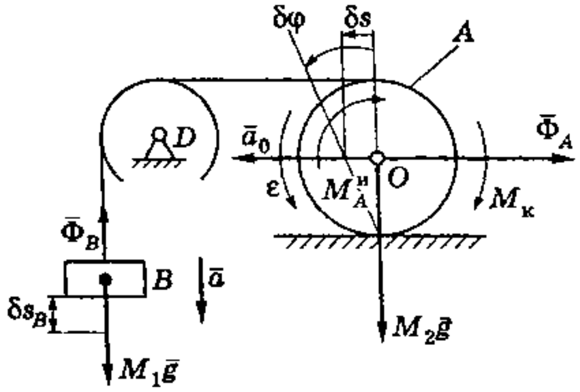
Задача 47.12

Груз B массы M_1 приводит в движение цилиндрический каток A массы M_2 и радиуса r при помощи нити, намотанной на каток. Определить ускорение груза B, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен $f_к$. Массой блока D пренебречь.



Решение

Покажем на рисунке приложенные к системе силы: силы тяжести $M_1\bar{g}$ груза B и $M_2\bar{g}$ катка A, момент сопротивления качению катка $M_к$, силы инерции $\bar{\Phi}_B$ груза B и $\bar{\Phi}_A$ катка A, момент сил инерции катка $M_A^и$. Под действием этих сил система условно будет находиться в равновесии.



Сообщим грузу B возможное перемещение $\delta s_B = \delta s$. Ось катка при этом переместится на

$$\delta s_0 = \frac{\delta s}{2},$$

каток повернется на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_0}{r} = \frac{\delta s}{2r}.$$

Запишем общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^и = 0$$

или в развернутом виде

$$M_1 g\delta s - M_к \delta\varphi - \Phi_B \delta s - \Phi_A \frac{\delta s}{2} - M_A^и \delta\varphi = 0. \quad (1)$$

Определим силы инерции груза и катка:

$$\Phi_B = M_1 a_B = M_1 a,$$

$$\Phi_A = M_2 a_0 = M_2 \frac{a}{2},$$

момент сил инерции катка

$$M_A^и = I_0 \varepsilon \left| \begin{array}{l} I_0 = \dfrac{M_2 r^2}{2} \\ \varepsilon = \dfrac{a_0}{r} = \dfrac{a}{2r} \end{array} \right| = \frac{M_2 r a}{4}$$

и момент сопротивления качению

$$M_к = M_2 g f_к.$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (1):

$$M_1 g\delta s - M_2 g f_к \frac{\delta s}{2r} - M_1 a\delta s - M_2 \frac{a}{2}\frac{\delta s}{2} - \frac{M_2 a r}{4}\frac{\delta s}{2r} = 0. \quad (2)$$

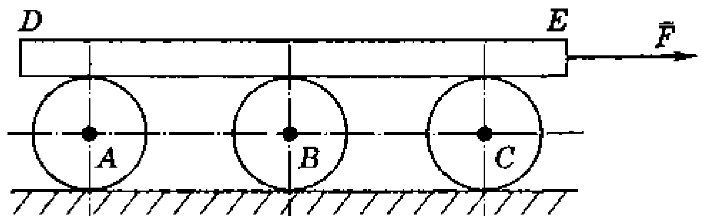
Сократим уравнение (2) на $\delta s \neq 0$ и решим его относительно a:

$$\left(M_1 - M_2 \frac{f_к}{2r}\right) g = a\left(M_1 + \frac{3}{8} M_2\right),$$

$$a = 8g \frac{M_1 - \dfrac{f_к}{2r} M_2}{8M_1 + 3M_2}.$$

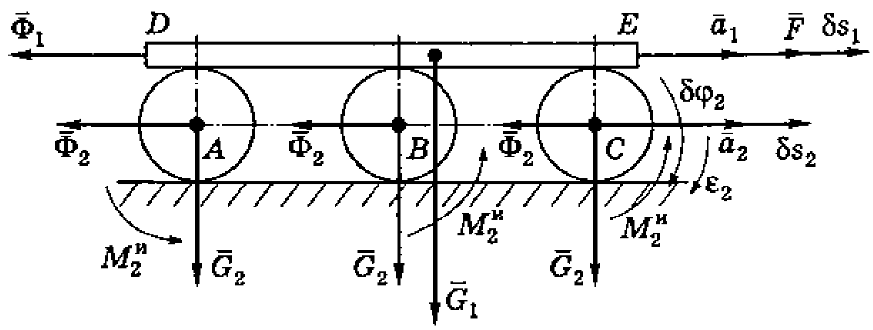
Задача 47.13

Стержень DE массы M_1 лежит на трех катках A, B и C массы M_2 каждый. К стержню приложена по горизонтали вправо сила $\bar{F}$, приводящая в движение стержень и катки. Скольжение между стержнем и катками и также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует. Найти ускорение стержня DE. Катки считать однородными круглыми цилиндрами.



Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке активные силы: силы тяжести катков $\bar{G}_2$, силу тяжести стержня $\bar{G}_1$.



Приложим силы инерции: стержень DE движется поступательно и его сила инерции

$$\Phi_1 = M_1 a_1,$$

катки совершают плоскопараллельное движение, их силы инерции

$$\Phi_2 = M_2 a_2$$

а моменты сил инерции

$$M_2^{\text{и}} = I_2 \varepsilon_2.$$

Сообщим системе возможное перемещение δs_1 и составим общее уравнение динамики:

$$F\delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - 3\Phi_2 \delta s_2 - 3M_2^{\text{и}} \delta\varphi_2 = 0. \qquad (1)$$

Выразим все возможные перемещения через δs_1:

$$\delta s_2 = \frac{\delta s_1}{2},$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_1}{2r},$$

где r — радиус катков.

Определим силы инерции:

$$\Phi_1 = M_1 a_1,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2 \frac{a_1}{2},$$

так как $a_2 = \dfrac{a_1}{2}$.

Момент силы инерции катка

$$M_2^{\text{и}} = I_2 \varepsilon_2,$$

где $I_2 = \dfrac{M_2 r^2}{2}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{a_1}{2r}$.

Тогда

$$M_2^{\text{и}} = \frac{M_2 r^2}{2} \frac{a_1}{2r} = \frac{M_2 r a_1}{4}.$$

Подставим найденные значения в уравнение (1):

$$F\delta s_1 - M_1 a_1 \delta s_1 - 3M_2 \frac{a_1}{2} \frac{\delta s_1}{2} - 3\frac{M_2 r a_1}{4} \frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

откуда

$$F = a_1\left(M_1 + \frac{3}{4}M_2 + \frac{3}{8}M_2\right) = \frac{a_1}{8}(8M_1 + 9M_2),$$

$$a_1 = \frac{8F}{8M_1 + 9M_2}.$$

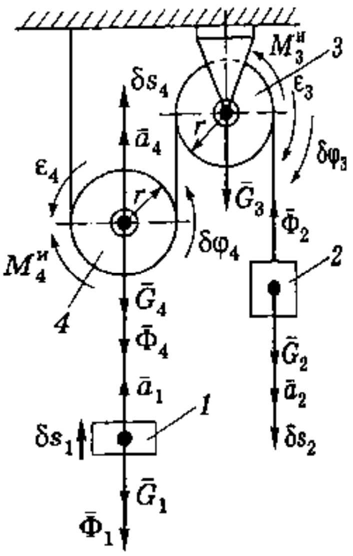
Ответ: $a_1 = \dfrac{8F}{8M_1 + 9M_2}.$

Задача 47.14

Определить ускорение груза M_2, рассмотренного в задаче 47.5, с учетом массы блоков — сплошных однородных дисков массы 4 кг каждый.

Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке активные силы: силы тяжести грузов $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$, блоков $\bar{G}_3$ и $\bar{G}_4$. Приложим также силы инерции. Грузы движутся поступательно. Их силы инерции:



$$\Phi_1 = m_1 a_1,$$

$$\Phi_2 = m_2 a_2.$$

Блок *3* вращается вокруг неподвижной оси и момент сил инерции

$$M_3^и = I_3 \varepsilon_3.$$

Блок *4* совершает плоскопараллельное движение и его сила инерции

$$\Phi_4 = m_4 a_4,$$

а момент сил инерции

$$M_4^и = I_4 \varepsilon_4.$$

Сообщим системе возможное перемещение и составим общее уравнение динамики:

$$G_2\delta s_2 - \Phi_2 \delta s_2 - M_3^и \delta\varphi_3 - \Phi_4 \delta s_4 - M_4^и \delta s_4 -$$

$$- G_4 \delta s_4 - G_1 \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 = 0. \qquad (1)$$

Выразим все возможные перемещения через возможное перемещение δs_2 груза *2*:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{r},$$

$$\delta s_4 = \frac{\delta s_2}{2} = \delta s_1,$$

$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_2}{2r},$$

где r — радиус блоков *3* и *4*.

Выразим все силы инерции и моменты сил инерции через a_2. Так как

$$I_3 = \frac{m_3 r^2}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_2}{r}, \quad a_4 = \frac{a_2}{2}, \quad I_4 = \frac{m_4 r^2}{2}, \quad \varepsilon_4 = \frac{a_2}{2r}, \quad a_1 = \frac{a_2}{2},$$

то

$$M_3^{\text{и}} = \frac{m_3 r^2}{2}\frac{a_2}{r} = \frac{m_3 r a_2}{2};$$

$$\Phi_4 = m_4 \frac{a_2}{2};$$

$$M_4^{\text{и}} = \frac{m_4 r^2}{2}\,\frac{a_2}{2r} = \frac{m_4 r a_2}{4};$$

$$\Phi_1 = m_1 \frac{a_2}{2}.$$

Подставим все найденные значения в уравнение (1) и получим

$$m_2 g\delta s_2 - m_2 a_2 \delta s_2 - m_3 \frac{r a_2}{2}\,\frac{\delta s_2}{r} - m_4 \frac{a_2}{2}\,\frac{\delta s_2}{2} - m_4 \frac{r a_2}{4}\,\frac{\delta s_2}{2r} -$$

$$- m_4 g \frac{\delta s_2}{2} - m_1 g \frac{\delta s_2}{2} - m_1 \frac{a_2}{2}\,\frac{\delta s_2}{2} = 0. \qquad (2)$$

Сократим уравнение (2) на $\delta s_2 \neq 0$ и запишем его в виде

$$m_2 g - m_4 \frac{g}{2} - m_1 \frac{g}{2} = a_2\left(m_2 + \frac{m_3}{2} + \frac{m_4}{4} + \frac{m_4}{8} + \frac{m_1}{4}\right)$$

или

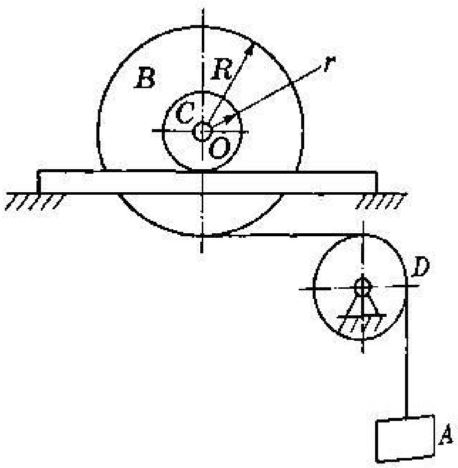
$$\frac{g}{2}(2m_2-m_4-m_1)=\frac{a_2}{8}(8m_2+4m_3+3m_4+2m_1).$$

Откуда

$$a_2=\frac{4g(2m_2-m_1-m_4)}{8m_2+4m_3+3m_4+2m_1}=\frac{4\cdot 9{,}8(2\cdot 8-10-4)}{8\cdot 8+4\cdot 4+3\cdot 4+2\cdot 10}=0{,}7\ (\text{м/с}^2).$$

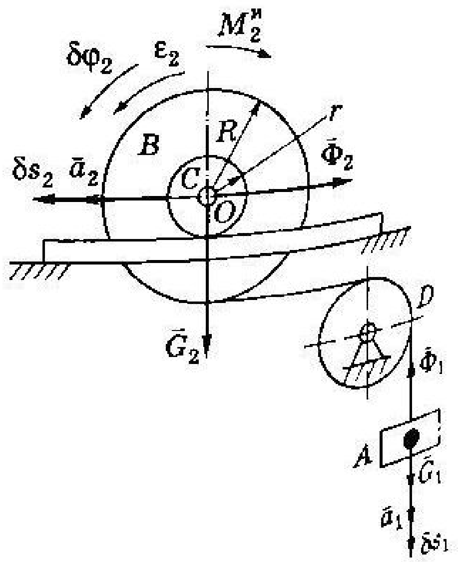
Ответ: $a_2=0{,}7$ м/с^2.

Задача 47.15



Груз A массы M_1, опускаясь вниз, посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок D и намотанной на шкив B, заставляет вал C катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив B радиуса R жестко насажен на вал C радиуса r, их общая масса равна M_2, а радиус инерции относительно оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, равен ρ.

Найти ускорение груза A. Массой нити и блока пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке активные силы: силы тяжести тел $\bar{G}_1$ и $\bar{G}_2$. Приложим силы инерции. Груз A движется поступательно, поэтому его сила инерции

$$\Phi_1=M_1a_1.$$

Шкив с валом совершают плоскопараллельное движение, их сила инерции

$$\Phi_2=M_2a_2,$$

момент сил инерции

$$M_2^{\text{и}} = I_2\varepsilon_2.$$

Сообщим системе возможное перемещение и составим общее уравнение динамики:

$$G_1\delta s_1 - \Phi_1\delta s_1 - \Phi_2\delta s_2 - M_2^{\text{и}}\delta\varphi_2 = 0. \tag{1}$$

Выразим все возможные перемещения через возможное перемещение δs_1 груза A:

$$\delta s_2 = \delta s_1\frac{r}{R-r},$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R-r}.$$

Так как

$$a_2 = a_1\frac{r}{R-r},\ I_2 = M_2\rho^2 \text{ и } \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R-r},$$

то

$$\Phi_2 = \frac{M_2 r}{R-r}a_1;$$

$$M_2^{\text{и}} = M_2\frac{\rho^2 a_1}{R-r}.$$

Подставим эти значения в уравнение (1) и получим

$$M_1 g\delta s_1 - M_1 a_1\delta s_1 - M_2\frac{ra_1}{R-r}\,\frac{r}{R-r}\delta s_1 - M_2\frac{\rho^2 a_1}{R-r}\,\frac{\delta s_1}{R-r} = 0. \tag{2}$$

Сократим уравнение (2) на $\delta s_1 \neq 0$ и запишем его в виде

$$M_1 g = a_1\left[M_1 + \frac{M_2}{(R-r)^2}(\rho^2 + r^2)\right],$$

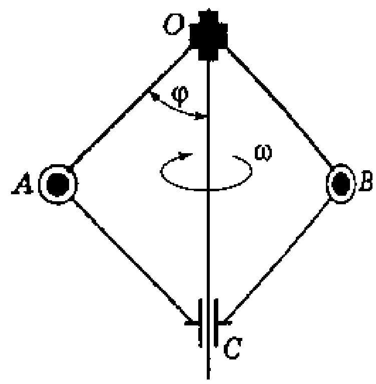
откуда

$$a_1 = \frac{M_1 g}{M_1 + M_2\dfrac{\rho^2 + r^2}{(R-r)^2}} = g\frac{M_1(R-r)^2}{M_1(R-r)^2 + M_2(\rho^2 + r^2)}.$$

Ответ: $a_1 = g\dfrac{M_1(R-r)^2}{M_1(R-r)^2 + M_2(\rho^2 + r^2)}.$

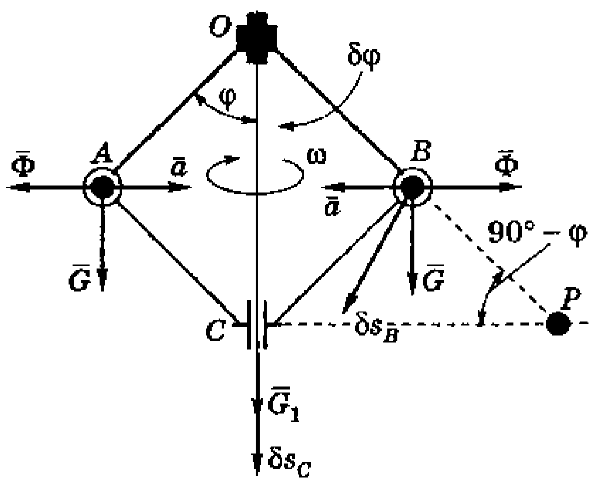
Задача 47.16

Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить угол отклонения стержней OA и OB от вертикали, принимая во внимание только массу M каждого из шаров и массу M_1 муфты C, все стержни имеют одинаковую длину l.



Решение

Рассмотрим движение данной системы. Покажем на рисунке активные силы: силы тяжести $\overline{G}$ шаров и $\overline{G}_1$ муфты.



Приложим к шарам силы инерции

$$\overline{\Phi} = -M\overline{a},$$

где $a = a_ц = \omega^2 l \sin\varphi$.

Ускорение муфты C равно нулю, так как она не перемещается, поэтому ее сила инерции равна нулю.

Сообщим системе возможное перемещение и составим общее уравнение динамики.

Возможную работу сил $\overline{G}$ и $\overline{\Phi}$ определим как произведение моментов этих сил на угол поворота $\delta\varphi$:

$$2Gl\sin\varphi \cdot \delta\varphi - 2\Phi l\cos\varphi \cdot \delta\varphi + G_1\delta s_C = 0. \qquad (1)$$

Выразим возможное перемещение δs_C муфты C через $\delta\varphi$:

$$\delta s_B = l\delta\varphi,$$

$$\delta s_C = \delta s_B \cdot \frac{CP}{BP}, \tag{2}$$

где CP и BP — расстояния до точки P — мгновенного центра вращения стержня CB в относительном движении:

$$CP = OP \cdot \sin\varphi = 2l\sin\varphi,$$

$$BP = l,$$

тогда

$$\delta s_C = l\,\delta\varphi\frac{2l\sin\varphi}{l} = 2l\sin\varphi\cdot\delta\varphi.$$

Сила инерции

$$\Phi = Ma,$$

где $a = \omega^2 l\sin\varphi = 2l\sin\varphi$.

Тогда

$$\Phi = M\omega^2 l\sin\varphi. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$2Mgl\sin\varphi\cdot\delta\varphi - 2M\omega^2 l\sin\varphi\cdot l\cos\varphi\cdot\delta\varphi + 2M_1 gl\sin\varphi\cdot\delta\varphi = 0.$$

После преобразования получим

$$Mg - M\omega^2 l\cos\varphi + M_1 g = 0,$$

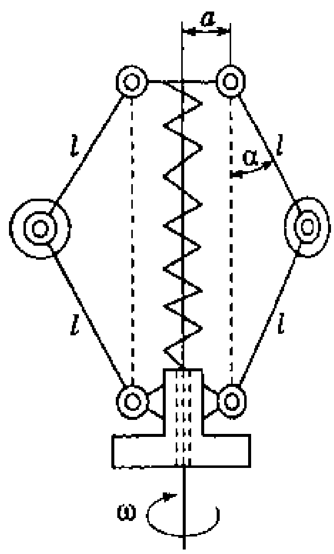
откуда

$$\cos\varphi = \frac{(M+M_1)g}{Ml\omega^2}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{(M+M_1)g}{Ml\omega^2}$.

Задача 47.17

Центробежный регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти зависимость между угловой скоростью регулятора и углом α отклонения его стержней от вертикали, если муфта массы M_1 отжимается вниз пружиной, находящейся при $\alpha = 0$ в недеформированном состоянии и закрепленной верхним концом на оси регулятора; массы шаров равны M_2, длина стержней равна l, оси подвеса стержней отстоят от оси регулятора на расстоянии a; массами стержней и пружины пренебречь. Коэффициент жесткости пружины равен c.



Решение

Механическая система имеет одну степень свободы. Применим общее уравнение динамики в виде

$$\sum_{k=1}^{n}[(F_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k]=0, \qquad (1)$$

где F_{kx}, F_{ky} — проекции активных сил на оси координат; Φ_{kx}, Φ_{ky} – проекции сил инерции на оси координат; δx_k, δy_k — вариации координат.

Покажем на рисунке активные силы: $\bar{G}_1, \bar{G}_2$, $\bar{F}_{упр}$ и центробежные силы инерции $\bar{\Phi}_2^{ц}$ шаров.

Сила инерции муфты равна нулю, так как регулятор вращается равномерно и муфта не перемещается.

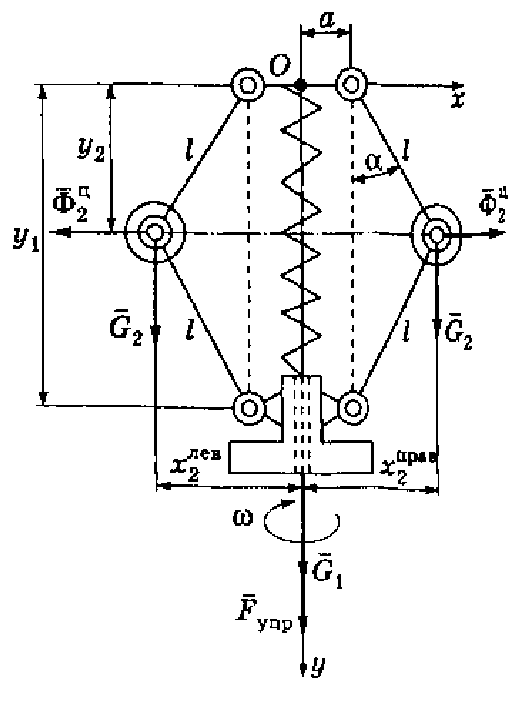
Центробежные силы инерции шаров

$$\Phi_2^{ц} = M_2(a + l\sin\alpha)\omega^2.$$

Сила упругости пружины

$$F_{упр} = c\lambda,$$

где $\lambda = 2l(1 - \cos\alpha)$.



Тогда

$$F_{\text{упр}} = 2cl(1 - \cos\alpha).$$

Выразим координаты точек приложения сил в зависимости от угла α, выбрав начало координат в точке O:

$$\left.\begin{aligned} x_2^{\text{прав}} &= a + l\sin\alpha, \quad y_1 = 2l\cos\alpha, \\ x_2^{\text{лев}} &= -(a + l\sin\alpha), \quad y_2 = l\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Варьируя зависимости (2), получим

$$\left.\begin{aligned} \delta x_2^{\text{прав}} &= l\cos\alpha\cdot\delta\alpha, \quad \delta y_1 = -2l\sin\alpha\cdot\delta\alpha; \\ \delta x_2^{\text{лев}} &= -l\cos\alpha\cdot\delta\alpha, \quad \delta y_2 = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Запишем уравнение (1) в развернутом виде:

$$G_1\,\delta y_1 + 2G_2\,\delta y_2 + \Phi_2^{\text{ц}}\,\delta x_2^{\text{прав}} - \Phi_2^{\text{ц}}\,\delta x_2^{\text{лев}} + F_{\text{упр}}\delta y_1 = 0$$

или с учетом выражений (3)

$$-2G_1 l\sin\alpha\cdot\delta\alpha - 2G_2 l\sin\alpha\cdot\delta\alpha + 2M_2(\alpha + l\sin\alpha)\omega^2 l\cos\alpha\cdot\delta\alpha -$$

$$-2cl(1-\cos\alpha)\cdot 2l\sin\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

Сократив на $\delta\alpha \neq 0$ и на $2l$, получим

$$-G_1\sin\alpha - G_2\sin\alpha + m_2\,(\alpha + l\sin\alpha)\omega^2\cos\alpha - 2cl(1-\cos\alpha)\sin\alpha = 0,$$

где $G_1 = M_1 g$, $G_2 = M_2 g$.

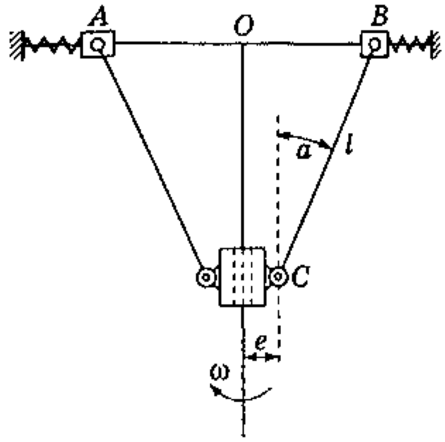
Откуда

$$\omega^2 = \frac{(M_1 + M_2)g + 2cl(1-\cos\alpha)}{M_2(a + l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{(M_1 + M_2)g + 2cl(1-\cos\alpha)}{M_2(a + l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha.$

Задача 47.18

Центробежный пружинный регулятор состоит из двух грузов A и B массы M каждый, насаженных на скрепленный со шпинделем регулятора гладкий горизонтальный стержень, муфты C массы M_1, тяг длин l и пружин, отжимающих грузы к оси вращения; расстояние шарниров тяг от оси шпинделя равно e; c — коэффициент жесткости пружин. Определить угловую скорость регулятора при угле раствора α, если при угле α_0, где $\alpha_0 < \alpha$, пружины находятся в ненапряженном состоянии; массой тяг и трением пренебречь.



Решение

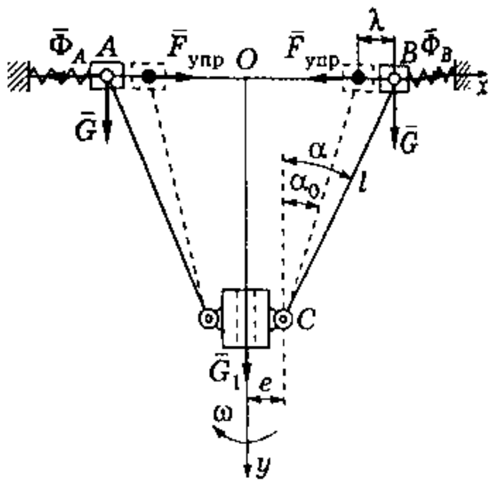
Механическая система имеет одну степень свободы. Применим общее уравнение динамики в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k\right]=0, \tag{1}$$

где F_{kx}, F_{ky} — проекции активных сил на оси координат; Φ_{kx}, Φ_{ky} – проекции сил инерции на оси координат; δx_k, δy_k — вариации координат.

Покажем на рисунке активные силы: $\bar{G}_1, \bar{G}, \bar{F}_{упр}$ и силы инерции: $\bar{\Phi}_A$, $\bar{\Phi}_B$. В данном случае

$$\Phi_A = \Phi_B = \Phi = M(e + l\sin\alpha)\omega^2.$$



Сила инерции $\bar{\Phi}_C$ муфты C равна нулю, так как в указанном положении механизма муфта не перемещается и, следовательно, ее ускорение равно нулю.

Сила упругости пружин

$$F_{упр} = c\lambda,$$

где $\lambda = l(\sin\alpha - \sin\alpha_0)$.

Тогда

$$F_{\text{упр}} = cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0).$$

Выразим координаты точек приложения сил в зависимости от угла α, выбрав начало координат в точке O:

$$x_B = e + l\sin\alpha,$$

$$y_C = l\cos\alpha,$$

$$x_A = -(e + l\sin\alpha).$$

Варьируя эти зависимости, получим

$$\delta x_B = l\cos\alpha\cdot\delta\alpha,$$

$$\delta y_C = -l\sin\alpha\cdot\delta\alpha,$$

$$\delta x_A = -(l\cos\alpha\cdot\delta\alpha).$$

Запишем уравнение (1) в развернутом виде:

$$G_1\delta y_C + \Phi_B\delta x_B - \Phi_A\delta x_A - F_{\text{упр}}\delta x_B + F_{\text{упр}}\delta x_A = 0$$

или

$$-G_1 l\sin\alpha\cdot\delta\alpha + 2M(e + l\sin\alpha)\,\omega^2 l\cos\alpha\cdot\delta\alpha -$$

$$-2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)\,l\cos\alpha\cdot\delta\alpha = 0. \qquad (2)$$

Так как $\delta\alpha \neq 0$, то, сократив уравнение (2) на $\delta\alpha$ и на l, получим.

$$-G_1\sin\alpha + 2M(e + l\sin\alpha)\,\omega^2\cos\alpha - 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)\cos\alpha = 0.$$

Откуда

$$\omega^2 = \frac{G_1\sin\alpha + 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)\cos\alpha}{2M(e + l\sin\alpha)\cos\alpha}.$$

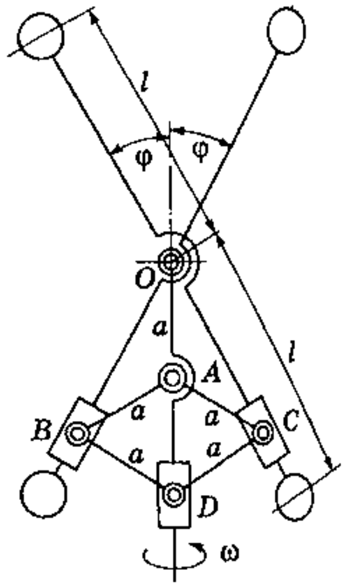
Сократим это выражение на $\cos\alpha$ и с учетом того, что $G_1 = M_1 g$, найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{M_1 g\,\operatorname{tg}\alpha + 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{2M(e + l\sin\alpha)}}.$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{M_1 g\,\operatorname{tg}\alpha + 2cl(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{2M(e + l\sin\alpha)}}.$

Задача 47.19

В регуляторе четыре груза одинаковой массы M_1 находятся на концах двух равноплечих рычагов длины $2l$, которые могут вращаться в плоскости регулятора вокруг конца шпинделя O и образуют с осью шпинделя переменный угол φ. В точке A, находящейся от конца шпинделя O на расстоянии $OA = a$, со шпинделем шарнирно соединены рычаги AB и AC длины a, которые в точках B и C в свою очередь сочленены со стержнями BD и CD длины a, несущими муфту D. В точках B и C имеются ползунки, скользящие вдоль рычагов, несущих грузы. Масса муфты равна M_2. Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти связь между углом φ и угловой скоростью ω в равновесном положении регулятора.



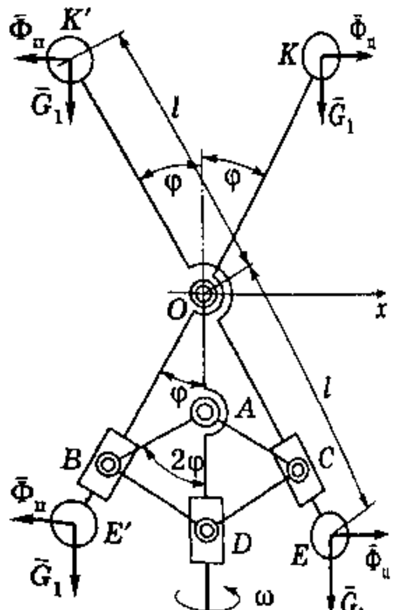
Решение

Механическая система имеет одну степень свободы.

Применим общее уравнение динамики в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\delta x_k+(F_{ky}+\Phi_{ky})\delta y_k\right]=0, \quad (1)$$

где F_{kx}, F_{ky} — проекции активных сил на оси координат; Φ_{kx}, Φ_{ky} — проекции сил инерции на оси координат; δx_k, δy_k — вариации координат.



Покажем на рисунке активные силы: $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$ и центробежные силы инерции $\bar{\Phi}_ц$ шаров:

$$\Phi_ц = M_1 l\omega^2 \sin\varphi. \quad (2)$$

Выразим координаты грузов E, K и E', K' в зависимости от угла φ, выбрав начало координат в точке O:

$$\left.\begin{aligned} &x^{\text{прав}} = l\sin\varphi,\ \ x^{\text{лев}} = -l\sin\varphi,\\ &y_{E,E'} = l\cos\varphi,\ \ y_{K,K'} = -l\cos\varphi,\\ &y_D = a + 2a\sin(90^\circ - 2\varphi) = a + 2a\cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Варьируя зависимости (3), получим

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^{\text{прав}} = l\cos\varphi\cdot\delta\varphi,\ \delta x^{\text{лев}} = -l\cos\varphi\cdot\delta\varphi,\\ &\delta y_{K,K'} = l\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\\ &\delta y_D = -4a\sin 2\varphi\cdot\delta\varphi,\ \delta y_{E,E'} = -l\sin\varphi\cdot\delta\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Запишем уравнение (1) в развернутом виде:

$$2G_1\delta y_K + 2G_1\delta y_E - G_2\delta y_D + 2\Phi_\text{ц}\delta x^{\text{прав}} - 2\Phi_\text{ц}\delta x^{\text{лев}} = 0$$

или с учетом выражений (2) и (4)

$$2G_1 l\sin\varphi\cdot\delta\varphi - 2G_1 l\sin\varphi\cdot\delta\varphi + G_2(-4a\ \sin 2\varphi)\delta\varphi +$$
$$+ 4M_1 l\,\omega^2 l\sin\varphi\cos\varphi\cdot\delta\varphi = 0.$$

После преобразований получим

$$-4G_2\,a\sin 2\varphi + 2M_1\,l^2\omega^2\sin 2\varphi = 0,$$

так как $\delta\varphi \neq 0$.

Тогда

$$\omega^2 = \frac{2G_2\,a}{M_1 l^2} = \frac{2M_2\,g\,a}{M_1 l^2},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{2gM_2\,a}{M_1 l^2}}.$$

Ответ: равновесное положение регулятора возможно только при $\omega = \sqrt{\dfrac{2gM_2\,a}{M_1 l^2}}$ независимо от угла φ.

48. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Методические указания к решению задач

Уравнения Лагранжа 2-го рода выводятся из общего уравнения динамики путем его преобразования в уравнение в обобщенных координатах и для механической системы с голономными, идеальными и удерживающими связями имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j^a, \quad j=1,2,\ldots,S, \tag{48.1}$$

где $q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_S$ — обобщенные координаты; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_j=\frac{dq_j}{dt}, \ldots, \dot{q}_S$ — обобщенные скорости; S — число степеней свободы механической системы; T — кинетическая энергия системы; $Q_1^a, \ldots, Q_j^a, \ldots, Q_S^a$ — обобщенные силы активных сил.

Для консервативных (потенциальных) систем уравнения (48.1) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=1,2,\ldots,S. \tag{48.2}$$

Введем *функцию Лагранжа* (кинетический потенциал), равную разности кинетической T и потенциальной энергии Π системы:

$$L = T - \Pi. \tag{48.3}$$

Так как потенциальная энергия системы не зависит от обобщенных скоростей, то уравнения (48.2) можно записать также в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,S. \tag{48.4}$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода целесообразно применять к исследованию движения механических систем. Подобно тому как второй закон динамики для материальной точки используется при составлении дифференциальных уравнений движения материальных точек.

Так и уравнения Лагранжа 2-го рода являются тем математическим аппаратом, с помощью которого могут быть составлены дифференциальные уравнения движения механической системы.

Последовательность решения задач данного параграфа:

1. Определить число степеней свободы механической системы.

2. Выбрать обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы механической системы.

3. Записать общие выражения уравнений Лагранжа 2-го рода согласно формуле (48.1) для всех обобщенных координат.

4. Определить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные скорости и обобщенные координаты.

5. Найти все частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам q_j и обобщенным скоростям $\dot{q}_j$, т.е. $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ и $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, а также производные по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right).$$

6. Определить обобщенные силы активных сил [см. формулы (XI.10) и (XI.11)].

7. Подставить найденные выражения указанных производных и обобщенных сил в уравнения Лагранжа 2-го рода.

8. Из полученной системы дифференциальных уравнений, если механическая система имеет несколько степеней свободы, или из одного дифференциального уравнения для системы с одной степенью свободы найти искомое линейное или угловое ускорение тела либо, если дифференциальные уравнения (уравнение) можно проинтегрировать, определить закон движения тела.

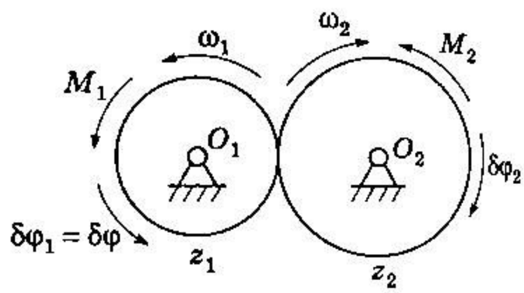
9. Если на механическую систему действуют консервативные силы, то уравнения Лагранжа 2-го рода записываются в виде (48.2) или (48.4). Для составления дифференциальных уравнений движения механической системы необходимо определить потенциальную энергию системы и найти соответствующие производные: $\frac{\partial L}{\partial q_j}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$, или продифференцировать выражения кинетической и потенциальной энергий, входящие в уравнения Лагранжа и записанные в виде (48.2).

Задачи и решения

Задача 48.1

Передача вращения между двумя валами осуществляется двумя зубчатыми колесами, имеющими соответственно z_1 и z_2 зубцов, моменты инерции валов с насаженными на них колесам соответственно равны I_1 и I_2. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а на другой вал — момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.

Решение



Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. Для составления уравнения ее движения используем уравнения Лагранжа 2-го рода, приняв за обобщенную координату угол поворота первого вала (см. рисунок): $q_1 = \varphi_1 = \varphi$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

Определим входящую в уравнение (1) кинетическую энергию системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2. \qquad (2)$$

Для данной механической системы

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi},$$

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2}\dot{\varphi} = i\dot{\varphi},$$

где $i = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Тогда выражении (2) примет вид

$$T = \frac{1}{2}(I_1 + i^2 I_2)\dot{\varphi}^2.$$

Определим частные производные от кинетической энергии и производную по времени:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=(I_1+i^2 I_2)\dot{\varphi},\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=(I_1+i^2 I_2)\ddot{\varphi},\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Для определения обобщенной силы Q_φ сообщим системе возможное перемещение и с учетом того, что $\delta\varphi_2 = i\delta\varphi$, найдем элементарную работу:

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = (M_1 - iM_2)\delta\varphi.$$

Тогда

$$Q_\varphi = M_1 - iM_2. \qquad (4)$$

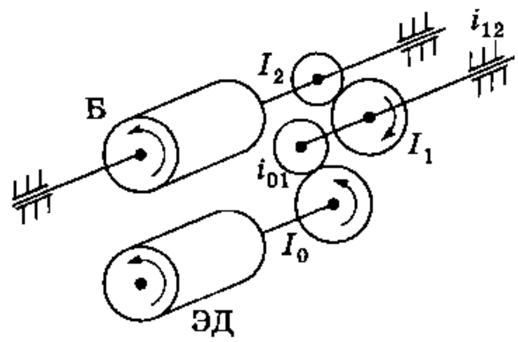
Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (1) и получим уравнение движения первого вала

$$(I_1+i^2 I_2)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2.$$

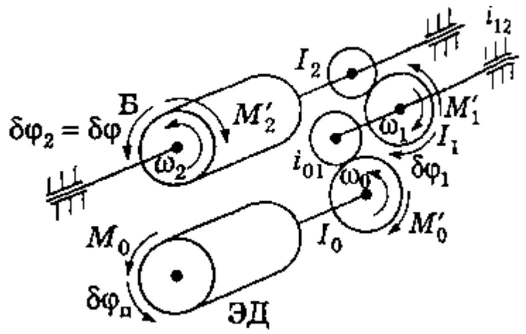
Ответ: $(I_1+i^2 I_2)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2$, где $i = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Задача 48.2

Барабан Б центрифуги приводится во вращение электродвигателем ЭД через двухступенчатый редуктор. Заданы моменты инерции I_0 электродвигателя, момент инерции I_2 барабана, момент инерции I_1 промежуточного вала редуктора, передаточные числа i_{01} и i_{12} ступеней редуктора. К ротору электродвигателя приложен вращающийся момент M_0 и момент сил сопротивления M_0', к валу редуктора и к барабану — моменты сил сопротивления M_1' и M_2' соответственно. Составить дифференциальное уравнение вращения центрифуги.



Решение



Приняв за обобщенную координату угол поворота барабана центрифуги $q = \varphi_2 = \varphi$, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода для данной механической системы, имеющей одну степень свободы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

Определим кинетическую энергию системы:

$$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

где $T_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$; $T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$; $T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$.

Так как $\omega_2 = \dot\varphi$, $\omega_1 = i_{12}\dot\varphi$, $\omega_0 = i_{01}\omega_1$, получим

$$T = \frac{1}{2}(I_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + I_1 i_{12}^2 + I_2)\,\dot\varphi^2.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = (I_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + I_1 i_{12}^2 + I_2)\ddot\varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \qquad (2)$$

Для определения обобщенной силы найдем элементарную работу

$$\delta A = (M_0 - M'_0)\delta\varphi_0 - M'_1\delta\varphi_1 - M'_2\delta\varphi = \left[(M_0 - M'_0)i_{01}i_{12} - M'_1 i_{12} - M'_2\right]\delta\varphi,$$

где $\delta\varphi_0 = i_{01}i_{12}\delta\varphi$; $\delta\varphi_1 = i_{12}\delta\varphi$ (аналогично соотношению угловых скоростей).

Тогда

$$Q_\varphi = (M_0 - M'_0)\, i_{01}i_{12} - M'_1 i_{12} - M'_2. \qquad (3)$$

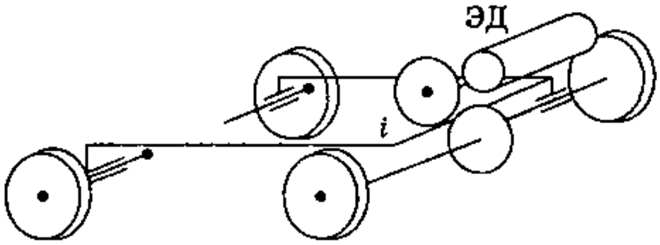
Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим искомое дифференциальное уравнение вращения барабана центрифуги:

$$(I_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + I_1 i_{12}^2 + I_2)\ddot\varphi = (M_0 - M'_0)i_{01}i_{12} - M'_1 i_{12} - M'_2.$$

Ответ: $(I_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + I_1 i_{12}^2 + I_2)\ddot\varphi = (M_0 - M'_0)i_{01}i_{12} - M'_1 i_{12} - M'_2$.

Задача 48.3

Привод электромобиля состоит из электродвигателя ЭД и одноступенчатого редуктора с передаточным числом i. Составить дифференциальное уравнение движения электромобиля, если I_0 — момент инерции ротора электродвигателя, I_1 — момент инерции каждого из четырех колес, имеющих радиус r, m — суммарная масса электромобиля, M — вращающий момент электродвигателя, M' — момент сил сопротивления на валу электродвигателя, F — суммарная сила сопротивления движению электромобиля.

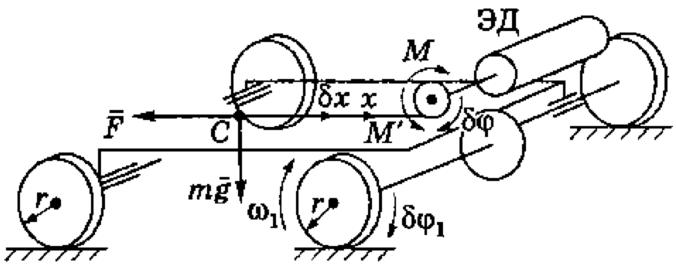


Решение

В данном случае уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x. \tag{1}$$

За обобщенную координату принято поступательное перемещение электромобиля $q = x$ (см. рисунок).



Определим кинетическую энергию системы

$$T = T_0 + T_1^{\text{вр}} + T_2.$$

Кинетическая энергия электродвигателя

$$T_0=\frac{1}{2}I_0\omega_0^2=\frac{1}{2}I_0\left(\frac{\omega_1}{i}\right)^2=\frac{1}{2}I_0\frac{\dot{x}^2}{i^2r^2},$$

где $\omega_0=\dfrac{\omega_1}{i}$; $x=\omega_1 r \Rightarrow \omega_1=\dfrac{\dot{x}}{r}$.

Кинетическая энергия четырех колес во вращательном движении

$$T_1^{вр} = 4\ \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2}\ 4 I_1 \frac{\dot{x}^2}{r^2}.$$

Кинетическая энергия электромобиля с учетом кинетической энергии четырех колес при поступательном движении

$$T_2 = \frac{1}{2}\ m\dot{x}^2.$$

В результате

$$T = \left(m + \frac{4I_1}{r^2} + \frac{I_0}{i^2 r^2}\right)\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m + \frac{4I_1}{r^2} + \frac{I_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x};\quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Для определения обобщенной силы сообщим системе возможное перемещение δx и вычислим возможную элементарную работу

$$\delta A = (M - M')\delta\varphi - F \cdot \delta x = \left(\frac{M - M'}{ir} - F\right)\delta x,$$

где $\delta\varphi = \frac{\delta\varphi_1}{i}$, $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x}{r} \Rightarrow \delta\varphi = \frac{\delta x}{ir}$.

Тогда

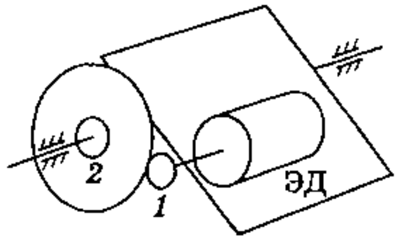
$$Q_x \doteq \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{M - M'}{ir} - F. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и получим дифференциальное уравнение движения электромобиля:

$$\left(m + \frac{4I_1}{r^2} + \frac{I_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x} = \frac{M - M'}{ir} - F.$$

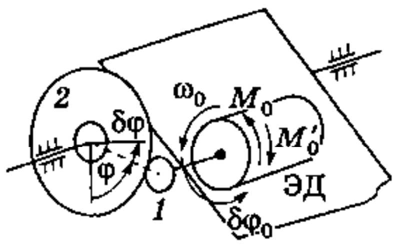
Ответ: $\left(m + \frac{4I_1}{r^2} + \frac{I_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x} = \frac{M - M'}{ir} - F.$

Задача 48.4



Электродвигатель ЭД стабилизирующего привода установлен на вращающейся раме, положение которой задается углом φ. Шестерня *1* на валу электродвигателя обкатывается вокруг шестерни *2*, связанной с неподвижным основанием. Составить дифференциальное уравнение движения рамы, если I_1 — момент инерции рамы вместе с электродвигателем, I_0 — момент инерции ротора электродвигателя, i_{12} – передаточное число пары шестерен, M_0 — вращающий момент электродвигателя, M_0' — момент сил сопротивления на валу электродвигателя, M_1' — момент сил, приложенных к раме вокруг ее оси.

Решение



Приняв за обобщенную координату угол поворота рамы $q = \varphi$ (см. рисунок), запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия механической системы

$$T = T_0 + T_1,$$

где $T_0 = \frac{1}{2} I_0\omega_0^2$ — кинетическая энергия ЭД; $T_1 = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2$ — кинетическая энергия рамы.

В данном случае $\omega_1 = \dot\varphi$ — искомая обобщенная скорость. Чтобы выразить ω_0 через ω_1, применим метод Виллиса. Тогда

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0-\omega_1} = -i_{12},$$

где $i_{12} = \frac{z_1}{z_2}$, $\omega_2 = 0$, так как шестерня *2* — неподвижна; знак минус в правой части выражения указывает на внешнее зацепление.

Тогда

$$\omega_1(1+i_{12})=\omega_0 i_{12}$$

или

$$\omega_0=\frac{1+i_{12}}{i_{12}}\omega_1=\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)\dot{\varphi}.$$

В результате получим

$$T=\left[I_0\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)^2+I_1\right]\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Найдем производные от кинетической энергии, входящие в уравнение (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\left[I_0\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)^2+I_1\right]\ddot{\varphi};\quad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0. \tag{2}$$

Определим обобщенную силу. Для этого сообщим системе возможное перемещение $\delta\varphi$ и запишем выражение для элементарной работы:

$$\delta A=(M_0-M')\delta\varphi_0-M_1'\delta\varphi.$$

Так как

$$\frac{\delta\varphi_0}{\delta\varphi}=\frac{\omega_0}{\omega_1},$$

то

$$\delta\varphi_0=\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)\delta\varphi.$$

Тогда

$$\delta A=\left[(M_0-M')\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)-M_1'\right]\delta\varphi,$$

а обобщенная сила

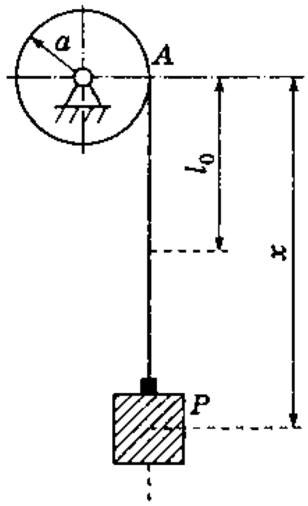
$$Q_\varphi=\frac{\delta A}{\delta\varphi}=(M_0-M')\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)-M_1'. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и получим

$$\left[I_0\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)^2+I_1\right]\ddot{\varphi}=(M_0-M')\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)-M_1'.$$

Ответ: $\left[I_0\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)^2+I_1\right]\ddot{\varphi}=(M_0-M')\left(1+\frac{1}{i_{12}}\right)-M_1'.$

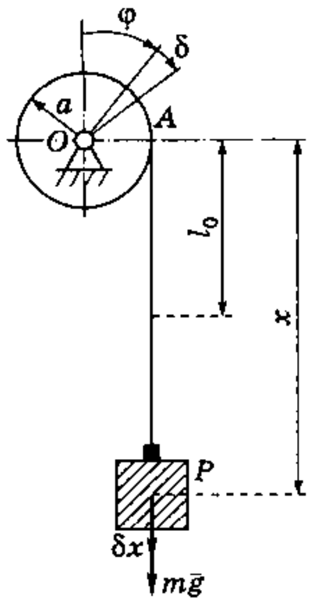
Задача 48.5



Определить движение груза массы m, висящего на однородном тросе массы m_1 и длины l; трос навернут на барабан радиуса a и массы m_2; ось вращения горизонтальна; трением пренебречь, массу барабана считать равномерно распределенной по его ободу. В начальный момент $t = 0$ система находилась в покое, длина свисавшей части троса l_0.

Указание. Пренебречь размерами барабана по сравнению с длиной свешивающейся части.

Решение



Приняв за обобщенную координату q перемещение x груза P (см. рисунок), определим кинетическую энергию данной механической системы:

$$T = T_{\text{тр}} + T_{\text{б}} + T_{\text{гр}}.$$

Кинетическая энергия троса $T_{\text{тр}}$ с учетом того, что все частицы троса массы m_1 (включая и находящиеся на барабане) имеют скорость $\dot{x}$, равна

$$T_{\text{тр}} = \sum \Delta m_1 \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2}\sum \Delta m_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2}.$$

Так как масса барабана равномерно распределена по его ободу,

$$I = m_2 a^2.$$

Учитывая также зависимость $\varphi = \dfrac{\dot{x}}{a}$, получим, что кинетическая энергия барабана

$$T_б = \frac{1}{2} m_2 a^2 \left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия груза

$$T_{гр} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Следовательно,

$$T = (m + m_1 + m_2) \frac{\dot{x}^2}{2}. \qquad (1)$$

Определим потенциальную энергию свисающей части троса и груза P, принимая за нулевой потенциал горизонтальную прямую, проходящую через центр барабана — точку O, и пренебрегая размерами барабана по сравнению с длиной свисающей части троса:

$$\Pi = -mgx - \frac{m_1 x}{l} g \, \frac{x}{2} = -mgx - \frac{m_1 g x^2}{2l}, \qquad (2)$$

где $\dfrac{m_1 x}{l} g$ — сила тяжести свисающей части троса; $\dfrac{x}{2}$ — координата центра тяжести троса; l — длина троса.

Вводя функцию Лагранжа $L = T - \Pi$, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

После интегрирования получим дифференциальное уравнение

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x} - \frac{m_1}{l} g x = mg. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*, \qquad (4)$$

где $\bar{x}$ — решение соответствующего однородного уравнения; x^* — частное решение уравнения.

Из курса высшей математики известно:

$$\bar{x} = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2) l}}$; $\operatorname{ch} kt$, $\operatorname{sh} kt$ — соответственно гиперболический косинус и синус.

Частное решение имеет вид

$$x^* = A.$$

Подставим x^* в уравнение (3) и найдем

$$x^* = -\frac{ml}{m_1}.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$x = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt - \frac{ml}{m_1}, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = C_1 k \operatorname{sh} kt + C_2 k \operatorname{ch} kt.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x(0) = l_0$, получим

$$\begin{cases} l_0 = C_1 - \dfrac{ml}{m_1}, \\ 0 = C_2 k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = l_0 + \dfrac{ml}{m_1}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

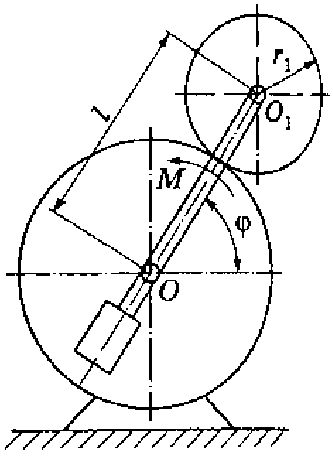
Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (5) и получим

$$x = -\frac{ml}{m_1} + \left(l_0 + \frac{ml}{m_1} \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2) l}}\, t.$$

Ответ: $x = -\dfrac{ml}{m_1} + \left(l_0 + \dfrac{ml}{m_1} \right) \operatorname{ch} \sqrt{\dfrac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2) l}}\, t.$

Задача 48.6

В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса r_1 насажена на кривошип с противовесом, вращающийся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента M. Определить угловое ускорение вращения кривошипа и окружное усилие S в точке касания шестеренок, если расстояние между осями шестеренок равно l, момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен I_0, масса бегающей шестеренки m_1, момент инерции шестеренки относительно ее оси I_1; трением пренебречь, центр масс шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.



Решение

Приняв за обобщенную координату q угол поворота кривошипа φ, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода для данной механической системы, имеющей одну степень свободы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=Q^M, \qquad (1)$$

где $L = T - \Pi$ — кинетический потенциал.

Кинетическая энергия системы

$$T = T_{\text{кр}} + T_{\text{ш}}.$$

Кинетическая энергия кривошипа

$$T_{\text{кр}} = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия шестеренки

$$T_{\text{ш}} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{I_{01}\dot{\varphi}_1^2}{2} = \frac{m_1 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{I_1\dot{\varphi}_1^2}{2}.$$

Тогда

$$T = \frac{I_0\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{I_1\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{m_1 l^2\dot{\varphi}^2}{2}. \qquad (2)$$

Установим связь между $\dot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}_1$ по методу Виллиса:

$$\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}} = -\frac{r_1}{l - r_1},$$

откуда с учетом того, что $\dot{\varphi}_2 = 0$, получим

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{l}{r_1}\dot{\varphi}.$$

Заметим, что это соотношение можно получить из условия плоского движения шестеренки *1*, имеющей МЦС в точке K касания колес (рис. 1). Подставим в выражение (2) значение $\dot{\varphi}_1$ и получим

$$T = \left(I_0 + m_1 l^2 + \frac{I_1 l^2}{r_1^2}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

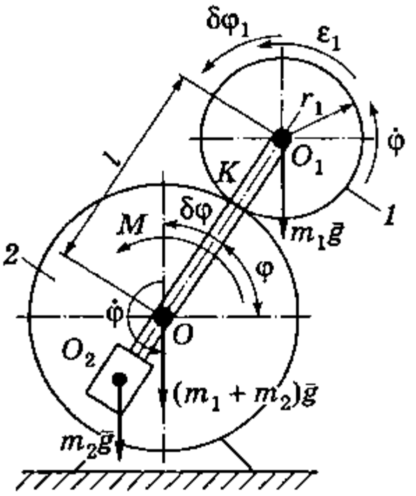


Рис. 1

В качестве нулевого потенциального уровня выберем горизонтальную прямую, проходящую через точку O, и, принимая во внимание, что центр масс шестеренки и кривошипа находится в той же точке, получим

$$\Pi = 0.$$

Следовательно,

$$L = T.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \left(I_0 + m_1 l^2 + \frac{I_1 l^2}{r_1^2}\right)\ddot{\varphi}. \qquad (3)$$

Найдем обобщенную непотенциальную силу Q^M, соответствующую приложенному внешнему моменту.

Для этого при фиксированном положении механизма сообщим ему возможное перемещение $\delta\varphi \neq 0$ и вычислим элементарную работу:

$$\delta A = M\delta\varphi.$$

Тогда

$$Q^M = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M. \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (1), обозначим $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ и получим

$$\varepsilon = \frac{M}{I_0 + m_1 l^2 + \dfrac{I_1 l^2}{r_1^2}}.$$

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения отдельно для шестеренки *1* (рис. 2):

$$S r_1 = I_1 \ddot{\varphi}_1.$$

Тогда

$$S = \frac{I_1 l}{r_1^2}\varepsilon,$$

так как

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{l}{r_1}\ddot{\varphi} = \frac{l}{r_1}\varepsilon.$$

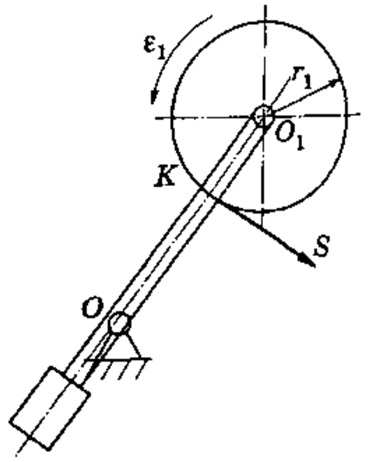
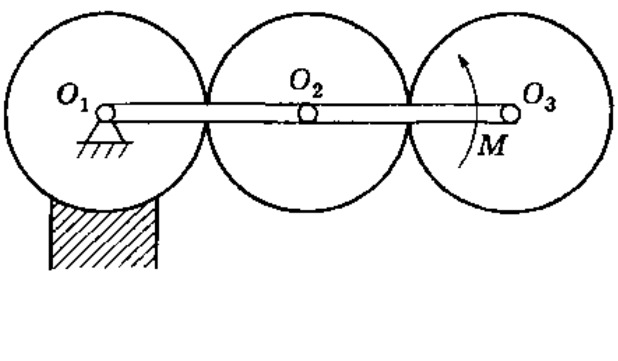


Рис. 2

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{M}{I_0 + m_1 l^2 + \dfrac{I_1 l^2}{r_1^2}}$; $S = \dfrac{I_1 l}{r_1^2}\varepsilon$.

Задача 48.7

В планетарном механизме колесо с осью O_1 неподвижно; к рукоятке O_1O_3 приложен вращающий момент M; механизм расположен в горизонтальной плоскости.

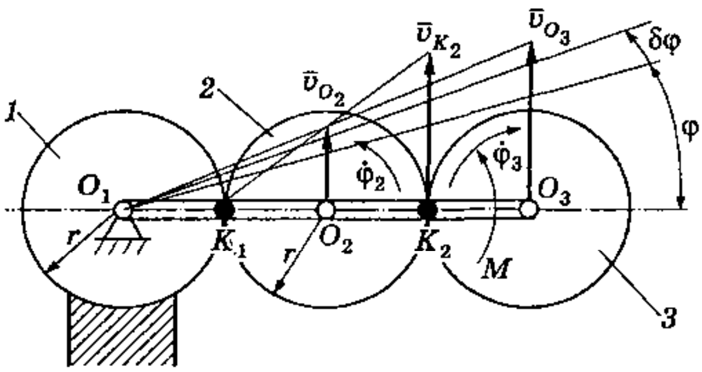


Определить угловое ускорение рукоятки, считая колеса однородными дисками с одинаковыми массами m и радиусами r и пренебрегая массой рукоятки.

Решение

Принимая за обобщенную координату q угол поворота рукоятки O_1O_3 планетарного механизма φ (см. рисунок), имеющего одну степень свободы, составим уравнение его движения, используя уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$



Поскольку колесо *1* неподвижно, то кинетическая энергия системы

$$T = T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия колеса *2*

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2 r^2\left(\frac{v_{O_2}}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}m_2 v_{O_2}^2 = \frac{3}{4}m(2r\dot{\varphi})^2 = 3mr^2\dot{\varphi}^2,$$

где $m_2 = m$; $I_2 = \frac{1}{2}m_2 r^2$, так как колесо *2* является однородным диском;

$\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_{O_2}}{r}$, поскольку точка K_1 — МЦС колеса *2*; $v_{O_2} = O_1O_2 \cdot \omega = 2r\dot{\varphi}$.

Кинетическая энергия колеса *3*

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{O_3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} m_3 v_{O_3}^2 = \frac{1}{2} m_3 v_{O_3}^2 = \frac{1}{2} m (4r\dot{\varphi})^2 = 8mr^2\dot{\varphi}^2,$$

где $m_3 = m$; $v_{O_3} = O_1O_3 \cdot \omega = 4r\dot{\varphi}$.

Так как

$$v_{K_2} = 2r\dot{\varphi}_2 = 2r \cdot 2\dot{\varphi} = 4r\dot{\varphi},$$

где $\dot{\varphi}_2 = \frac{v_{O_2}}{r} = \frac{2r\dot{\varphi}}{r} = 2\dot{\varphi}$; $v_{K_2} = v_{O_3} = 4r\dot{\varphi}$. Следовательно, колесо *3* совершает круговое поступательное движение и $\omega_3 = 0$.

В результате получим

$$T = 3mr^2\dot{\varphi}^2 + 8mr^2\dot{\varphi}^2 = 11mr^2\dot{\varphi}^2.$$

Определим производные от кинетической энергии, входящие в уравнение (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 22mr^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{2}$$

Определим элементарную работу, учитывая, что механизм расположен в горизонтальной плоскости и поэтому силы тяжести работы не производят:

$$\delta A = M\delta\varphi.$$

Тогда обобщенная сила

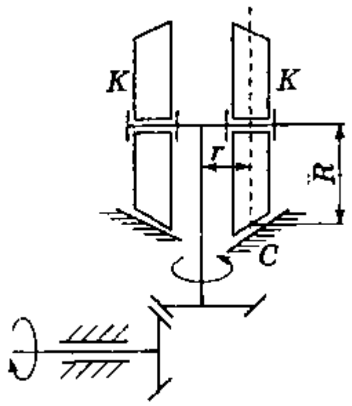
$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta \varphi} = M. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в формулу (1) и найдем угловое ускорение рукоятки

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_1 = \frac{M}{22mr^2}.$$

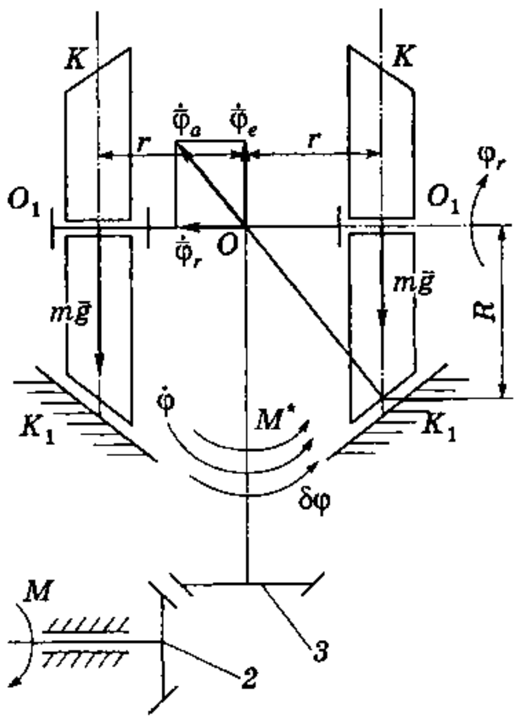
О т в е т: $\varepsilon_1 = \frac{M}{22mr^2}$.

Задача 48.8



Бегуны K, K приводятся в движение от вала двигателя при помощи передачи, схема которой показана на рисунке. Масса одного бегуна равна 3 т, средний радиус $R = 1$ м, радиус вращения $r = 0{,}5$ м. Считаем, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через среднюю точку C обода. Отношение радиусов колес конической передачи от двигателя к вертикальному валу равно 2/3. Бегун считаем однородным диском радиуса R и пренебрегаем массой всех движущихся частей по сравнению с массой бегунов. Вычислить, какой постоянный вращающий момент должен быть приложен на валу двигателя, чтобы сообщить вертикальному валу угловую скорость 120 об/мин по истечении 10 с от момента пуска двигателя; силами сопротивления пренебречь.

Решение



Определим вращающий момент на вертикальном валу M^* (см. рисунок) через передаточное отношение:

$$\frac{M^*}{M} = \frac{r_3}{r_2} \Rightarrow M^* = \frac{r_3}{r_2} M = \frac{3}{2} M,$$

где M, M^* — крутящие моменты соответственно на горизонтальном и вертикальном валу; r_2 и r_3 — радиусы колес 2 и 3.

Приняв за обобщенную координату q угол поворота вертикального вала φ, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия бегуна K, совершающего сферическое движение,

$$T_1 = T_e + T_r,$$

где T_e, T_r — кинетическая энергия бегуна соответственно в переносном вращении вокруг вертикальной оси и в относительном вращении вокруг горизонтальной оси:

$$T_e = \left(\frac{mR^2}{4} + mr^2\right)\frac{\dot{\varphi}_e^2}{2};$$

$$T_r = \frac{mR^2}{2}\,\frac{\dot{\varphi}_r^2}{2}.$$

Так как

$$\varphi_e = \dot{\varphi},$$

$$\dot{\varphi}_r = \frac{v_{O_1}}{R} = \frac{\varphi_e r}{R} = \frac{\dot{\varphi} r}{R},$$

то

$$T_1 = \left(\frac{mR^2}{4} + mr^2\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\,\frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{2R^2} = \frac{m\dot{\varphi}^2}{4}\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right).$$

Кинетическая энергия двух бегунов

$$T = 2T_1 = \frac{1}{2}m\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2.$$

Найдем производные от кинетической энергии, входящие в уравнение (1), подставим их в левую часть уравнения и получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right)\ddot{\varphi}. \qquad (2)$$

Определим элементарную работу на возможном перемещении $\delta\varphi$. Так как силы тяжести работы не совершают, а силами сопротивления согласно условию можно пренебречь, получим

$$\delta A = M^*\delta\varphi.$$

Тогда обобщенная сила

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta \varphi} = M^* = \frac{3}{2} M. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1):

$$\frac{2}{3} m \left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right) \ddot{\varphi} = M. \tag{4}$$

Так как вал двигателя вращается с постоянным ускорением $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, то кинематические соотношения приобретают вид

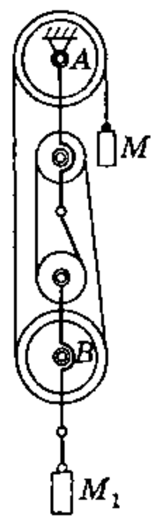
$$\omega = \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t} = \frac{120\pi}{30 \cdot 10} = 0{,}4\pi.$$

Подставим это значение $\ddot{\varphi}$ в выражение (4) и вычислим постоянный вращающий момент

$$M = \frac{0{,}8\pi m}{3}\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right) = \frac{0{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^3}{3}\left(3 \cdot 0{,}5^2 + \frac{1^2}{2}\right) = 3140 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

Ответ: 3140 Н · м.

Задача 48.9



Груз M массы 101 кг поднимает с помощью полиспаста груз M_1, который вместе с подвижной обоймой имеет массу 320 кг. Всех блоков четыре, большие блоки имеют массу по 16 кг, малые — по 8 кг, радиусы больших блоков равны r, радиусы малых равны r_1. Определить ускорение груза M. При определении энергии блоков предполагаем, что массы их равномерно распределены по окружностям.

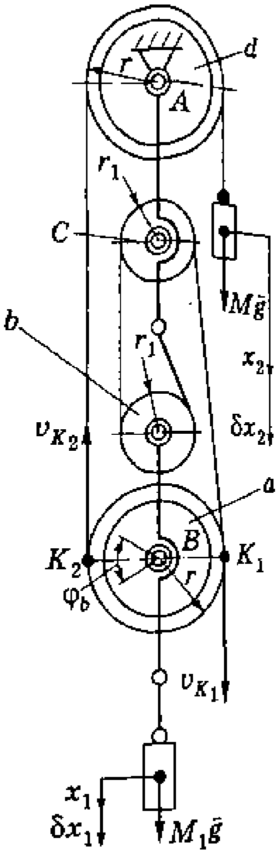
Решение

Приняв за обобщенную координату q перемещение x_2 груза M (см. рисунок), запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q. \tag{1}$$

Диски c и d вращаются вокруг неподвижных осей, грузы M и M_1 движутся поступательно, а диски a и b совершают плоскопараллельное движение, поэтому кинетическая энергия системы

$$T=\frac{M\dot{x}_2^2}{2}+\frac{M_1\dot{x}_1^2}{2}+(m_d+m_b)\frac{\dot{x}_1^2}{2}+\frac{I_a\dot{\varphi}_a^2}{2}+\frac{I_b\dot{\varphi}_b^2}{2}+\frac{I_c\dot{\varphi}_c^2}{2}+\frac{I_d\dot{\varphi}_d^2}{2}.$$



Учтено, что скорости центров дисков a и b при поступательном движении равны, т.е. $v_a=v_b=\dot{x}_1$.

С другой стороны,

$$\dot{\varphi}_b=\frac{\dot{x}_1}{r_1},\quad v_{K_1}=\dot{\varphi}_b\cdot 2r_1=2\dot{x}_1;$$

$$v_a=\frac{v_{K_2}-v_{K_1}}{2}\Rightarrow\dot{x}_1=\frac{\dot{x}_2-2\dot{x}_1}{2}\Rightarrow\dot{x}_1=\frac{\dot{x}_2}{4}\Rightarrow\dot{\varphi}_b=\frac{\dot{x}_2}{4r_1};$$

$$\dot{\varphi}_a=\frac{v_{K_2}-v_a}{r}=\frac{3\dot{x}_2}{4r},\quad \dot{\varphi}_c=\frac{2\dot{x}_1}{r_1}=\frac{\dot{x}_2}{2r_1},\quad \dot{\varphi}_d=\frac{\dot{x}_2}{r}.$$

Кроме того,

$$I_a=I_d=m_ar^2;$$

$$I_b=I_c=m_br_1^2,\quad m_b=\frac{m_a}{2}.$$

Тогда

$$T=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{3}{2}m_a\cdot\frac{1}{16}m_ar^2\cdot\frac{9}{16r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_a}{2}r_1^2\,\frac{1}{16r_1^2}+\frac{m_ar_1^2}{2}\,\frac{1}{4r_1^2}+m_ar^2\,\frac{1}{r^2}\right)=$$

$$=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left[M+\frac{1}{16}M_1+m_a\left(\frac{3}{32}+\frac{9}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}+1\right)\right]=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{58}{32}m_a\right).$$

Найдем производные от кинетической энергии, входящие в уравнение (1), и подставим их в левую часть этого уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{58}{32}m_a\right)\ddot{x}_2.\qquad(2)$$

Определим обобщенную силу Q. Для этого сообщим системе возможное перемещение и вычислим элементарную работу:

$$\delta A = Mg\delta x_2 - (M_1 + m_a + m_b)g\delta x_1 = \left(-\frac{M_1 + \frac{3}{2}m_a}{4} \pm M\right)g\delta x_2.$$

Тогда

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x_2} = \left(-\frac{M_1}{4} - \frac{3}{8}m_a + M\right)g. \qquad (3)$$

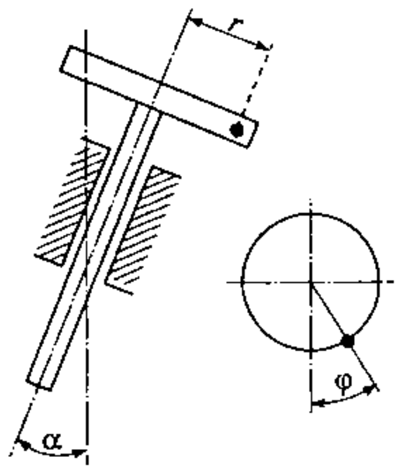
Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и определим ускорение груза M:

$$\ddot{x}_2 = \frac{M - \frac{M_1}{4} - \frac{3}{8}m_a}{M + \frac{M_1}{16} + \frac{58}{32}m_a} = \frac{101 - \frac{320}{4} - \frac{3}{8}\cdot 16}{101 + \frac{320}{16} + \frac{58}{32}\cdot 16}g = \frac{15}{150}g = 0{,}1g.$$

Ответ: $0{,}1g$.

Задача 48.10

В машине для статического уравновешивания роторов подшипники наклонены под углом α к вертикали. Ротор, помещенный в подшипник, имеет момент инерции I (относительно своей оси) и несет неуравновешенную массу m на расстоянии r от оси. Написать дифференциальное уравнение движения ротора и определить частоту малых колебаний около положения равновесия.

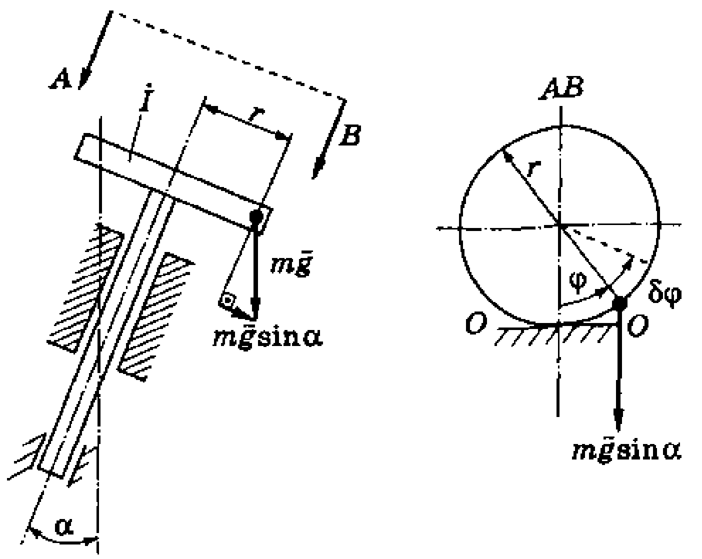


Решение

Приняв за обобщенную координату q угол поворота ротора φ (см. рисунок), запишем уравнение Лагранжа 2-го рода в потенциальном поле сил тяжести:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad (1)$$

где $L = T - П$ — функция Лагранжа.



Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mr^2\dot{\varphi}^2,$$

потенциальная энергия системы

$$\Pi = mgr\sin\alpha(1-\cos\varphi).$$

Тогда функцию Лагранжа

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mr^2\dot{\varphi}^2 - mgr\sin\alpha(1-\cos\varphi).$$

Найдем производные от функции Лагранжа, входящие в уравнение (1), подставим их в это уравнение и получим

$$(I + mr^2)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0. \qquad (2)$$

Для малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$. С учетом этого уравнение (2) запишем в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{mgr\sin\alpha}{I + mr^2}}$ — круговая частота свободных колебаний.

О т в е т: $(I + mr^2)\ddot{\varphi} + mgr\sin\alpha\sin\varphi = 0$, где φ — угол поворота ротора; $k = \sqrt{\dfrac{mgr\sin\alpha}{I + mr^2}}$.

Задача 48.11

Однородный конус катится по шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Длина образующей конуса l, угол раствора 2β. Составить уравнение движения конуса.

Указание. За обобщенную координату принять угол θ, образованный соприкасающейся образующей с прямой наибольшего наклона плоскости.

Решение

Определим положение центра тяжести C конуса, т.е. AC, и введем обозначение S (рис. 1):

$$VS = \int_0^h \pi r^2 z dz.$$

Так как

$$\frac{r}{a} = \frac{z}{h},$$

то

$$r = \frac{az}{h}. \qquad (1)$$

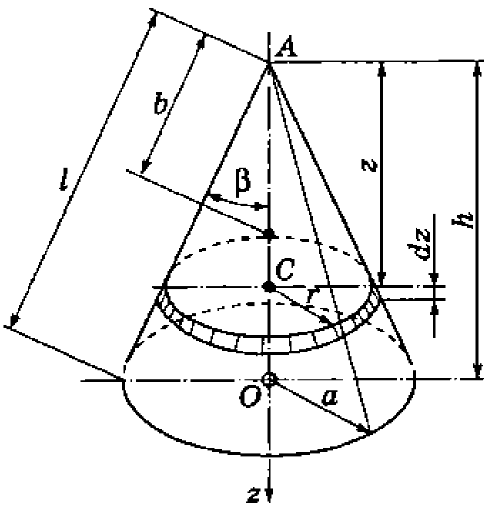


Рис. 1

После интегрирования получим

$$\frac{1}{3}\pi a^2 h S = \pi \frac{a^2}{h^2}\frac{h^4}{4},$$

$$S = \frac{3}{4}h.$$

Тогда

$$b = S\cos\beta = \frac{3}{4}h\cos\beta = \frac{3}{4}l\cos^2\beta.$$

Определим момент инерции I_A конуса относительно его образующей (рис. 2). По теореме о моменте инерции относительно прямой, образующей угол β $(\pi/2 - \beta)$ с осями, для выделенного элементарного диска массой dm запишем:

$$dI_A = dI_x\cos^2\beta + dI_y\sin^2\beta$$

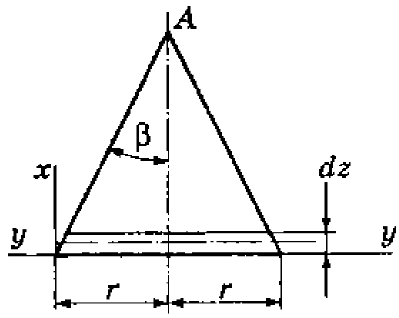


Рис. 2

или

$$dI_A=\left(\frac{r^2dm}{2}+r^2dm\right)\cos^2\beta+\frac{r^2}{4}dm\sin^2\beta=$$

$$=\frac{r^2dm}{4}(6\cos^3\beta+\sin^2\beta)=\frac{r^2dm}{4}(1+5\cos^2\beta). \tag{2}$$

Учитывая, что

$$\frac{dm}{M}=\frac{\rho\pi\, r^2dz}{\frac{1}{3}\rho\pi\, a^2h}=\frac{3\left(\frac{az}{h}\right)^2dz}{a^2h}=\frac{3z^2dz}{h^3},$$

найдем

$$dm=\frac{3M}{h^3}z^2dz, \tag{3}$$

где M — масса конуса.

Тогда согласно формуле (2) с учетом выражений (1) и (3) получим

$$I_A=\frac{3Ma^2}{4h^5}(1+5\cos^2\beta)\int_0^h z^4dz=\frac{3}{4}Ma^2\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}Ml^2\sin^2\beta\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right).$$

Координата центра тяжести (рис. 3)

$$y_C=b\cos\theta\sin\alpha=\frac{3}{4}l\cos^2\beta\cos\theta\sin\alpha.$$

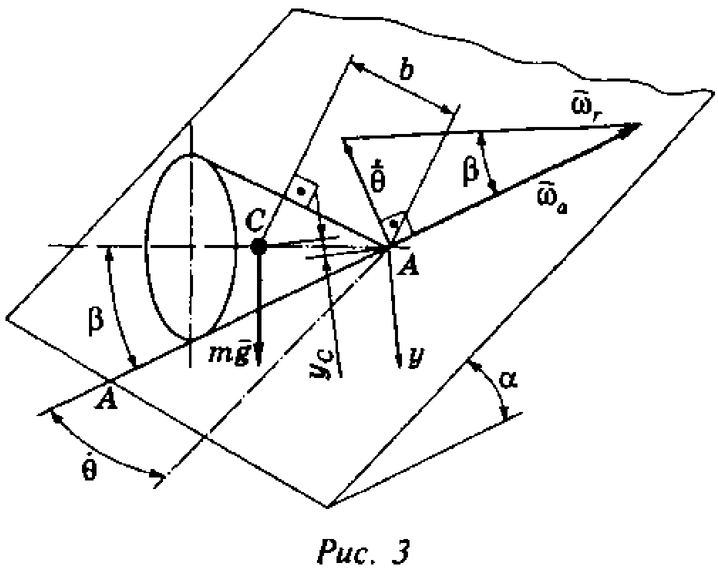


Рис. 3

Угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси AA:

$$\overline{\omega}_r + \overline{\dot{\theta}} = \overline{\omega}_a,$$

$$\overline{\omega}_a = \dot{\theta}\operatorname{ctg}\beta = \dot{\theta}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Определим функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{I_A\omega_a^2}{2} - Mgy_C = \frac{3}{4}Ml^2\sin^2\beta\left(\cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)\times$$

$$\times\frac{\dot{\theta}^2\cos^2\beta}{2\sin^2\beta} - \frac{3}{4}Mgl\cos^2\beta\cos\theta\sin\alpha = \frac{3}{8}Ml^2\cos^2\beta\times$$

$$\times\left(\cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{3}{4}Mgl\cos^2\beta\cos\theta\sin\alpha.$$

Найдем частную производную от L по обобщенной координате θ и производную по времени, подставим их в уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

и получим уравнение движения конуса

$$l^2\left(\cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)\ddot{\theta} + gl\sin\alpha\sin\theta = 0$$

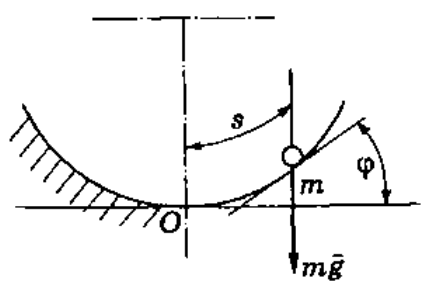
или

$$\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{l\left(\cos^2\beta + \dfrac{1}{5}\right)}\sin\theta = 0.$$

Ответ: $\ddot{\theta} + \dfrac{g\sin\alpha}{l(\cos^2\beta + 1/5)}\sin\theta = 0.$

Задача 48.12

Материальная точка массы m движется под действием силы тяжести по циклоидальной направляющей, заданной уравнением $s = 4a\sin\varphi$, где s — дуга, отсчитываемая от точки O, а φ — угол касательной к циклоиде с горизонтальной осью. Определить движение точки.



Решение

Задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. В качестве обобщенной координаты возьмем криволинейную координату s.

Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_s.$$

Кинетическая энергия точки

$$T=\frac{m\dot{s}^2}{2};$$

обобщенная сила

$$Q_s=\frac{\sum(\delta A)_s}{\delta s}=-\frac{mg\sin\varphi\cdot\delta s}{\delta s}=-mg\sin\varphi.$$

После дифференцирования и подстановки полученных значений в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение движения точки:

$$m\ddot{s}=-mg\sin\varphi. \tag{1}$$

Используя зависимость

$$s=4a\sin\varphi,$$

найдем

$$\sin\varphi=\frac{s}{4a}. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и после преобразований получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{s}+\frac{g}{4a}s=0,$$

решение которого имеет вид

$$s=A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+\varphi_0\right),$$

где A — амплитуда колебаний; φ_0 — начальная фаза колебаний.

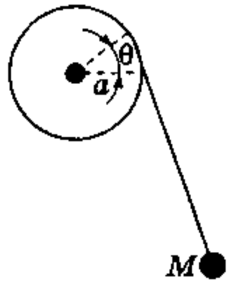
Второй способ. Задачу проще решить, не применяя уравнения Лагранжа 2-го рода. Достаточно записать уравнение движения точки в проекции на касательную ось к циклоиде, т.е.

$$m\ddot{s} = -mg\sin\varphi.$$

Ответ: $s = A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \varphi_0\right)$, где A и φ_0 — постоянные интегрирования.

Задача 48.13

Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса a. Длина свисающей в положении равновесия нити равна l. Массой нити пренебречь.



Решение

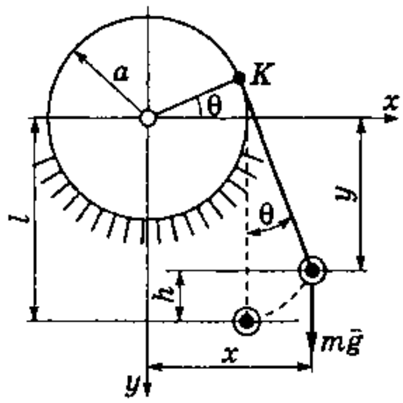
В качестве обобщенной координаты q возьмем θ — угол отклонения маятника от вертикали. Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия T маятника

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

где $v = (l + a\theta)\dot{\theta}$.



Тогда

$$T = \frac{m(l + a\theta)^2\dot{\theta}^2}{2}.$$

Работа A, затраченная на отклонение маятника,

$$A = -mgh,$$

так как

$$h = l - y = l + a\sin\theta - (l + a\theta)\cos\theta,$$

то

$$A = \left[(l + a\theta)\cos\theta - (l + a\sin\theta)\right] mg.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m(l + a\theta)^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = ma(l + a\theta)\dot{\theta}^2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[(l + a\theta)^2\ddot{\theta} + 2a(l + a\theta)\dot{\theta}^2\right] m,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left[-(l + a\theta)\sin\theta + a\cos\theta - \cos\theta\right] mg = -mg(l + a\theta)\sin\theta.$$

Подставим значения производных в уравнение (1) и получим

$$(l + a\theta)^2\ddot{\theta} + 2a(l + a\theta)\dot{\theta}^2 - a(l + a\theta)\dot{\theta}^2 = -g(l + a\theta)\sin\theta$$

или после сокращения на $l + a\theta$

$$(l + a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0.$$

Ответ: $(l + a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$, где θ — угол отклонения маятника от вертикали.

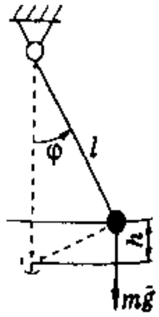
Задача 48.14

Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки массы m, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l = l(t)$.

Решение

Выберем в качестве обобщенной координаты q угол φ (см. рисунок). Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi}. \qquad (1)$$



Кинетическая энергия маятника

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

работа A, затраченная на отклонение маятника,

$$A = -mgh = -mgl(1-\cos\varphi).$$

Найдем частные производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = ml^2\ddot\varphi + 2ml\dot l\dot\varphi.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1):

$$ml^2\ddot\varphi + 2ml\dot l\dot\varphi = -mgl\sin\varphi.$$

После сокращения на ml^2 получим

$$\ddot\varphi + 2\frac{\dot l}{l}\dot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Ответ: $\ddot\varphi + 2\frac{\dot l}{l}\dot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$, где φ — угол отклонения нити от вертикали.

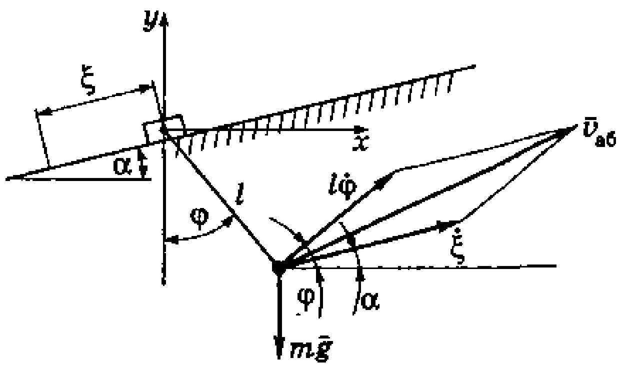
Задача 48.15

Точка подвеса маятника, состоящего из материальной точки массы m на нерастяжимой нити длины l, движется по заданному закону $\xi = \xi_0(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом. Составить уравнение движения маятника.

Решение

Выберем в качестве обобщенной координаты q угол φ (см. рисунок). Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi}. \qquad (1)$$



Абсолютная скорость маятника складывается из переносной скорости точки подвеса и относительной скорости маятника:

$$v_{аб}^2 = v_x^2 + v_y^2 = (l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\xi}\cos\alpha)^2 +$$

$$+ (l\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\xi}\sin\alpha)^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2l\,\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha).$$

Кинетическая энергия маятника

$$T = \frac{mv_{аб}^2}{2} = \frac{m}{2}\left[l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha)\right].$$

Работа силы тяжести

$$A = -\left[mgl(1 - \cos\varphi) + \xi\sin\alpha\right].$$

Найдем производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\,\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml\,\ddot{\xi}\cos(\varphi - \alpha) - ml\,\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin(\varphi - \alpha);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha);$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1) и получим дифференциальное уравнение

$$m\left[l^2\ddot{\varphi} + l\,\ddot{\xi}\cos(\varphi - \alpha) - l\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha) + l\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha)\right] = -mgl\sin\varphi$$

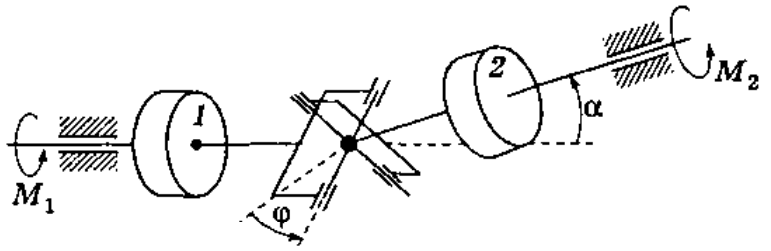
или

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi+\frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi-\alpha)=0.$$

Ответ: $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi+\frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi-\alpha)=0.$

Задача 48.16

Два вала, находящихся в одной плоскости и образующих между собой угол α, соединены шарниром Кардана. Моменты инерции валов равны I_1 и I_2. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а к другому валу приложен момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.



Решение

Выберем в качестве обобщенной координаты q угол поворота φ первого вала. Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_{\varphi}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{I_1\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{I_2 i_{12}^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

где $i_{12}=\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}$ — передаточное отношение шарнира Гука.

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=(I_1+I_2 i_{12})\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{I_2 \dot\varphi^2 i_{12}^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}; \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = (I_1 + I_2 i_{12}^2)\ddot\varphi - \frac{2 I_2 i_{12}^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

Для определения обобщенной силы Q_φ найдем элементарную работу

$$\delta A = M_1 \delta\varphi - M_2 i_{12} \delta\varphi.$$

Тогда

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M_1 - M_2 i_{12}. \tag{3}$$

Выражения (2) и (3) подставим в уравнение (1) и получим дифференциальное уравнение

$$(I_1 + I_2 i_{12}^2)\ddot\varphi - \frac{2 I_2 i_{12}^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi} + \frac{I_2 i_{12}^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi} = M_1 - M_2 i_{12}$$

или после приведения подобных

$$(I_1 + I_2 i_{12}^2)\ddot\varphi - \frac{I_2 i_{12}^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha \sin 2\varphi}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi} = M_1 - M_2 i_{12}$$

и подстановки выражений i_{12} получим

$$\left[I_1 + I_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot\varphi - \frac{I_2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\dot\varphi^2 =$$

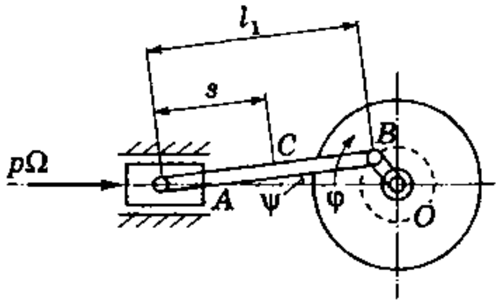
$$= M_1 - M_2\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

Ответ: обозначая через φ угол поворота первого вала, имеем

$$\left[I_1 + I_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot\varphi - \frac{I_2 \sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\dot\varphi^2 =$$

$$= M_1 - M_2\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

Задача 48.17



Кривошипный механизм состоит из поршня массы m_1, шатуна AB массы m_2, кривошипа OB, вала и махового колеса; I_2 — момент инерции шатуна относительно его центра масс C; I_3 — момент инерции кривошипа OB, вала и махового колеса относительно оси; Ω — площадь поршня, p — давление, действующее на поршень, l — длина шатуна; s — расстояние между точкой A и центром масс шатуна, r — длина кривошипа OB; M — момент сопротивления, действующий на вал. Составить уравнение движения механизма, считая угол поворота шатуна ψ малым, т.е. полагая $\sin\psi = \psi$ и $\cos\psi = 1$; в качестве обобщенной координаты взять угол поворота кривошипа φ. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Решение

Приняв в качестве обобщенной координаты q угол поворота кривошипа φ, запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \tag{1}$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = T_{\text{крив}} + T_{\text{шат}} + T_{\text{полз,}}$$

где

$$T_{\text{крив}} = I_3 \frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

$$T_{\text{шат}} = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_{CA}^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\psi}^2}{2},$$

$$T_{\text{полз}} = \frac{m_1 v_A^2}{2};$$

$$v_A = v_B \sin\varphi = r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \frac{r}{\sin\psi} = \frac{l}{\sin\varphi};$$

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi, \quad \dot{\psi}\cos\psi = \frac{r}{l}\dot{\varphi}\cos\varphi;$$

согласно условию задачи полагаем, что $\cos\psi = 1$, тогда

$$\dot{\psi} = \frac{r}{l}\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad v_{CA} = s\dot{\psi} = \frac{sr}{l}\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Тогда

$$T = \frac{I_3\dot{\varphi}^2}{2} + (m_1 + m_2)\frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2}\sin^2\varphi + (I_2 + m_2 s^2)\frac{r^2}{l^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}\cos^2\varphi. \quad (2)$$

Так как

$$\delta s_A = r\sin\varphi \cdot \delta\varphi,$$

то обобщенная сила

$$Q_\varphi = \frac{(\sum \delta A_k)_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{p\Omega\delta s_A - M\delta\varphi}{\delta\varphi} = -M + p\Omega r\sin\varphi. \quad (3)$$

Найдем производные выражения (2):

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \left[I_3 + (m_1 + m_2)r^2\sin^2\varphi + (I_2 + m_2 s^2)\frac{r^2\cos^2\varphi}{l^2}\right]\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{(m_1 + m_2)r^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi}{2} - \frac{(I + m_2 s^2)\dot{\varphi}^2 r^2\sin 2\varphi}{2l^2}; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \left[I_3 + (m_1 + m_2)r^2\sin^2\varphi + (I_2 + m_2 s^2)\frac{r^2\cos^2\varphi}{l^2}\right]\ddot{\varphi} +$$

$$+\left[(m_1 + m_2)r^2\sin 2\varphi - (I_2 + m_2 s^2)\frac{r^2\sin 2\varphi}{l^2}\right]\dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

Подставим выражения (3)–(5) в уравнение (1) и получим уравнение движения механизма:

$$\left[(m_1 + m_2)r^2\sin^2\varphi + (I_2 + m_2 s^2)\frac{r^2\cos^2\varphi}{l^2} + I_3\right]\ddot{\varphi} +$$

$$+\left[(m_1 + m_2)r^2 - (I_2 + m_2 s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi = -M + p\Omega r\sin\varphi.$$

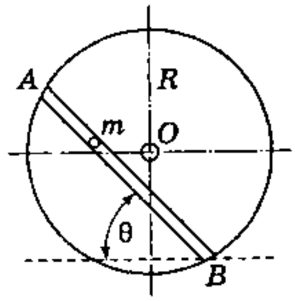
Ответ: $\left[(m_1+m_2)r^2\sin^2\varphi+(I_2+m_2s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\cos^2\varphi+I_3\right]\ddot{\varphi}+$

$$+\left[(m_1+m_2)r^2-(I_2+m_2s^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi=-M+p\Omega r\sin\varphi.$$

Примечание. В задачнике в ответе опечатка: в выражении $I_2+m_1s^2$ вместо m_1 должна быть масса шатуна m_2.

Задача 48.18

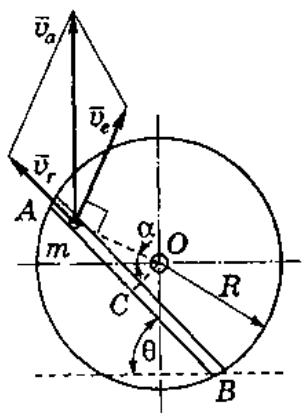
По однородному стержню массы M и длины $2a$, концы которого скользят по гладкой, расположенной в горизонтальной плоскости окружности радиуса R, движется с постоянной относительной скоростью v материальная точка массы m. Определить движение стержня. В начальный момент материальная точка находится в центре масс стержня.



Решение

Приняв в качестве обобщенной координаты q угол поворота стержня θ (см. рисунок), запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta. \qquad (1)$$



Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{I_O\dot{\theta}^2}{2}+\frac{mv_a^2}{2},$$

где $I_O=\dfrac{Ma^2}{3}+M(R^2-a^2)$.

По теореме косинусов абсолютная скорость

$$v_{аб}^2=v_r^2+v_e^2+2v_rv_e\cos\alpha,$$

где $v_r=v_{аб}$, $v_e=\dot{\theta}\sqrt{R^2-a^2+v_r^2t^2}=\dot{\theta}\sqrt{R^2-a^2+v^2t^2}$;

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}}.$$

Тогда

$$v_a = v^2 + \theta^2(R^2 - a^2 + v^2 t^2) + 2v\dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}\;\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}}.$$

Следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{\dot{\theta}^2}{2} M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + \frac{mv^2}{2} + mv\dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2} + \frac{m\dot{\theta}}{2}(R^2 - a^2 + v^2 t^2).$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\theta} + m(R^2 - a^2 + v^2 t^2)\dot{\theta} + mv\sqrt{R^2 - a^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Обобщенная сила $Q_\theta = 0$, так как система расположена в горизонтальной плоскости и работа сил тяжести равна нулю. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = C_1 = \text{const}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, а так как

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt},$$

то

$$d\theta = \frac{(C_1 - mv\sqrt{R^2 - a^2})\,dt}{M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + m(R^2 - a^2 + v^2 t^2)} =$$

$$= \frac{(C_1 - mv\sqrt{R^2 - a^2})\,dt}{mv^2\left[\dfrac{\frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + R^2 - a^2}{v^2} + t^2\right]}. \qquad (2)$$

Проинтегрируем уравнение (2) и получим

$$\theta-\theta_0=\frac{C_1-mv\sqrt{R^2-a^2}}{mv^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}}\,t=$$

$$=C\operatorname{arctg}\frac{vt}{\sqrt{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}},$$

где

$$C=\frac{C_1-mv\sqrt{R^2-a^2}}{mv^2}\sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}}. \qquad (3)$$

Найдем постоянную интегрирования C_1 при начальных условиях: $t=0$, $\theta=\theta_0$:

$$C_1=m\left[R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)\right]\dot{\theta}_0+mv\sqrt{R^2-a^2}. \qquad (4)$$

Подставим выражение (4) в выражение (3) и получим

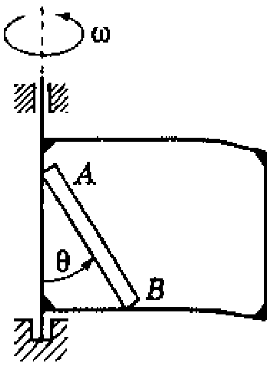
$$C=\frac{m\left[R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)\right]\dot{\theta}_0}{mv^2}\sqrt{\frac{v^2}{\left[R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)\right]}}=$$

$$=\dot{\theta}_0\sqrt{\frac{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)}{v^2}}.$$

Ответ: $\theta-\theta_0=C\operatorname{arctg}\dfrac{vt}{\sqrt{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-2\frac{a^2}{3}\right)}}$, где θ_0 и C — произвольные постоянные.

Задача 48.19

Концы однородного тяжелого стержня AB длины $2a$ и массы M скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной стороны. Составить уравнение движения стержня и определить положение относительного равновесия.



Решение

Выберем в качестве обобщенной координаты угол θ. Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{M}{2}(a^2\omega^2 \sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{(I_C \cdot \vec{\omega}_a)\cdot\vec{\omega}_a}{2},$$

где $I_C = \begin{Bmatrix} \dfrac{Ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$ — тензор инерции стержня в осях $Oxyz$ (рис. 1); $\vec{\omega}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \end{Bmatrix}$ — вектор абсолютной угловой скорости в осях $Oxyz$;

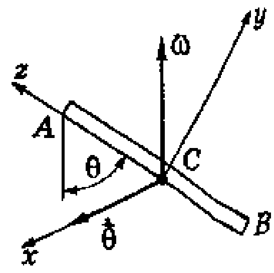


Рис. 1

$$I_C \cdot \vec{\omega}_A = \begin{Bmatrix} \dfrac{Ma^2}{3} & \dot{\theta} \\ \dfrac{Ma^2}{3} & \omega\sin\theta \end{Bmatrix},$$

$$(I_C \cdot \vec{\omega}_A)\cdot\vec{\omega}_A = \frac{Ma^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{Ma^2}{3}\omega^2\sin^2\theta.$$

Тогда

$$T = \frac{M}{2}(a^2\omega^2\sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{Ma^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{Ma^2}{6}\omega^2\sin^2\theta =$$

$$= \frac{2M}{3}(a^2\omega^2\sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2). \tag{2}$$

Работа силы тяжести стержня

$$A = Mga(1-\cos\theta). \tag{3}$$

Найдем производные от выражений (2) и (3):

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = Ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta;$$

$$\frac{\partial A}{\partial\theta} = Mga\sin\theta.$$

Подставим их в уравнение (1) и получим

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta = Mga\sin\theta$$

или

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta - Mga\sin\theta = 0.$$

Примечание. Кинетическую энергию стержня можно определить, рассмотрев его движение как сложное: переносное — вместе с рамкой вокруг вертикальной оси z_1 с угловой скоростью ω и относительное — мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей P с угловой скоростью $\dot{\theta}$ (рис. 2), т.е.

$$T = \frac{I_z\omega^2}{2} + \frac{I_P\dot{\theta}^2}{2},$$

где $I_z = \int\limits_0^{2a}\frac{M}{2a}d\xi\cdot\xi^2\sin^2\theta = \frac{4}{3}Ma^2\sin^2\theta,$

$I_P = I_C + M(PC)^2 = \frac{Ma^2}{3} + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2.$

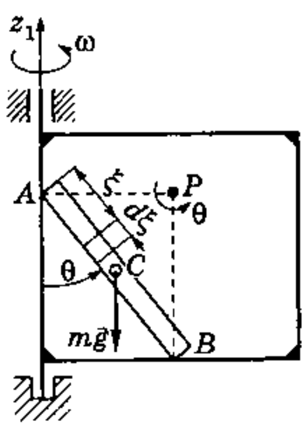


Рис. 2

Тогда

$$T=\frac{4}{3}Ma^2\sin^2\theta\cdot\frac{\omega^2}{2}+\frac{4}{3}Ma^2\cdot\frac{\dot\theta}{2}=\frac{2}{3}M(a^2\omega^2\sin^2\theta+a^2\dot\theta^2).$$

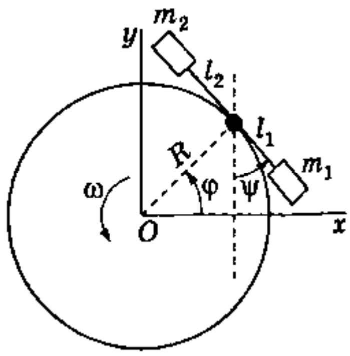
Обобщенную силу Q вычислим по формуле

$$Q=-\frac{\partial\Pi}{\partial\theta},$$

где $\Pi=mqa\cos\theta$ — потенциальная энергия стержня в произвольном положении.

О т в е т: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot\theta-\frac{4}{3}M\omega^2a^2\sin\theta\cos\theta-Mga\sin\theta=0$, где θ — угол, образуемый стержнем с вертикалью. В положении равновесия $\theta=0$ (неустойчивое равновесие).

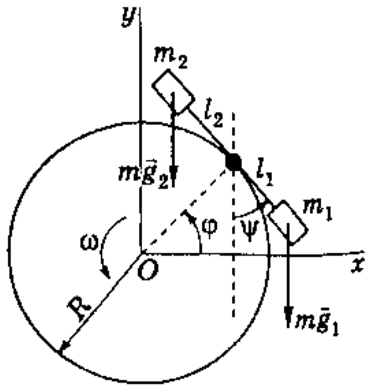
Задача 48.20



К окружности диска радиуса R шарнирно присоединен рычаг, несущий на своих концах сосредоточенные массы m_1 и m_2. Расстояния масс от шарнира соответственно равны l_1 и l_2. Диск вращается около вертикальной оси, перпендикулярной его плоскости, с угловой скоростью ω. Составить уравнение движения рычага и определить его относительное положение равновесия.

Массой рычага пренебречь. Ось вращения рычага параллельна оси вращения диска. Решить также задачу в предположении, что диск вращается в вертикальной плоскости (учесть действие силы тяжести).

Р е ш е н и е



Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right)-\frac{\partial T}{\partial\psi}=\frac{\partial A}{\partial\psi}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия системы (см. рисунок)

$$T=\frac{m_1}{2}(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{m_2}{2}(v_{2x}^2+v_{2y}^2)=$$

$$= \frac{m_1}{2}\left[(-R\omega\sin\varphi + l_1\dot\psi\cos\psi)^2 + (R\omega\cos\varphi + l_1\dot\psi\sin\psi)^2\right] +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left[(-R\omega\sin\varphi - l_2\dot\psi\cos\psi)^2 + (R\omega\cos\varphi - l_2\dot\psi\sin\psi)^2\right] =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)R^2\omega^2}{2} + \frac{m_1 l_1^2}{2}\dot\psi^2 + \frac{m_2 l_2^2}{2}\dot\psi^2 +$$

$$+ m_1 R\omega l_1\dot\psi\sin(\psi - \varphi) - m_2 R\omega l_2\dot\psi\sin(\psi - \varphi).$$

Работа сил тяжести в случае положения диска в горизонтальной плоскости (ось вращения вертикальна) равна нулю. Поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial \psi} = 0.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\dot\psi + R\omega\,(m_1 l_1 - m_2 l_2)\,\sin\,(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot\psi + R\omega(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \varphi)(\dot\psi - \dot\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = R\omega\,(m_1 l_1 - m_2 l_2)\dot\psi\cos(\psi - \varphi).$$

Подставим эти выражения в уравнение (1) и получим уравнение движения рычага для вращения вокруг вертикальной оси:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot\psi - R\omega^2(m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0.$$

При $m_1 l_1 = m_2 l_2$ стержень движется по инерции, т.е. находится в безразличном относительном равновесии.

При $\psi = \omega t \pm \dfrac{\pi}{2}$ имеются положения, при которых скорости достигают экстремума. В этом случае рычаг занимает положение вдоль радиуса к окружности.

При расположении диска в вертикальной плоскости (ось вращения горизонтальна) учитывается вес грузов. Тогда работа сил тяжести

$$A = m_2 g l_2(1 - \cos\psi) - m_1 g l_1(1 - \cos\psi).$$

Обобщенная сила

$$Q = \frac{\partial A}{\partial \psi} = m_2 g l_2 \sin\psi - m_1 g l_1 \sin\psi = g(m_2 l_2 - m_1 l_1)\sin\psi.$$

Дифференциальное уравнение для вращения вокруг горизонтальной оси

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - (m_1 l_1 - m_2 l_2) R\omega^2 \cos(\psi - \omega t) = g(m_2 l_2 - m_1 l_1)\sin\psi$$

или

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin\psi = 0.$$

Так как при $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ не существует экстремума для ψ, то в этом случае относительное равновесие рычага невозможно.

Ответ: для вращения вокруг вертикальной оси

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0;$$

при $m_1 l_1 = m_2 l_2$ рычаг в безразличном относительном равновесии, при $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ существуют два положения относительного равновесия, при которых $\psi = \omega t \pm \pi/2$, т.е. рычаг направлен по радиусу.

Для вращения вокруг горизонтальной оси

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2 (m_1 l_1 - m_2 l_2)\cos(\psi - \omega t) + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \sin\psi = 0;$$

при $m_1 l_1 \neq m_2 l_2$ относительное равновесие невозможно.

Задача 48.21

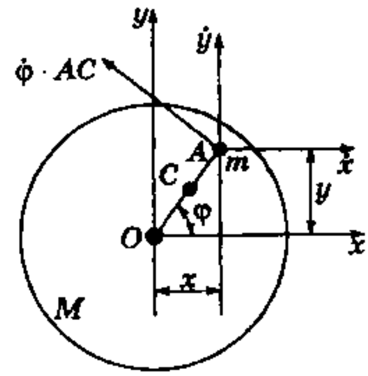
Тонкий диск массой M может своей плоскостью скользить без трения по горизонтальной плоскости. По диску, верхняя поверхность которого шероховатая, движется материальная точка массы m. Уравнения относительного движения точки в декартовых координатах x и y, связанных с диском и имеющих начало в его центре масс, заданы в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Момент инерции диска относительно его центра масс равен I. Определить закон изменения угловой скорости диска. В начальном положении диск неподвижен.

Решение

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ диска.

Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}. \qquad (1)$$



Кинетическая энергия механической системы, состоящей из диска и точки массы m (см. рисунок), равна сумме кинетических энергий при движении системы вместе с центром масс и при движении диска и точки относительно центра масс.

Положение центра масс

$$OC=\frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{M+m},$$

$$AC=OA-OC=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{M+m}=\frac{M\sqrt{x^2+y^2}}{M+m};$$

$\dot x, \dot y$ — проекции скорости точки на оси координат; $\dot\varphi\cdot AC$ — переносная скорость точки при вращении диска относительно центра масс.

Тогда кинетическая энергия системы

$$T=(M+m)\frac{v_C^2}{2}+\frac{I_C\dot\varphi^2}{2}+\frac{mv_a^2}{2}, \qquad (2)$$

где v_C — скорость центра масс системы, $v_C=\sqrt{\dot x_C^2+\dot y_C^2}$; I_C — момент инерции диска относительно центра масс; v_a — абсолютная скорость точки по отношению к центру масс, $v_a=\sqrt{v_{ax}^2+v_{ay}^2}$.

Подставим выражения v_C и v_a в формулу (2) и получим

$$T=(M+m)\frac{1}{2}(\dot x_C^2+\dot y_C^2)+\left[I+M(OC)^2\right]\frac{\dot\varphi^2}{2}+$$

$$+\frac{m}{2}\left[(\dot x-\dot\varphi\cdot AC\cdot\sin\varphi)^2+(\dot y+\dot\varphi\cdot AC\cdot\cos\varphi)^2\right],$$

где $\sin\varphi=\dfrac{y}{OA}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тогда

$$T=\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\left[I+\frac{Mm^2(x^2+y^2)}{M+m}\right]\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+$$

$$+\frac{m}{2}\left[\left(\dot{x}-\dot{\varphi}\,\frac{M\sqrt{x^2+y^2}}{M+m}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\dot{y}+\dot{\varphi}\frac{M\sqrt{x^2+y^2}}{M+m}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{Mm^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\;\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+$$

$$+\frac{m}{2}\left[\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{\varphi}y\frac{M}{M+m}+\frac{\dot{\varphi}^2y^2M^2}{(M+m)^2}+\dot{y}^2+2\dot{y}\dot{\varphi}x\frac{M}{M+m}+\dot{\varphi}^2x^2\frac{M^2}{(M+m)^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{Mm^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\;\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{M^2m\dot{\varphi}^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{mM}{M+m}(\dot{y}x-\dot{x}y)\,\dot{\varphi}=\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2)+$$

$$+\left[I+\frac{Mm(x^2+y^2)}{M+m}\right]\frac{\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{mM}{M+m}(\dot{y}x-\dot{x}y)\,\dot{\varphi}.$$

Обобщенная сила $Q_\varphi=0$, поскольку диск перемещается по гладкой горизонтальной поверхности, работа силы тяжести равна нулю.

Так как кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты, то

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\text{const}. \qquad (3)$$

Найдем производную, подставим ее в Формулу (3) и получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left[I + \frac{Mm(x^2+y^2)}{M+m} \right] \dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} + y\dot{x}) = C. \qquad (4)$$

Из формулы (4) найдем значение C, при начальных условиях движения: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

Тогда

$$C = \frac{mM}{m+M}(\dot{y}_0 x_0 - \dot{x}_0 y_0).$$

С учетом этого закон изменения угловой скорости диска

$$\left[I + \frac{mM}{M+m}(x^2+y^2) \right] \dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0).$$

Ответ: $\left[I + \frac{mM}{M+m}(x^2+y^2) \right] \dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0)$,

где x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ — значения координат и проекции скорости точки в начальный момент времени.

Задача 48.22

По диску, описанному в предыдущей задаче, вдоль окружности радиуса R движется материальная точка с относительной скоростью $v = \alpha t$. Найти закон движения диска.

Решение

Запишем уравнения движения точки по окружности и ее скорость в декартовых координатах

$$x = R\cos\frac{\alpha t^2}{2R}, \quad y = R\sin\frac{\alpha t^2}{2R};$$

$$\dot{x} = -\alpha t R \sin\frac{\alpha t^2}{2R}, \quad \dot{y} = -\alpha t R \cos\frac{\alpha t^2}{2R},$$

где $\frac{\alpha t^2}{2R}$ — длина дуги окружности; $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \alpha t$.

С учетом этих выражений ответ в решении задачи 48.21 запишем так:

$$\left[I+\frac{mM(x^2+y^2)}{M+m}\right]\dot{\varphi}+\frac{mM}{m+M}\left(R\alpha t\cos^2\frac{\alpha t^2}{2R}+R\alpha t\sin^2\frac{\alpha t^2}{2R}\right)=0,$$

где при $t=0$ $x_0=R$; $y_0=0$, $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=0$.

Так как $\dot{\varphi}=\dfrac{d\varphi}{dt}$, то разделим переменные и проинтегрируем

$$\left[I+\frac{mM(x^2+y^2)}{M+m}\right]d\varphi=-\frac{mM}{m+M}R\alpha t dt,$$

откуда с учетом того, что $x^2+y^2=R^2$

$$\varphi=-\frac{mMR\alpha t^2}{2\left[(m+M)I+mMR^2\right]}=\frac{\beta}{2R}t^2,$$

где $\beta=-\dfrac{mMR^2\alpha}{(m+M)I+mMR^2}$.

В подвижной системе, жестко связанной с диском и с началом координат в центре диска, координаты центра масс

$$x_C=\frac{mx}{m+M}=\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha t^2}{2R};$$

$$y_C=\frac{my}{m+M}=\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha t^2}{2R}.$$

Если ввести неподвижную систему с началом отсчета в центре масс, то к аргументу синуса и косинуса добавляется угол поворота и меняется знак, т.е.

$$\xi=-\frac{mM}{m+M}\cos\left(\frac{\alpha t^2}{2R}+\varphi\right),\quad \eta=-\frac{mM}{m+M}\sin\left(\frac{\alpha t^2}{2R}+\varphi\right),$$

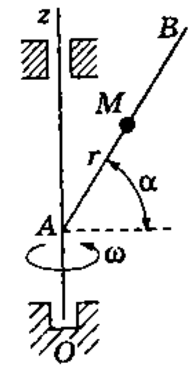
где $\varphi=\dfrac{\beta}{2R}t^2$.

Ответ: $\varphi = -\frac{mM}{2(m+M)}\,\frac{R\alpha}{I + \frac{mM}{m+M}R^2}t^2 = \frac{\beta}{2R}t^2$; $\xi = -\frac{mM}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2$,

$\eta = -\frac{mM}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2$, где φ — угол поворота диска, а ξ и η — координаты центра масс диска в неподвижной декартовой системе, имеющей начало в центре инерции системы.

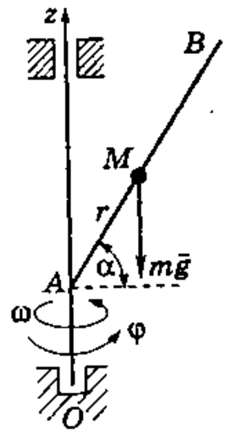
Задача 48.23

Материальная точка M движется под действием силы тяжести по прямолинейному стержню AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси. Стержень AB образует угол α с горизонталью. Найти закон движения точки.



Решение

Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Примем за обобщенные координаты угол φ поворота стержня и смещение r точки M по стержню (см. рисунок). Так как по условию необходимо найти только закон движения точки по стержню, то используем одно уравнение Лагранжа для консервативной системы:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия точки M, совершающей сложное движение,

$$T = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_e^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2\cos^2\alpha}{2},$$

Так как $\dot{\varphi} = \omega$, то

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\cos^2\alpha).$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot r} = \frac{m}{2} 2\dot r = m\dot r,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{m}{2} 2r\omega^2 \cos^2\alpha = m\omega^2 r\cos^2\alpha;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot r}\right) = m\ddot r.$$

Потенциальная энергия точки M

$$\Pi = mgr\sin\alpha.$$

Производная от этого выражения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = mg\sin\alpha.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1):

$$m\ddot r - mr\omega^2\cos^2\alpha = -mg\sin\alpha$$

или

$$\ddot r - r\omega^2\cos^2\alpha = -g\sin\alpha.$$

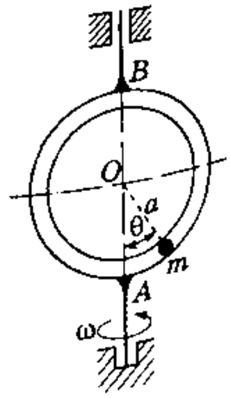
Решим это неоднородное дифференциальное уравнение второй степени и получим

$$r = C_1 e^{\omega t\cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t\cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

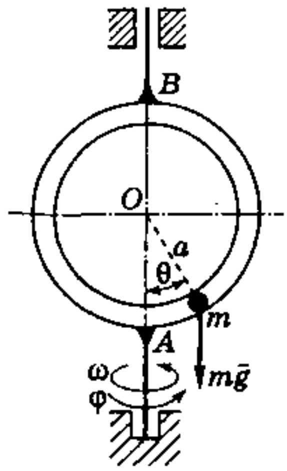
О т в е т: $r = C_1 e^{\omega t\cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t\cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$

Задача 48.24

Материальная точка массы m движется по круговой рамке радиуса a, которая вращается с постоянной скоростью ω вокруг вертикального диаметра AB. Составить уравнение движения точки и определить момент M, необходимый для поддержания постоянства угловой скорости.



Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: угол φ поворота рамки и угол θ отклонения радиуса a от вертикали (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_{\theta}. \qquad (2)$$

Поскольку материальная точка совершает сложное движение, то ее кинетическая энергия

$$T=\frac{ma^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{ma^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}{2}.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии, входящие в уравнение (1) и (2):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=ma^2\varphi\sin^2\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=ma^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta+2ma^2\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=ma^2\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=ma^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=ma^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta.$$

Сообщим системе возможное перемещение и определим обобщенные силы:

а) полагаем $\delta\varphi=0$, $\delta\theta\neq 0$, тогда $\delta A=-mga\sin\theta\cdot\delta\theta \Rightarrow Q_{\theta}=-mga\sin\theta$;

б) полагаем $\delta\varphi\neq 0$, $\delta\theta=0$, тогда $\delta A=M\cdot\delta\varphi \Rightarrow Q_{\varphi}=M$.

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2):

$$m\ddot{\varphi}a^2\sin^2\theta+2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin^2\theta\cos^2\theta = M, \tag{3}$$

$$ma^2\ddot{\theta}-ma^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = -mga\sin\theta. \tag{4}$$

Так как по условию $\dot{\varphi}=\omega=\text{const}$, то $\ddot{\varphi}=0$, следовательно, уравнения (3) и (4) примут вид

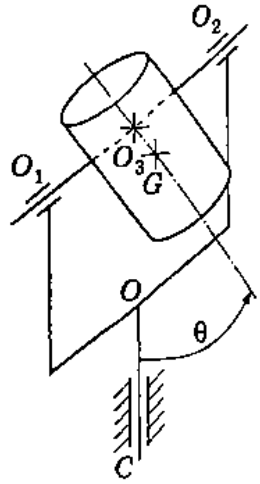
$$2ma^2\sin\theta\cos\theta\cdot\omega\dot{\theta}=M,$$

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0.$$

О т в е т: $\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0,\ M=2ma^2\sin\theta\cos\theta\cdot\omega\dot{\theta}.$

Задача 48.25

Тело массы m может вращаться вокруг горизонтальной оси O_1O_2, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OC. Центр масс тела G лежит на расстоянии l от точки O_3 на прямой, перпендикулярной O_1O_2. Предполагая, что оси O_1O_2 и O_3G являются главными осями инерции тела в точке O_3, составить уравнение движения. Моменты инерции тела относительно главных осей равны A, B, C.



Р е ш е н и е

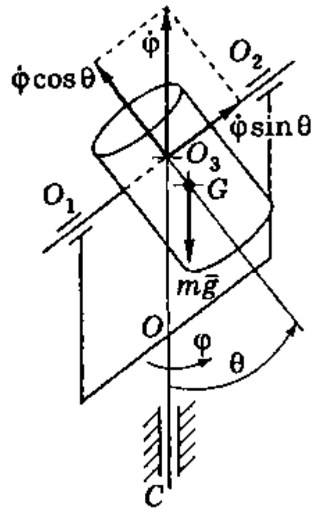
Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: φ — угол поворота рамки вокруг оси CO, θ — угол поворота тела вокруг оси O_1O_2 (см. рисунок).

Запишем уравнение Лагранжа для координаты θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=-\frac{\partial П}{\partial\theta}. \tag{1}$$

Кинетическая энергия тела, совершающего вращение вокруг пересекающихся осей,

$$T = \frac{A\dot{\theta}^2}{2} + \frac{B\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}{2} + \frac{C\dot{\varphi}^2\sin^2\theta}{2}.$$



Найдем производные, входящие в уравнение (1), обозначив $\dot{\varphi} = \omega$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = A\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -B\omega^2\cos\theta\sin\theta + C\omega^2\cos\theta\sin\theta = \omega^2(C-B)\cos\theta\sin\theta.$$

Потенциальная энергия тела $\Pi = -mgl\cos\theta$, тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = mgl\sin\theta.$$

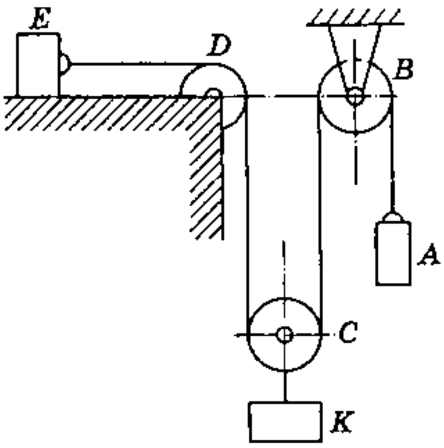
Составим дифференциальное уравнение движения тела:

$$A\ddot{\theta} + \omega^2(C-B)\cos\theta\sin\theta = -mgl\sin\theta.$$

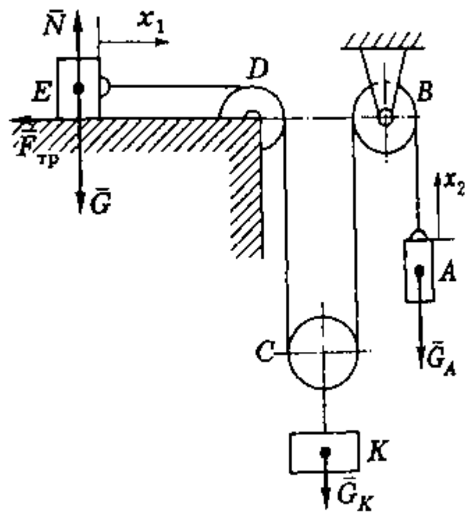
Ответ: $A\ddot{\theta} + \omega^2(C-B)\cos\theta\sin\theta = -mgl\sin\theta$,
где θ — угол поворота вокруг O_1O_2.

Задача 48.26

Однородная нить, к концу которой привязан груз A массы m, огибает неподвижный блок B, охватывает подвижный блок C, поднимается вверх на неподвижный блок D и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к ее концу привязан груз E массы m. К оси блока C прикреплен груз K массы m_1. Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f. При каком условии груз K будет опускаться вниз, если начальные скорости всех грузов равнялись нулю? Найти ускорение груза K. Массами блоков и нити пренебречь.



Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение груза E, x_2 — смещение груза A (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{d\dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=T_E+T_A+T_K=\frac{m_E v_E^2}{2}+\frac{m_A v_A^2}{2}+\frac{m_K v_K^2}{2}=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{8}\left[4m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\right].$$

Определим производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=\frac{1}{8}\left[8m\dot{x}_1+2m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\right]=\frac{1}{4}\left[4m\dot{x}_1+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{1}{4}\left[4m\ddot{x}_1+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)^2\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=\frac{1}{8}\left[8m\dot{x}_2+2m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\right]=\frac{1}{4}\left[4m\dot{x}_2+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{1}{4}\left[4m\ddot{x}_2+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)^2\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Найдем обобщенные силы Q_1 и Q_2.

а) Полагаем $\delta x_1>0$, $\delta x_2=0$, тогда

$$\delta A_1=-F_{тр}\delta x_1+G_K\frac{\delta x_1}{2}=\left(\frac{m_1 g}{2}-fmg\right)\delta x_1,$$

$$Q_1 = \frac{m_1 g}{2} - fmg = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm);$$

б) полагаем $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 > 0$, тогда

$$\delta A_2 = G_K \frac{\delta x_2}{2} - G_A \delta x_2 = \left(\frac{m_1 g}{2} - mg\right)\delta x_2,$$

$$Q_2 = \frac{g}{2}(m_1 - 2m).$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm),$$

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2m)$$

или

$$(4m + m_1)\ddot{x}_1 + m_1\ddot{x}_2 = 2g(m_1 - 2fm), \qquad (3)$$

$$(4m + m_1)\ddot{x}_2 + m_1\ddot{x}_1 = 2g(m_1 - 2m). \qquad (4)$$

Из уравнения (3) выразим $\ddot{x}_1$ через $\ddot{x}_2$, подставим этот результат в уравнение (4) и найдем ускорение груза A:

$$\frac{m_1}{4m + m_1}\ddot{x}_2 - \frac{4m - m_1}{m_1}\ddot{x}_2 = 2g\left(\frac{m_1 - 2fm}{4m + m_1} - \frac{m_1 - 2m}{m_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = g\left[\frac{m_1(1 + f) - 4m}{2(m_1 + 2m)}\right];$$

Ускорение груза E

$$\ddot{x}_1 = g\left[\frac{m_1(3 - f) - 4mf}{2(m_1 + 2m)}\right].$$

Тогда ускорение груза K

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = g\frac{m_1(3 - f) - 4mf + m_1(1 + f) - 4m}{2 \cdot 2(m_1 + 2m)} = g\ \frac{m_1 - m(1 + f)}{m_1 + 2m}.$$

Груз K будет опускаться вниз при нулевой начальной скорости, если $w>0$, т.е. когда

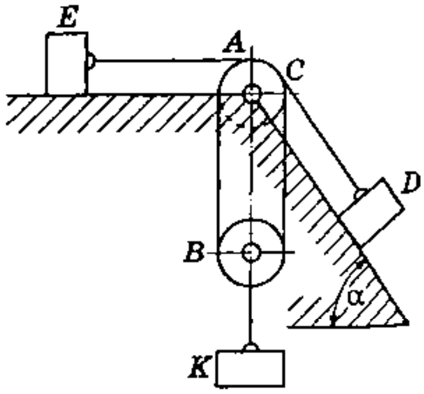
$$g\left[\frac{m_1-m(1+f)}{(m_1+2m)}\right]>0$$

или

$$m_1>m(1+f).$$

О т в е т: $m_1>m(1+f)$; $w=g\dfrac{m_1-m(1+f)}{m_1+2m}$.

Задача 48.27



Два груза D и E массы m каждый привязаны к концам нерастяжимой нити. Эта нить от груза E идет через неподвижный блок A, охватывает подвижный блок B, возвращается вверх на неподвижный блок C, соосный с блоком A, проходит параллельно гладкой наклонной плоскости, где к концу нити привязан груз D. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. К подвижному блоку B прикреплен груз K массы m_1. Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f. Массами блоков и нити пренебречь. Выяснить условие, при котором груз K будет опускаться. Найти ускорение этого груза. В начальный момент скорости всех грузов равнялись нулю.

Р е ш е н и е

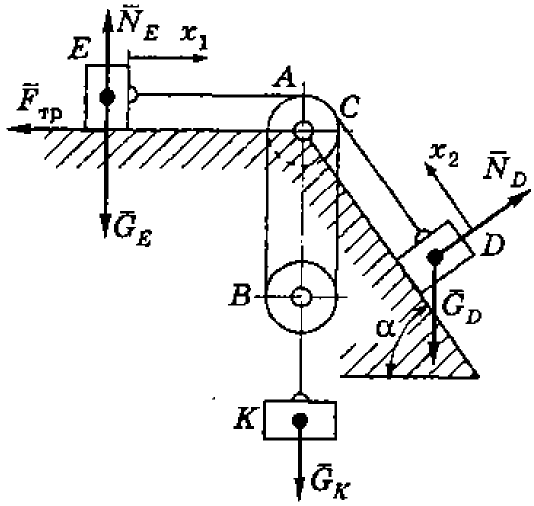
Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение груза E, x_2 — смещение груза D (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы



$$T = T_E + T_A + T_K =$$

$$= \frac{m_E v_E^2}{2} + \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_K v_K^2}{2} =$$

$$= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\left[4m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right].$$

Определим производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{8}\left[8m\dot{x}_1 + 2m_1(x_1 + \dot{x}_2)^2\right] = \frac{1}{4}\left[4m\dot{x}_1 + m_1(x_1 + \dot{x}_2)^2\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{1}{4}\left[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)^2\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{8}\left[8m\dot{x}_2 + 2m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right] = \frac{1}{4}\left[4m\dot{x}_2 + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{1}{4}\left[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)^2\right];$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Найдем обобщенные силы Q_1 и Q_2.

а) Полагаем $\delta x_1 > 0$, $\delta x_2 = 0$, тогда

$$\delta A_1 = -F_{тр}\delta x_1 + G_K\frac{\delta x_1}{2} = \left(\frac{m_1 g}{2} - fmg\right)\delta x_1,$$

$$Q_1 = \frac{m_1 g}{2} - fmg = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm);$$

б) полагаем $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 > 0$, тогда

$$\delta A_2 = G_K\frac{\delta x_2}{2} - G_A \sin\alpha\delta x_2 = \left(\frac{m_1 g}{2} - mg\sin\alpha\right)\delta x_2,$$

$$Q_2 = \frac{g}{2}(m_1 - 2m\sin\alpha).$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm),$$

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2m\sin\alpha).$$

Решим эту систему уравнений и найдем ускорение грузов E и A:

$$\ddot{x}_1 = g\frac{m_1(2 - f + \sin\alpha) - 4mf}{2(m_1 + 2m)};$$

$$\ddot{x}_2 = g\frac{m_1(2 + f) - \sin\alpha(4m + m_1)}{2(m_1 + 2m)}.$$

Ускорение груза K

$$w = \frac{\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1}{2} = g\frac{m_1(2 + f) - \sin\alpha(4m + m_1) + m_1(2 - f + \sin\alpha) - 4mf}{2\cdot 2(m_1 + 2m)} =$$

$$= g\,\frac{m_1 - m(f + \sin\alpha)}{m_1 + 2m}.$$

Условие, при котором груз будет опускаться, $w > 0$, т.е. когда

$$m_1 - m(f + \sin\alpha) > 0$$

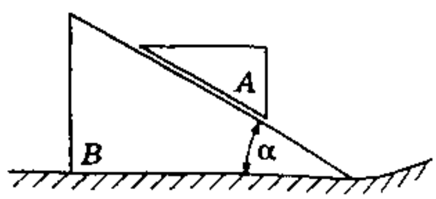
или

$$m_1 > m\,(f + \sin\alpha).$$

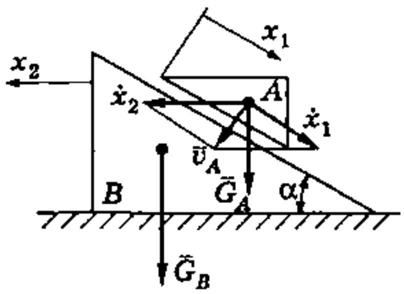
О т в е т: $m_1 > m(f + \sin\alpha)$; $w = g\dfrac{m_1 - m(f + \sin\alpha)}{m_1 + 2m}$.

Задача 48.28

Призма A массы m скользит по гладкой боковой грани призмы B массы m_1, образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы B. Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь.



Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение призмы A по наклонной плоскости призмы B, x_2 — смещение призмы B (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial П}{\partial x_1}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial П}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{mv_A^2}{2}+\frac{m_1 v_B^2}{2}=\frac{m_1\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha).$$

Определим производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1-m\dot{x}_2\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m\ddot{x}_1-m\ddot{x}_2\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2-m_1\dot{x}_2-m\dot{x}_1\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m\ddot{x}_2-m_1\ddot{x}_2-m\ddot{x}_1\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Потенциальная энергия системы

$$П=-G_A x_1\sin\alpha=-mg\,x_1\sin\alpha.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии:

$$\frac{\partial П}{\partial x_1}=-m_1 g\sin\alpha,\quad \frac{\partial П}{\partial x_2}=0.$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим систему дифференциальных уравнений:

$$m\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2\cos\alpha = mg\sin\alpha, \tag{3}$$

$$m\ddot{x}_2 + m_1\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1\cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Разделим уравнение (4) на $\cos\alpha$ и сложим с уравнением (3):

$$-m\ddot{x}_2\cos\alpha + \ddot{x}_2\frac{m+m_1}{\cos\alpha} = mg\sin\alpha$$

или

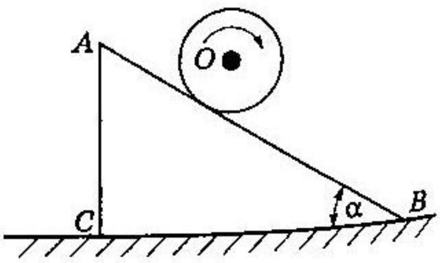
$$m\ddot{x}_2(1-\cos^2\alpha) + m_1\ddot{x}_2 = mg\sin\alpha\cos\alpha.$$

Откуда ускорение призмы B

$$\ddot{x}_2 = w = g\frac{m\sin 2\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}.$$

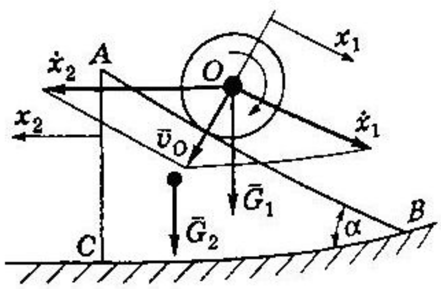
Ответ: $w = g\dfrac{m\sin 2\alpha}{2(m_1 + m\sin^2\alpha)}.$

Задача 48.29



На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC массы m, которая может скользить без трения по этой плоскости; по грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр массы m_1. Определить ускорение призмы.

Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение цилиндра по наклонной плоскости призмы, x_2 — смещение призмы (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial П}{\partial x_2}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=T_1+T_2=\frac{m_1\dot{x}_1^2\sin^2\alpha}{2}+\frac{m_1(\dot{x}_1\cos\alpha-\dot{x}_2)^2}{2}+\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2R^2}\frac{R^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}=$$

$$=\frac{1{,}5m_1\dot{x}_1^2-2m_1\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha+m_1\dot{x}_2^2+m\dot{x}_2^2}{2}=$$

$$=\frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}(m_1+m)\dot{x}_2^2-m_1\dot{x}_1\dot{x}_2\cos\alpha.$$

Определим производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=1{,}5\,m\dot{x}_1-m_1\dot{x}_2\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=1{,}5\,m_1\ddot{x}_1-m_1\ddot{x}_2\cos\alpha,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m_1\dot{x}_2+m\dot{x}_2-m\dot{x}_1\cos\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_1\ddot{x}_2+m\ddot{x}_2-m_1\ddot{x}_1\cos\alpha;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Потенциальная энергия системы

$$П=-G_A x_1\sin\alpha=-m_1 g\,x_1\sin\alpha.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии:

$$\frac{\partial П}{\partial x_1}=-m_1 g\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial П}{\partial x_2}=0.$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим

$$1{,}5m_1\ddot{x}_1 - m_1\ddot{x}_2\cos\alpha = m_1 g\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$m_1\ddot{x}_2 + m\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1\cos\alpha = 0. \qquad (4)$$

Разделим уравнение (3) на 1,5, а уравнение (4) на $\cos\alpha$, сложим почленно и получим

$$\frac{-m_1\ddot{x}_2\cos\alpha}{1{,}5} + \ddot{x}_2\frac{m+m_1}{\cos\alpha} = \frac{m_1 g\sin\alpha}{1{,}5}.$$

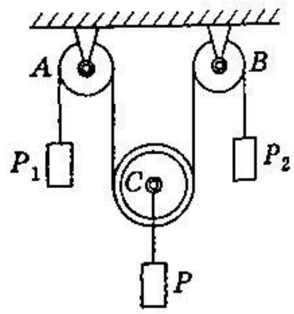
Откуда ускорение призмы

$$\ddot{x}_2 = w = g\frac{m_1\sin 2\alpha}{3(m_1+m) - 2m_1\cos^2\alpha}.$$

О т в е т: ускорение направлено влево и равно $g\dfrac{m_1\sin 2\alpha}{3(m_1+m) - 2m_1\cos^2\alpha}$.

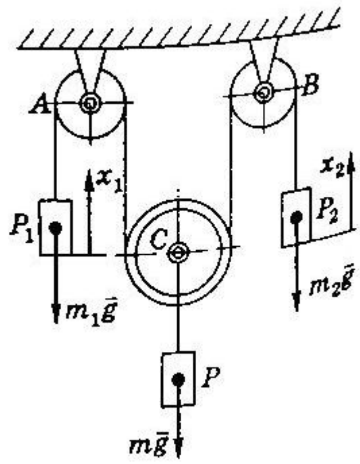
Задача 48.30

Через блоки A и B с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок C; части шнура, не лежащие на концах, вертикальны. Блок C нагружен гирей массы $m = 4$ кг, к концам шнура прикреплены грузы массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура и трением на осях.



Р е ш е н и е

Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение груза P_1, x_2 — смещение груза P_2 (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2+m\frac{\dot{x}_1^2+2\dot{x}_1^2\dot{x}_2^2+\dot{x}_2^2}{4}\right).$$

Определим производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1+\frac{m(\dot{x}_1+\dot{x}_2)}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1+\frac{m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)}{4};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2+\frac{m(\dot{x}_1+\dot{x}_2)}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2+\frac{m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)}{4}.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi=m_1 g\,x_1+m_2 g\,x_2-mg\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}=m_1 g-\frac{mg}{2}=\frac{g}{2}(2m_1-m),$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}=m_2 g-\frac{mg}{2}=\frac{g}{2}(2m_2-m).$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$m_1\ddot{x}_1+\frac{m}{4}(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)=-\frac{g}{2}(2m_1-m),$$

$$m_2\ddot{x}_2+\frac{m}{4}(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)=-\frac{g}{2}(2m_2-m)$$

или

$$\ddot{x}_1\left(m_1+\frac{m}{4}\right)+\frac{m}{4}\ddot{x}_2=-\frac{g}{2}(2m_1-m), \qquad (3)$$

$$\ddot{x}_2\left(m_2+\frac{m}{4}\right)+\frac{m}{4}\ddot{x}_1=-\frac{g}{2}(2m_2-m). \qquad (4)$$

Разделим уравнение (3) на $m_1+\frac{m}{4}$, уравнение (4) на $\frac{m}{4}$ и вычтем уравнение (4) из уравнения (3), получим

$$\ddot{x}_2\frac{\frac{m}{4}}{m_1+\frac{m}{4}}-\ddot{x}_2\frac{m_2+\frac{m}{4}}{\frac{m}{4}}=\frac{g}{2}\left(\frac{2m_1-m}{m_1+\frac{m}{4}}-\frac{2m_2-m}{\frac{m}{4}}\right).$$

Откуда ускорение груза P_2:

$$w_2=\ddot{x}_2=-g\frac{4m_1m_2-3mm_1+mm_2}{4m_1m_2+m(m_1+m_2)}=-g\frac{4\cdot2\cdot3-3\cdot4\cdot2+4\cdot3}{4\cdot2\cdot3+4(2+3)}=-\frac{3}{11}g.$$

Ускорение груза P_1 найдем из формулы (4):

$$w_1=\ddot{x}_1=\frac{-\frac{g}{2}(2m_2-m)-\ddot{x}_2\left(m_2+\frac{m}{4}\right)}{\frac{m}{4}}=\frac{-\frac{g}{2}(2\cdot3-4)+\frac{3}{11}g\left(3+\frac{3}{4}\right)}{\frac{4}{4}}=\frac{1}{11}g.$$

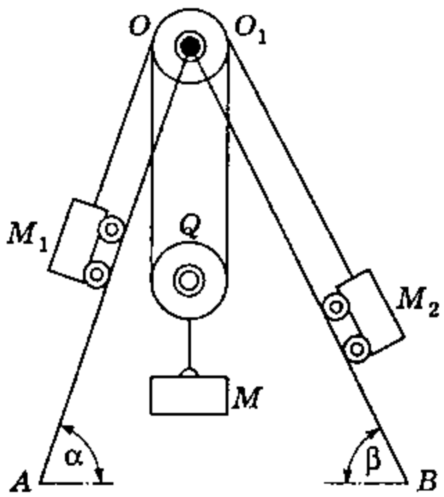
Тогда ускорение груза P

$$w=\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{2}=\frac{\frac{1}{11}-\frac{3}{11}}{2}g=-\frac{1}{11}g.$$

Знак минус в значении ускорения груза P_2 показывает, что этот груз движется вниз. Так как его ускорение больше, чем ускорение груза P_1, значит, груз P будет двигаться вверх.

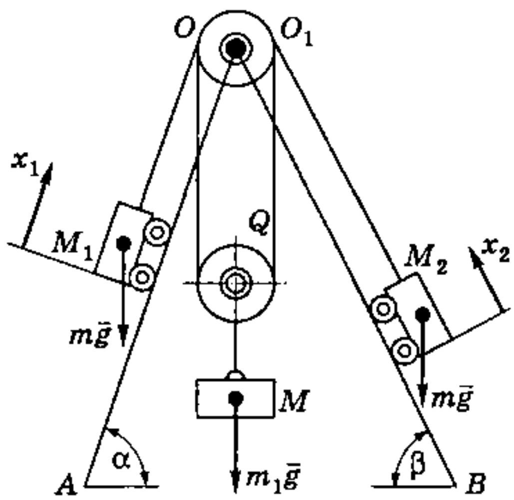
Ответ: $w=\frac{1}{11}g$ (вверх); $w_1=\frac{1}{11}g$ (вверх); $w_2=-\frac{3}{11}g$ (вниз).

Задача 48.31



Грузы M_1 и M_2 одинаковой массы m движутся по двум наклонным направляющим OA и OB, расположенным в вертикальной плоскости под углами α и β к горизонту; нить, соединяющая эти грузы, идет от груза M_1 через блок O, вращающийся около горизонтальной оси, охватывает подвижный шкив Q, несущий груз M массы m_1, и затем через блок O_1, надетый на ту же ось, что и блок O, идет к грузу M_2. Блоки O_1 и O соосные. Определить ускорение w груза M, пренебрегая трением, а также массами блока, шкива и нити.

Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: линейные перемещения x_1 и x_2 соответственно грузов M_1 и M_2 по наклонным плоскостям (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1+m_1\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + m_1\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Потенциальная энергия системы

$$П = mg\,x_1\sin\alpha + mg\,x_2\sin\beta - m_1 g\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial П}{\partial x_1} = mg\sin\alpha - \frac{m_1 g}{2},$$

$$\frac{\partial П}{\partial x_2} = mg\sin\beta - \frac{m_1 g}{2}.$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$mx_1 + m_1\frac{x_1 + x_2}{y} = mg\sin\alpha - \frac{m_1 g}{2},$$

$$mx_2 + m_1\frac{x_1 + x_2}{y} = mg\sin\beta - \frac{m_1 g}{2}$$

или

$$\frac{m_1}{4}\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1\left(m + \frac{m_1}{4}\right) = -\frac{g}{2}(2m\sin\alpha - m_1), \quad (3)$$

$$\frac{m_1}{4}\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\left(m + \frac{m_1}{4}\right) = -\frac{g}{2}(2m\sin\beta - m_1). \quad (4)$$

Решив систему, составленную из уравнений (3) и (4), найдем ускорения грузов M_2 и M_1:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g[4m\sin\beta + m_1(\sin\beta - \sin\alpha - 2)]}{2(2m+m_1)};$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g[m_1(\sin\beta - \sin\alpha + 2) - 4m\sin\alpha]}{2(2m+m_1)}.$$

Тогда ускорение груза M

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} =$$

$$= \frac{g[m_1(\sin\beta - \sin\alpha + 2) - 4m\sin\alpha] - g[4m\sin\beta + m_1(\sin\beta - \sin\alpha - 2)]}{2(2m+m_1)} =$$

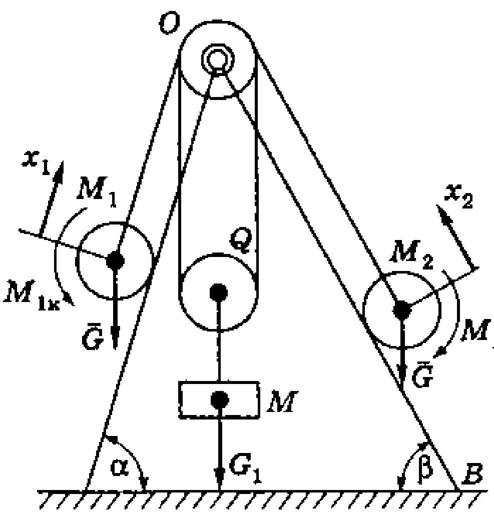
$$= g\frac{m_1 - m(\sin\alpha + \sin\beta)}{2m+m_1}.$$

Ответ: $w = g\dfrac{m_1 - m(\sin\alpha + \sin\beta)}{2m+m_1}$.

Задача 48.32

Решить предыдущую задачу, заменив грузы M_1 и M_2 катками массы m и радиуса r каждый. Катки считать однородными сплошными круглыми дисками. Коэффициент трения качения катков о наклонные плоскости равен $f_к$. Нити закреплены на осях катков.

Решение



Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 и x_2 (см. рисунок) — линейные перемещения соответственно катков M_1 и M_2 вдоль наклонных плоскостей.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{3}{4}m\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}m\dot{x}_2^2+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=\frac{3}{2}m\dot{x}_1+m_1\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{3}{2}m\ddot{x}_1-m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=\frac{3}{2}m_1\dot{x}_2+m_1\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{3}{2}m\ddot{x}_2+m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Определим обобщенные силы Q_1 и Q_2.

а) Полагаем $\delta x_1>0$, $\delta x_2=0$, тогда

$$\delta A_1=-G\sin\alpha\delta x_1-M_{1\text{к}}\frac{\delta x_1}{r}+G_1\frac{\delta x_1}{2}=$$

$$=\left(-mg\sin\alpha-mg\frac{f_\text{к}}{r}\cos\alpha+\frac{1}{2}m_1g\right)\delta x_1,$$

$$Q_1=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\alpha-m\frac{f_\text{к}}{r}\cos\alpha\right).$$

б) Полагаем $\delta x_1=0$, $\delta x_2>0$, тогда

$$\delta A_2=-G\sin\beta\delta x_2-M_{2\text{к}}\frac{\delta x_2}{r}+G_1\frac{\delta x_2}{2}=$$

$$=\left(-mg\sin\beta-mg\frac{f_\text{к}}{r}\cos\beta+\frac{1}{2}m_1g\right)\delta x_2,$$

$$Q_2=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\beta-m\frac{f_\text{к}}{r}\cos\beta\right).$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1+m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4}=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\alpha-m\frac{f_к}{r}\cos\alpha\right),$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2+m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4}=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\beta-m\frac{f_к}{r}\cos\beta\right)$$

или

$$\ddot{x}_1\left(\frac{3}{2}m+\frac{m_1}{4}\right)+\frac{m_1}{4}\ddot{x}_2=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\alpha-m\frac{f_к}{r}\cos\alpha\right), \tag{3}$$

$$\ddot{x}_2\left(\frac{3}{2}m+\frac{m_1}{4}\right)+\frac{m_1}{4}\ddot{x}_1=g\left(\frac{m_1}{2}-m\sin\beta-m\frac{f_к}{r}\cos\beta\right). \tag{4}$$

Решив систему уравнений (3) и (4), найдем ускорения грузов M_2 и M_1:

$$\ddot{x}_2=g\frac{3m_1+m_1(\sin\alpha-\cos\beta)+m_1\frac{f_к}{r}(\sin\alpha-\cos\beta)-6m\left(\sin\beta+\frac{f_к}{r}\cos\beta\right)}{3(3m-m_1)};$$

$$\ddot{x}_1=g\frac{3m_1+m_1(\sin\beta-\sin\alpha)+m_1\frac{f_к}{r}(\cos\beta-\cos\alpha)-6m\left(\sin\alpha+\frac{f_к}{r}\cos\alpha\right)}{3(3m+m_1)}.$$

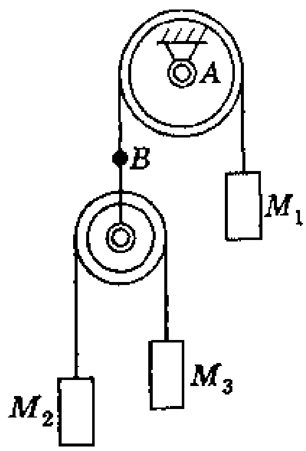
Тогда ускорение груза M

$$w=\frac{\ddot{x}_2+\ddot{x}_1}{2}=g\frac{m_1-m\left[\sin\alpha+\sin\beta+\frac{f_к}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}{3m+m_1}.$$

Ответ: $w=g\dfrac{m_1-m\left[\sin\alpha+\sin\beta+\frac{f_к}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}{3m+m_1}.$

Задача 48.33

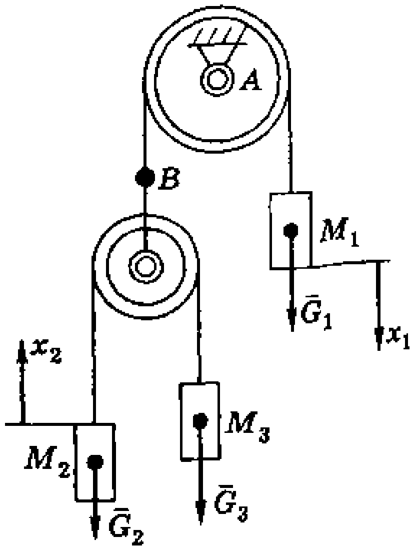
Дана система из двух блоков, неподвижного A и подвижного B, и трех грузов M_1, M_2, M_3, подвешенных с помощью нерастяжимых нитей, как указано на рисунке. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2, m_3, при этом $m_1 < m_2 + m_3$ и $m_2 \gtrless m_3$.



Массами блоков пренебречь. Найти, при каком соотношении масс m_1, m_2 и m_3 груз M_1 будет опускаться в том случае, когда все начальные скорости грузов равны нулю.

Решение

Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение груза M_1 вниз, x_2 — смещение груза M_2 вверх (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2}.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) + m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) + m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) - m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) - m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Потенциальная энергия системы

$$П = -G_1 x_1 + G_2(x_1 + x_2) + G_3(x_1 - x_2) = g\left[-m_1 x_1 + m_2(x_1 + x_2) + m_3(x_1 - x_2)\right].$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial П}{\partial x_1} = g(m_2 + m_3 - m_1),$$

$$\frac{\partial П}{\partial x_2} = g(m_2 - m_3).$$

Составим дифференциальные уравнения движения системы, подставив значения производных в уравнения (1) и (2):

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -g(m_2 + m_3 - m_1),$$

$$m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -g(m_2 - m_3)$$

или

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{x}_2(m_2 - m_3) = -g(m_2 + m_3 - m_1), \tag{3}$$

$$\ddot{x}_1(m_2 - m_3) + \ddot{x}_2(m_2 + m_3) = -g(m_2 - m_3). \tag{4}$$

Решив систему уравнений (3) и (4), получим

$$\ddot{x}_1\left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2 - m_3} - \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right) = g\left(\frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2 - m_3} - \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}\right),$$

откуда ускорение груза M

$$\ddot{x}_1 = g\frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1 m_2 + m_1 m_3}.$$

Ускорение груза M_1 направлено вниз, если $m_1 m_2 + m_1 m_3 - 4m_2 m_3 > 0$, т.е. при

$$m_1 > \frac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}.$$

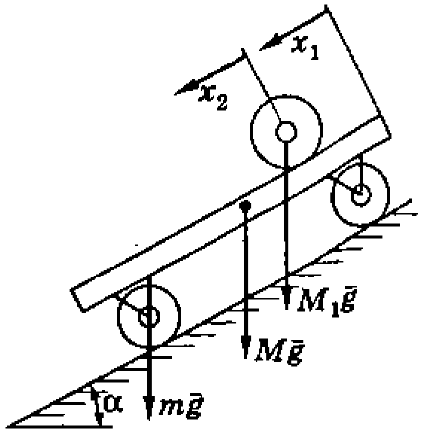
Ответ: должно быть $m_1 > \dfrac{4m_2 m_3}{m_2 + m_3}$.

Задача 48.34

Найти ускорение тележки, по платформе которой катится без скольжения круглый цилиндр, если сама тележка скатывается тоже без скольжения по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α и параллельной платформе тележки; образующие цилиндра перпендикулярны линиям наибольшего ската платформы. Масса тележки без колес M, масса всех колес m, масса цилиндра M_1, колеса считать однородными сплошными дисками.

Решение

Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x_1 — смещение тележки, x_2 — смещение цилиндра (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{M\dot{x}_1^2}{2}+\frac{M_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{M_1r^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2+\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2=$$

$$=\frac{M\dot{x}_1^2}{2}+\frac{M_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2}{2}+\frac{M_1\dot{x}_2^2}{2}+\frac{3}{4}m\dot{x}_1^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=M\dot{x}_1+M_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+\frac{3m\dot{x}_1}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=M\ddot{x}_1+M_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+\frac{3m\ddot{x}_1}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=M_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+\frac{M\dot{x}_2}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{M\ddot{x}_2}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

Потенциальная энергия системы

$$П = -Mg\,x_1 \sin\alpha - mg\,x_1 \sin\alpha - M_1 g(x_1 + x_2)\sin\alpha.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial П}{\partial x_1} = -Mg\sin\alpha - mg\sin\alpha - M_1 g\sin\alpha = -g(M + m + M_1)\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial П}{\partial x_2} = -M_1 g\sin\alpha.$$

Представим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения движения системы:

$$\ddot{x}_1\left(M + \frac{3}{2}m + M_1\right) + \ddot{x}_2 M_1 = g(M + m + M_1)\sin\alpha, \tag{3}$$

$$\ddot{x}_1 M_1 + \ddot{x}_2 \frac{3}{2} M_1 = gM_1 \sin\alpha. \tag{4}$$

Из уравнения (4)

$$\ddot{x}_2 = \frac{gM_1 \sin\alpha - \ddot{x}_1 M_1}{3/2\, M_1} = \frac{2}{3} g\sin\alpha - \frac{2}{3}\ddot{x}_1.$$

Подставим это выражение в уравнение (3) и получим

$$\ddot{x}_1\left(M + M_1 + \frac{3}{2}m\right) + \frac{2}{3}M_1 g\sin\alpha - \frac{2}{3}M_1\ddot{x}_1 = g(M + M_1 + m)\sin\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1\left(M + \frac{1}{3}M_1 + \frac{3}{2}m\right) = g\sin\alpha\left(M + \frac{1}{3}M_1 + m\right).$$

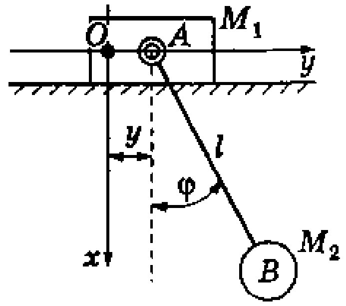
Отсюда ускорение тележки

$$w=\ddot{x}_1=g\,\frac{6M+2M_1+6m}{6M+2M_1+9m}\sin\alpha.$$

О т в е т: $w=g\,\dfrac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}\sin\alpha.$

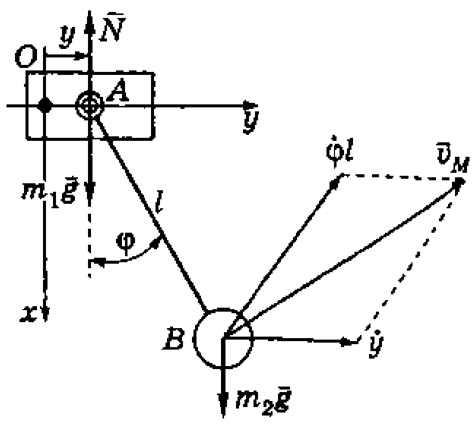
Задача 48.35

Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна M_1 массы m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика M_2 массы m_2, соединенного с ползуном стержнем AB длины l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка. Массой стержня пренебречь. Определить период малых колебаний эллиптического маятника.



Р е ш е н и е

Система имеет две степени свободы. Выбираем обобщенные координаты: y — горизонтальное смещение ползуна, φ — угол отклонения стержня (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot y}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y},\qquad(1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.\qquad(2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{m_1\dot y}{2}+\frac{m_2 l^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi}{2}+\frac{m_2(l\dot\varphi\cos\varphi+\dot y)^2}{2}.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m_1 \dot{y} + m_2(l\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_1 \ddot{y} - m_2 l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + m_2 l\,\ddot{\varphi}\cos\varphi + m_2 \ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2 \dot{\varphi}\sin^2\varphi + m_2(l\,\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y})l\cos\varphi = m_2 l^2 \dot{\varphi} + m_2 l\,\dot{y}\cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{y}\cos\varphi - m_2 l \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi\cos\varphi - m_2(l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y})l\dot{\varphi}\sin\varphi = m_2 l \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -m_2 g l\cos\varphi.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 g l\sin\varphi.$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения:

$$m_1 \ddot{y} - m_2 l\,\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + m_2 l\,\ddot{\varphi}\cos\varphi + m_2 \ddot{y} = 0,$$

$$m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{y}\cos\varphi - m_2 l \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi = -m_2 g l\sin\varphi.$$

После преобразований получим

$$\ddot{y}(m_1 + m_2) + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] = 0, \qquad (3)$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

Для определения периода малых колебаний эллиптического маятника делаем допущения: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, $\dot\varphi^2 \sin\varphi \approx 0$, тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$\ddot y(m_1 + m_2) + m_2 l \ddot\varphi = 0, \tag{5}$$

$$l\ddot\varphi + \ddot y + g\varphi = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (5) найдем $\ddot y$, подставим это значение в уравнение (6) и получим

$$\ddot y = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\ddot\varphi;$$

$$l\ddot\varphi - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\ddot\varphi + g\varphi = 0$$

или

$$\ddot\varphi + \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l}\varphi = 0.$$

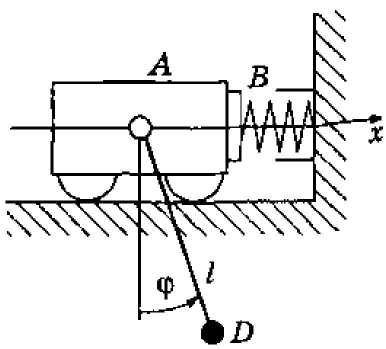
Отсюда определим период малых колебаний маятника:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}}.$$

Ответ: $\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot y + m_2 l\dot\varphi\cos\varphi] = 0$; $l\ddot\varphi + \ddot y\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$;

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}}.$$

Задача 48.36

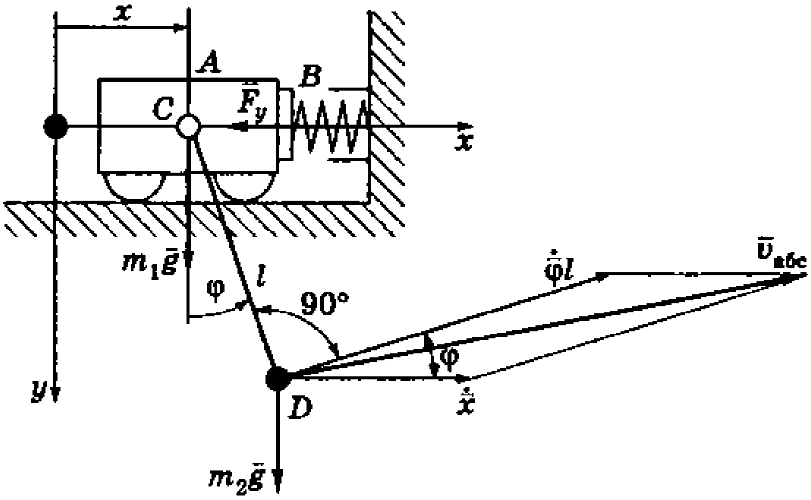


При наезде тележки A на упругий упор B начинаются колебания подвешенного на стержне груза D. Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы, если m_1 — масса тележки, m_2 — масса груза, l — длина стержня, c — коэффициент жесткости пружины упора B. Массой колес и всеми силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в левом конце недеформированной пружины. Определить период малых колебаний груза при отсутствии упора B. Массой стержня пренебречь.

Указания. Пренебречь членом, содержащим множитель $\dot{\varphi}^2$, считать $c=0$, $\sin\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$.

Решение

Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x — горизонтальное смещение тележки, φ — угол отклонения стержня (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T=\frac{m_1\dot{x}^2}{2}+\frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi}{2}+\frac{m_2}{2}(l\dot{\varphi}\cos\varphi+\dot{x})^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}+m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi+m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m_2 l^2 \dot\varphi \sin^2\varphi + m_2 l^2 \dot\varphi \cos^2\varphi + m_2 l \dot x \cos\varphi = m_2 l^2 \dot\varphi + m_2 l \dot x \cos\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = m_2 l \ddot x \cos\varphi + m_2 l^2 \ddot\varphi - m_2 l \dot x \dot\varphi \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l^2 \dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi - m_2(l\dot\varphi\cos\varphi + \dot x) l\dot\varphi \sin\varphi = -m_2 l \dot x \dot\varphi \sin\varphi.$$

Потенциальная энергия системы

$$П = \frac{cx^2}{2} - m_2 g l \cos\varphi.$$

Найдем производные от выражения потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial П}{\partial x} = cx,$$

$$\frac{\partial П}{\partial \varphi} = m_2 g l \sin\varphi.$$

Подставим выражения производных в уравнения (1) и (2) и получим

$$\ddot x(m_1 + m_2) - m_2 l \dot\varphi^2 \sin\varphi + m_2 l \ddot\varphi \cos\varphi = -cx,$$

$$m_2 l \ddot x \cos\varphi + m_2 l^2 \ddot\varphi - m_2 l \dot x \dot\varphi \sin\varphi + m_2 l \dot x \dot\varphi \sin\varphi = -m_2 g l \sin\varphi$$

или

$$\ddot x(m_1 + m_2) - m_2 l \dot\varphi^2 \sin\varphi + m_2 l \ddot\varphi \cos\varphi = -cx, \qquad (3)$$

$$l\ddot\varphi + \ddot x \cos\varphi = -g \sin\varphi. \qquad (4)$$

Определим период малых колебаний эллиптического маятника, сделав допущения с учетом указания: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$, $\dot\varphi^2 \sin\varphi \approx 0$, $c = 0$.

Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$\ddot x(m_1 + m_2) + m_2 l \ddot\varphi = 0, \qquad (5)$$

$$l\ddot\varphi + \ddot x = -g\varphi. \qquad (6)$$

Из уравнения (5) найдем

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2}.$$

Подставим это выражение в уравнение (6) и получим

$$l\ddot{\varphi} - \frac{m_2 l \ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} + g\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $\dfrac{g(m_1 + m_2)}{m_1 l} = k^2$.

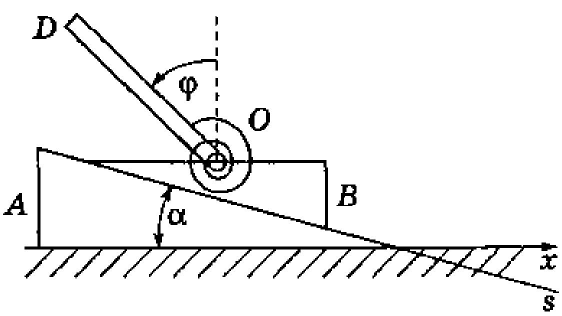
Период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l}{g(m_1 + m_2)}}.$$

Ответ: $(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = -cx$; $\ddot{x}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$;

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача 48.37

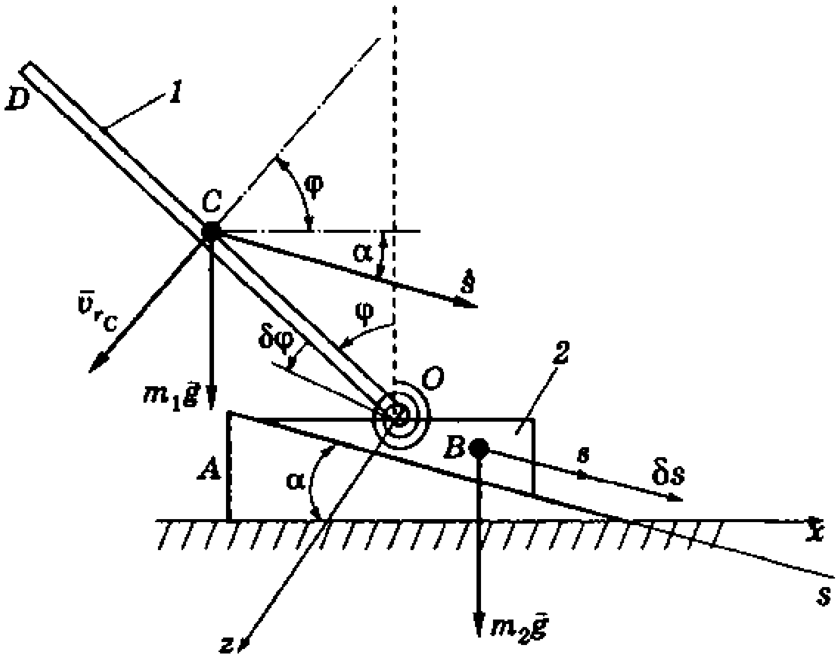


По неподвижной призме A, расположенной под углом α к горизонту, скользит призма B массы m_2. К призме B посредством цилиндрического шарнира O и спиральной пружины с коэффициентом жесткости c присоединен тонкий однородный стержень OD массы m_1 длины l. Стержень совершает колебания вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Положения призмы B и стержня OD определены посредством координат s и φ. Написать дифференциальные уравнения движения материальной системы, состоящей из призмы B и стержня OD, пренебрегая силами трения. Определить период малых колебаний стержня OD, если $m_1 g l \cos^2\alpha < 2c$.

Указание. Считать $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(\alpha + \varphi) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$, затем пренебречь членами, содержащими множители $\dot{\varphi}^2$ и $\varphi \cdot \ddot{\varphi}$.

Решение

Система имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: φ — угол поворота стержня, s — перемещение призмы B по наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 — кинетическая энергия стержня OD; T_2 — кинетическая энергия призмы B.

Кинетическая энергия стержня

$$T_1 = \frac{m_1 v_O^2}{2} + m_1 \bar{v}_O \cdot \bar{v}_{Cr} + T_r,$$

где $v_O = \dot{s}$; $v_{Cr} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}$; $T_r = \frac{I_{Oz}\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_1 l^2}{6}\dot{\varphi}^2$, так как $I_{Oz} = \frac{m_1 l^2}{3}$;
$\bar{v}_O \cdot \bar{v}_{Cr} = v_O v_{r_C} \cos(\bar{v}_O \hat{;} \bar{v}_{Cr})$; $\cos(\bar{v}_O \hat{;} \bar{v}_{Cr}) = -\cos(\alpha + \varphi)$.

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{s}^2}{2} - \frac{m_1 \dot{s} l \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1 l^2}{6} \dot{\varphi}^2$$

или согласно теореме Кенига

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{I_C \dot{\varphi}^2}{2},$$

где $v_C^2 = \bar{v}_C \cdot \bar{v}_C = (\bar{v}_O + \bar{v}_{CO}) \cdot (\bar{v}_O + \bar{v}_{CO}) = v_O^2 + 2 v_O \times$
$\times v_{CO} \cos(180° - (\alpha + \varphi)) + v_{CO}^2$; $v_O = \dot{s}$, $v_{CO} = \frac{l}{2} \dot{\varphi}$, $I_C = \frac{m_1 l^2}{12}$.

Кинетическая энергия призмы

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{s}^2}{2}.$$

Тогда кинетическая энергия системы

$$T = \frac{(m_1 + m_2) \dot{s}^2}{2} - \frac{m_1 \dot{s} l \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1 l^2}{6} \dot{\varphi}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{m_1 \dot{s} l \cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1 l^2}{3} \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{m_1 \ddot{s} l \cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1 \dot{s} l \dot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi)}{2} \dot{\varphi} + \frac{m_1 l^2}{3} \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m_1 \dot{s} l \dot{\varphi} \sin(\alpha + \varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2) \dot{s} - \frac{m_1 l \dot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi)}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = (m_1 + m_2) \ddot{s} - \frac{1}{2} m_1 \ddot{\varphi} l \cos(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} m_1 l \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha + \varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

Определим обобщенные силы Q_1 и Q_2. Сообщим системе возможное перемещение, при котором $\delta s = 0$, $\delta\varphi > 0$, и найдем возможную работу

$$\delta A_1 = \frac{m_1 g l \sin\varphi \cdot \delta\varphi}{2} - c\varphi\delta\varphi = Q_1\delta\varphi,$$

откуда

$$Q_1 = \frac{m_1 g l \sin\varphi}{2} - c\varphi.$$

Сообщим системе возможное перемещение, при котором $\delta\varphi = 0$, $\delta s > 0$, и определим возможную работу

$$\delta A_2 = (m_1 g\,\delta s \sin\alpha + m_2 g\,\delta s \sin\alpha) = (m_1 + m_2) g \sin\alpha \cdot \delta s = Q_2 \delta s,$$

откуда

$$Q_2 = (m_1 + m_2) g \sin\alpha.$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2) и получим

$$-\frac{1}{2} m_1 \ddot{s} l \cos(\alpha+\varphi) + \frac{1}{2} m_1 \dot{s} l \dot{\varphi} \sin(\alpha+\varphi) + \frac{m_1 l^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_1 \dot{s}\dot{\varphi} l \sin(\alpha+\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 g l \sin\varphi - c\varphi,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} - \frac{1}{2} m_1 \ddot{\varphi} l \cos(\alpha+\varphi) + \frac{1}{2} m_1 l \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha+\varphi) = (m_1 + m_2) g \sin\alpha$$

или

$$\frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_1 \ddot{s} l \cos(\alpha+\varphi) = \frac{1}{2} m_1 g l \sin\varphi - c\varphi, \qquad (3)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + \frac{1}{2} m_1 l \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha+\varphi) - \frac{1}{2} m_1 l \ddot{\varphi} \cos(\alpha+\varphi) = (m_1 + m_2) g \sin\alpha. \qquad (4)$$

Согласно указанию в условии задачи считаем, что $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(\alpha+\varphi) \approx \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$, и пренебрегаем членами, содержащими множители $\dot{\varphi}^2$ и $\varphi \cdot \ddot{\varphi}$.

Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1\ddot{s}l(\cos\alpha-\varphi\sin\alpha)=\frac{1}{2}m_1gl\varphi-c\varphi,$$

$$(m_1+m_2)\ddot{s}-\frac{1}{2}m_1l\ddot{\varphi}(\cos\alpha-\varphi\sin\alpha)=(m_1+m_2)g\sin\alpha$$

или

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1\ddot{s}l\cos\alpha+\frac{1}{2}m_1\ddot{s}l\varphi\sin\alpha=\left(\frac{1}{2}m_1gl-c\right)\varphi, \tag{5}$$

$$(m_1+m_2)\ddot{s}-\frac{1}{2}m_1l\ddot{\varphi}\cos\alpha=(m_1+m_2)g\sin\alpha. \tag{6}$$

Из уравнения (6) выразим $\ddot{s}$:

$$\ddot{s}=\frac{m_1l\ddot{\varphi}\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}+g\sin\alpha,$$

подставим это выражение в уравнение (5) и получим

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1l\cos\alpha\left[\frac{m_1l\ddot{\varphi}\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}+g\sin\alpha\right]+$$

$$+\frac{1}{2}m_1\varphi l\sin\alpha\left[\frac{m_1l\ddot{\varphi}\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}+g\sin\alpha\right]=\left(\frac{1}{2}m_1gl-c\right)\varphi$$

или

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{4}\frac{m_1^2l^2\ddot{\varphi}}{m_1+m_2}\cos^2\alpha-\frac{m_1gl\sin\alpha\cos\alpha}{2}+$$

$$+\frac{m_1gl\sin^2\alpha}{2}\varphi=\left(\frac{1}{2}m_1gl-c\right)\varphi. \tag{7}$$

Преобразуем выражение (7):

$$\ddot{\varphi}\left[\frac{1}{3}m_1l^2-\frac{m_1^2l^2\cos^2\alpha}{4(m_1+m_2)}\right]+\left(c-\frac{m_1gl\cos^2\alpha}{2}\right)\varphi=\frac{m_1gl}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\ddot{\varphi}\left[\frac{l^2(m_1^2+3m_1^2\sin^2\alpha+4m_1m_2)}{12(m_1+m_2)}\right]+\frac{2c-m_1gl\cos^2\alpha}{2}\varphi=\frac{m_1gl}{2}\sin 2\alpha,$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{6(m_1+m_2)(2c-m_1gl\cos^2\alpha)}{m_1l^2\left[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2\right]}\varphi=\frac{m_1gl}{2}\sin 2\alpha.$$

Введем обозначение:

$$k^2=\frac{6(m_1+m_2)(2c-m_1gl\cos^2\alpha)}{m_1l^2\left[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2\right]}.$$

Тогда период колебаний стержня

$$\tau=\frac{2\pi}{k}$$

или

$$\tau=2\pi l\sqrt{\frac{m_1\left[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2\right]}{6(m_1+m_2)(2c-m_1gl\cos^2\alpha)}}.$$

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{s}+\frac{1}{2}m_1l\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)-\frac{1}{2}m_1l\ddot{\varphi}\cos\alpha=(m_1+m_2)g\sin\alpha;$

$$\frac{1}{3}m_1l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1\ddot{s}l\cos(\alpha+\varphi)=\frac{1}{2}m_1gl\sin\varphi-c\varphi;$$

$$\tau=2\pi l\sqrt{\frac{m_1\left[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2\right]}{6(m_1+m_2)(2c-m_1gl\cos^2\alpha)}}.$$

Задача 48.38

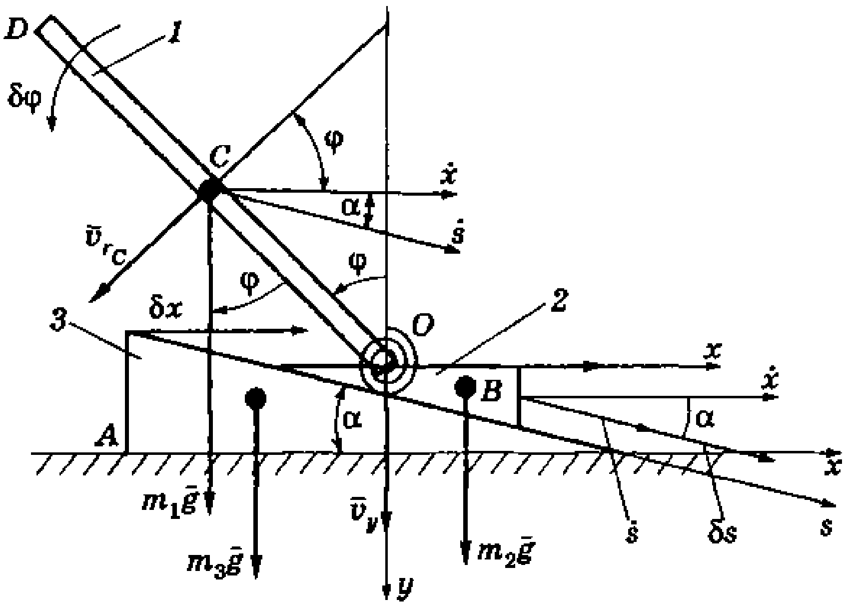
Решить задачу 48.37, считая, что призма A массы m_3 движется по гладкой горизонтальной плоскости, а ее положение определяется координатой x.

Решение

Система имеет три степени свободы. Выберем обобщенные координаты: φ — угол поворота стержня, s — перемещение призмы B по призме A, x — перемещение призмы A по горизонтальной поверхности (см. рисунок).

Запишем три уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_1,\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_2,\\&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_3.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$



Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (2)$$

где T_1 — кинетическая энергия стержня OD; T_2 — кинетическая энергия призмы B; T_3 — кинетическая энергия призмы A.

Определим кинетическую энергию стержня:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_O^2 + m_1 \bar{v}_O \cdot \bar{v}_{C_r} + T_r,$$

где $\bar{v}_O = \bar{v}_x + \bar{v}_y$, $v_x = \dot{x} + \dot{s}\cos\alpha$, $v_y = \dot{s}\sin\alpha$; $v_O^2 = (\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + \dot{s}^2\sin^2\alpha =$ $= \dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2$; $v_{C_r} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}$; $T_r = \frac{I_{Oz}\dot{\varphi}}{2} = \frac{m_1 l^2}{6}\dot{\varphi}^2$,

так как

$$I_{Oz} = \frac{m_1 l^2}{3};$$

$$\bar{v}_O \bar{v}_{C_r} = (\bar{v}_x + \bar{v}_y)\bar{v}_{C_r} = \bar{v}_x \bar{v}_{C_r} + \bar{v}_y \bar{v}_{C_r},$$

$$\bar{v}_x \cdot \bar{v}_{C_r} = v_x v_{C_r} \cos(180° - \varphi) = -v_x v_{C_r} \cos\varphi = -(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)\frac{l\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi =$$

$$= -\frac{l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi - \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos\alpha\cos\varphi,$$

$$\bar{v}_y \cdot \bar{v}_{C_r} = v_y v_{C_r} \cos(90° - \varphi) = \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin\alpha\sin\varphi.$$

Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2) +$$

$$+ m_1\left(-\frac{l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi - \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos\alpha\cos\varphi + \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin\alpha\sin\varphi\right) + \frac{m_1 l^2}{\cdot}\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2) + \frac{m_1 l^2}{6}\dot{\varphi}^2 - m_1\left[\frac{l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi + \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right].$$

Найдем кинетическую энергию призм:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_O^2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2),$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия системы согласно формуле (2) равна:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2) + \frac{m_1 l^2}{6}\dot{\varphi}^2 - m_1\left[\frac{l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi + \frac{l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{s}\dot{x}\cos\alpha + \dot{s}^2) + \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии, входящие в уравнение (1):

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m_1 l^2}{3}\dot{\varphi} - m_1\left[\frac{l\dot{x}}{2}\cos\varphi + \frac{l\dot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{m_1 l^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{m_1 l\ddot{x}}{2}\cos\varphi - \frac{m_1 l\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi) +$$

$$+ \frac{m_1 l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi) + \frac{m_1 l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{m_1 l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi) + \frac{m_1 l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{s}} = \frac{1}{2}m_1(2\dot{x}\cos\alpha + 2\dot{s}) - \frac{m_1 l\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi) + m_2\dot{x}\cos\alpha + m_2\dot{s},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)=$$

$$= m_1(\ddot{x}\cos\alpha+\ddot{s})-\frac{m_1 l}{2}\left[\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)-\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)\right]+m_2(\ddot{x}\cos\alpha+\ddot{s});$$

$$\frac{\partial T}{\partial s}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m_1\dot{x}+m_1\dot{s}\cos\alpha-m_1\frac{l\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi+m_2\dot{x}+m_2\dot{s}\cos\alpha+m_3\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha-\frac{m_1 l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0.$$

Определим обобщенные силы Q_1, Q_2 и Q_3. Сообщим системе возможное перемещение, при котором $\delta\varphi>0$, $\delta s=\delta x=0$, и определим возможную работу:

$$\delta A_1=\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi\cdot\delta\varphi-c\varphi\cdot\delta\varphi=Q_1\delta\varphi.$$

Откуда

$$Q_1=\frac{1}{2}m_1 g l\sin\varphi-c\varphi.$$

Сообщим системе возможное перемещение $\delta s>0$, $\delta\varphi=\delta x=0$ и определим возможную работу:

$$\delta A_2=m_1 g\sin\alpha\cdot\delta s+m_2 g\sin\alpha\cdot\delta s=(m_1+m_2)g\sin\alpha\cdot\delta s=Q_2\delta s.$$

Откуда

$$Q_2=(m_1+m_2)g\sin\alpha.$$

Сообщим системе возможное перемещение $\delta x>0$, $\delta s=\delta\varphi=0$ и определим возможную работу

$$\delta A_3=0=Q_3\delta x.$$

Откуда

$$Q_3=0.$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и получим

$$\frac{m_1 l^2}{3}\ddot{\varphi}-\frac{m_1 l\ddot{x}}{2}\cos\varphi-\frac{m_1 l\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)+\frac{m_1 l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi)+$$

$$+\frac{m_1 l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi-\frac{m_1 l\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi)-\frac{m_1 l\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi=\frac{1}{2}m_1 gl\sin\varphi-c\varphi$$

или

$$\frac{m_1 l^2}{3}\ddot{\varphi}-\frac{m_1 l\ddot{x}}{2}\cos\varphi-\frac{m_1 l\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)=\frac{1}{2}m_1 gl\sin\varphi-c\varphi,$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha+(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)=$$

$$=(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi=0.$$

О т в е т: $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi=0,$

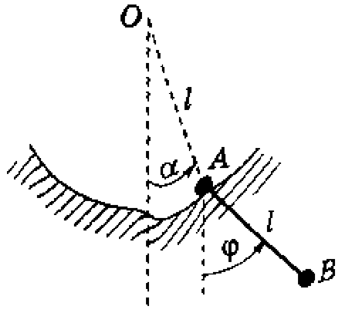
$$(m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha+(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha)-$$

$$-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)=(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{x}\cos\varphi-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}m_1 gl\sin\varphi-c\varphi.$$

Задача 48.39

Материальная точка A массы m_1 движется в вертикальной плоскости по внутренней гладкой поверхности неподвижного цилиндра радиуса l. Материальная точка B массы m_2, присоединенная к точке A посредством стержня AB длины l, может колебаться вокруг оси A, перпендикулярной плоскости рисунка. Положения точек A и B определены с помощью углов α и φ,



отсчитываемых от вертикали. Составить дифференциальные уравнения движения системы. Написать дифференциальные уравнения малых колебаний системы. Массой стержня AB пренебречь.

Указание. Пренебречь членами, содержащими множители $\dot{\varphi}^2$ и $\dot{\alpha}^2$, а также считать $\sin(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$.

Решение

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы α и φ. Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\alpha}=Q_\alpha, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T=T_1+T_2=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}. \tag{3}$$

Найдем скорости точек A и B. Для этого запишем их координаты:

$$\left.\begin{aligned}&x_1=l\cos\alpha,\quad y_1=l\sin\alpha;\\&x_2=l\cos\alpha+l\cos\varphi,\quad y_2=l\sin\alpha+l\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Продифференцируем равенства (4) по времени:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_1=-l\dot{\alpha}\sin\alpha,\quad \dot{y}_1=l\dot{\alpha}\cos\alpha;\\&\dot{x}_2=-l\dot{\alpha}\sin\alpha-l\dot{\varphi}\sin\varphi,\quad \dot{y}_2=l\dot{\alpha}\cos\alpha+l\dot{\varphi}\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned}&v_1^2=\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2=l^2\dot{\alpha}^2,\\&v_2^2=\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2=l^2\dot{\alpha}^2+2l^2\dot{\varphi}\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставим выражения (6) в формулу (3) и определим кинетическую энергию системы:

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2+m_2l^2\dot{\varphi}\dot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha).$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии по каждой обобщенной координате и по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\alpha} = (m_1 + m_2) l^2 \dot\alpha + m_2 l^2 \dot\varphi \cos(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\alpha}\right) = (m_1 + m_2) l^2 \ddot\alpha + m_2 l^2 \ddot\varphi \cos(\varphi - \alpha) - m_2 l^2 (\dot\varphi - \dot\alpha)\dot\varphi \sin(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = m_2 l^2 \dot\varphi \dot\alpha \sin(\varphi - \alpha);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m_2 l^2 \dot\varphi + m_2 l^2 \dot\alpha \cos(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = m_2 l^2 \ddot\alpha \cos(\varphi - \alpha) - m_2 l^2 (\dot\varphi - \dot\alpha)\dot\alpha \sin(\varphi - \alpha) + m_2 l^2 \ddot\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l^2 \dot\varphi \dot\alpha \sin(\varphi - \alpha).$$

Определим обобщенные силы Q_α и Q_φ. Сообщим системе возможное перемещение: $\delta\alpha > 0$, $\delta\varphi = 0$ (рис. 1), и определим возможную работу, учитывая, что стержень AB движется поступательно (перемещения точек A и B одинаковы):

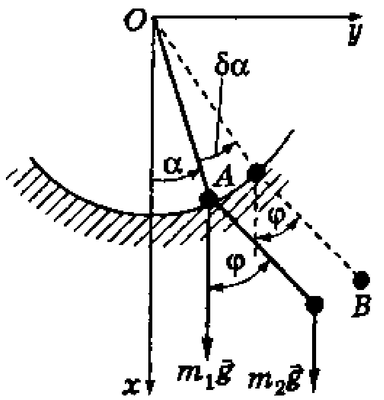


Рис. 1

$$\delta A_\alpha = -m_1 g l \sin\alpha \cdot \delta\alpha - m_2 g l \sin\alpha \cdot \delta\alpha =$$

$$= -(m_1 + m_2) g l \sin\alpha \cdot \delta\alpha = Q_\alpha \delta\alpha.$$

Откуда

$$Q_\alpha = -(m_1 + m_2) g l \sin\alpha.$$

Сообщим системе возможное перемещение $\delta\varphi > 0$, $\delta\alpha = 0$, и определим возможную работу (рис. 2):

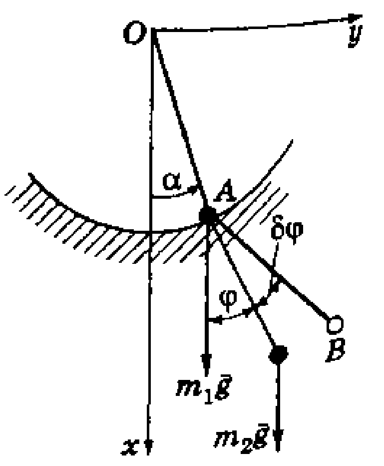


Рис. 2

$$\delta A_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi \cdot \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi.$$

Откуда

$$Q_\varphi = -m_2 g l \sin\varphi.$$

Подставим выражения производных и обобщенных сил в уравнения (1) и (2):

$$(m_1+m_2)l^2\ddot{\alpha}+m_2l^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-$$

$$-m_2l^2(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha)-m_2l^2\dot{\varphi}\dot{\alpha}\sin(\varphi-\alpha)=$$

$$=-(m_1+m_2)gl\sin\alpha;$$

$$m_2l^2\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l^2(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})\dot{\alpha}\sin(\varphi-\alpha)+m_2l^2\ddot{\varphi}-$$

$$-m_2l^2\dot{\varphi}\dot{\alpha}\sin(\varphi-\alpha)=-m_2gl\sin\varphi$$

или

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=-(m_1+m_2)g\sin\alpha,\\&l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)+l\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi.\end{aligned}\qquad(7)$$

Согласно указанию в условии задачи, считаем, что $\sin(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$, и исключим члены, содержащие $\dot{\varphi}^2$ и $\dot{\alpha}^2$. Тогда уравнения (7) примут вид

$$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}=-(m_1+m_2)g\alpha,$$

$$l\ddot{\alpha}+l\ddot{\varphi}=-g\varphi.$$

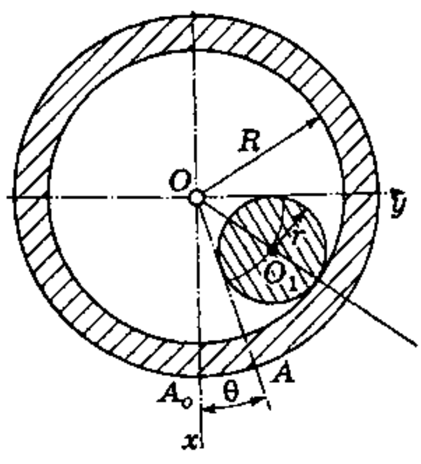
Ответ: $(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=-(m_1+m_2)g\sin\alpha$,

$l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)=-g\sin\varphi$;

$(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}=-(m_1+m_2)g\alpha$, $l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}=-g\varphi$.

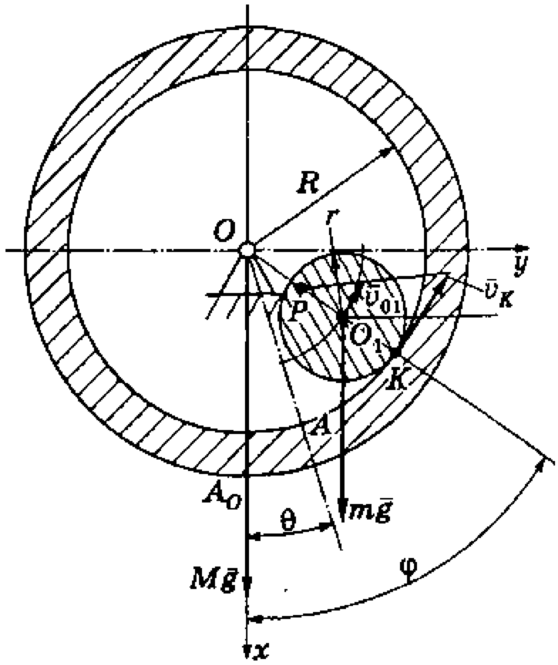
Задача 48.40

Шероховатый цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы M и радиуса R, могущего вращаться около своей горизонтально расположенной оси O. Моменты инерции цилиндров относительно своих осей равны $mr^2/2$ и MR^2. Составить уравнения движения системы и найти их первые интегралы.



Решение

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: θ — угол поворота полого цилиндра, φ — угол поворота отрезка, соединяющего оси цилиндров (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3)$$

где T_1 — кинетическая энергия полого цилиндра; T_2 — кинетическая энергия малого сплошного цилиндра.

Найдем кинетическую энергию полого цилиндра:

$$T_1 = \frac{I_{Oz}\omega_1^2}{2},$$

где $I_{Oz} = MR^2$; $\omega_1 = \dot{\theta}$.

Тогда

$$T_1 = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}.$$

Определим кинетическую энергию малого сплошного цилиндра:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_{O_1}^2 + \frac{1}{2}I_{O_1}\omega_2^2,$$

где $v_{O_1} = (R-r)\dot{\varphi}$; $I_{O_1} = \dfrac{mr^2}{2}$.

Для определения ω_2 введем угол поворота сплошного цилиндра α, который найдем из следующего выражения:

$$\alpha r = \theta R - (R-r)\varphi.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{\alpha} r = \dot{\theta} R - (R-r)\dot{\varphi},$$

откуда

$$\omega_2 = \dot{\alpha} = \frac{1}{r}\left[\dot{\theta} R - (R-r)\dot{\varphi}\right] = \frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}.$$

Примечание. Можно определить ω_2 следующим образом:

$$\omega_2 = \frac{v_K - v_{01}}{r} = \frac{\dot{\theta} R - \dot{\varphi}(R-r)}{r} = \frac{v_{01}}{PO_1},$$

где точка P — МЦС.

Тогда

$$T_2 = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \left[\frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]^2.$$

Подставим выражения T_1 и T_2 в формулу (3) и получим

$$T = \frac{MR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \left[\frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = MR^2 \dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\left[\dot{\theta}\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]\frac{R}{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -mg(R-r)\cos\varphi.$$

Найдем производные от потенциальной энергии по обобщенной координате θ:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0,$$

так как потенциальная энергия не зависит от угла θ.

Тогда согласно формуле (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=O$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=C_1.$$

Подставим значение производной в уравнение (1) и получим

$$MR^2\dot{\theta}+\frac{1}{2}mR\left[(R-r)\dot{\varphi}-\dot{\theta}R\right]=C_1.$$

Для нахождения другого первого интеграла воспользуемся выражением

$$T+\Pi=C_2,$$

так как все силы — потенциальны, а связи — голономные и стационарные.

Тогда получим

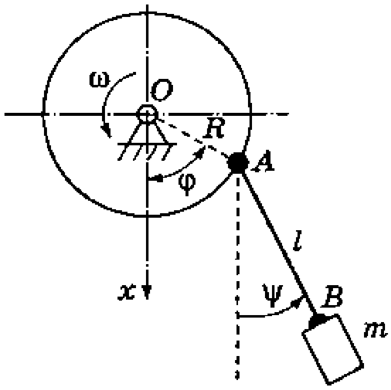
$$\frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{4}mr^2\left[\frac{R\dot{\theta}}{r}-\left(\frac{R}{r}-1\right)\dot{\varphi}\right]^2-mg(R-r)\cos\varphi=C_2$$

или

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{4}m[(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\theta}]^2-mg(R-r)\cos\varphi=C_2.$$

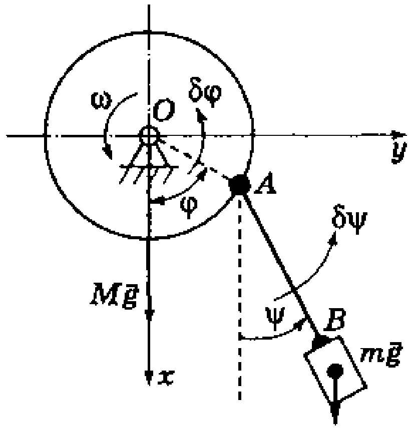
Ответ: $MR^2\dot{\theta}+\frac{1}{2}mR\left[(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\theta}\right]=C_1$; $\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2+$ $+\frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\theta}\right]^2-mg(R-r)\cos\varphi=C_2$, где φ — угол поворота отрезка, соединяющего оси цилиндров; θ — угол поворота внешнего цилиндра.

Задача 48.41



Однородный диск радиуса R, имеющий массу M, может вращаться вокруг своей горизонтальной оси O. К диску на нити AB длины l подвешена материальная точка массы m. Составить уравнения движения системы.

Решение



Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: φ — угол поворота однородного диска, ψ — угол отклонения нити AB от вертикали (см. рисунок).

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_2. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3)$$

где T_1 — кинетическая энергия диска; T_2 — кинетическая энергия точки B.

Кинетическая энергия диска

$$T_1 = \frac{I_{Oz}\omega^2}{2},$$

где $I_{Oz} = \dfrac{MR^2}{2}$; $\omega = \dot\varphi$.

Тогда

$$T_1 = \frac{MR^2\dot\varphi^2}{4}.$$

Кинетическая энергия точки B

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2. \tag{4}$$

Найдем v_B^2. Для этого запишем координаты точки B:

$$x_B = R\cos\varphi + l\cos\psi, \quad y_B = R\sin\varphi + l\sin\psi.$$

Продифференцируем эти выражения по времени:

$$\dot{x}_B = -R\dot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\psi}\sin\psi, \quad \dot{y}_B = R\dot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\psi}\cos\psi.$$

Тогда

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = (R\dot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\psi}\cos\psi)^2 + (R\dot{\varphi}\cos\varphi + l\dot{\psi}\cos\psi)^2$$

или

$$v_B^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + l^2\dot{\psi}^2.$$

Подставим это выражение в формулу (4) и получим

$$T_2 = \frac{m[R^2\dot{\varphi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + l^2\dot{\psi}^2]}{2}.$$

Тогда согласно формуле (3) кинетическая энергия системы

$$T = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m[R^2\dot{\varphi}^2 + 2lR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + l^2\dot{\psi}^2]}{2}$$

или

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\varphi}^2 + mlR\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\psi}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\varphi} + mlR\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\ddot{\varphi} + mlR\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - mRl(\dot{\varphi} - \dot{\psi})\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mRl\,\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = ml^2\dot{\psi} + mRl\dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) = ml^2\ddot\psi + mRl\ddot\varphi\cos(\varphi-\psi) - mRl(\dot\varphi-\dot\psi)\dot\varphi\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = mRl\dot\psi\dot\varphi\sin(\varphi-\psi).$$

Определим обобщенные силы Q_1 и Q_2. Сообщим системе возможное перемещение: $\delta\varphi > 0$, $\delta\psi = 0$, и определим возможную работу:

$$\delta A_1 = -mgR\sin\varphi\cdot\delta\varphi = Q_1\delta\varphi.$$

Откуда

$$Q_1 = -mgR\sin\varphi.$$

Сообщим системе возможное перемещение: $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi > 0$, и определим возможную работу:

$$\delta A_2 = -mgl\sin\psi\cdot\delta\psi = Q_2\delta\psi.$$

Откуда

$$Q_2 = -mgl\sin\psi.$$

Подставим выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_1 и Q_2 в уравнения (1) и (2) и получим уравнения движения системы:

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\ddot\varphi + mlR\ddot\psi\cos(\varphi-\psi) - mRl(\dot\varphi-\dot\psi)\dot\psi\sin(\varphi-\psi) -$$

$$- mRl\dot\varphi\dot\psi\sin(\varphi-\psi) = -mgR\sin\varphi,$$

$$ml^2\ddot\psi + mRl\ddot\varphi\cos(\varphi-\psi) - mRl(\dot\varphi-\dot\psi)\sin(\varphi-\psi) - mRl\dot\psi\dot\varphi\sin(\varphi-\psi) =$$

$$= -mgl\sin\psi$$

или

$$\left(\frac{M}{2}+m\right)R\ddot\varphi + ml\ddot\psi\cos(\varphi-\psi) + ml\sin(\varphi-\psi)\dot\psi^2 + mgR\sin\varphi = 0,$$

$$l\ddot\psi + R\ddot\varphi\cos(\varphi-\psi) - R\sin(\varphi-\psi)\dot\varphi^2 + g\sin\psi = 0.$$

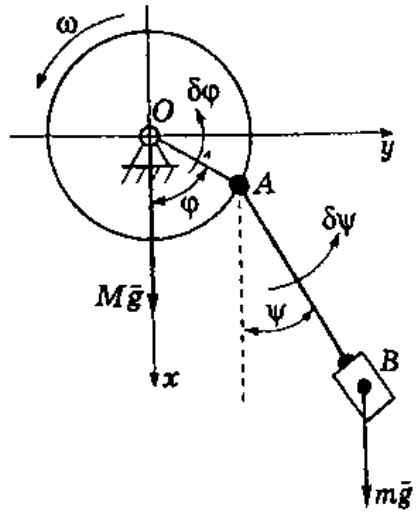
О т в е т: $\left(\frac{M}{2}+m\right)R\ddot\varphi + ml\ddot\psi\cos(\varphi-\psi) + ml\dot\psi^2\sin(\varphi-\psi) + mgR\sin\varphi = 0,$

$$l\ddot\psi + R\cos(\varphi-\psi)\ddot\varphi - R\sin(\varphi-\psi)\dot\varphi^2 + g\sin\psi = 0.$$

Задача 48.42

Диск системы, описанной в предыдущей задаче, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Составить уравнение движения материальной точки.

Решение



Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: ψ — угол отклонения нити AB от вертикали, $\varphi = \omega t$ — угол поворота однородного диска.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_{\psi}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3)$$

где T_1 — кинетическая энергия диска; T_2 — кинетическая энергия точки B.

Кинетическая энергия диска

$$T_1 = \frac{I_{Oz}\omega^2}{2},$$

где $I_{Oz} = \dfrac{MR^2}{2}$.

Тогда

$$T_1 = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

Кинетическая энергия точки B

$$T_2 = \frac{mv_B^2}{2}.$$

Для определения v_B^2 запишем координаты точки B, учитывая, что $\varphi = \omega t$:

$$x_B = R\cos\omega t + l\cos\psi, \quad y_B = R\sin\omega t + l\sin\psi.$$

Продифференцируем эти выражения по времени:

$$\dot{x}_B = -R\omega\sin\omega t - l\dot{\psi}\sin\psi, \quad \dot{y}_B = R\omega\cos\omega t - l\dot{\psi}\cos\psi.$$

Тогда

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = (R\omega\sin\omega t - l\psi\sin\psi)^2 + (R\omega\cos\omega t - l\psi\cos\psi)^2 =$$

$$= R^2\omega^2 + 2lR\omega\dot{\psi}\cos(\omega t - \psi) + l^2\dot{\psi}^2.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{m}{2}[R^2\omega^2 + 2lR\omega\dot{\psi}\cos(\omega t - \psi) + l^2\dot{\psi}^2].$$

Подставим выражения T_1 и T_2 в формулу (3):

$$T = \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{m}{2}[R^2\omega^2 + 2lR\omega\dot{\psi}\cos(\omega t - \psi) + l^2\dot{\psi}^2]$$

или

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega^2 + mRl\omega\dot{\psi}\cos(\omega t - \psi) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\psi}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = ml^2\dot{\psi} + mRl\omega\cos(\omega t - \psi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) = ml^2 - mRl\omega(\omega - \dot{\psi})\sin(\omega t - \psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi} = mRl\dot{\psi}\omega\sin(\omega t - \psi).$$

Определим обобщенную силу Q_ψ. Для этого сообщим системе возможное перемещение: $\delta\psi > 0$, $\delta\varphi = 0$, и определим возможную работу:

$$\partial A_\psi = -mgl\sin\psi\cdot\delta\psi = Q_\psi\delta\psi.$$

Откуда

$$Q_\psi = -mgl\sin\psi.$$

Подставим выражения производных от кинетической энергии и обобщенной силы в уравнение (1) и получим уравнение движения материальной точки:

$$ml^2\ddot{\psi} - mRl\omega\sin(\omega t - \psi)(\omega - \dot{\psi}) - mRl\omega\dot{\psi}\sin(\omega t - \psi) = -mgl\sin\psi$$

или после упрощения

$$\ddot{\psi} - \omega^2\frac{R}{l}\sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l}\sin\psi = 0.$$

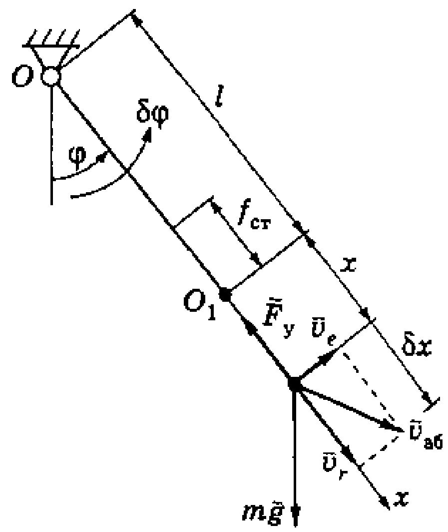
О т в е т: $\ddot{\psi} - \omega^2\frac{R}{l}\sin(\omega t - \psi) + \frac{g}{l}\sin\psi = 0.$

Задача 48.43

Составить уравнения движения математического маятника массы m, подвешенного на упругой нити; длина нити в положении равновесия l, ее жесткость равна c. Найти движение маятника для случая малых колебаний. В качестве обобщенных координат взять угол φ отклонений маятника от вертикали и относительное удлинение нити z.

Р е ш е н и е

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: φ — угол отклонения маятника от вертикали, x — удлинение упругой нити. Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия маятника

$$T = \frac{mv_{аб}^2}{2}.$$

Так как маятник совершает сложное движение, то

$$\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

Учтем, что $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, тогда

$$v_{\text{аб}}^2 = v_e^2 + v_r^2,$$

где $v_e^2 = (l+x)^2\dot{\varphi}^2$; $\quad v_r^2 = \dot{x}^2$.

Тогда

$$v_{\text{аб}}^2 = (l+x)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2,$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\varphi}^2\right].$$

Найдем производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m(l+x)\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(l+x)^2\dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m(l+x)^2\ddot{\varphi} + 2m(l+x)\dot{\varphi}\dot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Найдем обобщенные силы. Для этого сообщим системе возможное перемещение, при котором $\delta\varphi > 0$, $\delta x = 0$. Тогда

$$\delta A_{\varphi} = Q_{\varphi}\delta\varphi = -mg(l+x)\sin\varphi \cdot \delta\varphi.$$

Откуда

$$Q_{\varphi} = -mg(l+x)\sin\varphi.$$

Сообщим системе возможное перемещение, при котором $\delta\varphi = 0$, $\delta x > 0$. Тогда

$$\delta A_x = Q_x \delta x = [mg\cos\varphi - c(x_0 + x)]\,\delta x.$$

Откуда

$$Q_x = mg\cos\varphi - cx_0 - cx,$$

но учитывая, что в положении равновесия

$$cx_0 = mg,$$

получим

$$Q_x = -[mg(1-\cos\varphi) + cx].$$

Подставим выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_φ и Q_x в уравнения (1) и (2) и получим

$$m\ddot{x} - m(l+x)\dot{\varphi}^2 = -mg(1-\cos\varphi) - cx,$$

$$m(l+x)^2\ddot{\varphi} + 2m(l+x)\dot{\varphi}\dot{x} = -mg(l+x)\sin\varphi$$

или

$$\ddot{x} - (l+x)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}x + g(1-\cos\varphi) = 0, \tag{3}$$

$$(l+x)\ddot{\varphi} + 2\dot{x}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{4}$$

Учтем, что относительное удлинение

$$z = \frac{x}{l},$$

тогда $l\ddot{z} = \ddot{x}$, $l\dot{z} = \dot{x}$. Подставим z и $\ddot{z}$ в уравнения (3) и (4):

$$\ddot{z} - (1+z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{l}(1-\cos\varphi) = 0, \tag{5}$$

$$(1+z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Так как колебания — малые, считаем, что $\dot{\varphi}^2 \approx 0$, $\dot{z}\dot{\varphi} \approx 0$, $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$.

Тогда уравнения (5) и (6) примут вид

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}z = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Решения этих дифференциальных уравнений:

$$z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha\right),$$

$$\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \beta\right),$$

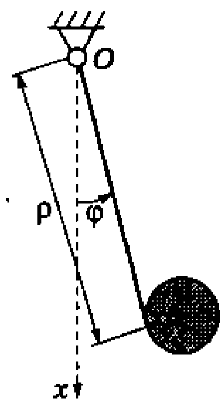
где A, α, B, β — произвольные постоянные.

Ответ: $(1+z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$; $\ddot{z} - (1+z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{l}(1-\cos\varphi) = 0$;

$z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha\right)$; $\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \beta\right)$, где A, α, B, β — произвольные постоянные.

Задача 48.44

Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиуса R, второй конец прикреплен к неподвижной точке O. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Пренебрегая массой нити, составить дифференциальные уравнения движения цилиндра.



Решение

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: φ — угол отклонения нити от вертикали, ρ — удлинение нити.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad (1)$$

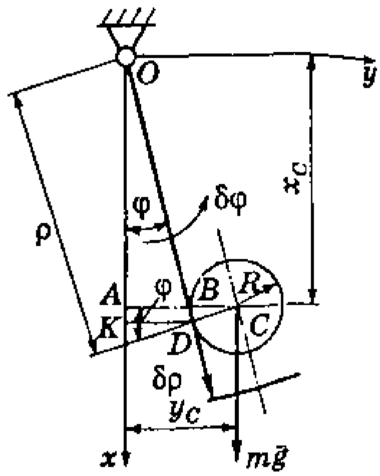
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_\rho. \quad (2)$$

Найдем кинетическую энергию системы:

$$T=\frac{mv_{аб}^2}{2}+\frac{I_{Cz}\omega_{аб}^2}{2}, \tag{3}$$

где $I_{Cz}=\dfrac{mR^2}{2}$; $\omega_{аб}=\dfrac{\dot\rho}{R}-\dot\varphi$ — абсолютная угловая скорость цилиндра; $v_{аб}^2=\dot x_C^2+\dot y_C^2$ — абсолютная скорость центра масс цилиндра.

Определим координаты центра масс (точка C) однородного цилиндра (см. рисунок):



$$x_C=OK-BD,$$

$$y_C=AB+BC,$$

где $OK=\rho\cos\varphi$, $BD=R\sin\varphi$; $AB=KD=\rho\sin\varphi$, $BC=R\cos\varphi$.

Тогда

$$x_C=\rho\cos\varphi-R\sin\varphi,$$

$$y_C=\rho\sin\varphi+R\cos\varphi.$$

Найдем производные от этих выражений по времени:

$$\dot x_C=\dot\rho\cos\varphi-\rho\dot\varphi\sin\varphi-R\dot\varphi\cos\varphi,$$

$$\dot y_C=\dot\rho\sin\varphi+\rho\dot\varphi\cos\varphi-R\dot\varphi\sin\varphi.$$

Определим абсолютную скорость центра масс цилиндра:

$$v_{аб}^2=(\dot\rho\cos\varphi-\rho\dot\varphi\sin\varphi-R\dot\varphi\cos\varphi)^2+(\dot\rho\sin\varphi+\rho\dot\varphi\cos\varphi-R\dot\varphi\sin\varphi)^2=$$

$$=\dot\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi+R^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi-2\rho\dot\rho\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi-2R\dot\rho\dot\varphi\cos^2\varphi+$$

$$+2R\rho\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi+\dot\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi+R^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi+2\rho\dot\rho\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi-$$

$$-2R\dot\rho\dot\varphi\sin^2\varphi-2R\rho\dot\varphi^2\sin\varphi\cos\varphi$$

или после упрощения

$$v_{аб}^2=(\dot\rho-R\dot\varphi)^2+\rho^2\dot\varphi^2.$$

Подставим полученное значение в формулу (3) и получим

$$T=\frac{1}{2}m\left[(\dot\rho-R\dot\varphi)^2+\rho^2\dot\varphi^2\right]+\frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot\rho}{R}-\dot\varphi\right)^2$$

или

$$T = \frac{3}{4}m(\dot{\rho} - R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{3}{2}mR(\dot{\rho} - R\dot{\varphi}) + m\rho^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{3}{2}mR(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) + \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = \frac{3}{2}m(\dot{\rho} - R\dot{\varphi}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{3}{2}m(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2.$$

Определим обобщенные силы Q_φ и Q_ρ. Для этого сообщим цилиндру возможное перемещение, при котором $\delta\varphi > 0$, $\delta\rho = 0$, и определим возможную работу:

$$\delta A_\varphi = Q_\varphi \delta\varphi = -(mg\rho\sin\varphi + mgR\cos\varphi)\,\delta\varphi,$$

откуда

$$Q_\varphi = -mg\rho\sin\varphi - mgR\cos\varphi.$$

Сообщим цилиндру возможное перемещение, при котором $\delta\varphi = 0$, $\delta\rho > 0$, и определим возможную работу:

$$\delta A_\rho = Q_\rho \delta\rho = mg\cos\varphi \cdot \delta\rho,$$

откуда

$$Q_\rho = mg\cos\varphi.$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_φ и Q_ρ в уравнения (1) и (2):

$$-\frac{3}{2}mR(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) + m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = -mg\rho\sin\varphi - mgR\cos\varphi$$

или

$$-\frac{3}{2}R(\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi})+\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=-g\rho\sin\varphi-gR\cos\varphi; \qquad (4)$$

$$\frac{3}{2}m(\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi})-m\rho\dot{\varphi}^2=mg\cos\varphi$$

или

$$\frac{3}{2}(\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi})-\rho\dot{\varphi}^2=g\cos\varphi. \qquad (5)$$

Умножим уравнение (5) на R, затем сложим его с уравнением (4) и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})-R\rho\dot{\varphi}^2=-g\rho\sin\varphi.$$

Ответ: $\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi}-\frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2=\frac{2}{3}g\cos\varphi;\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})-R\rho\dot{\varphi}^2=-g\rho\sin\varphi.$

Задача 48.45

Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение малых колебаний цилиндра, если движение началось из состояния покоя и при $t=0$, $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0\neq 0$.

Решение

При решении задачи 48.44 получили дифференциальные уравнения движения цилиндра:

$$\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi}-\frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2=\frac{2}{3}g\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})-R\rho\dot{\varphi}^2=-g\rho\sin\varphi. \qquad (2)$$

Для малых колебаний цилиндра $\dot{\varphi}^2\approx 0$, $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=\varphi$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\ddot{\rho}-R\ddot{\varphi}=\frac{2}{3}g, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=-g\rho\varphi. \qquad (4)$$

Проинтегрируем уравнение (3) дважды и получим

$$\dot\rho - R\dot\varphi = \frac{2}{3}gt + C_1, \tag{5}$$

$$\rho - R\varphi = \frac{1}{3}gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{6}$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $\rho = \rho_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot\rho = 0$, $\dot\varphi = 0$, найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2.

Из равенства (5) получим $C_1 = 0$, из равенства (6) — $C_2 = \rho_0 - R\varphi_0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в выражение (6):

$$\rho - R\varphi = \frac{1}{3}gt^2 + \rho_0 - R\varphi_0. \tag{7}$$

Введем обозначение:

$$F(t) = \frac{1}{3}gt^2 + \rho_0 - R\varphi_0.$$

Тогда выражение (7) примет вид

$$\rho = R\varphi + F(t). \tag{8}$$

Подставим выражение (8) в уравнение (4):

$$\frac{d}{dt}\left[(R\varphi + F(t))^2\dot\varphi\right] = -g\varphi[R\varphi + F(t)]$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[R^2\varphi^2 + 2R\varphi\dot\varphi F(t) + F^2(t)\dot\varphi\right] + g\left[R\varphi^2 + F(t)\varphi\right] = 0.$$

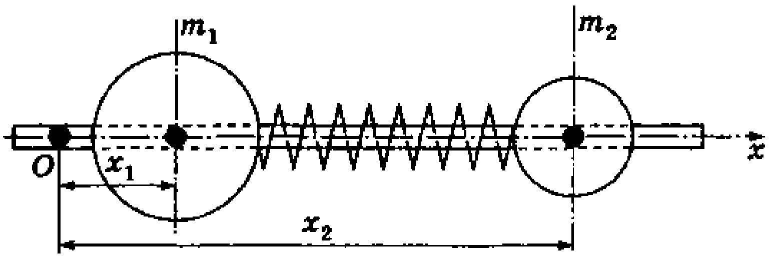
Исключив из этого уравнения члены $R\varphi^2$, $R^2\varphi^2$, $2R\varphi\dot\varphi F(t)$, окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\left[F^2(t)\dot\varphi\right] + gF(t)\varphi = 0.$$

Ответ: $\frac{d}{dt}[F^2(t)\dot\varphi] + gF(t)\varphi = 0$, где $F(t) = \frac{gt^2}{3} + \rho_0 - R\varphi_0$.

Задача 48.46

Определить движение системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2, насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось Ox), массы связаны пружиной жесткости c и могут двигаться поступательно вдоль стрежня; расстояние между центрами масс при ненапряженной пружине равно l; начальное состояние системы при $t=0$ определяется следующими значениями скоростей и координат центров масс: $x_1=0$, $\dot{x}_1=u_0$, $x_2=l$, $\dot{x}_2=0$.



Решение

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: x_1 — перемещение массы m_1, x_2 — перемещение массы m_2.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2. \tag{2}$$

Кинетическая энергия системы

$$T=T_1+T_2=\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m_2\dot{x}_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial \dot{x}_2}\right)=m_2\ddot{x}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

Для определения обобщенных сил найдем потенциальную энергию системы:

$$П=\frac{1}{2}c(x_2-x_1-l)^2.$$

Тогда

$$Q_1=-\frac{\partial П}{\partial x_1}=c(x_2-x_1-l),$$

$$Q_2=-\frac{\partial П}{\partial x_2}=-c(x_2-x_1-l).$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_1 и Q_2 в уравнения (1) и (2) и получим

$$m_1\ddot{x}_1=c(x_2-x_1-l), \qquad (3)$$

$$m_2\ddot{x}_2=-c(x_2-x_1-l). \qquad (4)$$

Сложим уравнения (3) и (4):

$$m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2=0.$$

Откуда

$$\ddot{x}_2=-\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1. \qquad (5)$$

Проинтегрируем выражение (5) дважды:

$$\dot{x}_2=-\frac{m_1}{m_2}\dot{x}_1+C_1, \qquad (6)$$

$$x_2=-\frac{m_1}{m_2}x_1+C_1t+C_2. \qquad (7)$$

Используя начальные условия: $t=0$, $x_{10}=0$, $\dot{x}_{10}=u_0$, $x_{20}=l$, $\dot{x}_{20}=0$, из выражения (6) найдем

$$C_1=\frac{m_1}{m_2}u_0,$$

из выражения (7)

$$C_2=l.$$

Тогда согласно формуле (7)

$$x_2=-\frac{m_1}{m_2}x_1+\frac{m_1}{m_2}u_0t+l. \tag{8}$$

Подставим выражение (5) и (8) в формулу (4):

$$m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1\right)=-c\left(-\frac{m_1}{m_2}x_1+\frac{m_1}{m_2}u_0t+l-x_1-l\right)$$

или

$$\ddot{x}_1+c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)x_1=\frac{c}{m_2}u_0t.$$

Введем обозначение:

$$k^2=c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=\frac{c(m_1+m_2)}{m_1m_2}.$$

Тогда

$$\ddot{x}_1+k^2x_1=\frac{c}{m_2}u_0t. \tag{9}$$

Найдем решение уравнения (9):

$$x_1=x^*+x^{**}, \tag{10}$$

где x^* — общее решение уравнения $\ddot{x}_1+k^2x_1=0$, $x^*=C_3\cos kt+C_4\sin kt$; x^{**} — частное решение уравнения (9), $x^{**}=At$.

Подставим значение x^{**} в уравнение (9):

$$Ak^2t=\frac{c}{m_2}u_0t,$$

откуда

$$A = \frac{cu_0}{m_2 k^2}.$$

Тогда

$$x^{**} = \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}.$$

Подставим это значение x^{**} и значение x^* в равенство (10) и получим

$$x_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}. \qquad (11)$$

Откуда

$$\dot{x}_1 = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt + \frac{cu_0}{m_2 k^2}. \qquad (12)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $x_{10} = 0$, $\dot{x}_{10} = u_0$, и получим из выражения (11)

$$x_{10} = C_3 = 0;$$

из выражения (12)

$$\dot{x}_{10} = u_0 = C_4 k + \frac{cu_0}{m_2 k^2},$$

$$C_4 = \frac{u_0 m_2 k^2 - cu_0}{m_2 k^3}.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{u_0 m_2 k^2 - cu_0}{m_2 k^3} \sin kt + \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}$$

или

$$x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} \sin kt\right). \qquad (13)$$

Далее подставим выражение (13) в формулу (8) и найдем закон движения массы m_2:

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2}\left[\frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{u_0 m_2}{k} \sin kt + m_1 u_0 t\right)\right] + \frac{m_1}{m_2} u_0 t + l$$

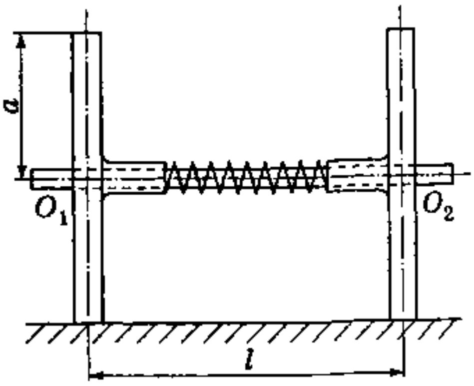
или

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k}\sin kt\right).$$

О т в е т: $x_1 = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t + \dfrac{m_2 u_0}{k}\sin kt\right)$;

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k}\sin kt\right),\ k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

Задача 48.47



Система, состоящая из двух одинаковых колес радиуса a каждое, могущих независимо вращаться вокруг общей нормальной к ним оси O_1O_2 длины l, катится по горизонтальной плоскости. Колеса связаны пружиной жесткости c, работающей на кручение (упругий торсион). Масса каждого колеса m; C — момент инерции колеса относительно оси вращения, A — момент инерции колеса относительного диаметра. Составить уравнения движения системы и определить движение, отвечающее начальным условиям $\varphi_1 = 0$, $\dot\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot\varphi_2 = \omega$ (φ_1, φ_2 — углы поворота колеса). Массой оси пренебречь.

Р е ш е н и е

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: φ_1 — угол поворота колеса *1*, φ_2 — угол поворота колеса *2* (рис. 1).

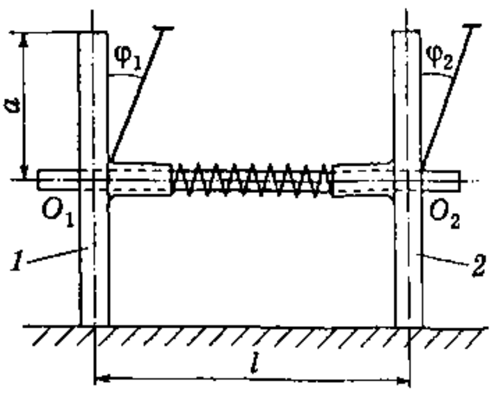


Рис. 1

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2. \qquad (2)$$

учитывая, что

$$\dot{\alpha} = \frac{a}{l}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$v_1 = a\dot{\varphi}_1,$$

$$v_2 = a\dot{\varphi}_2,$$

где $\dot{\alpha}$ — угловая скорость поворота колеса относительно диаметра (рис. 2).

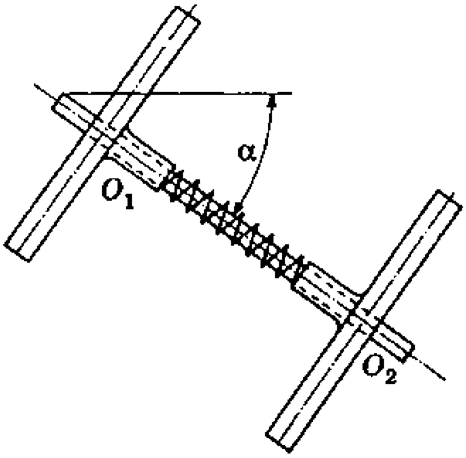


Рис. 2

Найдем кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{C\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{C\dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_2^2}{2} + 2A\frac{\dot{\alpha}^2}{2} =$$

$$= \frac{C\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{C\dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_2^2}{2} + A\frac{a^2}{l^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2$$

и производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = C\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{l^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{l^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = C\dot{\varphi}_2 + ma^2\dot{\varphi}_2 - \frac{2Aa^2}{l^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{2Aa^2}{l^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Определим обобщенные силы, учитывая, что потенциальная энергия системы зависит только от силы упругости пружины:

$$П = \frac{c(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}.$$

Тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = c(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_1 и Q_2 в уравнения (1) и (2):

$$C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{l^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -c(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{3}$$

$$C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{2Aa^2}{l^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = c(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{4}$$

Сложим уравнения (3) и (4), получим

$$C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 = 0$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 = -\ddot{\varphi}_2. \tag{5}$$

Проинтегрируем уравнение (5) дважды:

$$\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2 + C_1, \tag{6}$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + C_1 t + C_2. \tag{7}$$

Подставим в равенства (6) и (7) начальные условия: $t = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \omega$, и определим постоянные интегрирования:

$$\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2 + C_1, \quad C_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega;$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + C_1 t + C_2, \quad C_2 = 0.$$

Тогда согласно формуле (7)

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + \omega t. \tag{8}$$

Подставим выражения (5) и (8) в уравнение (3):

$$C(-\ddot{\varphi}_2) + ma^2(-\ddot{\varphi}_2) + \frac{2Aa^2}{l^2}(-\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_2) = -c(-\varphi_2 + \omega t - \varphi_2)$$

или после преобразований

$$-\left(C+ma^2+\frac{4Aa^2}{l^2}\right)\dot{\varphi}^2=2c\varphi_2-c\omega t. \tag{9}$$

Введем обозначение:

$$k^2=\frac{2c}{C+ma^2+\dfrac{4Aa^2}{l^2}}.$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\varphi}_2+k^2\varphi_2=\frac{1}{2}k^2\omega t. \tag{10}$$

Найдем решение дифференциального уравнения (10):

$$\varphi_2=\varphi_2^*+\varphi_2^{**}, \tag{11}$$

где φ_2^* — общее решение уравнения $\ddot{\varphi}_2+k^2\varphi_2=0$,
$\varphi_2^*=C_3\cos kt+C_4\sin kt$; φ_2^{**} — частное решение уравнения (10), $\varphi_2^{**}=Bt$.

Подставим φ_2^{**} в уравнение (10) и получим

$$B=\frac{1}{2}\omega.$$

Тогда

$$\varphi_2^{**}=\frac{1}{2}\omega t.$$

Подставим это значение φ_2^{**} и φ_2^* в равенство (11):

$$\varphi_2=C_3\cos kt+C_4\sin kt+\frac{1}{2}\omega. \tag{12}$$

Продифференцируем выражение (12) по времени:

$$\dot{\varphi}_2=-C_3k\sin kt+C_4k\cos kt+\frac{1}{2}\omega. \tag{13}$$

Используя начальные условия, из выражений (12) и (13) найдем:

$$\varphi_2=C_3=0;$$

$$\dot{\varphi}_2=C_4k+\frac{1}{2}\omega,\quad C_4=\frac{\omega}{2k}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования C_3 и C_4 в выражение (12) и получим закон движения колеса *2*:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt\right). \qquad (14)$$

Определим закон движения колеса *1*, учитывая выражения (8) и (14), запишем

$$\varphi_1 = -\frac{\omega t}{2} - \frac{\omega}{2k}\sin kt + \omega t = \frac{\omega t}{2} - \frac{\omega}{2k}\sin kt$$

или

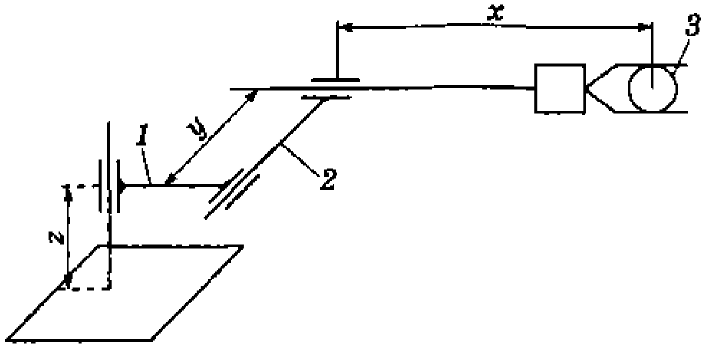
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right).$$

Ответ: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$; $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$,

$$k = \sqrt{\frac{2c}{ma^2 + C + 4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

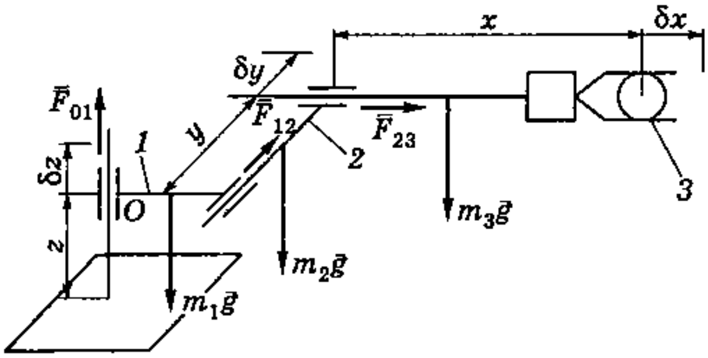
Задача 48.48

Механизм робота-манипулятора состоит из колонны для вертикального перемещения, устройства для горизонтального перемещения, состоящего из звеньев *1* и *2*, и выдвигающейся горизонтальной руки со схватом *3*. Массы звеньев механизма m_1, m_2 и m_3. Движущие силы, создаваемые приводами в поступательных парах, равны соответственно F_{01}, F_{12} и F_{23}. Составить дифференциальные уравнения механизма. Трением пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение манипулятора. Механизм привода имеет три степени свободы (см. рисунок). За обобщенные координаты примем: q_1 — перемещение звена *1* относительно станины, q_2 — перемещение звена *2* относительно звена *1*, q_3 — перемещение звена *3* относительно звена *2* ($q_1 = z$, $q_2 = y$, $q_3 = x$).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = Q_y,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Найдем кинетическую энергию звена *1*:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2},$$

звена *2*:

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1(\dot{z}^2 + \dot{y}^2)}{2}$$

и звена *3*:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m_3(\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2)}{2}.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{z}^2 + \frac{m^2}{2}(\dot{z}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_3}{2}(\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2).$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{z}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_3)\dot{y}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_3\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_3\ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_z\Big|_{\substack{\delta z \neq 0 \\ \delta x = 0 \\ \delta y = 0}} = \frac{\delta A}{\delta z} = \frac{F_{01}\delta z - m_1 g\delta z - m_2 g\delta z - m_3 g\delta z}{\delta z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g,$$

$$Q_y\Big|_{\substack{\delta z = 0 \\ \delta x = 0 \\ \delta y \neq 0}} = \frac{\delta A}{\delta y} = \frac{F_{12}\delta y}{\delta y} = F_{12},$$

$$Q_x\Big|_{\substack{\delta z = 0 \\ \delta x \neq 0 \\ \delta y = 0}} = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{F_{23}\delta x}{\delta x} = F_{23}.$$

Полученные значения подставим в уравнения (1) и получим дифференциальные уравнения движения механизма:

$$m_3\ddot{x} = F_{23},$$

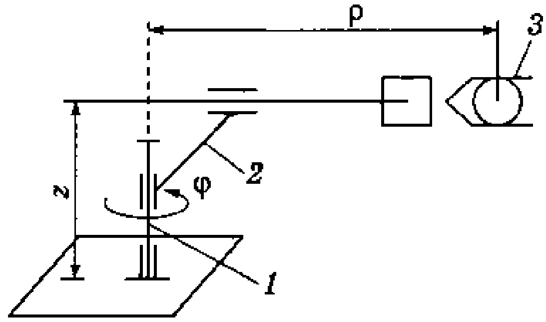
$$(m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12},$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

О т в е т: $m_3\ddot{x} = F_{23}$, $(m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12}$,
$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g$.

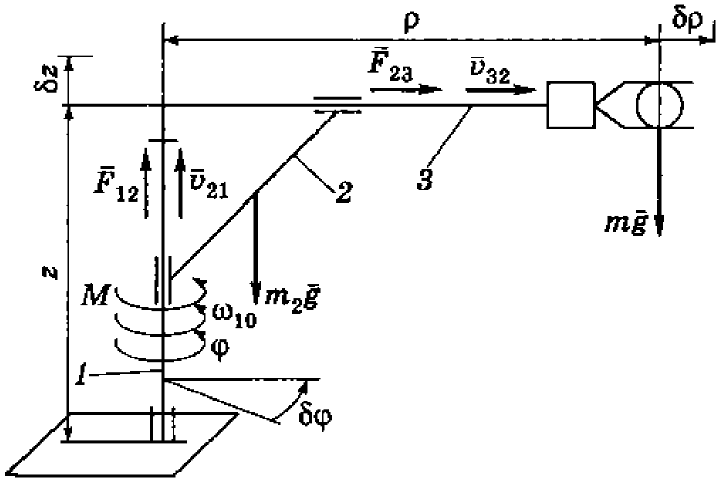
Задача 48.49

Механизм робота-манипулятора состоит из поворотной колонны *1*, устройства для вертикального перемещения *2* и выдвигающейся руки со схватом *3*. Момент инерции звена *1* относительно оси поворота I_1; масса звена 2 m_2, момент инерции относительно оси поворота I_2; масса двигающейся руки со схватом m_3, расстояние от оси поворота до центра масс ρ, момент инерции относительно центральной оси I_3. К оси поворота приложен момент M, движущие силы, создаваемые приводами в поступательных парах, равны соответственно F_{12} и F_{23}. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение робота-манипулятора под действием приложенных к нему сил. Механизм имеет три степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем: φ — угол поворота колонны, z — вертикальное перемещение в поступательной паре 1–2, ρ — горизонтальное перемещение в поступательной паре 2–3 (см. рисунок).



Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}&=Q_{\varphi},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial T}{\partial z}&=Q_{z},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \rho}&=Q_{\rho}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия механизма

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия звена *1* (колонны), совершающего вращательное движение:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия звена *2*, совершающего сложное движение – вращение вместе со звеном *1* и поступательное движение по звену *1*:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическую энергию звена *3*, совершающего сложное движение – вращение со звеном *1*, вертикальное поступательное движение со звеном 2 и горизонтальное поступательное движение по звену *2*:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{3\text{аб}}^2 + \frac{1}{2}(I_3 + m_3\rho^2)\omega_1^2 = \frac{1}{2} m_3\left(\sqrt{v_{21}^2 + v_{32}^2}\right)^2 + \frac{1}{2}(I_3 + m_3\rho^2)\omega_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_3(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2}(I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}^2.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2}(I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(m_2 + m_3)\dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\rho}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1 + I_2 + I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left[(I_1 + I_2 + I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}\right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (m_2 + m_3)\dot{z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m_3\dot{\rho},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = m_3\ddot{\rho},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m_3\rho\dot{\varphi}^2.$$

Определим значение обобщенных сил:

$$Q_{\varphi}\Big|_{\substack{\delta\varphi\neq 0\\ \delta z=0\\ \delta\rho=0}} = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = \frac{M\delta\varphi}{\delta\varphi} = M,$$

$$Q_{z}\Big|_{\substack{\delta\varphi=0\\ \delta z\neq 0\\ \delta\rho=0}} = \frac{\delta A}{\delta z} = \frac{-m_2 q\delta z - m_3 g\delta z + F_{12}\delta z}{\delta z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g,$$

$$Q_{\rho}\Big|_{\substack{\delta\varphi=0\\ \delta z=0\\ \delta\rho\neq 0}} = \frac{\delta A}{\delta\rho} = \frac{F_{23}\delta\rho}{\delta\rho} = F_{23}.$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил в уравнения (1) и получим дифференциальные уравнения движения механизма:

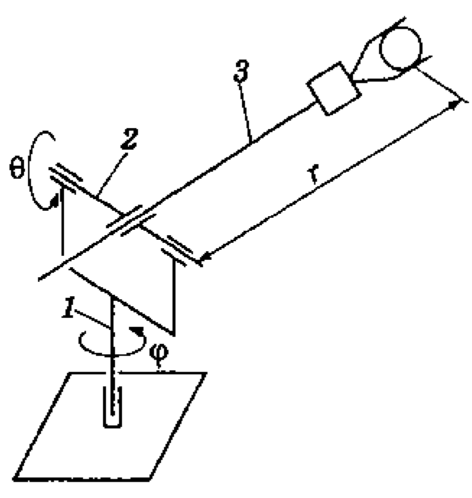
$$\frac{d}{dt}[(I_1 + I_2 + I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}] = M,$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g,$$

$$m_3(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{23}.$$

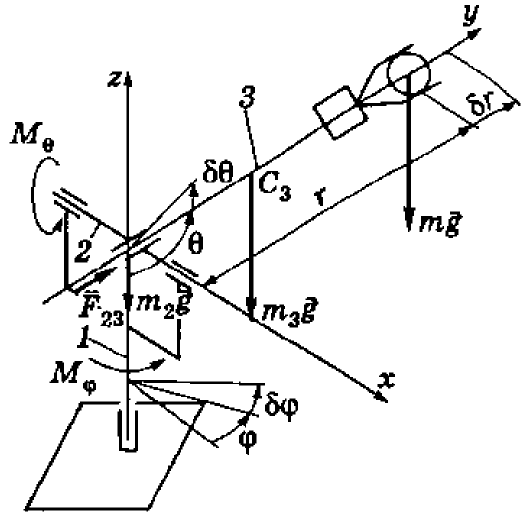
Ответ: $\frac{d}{dt}[(I_1 + I_2 + I_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}] = M$, $(m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g$,
$m_3(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{23}$.

Задача 48.50



Вертикальная колонна *1*, несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ. Рука со схватом поворачивается на угол θ и выдвигается на расстояние r. Момент инерции вертикальной колонны относительно оси вращения I_1; *2* и *3* считать тонкими однородными стержнями длины l_2 и l_3 и массы m_2 и m_3; масса переносимого груза m. К вертикальной оси вращения приложен момент M_φ к оси поворота второго звена — момент M_θ, движущая сила, создаваемая приводом в поступательной паре, F_{23}. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. Трением пренебречь.

Решение



Рассмотрим движение робота-манипулятора под действием приложенных сил. Покажем на рисунке действующие силы: силы тяжести $m_2\bar{g}$ звена *2* и $m_3\bar{g}$ звена *3*, движущую силу $\bar{F}_{23}$ в поступательной паре *2–3*, моменты M_φ и M_θ в приводах. Механизм имеет три степени свободы. Выберем обобщенные координаты: φ — угол поворота несущей руки манипулятора; θ — угол поворота руки со схватом; r — расстояние, на которое выдвигается рука со схватом.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{d\varphi}=Q_\varphi,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{d\theta}=Q_\theta,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{dr}=Q_r.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Кинетическая энергия механизма робота-манипулятора:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия колонны *1*, совершающей вращательное движение:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия звена *2*, совершающего вращательное движение:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{m_2 l_2^2}{12} \dot{\varphi}^2 = \frac{m_2 l_2^2}{24} \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия звена *3*, совершающего сложное движение: вращение вокруг вертикальной оси вместе с колонной *1* с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, вращение с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг горизонтальной оси вместе со звеном *2* и поступательное движение в поступательной паре *2–3* со скоростью $\dot{r}$:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\varphi \dot{\varphi}^2,$$

где

$$I_\theta = I_{C_3} + m_3 \left(r - \frac{l_3}{2} \right)^2 = m_3 \left(r^2 - r l_3 + \frac{l_3^2}{3} \right);$$

$$I_\varphi = I_z \sin^2\theta = \left[I_{C_3} + m_3 \left(r - \frac{l_3}{2} \right)^2 \right] \sin^2\theta = m_3 \left(r^2 - r l_3 + \frac{l_3^2}{3} \right) \sin^2\theta.$$

Тогда

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - r l_3 + \frac{l_3^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - r l_3 + \frac{l_3^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta.$$

Кинетическая энергия груза, который вращается вокруг вертикальной оси вместе с колонной *1* и вокруг горизонтальной оси вместе со звеном *2*, а также совершает поступательное движение со звеном *3*:

$$T_{\text{гр}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m r^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta.$$

Тогда кинетическая энергия механизма робота-манипулятора с грузом:

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{m_2l_2^2}{24}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_3\dot{r}^2+\frac{1}{2}m_3\left(r^2-rl_3+\frac{l_3^2}{3}\right)\dot{\theta}^2+$$

$$+\frac{1}{2}m_3\left(r^2-rl_3+\frac{l_3^2}{3}\right)\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta=$$

$$=\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{m_2l_2^2}{24}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I(r)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I(r)\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}(m_3+m)\dot{r}^2,$$

где $I(r)=m_3\left(r^2-rl_3+\dfrac{l_3^2}{3}\right)+mr^2.$

Найдем частные производные от выражения кинетической энергии по обобщенным скоростям и координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\left[I_1+\frac{1}{12}m_2l_2^2+I(r)\sin^2\theta\right]\dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=I(r)\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=I(r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}=(m_3+m)\dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\left[m_3\left(r-\frac{l_3}{2}\right)+mr\right]\dot{\theta}^2+\left[m_3\left(r-\frac{l_3}{2}\right)+mr\right]\dot{\varphi}^2\sin^2\theta,$$

а также производные по времени от частных производных по обобщенным скоростям:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=\frac{d}{dt}\left[\left(I_1+\frac{1}{12}m_2l_2^2+I(r)\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{d}{dt}[I(r)\dot{\theta}],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = (m_3 + m)\ddot{r}.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_{\theta}\Big|_{\substack{\delta\varphi \neq 0\\ \delta\theta = 0\\ \delta r = 0}} = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = \frac{M_{\varphi}\delta\varphi}{\delta\varphi} = M_{\varphi},$$

$$Q_{\theta}\Big|_{\substack{\delta\varphi = 0\\ \delta\theta \neq 0\\ \delta r = 0}} = \frac{\delta A}{\delta\theta} = \frac{M_{\theta}\delta\theta - m_3 g\left(r - \frac{l_3}{2}\right)\sin\theta\cdot\delta\theta - mgr\sin\theta\cdot\delta\theta}{\delta\theta} =$$

$$= M_{\theta} - m_3 g\left(r - \frac{l_3}{2}\right)\sin\theta - mr\,g\sin\theta = M_{\theta} - \left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right]g\sin\theta,$$

$$Q_{r}\Big|_{\substack{\delta\varphi = 0\\ \delta\theta = 0\\ \delta r \neq 0}} = \frac{\delta A}{\delta r} = \frac{F_{23}\delta r - mgr\cos\theta\cdot\delta r - mg\cos\theta\cdot\delta r}{\delta r} = F_{23} - (m_3 + m)g\cos\theta.$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил в уравнения (1) и получим дифференциальные уравнения движения механизма робота-манипулятора:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(I_1 + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 + I(r)\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right] = M_{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left[I(r)\dot{\theta}\right] - I(r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = M_{\theta} - \left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right]g\sin\theta,$$

$$(m_3 + m)\ddot{r} - \left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right](\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = F_{23} - (m_3 + m)g\cos\theta.$$

О т в е т: $\frac{d}{dt}\left[\left(I_1 + \frac{1}{12}m_2 l_2^2 + I(r)\sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right] = M_{\varphi},$

$$\frac{d}{dt}\left[I(r)\dot{\theta}\right] - I(r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = M_{\theta} - \left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right]g\sin\theta,$$

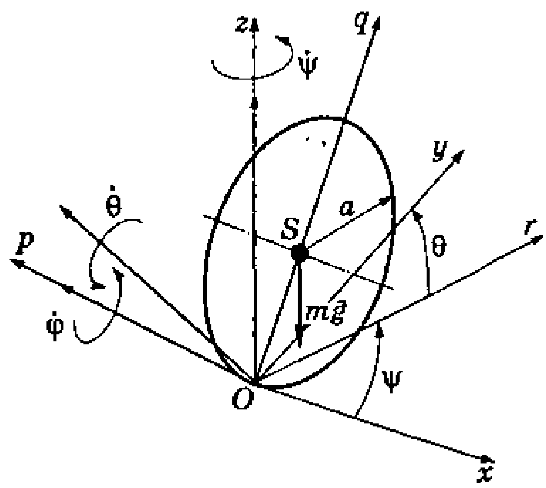
$$(m_3 + m)\ddot{r} - \left[m_3\left(r - \frac{l_3}{2}\right) + mr\right](\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = F_{23} - (m_3 + m)g\cos\theta.$$

Задача 48.51

Колесо катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус колеса a, его масса M; C — момент инерции относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости колеса через его центр; A — момент инерции колеса относительно его диаметра. Составить уравнение движения колеса.

Указание. Использовать уравнения Лагранжа с множителями для неголономных систем.

Решение



Рассмотрим качение колеса без скольжения по горизонтальной плоскости и абсолютное движение колеса по отношению к неподвижной системе координат $Oxyz$ с началом в точке касания колеса с плоскостью. Подвижную систему отсчета p, q, r соединим с колесом. В этом случае углы Эйлера будут характеризовать: угол φ — поворот колеса вокруг оси, перпендикулярный его плоскости, угол θ — наклон плоскости колеса к горизонту, угол ψ — азимут вертикальной плоскости, содержащей диаметр колеса и проходящей через точку касания.

Тогда координаты точки касания S:

$$x_S = x + a\cos\theta\sin\psi,$$

$$y_S = y - a\cos\theta\cos\psi,$$

$$z_S = a\sin\theta.$$

Найдем проекции скорости центра колеса на декартовы оси:

$$\dot{x}_S = \dot{x} + a(-\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\psi),$$

$$\dot{y}_S = \dot{y} + a(\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\psi),$$

$$\dot{z}_S = a\dot{\theta}\cos\theta.$$

Определим скорость центра колеса

$$|\bar{v}_S| = \sqrt{(\dot{x}_S)^2 + (\dot{y}_S)^2 + (\dot{z}_S)^2}$$

или

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2,$$

$$v_S^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a(-\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi + \dot{x}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi +$$

$$+ \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi + \dot{y}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi) + a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta).$$

Проекции угловой скорости колеса на подвижные оси

$$\dot{p} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta,$$

$$\dot{q} = \dot{\psi}\sin\theta,$$

$$\dot{r} = -\dot{\theta}.$$

Найдем функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}v_s^2 + \frac{C}{2}\dot{p}^2 + \frac{A}{2}(\dot{q}^2 + \dot{r}^2) - mgz.$$

Условия, налагаемые неголономными связями:

$$\dot{x} - a\dot{\varphi}\cos\psi = 0,$$

$$\dot{y} - a\dot{\varphi}\sin\psi = 0.$$

Тогда

$$L = \frac{m}{2}\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a[\dot{\theta}\sin\theta(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \dot{\psi}\cos\theta(\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi)] +$$

$$+ a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\cos^2\theta)\} + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 + \frac{A}{2}(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - mga\sin\theta.$$

Неопределенные множители Лагранжа λ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \lambda_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \lambda_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \lambda_1(-a\cos\psi) + \lambda_2(a - \sin\psi);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0.$$

После подстановки L получим

$$\lambda_1 = m[\dot x + a(\dot\psi\cos\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\theta\sin\psi)],$$

$$\lambda_2 = m[\dot y + a(\dot\psi\cos\theta\sin\psi - \dot\theta\sin\theta\cos\psi)],$$

$$\frac{d}{dt}[C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)] = -a(\lambda_1\cos\psi+\lambda_2\sin\psi),$$

$$ma[\cos\theta(\dot x\cos\psi+\dot y\sin\psi)+a\dot\psi\cos^2\theta]+$$

$$+C[\cos\theta(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)]+\frac{d}{dt}(A\dot\psi\sin^2\theta)-$$

$$-ma\left[\dot\psi\cos\theta(\dot y\cos\psi-\dot x\sin\psi)-\dot\theta\sin\theta(\dot y\sin\psi+\dot x\cos\psi)\right]=0,$$

$$\frac{d}{dt}ma\sin\theta(\dot y\cos\psi+\dot x\sin\psi)+(A+ma^2)\dot\theta-$$

$$-ma\left[\dot\theta\cos\theta(\dot y\cos\psi-\dot x\sin\psi)-\dot\psi\sin\theta(\dot x\cos\psi+\dot y\sin\psi)\right]+$$

$$+ma^2\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta+C\dot\psi\sin\theta(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)-A\dot\psi\sin\theta\cos\theta+mga\cos\theta=0.$$

Решим полученные уравнения с условием, что

$$\dot y\cos\psi-\dot x\sin\psi=0,$$

$$\dot y\sin\psi+\dot x\cos\psi=a\dot\varphi,$$

и получим дифференциальные уравнения движения колеса:

$$(ma^2+C)\frac{d}{dT}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)-ma^2\dot\theta\dot\psi\sin\theta=0,$$

$$(A+ma^2)\ddot\theta+(ma^2+C)\dot\psi\sin\theta(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)-A\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta+mga\cos\theta=0,$$

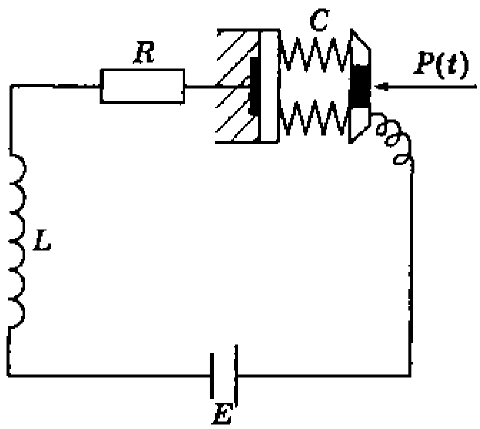
$$\frac{d}{dt}(A\dot\psi\sin^2\theta)-C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\dot\theta\sin\theta=0.$$

Ответ: $\frac{d}{dt}(A\dot{\psi}\sin^2\theta)-C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\dot{\theta}\sin\theta=0,$

$$(ma^2+C)\frac{d}{dT}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)-ma^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta=0,$$

$$(A+ma^2)\ddot{\theta}+(ma^2+C)\dot{\psi}\sin\theta(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)-$$
$$-A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+mga\cos\theta=0.$$

Задача 48.52



Конденсаторный микрофон состоит из последовательно соединенных катушки самоиндукции L, резистора сопротивления R и конденсатора, пластины которого связаны двумя пружинами общей жесткости c. Цепь присоединена к источнику питания с постоянной э.д.с. E, а на пластину конденсатора действует переменная сила $P(t)$. Емкость конденсатора в положении равновесия системы C_0, расстояние между пластинами в этом положении a, масса подвижной пластины конденсатора m. Ввести электрические и механические обобщенные координаты и составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.

Указания. 1. Потенциальная энергия конденсатора равна $V=q^2/2C$ (C — емкость конденсатора, q — заряд на его обкладках); электрокинетическая энергия вычисляется по формуле $T=\frac{1}{2}Li^2$ (L — коэффициент самоиндукции, $i=\frac{dq}{dt}$ — сила тока в цепи).

2. За обобщенные координаты принять изменение заряда конденсатора q и смещение пружин из положения равновесия. Тогда полный заряд будет q_0+q, а полное смещение x_0+x; здесь q_0 — заряд конденсатора, а x_0 — смещение пружин от нейтрального положения в положение равновесия системы.

Решение

Электромеханическая система, состоящая из конденсаторного микрофона и колебательного контура, имеет две степени свободы.

Выберем обобщенные координаты: x — перемещение пластины конденсатора, q — величины заряда электрической цепи.

Запишем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q. \tag{2}$$

Кинетическая энергия электромеханической системы равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T = T_1 + T_2.$$

Подвижная пластина конденсаторного микрофона совершает поступательное движение и ее кинетическая энергия

$$T_1=\frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Электрокинетическая энергия

$$T_2=\frac{1}{2}L\dot{q}^2.$$

Тогда

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}L\dot{q}^2.$$

Найдем частные производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=L\dot{q},\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial q}=0.$$

Возьмем производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=L\ddot{q}.$$

Для определения обобщенных сил найдем потенциальную энергию электромеханической системы, которая равна сумме: $\Pi_{\text{упр}}$ — сил упругости пружин конденсаторного микрофона, $\Pi_{\text{конд}}$ — конденсатора, $\Pi_{\text{ЭДС}}$ — электродвижущей силы:

$$\Pi = \Pi_{\text{упр}} + \Pi_{\text{конд}} + \Pi_{\text{ЭДС}},$$

где $\Pi_{\text{упр}} = \frac{\dot{c}}{2}(x + x_0)^2$; $\Pi_{\text{конд}} = \frac{(q+q_0)^2(a-x)}{2C_0 a}$; $\Pi_{\text{ЭДС}} = -E^* q = -(E - R\dot{q})q.$

Тогда

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q+q_0)^2(a-x)}{2C_0 a} - (E - R\dot{q})q.$$

Найдем обобщенные силы:

$$Q_x = Q^{\Pi} + P(t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P(t) = -c(x + x_0) + \frac{(q+q_0)^2}{2C_0 a} + P(t),$$

$$Q_q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{(q+q_0)(a-x)}{C_0 a} + E - R\dot{q}.$$

В положении статического равновесия системы

$$x_0 = \frac{Eq_0}{2aC}, \quad q_0 = EC_0. \tag{3}$$

Подставим найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q в уравнения (1) и (2) и с учетом выражений (3) получим

$$m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t),$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{C_0 a} = 0.$$

Ответ: $m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t)$, $L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{C_0 a} = 0.$

Задача 48.53

Определить частоты малых свободных колебаний конденсаторного микрофона, описанного в предыдущей задаче. Сопротивлением резистора пренебречь.

Решение

Воспользуемся результатами решения задачи 48.52. Потенциальная энергия электромеханической системы

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a} - (E - R\dot{q})q.$$

Пренебрегая сопротивлением резистора, получим

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a} - Eq.$$

Определим обобщенные силы, исключив силу $P(t)$:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(x + x_0) - \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 a},$$

$$Q_q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{(q + q_0)(a - x)}{C_0 a} + E.$$

В положении статического равновесия

$$cx_0 = \frac{Eq_0}{2a}, \quad q_0 = EC_0. \tag{1}$$

Тогда уравнения движения системы (см. решение задачи 48.52):

$$m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q = 0, \tag{2}$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C_0} - \frac{E}{a}x = 0. \tag{3}$$

Введем подстановку вида

$$x = A\sin kt, \quad q = B\sin kt.$$

Тогда уравнения (2) и (3) примут вид

$$A(c-mk^2)-B\frac{E}{a}=0,$$

$$-A\frac{E}{a}+B\left(\frac{1}{C_0}-Lk^2\right)=0.$$

Решим полученную систему уравнений относительно k:

$$k^4-k^2\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)=\frac{q_0^2}{a^2C_0^2mL}-\frac{c}{C_0mL}.$$

Найдем частоты малых колебаний системы:

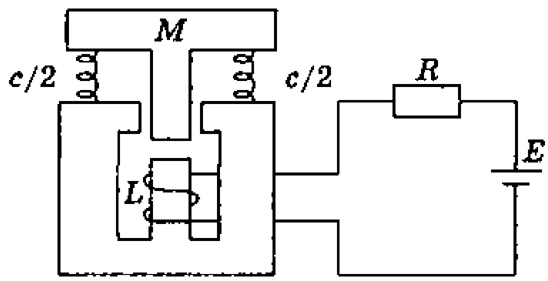
$$k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{q_0^2}{a^2C_0^2mL}}},$$

или с учетом выражений (1):

$$k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{E^2}{a^2mL}}}.$$

Ответ: $k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{E^2}{a^2mL}}}$.

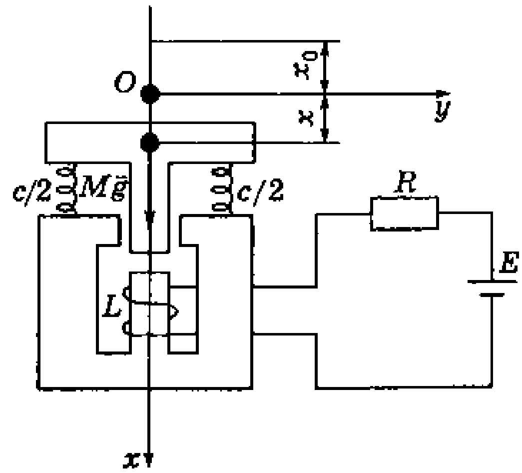
Задача 48.54



Изображенная на рисунке система отвечает принципиальной схеме электромагнитного датчика акселерометра. Масса якоря M, общая жесткость пружины c. Самоиндукция катушки изменяется вследствие изменения воздушного зазора в магнитопроводе $L = L(x)$ (x — вертикальное смещение якоря из положения, тогда пружины не напряжены). К катушке присоединена электрическая цепь, состоящая из элемента с заданной э.д.с. E, сопротивление цепи равно R. Составить уравнения движения системы и определить ее положение равновесия.

Указание. За обобщенные координаты принять смещение x якоря и заряд q, соответствующий току i в цепи ($i = dq/dt$).

Решение



Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x — перемещение якоря, которое определяет положение точек механической части системы, q — обобщенная координата, которая фиксирует состояние электрической цепи (см. рисунок).

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия электромеханической системы равна сумме кинетической энергии механической части T_1 и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}L\dot{q}^2.$$

Найдем производные от выражения кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=M\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=M\ddot{x}; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=L(x)\dot{q},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=L\ddot{q}+\frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q}, \qquad (4)$$

так как $L = L(x)$,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0. \tag{5}$$

С учетом потери напряжения на основании закона Ома найдем значение электродвижущей силы в цепи:

$$E^* = E - R\dot{q}.$$

Вычислим обобщенные силы:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - cx \cdot \delta x}{\delta x} = Mg - cx,$$

$$Q_q = \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{E^* \delta q}{\delta q} = E^* = E - R\dot{q}.$$

Подставим выражения (3)–(5) в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения, описывающие состояние электромеханической системы:

$$M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{x}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial x} = E.$$

В положении равновесия система находится в покое, т.е. $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$, $x = x_0$, $\dot{q} = i_0$.

Тогда

$$cx_0 = Mg + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2,$$

где $Ri_0 = E$.

О т в е т: уравнения движения: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{x}\dot{q}\dfrac{\partial L}{\partial x} = E$;

$M\ddot{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg.$

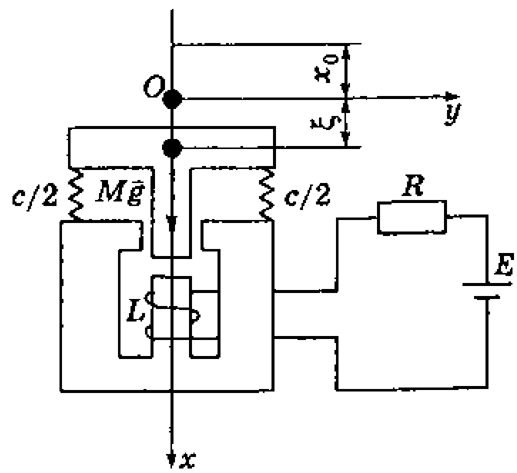
В положении равновесия $x = x_0$ и $i = \dot{q} = i_0$, где $i_0 = E/R$; $cx_0 = Mg + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2.$

Задача 48.55

Составить уравнение малых движений вблизи положения равновесия электромагнитного датчика, описанного в предыдущей задаче.

Указание. За обобщенные координаты взять изменение заряда e и вертикальное перемещение якоря из положения равновесия ξ. Функцию $L(x)$ разложить в ряд $L = L(x_0 + \xi) = L_0 + L_1\xi + \ldots$ и ограничиться в этом ряду первыми двумя членами.

Решение



Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: ξ — перемещение из положения равновесия якоря, которое определяет положение точек механической части системы (см. рисунок), q — обобщенная координата, фиксирующая состояние электрической цепи.

Удлинение пружины

$$x = x_0 + \xi,$$

где x_0 — удлинение пружины в положении равновесия, когда в электрической цепи течет ток i_0.

Тогда значение тока в электрической цепи при движении якоря

$$\dot{q} = i_0 + \dot{e}.$$

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия электромеханической системы равна сумме кинетической энергии механической части T_1 и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$; $T_2 = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2$.

С учетом указаний к задаче

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(L_0 + L_1\xi)\dot{q}^2.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}L_0\dot{q}^2 + L_1\xi\dot{q}^2.$$

Найдем производные по времени от частных производных кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x} = \frac{d}{dt}(x_0 + \xi) = \dot{\xi}$ и $\dot{q}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = M\ddot{\xi};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L_0\ddot{q} + L_1\dot{\xi}i_0 + L_1\xi\ddot{q}$$

и частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial x} = L_1\dot{q}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_\xi = Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = Mg - c(x_0 + \xi),$$

$$Q_q = \frac{\delta A}{\delta q} = E^* = E - R(i_0 + \dot{e}).$$

Подставим выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q в уравнения (1) и (2) и получим дифференциальные уравнения, описывающие состояние электромеханической системы:

$$M\ddot{\xi} - \frac{1}{2}L_1 i_0 \dot{e} = Mg - c(x_0 + \xi),$$

$$L_0 \ddot{e} + L_1 \dot{\xi} i_0 = E - R(i_0 + \dot{e})$$

или

$$M\ddot{\xi} - \frac{1}{2}L_1 i_0 \dot{e} - cx_0 + c\xi = Mg, \tag{3}$$

$$L_0 \ddot{e} + L_1 \dot{\xi} i_0 + Ri_0 + R\dot{e} = E. \tag{4}$$

Так как начало отсчета взято в положении равновесия, то

$$\ddot{x} = 0, \quad x = x_0, \quad i = \dot{q}_0 = i_0 = \frac{E}{R}.$$

Тогда

$$E = Ri_0, \quad cx_0 = Mg + \frac{1}{2}L_1 i_0^2. \tag{5}$$

Подставим выражения (5) в дифференциальные уравнения движения (3) и (4) и получим

$$M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0 \dot{e} = 0,$$

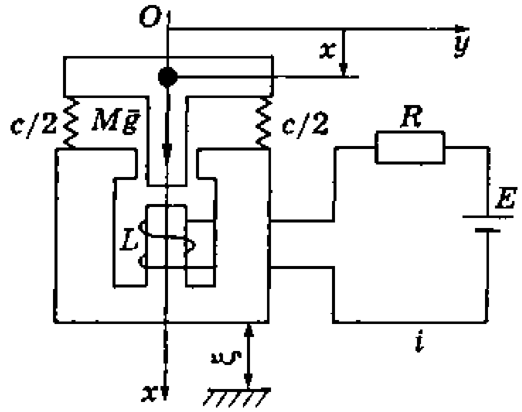
$$L_0 \ddot{e} + R\dot{e} + Ll_1 i_0 \dot{\xi} = 0.$$

О т в е т: $L_0 \ddot{e} + R\dot{e} + Ll_1 i_0 \dot{\xi} = 0,\ M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0 \dot{e} = 0.$

Задача 48.56

Основание датчика, описанного в задаче 48.54, совершает малые вертикальные колебания по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Определить закон движения якоря и ток в электрической цепи датчика.

Решение



Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x — перемещение якоря, которое определяет его перемещение по отношению к корпусу датчика (см. рисунок), q — обобщенная координата, фиксирующая состояние электрической цепи.

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x. \tag{2}$$

Кинетическая энергия электромеханической системы

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$, $T_2 = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2$.

Тогда

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_x = Mg - c(x_0 + x) + M\ddot{\xi} = Mg - cx_0 - cx - M\xi_0\omega^2 \sin\omega t,$$

$$Q_q = E^* = E - R(i_0 + i).$$

С учетом решения задачи 48.55 на основании уравнений Лагранжа (1) и (2) получим

$$L_0\dot{i} + Ri + L_1 i_0 \dot{x} = 0, \tag{3}$$

$$M\ddot{x} + cx - L_1 i_0 i = -M\xi_0\omega^2 \sin\omega t. \tag{4}$$

Введем подстановку:

$$i = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \quad x = g\sin\omega t + f\cos\omega t.$$

Продифференцировав эти выражения, подставим полученные значения в уравнения (3) и (4):

$$L_0\omega a + Rb + L_1 i_0 \omega g = 0, \tag{5}$$

$$-L_0\omega a + Ra - L_1 i_0 \omega f = 0, \tag{6}$$

$$(c - M\omega^2)f - L_1 i_0 b = 0, \tag{7}$$

$$(c - M\omega^2)g - L_1 i_0 a = M\xi_0\omega^2. \tag{8}$$

Решим совместно уравнения (6) и (7), получим

$$\omega b[(c - M\omega^2)L_0 + L_1^2 i_0^2] - R(c - M\omega^2)a = 0.$$

Решим совместно уравнения (5) и (8), получим

$$Rb(c - M\omega^2) + \omega[(c - M\omega^2)L_0 + L_1^2 i_0^2]a = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0 \omega.$$

Тогда

$$a = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0 \omega \frac{\omega[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]}{\Delta},$$

$$b = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0 \omega \frac{R(c - M\omega^2)}{\Delta},$$

$$f = \frac{M\xi_0\omega^2 R L_1^2 i_0^2 \omega}{\Delta},$$

$$g = -M\xi_0\omega^2 \frac{L_1^2 i_0^2 L_0 \omega^2 + (R^2 + L_0^2\omega^2)(c - M\omega^2)}{\Delta},$$

где $\Delta = R^2(c - M\omega^2)^2 + \omega^2[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]^2$.

Найдем значения тока в цепи и перемещение якоря:

$$i = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \left\{ R(c - M\omega^2)\cos\omega t + \omega[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]\sin\omega t \right\},$$

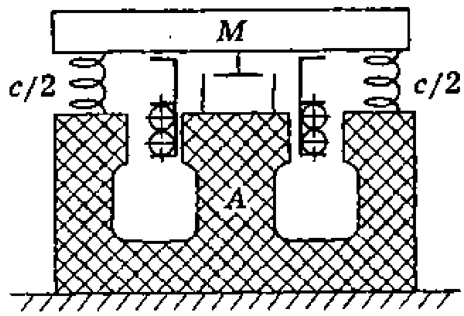
$$x = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\left\{ \omega L_1^2 i_0^2 R\cos\omega t - \left[L_1^2 i_0^2 L_0\omega + R^2 + L_0^2\omega^2(c - M\omega^2) \right] \sin\omega t \right\}.$$

О т в е т: $i = \dfrac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \left\{R(c - M\omega^2)\cos\omega t + \omega\left[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)\right]\sin\omega t\right\}$;

$$x = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\left\{-\left[L_1^2 i_0^2 L_0\omega + R^2 + L_0^2\omega^2(c - M\omega^2)\right]\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \omega L_1^2 i_0^2 R\cos\omega t\right\}.$$

Задача 48.57

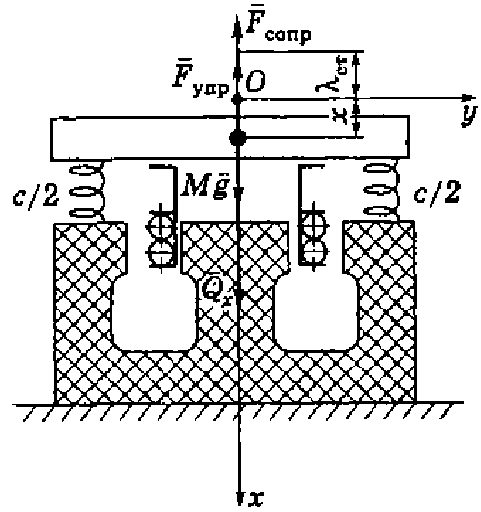
Электромеханическая движущая система состоит из цилиндрического постоянного магнита с концентрическими полюсами A, создающего радиальное поле, и якоря массы M, опирающегося на пружину жесткости c. Якорь соединен с катушкой, состоящей из n витков, и с механическим демпфером, сопротивление которого пропорционально скорости якоря (коэффициент сопротивления β); средний радиус катушки r; ее самоиндукция L, сопротивление R, магнитная индукция в зазоре магнита B. К зажимам катушки приложено переменное напряжение $V(t)$. Составить уравнения движения системы.



Указание. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, равны $Q_q = -2\pi r n B\dot{x}$, $Q_x = -2\pi r n B\dot{q}$ (Q_q — электродвижущая сила, индуцированная в электрической цепи, а Q_x — сила взаимодействия катушки с магнитом).

Решение

Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, постоянного магнита и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x — перемещение якоря, определяет положение подвижной части механизма, q — обобщенная координата фиксирует состояние электрической части цепи.



Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q. \tag{2}$$

Кинетическая энергия T электромеханической системы равна сумме кинетической энергии T_1 механической части системы и электрокинетической энергии T_2 электрической цепи:

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

Найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}$ и $\dot{q}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=M\dot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=L\dot{q}.$$

Возьмем их производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=M\ddot{x};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=L\ddot{q}.$$

Найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0.$$

С учетом потери напряжения найдем значение ЭДС в цепи:

$$E^*=E-R\dot{q}.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{\text{упр}} \cdot \delta x - F_{\text{сопр}} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} =$$

$$= Mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{сопр}} + Q_x^* = Mg - c(x+\lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q},$$

$$Q_q = \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q - Q_q^* \cdot \delta q + V(t) \cdot \delta q}{\delta q} = E^* + V(t) - Q_q^* =$$

$$= E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi rnB\dot{x}.$$

Найденные выражения производных от кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q подставим в уравнения (1) и (2) и получим уравнения движения системы:

$$M\ddot{x} = Mg - c(x+\lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q}, \qquad (3)$$

$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi rnB\dot{x}. \qquad (4)$$

В положении равновесия системы $c\lambda = Mg$, $\dot{q} = i_0 = \dfrac{E}{R}$.

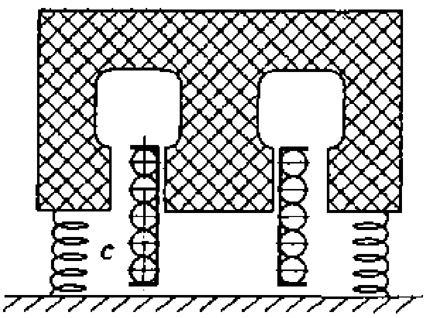
Тогда уравнения движения системы (3) и (4) примут вид

$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = 0,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t).$$

Ответ: $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t)$, $M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = 0$.

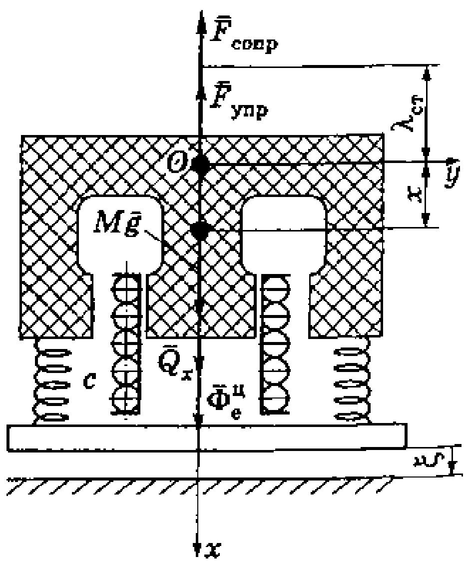
Задача 48.58



К основанию сейсмометра с индукционным преобразователем прикреплена катушка из n витков радиуса r, соединенная с электрической регистрирующей системой, схематизируемой цепью с самоиндукцией L и сопротивлением R. Магнитный сердечник, создающий радиальное магнитное поле, характеризуемое в зазоре магнитной индукцией B, опирается на основание с помощью пружин общей жесткости c. На сердечник действует также сила сопротивления, пропорциональная его скорости, вызываемая демпфером, создающим силу сопротивления $\beta\dot{x}$. Составить уравнения, определяющие перемещение сердечника и ток в цепи в случае малых вертикальных колебаний основания сейсмометра по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$.

Указание. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, даются формулами $Q_q = -2\pi r n B\dot{x}$ и $Q_x = -2\pi r n B\dot{q}$.

Решение



Электромеханическая система, состоящая из подвижного якоря, совершающего поступательное движение, постоянного магнита и электромагнитного механизма, имеет две степени свободы. Выберем обобщенные координаты: x — перемещение якоря, определяет положение подвижной части механизма, q — обобщенная координата, которая фиксирует состояние электрической части цепи.

Этим обобщенным координатам соответствуют уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q. \tag{2}$$

Кинетическая энергия электромеханической системы

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x)\dot{q}^2.$$

Найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям $\dot{x}$ и $\dot{q}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = M\ddot{q}.$$

Возьмем их производные по времени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = M\ddot{q}.$$

Найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

С учетом потери напряжения найдем значение ЭДС в цепи:

$$E^* = E - R\dot{q}.$$

Определим обобщенные силы:

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{\text{упр}} \cdot \delta x - F_{\text{сопр}} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x + \Phi_e}{\delta x} =$$

$$= Mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{сопр}} + Q_x^* + \Phi_e = Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q} + M\ddot{\xi},$$

$$Q_q = \frac{\delta A}{\delta q} = E^* - Q_q^* = E - R\dot{q} - 2\pi rnB\dot{x}.$$

Найденные выражения производных кинетической энергии и обобщенных сил Q_x и Q_q подставим в уравнения (1) и (2) и получим уравнения, определяющие перемещение сердечника и ток в цепи:

$$M\ddot{x} = Mq - cx - c\lambda - M\xi_0\omega^2 \sin\omega t - \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q}, \tag{3}$$

$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} - 2\pi rnB\dot{x}. \tag{4}$$

В положении равновесия системы $c\lambda_{\text{ст}} = Mg$, $\dot{q} = i_0 = \dfrac{E}{R}$.

Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = -M\xi_0\omega^2 \sin\omega t,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0.$$

Ответ: $M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = -M\xi_0\omega^2 \sin\omega t$, $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0.$

Список использованных источников

Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. М. : Высшая школа, 2004. 336 с.

Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. М. : Наука, 1991. 638 с.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб. : Лань, 2002. 729 с.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. М. : Астраль, 2002. 991 с.

Добронравов В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 1983. 575 с.

Лойцянский К.Г. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / К.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. М. : Наука, 1983. 640 с.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М. : Наука, 1986. 448 с.

Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 2003. 719 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. М. : Высшая школа, 2006. 416 с.

Федута А.А. Теоретическая механика и математические методы / А.А. Федута, А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. Минск : Технопринт, 2000. 500 с.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. М. : Интеграл-пресс, 2006. 603 с.

Оглавление