ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА
ЧАСТЬ 1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Практикум

Учебное пособие содержит типовые задачи с решениями по динамике материальной точки, взятые из наиболее распространенного сборника задач И.В. Мещерского (§ 26–33). В начале каждого параграфа приведены основные теоретические положения и методические указания, используемые при решении задач. Решения даны с подробными пояснениями.

Для студентов и преподавателей технических вузов и естественных факультетов университетов, а также лиц, самостоятельно изучающих теоретическую механику.

Предисловие

В последние десятилетия заметно возросло количество издаваемых решебников по физике, математике и механике для студентов технических вузов. Это обусловлено необходимостью создания базы для самостоятельной работы из-за сокращения времени на расчетно-графические и контрольные работы. Многие разделы механики, требующие больших затрат времени, не могут быть проработаны на практических занятиях с необходимой степенью детализации, в результате происходит «вымывание» трудного материала при изучении теоретической механики в целом и отдельных ее разделов.

Динамика традиционно является наиболее сложной частью теоретической механики. Динамика материальной точки имеет первостепенное значение для понимания векторной динамики Ньютона, так как в ней наглядно рассматривается применение основных теорем механики. Механика твердого тела, ее модели, принципы, законы являются фундаментом подготовки инженеров всех направлений, особенно специалистов для машиностроения, приборостроения, строительства и энергетики. Задачи данного раздела в наибольшей степени соответствуют тем задачам, которые инженерам приходится решать в ходе их практической деятельности. Качество усвоения учебного материала непосредственно зависит от количества и разнообразия решенных задач.

Сборник задач И.В. Мещерского является наиболее известным учебным пособием по теоретической механике, выдержавшим десятки переизданий во многих странах мира, которое и сегодня широко используется в высших учебных заведениях технического профиля нашей страны.

Первое пособие с решением задач этого сборника было издано в 1963 г. в Германии (H. Neuber. Lösungen zur Aufgabensammlung Mestscherski, 1963, DVW, 465 S.). Однако позднее сборник многократно переиздавался, при этом он исправлялся и дополнялся.

В предлагаемом учебном пособии даны решения всех задач из отдела «Динамика» сборника И.В. Мещерского (Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. 36-е изд., испр. М.: Наука, 1986). Первая часть пособия включает задачи главы IX «Динамика материальной точки» (§ 26–33), вторая — главы X «Динамика материальной системы» (§ 34–45) и § 46–48 главы XI «Аналитическая механика». Решения задач приводятся с подробными пояснениями, что особенно важно при самостоятельной работе. В начале каждого параграфа даны основные теоретические положения и методические указания с подробными пояснениями. Как правило, решения сопровождаются рисунками с указанием действующих сил, скоростей и ускорений.

Предлагаемое учебное пособие поможет усовершенствовать методику проведения практических занятий. Так, преподаватель может предложить студентам при подготовке к практическим занятиям по определенной теме самостоятельно ознакомиться с решением некоторых задач, а затем в ходе занятия решать аналогичные задачи.

Введение

Динамика — раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек (тел) под действием приложенных к ним сил.

Материальная точка — это тело, обладающее массой. В динамике под материальной точкой понимается не только тело бесконечно малых размеров, но и тело конечных размеров, различием в движении точек которого можно пренебречь. Поэтому при поступательном движении твердого тела, каких бы размеров оно ни было, его можно рассматривать как материальную точку, так как скорости и ускорения всех точек тела в этом случае одинаковы.

Масса тела — это величина, зависящая от количества вещества, заключенного в данном теле и определяющая его меру инертности при поступательном движении. *Инертность* представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.

Рассмотрим законы динамики материальной точки, известные как законы Галилея — Ньютона.

Первый закон (закон инерции):

изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или движется равномерно и прямолинейно до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Этот закон установлен Г. Галилеем в 1638 г.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил или под воздействием уравновешенной системы сил, называется ***движением по инерции***.

Второй закон (основной закон динамики):

произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а ее направление совпадает с направлением ускорения.

Математически этот закон выражается векторным равенством

$$m\bar{a} = \bar{F}. \tag{IX.1}$$

Второй закон установлен И. Ньютоном.

Как первый, так и второй закон динамики выполняются (или имеют место) только в инерциальной системе отсчета, под которой понимается условно неподвижная система.

Третий закон (равенства действия и противодействия):

две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Применительно к *взаимодействию двух материальных тел*, что имеет особое значение в динамике механической системы, этот закон можно сформулировать так:

всякому действию одного тела на другое соответствует равное по величине и противоположное по направлению противодействие.

Четвертый закон (закон независимости действия сил):

ускорение, получаемое точкой при действии на нее одновременно нескольких сил, равно геометрической сумме тех ускорений, которые получила бы точка при действии на нее каждой силы в отдельности.

Так как при одновременном действии на точку нескольких сил их можно заменить одной силой — равнодействующей $\bar{R} = \Sigma\bar{F}_k$, то этот закон можно записать в виде

$$m\bar{a} = \bar{R} = \Sigma\bar{F}_k. \tag{IX.2}$$

При решении задач динамики важным является соблюдение размерности основных механических величин, таких как длина, время, масса и сила.

Обычно применяют СИ единиц, в которой основными единицами измерения механических величин являются: метр (м), килограмм (кг) и секунда (с). Единицей же измерения силы является производная единица — ньютон (Н). Сила в 1 Н — это сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2; $1\,\text{Н} = 1\,\text{кг}\cdot\text{м/с}^2$.

Записав уравнение (IX.1) или (IX.2) в проекциях на выбранные оси декартовых координат $Oxyz$ или на оси естественного трехгран-

ника (главную нормаль n, касательную τ и бинормаль b), получим следующие скалярные уравнения:
в проекциях на оси x, y и z:

$$ma_x = m\ddot{x} = \sum F_{kx},$$
$$ma_y = m\ddot{y} = \sum F_{ky},$$
$$ma_z = m\ddot{z} = \sum F_{kz}; \qquad \text{(IX.3)}$$

в проекциях на оси n, τ и b:

$$ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn},$$
$$ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau},$$
$$ma_b = m\cdot 0 = \sum F_{kb}. \qquad \text{(IX.4)}$$

Анализируя уравнения (IX.3) и (IX.4), можно сформулировать *две основные задачи динамики материальной точки*:

первая (прямая) задача — зная закон движения и массу точки, определить силу, действующую на точку;

вторая (обратная) задача — зная действующие на точку силы, ее массу и начальные условия движения, определить закон движения точки или какие-либо другие кинематические характеристики.

Задачи этих типов приведены соответственно в § 26 и 27.

26. Определение сил по заданному движению

Методические указания к решению задач

В задачах этого типа обычно задано либо ускорение, либо закон движения точки, в соответствии с которым ускорение может быть определено. Так, если движение точки задано в декартовых координатах, т.е. $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ и $z = f_3(t)$, то определяются проекции ускорения на оси координат:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2},\ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

а затем — проекции силы на эти оси:

$$F_x = m\ddot{x},\ F_y = m\ddot{y},\ F_z = m\ddot{z}. \tag{26.1}$$

Модуль силы определяется по формуле

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{26.2}$$

Если точка совершает криволинейное движение и известен закон движения $s = f(t)$, траектория точки и ее радиус кривизны, то удобно пользоваться уравнениями (IX.4), а проекции ускорения на эти оси определяются по формулам:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ — касательное ускорение,}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} \text{ — нормальное ускорение,}$$

где ρ — радиус кривизны траектории.

Проекция ускорения на бинормаль равна нулю.

Тогда проекции силы на оси τ и n:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt},$$

$$F_n = m\frac{v^2}{\rho}. \qquad (26.3)$$

Модуль силы определяется по формуле

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}. \qquad (26.4)$$

Ускорение точки может быть также определено, если задано время t движения, путь s, пройденный точкой, или конечная скорость при равнопеременном движении.

При прямолинейном движении

$$a_\tau = a, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0,$$

а так как

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$v = v_0 + at, \qquad (26.5)$$

то ускорение при условии, что начальная скорость $v_0 = 0$, можно определить по формулам

$$a = \frac{v}{t}, \; a = \frac{2s}{t^2}. \qquad (26.6)$$

В большинстве задач движение точки является несвободным, поэтому при их решении необходимо в соответствии с принципом освобождаемости от связей отбросить наложенную на точку связь, заменив ее реакцией связи, и рассматривать точку как свободную.

Тогда второй закон динамики примет вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N}, \qquad (26.7)$$

где $\sum \bar{F}_k^a$ — сумма активных сил, действующих на точку; $\bar{N}$ — реакция связи.

Записав это уравнение в проекциях на оси декартовых координат или на естественные оси, можно найти неизвестную силу N.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Определить объект движения, т.е. движение какого тела или точки следует рассматривать.

2. Выбрать систему осей. При этом оси (или ось) направить в сторону движения тела.

3. Показать на рисунке объект движения в промежуточном положении в выбранной системе отсчета и все силы, действующие на него, включая и реакцию связи.

4. Записать второй закон динамики в векторной форме и в проекциях на выбранные оси или одну из осей.

5. Определить ускорение движения тела (точки), если оно не задано, в соответствии с приведенными выше указаниями.

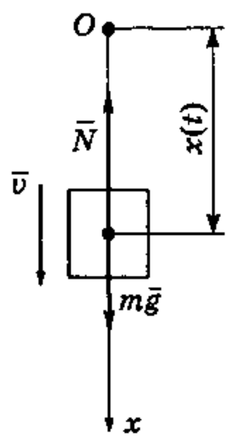
6. Найти искомые величины в общем виде, а затем подставить числовые значения.

Задачи и решения

Задача 26.1

В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

Решение



Так как лифт совершает прямолинейное движение, то направим ось x в сторону движения (начало отсчета точка O). Изобразим лифт в промежуточном положении и покажем на рисунке действующие на него силы: $m\bar{g}$ — сила тяжести, $\bar{N}$ — натяжение каната. Запишем уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - N. \qquad (1)$$

Из формулы (1) определим

$$N = m(g - \ddot{x}). \qquad (2)$$

Так как лифт движется прямолинейно и равноускоренно, то можно записать

$$s = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2},$$

где $s = x$, $a = \ddot{x}$.

Подставим в формулу (2) выражение $\ddot{x}$ и найдем натяжение каната

$$N = m\left(g - \frac{2s}{t^2}\right) = 280 \cdot \left(9{,}8 - \frac{2 \cdot 35}{10^2}\right) = 2548 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 2548 Н.

Задача 26.2

Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массы 1,02 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с^2. Найти силу давления, производимого грузом на платформу во время их совместного спуска.

Решение

На рис. 1 показано движение платформы с телом, на рис. 2 — движущееся тело и действующие на него силы: $m\bar{g}$ — сила тяжести, $\bar{R}$ — реакция опоры. Причем реакция $\bar{R}$ опоры численно равна давлению $\bar{N}$ груза на платформу, но противоположна по направлению, т.е. $\bar{R} = -\bar{N}$. Для груза, принимаемого за материальную точку, в проекции на ось x можно записать

$$ma = mg - R. \qquad (1)$$

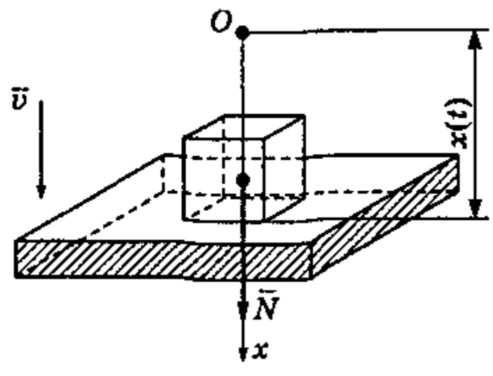


Рис. 1

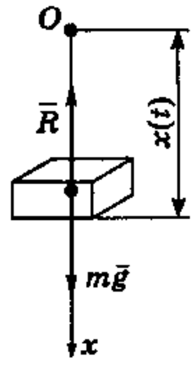


Рис. 2

Откуда

$$R = m(g - a) = 1{,}02(9{,}80 - 4{,}00) = 5{,}92 \text{ (Н)}.$$

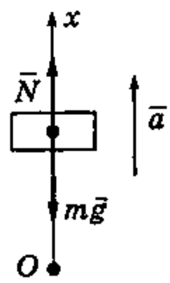
Ответ: 5,92 Н.

Задача 26.3

К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплен к точке A. Какое ускорение надо сообщить точке A, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении $T = 42$ Н?

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке действующие на тело силы: $m\bar{g}$ — сила тяжести, $\bar{N}$ — реакция нити. Запишем уравнение движения тела в проекции на ось x:



$$ma = N - mg. \qquad (1)$$

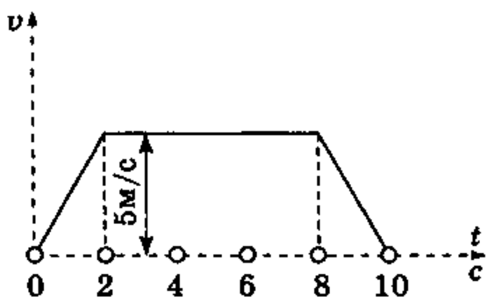
Так как нить оборвется при $N = T$, то из формулы (1) найдем

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{42{,}0}{3{,}0} - 9{,}8 = 4{,}2 \ (\text{м/с}^2).$$

О т в е т: 4,2 м/с^2.

Задача 26.4

При подъеме клетки лифта график скоростей имеет вид, изображенный на рисунке. Масса клетки 480 кг. Определить натяжения T_1, T_2, T_3 каната, к которому привешена клетка, в течение трех промежутков времени: 1) от $t = 0$ до $t = 2$ с; 2) от $t = 2$ до $t = 8$ с и 3) от $t = 8$ до $t = 10$ с.

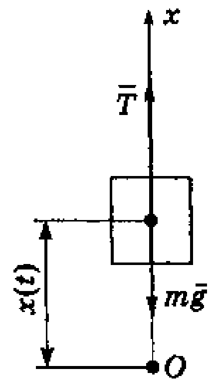


Р е ш е н и е

Покажем на рисунке силы, действующие на клеть лифта: $m\bar{g}$ — сила тяжести, T — сила натяжения каната. Запишем уравнение движения клетки лифта в проекции на ось x:

$$ma = T - mg \Rightarrow T = m(g + a).$$

По графику скоростей найдем:



1) $0 \le t \le 2$ — движение равноускоренное,

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Следовательно,

$$T_1 = 480(9{,}8 + 2{,}5) = 5904 \text{ (Н)};$$

2) $2 \le t \le 8$ — движение равномерное,

$$T_2 = 480 \cdot 9{,}8 = 4704 \text{ (Н)};$$

3) $8 \le t \le 10$ — движение равнозамедленное,

$$a_3 = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{0 - 5}{10 - 8} = -2{,}5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тогда

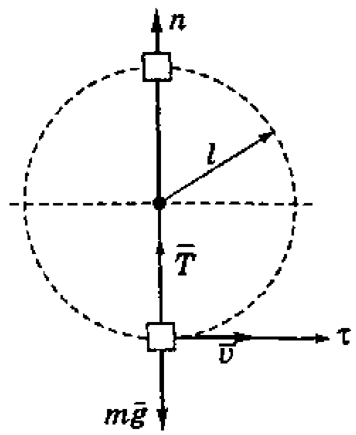
$$T_3 = 480(9{,}8 - 2{,}5) = 3504 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $T_1 = 5904$ Н; $T_2 = 4704$ Н; $T_3 = 3504$ Н.

Задача 26.5

Камень массы 0,3 кг, привязанный к нити длины 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость ω камня, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 Н.

Решение



Так как натяжение нити, на которой подвешен камень, будет максимальным в нижнем положении, то покажем на рисунке силы, действующие на камень в этом положении: силу тяжести $m\bar{g}$, силу натяжения $\bar{T}$ нити. Запишем второй закон динамики в векторной форме:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{T}$$

и в проекции на ось n:

$$m\frac{v^2}{l} = m\omega^2 l = -mg + T.$$

Приняв значение T, равное заданному допускаемому сопротивлению разрыва нити, найдем минимальную угловую скорость ω вращения нити, при которой произойдет ее разрыв:

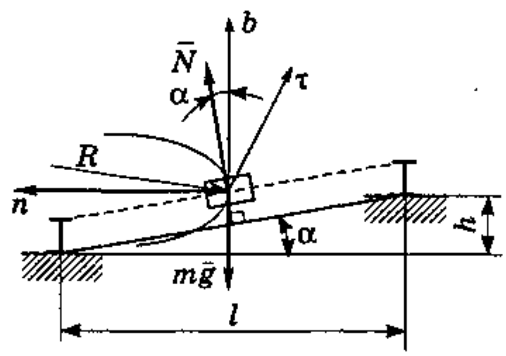
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{T - mg}{ml}} = \sqrt{\frac{9{,}0 - 0{,}3 \cdot 9{,}8}{0{,}3 \cdot 1{,}0}} = 4{,}494 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ: $\omega_{\min} = 4{,}494$ рад/с.

Задача 26.6

На криволинейных участках железнодорожного пути возвышают наружный рельс над внутренним для того, чтобы сила давления проходящего поезда на рельсы была направлена перпендикулярно полотну дороги. Определить величину h возвышения наружного рельса над внутренним при следующих данных: радиус закругления 400 м, скорость поезда 10 м/с, расстояние между рельсами 1,6 м.

Решение



Будем считать, что радиус закругления относится к осевой линии пути. Выберем естественные оси (n, τ, b) так, что соприкасающаяся плоскость τn — горизонтальна. Покажем на рисунке силы, действующие на поезд: $m\bar{g}$ — сила тяжести, $\bar{N}$ — нормальная реакция полотна дороги, равная по абсолютной величине давлению поезда на полотно и направленная к нему перпендикулярно. Запишем дифференциальные уравнения движения в проекциях на выбранные оси:

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = N\sin\alpha;$$

$$ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{const};$$

$$ma_b = 0 = N\cos\alpha - mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Тогда

$$m\frac{v^2}{R} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где R — радиус закрепления; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{l}$.

С учетом этого

$$h = \frac{lv^2}{Rg} = \frac{1{,}6\cdot 10^2}{400\cdot 9{,}8} \approx 0{,}041\ (\text{м}) = 4{,}1\ (\text{см}).$$

Ответ: $h = 4{,}1$ см.

Задача 26.7

В вагоне поезда, идущего сначала по прямолинейному пути, а затем по закругленному со скоростью 20 м/с, производится взвешивание некоторого груза на пружинных весах; весы в первом случае показывают 50 Н, а на закруглении 51 Н. Определить радиус закругления пути.

Решение

При движении поезда по прямолинейному пути (рис. 1) для взвешиваемого груза запишем

$$0 = F_1 - mg,$$

откуда

$$mg = F_1. \qquad (1)$$

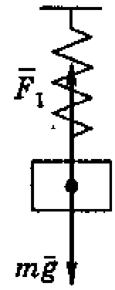


Рис. 1

При движении поезда по закругленному пути выберем естественные оси и спроецируем силы, действующие на груз (рис. 2), на оси n и b. В соответствии со вторым законом динамики получим

$$m\frac{v^2}{R} = F_2 \sin\alpha, \qquad (2)$$

$$0 = F_2 \cos\alpha - mg. \qquad (3)$$

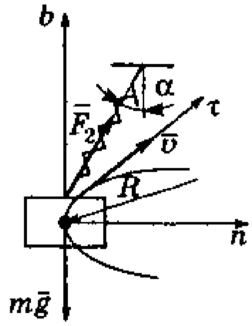


Рис. 2

Из формул (1) и (3) найдем

$$\cos\alpha = \frac{mg}{F_2} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Тогда

$$F_2 \sin\alpha = F_2\sqrt{1-\cos^2\alpha} = F_2\sqrt{1-\frac{F_1^2}{F_2^2}} = \sqrt{F_2^2 - F_1^2}.$$

Затем из формулы (2) определим радиус R закругления пути:

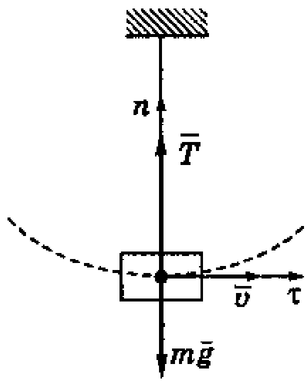
$$R = \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 - F_1^2}}\frac{v^2}{g} = \frac{50}{\sqrt{51^2 - 50^2}}\cdot\frac{20^2}{9{,}8} = 203 \text{ (м)}.$$

Ответ: 203 м.

Задача 26.8

Гиря массы 0,2 кг подвешена к концу нити длины 1 м; вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 м/с. Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

Решение



На гирю действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и сила натяжения $\bar{T}$ нити. Запишем второй закон динамики в векторном виде:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{T}$$

и в проекции на ось n, получим

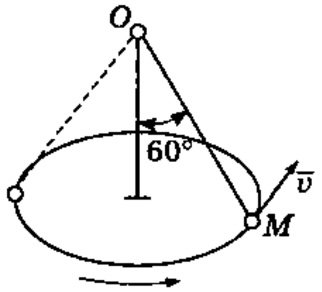
$$m\frac{v^2}{l} = T - mg.$$

Откуда найдем натяжение нити

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right) = 0{,}2\left(9{,}8 + \frac{5^2}{1}\right) = 6{,}96 \text{ (Н)}.$$

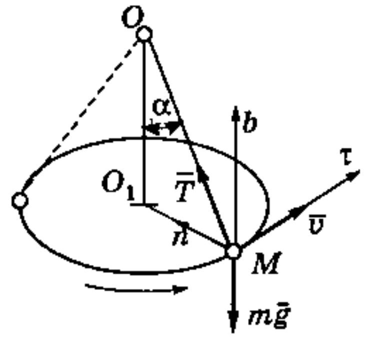
Ответ: 6,96 Н.

Задача 26.9



Груз M массы 0,102 кг, подвешенный на нити длины 30 см в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°. Определить скорость v груза и натяжение T нити.

Решение



На материальную точку M действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и сила натяжения $\bar{T}$ нити. Составим уравнение движения точки M в проекции на естественные оси.

С учетом того, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$, получим

$$m\frac{dv}{dt} = 0, \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = T\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$0 = T\cos\alpha - mg. \qquad (3)$$

Согласно формуле (1) $v = \text{const}$.

Из формулы (3) найдем натяжение нити

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}102 \cdot 9{,}8}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ (Н)}.$$

Подставим выражение T и $\rho = l\sin\alpha$ в формулу (2) и получим

$$m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Откуда найдем скорость груза

$$v = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}} = \sin 60^\circ\sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 0{,}3}{\cos 60^\circ}} = 2{,}1 \text{ (м/с)}.$$

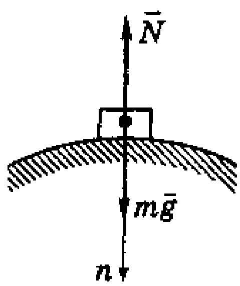
Ответ: $v = 2{,}1$ м/с; $T = 2$ Н.

Задача 26.10

Автомобиль массы 1000 кг движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 10$ м/с. Радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ м. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Решение

Рассмотрим автомобиль как материальную точку, на которую действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и нормальная реакция $\bar{N}$ со стороны моста (см. рисунок). Запишем второй закон динамики в проекции на ось n:



$$m\frac{v^2}{\rho} = mg - N.$$

Откуда

$$N = mg - \frac{mv^2}{\rho} = 1000\left(9{,}8 - \frac{10^2}{50}\right) = 7800 \text{ (Н)}.$$

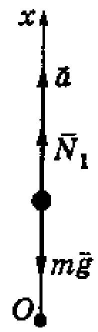
Ответ: 7800 Н.

Задача 26.11

В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50 Н, при ускоренном — 51 Н. Найти ускорение кабины.

Решение

При равномерном движении кабины пружинные весы показывают вес тела, т.е.



$$0 = N - mg,$$

где N — показание весов.

При ускоренном движении (см. рисунок) на тело действует сила тяжести $m\bar{g}$, а показание весов N_1. Согласно второму закону динамики

$$ma = N_1 - mg.$$

Отсюда

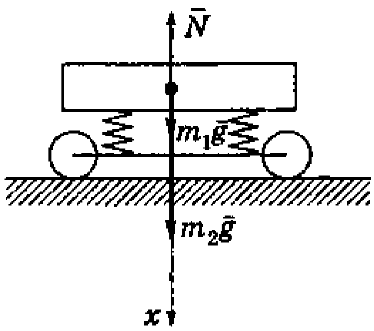
$$a = \frac{N_1 - mg}{m} = \frac{(51-50)9{,}8}{50} = 0{,}196 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Ответ: 0,196 м/с^2.

Задача 26.12

Масса кузова трамвайного вагона 10 000 кг. Масса тележки с колесами 1000 кг. Определить силу наибольшего и наименьшего давления вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $x = 0{,}02\sin 10t$ м.

Решение



Принимая кузов трамвайного вагона за материальную точку, покажем на рисунке силы, действующие на нее: $m_1\bar{g}$ — сила тяжести кузова, $m_2\bar{g}$ — сила тяжести тележки, $\bar{N}$ — реакция опорной поверхности. Запишем дифференциальное уравнение движения кузова в следующем виде:

$$m_1\ddot{x} = m_1 g + m_2 g - N,$$

где $\ddot{x} = -2\sin 10t$ — ускорение движения кузова; m_1 — масса кузова; m_2 — масса тележки.

Откуда

$$N = m_2 g + m_1 g - m_1\ddot{x} = (1000 + 10\,000)9{,}8 + 2\cdot 10\,000\sin 10t.$$

Наибольшим давление будет при максимальном значении $\sin 10t$, т.е. когда $\sin 10t = 1$:

$$N_{max} = 10\,000\,(1{,}1\cdot 9{,}8 + 2\cdot 1) = 12{,}78\cdot 10^4 \text{ (Н)},$$

наименьшим — при минимальном значении $\sin 10t$ (при $\sin 10t = -1$):

$$N_{min} = 10\,000\,(1{,}1\cdot 9{,}8 - 2) = 8{,}78\cdot 10^4 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $N_{max} = 12{,}78\cdot 10^4$ Н; $N_{min} = 8{,}78\cdot 10^4$ Н.

Задача 26.13

Поршень двигателя внутреннего сгорания совершает горизонтальные колебания согласно закону $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ см, где r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω — постоянная по величине угловая скорость вала. Определить наибольшее значение силы, действующей на поршень, если масса последнего M.

Решение

Так как закон движения поршня и его масса заданы, то силу, действующую на поршень, определим по закону Ньютона,

$$P = M\ddot{x},$$

где M — масса поршня; $\ddot{x}$ — ускорение, $\ddot{x} = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

Тогда

$$P = -Mr\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos\omega t\right).$$

Наибольшим значение силы, действующей на поршень, будет при $\omega t = 2\pi n,\ n = 0, 1, \ldots,$

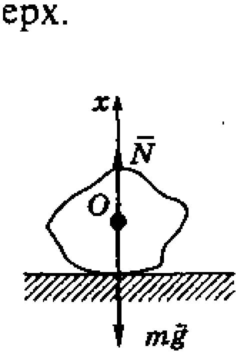
$$P = Mr\omega^2\left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

Ответ: $P = Mr\omega^2(1 + r/l)$.

Задача 26.14

Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $a = 5$ см. Найти наименьшую частоту k колебаний решета, при которой куски руды, лежащие на нем, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

Решение



На кусок руды действуют сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция решета $\bar{N}$ (см. рисунок). Запишем второй закон динамики в векторной форме:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{N}$$

и в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -mg + N.$$

Так как решето совершает гармонические колебания, то

$$x = a\sin(kt+\alpha),$$

$$\ddot{x} = -ak^2\sin(kt+\alpha) = -k^2x.$$

Когда кусок отделяется от решета, $N = 0$. Поэтому

$$-mk^2x = -mg.$$

Найдем наименьшую частоту

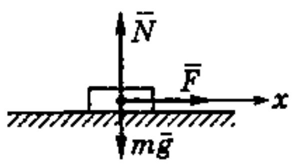
$$k = \sqrt{\frac{g}{x_{max}}} = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ: $k = 14$ рад/с.

Задача 26.15

Тело массы 2,04 кг совершает колебательное движение по горизонтальной прямой согласно закону $x = 10\sin\frac{\pi t}{2}$ м. Найти зависимость силы, действующей на тело, от координаты x, а также наибольшую величину этой силы.

Решение



Запишем дифференциальное уравнение движения тела под действием силы $\bar{F}$ в проекции на ось x:

$$F = m\ddot{x} = -m\frac{10\pi^2}{4}\sin\frac{\pi t}{2} = -\frac{\pi^2}{4}x\cdot 2{,}04 = -5{,}033x,$$

где $\ddot{x} = -\frac{10}{4}\pi^2\sin\frac{\pi t}{2}$.

Определим наибольшую величину силы $\bar{F}$:

$$F_{max} = 5{,}033|x_{max}| = 5{,}033\cdot 1 = 50{,}33 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $F = -5{,}033x$ Н; $F_{max} = 50{,}33$ Н.

Задача 26.16

Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями $x = 3\cos 2\pi t$ см, $y = 4\sin \pi t$ см (t в с). Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки под действием силы $\overline{P}$ в проекциях на оси x и y:

$$P_x = m\ddot{x} = -m\frac{3\cdot 4\pi^2}{100}\cos 2\pi t = -\frac{4\cdot 3{,}14^2}{100}\cdot 0{,}2x = -0{,}0789x \text{ (Н)},$$

где $\ddot{x} = -\frac{3\cdot 4\pi^2}{100}\cos 2\pi t$;

$$P_y = m\ddot{y} = -m\frac{4\pi^2}{100}\sin \pi t = -\frac{3{,}14^2}{100}\cdot 0{,}2y = -0{,}0197y \text{ (Н)},$$

где $\ddot{y} = -\frac{4\pi^2}{100}\sin \pi t$.

Ответ: $P_x = -0{,}0789x$ Н; $P_y = -0{,}0197y$ Н.

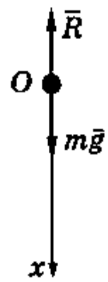
Задача 26.17

Шарик, масса которого равна 100 г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением

$$x = 4{,}9t - 2{,}45\left(1 - e^{-2t}\right),$$

где x — в метрах, t —в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить ее как функцию скорости шарика.

Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на шарик: силу тяжести $m\overline{g}$, силу сопротивления $\overline{R}$ воздуха.

Запишем дифференциальное уравнение движения шарика в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - R,$$

где $\ddot{x} = 9{,}8e^{-2t}$ — проекция ускорения на ось x.

Откуда

$$R = mg - m\ddot{x} = mg(1 - e^{-2t}) = 0{,}1 \cdot 9{,}8(1 - e^{-2t}) = 0{,}98(1 - e^{-2t}) = 0{,}2v \text{ (Н)},$$

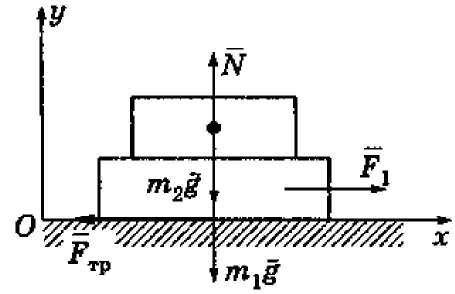
где $v = \dot{x} = 4{,}9(1 - e^{-2t})$ — скорость шарика.

Ответ: $R = 0{,}98(1 - e^{-2t})$ Н $= 0{,}2v$ Н.

Задача 26.18

Масса стола строгального станка 700 кг, масса обрабатываемой детали 300 кг, скорость хода стола $v = 0{,}5$ м/с, время разгона $t = 0{,}5$ с. Определить силу, необходимую для разгона (считая движение равноускоренным) и для дальнейшего равномерного движения стола, если коэффициент трения при разгоне $f_1 = 0{,}14$, а при равномерном движении $f_2 = 0{,}07$.

Решение



Выберем систему координат Oxy и покажем на рисунке все силы, действующие на стол строгального станка с деталью.

Запишем уравнение равноускоренного движения стола строгального станка в проекции на ось x:

$$(m_1 + m_2)a = F_1 - F_{тр} = F_1 - (m_1 + m_2)f_1 g, \qquad (1)$$

где m_1 — масса стола; m_2 — масса обрабатываемой детали; a — ускорение стола, $a = \dfrac{v}{t} = 1$ м/с^2; F_1 — сила, необходимая для разгона стола; f_1 — коэффициент трения, $f_1 = 0{,}14$; $F_{тр}$ — сила трения, $F_{тр} = f_1 N = f_1(m_1 + m_2)g$.

Тогда из уравнения (1) найдем

$$F_1 = (m_1 + m_2)(a + f_1 g) = 100(1 + 0{,}14 \cdot 9{,}8) = 2372 \text{ (Н)}.$$

При равномерном движении $a = 0$, следовательно,

$$F_2 = (m_1 + m_2)f_2 g = 1000 \cdot 0{,}07 \cdot 9{,}8 = 686 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $F_1 = 2372$ Н; $F_2 = 686$ Н.

Задача 26.19

Груженая вагонетка массы 700 кг опускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15°$, имея скорость $v = 1{,}6$ м/с. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при торможении вагонетки. Время торможения $t = 4$ с, общий коэффициент сопротивления движению $f = 0{,}015$. При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

Решение

Рассмотрим случай равномерного спуска вагонетки, когда $a = 0$.

Направив ось x в сторону движения вагонетки, покажем силы (рис. 1), действующие на вагонетку: силу тяжести $m\bar{g}$, силу натяжения каната $\overline{T}_1$, силу сопротивления $\overline{F}_c$, реакцию $\overline{N}_1$ опоры.

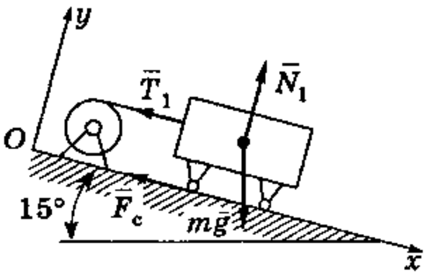


Рис. 1

Запишем дифференциальное уравнение движения вагонетки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = mg\sin 15° - T_1 - F_c, \tag{1}$$

где $\ddot{x} = a = 0$; $F_c = fN_1 = fmg\cos 15°$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$0 = mg\sin 15° - T_1 - fmg\cos 15°,$$

откуда найдем натяжение каната

$$T_1 = mg(\sin 15° - f\cos 15°) = 700 \cdot 9{,}8(0{,}258 - 0{,}015 \cdot 0{,}966) = 1676 \text{ (Н)}.$$

Определим натяжение каната при торможении вагонетки. Покажем силы (рис. 2), действующие на вагонетку в этом случае: силу тяжести $m\bar{g}$, силу натяжения каната $\overline{T}_2$, силу сопротивления $\overline{F}_c$, реакцию $\overline{N}_2$ опоры.

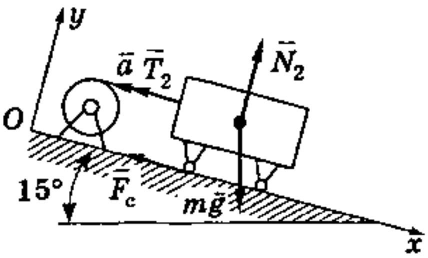


Рис. 2

Запишем дифференциальное уравнение движения вагонетки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = mg\sin 15° - T_2 - F_c, \tag{2}$$

где $\ddot{x}$ — ускорение вагонетки.

Ускорение вагонетки найдем по формуле

$$v_k = v_0 + at,$$

так как $v_k = 0$, то $a = \frac{v_0}{t}$ или $a = -\frac{V}{t}$; знак минус показывает, что вагонетка движется замедленно, т.е. вектор $\bar{a}$ направлен в сторону, обратную движению вагонетки.

Это значит, что

$$\ddot{x} = -\frac{v}{t}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$-m\frac{v}{t} = mg\sin 15° - fmg\cos 15° - T_2.$$

Откуда

$$T_2 = mg(\sin 15° - f\cos 15°) + m\frac{v}{t} = mg\left(mg\sin 15° - f\cos 15° + \frac{v}{gt}\right) =$$

$$= 700 \cdot 9{,}8\left(0{,}258 - 0{,}015 \cdot 0{,}966 + \frac{1{,}6}{9{,}8 \cdot 4}\right) = 1956 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $T_1 = 1676$ Н; $T_2 = 1956$ Н.

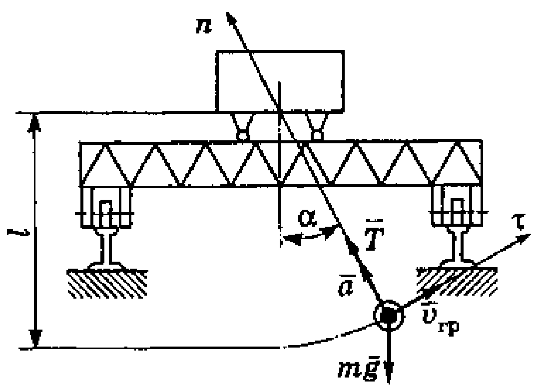
Задача 26.20

Груз массы 1000 кг перемещается вместе с тележкой вдоль горизонтальной фермы мостового крана со скоростью $v = 1$ м/с. Расстояние центра тяжести груза до точки подвеса $l = 5$ м. При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнет качаться около точки подвеса. Определить наибольшее натяжение каната при качании груза.

Решение

При внезапной остановке тележки груз продолжит движение с некоторой скоростью $\bar{v}_{гр}$ по дуге окружности радиуса l. Рассматривая груз как материальную точку в произвольном положении, определяемом углом α отклонения троса, выберем оси n и τ.

Покажем на рисунке силы, действующие на груз: силу тяжести $m\bar{g}$, силу натяжения $\bar{T}$. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось n:



$$ma_n = \sum F_{kn} = T - m\bar{g}\cos\alpha, \qquad (1)$$

где $a_n = \dfrac{v_{гр}^2}{l}$ — нормальное ускорение.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\frac{v_{гр}^2}{l} = T - mg\cos\alpha,$$

откуда

$$T = m\frac{v_{гр}^2}{l} + mg\cos\alpha.$$

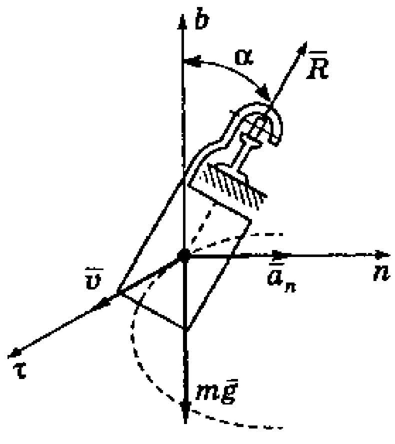
Сила натяжения T будет максимальной при $\alpha = 0$, когда $v_{гр} = v$, значит,

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos 0° = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos 0°\right) = 100\left(\frac{1^2}{5} + 9{,}8\right) = 10\,000 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $T = 10\ 000$ Н.

Задача 26.21

Определить отклонение α от вертикали и силу давления N вагона на рельс подвесной дороги при движении вагона по закруглению радиуса $r = 30$ м со скоростью $v = 10$ м/с. Масса вагона 1500 кг.



Решение

На рисунке изобразим вагон в произвольном положении. Покажем силы, действующие на него: силу тяжести $m\bar{g}$, силу реакции $\bar{R}$ рельса. Выберем естественные оси.

Запишем дифференциальные уравнения движения вагона в проекциях на эти оси:

$$ma_n = \sum F_{kn} = R\sin\alpha,$$
$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} = 0,$$
$$ma_b = \sum F_{kb} = R\cos\alpha - mg,$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{r}$; $a_\tau = 0$.

Так как $\sum F_{k\tau} = 0$, значит, $v = \text{const}$, $a_b = 0$, поскольку в вертикальном направлении движение отсутствует. Тогда

$$m\frac{v^2}{r} = R\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$0 = R\cos\alpha - mg. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдем

$$R = \frac{mg}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в формулу (1) и получим

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = mg\,\text{tg}\,\alpha,$$

откуда

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{mv^2}{mgr} = \frac{v^2}{gr} = \frac{10^2}{9{,}8\cdot 30} = 0{,}3401,$$

$$\alpha = \text{arctg}\,0{,}3401 = 18°47'.$$

Силу реакции рельса рассчитаем по формуле (3):

$$R = \frac{1500\cdot 9{,}8}{\cos 18°47'} = 15\,527 \text{ (Н)}.$$

Так как $N = |R|$, то, следовательно, $N = 15\,527$ Н.

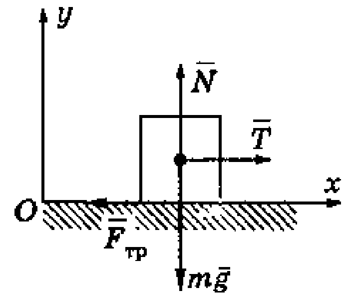
О т в е т: $\alpha = 18°47'$; $N = 15\,527$ Н.

Задача 26.22

Масса поезда без локомотива равна $2 \cdot 10^5$ кг. Двигаясь по горизонтальному пути равноускоренно, поезд через 60 с после начала движения приобрел скорость 15 м/с. Сила трения равна 0,005 веса поезда. Определить натяжение стяжки между поездом и локомотивом в период разгона.

Решение

Рассматриваем локомотив в период разгона как материальную точку, на которую действуют силы (см. рисунок): сила тяжести $m\bar{g}$, натяжение $\bar{T}$ стяжки между поездом и локомотивом, нормальная реакция $\bar{N}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$. Направим ось x в сторону движения локомотива и запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = T - F_{тр}$$

или

$$m\ddot{x} = T - 0{,}005mg. \qquad (1)$$

Ускорение локомотива можно найти из условия равноускоренного движения в период разгона: $v = v_0 + at$, откуда $a = \dfrac{v}{t}$.

Так как $\ddot{x} = a$, то выражение (1) примет вид

$$m\frac{v}{t} = T - 0{,}005mg.$$

Откуда

$$T = m\frac{v}{t} + 0{,}005mg = m\left(\frac{v}{t} + 0{,}005g\right) = 2 \cdot 10^5\left(\frac{15}{60} + 0{,}005 \cdot 9{,}8\right) = 59\,800 \text{ (Н)}.$$

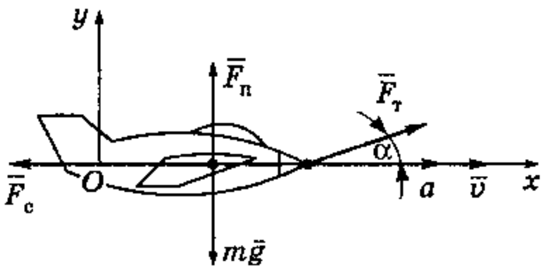
Ответ: 59 800 Н.

Задача 26.23

Спортивный самолет массы 2000 кг летит горизонтально с ускорением 5 м/с, имея в данный момент скорость 200 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости в 1 м/с равно 0,5 Н. Считая силу сопротивления направленной в сторону, обратную скорости, определить силу тяги винта, если она составляет угол в 10° с направлением полета. Определить также величину подъемной силы в данный момент.

Решение

Рассматривая самолет как материальную точку, покажем на рисунке силы, действующие на него в момент горизонтального полета: силу тяжести $m\bar{g}$, подъемную силу $\bar{F}_п$, силу сопротивления $\bar{F}_с$, силу тяги $\bar{F}_т$. Выбрав систему Oxy, запишем дифференциальные уравнения движения в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F_т \cos\alpha - F_с, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = F_п + F_т \sin\alpha - mg, \tag{2}$$

где $\ddot{x} = a$; $\ddot{y} = 0$.

Тогда уравнения (1) и (2) примут следующий вид:

$$ma = F_т \cos\alpha - F_с = F_т \cos\alpha - 0{,}5v^2, \tag{3}$$

$$0 = F_п + F_т \sin\alpha - mg. \tag{4}$$

Силу тяги винта найдем из уравнения (3):

$$F_т = \frac{ma + 0{,}5v^2}{\cos\alpha} = \frac{2000 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 200^2}{\cos 10^\circ} = 30\,463 \text{ (Н)}.$$

Из уравнения (4) определим подъемную силу

$$F_п = mg - F_т \sin 10^\circ = 2000 \cdot 9{,}8 - 30\,463 \cdot 0{,}174 = 14\,310 \text{ (Н)}.$$

Ответ: сила тяги равна 30 463 Н, подъемная сила равна 14 310 Н.

Задача 26.24

Грузовой автомобиль массы 6000 кг въезжает на паром со скоростью 6 м/с. Заторможенный с момента въезда на паром автомобиль остановился, пройдя 10 м. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти натяжение каждого из двух канатов, которыми паром привязан к берегу. При решении задачи пренебречь массой и ускорением парома.

Решение

Рассмотрим равнозамедленное движение автомобиля по парому. Покажем силы, действующие на автомобиль: силу тяжести $m\bar{g}$, нормальную реакцию $\bar{N}$, силу трения $\bar{F}_{тр}$ (рис. 1). Учитывая прямолинейное движение автомобиля, направим ось x в сторону движения. Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

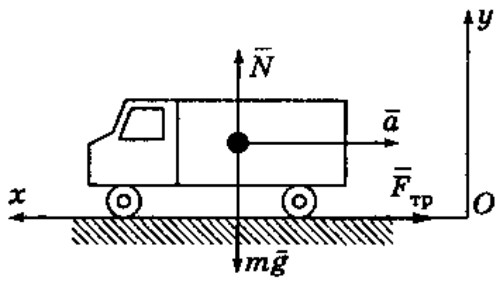


Рис. 1

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = -F_{тр},$$

где $\ddot{x} = a$.

Так как движение равнозамедленное, то

$$v_k^2 - v_0^2 = 2as,$$

откуда

$$a = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2s} = -\frac{6^2}{2 \cdot 10} = -1{,}8 \text{ (м/с)},$$

т.е. вектор $\bar{a}$ направлен в сторону, обратную движению автомобиля.

Тогда

$$F_{тр} = -m\ddot{x} = -6000 \cdot (-1{,}8) = 10\,800 \text{ (Н)}.$$

Далее рассмотрим равновесие парома, на который действуют силы: сила тяжести автомобиля $m\bar{g}$, архимедова сила $\bar{F}_A$, сила сцепления $\bar{F}'_{тр}$ $\left(|\bar{F}'_{тр}| = |\bar{F}_{тр}|\right)$, силы $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ натяжения канатов, равные по величине (рис. 2). Для нахождения натяжения канатов используем уравнение равновесия:

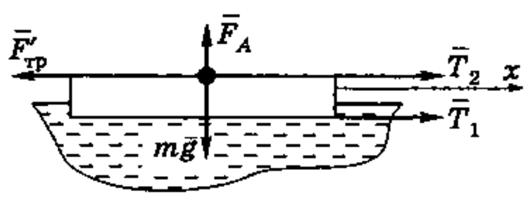


Рис. 2

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$T_1 + T_2 - F'_{тр} = 2T - F'_{тр} = 0,$$

так как $T_1 = T_2$.

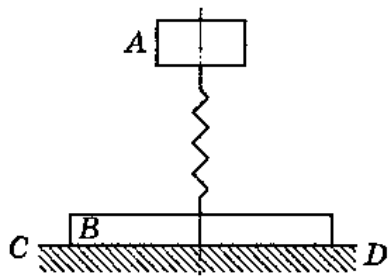
Откуда

$$T = T_1 = T_2 = \frac{F'_{\text{тр}}}{2} = \frac{10\,800}{2} = 5400 \text{ (Н)}.$$

О т в е т: натяжение каждого каната 5400 Н.

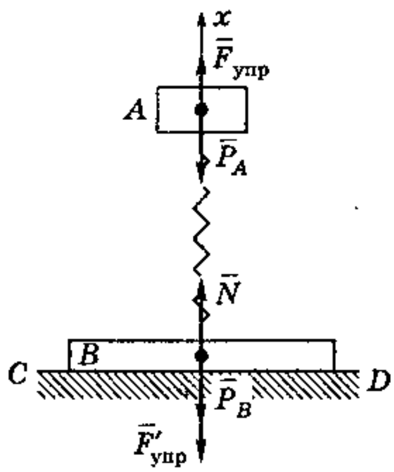
Задача 26.25

Грузы A и B веса $P_A = 20$ Н и $P_B = 40$ Н соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Груз A совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 см и периодом 0,25 с. Вычислить силу наибольшего и наименьшего давления грузов A и B на опорную поверхность CD.



Р е ш е н и е

Рассмотрим прямолинейное колебание груза A, на который действуют сила тяжести $\bar{P}_A$ и сила упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$ пружины. Направим ось x вертикально вверх (см. рисунок) и запишем дифференциальное уравнение движения груза A в проекции на эту ось:



$$m_A \ddot{x} = \sum F_{kx} = F_{\text{упр}} - P_A.$$

Откуда найдем

$$F_{\text{упр}} = P_A\left(\frac{\ddot{x}}{g} + 1\right). \qquad (1)$$

Так как в условии сказано, что колебания груза свободные, то уравнение его движения можно записать в виде

$$x = a \sin kt,$$

где k — циклическая частота, $k = \dfrac{2\pi}{T}$.

Тогда

$$x = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \qquad (2)$$

Продифференцировав выражение (2) дважды, получим

$$\dot{x} = \frac{2a\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \ddot{x} = -\frac{4a\pi^2}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Подставим значение $\ddot{x}$ в формулу (1):

$$F_{\text{упр}} = P_A\left[1 - \frac{4a\pi^2}{gT^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right].$$

Максимальным значение $F_{\text{упр}}$ будет при $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -1$, а минимальным — при $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$. Следовательно,

$$F_{\max} = P_A\left(1 + \frac{4a\pi^2}{gT^2}\right) = 20\left(1 + \frac{4\cdot 0{,}01\cdot 3{,}14^2}{9{,}8\cdot 0{,}25^2}\right) = 32{,}8 \text{ (Н)},$$

$$F_{\min} = P_A\left(1 - \frac{4a\pi^2}{gT^2}\right) = 20\left(1 - \frac{4\cdot 0{,}01\cdot 3{,}14^2}{9{,}8\cdot 0{,}25^2}\right) = 7{,}2 \text{ (Н)}.$$

Для определения силы давления груза B на опорную поверхность CD рассмотрим состояние его равновесия под действием силы тяжести $\overline{P}_B$, силы упругости $\overline{F}'_{\text{упр}} = -\overline{F}_{\text{упр}}$ и реакции $\overline{N}$ поверхности:

$$\sum F_{kx} = 0, \; N - P_B - F'_{\text{упр}} = 0,$$

откуда

$$N = P_B + F'_{\text{упр}},$$

так как $F'_{\text{упр}} = |F_{\text{упр}}|$, то

$$N_{\max} = P_B + F_{\max} = 40 + 32{,}8 = 72{,}8 \text{ (Н)},$$

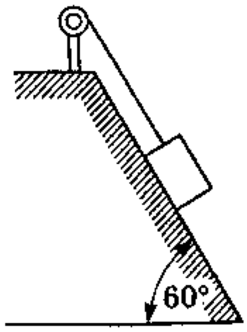
$$N_{\min} = P_B + F_{\min} = 40 + 7{,}2 = 47{,}2 \text{ (Н)}.$$

Сила давления груза B равна по величине реакции опорной поверхности, т.е. $R_{\max}$ = 72,8 Н, $R_{\min}$ = 47,2 Н.

Ответ: $R_{\max}$ = 72,8 Н; $R_{\min}$ = 47,2 Н.

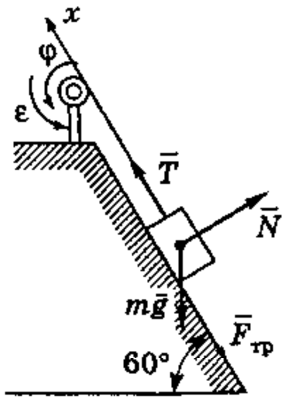
Задача 26.26

Груз массы $m = 600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом (см. рисунок). Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворот радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0{,}4t^3$. Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.



Решение

Рассмотрим прямолинейное движение груза по плоскости шурфа вверх. Покажем на рисунке силы, которые на него действуют: силу тяжести $m\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ поверхности, силу трения $\bar{F}_{тр}$, силу натяжения $\bar{T}$ троса. Направим ось x в сторону движения груза и запишем дифференциальное уравнение его движения в проекции на эту ось:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = T - mg\sin 60° - F_{тр}, \qquad (1)$$

где $F_{тр} = fN = fmg\cos 60°$; $\ddot{x}$ — ускорение.

Ускорение найдем по формуле

$$\ddot{x} = R\varepsilon,$$

где R — радиус ворота; $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \left(0{,}4t^3\right)'' = 2{,}4t$.

Тогда $\ddot{x} = 0{,}2 \cdot 2{,}4\,t = 0{,}48\,t$.

Силу натяжения троса найдем из уравнения (1):

$$T = m\ddot{x} + mg\sin 60° + F_{тр} = 0{,}48tm + mg\sin 60° + fmg\cos 60° =$$

$$= mg\left(\frac{0{,}48}{g} + \sin 60° + f\cos 60°\right) = 600 \cdot 9{,}8\left(\frac{0{,}48}{9{,}8}t + 0{,}866 + 0{,}2 \cdot 0{,}5\right) =$$

$$= 288t + 5680\ (\text{Н}).$$

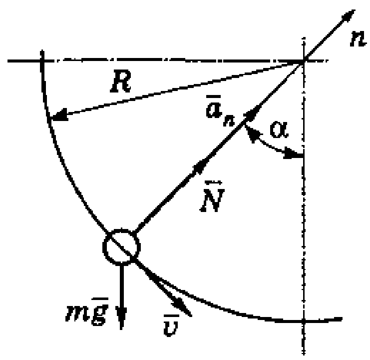
Через 2 с после начала движения $T = 288 \cdot 2 + 5680 = 6256$ (Н).

Ответ: $T = (5{,}68 + 0{,}288t)$ кН; при $t = 2$ с $T = 6{,}256$ кН.

Задача 26.27

Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 300 м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиуса $R = 600$ м в вертикальной плоскости. Масса летчика 80 кг. Какая наибольшая сила прижимает летчика к креслу?

Решение



Рассмотрим летчика в произвольный момент движения самолета по дуге как материальную точку. Покажем на рисунке силы, действующие на него: сила тяжести $m\bar{g}$, реакция $\bar{N}$ кресла. Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на главную нормаль n:

$$ma_n = \sum F_{kn} = N - mg\cos\alpha,$$

где α — угол, определяющий величину отклонения самолета от горизонтального положения; a_n — нормальное ускорение, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

Выразим реакцию N кресла:

$$N = ma_n + mg\cos\alpha = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\alpha\right).$$

Максимальным значение N будет при $\cos\alpha = 1$, т.е. когда $\alpha = 0$. Тогда

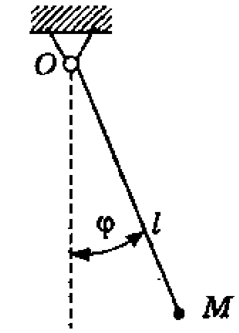
$$N_{\max} = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) = 80\left(\frac{300^2}{600} + 9{,}8\right) = 12\ 784\ (\text{Н}).$$

Наибольшая сила, прижимающая летчика к креслу,

$$|\bar{F}_{\max}| = |\bar{N}_{\max}| = 12\ 784\ \text{Н}.$$

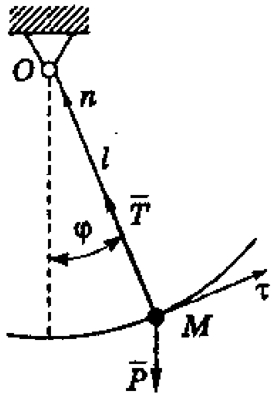
Ответ: 12 784 Н.

Задача 26.28



Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины $l = 2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi t$, где φ — угол отклонения троса от вертикали в радианах, t — время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положениях груза.

Решение



Рассмотрим движения груза M под действием силы тяжести $\overline{P}$ и реакции $\overline{T}$ связи. Свяжем с движущимся грузом естественные оси (см. рисунок) и запишем основное уравнение динамики точки в проекции на ось n:

$$ma_n = \sum F_{kn},$$

где $a_n = \frac{v^2}{l}$; $\sum F_{kn} = T - P\cos\varphi$.

Тогда

$$m\frac{v^2}{l} = T - P\cos\varphi. \qquad (1)$$

Верхнего положения груз достигает, когда $\sin 2\pi t_1 = 1$. Следовательно, $t_1 = \frac{1}{4}$ с. Тогда $\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$.

Найдем скорость груза. Так как траектория движения груза M — окружность радиусом l, то

$$v = l\dot{\varphi}, \qquad (2)$$

где $\dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{3}\cos 2\pi t$.

При $t_1 = \frac{1}{4}$ получим, что $\dot{\varphi}_1 = 0$, а значит, $v_1 = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$T_1 - P\cos\varphi_1 = 0.$$

Откуда найдем

$$T_1 = P\cos\varphi_1 = 10\cos\frac{\pi}{6} = 8{,}65 \text{ (Н)}.$$

В нижнем положении груза $\varphi = \varphi_2 = 0$, т.е. $\sin 2\pi t_2 = 0$. Отсюда $t_2 = \frac{1}{2}$ с, тогда $\dot\varphi_2 = -\frac{\pi^2}{3}$ рад/с.

По формуле (2) найдем $v_2 = -\frac{\pi^2}{3}l$ и подставим это выражение в уравнение (1):

$$m\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)^2 l = T_2 - P\cos 0°.$$

Отсюда, учитывая, что $m = \frac{P}{g}$, определим

$$T_2 = \frac{P}{g}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)^2 l + P = \frac{10\pi^4}{9{,}8\cdot 9}\cdot 2 + 10 = 32{,}1 \text{ (Н)}.$$

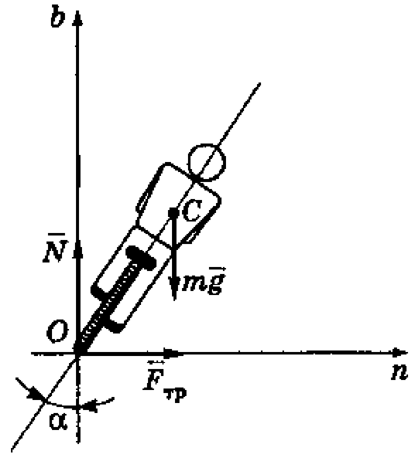
Ответ: $T_1 = 8{,}65$ Н; $T_2 = 32{,}1$ Н.

Задача 26.29

Велосипедист описывает кривую радиуса 10 м со скоростью 5 м/сек. Найти угол наклона срединной плоскости велосипеда к вертикали, а также тот наименьший коэффициент трения между шинами велосипеда и полотном дороги, при котором будет обеспечена устойчивость велосипеда.

Решение

Рассмотрим движение велосипедиста под действием силы тяжести $m\bar{g}$, нормальной реакции $\bar{N}$ и силы трения $\bar{F}_{тр}$. Покажем эти силы на рисунке.



Свяжем с велосипедистом естественные оси n и b и запишем основное уравнение динамики точки в проекции на эти оси:

$$ma_n = \sum F_{kn} = F_{тр}, \qquad (1)$$

$$0 = -mg + N. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) найдем $N = mg$. (3)

Поскольку нормальное ускорение $a_n \approx \frac{v^2}{R}$, а минимальная сила трения

$$F_{тр} = f_{min} N = f_{min} mg,$$

то выражение (3) примет вид

$$m\frac{v^2}{R} = f_{min} mg,$$

где R — радиус кривизны.

Откуда

$$f_{min} = \frac{v^2}{Rg} = \frac{5^2}{10 \cdot 9{,}8} = 0{,}255.$$

Угол наклона α срединной плоскости велосипеда к вертикали должен быть равен углу трения φ, который найдем из выражения $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi = f_{min}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}255 = 14°20'$.

Либо из уравнения равновесия

$$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow N \cdot OC \cdot \sin\alpha = f_{min} N \cdot OC \cdot \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = f_{min}.$$

Ответ: 14°20′; 0,255.

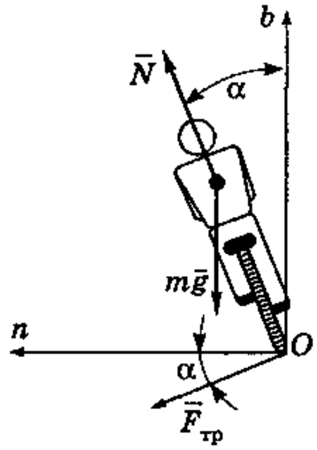
Задача 26.30

Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет собой прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых участках внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и с какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α, если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен f?

Решение

Рассмотрим движение велосипедиста под действием силы тяжести $m\bar{g}$, нормальной реакции $\bar{N}$ и силы трения $\bar{F}_{тр}$. Покажем эти силы на рисунке (направление силы трения показано для случая, когда скорость максимальна). Свяжем с велосипедом естественные оси n

и b и запишем основное уравнение динамики точки в проекции на эти оси:



$$ma_n = \frac{mv^2}{R} = N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$ma_b = 0 = N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha - mg, \qquad (2)$$

где $F_{тр} = fN$.

Из уравнения (2) получим

$$N(1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha) = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

$$N = \frac{mg}{(1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cos\alpha}.$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$\frac{mv^2}{R} = N(\sin\alpha + f\cos\alpha) = \frac{mg(\mathrm{tg}\,\alpha + f)}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Откуда найдем

$$v^2 = \frac{gR(\mathrm{tg}\,\alpha + f)}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

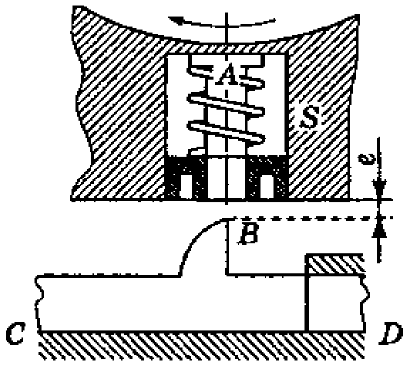
$$v = v_{\max} = \sqrt{\frac{gR(\mathrm{tg}\,\alpha + f)}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha}}.$$

При движении с минимальной скоростью сила трения будет направлена в противоположную сторону и войдет в формулу (1) со знаком «–». Тогда

$$v = v_{\min} = \sqrt{\frac{gR(\mathrm{tg}\,\alpha - f)}{1 + f\,\mathrm{tg}\,\alpha}}.$$

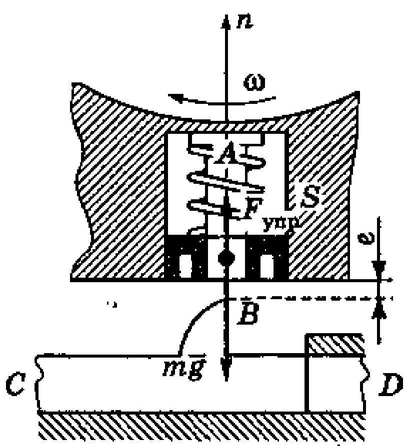
О т в е т: $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{gR(\mathrm{tg}\,\alpha - f)}{1 + f\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$; $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{gR(\mathrm{tg}\,\alpha + f)}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

Задача 26.31



Во избежание несчастных случаев, происходивших от разрыва маховиков, устраивается следующее приспособление. В ободе маховика помещается тело A, удерживаемое внутри него пружиной S; когда скорость маховика достигает предельной величины, тело A концом своим задевает выступ B задвижки CD, которая и закрывает доступ пара в машину. Пусть масса тела A равна 1,5 кг, расстояние e выступа B от маховика равно 2,5 см, предельная угловая скорость маховика 120 об/мин. Определить необходимый коэффициент жесткости пружины c (т.е. величину силы, под действием которой пружина сжимается на 1 см), предполагая, что масса тела A сосредоточена в точке, расстояние которой от оси вращения маховика в изображенном на рисунке положении равно 147,5 см.

Решение



Рассмотрим движение тела A под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины. Покажем эти силы на рисунке. Свяжем с телом A естественную ось n и запишем основное уравнение динамики в проекции на эту ось:

$$ma_n = F_{упр} - mg,$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{l+e}$, $\quad v = \omega(l+e) = \dfrac{\pi n}{30}(l+e);$

$F_{упр} = c(\lambda_{ст} + e), \quad c\lambda_{ст} = mg.$

Тогда

$$\frac{mv^2}{l+e} = ce,$$

откуда

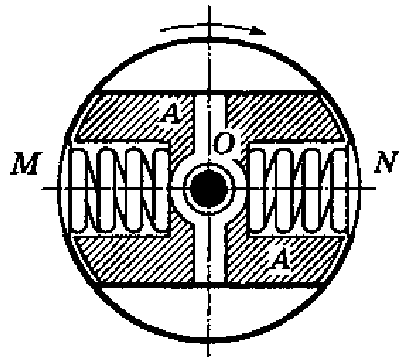
$$c = \frac{mv^2}{(l+e)e} = \frac{m\omega^2(l+e)}{e} = \frac{\pi^2 n^2 m(l+e)}{30^2 e} =$$

$$= \frac{3{,}14^2 \cdot 120^2 \cdot 1{,}5(1{,}475+0{,}025)}{900 \cdot 0{,}025} = 14\,198 \text{ (Н/м)}.$$

Ответ: 14 198 Н/м.

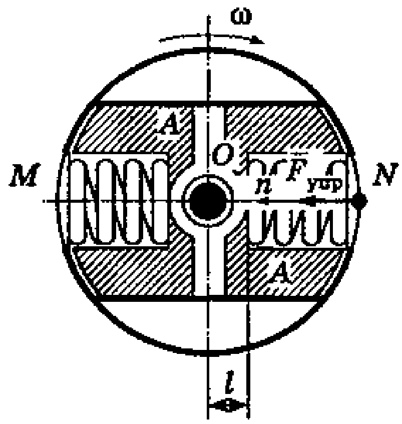
Задача 26.32

В регуляторе имеются гири A массы 30 кг, которые могут скользить вдоль горизонтальной прямой MN; эти гири соединены пружинами с точками M и N; центры тяжести гирь совпадают с концами пружин. Расстояние конца каждой пружины от оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, в ненапряженном состоянии равно 5 см, изменение длины пружины на 1 см вызывается силой в 200 Н. Определить расстояние центров тяжести гирь от оси O, когда регулятор, равномерно вращаясь вокруг оси O, делает 120 об/мин.



Решение

На гирю A действует сила упругости $\overline{F}_{упр}$. Направим ее по оси n (см. рисунок). Запишем основное уравнение динамики в проекции на эту ось:



$$ma_n = F_{упр}, \qquad (1)$$

где $a_n = \omega^2 l$, $\omega = \dfrac{\pi n}{30} = 4\pi$; $F_{упр} = c(l - l_0)$, l_0 и l — расстояния от оси O до центра тяжести гири соответственно в ненапряженном и напряженном состояниях пружины.

Подставим выражение $F_{упр}$ в уравнение (1) и получим

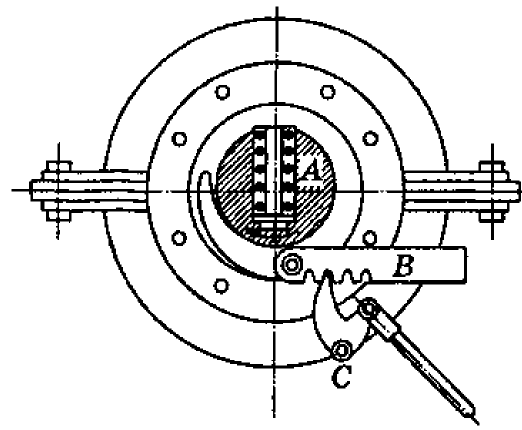
$$16\pi^2 ml = c(l - l_0).$$

Откуда

$$l = \frac{cl_0}{c - 16m\pi^2} = \frac{20\,000 \cdot 0{,}05}{20\,000 - 16 \cdot 30 \cdot 3{,}14^2} = 0{,}0655 \text{ (м)}.$$

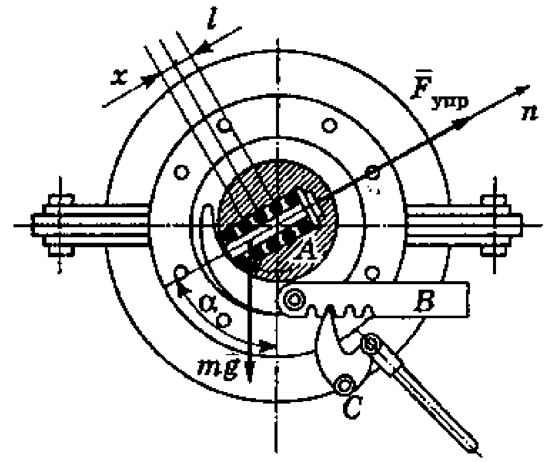
Ответ: 6,55 см.

Задача 26.33



Предохранительный выключатель паровых турбин состоит из пальца A массы $m = 0{,}225$ кг, помещенного в отверстии, просверленном в передней части вала турбины перпендикулярно оси, и отжимаемого внутрь пружиной; центр тяжести пальца отстоит от оси вращения вала на расстоянии $l = 8{,}5$ мм при нормальной скорости вращения турбины $n = 1500$ об/мин. При увеличении числа оборотов на 10 % палец преодолевает реакцию пружины, отходит от своего нормального положения на расстояние $x = 4{,}5$ мм, задевает конец рычага B и освобождает собачку C, связанную системой рычагов с пружиной, закрывающей клапан парораспределительного механизма турбины. Определить жесткость пружины, удерживающей тело A, т.е. силу, необходимую для сжатия ее на 1 см, считая реакцию пружины пропорциональной ее сжатию.

Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на палец A: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$. Запишем основное уравнение динамики в проекции на ось n.

Для ненапряженного состояния пружины:

$$ma_1 = \omega_1^2 l = F_{1упр} - mg\cos\alpha,$$

где $a_1 = \omega_1^2 l$.

При перемещении пальца на расстояние x:

$$ma_2 = F_{2упр} - mg\cos\alpha,$$

где $a_2 = \omega_2^2 (l + x)$.

Силы упругости, возникающие в пружине, в этих случаях:

$$F_{1упр} = m\omega_1^2 l + mg\cos\alpha, \tag{1}$$

$$F_{2упр} = m\omega_2^2 (l + x) + mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Жесткость пружины определим из условия, что

$$F_{2упр} - F_{1упр} = cx. \qquad (3)$$

Подставим выражения (1) и (2) в уравнение (3) и решим его относительно c:

$$c = \frac{m\omega_2^2(l + x) - m\omega_1^2 l}{x}.$$

Так как $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$, $\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$, $n_2 = 1{,}1n_1$, то $\omega_2 = \frac{1{,}1\pi n_1}{30}$.

Тогда

$$c = \frac{m\pi^2 n_1^2(0{,}21l + 1{,}21x)}{30^2 x} =$$

$$= \frac{0{,}225 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1500^2(0{,}21 \cdot 0{,}0085 + 1{,}21 \cdot 0{,}0045)}{900 \cdot 0{,}0045} = 0{,}892 \text{ (Н/м)}.$$

Ответ: $c = 89{,}2$ Н/см.

Задача 26.34

Точка массы m движется по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ускорение точки параллельно оси y. При $t = 0$ координаты точки были $x = 0$, $y = b$, начальная скорость v_0. Определить силу, действующую на движущуюся точку в каждой точке ее траектории.

Решение

Выразим из уравнения траектории точки y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Учтем, что $\frac{dx}{dt} = v_0$, откуда $x = v_0 t$. Подставим значение x в выражение (1):

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}. \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) по времени дважды:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}\right) = -\frac{b v_0^2 t}{a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}};$$

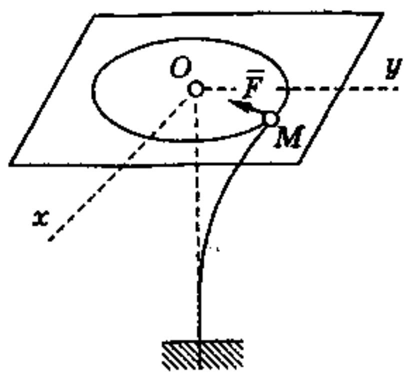
$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{b v_0^2 t}{a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}}\right) = -\frac{b v_0^2 a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2} + b v_0^2 t a \dfrac{t v_0^2}{\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}}}{a^2(a^2 - v_0^2 t^2)} =$$

$$= -\frac{b v_0^2 a^3}{a^2(a^2 - v_0^2 t^2)\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}} = -\frac{b v_0^2 a^3}{a^2 \dfrac{a^2}{b^2} y^2 \cdot \dfrac{a}{b} y} = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

Так как точка имеет ускорение $a = \ddot{y}$, то $F_y = ma = m\ddot{y} = -\dfrac{m b^4 v_0^2}{a^2 y^3}$.

Ответ: $F_y = -\dfrac{m b^4 v_0^2}{a^2 y^3}$.

Задача 26.35



Шарик массы m закреплен на конце вертикального упругого стержня, зажатого нижним концом в неподвижной стойке. При небольших отклонениях стержня от его вертикального равновесного положения можно приближенно считать, что центр шарика движется в горизонтальной плоскости Oxy, проходящей через верхнее равновесное положение центра шарика. Определить закон изменения силы, с которой упругий изогнутый стержень действует на шарик, если выведенный из своего положения равновесия, принятого за начало координат, шарик движется согласно уравнениям $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$, где a, b, k — постоянные величины.

Решение

Запишем основное уравнение динамики в проекции на оси x и y:

$$m\ddot{x} = F_x, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = F_y. \tag{2}$$

Найдем вторые производные от x и y:

$$\ddot{x} = -ak^2 \cos kt, \qquad (3)$$

$$\ddot{y} = -bk^2 \sin kt. \qquad (4)$$

Подставим выражение (3) и (4) в уравнения (1) и (2):

$$F_x = -mak^2 \cos kt, \ F_y = -mbk^2 \sin kt.$$

Найдем F:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ: $F = mk^2 r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

27. Дифференциальные уравнения движения

Методические указания к решению задач

Задачи этого параграфа относятся к задачам второго типа, когда решается вторая основная задача динамики материальной точки, сущность которой в определении закона движения точки по заданной силе, массе и начальным условиям движения.

Начальные условия движения — это положение и скорость точки в момент начала движения, т.е. при $t = 0$ должны быть заданы координаты точки: x_0, y_0, z_0, и проекции начальной скорости на оси координат: $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, если движение рассматривается в декартовой системе координат.

Решение таких задач сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений движения и анализу полученных результатов.

При составлении дифференциальных уравнений движения материальной точки используется второй закон динамики.

Решают полученные уравнения либо непосредственным интегрированием, либо с применением теории дифференциальных уравнений.

Уравнения (IX.3) и (IX.4) являются дифференциальными уравнениями движения материальной точки соответственно в декартовых и естественных осях координат. Дифференциальные уравнения (IX.4) применяют при криволинейном движении точки, если известны траектория точки и ее радиус кривизны, например, при движении по окружности.

Если движение прямолинейное, то составляется одно дифференциальное уравнение в проекции на ось, направленную в сторону движения.

При криволинейном движении в плоскости составляются два дифференциальных уравнения в проекциях на оси x и y. Так как силы, действующие на материальную точку, могут быть как постоянными, так и переменными, зависящими от времени t, скорости $\bar{v}$

и радиуса-вектора $\bar{r}$ точки, то при проецировании на оси координат сил $\bar{F} = \bar{F}(\bar{v})$ и $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$ следует иметь в виду, что

$$F_x = \left|\bar{F}(\bar{v})\right| \cos(\bar{v} \wedge \bar{i}),$$

$$F_y = \left|\bar{F}(\bar{v})\right| \cos(\bar{v} \wedge \bar{j}), \qquad (27.1)$$

где

$$\cos(\bar{v} \wedge \bar{i}) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\cos(\bar{v} \wedge \bar{j}) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Пусть $\bar{F} = -k\bar{v}$. Тогда

$$F_x = -kv\frac{v_x}{v} = -kv_x = -k\dot{x},$$

$$F_y = -kv\frac{v_y}{v} = -kv_y = -k\dot{y}. \qquad (27.2)$$

Из формулы (27.2) видно, что если сила $\bar{F}$ пропорциональна квадрату или любой другой, не равной единице, степени скорости, то проекция силы на ось будет зависеть от двух переменных — $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

Например, на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Тогда

$$F_x = -kv^2\frac{v_x}{v} = -kvv_x = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

$$F_y = -kv^2\frac{v_y}{v} = -kvv_y = -k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \qquad (27.3)$$

Однако получить аналитическое решение дифференциальных уравнений движения в декартовых осях координат, например тела, брошенного под углом к горизонту, в которые войдут F_x или F_y в виде выражений (27.3), невозможно.

Если записать дифференциальные уравнения движения в естественных осях, то в этом случае можно найти аналитическую зависимость скорости от угла наклона касательной к траектории точки. Затем составить аналитические зависимости для определения координат x и y и времени движения t по траектории, но это сопряжено со значительными математическими трудностями.

Для $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$ проекции определяются по формулам

$$F_x = |\bar{F}(\bar{r})| \cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{i}),$$

$$F_y = |\bar{F}(\bar{r})| \cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{j}),$$

где

$$\cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{i}) = \frac{r_x}{r} = \frac{x}{r}, \quad \cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{j}) = \frac{r_y}{r} = \frac{y}{r}; \tag{27.4}$$

x, y — проекции радиуса-вектора на оси координат.

Если на точку действует сила отталкивания от некоторого неподвижного центра:

$$\bar{F} = k^2 m \bar{r},$$

то

$$F_x = |\bar{F}| \cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{i}) = k^2 m r \frac{x}{r} = k^2 m x,$$

$$F_y = |\bar{F}| \cos(\bar{r} \,\hat{,}\, \bar{j}) = k^2 m r \frac{y}{r} = k^2 m y. \tag{27.5}$$

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Выбрать систему отсчета, совместив начало осей координат с начальным положением точки и направив оси в сторону движения точки.

2. Изобразить движущуюся точку в произвольном положении, но так, чтобы $x > 0$, $v_x > 0$ и т.д.

3. Показать на рисунке активные силы, действующие на точку, и реакцию связи, если точка несвободна.

4. Записать в общем виде дифференциальные уравнения (уравнение), подсчитать сумму проекций всех сил на координатные оси или ось (при прямолинейном движении) и подставить в правую часть дифференциального уравнения. При этом необходимо все переменные силы выразить через те величины (t, x или v_x), от которых они зависят.

5. Интегрирование дифференциальных уравнений производится методами, известными из курса высшей математики и зависящими от вида правой части полученного уравнения.

Если в уравнении не более двух переменных, то его можно проинтегрировать методом разделения переменных. При этом дифференциальное уравнение второго порядка необходимо представить в виде дифференциального уравнения первого порядка, введя замену, например $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$ или $\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt}$ и т.д. Тогда вместо уравнения

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$$

получим уравнение вида

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}. \tag{27.6}$$

Если в правой части уравнения (27.6) содержатся некоторые постоянные силы и сила, зависящая от скорости v_x, то правую часть уравнения следует считать функцией v_x, т.е. $\sum F_{kx} = F_x(v_x)$.

После разделения переменных уравнение (27.6) примет вид

$$\frac{dv_x}{F_x(v_x)} = \frac{dt}{m}. \tag{27.7}$$

Проинтегрировав уравнение (27.7), найдем $v_x = f_1(t, C_1)$. Затем представим v_x в виде

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t, C_1),$$

опять разделим переменные, проинтегрируем и получим

$$x = f(t, C_1, C_2),$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяют с учетом начальных условий движения. Решение уравнения (27.7) позволяет найти также время, в течение которого скорость движения материальной точки изменится от v_0 до v.

Если требуется найти зависимость скорости от координаты x или значение x при изменении скорости от v_0 до v, то в уравнение (27.6) вводим следующую замену переменных:

$$m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = mv_x\frac{dv_x}{dx}. \tag{27.8}$$

Такая же замена вводится и при интегрировании дифференциального уравнения, правая часть которого содержит силу, зависящую от координаты x в любой степени.

При решении дифференциальных уравнений движения материальной точки методом разделения переменных вместо введения постоянных интегрирования можно сразу брать от обеих частей равенства определенные интегралы с соответствующими пределами интегрирования.

Иногда дифференциальные уравнения движения удобнее решать, применяя теорию дифференциальных уравнений.

6. Решив дифференциальное уравнение, необходимо выполнить соответствующие преобразования и получить в общем виде выражения искомых величин. Затем следует провести косвенную проверку правильности полученного результата подсчетом размерностей.

Прямолинейное движение

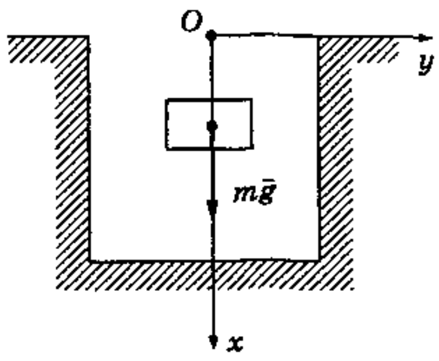
Задачи и решения

Задача 27.1

Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

Решение

Приняв камень за материальную точку, составим дифференциальное уравнение его движения под действием силы тяжести $m\bar{g}$ (см. рисунок) в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg$$

или

$$\ddot{x} = g.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования найдем с учетом начальных условий движения: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Тогда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Следовательно, закон движения камня:

$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня $x = h$, $t = t_1$, т.е.

$$h = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad (1)$$

где h — глубина шахты; t_1 — время падения камня.

С другой стороны,

$$h = v_{зв} t_2,$$

где $v_{зв}$ — скорость звука; t_2 — время прохождения звука от удара со дна шахты.

Так как общее время $t_{об} = t_1 + t_2$, то $t_2 = t_{об} - t_1$. Тогда

$$\frac{gt_1^2}{2} = v_{зв}(t_{об} - t_1) \Rightarrow t_1^2 + \frac{2v_{зв}^2}{g} t_1 - \frac{2v_{зв} t_{об}}{g} = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно t_1, найдем

$$t_1 = -\frac{v_{зв}}{g} + \sqrt{\frac{v_{зв}^2}{g^2} + \frac{2v_{зв} t_{об}}{g}}.$$

Подставим это значение t_1 в формулу (1) и получим

$$h = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{v_{зв}^2}{g^2} + \frac{2v_{зв} t_{об}}{g}} - \frac{v_{зв}}{g}\right)^2 = \frac{9{,}8}{2}\left(\sqrt{\frac{330^2}{9{,}8^2} + \frac{2 \cdot 330 \cdot 6{,}5}{9{,}8}} - \frac{330}{9{,}8}\right)^2 = 175 \text{ м}.$$

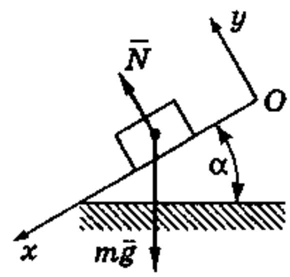
Ответ: 175 м.

Задача 27.2

Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 м, если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

Решение

Приняв тяжелое тело за материальную точку, составим дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x (см. рисунок):



$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha.$$

Проинтегрируем его и с учетом начальных условий движения: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, получим

$$\dot{x} = gt\sin\alpha + v_0,$$

$$x = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_0 t$$

или

$$t^2 + \frac{2v_0 t}{g\sin\alpha} - \frac{2x}{g\sin\alpha} = 0.$$

Решим это квадратное уравнение и вычислим время, за которое тело пройдет 9,6 м:

$$t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{2xg\sin\alpha}{v_0^2}} - 1\right) = \frac{2}{9{,}8\cdot 0{,}5}\left(\sqrt{1 + \frac{2\cdot 9{,}6\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5}{2^2}} - 1\right) = 1{,}61 \text{ (c)}.$$

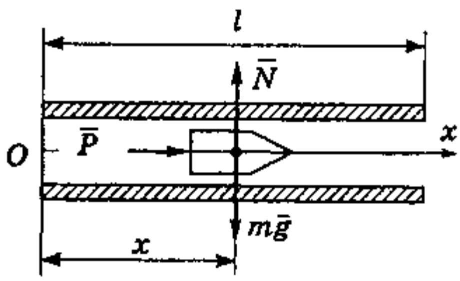
Ответ: 1,61 с.

Задача 27.3

При выстреле из орудия снаряд вылетает с горизонтальной скоростью 570 м/с. Масса снаряда 6 кг. Как велико среднее давление пороховых газов, если снаряд проходит внутри орудия 2 м? Сколько времени движется снаряд в стволе орудия, если считать давление газов постоянным?

Решение

Приняв снаряд за материальную точку, составим дифференциальное уравнение движения снаряда в стволе в проекции на ось x (см. рисунок):



$$m\ddot{x} = P,$$

где $P = \text{const}$ — среднее давление пороховых газов.

Проинтегрируем это уравнение с учетом начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, и получим

$$\dot{x} = \frac{P}{m}t,$$

$$x = P\frac{t^2}{2m}.$$

В момент вылета снаряда $\dot{x} = v = 570$ м/с, $x = l = 2$ м.
Решим совместно систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{P}{m}t, \\ l &= P\frac{t^2}{2m} \end{aligned}\right\}$$

и найдем

$$P = \frac{mv}{t}, \quad l = \frac{vt}{2}.$$

Тогда

$$P = \frac{6 \cdot 570}{0{,}007} = 4{,}88 \cdot 10^5 \text{ (Н)},$$

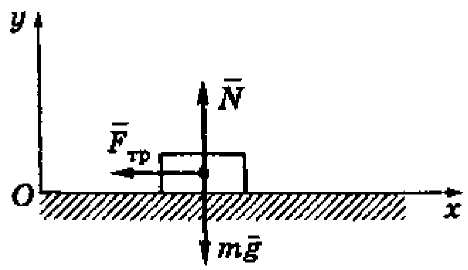
$$t = \frac{2l}{v} = \frac{2 \cdot 2}{570} = 0{,}007 \text{ (с)}.$$

Ответ: $P = 4{,}88 \cdot 10^5$ Н; $t = 0{,}007$ с.

Задача 27.4

Тело массы m вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 с расстояние $s = 24{,}5$ м и остановилось. Определить коэффициент трения f.

Решение



Приняв тело за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$, нормальной реакции $\bar{N}$ (см. рисунок).

Направив ось x в сторону движения тела, составим дифференциальные уравнения его движения в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = -F_{тр},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy} = N - mg.$$

Так как $\ddot{y} = 0$, то $N = mg$, тогда $F_{тр} = fN = fmg$.

Следовательно,

$$m\ddot{x} = -fmg,$$

$$\ddot{x} = -fg_c$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -fg.$$

Разделим переменные, проинтегрируем дважды в соответствующих пределах:

$$\int_v^0 dv = -fg\int_0^t dt,$$

$$-v = -fgt$$

или

$$\frac{dx}{dt} = fgt,$$

$$\int_0^s dx = fg\int_0^t t\,dt$$

и получим

$$s = fg\frac{t^2}{2}.$$

Откуда

$$f = \frac{2s}{gt^2} = \frac{24{,}5 \cdot 2}{9{,}8 \cdot 25} = 0{,}2.$$

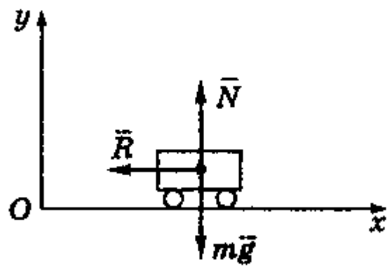
Ответ: $f = 0{,}2$.

Задача 27.5

За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 0,3 от веса вагона.

Решение

Приняв вагон трамвая за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления $\bar{R}$, нормальной реакции $\bar{N}$ (см. рисунок).



Направим ось x в сторону движения трамвая, запишем дифференциальное уравнение движения вагона в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = -R,$$

$$m\ddot{x} = -0{,}3mg,$$

$$\ddot{x} = -0{,}3g.$$

Введем замену $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt}$, разделим переменные, проинтегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -0{,}3g\int_{0}^{t} dt$$

и получим

$$v - v_0 = -0{,}3gt. \qquad (1)$$

Так как скорость в конце пути $v=0$, то

$$t=\frac{v_0}{0{,}3g}=\frac{10}{0{,}3g}=3{,}4\ (\text{с}).$$

Введем замену $v=\dfrac{dx}{dt}$, тогда выражение (1) примет вид

$$\frac{dx}{dt}=-0{,}3gt+v_0.$$

Разделим переменные, проинтегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_0^s dx=\int_0^{3{,}4} v_0dt-\int_0^{3{,}4}0{,}3gtdt$$

и найдем

$$s=v_0t\Big|_0^{3{,}4}-0{,}3g\frac{t^2}{2}\Big|_0^{3{,}4}=10\cdot3{,}4-0{,}3\cdot9{,}8\cdot\frac{3{,}4^2}{2}=17\ (\text{м}).$$

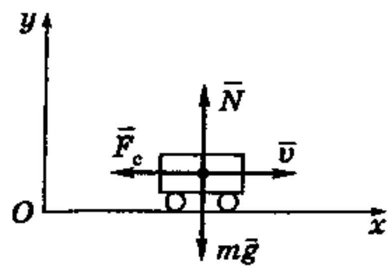
Ответ: $t=3{,}4$ с; $s=17$ м.

Задача 27.6

Принимая в первом приближении сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 м/с; а средняя длина отката равна 1 м.

Решение

Приняв откатник за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления $\bar{F}_c$ и реакции опоры $\bar{N}$ (см. рисунок). Направим ось x в сторону движения и запишем дифференциальное уравнение движения откатника в проекции на ось x:



$$m\ddot{x}=\sum F_{ix}=-F_c, \tag{1}$$

где $F_c=\text{const}$.

Введем замену $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_c}{m}.$$

Разделим переменные, проинтегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\frac{F_c}{m}\int_0^t dt$$

и получим

$$v = v_0 - \frac{F_c}{m}t$$

или с учетом замены $v = \dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{F}{m}t.$$

Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int_0^s dx = \int_0^t v_0 dt - \frac{F}{m}\int_0^t t dt$$

и найдем

$$s = v_0 t - \frac{F_c t^2}{2m}.$$

При $v_0 = 10$ м/с длина отката $s = 1$ м, т.е.

$$1 = 10t - 5t.$$

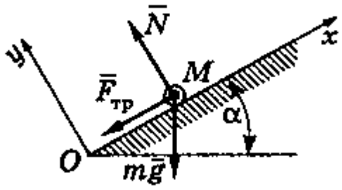
Откуда $t = 0{,}2$ с.

Ответ: 0,2 с.

Задача 27.7

Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $v_0 = 15$ м/с. Коэффициент трения $f = 0{,}1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

Решение



Рассмотрим движение тяжелой точки M под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\overline{F}_{тр}$ и реакции опоры $\overline{N}$ (см. рисунок).

Составим дифференциальные уравнения движения точки M, направив ось x в сторону ее движения, в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = -mg\sin\alpha - F_{тр}, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = N - mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Так как $\ddot{y} = 0$, то из уравнения (2) следует, что

$$N = mg\cos\alpha.$$

Тогда

$$F_{тр} = fN = fmg\cos\alpha,$$

и уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha). \tag{3}$$

Разделим переменные в уравнении (3), проинтегрируем:

$$\int_{v_0}^{v_k} dv = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\int_0^t dt$$

и получим

$$v_k - v_0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t,$$

где $v_k = 0$, $v_0 = 15$ м/с.

Откуда

$$t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15}{9{,}8(0{,}5 + 0{,}0866)} = 2{,}61 \text{ (с)}.$$

Для определения пути дифференциальное уравнение (3) запишем в виде

$$\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Разделим переменные в этом выражении и проинтегрируем:

$$\int_{v_0}^{v_k} v dv = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\int_0^s dx.$$

Так как $v_k = 0$, то получим

$$-\frac{v_0^2}{2} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)s.$$

Откуда найдем

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15^2}{2\cdot 9{,}8(0{,}5 + 0{,}0866)} = 19{,}57\ (\text{м}).$$

Ответ: $s = 19{,}57$ м; $t = 2{,}61$ с.

Задача 27.8

По прямолинейному железнодорожному пути с углом наклона $\alpha = 10°$ вагон катится с постоянной скоростью. Считая сопротивление трения пропорциональным нормальному давлению, определить ускорение вагона и его скорость через 20 с после начала движения, если он начал катиться без начальной скорости по пути с углом наклона $\beta = 15°$. Определить также, какой путь пройдет вагон за это время.

Решение

Приняв вагон за материальную точку, рассмотрим его движение на участке AB под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{1тр}$ и нормальной реакции $\bar{N}_1$ опоры (см. рисунок). Составим дифференциальное уравнение в проекции на ось x_1:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{kx_1}$$

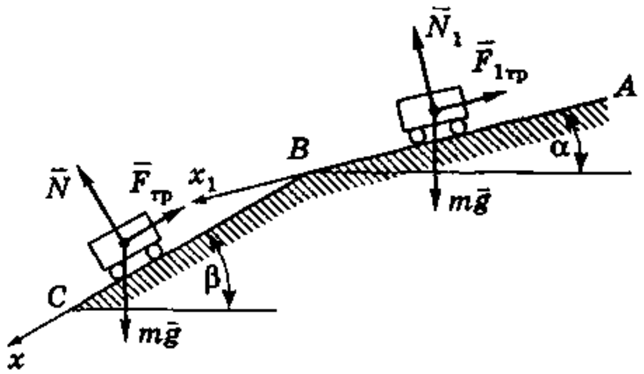
или

$$mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

так как по условию задачи $\ddot{x}_1 = 0$.

Из уравнения (1) найдем

$$f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$



Далее составим дифференциальное уравнение движения материальной точки под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$ и нормальной реакции $\bar{N}$ опоры на участке BC в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$$

или

$$\ddot{x} = g(\sin\beta - f\cos\beta),$$

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta). \qquad (2)$$

Согласно формуле (2)

$$a = g(\sin\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\beta) = g\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha} = g\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} =$$

$$= 9{,}8\frac{\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ} = 9{,}8 \cdot \frac{0{,}0872}{0{,}9848} = 0{,}867 \ (\text{м/с}^2).$$

Разделим переменные в уравнении (2), проинтегрируем в соответствующих пределах: $v_0 = 0$, $t = 20$ с,

$$\int_{v_0}^{v} dv = g(\sin\beta - f\cos\beta)\int_0^t dt,$$

и получим

$$v = g(\sin\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\beta)t = g\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}t = 0{,}867\cdot 20 = 17{,}35 \text{ (м/с)}.$$

Для определения пройденного пути введем замену $v = \dfrac{dx}{dt}$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = g(\sin\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\beta)t.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^s dx = g(\sin\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\beta)\int_0^t t\,dt.$$

Откуда найдем

$$s = g(\sin\beta - \operatorname{tg}\alpha\cos\beta)\frac{t^2}{2} = g\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\frac{t^2}{2} = 0{,}867\cdot\frac{20^2}{2} = 173{,}5 \text{ (м)}.$$

Ответ: $a = g\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} = 0{,}867$ м/с^2; $v = 17{,}35$ м/с; $s = 173{,}5$ м.

Задача 27.9

Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса $r = 8$ см, принимая, что сопротивление воздуха равно $R = k\sigma v^2$, где v — скорость движения, σ — площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k — численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,24 Н · с^2/м^4.

Решение

Приняв шар за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $\bar{R}$ (см. рисунок). Направив ось x в сторону движения точки, т.е. вертикально вниз, составим дифференциальное уравнение ее движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx},$$

$$m\ddot{x} = mg - R = mg - k\sigma v^2$$

или с учетом замены $\ddot{x} = \dfrac{dv}{dt}$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k\sigma v^2.$$

При $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (условие экстремума для скорости) получим

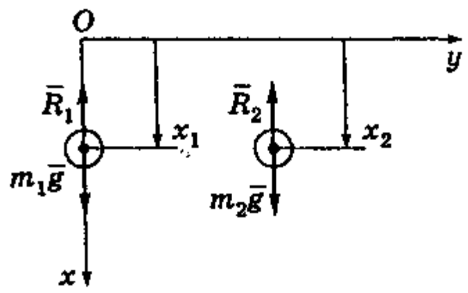
$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}8}{0{,}24 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}08^2}} = 142{,}5 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v_{max} = 142{,}5$ м/с.

Задача 27.10

Два геометрически равных и однородных шара сделаны из различных материалов. Плотности материала шаров соответственно равны γ_1 и γ_2. Оба шара надают в воздухе. Считая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости, определить отношение максимальных скоростей шаров.

Решение



Приняв шары за материальные точки, рассмотрим движение каждого под действием сил тяжести $m_1\bar{g}$ и $m_2\bar{g}$, сил сопротивления $R_1 = \alpha v_1^2$ и $R_2 = \alpha v_2^2$ (см. рисунок). Направим ось x вертикально вниз. Запишем дифференциальные уравнения движения шаров в проекции на ось x:

для первого шара

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = m_1 g - R_1, \qquad (1)$$

где $m_1 g = \gamma_1 g \dfrac{4\pi}{3} r^3$, $R_1 = \alpha v_1^2$;

для второго шара

$$m_2\frac{dv_2}{dt} = m_2 g - R_2, \qquad (2)$$

где $m_2 g = \gamma_2 g \dfrac{4\pi}{3} r^3$, $R_2 = \alpha v_2^2$.

При $\frac{dv_1}{dt}=0$ и $\frac{dv_2}{dt}=0$ (условие экстремума для скорости) уравнения (1) и (2) принимают вид

$$0=\gamma_1 g\frac{4\pi}{3}r^3-\alpha v_{1\,\max}^2,$$

$$0=\gamma_2 g\frac{4\pi}{3}r^3-\alpha v_{2\,\max}^2.$$

Откуда

$$\frac{v_{1\,\max}}{v_{2\,\max}}=\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}.$$

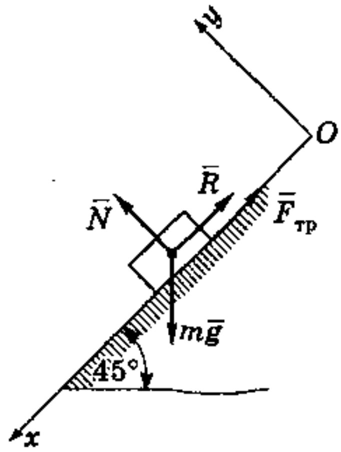
О т в е т: $\frac{v_{1\,\max}}{v_{2\,\max}}=\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}$.

Задача 27.11

При скоростном спуске лыжник массы 90 кг скользил по склону в 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $f=$ $=0,1$. Сопротивление воздуха движению лыжника пропорционально квадрату скорости лыжника и при скорости в 1 м/с равно 0,635 Н. Какую наибольшую скорость мог развить лыжник? Насколько увеличится максимальная скорость, если, подобрав лучшую мазь, лыжник уменьшит коэффициент трения до 0,05?

Р е ш е н и е

Приняв лыжника за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$, силы сопротивления $\bar{R}$ воздуха и нормальной реакции $\bar{N}$. Направим ось x в сторону движения лыжника, т.е. по склону вниз (см. рисунок). Дифференциальное уравнение движения лыжника в проекции на ось x:



$$m\ddot{x}=\sum F_{kx},$$

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin 45°-R-F_{тр}, \qquad (1)$$

где $R=0{,}635v^2$;

$$F_{тр}=fN. \qquad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения лыжника в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha.$$

Так как $\ddot{y} = 0$, то получим

$$0 = N - mg\cos\alpha,$$

$$N = mg\cos\alpha,$$

тогда согласно формуле (2)

$$F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha. \qquad (3)$$

С учетом выражения (3) уравнение (1) примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin 45° - 0{,}635v^2 - fmg\cos 45°.$$

Откуда при $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (условие экстремума для скорости)

$$v_{1\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_1)\cos 45°}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot 9{,}8(1-0{,}1)\cdot 0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{883{,}8} = 29{,}73 \text{ (м/с)},$$

$$v_{2\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_2)\cos 45°}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot 9{,}8(1-0{,}05)\cdot 0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{932{,}9} = 30{,}55 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v_{1\max} = 29{,}73$ м/с; скорость увеличится до $v_{2\max} = 30{,}55$ м/с.

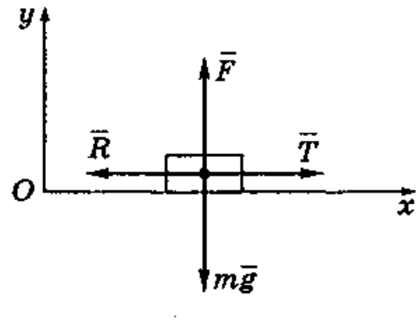
Задача 27.12

Корабль движется, преодолевая сопротивление воды, пропорциональное квадрату скорости и равное 1200 Н при скорости в 1 м/с. Сила упора винтов направлена по скорости движения и изменяется по закону $T = 12\cdot 10^5(1 - v/33)$ Н, где v — скорость корабля, выраженная в м/с. Определить наибольшую скорость, которую может развить корабль.

Решение

Приняв корабль за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления $\bar{R}$ воды, силы упора $\bar{T}$ винтов и выталкивающей силы $\bar{F}$ (см. рисунок).

Направим ось x в сторону движения корабля и запишем дифференциальное уравнение его движения в проекции на эту ось:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = T - R,$$

где $R = \mu v^2$, $\mu = 1200$ Н · с^2/м^2.

Тогда

$$m\frac{dv}{dt} = 12 \cdot 10^5\left(1 - \frac{v}{33}\right) - 1200v^2.$$

Откуда при $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (условие экстремума для скорости) получим

$$v_{max}^2 + 30{,}3v_{max} - 1000 = 0,$$

$$v_{max} = -15{,}15 + \sqrt{229{,}57 + 1000} = 20 \text{ (м/с)}.$$

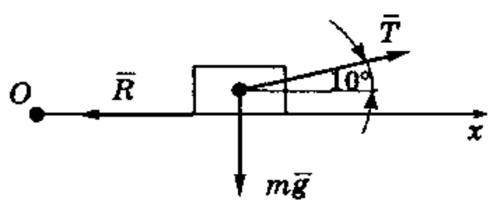
Ответ: $v_{max} = 20$ м/с.

Задача 27.13

Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,5 Н при скорости в 1 м/с. Сила тяги постоянна, равна 30 760 Н и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость самолета.

Решение

Приняв самолет за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления $\bar{R}$ воздуха и силы тяги $\bar{T}$ (см. рисунок).



Направим ось x в сторону движения самолета. Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = T\cos 10^\circ - R,$$

где $R = \mu v^2$, $\mu = 0{,}5\ \text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$.

Тогда

$$m\frac{dv}{dt} = 30\,760\cos 10^\circ - 0{,}5v^2.$$

Откуда при $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (условие экстремума для скорости) получим

$$0 = 30\,760\cos 10^\circ - 0{,}5v_{max}^2,$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{30\,760 \cdot 0{,}9848}{0{,}5}} = 246\ (\text{м/с}).$$

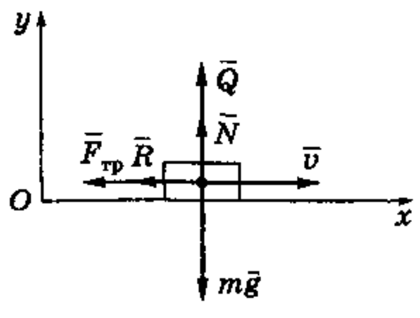
Ответ: $v_{max} = 246$ м/с.

Задача 27.14

Самолет массы 10^4 кг приземляется на горизонтальное поле на лыжах. Летчик подводит самолет к поверхности без вертикальной скорости и вертикального ускорения в момент приземления. Сила лобового сопротивления пропорциональна квадрату скорости и равна 10 Н при скорости в 1 м/с. Подъемная сила пропорциональна квадрату скорости и равна 30 Н при скорости в 1 м/с. Определить длину и время пробега самолета до остановки, приняв коэффициент трения $f = 0{,}1$.

Решение

Приняв самолет за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы сопротивления $\bar{R}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$, подъемной силы $\bar{Q}$ и нормальной реакции $\bar{N}$ (см. рисунок). В этом случае



$$R = \mu v^2,$$

где $\mu = 10\ \text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$; $F_{тр} = fN$; $Q = \delta v^2$, где $\delta = 30\ \text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$.

Запишем дифференциальные уравнения движения самолета в проекциях на ось x и y:

$$m\ddot{x} = -R - F_{\text{тр}}, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = N + Q - mg. \tag{2}$$

Из уравнения (2) получим

$$0 = N + Q - mg,$$

$$N = mg - Q = mg - 30v^2.$$

Тогда

$$F_{\text{тр}} = fN = f(mg - 30v^2)$$

и уравнение (1) примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = -10v^2 - f(mg - 30v^2). \tag{3}$$

Скорость приземления найдем из условия $N = 0$, тогда

$$mg = 30v_0^2, \quad v_0^2 = \frac{mg}{30}.$$

Для нахождения длины пробега самолета до остановки выполним замену в левой части уравнения (3):

$$m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = m\frac{vdv}{dx} = -10v^2 - f(mg - 30v^2),$$

проинтегрируем полученное выражение в соответствующих пределах:

$$\int_{v_0}^{0} \frac{vdv}{\frac{7v^2}{m} + 0{,}1g} = -\int_{0}^{S} dx$$

и получим

$$S = \frac{1 \cdot 10^4}{2 \cdot 7} \ln\left(1 + \frac{7}{3}\right) = 860 \text{ (м)}.$$

Время пробега самолета определим, проинтегрировав уравнение (3):

$$\int_{v_0}^{0} \frac{dv}{\frac{7v^2}{m} + 0{,}1g} = -\int_{0}^{T} dt,$$

откуда

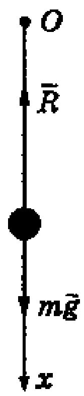
$$T=\frac{m}{7\sqrt{\frac{0{,}1\,mg}{7}}}\operatorname{arctg} v_0\sqrt{\frac{7}{0{,}1\,mg}}=\frac{1\cdot10^4}{7\sqrt{1400}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}=37{,}8\ (\text{с}).$$

Ответ: $S = 860$ м; $T = 37{,}8$ с.

Задача 27.15

Самолет начинает пикировать без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

Решение



Приняв самолет за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $\bar{R}$. Направив ось x в сторону пикирования (см. рисунок), запишем дифференциальное уравнение движения самолета в проекции на эту ось:

$$m\ddot{x}=\sum F_{kx},$$

$$m\frac{dv}{dt}=mg-R,$$

где $R=\alpha v^2$.

При $\frac{dv}{dt}=0$ (условие экстремума для скорости)

$$v_{\max}=\frac{mg}{\alpha},$$

отсюда

$$\alpha=\frac{mg}{v_{\max}}.$$

Воспользуемся подстановкой $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx}=\frac{vdx}{dx}$ и получим

$$\frac{mvdv}{dx}=mg-\alpha v^2.$$

Разделим переменные

$$\frac{mvdv}{mg-\alpha v^2}=dx$$

и проинтегрируем:

$$-\frac{m}{2\alpha}\ln(mg-\alpha v^2)=x+C. \qquad (1)$$

Постоянную интегрирования C найдем из начальных условий: при $t=0$ $x=0$, $v=0$. Тогда $C=-\frac{m}{2\alpha}\ln mg$ и уравнение (1) примет вид

$$x=-\frac{m}{2\alpha}\ln(mg-\alpha v^2)+\frac{m}{2\alpha}\ln mg=-\frac{m}{2\alpha}\ln\frac{mg-\alpha v^2}{mg},$$

$$\ln\frac{mg-\alpha v^2}{mg}=-\frac{2\alpha x}{m}=-\frac{2gx}{v_{\max}},$$

$$\frac{mg-\alpha v^2}{mg}=e^{-\frac{2\alpha x}{m}}.$$

При $x=s$ из формулы (2) получим

$$\alpha v^2=mg\left(1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}\right),$$

$$v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}},$$

где $v_{\max}=\frac{mg}{\alpha}$.

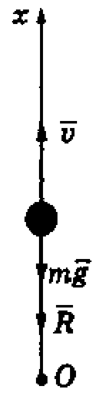
О т в е т: $v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}}$.

Задача 27.16

На какую высоту H и за какое время T поднимется тело веса P, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой k^2Pv^2, где v — величина скорости тела?

Решение

Приняв тело за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $\bar{R}$ воздуха. Направим ось x в сторону движения тела, т.е. вертикально вверх (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx},$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - k^2mgv^2, \qquad (1)$$

где $\dfrac{dv}{dt} = -g(1 + k^2v^2)$.

Разделим переменные в уравнении (1):

$$\frac{dv}{1 + k^2v^2} = -gdt,$$

проинтегрируем и получим

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg} kv = -gt + C_1. \qquad (2)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим из начальных условий: при $t = 0$ $v = v_0$. Тогда из формулы (2) получим, что $C_1 = \dfrac{1}{k}\operatorname{arctg} kv_0$.

При $v = 0$ точка находится в наивысшем положении и время подъема

$$T = \frac{C_1}{g} = \frac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}.$$

Подставим значение C_1 в уравнение (2):

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg} kv = -gt + \frac{1}{k}\operatorname{arctg} kv_0.$$

Откуда

$$\operatorname{arctg} kv = -kgt + \operatorname{arctg} kv_0,$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} kv) = \operatorname{tg}(-kgt + \operatorname{arctg} kv_0).$$

Тогда

$$kv = k\frac{ds}{dt} = \frac{\sin(-kgt + \operatorname{arctg} kv_0)}{\cos(-kgt + \operatorname{arctg} kv_0)}.$$

Разделим переменные, проинтегрируем и найдем

$$ks = \frac{1}{kg}\ln\cos(-kgt + \operatorname{arctg} kv_0) + C_2. \tag{3}$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из формулы (3), подставив начальные условия: при $t = 0$ $s = 0$; $C_2 = -\frac{1}{kg}\ln\cos(\operatorname{arctg} kv_0)$.

Подставим значение C_2 в выражение (3), откуда получим

$$s = \frac{1}{k^2 g}\ln\frac{\cos(-kgt + \operatorname{arctg} kv_0)}{\cos(\operatorname{arctg} kv_0)},$$

где $\cos(\operatorname{arctg} kv_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} kv_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}$.

При $t = T$

$$s = H = \frac{1}{k^2 g}\ln\sqrt{1 + k^2 v_0^2} = \frac{\ln(1 + k^2 v_0^2)}{2k^2 g}.$$

Замечание. Для определения высоты подъема можно было сделать подстановку, как в задаче 27.15:

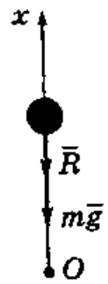
$$\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{vdv}{dx} = -g(1 - k^2 v^2).$$

Ответ: $H = \frac{\ln(1 + k^2 v_0^2)}{2gk^2}$; $T = \frac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

Задача 27.17

Тело массы 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v м/с равно $0{,}4v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Решение



Приняв тело за материальную точку, рассмотрим его движение под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $\bar{R}$ воздуха. Направим ось x в сторону движения тела, т.е. вертикально вверх (см. рисунок). Составим дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}$$

или

$$m\ddot{x} = -mg - R,$$

$$m\ddot{x} = -0{,}4\left(\frac{mg}{0{,}4} + \dot{x}\right),$$

$$\ddot{x} = -\frac{0{,}4}{m}\left(\frac{mg}{0{,}4} + \dot{x}\right).$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$\frac{d\dot{x}}{\frac{mg}{0{,}4} + \dot{x}} = -\frac{0{,}4}{m}dt.$$

Проинтегрируем это уравнение, учитывая, что в наивысшем положении скорость тела равна нулю:

$$\int_{v_0}^{0} \frac{d\dot{x}}{\frac{mg}{0{,}4} + \dot{x}} = -\frac{0{,}4}{m}\int_0^T dt,$$

откуда

$$\ln\frac{mg}{0{,}4} - \ln\left(\frac{mg}{0{,}4} + v_0\right) = -\frac{0{,}4}{m}T,$$

$$\ln\frac{\frac{mg}{0{,}4} + v_0}{\frac{mg}{0{,}4}} = \ln\left(1 + \frac{0{,}4v_0}{mg}\right) = \frac{0{,}4}{m}T.$$

Откуда найдем

$$T = \frac{m}{0{,}4}\ln\left(1+\frac{0{,}4v_0}{mg}\right) = \frac{2}{0{,}4}\ln\left(1+\frac{0{,}4\cdot 20}{2\cdot 9{,}8}\right) = 1{,}71\ (\text{с}).$$

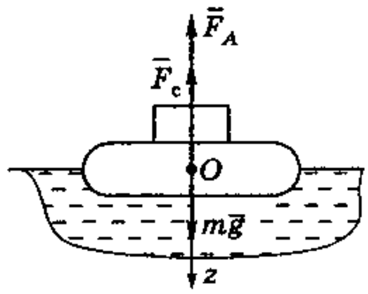
Ответ: 1,71 с.

Задача 27.18

Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть p, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k — коэффициент пропорциональности; S — площадь горизонтальной проекции лодки; v — величина скорости погружения. Масса лодки равна M. Определить скорость погружения v, если при $t = 0$ скорость $v_0 = 0$.

Решение

Рассмотрим движение подводной лодки. При погружении на нее действуют силы: сила тяжести $m\bar{g}$, сила сопротивления воды $\bar{F}_c$, архимедова сила $\bar{F}_A$. Направим ось z в сторону движения подлодки (см. рисунок). Составим дифференциальное уравнение поступательного движения лодки в проекции на ось z:



$$m\ddot{z} = \sum F_{kz},$$

$$m\ddot{z} = mg - F_A - F_c,$$

где $mg - F_A = p$ — отрицательная плавучесть лодки.

Тогда

$$m\ddot{z} = p - F_c = p - kSv = p - kS\dot{z}.$$

После преобразования

$$\ddot{z} = -\frac{kS}{m}\left(-\frac{p}{kS} + \dot{z}\right).$$

Сделаем замену: $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$, и разделим переменные:

$$\frac{d\dot{z}}{\dot{z} - \frac{p}{kS}} = -\frac{kS}{m} dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$\ln\left(\dot{z} - \frac{p}{kS}\right) = -\frac{kS}{m} t + C_1. \tag{1}$$

Найдем постоянную интегрирования C_1, учитывая начальные условия: при $t = 0$ $v_0 = \dot{z}_0 = 0$, согласно формуле (1)

$$\ln\left(-\frac{p}{kS}\right) = 0 + C_1, \quad C_1 = \ln\left(-\frac{p}{kS}\right).$$

Подставим значение C_1 в формулу (1):

$$\ln\left(\dot{z} - \frac{p}{kS}\right) = -\frac{kS}{m} t + \ln\left(-\frac{p}{kS}\right)$$

или

$$\ln\frac{\dot{z} - \frac{p}{kS}}{-\frac{p}{kS}} = \ln\left(1 - \dot{z}\frac{kS}{p}\right) = -\frac{kS}{m} t.$$

Потенцируем это выражение:

$$1 - \dot{z}\frac{kS}{p} = e^{-\frac{kS}{m} t},$$

откуда

$$\dot{z} = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{m} t}\right) = v,$$

где $m = M$.

Ответ: $v = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M} t}\right)$.

Задача 27.19

При условиях предыдущей задачи определить путь z, пройденный погружающейся лодкой за время T.

Решение

При решении задачи 27.18 получили

$$\dot{z} = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}\right).$$

Сделаем замену $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ и разделим переменные, тогда

$$dz = \frac{p}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}\right)dt.$$

Проинтегрировав это выражение, найдем

$$z = \frac{p}{kS}\left(t + \frac{m}{kS}e^{-\frac{kS}{m}t}\right) + C. \qquad (1)$$

Определим постоянную C из начальных условий: при $t = 0$ $z_0 = 0$. Тогда согласно формуле (1):

$$0 = \frac{p}{kS}\left(0 + \frac{m}{kS}\right) + C,$$

откуда

$$C = -\frac{pm}{k^2S^2}.$$

После подстановки значения C при $t = T$ получим

$$z = \frac{p}{kS}\left(T + \frac{m}{kS}e^{-\frac{kS}{m}T}\right) - \frac{pm}{k^2S^2} = \frac{p}{kS}\left[T - \frac{m}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{m}T}\right)\right],$$

где $m = M$.

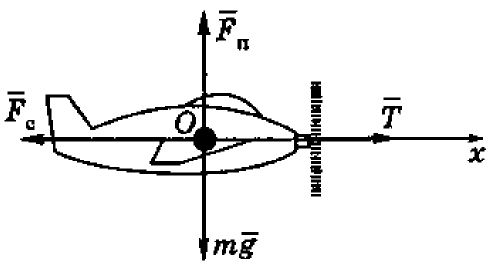
Ответ: $z = \frac{p}{kS}\left[T - \frac{M}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right]$.

Задача 27.20

Какова должна быть постоянная тяга винта T при горизонтальном полете самолета, чтобы, пролетев s метров, самолет увеличил свою скорость с v_0 м/с до v_1 м/с. Тяга винта направлена по скорости полета. Сила лобового сопротивления, направленная в сторону, противоположную скорости, пропорциональна квадрату скорости и равна α Н при скорости в 1 м/с. Масса самолета M кг.

Решение

Рассмотрим движение самолета при горизонтальном полете под действием силы тяги $\bar{T}$ винта, силы лобового сопротивления $\bar{F}_с$, силы тяжести $m\bar{g}$ и подъемной $\bar{F}_п$ силы. Направим ось x в сторону движения. Начало координат совместим с начальным положением самолета (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения самолета в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = T - F_с$$

или

$$m\ddot{x} = T - \alpha v^2 = T - \alpha\dot{x}^2.$$

Откуда

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\left(\dot{x}^2 - \frac{T}{\alpha}\right).$$

Сделаем замену:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}\frac{ds}{ds} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{ds},$$

разделим переменные и получим

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{\dot{x}^2 - \dfrac{T}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}ds.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{2\dot{x}d\dot{x}}{2\left(\dot{x}^2 - \frac{T}{\alpha}\right)} = -\frac{\alpha}{m}\int_0^s ds$$

и получим

$$\frac{1}{2}\ln\left(\dot{x}^2 - \frac{T}{\alpha}\right)\Bigg|_{v_0}^{v_1} = -\frac{\alpha}{m}s\Bigg|_0^s,$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}s$$

или

$$\frac{1}{2}\ln\frac{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}} = \frac{\alpha}{m}s.$$

Потенцируем полученное выражение:

$$\frac{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}} = e^{\frac{2\alpha s}{m}}, \quad v_0^2 - \frac{T}{\alpha} = v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{m}} - \frac{T}{\alpha}e^{\frac{2\alpha s}{m}}, \quad v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{m}} = \frac{T}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{2\alpha s}{m}}\right).$$

Откуда найдем

$$T = \frac{\alpha\left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{m}}\right)}{1 - e^{\frac{2\alpha s}{m}}},$$

где $m = M$.

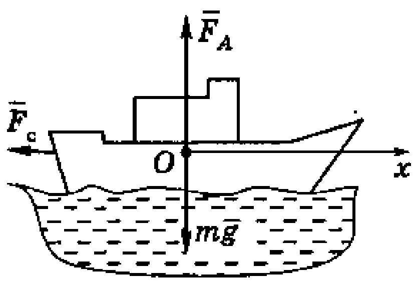
Ответ: $T = \dfrac{\alpha\left(v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{M}}\right)}{1 - e^{\frac{2\alpha s}{M}}}$ Н.

Задача 27.21

Корабль массы 10^7 кг движется со скоростью 16 м/с. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости корабля и равно $3 \cdot 10^5$ Н при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет корабль, прежде чем скорость его станет равной 4 м/с? За какое время корабль пройдет это расстояние?

Решение

Рассмотрим движение корабля под действием силы сопротивления $\bar{F}_c$, силы тяжести $m\bar{g}$, выталкивающей силы $\bar{F}_A$. Направим ось x в сторону движения коробля (см. рисунок).



Запишем дифференциальное уравнение движения корабля в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \tag{1}$$

$$m\ddot{x} = -F_c = -3 \cdot 10^5 v^2 = -3 \cdot 10^5 \dot{x}^2.$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, тогда уравнение (1) примет вид

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = -3 \cdot 10^5 \dot{x}^2$$

или

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -3 \cdot \frac{10^5}{1 \cdot 10^7} dt = -3 \cdot 10^{-2} dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -3 \cdot 10^{-2} t + C_1. \tag{2}$$

Постоянную интегрирования C_1 найдем из формулы (2) по начальным условиям: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = v_0 = 16$, тогда $-\dfrac{1}{16} = 0 + C_1$, $C_1 = -\dfrac{1}{16}$.

Подставим значение C_1 в уравнение (2):

$$-\frac{1}{\dot{x}} = -3 \cdot 10^{-2} t - \frac{1}{16}$$

или

$$\frac{1}{\dot{x}}=3\cdot10^{-2}t+\frac{1}{16}=\frac{48\cdot10^{-2}t+1}{16}.$$

Преобразуем это выражение и найдем

$$\dot{x}=\frac{16}{48\cdot10^{-2}t+1}=\frac{1}{3\cdot10^{-2}(t+2{,}08)}. \qquad (3)$$

Сделаем замену: $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$, разделим переменные и получим

$$dx=\frac{dt}{3\cdot10^{-2}(t+2{,}08)}.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$x=\frac{\ln(t+2{,}08)}{3\cdot10^{-2}}+C_2. \qquad (4)$$

Определим постоянную интегрирования C_2: при $t=0$ $x_0=0$ (так как начало оси x совместили с начальным положением корабля), тогда из формулы (4) получим

$$0=\frac{\ln2{,}08}{3\cdot10^{-2}}+C_2,\quad C_2=-\frac{\ln2{,}08}{3\cdot10^{-2}}.$$

Подставим значение C_2 в формулу (4) и найдем

$$x=\frac{\ln(t+2{,}08)}{3\cdot10^{-2}}-\frac{\ln2{,}08}{3\cdot10^{-2}}=\frac{1}{3\cdot10^{-2}}\ln\frac{t+2{,}08}{2{,}08}=\frac{\ln\left(\dfrac{t}{2{,}08}+1\right)}{3\cdot10^{-2}}. \qquad (5)$$

Определим время движения корабля до достижения $v_к=4$ м/с. При $t=T$ $\dot{x}=v_к$, тогда согласно формуле (3)

$$4=\frac{1}{3\cdot10^{-2}(T+2{,}08)}.$$

Откуда

$$T=\frac{1}{4\cdot3\cdot10^{-2}}-2{,}08=6{,}25\ (\text{с}).$$

Путь $x = s$, пройденный за время T, найдем по формуле (5):

$$s = \frac{\ln\left(\frac{6{,}25}{2{,}08}+1\right)}{3\cdot 10^{-2}} = 46{,}2 \text{ (м)}.$$

Ответ: $s = 46{,}2$ м; $T = 6{,}25$ с.

Задача 27.22

Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R = k^2 P v^2$, где v — величина скорости тела, P — вес тела. Какова будет скорость тела по истечении времени t после начала движения? Каково предельное значение скорости?

Решение

Рассмотрим движение тела при падении под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $\overline{R}$ воздуха. Ось z направим в сторону движения тела, т.е. вертикально вниз (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось z:

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz},$$

$$m\ddot{z} = mg - R = mg - k^2 mgv^2 = mg(1 - k^2 v^2) = mg(1 - k^2 \dot{z}^2).$$

Сделаем замену: $\ddot{z} = \dfrac{d\dot{z}}{dt}$, и разделим переменные:

$$\frac{d\dot{z}}{1 - k^2 \dot{z}^2} = \frac{mg}{m} dt = g dt.$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{1}{2k} \ln\left|\frac{1 + k\dot{z}}{1 - k\dot{z}}\right| = gt + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из начальных условий: при $t = 0$ $\dot{z}_0 = v_0 = 0$; $\dfrac{1}{2k} \cdot 0 = 0 + C$, $C = 0$. Тогда

$$\ln\left|\frac{1 + k\dot{z}}{1 - k\dot{z}}\right| = 2kgt,$$

$$\frac{1+k\dot{z}}{1-k\dot{z}}=e^{2kgt},$$

откуда

$$v=\dot{z}=\frac{1}{k}\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}=\frac{1}{k}\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}.$$

Найдем предельное значение v_∞ скорости. Для этого выполним преобразование:

$$\dot{z}=\frac{1}{k}\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1}=\frac{1}{k}\frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{2kgt}}}-\frac{1}{k}\frac{1}{e^{2kgt}+1};$$

$$\lim_{t\to\infty}\dot{z}=\frac{1}{k}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}e^{2kgt}}}-\frac{1}{k}\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}e^{2kgt}+1}=\frac{1}{k}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\infty}}-\frac{1}{k}\frac{1}{\infty+1}=\frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$v_\infty=\frac{1}{k}.$$

Либо из условия экстремума: $v=v_\infty$ при $\dfrac{dv}{dt}=0$. Тогда

$$mg(1-k^2v_\infty^2)=0\Rightarrow v_\infty=\frac{1}{k}.$$

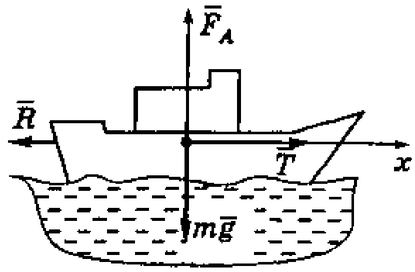
Ответ: $v=\dfrac{1}{k}\dfrac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$; $\quad v_\infty=\dfrac{1}{k}$.

Задача 27.23

Корабль массы $1{,}5\cdot10^6$ кг преодолевает сопротивление воды, равное $R=\alpha v^2$ Н, где v — скорость корабля в м/с , а α — постоянный коэффициент, равный 1200. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону $T=1{,}2\cdot10^6(1-v/33)$ Н. Найти зависимость скорости корабля от времени, если начальная скорость равна v_0 м/с .

Решение

Рассмотрим движение корабля под действием силы тяги $\bar{T}$ винта, силы сопротивления $\bar{R}$ воды, силы тяжести $m\bar{g}$, выталкивающей силы $\bar{F}_A$. Направим ось x в сторону движения корабля (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = T - R$$

или

$$m\ddot{x} = 1{,}2 \cdot 10^6\left(1 - \frac{v}{33}\right) - \alpha v^2.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\left(1 - \dfrac{\dot{x}}{33}\right)}{m} - \frac{\alpha}{m}\dot{x}^2 = \frac{1{,}2 \cdot 10^6\left(1 - \dfrac{\dot{x}}{33}\right)}{1{,}5 \cdot 10^6} - \frac{1200}{1{,}5 \cdot 10^6}\dot{x}^2 =$$

$$= -0{,}8(0{,}001\dot{x}^2 + 0{,}03\dot{x} - 1).$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$\frac{d\dot{x}}{0{,}001\dot{x}^2 + 0{,}03\dot{x} - 1} = -0{,}8dt.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{0{,}03^2 + 4 \cdot 0{,}001 \cdot 1}} \ln\left|\frac{2 \cdot 0{,}001\dot{x} + 0{,}03 - \sqrt{0{,}03^2 + 4 \cdot 0{,}001 \cdot 1}}{2 \cdot 0{,}001\dot{x} + 0{,}03 + \sqrt{0{,}03^2 + 4 \cdot 0{,}001 \cdot 1}}\right| = -0{,}8t + C.$$

После преобразований левой части этого выражения получим

$$14{,}28 \ln\left|\frac{0{,}002\dot{x} - 0{,}04}{0{,}002\dot{x} + 0{,}1}\right| = -0{,}8t + C. \qquad (1)$$

Определим постоянную интегрирования C по формуле (1) с учетом начальных условий: $t = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$. Тогда

$$14{,}28 \ln\left|\frac{0{,}002v_0 - 0{,}04}{0{,}002v_0 + 0{,}1}\right| = C.$$

Подставим полученное значение C в формулу (1):

$$14{,}28\ln\frac{\left|\dfrac{0{,}002\dot{x}-0{,}04}{0{,}002\dot{x}+0{,}1}\right|}{\left|\dfrac{0{,}002v_0-0{,}04}{0{,}002v_0+0{,}1}\right|}=-0{,}8\,t$$

или

$$\frac{0{,}002\dot{x}+0{,}1}{0{,}002\dot{x}-0{,}04}=\frac{0{,}002v_0+0{,}1}{0{,}002v_0-0{,}04}\,e^{0{,}056t}.$$

Разделим левую и правую части этого равенства на 0,002:

$$\frac{\dot{x}+50}{\dot{x}-20}=\frac{v_0+50}{v_0-20}\,e^{0{,}056t}.$$

Откуда найдем

$$\dot{x}=\frac{50v_0-1000+20(v_0+50)e^{0{,}056t}}{(v_0+50)e^{0{,}056t}-v_0+20}=\frac{70v_0-20v_0-1000+20(v_0+50)e^{0{,}056t}}{(v_0+50)e^{0{,}056t}-(v_0+50)+70}=$$

$$=\frac{70v_0-20(v_0+50)+20(v_0+50)e^{0{,}056t}}{(v_0+50)e^{0{,}056t}-(v_0+50)+70}=\frac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}.$$

Ответ: $v=\dfrac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}$.

Задача 27.24

В предыдущей задаче найти зависимость пройденного пути от скорости.

Решение

Согласно условию задачи 27.23

$$\ddot{x}=-0{,}8(0{,}001\dot{x}^2+0{,}03\dot{x}-1)=-0{,}0008(\dot{x}^2+30\dot{x}-1000)$$

или

$$\ddot{x}=\dot{v}=-0{,}0008(v^2+30v-1000).$$

Сделаем замену: $\dot{v} = \dfrac{vdv}{dx}$, тогда

$$\frac{vdv}{v^2 + 30v - 1000} = -0{,}0008dx$$

или после преобразований

$$\frac{vdv}{(v+15)^2 - 1225} = \frac{vdv}{(v+15)^2 - 35^2} = -0{,}0008dx. \qquad (1)$$

Введем новую переменную: $v + 15 = z$, тогда $v = z - 15$, $dv = dz$ и выражение (1) примет вид

$$\frac{(z-15)dz}{z^2 - 35^2} = \frac{zdz}{z^2 - 35^2} - \frac{15dz}{z^2 - 35^2} = -0{,}0008dx.$$

Проинтегрируем левую часть этого уравнения почленно:

$$\int \frac{zdz}{z^2 - 35^2} = \frac{1}{2}\ln(z^2 - 35^2);$$

$$\int \frac{15dz}{z^2 - 35^2} = \frac{15}{70}\ln\frac{z-35}{z+35}.$$

Тогда

$$\int \frac{vdv}{(v+15)^2 - 35^2} = \frac{1}{2}\ln(z^2 - 35^2) - \frac{15}{70}\ln\frac{z-35}{z+35} = -0{,}0008x + C.$$

Но так как $z = v + 15$, то

$$\frac{1}{2}\ln(z-35) + \frac{1}{2}(z+35) - \frac{15}{70}\ln(z-35) + \frac{15}{70}\ln(z+35) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(v+15-35) + \frac{1}{2}\ln(v+15+35) - \frac{15}{70}\ln(v+15-35) + \frac{15}{70}\ln(v+15+35) =$$

$$= \frac{2}{7}\ln(v-20) + \frac{5}{7}\ln(v+50) = -0{,}0008x + C.$$

Найдем постоянную интегрирования C с учетом начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $v = v_0$:

$$C = \frac{2}{7}\ln(v_0 - 20) + \frac{5}{7}\ln(v_0 + 50),$$

тогда

$$0{,}0008x=\frac{2}{7}\left[\ln(v_0-20)-\ln(v-20)\right]+\frac{5}{7}\left[\ln(v_0+50)-\ln(v+50)\right]=$$

$$=\frac{2}{7}\ln\frac{v_0-20}{v-20}+\frac{5}{7}\ln\frac{v_0+50}{v+50}.$$

Откуда

$$x=\frac{2}{0{,}0008\cdot 7}\ln\frac{v_0-20}{v-20}+\frac{5}{0{,}0008\cdot 7}\ln\frac{v_0+50}{v+50}=357\ln\frac{v_0-20}{v-20}+893\ln\frac{v_0+50}{v+50}.$$

О т в е т: $x=357\ln\dfrac{v_0-20}{v-20}+893\ln\dfrac{v_0+50}{v+50}$ (м).

Задача 27.25

В задаче 27.23 найти зависимость пути от времени при начальной скорости $v_0=10$ м/с.

Р е ш е н и е

Из решения задачи 27.23:

$$v=\frac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}=\frac{20e^{0{,}056t}+\dfrac{50v_0-1000}{v_0+50}}{e^{0{,}056t}+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}.$$

Введем обозначения:

$$\frac{50v_0-1000}{v_0+50}=a,\ \frac{20-v_0}{v_0+50}=b.$$

Тогда

$$v=\frac{20e^{0{,}056t}+a}{e^{0{,}056t}+b}.$$

Так как $v=\dfrac{dx}{dt}$, то

$$dx=\frac{20e^{0{,}056t}}{e^{0{,}056t}+b}dt+\frac{a}{e^{0{,}056t}+b}dt=\frac{20e^{0{,}056t}}{e^{0{,}056t}+b}dt+\frac{ae^{-0{,}056t}}{1+be^{-0{,}056t}}dt.$$

Проинтегрируем это выражение почленно, обозначив $e^{0,056t}+b=z$, $0{,}056e^{0,056t}dt=dz$, получим

$$\int \frac{20e^{0,056t}}{e^{0,056t}+b}dt=\int \frac{20dz}{0{,}056z}=\frac{20}{0{,}056}\ln z.$$

Введем обозначения: $1+be^{-0,056t}=y$, $-0{,}056bte^{-0,056t}dt=dy$, тогда

$$\int \frac{ae^{-0,056t}}{1+be^{-0,056t}}dt=-\int \frac{ady}{0{,}056by}=-\frac{a}{0{,}056b}\ln y.$$

Следовательно,

$$x+C=\frac{20}{0{,}056}\ln z-\frac{a}{0{,}056b}\ln y=357\ln\left(e^{0,056t}+\frac{20-v_0}{v_0+50}\right)-$$

$$-\frac{\dfrac{50v_0-1000}{v_0+50}}{0{,}056\cdot\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}\ln\left(1+\frac{20-v_0}{v_0+50}e^{-0,056t}\right)=357\ln\left(e^{0,056t}+\frac{20-v_0}{v_0+50}\right)+$$

$$+893\ln\left(1+\frac{20-v_0}{v_0+50}e^{-0,056t}\right). \qquad (1)$$

Найдем постоянную C из начальных условий: при $t=0$ $x_0=0$, тогда

$$C=375\ln\left(1+\frac{20-v_0}{v_0+50}\right)+893\ln\left(1+\frac{20-v_0}{v_0+50}\right)=$$

$$=357\ln\frac{70}{v_0+50}+893\ln\frac{70}{v_0+50}\approx 1250\ln\frac{70}{v_0+50}.$$

Подставим значение C в решение (1) и найдем

$$x=357\ln\left[(v_0+50)e^{0,056t}+20-v_0\right]-357\ln(v_0+50)+$$

$$+893\ln\left[(v_0+50)+(20-v_0)e^{-0,056t}\right]-893\ln(v_0+50)-1250\ln 70+$$

$$+1250\ln(v_0+50)=1250\ln\frac{(v_0+50)e^{0,056t}+20-v_0}{70}-50t.$$

При $v_0 = 10$ м/с

$$x = 1250 \ln \frac{(10+50)e^{0{,}056t} + 20 - 10}{70} - 50t = 1250 \ln \frac{6e^{0{,}056t} + 1}{7} - 50t \text{ (м)}.$$

Ответ: $x = 1250 \ln \dfrac{(v_0+50)e^{0{,}056t} + 20 - v_0}{70} - 50t$; при $v_0 = 10$ м/с

$$x = 1250 \ln \frac{6e^{0{,}056t} + 1}{7} - 50t \text{ (м)}.$$

Задача 27.26

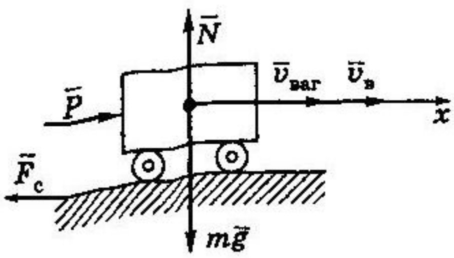
Вагон массы 9216 кг приходит в движение вследствие действия ветра, дующего вдоль полотна, и движется по горизонтальному пути. Сопротивление движению вагона равно 1/200 его веса. Сила давления ветра $P = kSu^2$, где S — площадь задней стенки вагона, подверженной давлению ветра, равная 6 м^2, u — скорость ветра относительно вагона, а k = 1,2. Абсолютная скорость ветра $v = 12$ м/с. Считая начальную скорость вагона равной нулю, определить:

1) наибольшую скорость v_{max} вагона;

2) время T, которое потребовалось бы для достижения этой скорости;

3) на каком расстоянии x вагон наберет скорость 3 м/с.

Решение



Рассмотрим движение вагона под действием силы давления $\bar{P}$ ветра, силы сопротивления $\bar{F}_c$, силы тяжести $m\bar{g}$ и реакции $\bar{N}$ путей. Направим ось x в сторону движения вагона. Составим дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P - F_c$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = kSu^2 - \frac{mg}{200}. \tag{1}$$

Скорость ветра относительно вагона

$$u = v_{\text{в}} - v_{\text{ваг}} = v_{\text{в}} - \dot{x},$$

где $v_{\text{в}}$ — абсолютная скорость ветра; $v_{\text{ваг}} = \dot{x}$ — скорость вагона.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = kS(v_{\text{в}} - \dot{x})^2 - \frac{mg}{200}.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{kS}{m}(v_{\text{в}} - \dot{x})^2 - \frac{g}{200}$$

или

$$\ddot{x} = \frac{kS}{m}\left[(v_{\text{в}} - \dot{x})^2 - \frac{gm}{200kS}\right].$$

После подстановки числовых значений найдем

$$\ddot{x} = \frac{1{,}2 \cdot 6}{9216}\left[(12 - \dot{x})^2 - \frac{9{,}81 \cdot 9216}{1{,}2 \cdot 6 \cdot 200}\right] = 0{,}00078[(12 - \dot{x})^2 - 7{,}92^2].$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$\frac{d\dot{x}}{(12 - \dot{x})^2 - 7{,}92^2} = 0{,}00078dt.$$

Введем переменную $12 - \dot{x} = z$, $-d\dot{x} = dz$, тогда

$$\frac{-dz}{z^2 - 7{,}92^2} = 0{,}00078dt.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$-\frac{1}{2 \cdot 7{,}92}\ln\frac{z - 7{,}92}{z + 7{,}92} = 0{,}00078t + C$$

или после подстановки значения z

$$-\frac{1}{15{,}84}\ln\frac{4{,}08 - \dot{x}}{19{,}92 - \dot{x}} = 0{,}00078t + C. \qquad (2)$$

Найдем постоянную интегрирования C по начальным условиям: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = 0$, тогда

$$C = -\frac{1}{15{,}84}\ln\frac{4{,}08}{19{,}92}.$$

Подставим значение C в формулу (2):

$$\frac{1}{15{,}84}\left(\ln\frac{4{,}08-\dot{x}}{19{,}92-\dot{x}}-\ln\frac{4{,}08}{19{,}92}\right)=-0{,}00078t,$$

$$\ln\left(\frac{4{,}08-\dot{x}}{19{,}92-\dot{x}}\cdot\frac{19{,}92}{4{,}08}\right)=-0{,}0123t.$$

Потенциируем это выражение:

$$4{,}88\frac{4{,}08-\dot{x}}{19{,}92-\dot{x}}=e^{-0{,}0123t},$$

откуда

$$\dot{x}=19{,}92\frac{e^{-0{,}0123t}-1}{e^{-0{,}0123t}-4{,}88}. \qquad (3)$$

Найдем максимальную скорость и время ее достижения. Скорость $v=\dot{x}$ максимальна, если $\ddot{x}=0$:

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\left(19{,}92\frac{e^{-0{,}0123t}-1}{e^{-0{,}0123t}-4{,}88}\right)'=\frac{19{,}92\cdot 0{,}0123\cdot 3{,}88e^{-0{,}0123t}}{\left(e^{-0{,}0123t}-4{,}88\right)^2},$$

т.е. если $e^{-0{,}0123t}\to 0$.

Это достигается при $t\to\infty$. Значит, $T=\infty$. Тогда

$$v_{\max}=19{,}92\frac{\frac{1}{e^{\infty}}-1}{\frac{1}{e^{\infty}}-4{,}88}=\frac{19{,}92}{4{,}88}=4{,}08\ (\text{м/с}).$$

Найдем уравнение движения вагона, для этого необходимо проинтегрировать уравнение (3):

$$\int dx=19{,}92\int\frac{e^{-0{,}0123t}-1}{e^{-0{,}0123t}-4{,}88}dt+C=19{,}92\int\frac{1-e^{-0{,}0123t}}{4{,}88-e^{-0{,}0123t}}dt+C=$$

$$=19{,}92\int\frac{dt}{4{,}88-e^{-0{,}0123t}}-19{,}92\int\frac{e^{-0{,}0123t}}{4{,}88-e^{-0{,}0123t}}dt+C=$$

$$=19{,}92\int\frac{e^{0{,}0123t}}{4{,}88e^{0{,}0123}-1}dt-19{,}92\int\frac{e^{-0{,}0123t}}{4{,}88-e^{-0{,}0123t}}dt+C.$$

Введем новые переменные: $4{,}88 - e^{-0{,}0123t} = z$, $0{,}0123e^{-0{,}0123t}dt = dz$, $4{,}88e^{0{,}0123t} - 1 = y$, $4{,}88 \cdot 0{,}0123e^{0{,}0123t}dt = dy$. Тогда

$$x = 19{,}92\left(\int \frac{dy}{4{,}88 \cdot 0{,}0123y} - \int \frac{dz}{0{,}0123z}\right) + C = 1619{,}5\left(\frac{\ln y}{4{,}88} - \ln z\right) + C =$$

$$= 1619{,}5\left[\frac{\ln\left(4{,}88e^{0{,}0123t} - 1\right)}{4{,}88} - \ln\left(4{,}88 - e^{-0{,}0123t}\right)\right] + C =$$

$$= 331{,}8\left[0{,}06t - 3{,}88\ln\left(4{,}88e^{0{,}0123t} - 1\right)\right] + C.$$

Найдем постоянную интегрирования C из начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$; $C = -331{,}8(-3{,}88\ln 3{,}88)$. Тогда

$$x = 331{,}8\left[0{,}06t - 3{,}88\ln\left(4{,}88e^{0{,}0123t} - 1\right)\right] + 331{,}8 \cdot 3{,}88 \cdot \ln 3{,}88 =$$

$$= 331{,}8\left(0{,}06t - 3{,}88\ln\frac{4{,}88e^{0{,}0123t} - 1}{3{,}88}\right). \qquad (4)$$

По формуле (3) определим время, за которое вагон наберет скорость 3 м/с, т.е. когда $\dot{x} = 3$:

$$3 = 19{,}92\frac{e^{-0{,}0123t} - 1}{e^{-0{,}0123t} - 4{,}88},$$

откуда

$$e^{-0{,}0123t} = 0{,}312,$$

$$-0{,}0123t = \ln 0{,}312 = -1{,}164, \quad t = 94{,}68 \text{ с}.$$

По формуле (4) найдем путь, пройденный за это время:

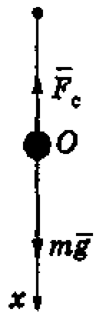
$$x = 331{,}8\left(0{,}06 \cdot 94{,}68 - 3{,}88\ln\frac{4{,}88e^{0{,}0123 \cdot 94{,}68} - 1}{3{,}88}\right) = 175{,}5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 1) $v_{max} = 4{,}08$ м/с; 2) $T = \infty$; 3) $x = 175{,}5$ м.

Задача 27.27

Найти уравнение движения точки массы m, падающей без начальной скорости на Землю. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности равен k.

Решение



Рассмотрим движение материальной точки, падающей на Землю, под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы сопротивления $F_c = kv^2$. Направим ось x в сторону движения точки, т.е. вертикально вниз. Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_c = mg - kv^2 = mg - k\dot{x}^2$$

или

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\dot{x}^2 = \frac{k}{m}\left(-\dot{x}^2 + \frac{gm}{k}\right).$$

Так как $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, то

$$\frac{d\dot{x}}{-\dot{x}^2 + \dfrac{gm}{k}} = \frac{k}{m}dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{gm}{k}}}\ln\frac{\dot{x} + \sqrt{\dfrac{gm}{k}}}{-\dot{x} + \sqrt{\dfrac{gm}{k}}} = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Определим постоянную интегрирования из начальных условий: при $t = 0$ $\dot{x} = 0$; следовательно, $C_1 = 0$. Тогда

$$\ln\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}} + \dot{x}}{\sqrt{\dfrac{gm}{k}} - \dot{x}} = 2\sqrt{\frac{gm}{k}}\frac{k}{m}t = 2\sqrt{\frac{gk}{m}}t,$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1}.$$

Найдем закон движения тела. Сделаем замену: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, тогда

$$dx = \sqrt{\frac{gm}{k}} \frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} dt = \sqrt{\frac{gm}{k}} \left(\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} dt - \frac{dt}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{gm}{k}} \left(\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} dt - \frac{e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} dt}{e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1} \right).$$

Введем обозначения: $2\sqrt{\frac{gk}{m}} = a$, $\sqrt{\frac{gm}{k}} = b$ и получим

$$dx = b\left(\frac{e^{at}}{e^{at}+1} dt - \frac{e^{-at}}{e^{-at}+1} dt \right).$$

Введем новые переменные: $e^{at} + 1 = y$, $ae^{at}dt = dy$, $e^{-at} + 1 = z$, $-ae^{-at}dt =$ $= dz$, тогда

$$dx = b\left(\frac{dy}{ay} + \frac{dz}{az} \right) = \frac{b}{a}\left(\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right).$$

Проинтегрируем это выражение:

$$x = \frac{b}{a}(\ln y + \ln z) + C_2 = \frac{b}{a}\left[\ln(e^{at}+1) + \ln(e^{-at}+1)\right] + C_2.$$

Найдем постоянную интегрирования C_2, подставив начальные условия: при $t = 0$ $x_0 = 0$; $0 = \frac{b}{a} 2\ln 2 + C_2$, $C_2 = -\frac{2b}{a}\ln 2$.

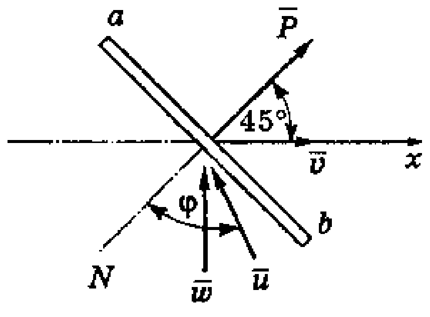
Тогда

$$x = \frac{b}{a}\left[\ln(e^{at}+1) + \ln(e^{-at}+1) - 2\ln 2\right] = \frac{b}{a}\ln\frac{(e^{at}+1)(e^{-at}+1)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}}{2\sqrt{\frac{gk}{m}}} \ln\left[\frac{\left(e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1\right)\left(e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + 1\right)}{4e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right] = \frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{2} = \frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t.$$

Ответ: $x = \frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{gk}{m}}\, t$.

Задача 27.28



Буер, весящий вместе с пассажирами $Q = 1962$ Н, движется прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности льда вследствие давления ветра на парус, плоскость которого ab образует угол 45° с направлением движения. Абсолютная скорость $\bar{w}$ ветра перпендикулярна направлению движения. Величина силы давления ветра P выражается формулой Ньютона: $P = kSu^2\cos^2\varphi$, где φ — угол, образуемый относительной скоростью ветра $\bar{u}$ с перпендикуляром $\bar{N}$ к плоскости паруса, $S = 5$ м^2 — площадь паруса, $k = 0{,}113$ — опытный коэффициент. Сила давления $\bar{P}$ направлена перпендикулярно плоскости ab. Пренебрегая трением, найти: 1) какую наибольшую скорость v_{max} может получить буер; 2) какой угол α составляет при этой скорости помещенный на мачте флюгер с плоскостью паруса; 3) какой путь x_1 должен пройти буер для того, чтобы приобрести скорость $v = \dfrac{2}{3}w$, если его начальная скорость равна нулю.

Решение

Рассмотрим движение буера под действием силы давления $\bar{P}$ ветра. Ось x направим в сторону движения буера (см. рисунок к условию задачи). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\cos 45°$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = kSu^2\cos^2\varphi\cos 45°.$$

Рассмотрим движение потока воздуха как сложное: $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$, или в проекции на нормаль к парусу $w_n = u_n + v_n$, откуда

$$u_n = u\cos\varphi = w_n - v_n = (w - v)\cos 45° = (w - \dot{x})\cos 45°.$$

Тогда

$$m\ddot{x} = kS(w - \dot{x})^2\cos^3 45°.$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, и разделим переменные:

$$\frac{d\dot{x}}{(w-\dot{x})^2} = \frac{kS}{m}\cos^3 45° dt.$$

Введем новую переменную: $w - \dot{x} = z$, $-d\dot{x} = dz$, тогда

$$\frac{-dz}{z^2} = \frac{kS}{m}\cos^3 45° dt.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$\frac{1}{z} = \frac{kS}{m}t\cos^3 45° + C_1$$

или

$$\frac{1}{w-\dot{x}} = \frac{kS}{m}t\cos^3 45° + C_1.$$

Найдем постоянную интегрирования C_1 из начальных условий: при $t=0$ $\dot{x}_0 = 0$, тогда $C_1 = \frac{1}{w}$,

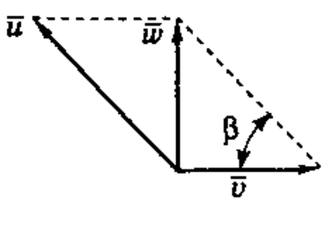
$$\frac{1}{w-\dot{x}} - \frac{1}{w} = \frac{\dot{x}}{(w-\dot{x})w} = \frac{kS}{m}t\cos^3 45°. \qquad (1)$$

Введем обозначение: $\frac{kS}{m}\cos^3 45° = a$ и перепишем выражение (1) в виде

$$\dot{x} = \frac{w^2 at}{1+wat}. \qquad (2)$$

Определим максимальную скорость буера:

$$\dot{x}_{\max} = \lim_{t\to\infty}\frac{w^2 at}{1+wat} = \lim_{t\to\infty}\frac{w}{\frac{1}{wat}+1} = \frac{w}{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{wat}+1} = \frac{w}{1} = w.$$



Найдем направление относительной скорости ветра при $\dot{x}_{\max}$. Так как $w = v_{\max} = \dot{x}_{\max}$, то $\beta = 45°$. Это значит, что вектор $\bar{u}$ направлен вдоль паруса и $\alpha = 0$.

Проинтегрируем уравнение (2):

$$\int dx = \int \frac{w^2 at}{1+wat}dt + C_2,$$

$$x = w\int \frac{t+\frac{1}{wa}-\frac{1}{wa}}{\frac{1}{wa}+t}dt + C_2 = w\left(\int dt - \frac{1}{wa}\int\frac{dt}{\frac{1}{wa}+t}\right) + C_2 =$$

$$= wt - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{wa}+t\right) + C_2.$$

Найдем C_2 из начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, тогда $C_2 = \frac{1}{a}\ln\frac{1}{wa}$,

$$x = wt - \frac{1}{a}\ln(1+wat) = wt - \frac{1}{a}\ln\left(1 + w\frac{kS}{m}t\cos^3 45°\right). \qquad (3)$$

Определим время T, за которое скорость буера станет $v = \dot{x} = \frac{2}{3}w$. Согласно формуле (1)

$$\frac{\frac{2}{3}w}{\left(w-\frac{2}{3}w\right)w} = \frac{kS}{m}T\cos^3 45°,$$

откуда

$$T = \frac{2m}{wkS\cos^3 45°}.$$

Найдем по формуле (3) путь x_1, пройденный буером за время T:

$$x_1 = w\frac{2m}{wkS\cos^3 45°} - \frac{1}{\frac{kS}{m}\cos^3 45°}\ln\left(1 + w\frac{kS}{m}\cos^3 45°\frac{2m}{wkS\cos^3 45°}\right) =$$

$$= \frac{m}{kS\cos^3 45°}(2-\ln 3) = \frac{1962}{9{,}8\cdot 0{,}113\cdot 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}(2-\ln 3) = 900 \text{ (м)}.$$

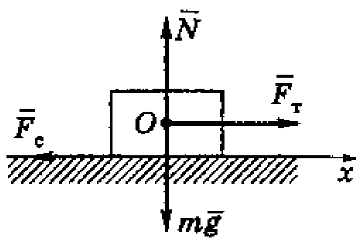
Ответ: 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0°$; 3) $x_1 = 900$ м.

Задача 27.29

Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 1200 Н в течение каждой секунды. Найти зависимость пройденного пути от времени движения вагона при следующих данных: масса вагона 10 000 кг, сопротивление трения постоянно и составляет 0,02 веса вагона, а начальная скорость равна нулю.

Решение

Рассмотрим движение трамвая под действием силы тяги $\bar{F}_т$, силы сопротивления $\bar{F}_с$, силы тяжести $m\bar{g}$ и нормальной реакции $\bar{N}$ путей. Ось x направим в сторону движения (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения трамвая в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F_т - F_с$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = 1200t - 0{,}02mg.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{1200}{m}t - 0{,}02g.$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$d\dot{x} = \left(\frac{1200}{m}t - 0{,}02g\right)dt = \left(\frac{1200}{10\,000}t - 0{,}02g\right)dt = 0{,}12(t - 1{,}635)dt.$$

Поскольку движение начнется в момент, когда $F_т > F_с$, т.е. при $t > \frac{0{,}02mg}{1200} = 1{,}635$, то введем новую переменную: $t_1 = t - 1{,}635$, $dt_1 = dt$.

Тогда

$$d\dot{x} = 0{,}12t_1 dt_1.$$

Проинтегрируем это выражение дважды:

$$\dot{x} = 0{,}12\frac{t_1^2}{2} + C_1,$$

$$x = 0{,}06 = \frac{t_1^3}{3} + C_1t_1 + C_2.$$

Постоянные интегрирования найдем по начальным условиям: при $t_1 = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. С учетом этого $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тогда

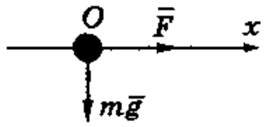
$$s = x = 0{,}02 t_1^3 = 0{,}02(t - 1{,}635)^3.$$

Ответ: движение начнется через 1,635 с после включения тока по закону: $s = 0{,}02(t - 1{,}635)^3$ м.

Задача 27.30

Тело массы 1 кг движется под действием переменной силы $F = 10(1 - t)$ Н, где время t — в секундах. Через сколько секунд тело остановится, если начальная скорость тела $v_0 = 20$ м/с и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

Решение



Рассмотрим движение тела, приняв его за материальную точку, под действием силы $\bar{F}$. Направим ось x в сторону движения тела, совместив начало координат, точку O, с начальным положением тела (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F = 10(1 - t).$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{10}{m}(1 - t) = 10(1 - t).$$

Дважды проинтегрировав это уравнение, получим

$$\dot{x} = 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C_1, \qquad (1)$$

$$x = 10\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + C_1 t + C_2. \qquad (2)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем начальные условия движения: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 = 20$ м/с, тогда $C_1 = 20$, $C_2 = 0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в равенства (1) и (2):

$$\dot{x} = 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + 20, \qquad (3)$$

$$x = 10\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + 20t. \qquad (4)$$

Для определения времени движения тела до остановки приравняем скорость нулю: $\dot{x} = 0$, тогда при $t = T$ уравнение (3) примет вид

$$0 = 10\left(T - \frac{T^2}{2}\right) + 20, \text{ или } T^2 - 2T - 4 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем

$$T = 1 + \sqrt{5} = 3{,}236 \text{ (c)}.$$

Определим по формуле (4) путь, пройденный до остановки, при $t = T$ $x = s$:

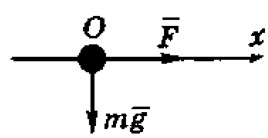
$$s = 10\left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6}\right) + 20T = 10\left(\frac{3{,}236^2}{2} - \frac{3{,}236^3}{6}\right) + 20 \cdot 3{,}236 = 60{,}6 \text{ (м)}.$$

О т в е т: $t = 3{,}236$ с; $s = 60{,}6$ м.

Задача 27.31

Материальная точка массы m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos\omega t$, где F_0 и ω — постоянные величины. В начальный момент точка имела скорость $\dot{x}_0 = v_0$. Найти уравнение движения точки.

Р е ш е н и е



Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием силы $\bar{F}$. Направим ось x в сторону движения материальной точки, совместив начало координат (точку O) с начальным положением точки (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F = F_0 \cos\omega t.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

После замены: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$d\dot{x} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t dt.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + C_1.$$

Сделаем замену: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, разделим переменные и получим

$$dx = \left(\frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t + C_1\right)dt.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + C_1 t + C_2. \qquad (1)$$

Используя начальные условия: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = v_0$ и $x_0 = 0$ (начало координат совмещено с начальным положением точки), найдем значения постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{F_0}{m\omega}\sin 0° + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ 0 = -\dfrac{F_0}{m\omega^2}\cos 0° + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \dfrac{F_0}{m\omega^2}. \end{cases}$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и найдем

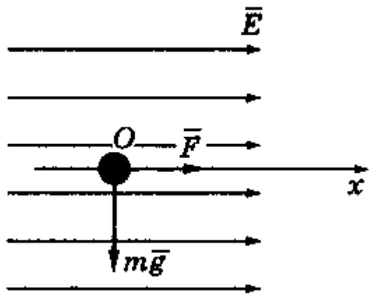
$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t.$$

О т в е т: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t.$

Задача 27.32

Частица массы m, несущая заряд электричества e, находится в однородном электрическом поле с переменным напряжением $E = A\sin kt$ (A и k — заданные постоянные). Определить движение частицы, если известно, что в электрическом поле на частицу действует сила $\bar{F} = e\bar{E}$, направленная в сторону напряжения $\bar{E}$. Влиянием силы тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат; начальная скорость частицы равна нулю.

Решение



Рассмотрим прямолинейное движение электрической частицы в однородном электрическом поле под действием силы $\bar{F}$. Ось x направим вдоль силовых линий напряжения. Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = eE = eA\sin kt.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{eA}{m}\sin kt.$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$d\dot{x} = \frac{eA}{m}\sin kt dt.$$

Проинтегрируем это выражение и найдем

$$\dot{x} = -\frac{eA}{mk}\cos kt + C_1.$$

Снова сделаем замену: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, разделим переменные:

$$dx = \left(-\frac{eA}{mk}\cos kt + C_1\right)dt.$$

Проинтегрируем это выражение и найдем

$$x = -\frac{eA}{mk^2}\sin kt + C_1 t + C_2. \qquad (1)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 подставим в полученные уравнения скорости и движения начальные условия: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, тогда

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{eA}{mk}\cos 0° + C_1 \Rightarrow C_1 = \dfrac{eA}{mk}, \\ 0 = -\dfrac{eA}{mk^2}\sin 0° + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и запишем уравнение движения

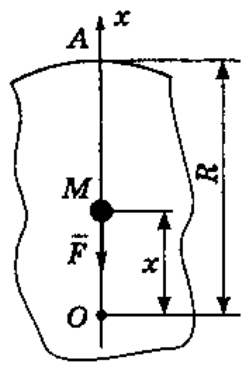
$$x = -\frac{eA}{mk^2}\sin kt + \frac{eA}{mk}t = \frac{eA}{mk}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right).$$

Ответ: $x = \dfrac{eA}{mk}\left(t - \dfrac{\sin kt}{k}\right)$.

Задача 27.33

Определить движение тяжелого шарика вдоль воображаемого прямолинейного канала, проходящего через центр Земли, если принять, что сила притяжения внутри земного шара пропорциональна расстоянию движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру; шарик опущен в канал с поверхности Земли без начальной скорости. Указать также скорость шарика при прохождении через центр Земли и время движения до этого центра. Радиус Земли равен $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м, ускорение силы притяжения на поверхности Земли принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

Решение



При движении на шарик действует сила притяжения $\bar{F}$, которая на поверхности Земли равна

$$F = \alpha R = mg \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{R}.$$

Направим ось x вдоль воображаемого прямолинейного канала, совместив начало координат с центром Земли (см. рисунок).

Запишем уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F = -\alpha x$$

или с учетом значения α

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{R}x. \tag{1}$$

Отсюда

$$\ddot{x} + \frac{g}{R}x = 0. \tag{2}$$

Введем обозначение: $\frac{g}{R} = k^2$, тогда уравнени (2) примет вид.

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Решим это дифференциальное уравнение и получим

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{4}$$

Из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = R$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем постоянные интегрирования:

из формулы (3): $x = x_0 = R = C_1$;

из формулы (4): $\dot{x}_0 = 0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = 0$.

Тогда формулы (3) и (4) примут вид

$$x = R\cos kt, \quad \dot{x} = -Rk\sin kt,$$

или

$$x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t, \tag{5}$$

$$\dot{x} = -Rk\sin\sqrt{\frac{g}{R}}\,t. \tag{6}$$

Найдем время T прохождения шарика через центр, когда $x = 0$:

$$x = 0 = \cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t; \quad \sqrt{\frac{g}{R}}\,T = \frac{\pi}{2};$$

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{3{,}14}{2}\sqrt{\frac{6{,}37\cdot 10^6}{9{,}8}} = 1266{,}4 \text{ (с)}.$$

Подставим значение T в формулу (6) и получим

$$v = \dot{x} = -\sqrt{gR}\sin\frac{\pi}{2} = \left|-\sqrt{gR}\right| = \left|-\sqrt{9{,}8\cdot 6{,}37\cdot 10^6}\right| = 7{,}9\cdot 10^3 \text{ (м/с)}.$$

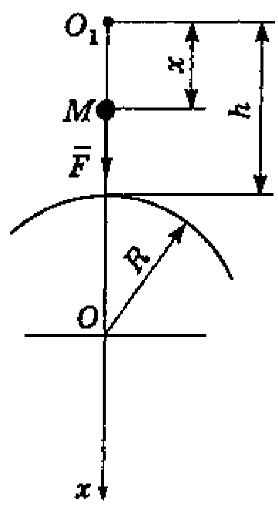
Ответ: расстояние шарика от центра Земли меняется по закону

$$x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t;\ v = 7{,}9\cdot 10^3 \text{ м/с};\ T = 1266{,}4 \text{ с} = 21{,}1 \text{ мин}.$$

Задача 27.34

Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь, а силу притяжения Земли считать обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти время T, по истечении которого тело достигает поверхности Земли. Какую скорость v оно приобретет за это время? Радиус Земли равен R; ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

Решение



При падении на тело M действует сила притяжения $\bar{F}$.

Направим ось x из точки O_1 (с высоты h над Землей) в сторону движения тела, совместив начало координат (точку O) с центром Земли (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \frac{k}{(R+h-x)^2},$$

где k — коэффициент пропорциональности, который находим из условия равенства силы тяготения на поверхности Земли силе тяжести точки, т.е. $\frac{k}{R^2} = mg$, откуда

$$k = mgR^2.$$

Тогда

$$\ddot{x} = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2}.$$

Введем замену: $\ddot{x} = \frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$, разделим переменные, проинтегрируем и получим

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2},$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{gR^2}{R+h-x} + C_1.$$

Найдем постоянную интегрирования из начальных условий: при $x = 0$ $\dot{x} = 0$, $C_1 = -\frac{gR^2}{R+h}$.

Тогда

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+h-x} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{gR^2x}{(R+h-x)(R+h)}.$$

Откуда найдем скорость

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{x}{R+h-x}}. \qquad (1)$$

При $x = h$

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{h}{R+h-h}} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

Для определения времени падения тела разделим переменные в выражении (1):

$$\sqrt{\frac{R+h-x}{x}}dx = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}dt.$$

Проинтегрируем и получим

$$\int\sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{R+h-x}\,\sqrt{R+h-x}}{\sqrt{x}\sqrt{R+h-x}}\,dx = \int\frac{(R+h-x)dx}{\sqrt{(R+h)x-x^2}} =$$

$$= \int\frac{[2(R+h)-2x]dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}} = \int\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}} + \int\frac{(R+h)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}. \qquad (2)$$

Введем новую переменную: $\sqrt{(R+h)x-x^2}=u$, тогда

$$du=\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}.$$

Вычислим первый интеграл в выражении (2):

$$\int\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\int du=\sqrt{(R+h)x-x^2}.$$

Второй интеграл в выражении (2) можно записать в виде

$$\frac{R+h}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R+h)x-x^2}}$$

— это табличный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\arcsin\frac{x-a}{a}$, где $a=\frac{R+h}{2}$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{(R+h)/2}.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{\frac{R+h-x}{x}}\,dx=\sqrt{(R+h)x-x^2}+\frac{R+h}{2}\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\,t+C_2. \qquad (3)$$

Постоянную интегрирования найдем из начальных условий: при $t=0$ $x_0=0$, тогда согласно формуле (3)

$$C_2=\frac{R+h}{2}\arcsin(-1)=-\frac{(R+h)}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Подставим значение C_2 в формулу (3), откуда найдем

$$t=\sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left\{\sqrt{(R+h)x-x^2}+\frac{(R+h)}{2}\left[\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}+\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, то

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x - \left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left[-\frac{-x + \left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left[\frac{-x + \left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}\right] = \arccos\frac{R+h-2x}{R+h}.$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left[\sqrt{(R+h)x - x^2} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R+h-2x}{R+h}\right].$$

Откуда при $x = h$ получим

$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

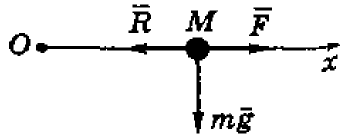
Ответ: $v = \sqrt{\frac{2ghR}{R+h}}$; $T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right)$.

Задача 27.35

Материальная точка массы m отталкивается от центра силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности mk_2). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности $2mk_1$). В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра, и ее скорость в этот момент равнялась нулю. Найти закон движения точки.

Решение

Точка M движется под действием силы отталкивания $\bar{F}$ и силы сопротивления $\bar{R}$ среды. Направим ось x в сторону движения материальной точки (см. рисунок). Запишем уравнение движения в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = F - R$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = mk_2 x - 2mk_1 \dot{x}.$$

Откуда

$$\ddot{x} + 2k_1 \dot{x} - k_2 x = 0. \tag{1}$$

Решим дифференциальное уравнение (1). Для этого составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2k_1\lambda - k_2 = 0. \tag{2}$$

Корни характеристического уравнения (2) — действительные и разные:

$$\lambda_{1,2} = -k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2}.$$

Введем обозначения: $\lambda_1 = -\alpha = -k_1 - \sqrt{k_1^2 + k_2}$; $\lambda_2 = \beta = \sqrt{k_1^2 + k_2} - k_1$. Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) запишем в виде

$$x = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{\beta t}. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по времени:

$$\dot{x} = -\alpha C_1 e^{-\alpha t} + \beta C_2 e^{\beta t}. \tag{4}$$

Подставим начальные условия движения: при $t = 0$ $x_0 = a$, $v_0 = 0$, в формулы (3) и (4) и найдем постоянные интегрирования: из формулы (3) $x = x_0 = a = C_1 + C_2$; из формулы (4) $\dot{x}_0 = v_0 = 0 = -\alpha C_1 + \beta C_2$. Тогда

$$C_1 = a - C_2,\ C_1 = \frac{\beta}{\alpha} C_2,$$

откуда

$$C_2 = \frac{a\alpha}{\alpha + \beta},\ C_1 = \frac{a\beta}{\alpha + \beta}.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в выражение (3) и получим

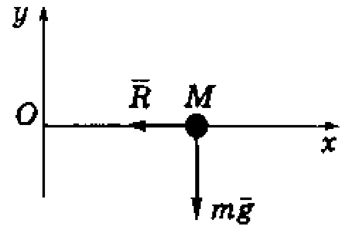
$$x = \frac{a\beta}{\alpha + \beta} e^{-\alpha t} + \frac{a\alpha}{\alpha + \beta} e^{\beta t} = \frac{a}{\alpha + \beta}\left(\beta e^{-\alpha t} + \alpha e^{\beta t}\right).$$

Ответ: $x = \dfrac{a}{\alpha + \beta}\left(\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t}\right)$, где $\alpha = k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2}$, $\beta = \sqrt{k_1^2 + k_2} - k_1$.

Задача 27.36

Точка массы m начинает двигаться без начальной скорости из положения $x=\beta$ прямолинейно (вдоль оси x) под действием силы притяжения к началу координат, изменяющейся по закону $R=\alpha/x^2$. Найти момент времени, когда точка окажется в положении $x_1=\beta/2$. Определить скорость точки в этом положении.

Решение



Выберем систему координат Oxy. Точка M движется под действием силы притяжения $\bar{R}$ (см. рисунок). Запишем уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}=-R=-\frac{\alpha}{x^2}. \tag{1}$$

Введем замену: $\ddot{x}=\dfrac{\dot{x}d\dot{x}}{dx}$, подставим в формулу (1) и получим

$$\frac{m\dot{x}d\dot{x}}{dx}=\frac{-\alpha}{x^2}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int m\dot{x}d\dot{x}=-\int\frac{\alpha dx}{x^2},$$

$$m\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{\alpha}{x}+C_1. \tag{2}$$

Найдем постоянную интегрирования C_1 из начальных условий: $t=0$, $x_0=\beta$, $\dot{x}_0=0$. Тогда согласно формуле (2) $C_1=-\dfrac{\alpha}{\beta}$. Подставим значение C_1 в формулу (2) и получим

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}=\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha}{\beta}.$$

Откуда

$$\dot{x}_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha}{\beta}\right)},$$

$$\dot{x}_1=-\sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\beta}\right)}, \tag{3}$$

где $\dot{x}$ — проекция скорости на ось x, при этом $\dot{x}<0$.

Введем замену: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, разделим переменные:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta}}} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}dt.$$

Проинтегрируем это выражение; вычислим интеграл в левой части равенства путем приведения его к табличным (подробное объяснение см. в решении задачи 27.34):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta}}} = \sqrt{\beta}\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{\beta - x}} = \sqrt{\beta}\int \frac{xdx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = -\frac{\sqrt{\beta}}{2}\int \frac{(\beta - 2x - \beta)dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\beta}}{2}\int \frac{(\beta - 2x)dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \frac{\beta\sqrt{\beta}}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2}}.$$

В результате получим

$$-\sqrt{\beta}\sqrt{\beta x - x^2} + \frac{\beta\sqrt{\beta}}{2}\arcsin\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\frac{2}{\beta} + C_2 = -t\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}. \qquad (4)$$

Постоянную интегрирования C_2 найдем из начальных условий: при $t = 0$ $x = \beta$, тогда согласно формуле (4) $C_2 = -\frac{\beta\sqrt{\beta}}{2}\frac{\pi}{2}$.

Подставим значение C_2 в формулу (4) и найдем

$$t = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left[\sqrt{\beta}\sqrt{\beta + x^2} + \beta\frac{\sqrt{\beta}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2x - \beta}{\beta}\right)\right].$$

При $x_1 = \frac{\beta}{2}$

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left(\frac{\beta^{3/2}}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\beta^{3/2}}{2}\right) = \frac{\beta^{3/2}}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда согласно формуле (3)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left(\frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta}\right)} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}.$$

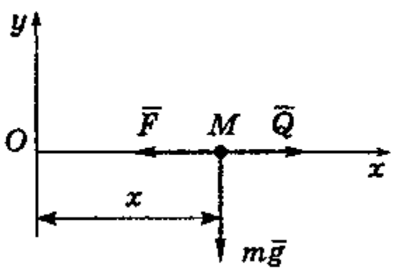
О т в е т: $t_1 = \dfrac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{m}{\alpha}}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m\beta}}$.

П р и м е ч а н и е. Интеграл $\int\sqrt{\dfrac{x}{\beta - x}}\,dx$ можно свести к двум табличным, если освободиться от радикала, обозначив $\dfrac{x}{\beta - x} = z^2$, откуда $x = \dfrac{\beta z^2}{1 + z^2}$, $dx = \dfrac{2\beta z dz}{(1 + z^2)^2}$.

Задача 27.37

Точка массы m начинает двигаться из состояния покоя из положения $x_0 = a$ прямолинейно под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от начала координат: $F_x = -c_1 mx$ и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния: $Q_x = c_2 mx^3$. При каком соотношении c_1, c_2, a точка достигает начала координат и остановится?

Р е ш е н и е



При движении на точку M действуют сила притяжения $\bar{F}$ и сила отталкивания $\bar{Q}$. Направим ось x в сторону движения точки (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = Q_x + F_x$$

или с учетом данных задачи

$$m\ddot{x} = c_2 mx^3 - c_1 mx.$$

Откуда

$$\ddot{x} = c_2 x^3 - c_1 x. \tag{1}$$

Введем замену: $\ddot{x} = \dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx}$, тогда

$$\frac{\dot{x}d\dot{x}}{dx} = c_2 x^3 - c_1 x.$$

Разделим переменные в этом выражении, проинтегрируем и получим

$$\int \dot{x}d\dot{x} = \int (c_2 x^3 + c_1 x)dx,$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = c_2 \frac{x^4}{4} - c_1 \frac{x^2}{2} + A. \qquad (2)$$

Найдем постоянную интегрирования A из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$. Тогда из формулы (2) найдем

$$A = \frac{c_1 a^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4}.$$

Подставим значение A в уравнение (2) и получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{c_2 x^4}{4} - \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_1 a^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4}. \qquad (3)$$

При $t = t_1$ $\dot{x}_1 = 0$, $x_1 = 0$, тогда уравнение (3) примет вид

$$\frac{c_1 a^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4} = 0.$$

Откуда

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a^2}{2}, \quad \text{или} \quad c_1 = \frac{c_2 a^2}{2}.$$

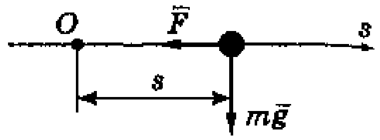
О т в е т: $c_1 = \dfrac{c_2 a^2}{2}$.

Задача 27.38

При движении тела в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $F = -\dfrac{2v^2}{3+s}$ Н, где v — скорость тела в м/с, а s — пройденный путь в метрах. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость $v_0 = 5$ м/с.

Р е ш е н и е

Рассмотрим движение тела под действием силы сопротивления $\overline{F}$ среды и силы тяжести $m\overline{g}$. Ось Os направим в сторону движения тела (см. рисунок). Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось s:



$$m\ddot{s} = -F = -\frac{2v^2}{3+s}. \qquad (1)$$

Произведем замену:

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{dS}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{d\dot{s}}{dS} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{dt} = v\frac{dv}{ds}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mvdv}{ds} = -\frac{2v^2}{3+s}, \qquad (2)$$

где $m = 1$.

Разделим переменные, проинтегрируем выражение (2):

$$\int\frac{dv}{2v} = \int -\frac{ds}{3+s}$$

и получим

$$\frac{1}{2}\ln v = -\ln(3+s) + \ln C_1.$$

Откуда

$$v = \left(\frac{C_1}{3+s}\right)^2. \qquad (3)$$

Подставим начальные условия: при $t = 0$ $s_0 = 0$, $\dot{s}_0 = v_0$, в формулу (3) и найдем C_1: $v_0 = \frac{C_1^2}{9}$, отсюда $C_1^2 = 9v_0 = 45$. Тогда выражение (3) примет вид

$$v = \frac{45}{(3+s)^2},$$

но так как $v = \frac{ds}{dt}$, то

$$\frac{ds}{dt} = \frac{45}{(3+s)^2}. \qquad (4)$$

Разделим переменные в выражении (4), проинтегрируем:

$$\int (3+s)^2 ds = \int 45 dt$$

и получим

$$\frac{(3+s)^3}{3} = 45t + C_2. \qquad (5)$$

Подставим начальные условия в формулу (5) и найдем C_2:

$$3^2 = 9 = C_2.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$\frac{(3+s)^3}{3} = 45t + 9.$$

Откуда найдем

$$s = \sqrt[3]{27 \cdot 5t + 27} - 3 = 3\left(\sqrt[3]{5t+1} - 1\right).$$

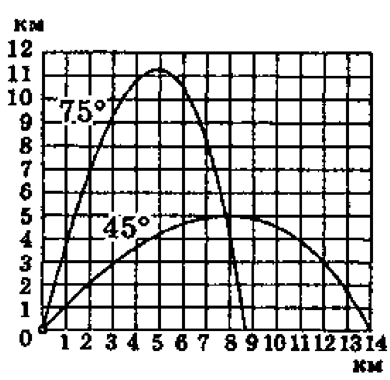
Ответ: $s = 3\left[\sqrt[3]{5t+1} - 1\right]$ м.

Криволинейное движение

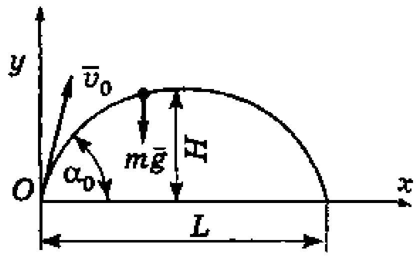
Задачи и решения

Задача 27.39

Морское орудие выбрасывает снаряд массы 18 кг со скоростью v_0 = 700 м/с, действительная траектория снаряда в воздухе изображена на рисунке в двух случаях: 1) когда угол, составляемый осью орудия с горизонтом, равен 45° и 2) когда этот угол равен 75°. Для каждого из указанных двух случаев определить, на сколько километров увеличилась бы высота и дальность полета, если бы снаряд не испытывал сопротивления воздуха.



Р е ш е н и е



Рассмотрим движение снаряда под действием силы тяжести $m\bar{g}$ без учета сил сопротивления. Покажем его в произвольном положении в системе координат Oxy (см. рисунок). Запишем основное уравнение движения в проекции на выбранные оси:

$$m\ddot{x} = 0, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg. \quad (2)$$

Решим дифференциальное уравнение (1):

$$\dot{x} = C_1. \quad (3)$$

Введем замену: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int dx = \int C_1 dt$$

и получим

$$x = C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Подставим начальные условия: $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha_0$, в уравнения (3) и (4) и найдем C_1 и C_2: $\dot{x}_0 = C_1 = v_0 \cos\alpha_0$; $x_0 = 0 = C_2$.
Тогда

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \quad (5)$$

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha_0. \quad (6)$$

Решим дифференциальное уравнение (2). Запишем его в виде

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g.$$

Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int d\dot{y} = \int -g dt$$

и получим

$$\dot{y} = -gt + C_3. \quad (7)$$

Введем замену: $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, разделим переменные и проинтегрируем выражение (7):

$$\int dy = \int (-gt + C_3)dt.$$

Получим

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \qquad (8)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha_0$, в уравнения (7) и (8), найдем C_3 и C_4: $\dot{y}_0 = C_3 = v_0 \sin\alpha_0$; $y_0 = 0 = C_4$.
Тогда

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0, \qquad (9)$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha_0. \qquad (10)$$

Из уравнения (9) найдем время, когда снаряд упадет на землю, т.е. $y = 0$:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}. \qquad (11)$$

Подставим выражение (11) в формулу (5) и определим дальность полета снаряда:

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}. \qquad (12)$$

Найдем максимальную высоту подъема снаряда. В этом случае согласно формуле (10)

$$\dot{y} = 0 = -gt_1 + v_0 \sin\alpha_0,$$

отсюда

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}.$$

Подставим значение t_1 в формулу (9) и получим

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}. \qquad (13)$$

Из формул (12) и (13) определим L и H при $\alpha_1 = 45°$ и $\alpha_2 = 75°$:

$$L_{\alpha_1} = \frac{700^2 \cdot \sin 90°}{9{,}8} = 50\,000 \text{ (м)},$$

$$L_{\alpha_2} = \frac{700^2 \cdot \sin 150°}{9{,}8} = 25\,000 \text{ (м)},$$

$$H_{\alpha_1} = \frac{700^2 \cdot \sin^2 45°}{2 \cdot 9{,}8} = 12\,500 \text{ (м)},$$

$$H_{\alpha_2} = \frac{700^2 \cdot \sin^2 75°}{2 \cdot 9{,}8} = 23\,300 \text{ (м)}.$$

Найдем увеличение высоты, если $H_{\alpha_1}^{\text{гр}} = 5000$ м, $H_{\alpha_2}^{\text{гр}} = 11\,300$ м (взяты из графиков в условии задачи):

$$\Delta H_{\alpha_1} = H_{\alpha_1} - H_{\alpha_1}^{\text{гр}} = 12\,500 - 5000 = 7500 \text{ (м)},$$

$$\Delta H_{\alpha_2} = H_{\alpha_2} - H_{\alpha_2}^{\text{гр}} = 23\,300 - 11\,300 = 12\,000 \text{ (м)}.$$

Найдем увеличение дальности полета, если $L_{\alpha_1}^{\text{гр}} = 13\,500$ м, $L_{\alpha_2}^{\text{гр}} = 8300$ м (взяты из графиков в условии задачи):

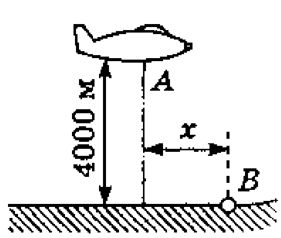
$$\Delta L_{\alpha_1} = L_{\alpha_1} - L_{\alpha_1}^{\text{гр}} = 50\,000 - 13\,500 = 36\,500 \text{ (м)},$$

$$\Delta L_{\alpha_2} = L_{\alpha_2} - L_{\alpha_2}^{\text{гр}} = 25\,000 - 8300 = 16\,700 \text{ (м)}.$$

Ответ: увеличение высоты: 1) 7,5 км; 2) 12 км.
Увеличение дальности: 1) 36,5 км; 2) 16,7 км.

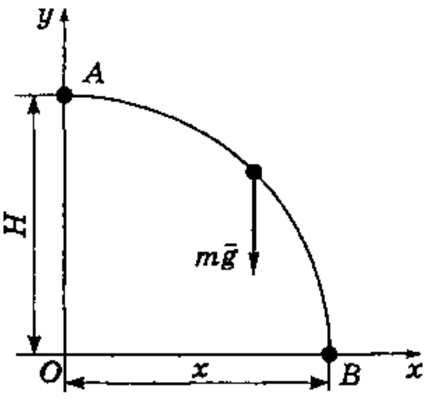
Задача 27.40

Самолет A летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с. На каком расстоянии x, измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки B, должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение

Рассмотрим движение груза под действием силы тяжести $m\bar{g}$. Выберем систему координат Oxy. Ось y проходит через точку A, в которой груз покинул самолет на высоте H. На рисунке покажем груз в произвольном положении. Запишем уравнение движения точки в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = 0, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -mg. \tag{2}$$

Решив уравнение (1), найдем

$$\dot{x} = C_1. \tag{3}$$

Введем замену: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, разделим переменные в уравнении (3) и проинтегрируем:

$$\int dx = \int C_1 dt,$$

получим

$$x = C_1 t + C_2. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) найдем C_1 и C_2, используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 140$ м/с; $\dot{x}_0 = C_1 = 140$, $x_0 = 0 = C_2$.

Тогда выражения (3) и (4) примут вид

$$\dot{x} = 140, \tag{5}$$

$$x = 140t. \tag{6}$$

Теперь решим уравнение (2). Для этого сделаем замену: $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt}$, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int d\dot{y} = \int -g dt.$$

Получим

$$\dot{y} = -gt + C_3. \tag{7}$$

Снова сделаем замену: $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение:

$$\int dy = \int (-gt + C_3) dt.$$

Откуда

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{8}$$

Подставим в выражения (7) и (8) начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $y_0 = H = 4000$ м, и найдем постоянные интегрирования: $\dot{y}_0 = 0 = C_3$, $y_0 = H = C_4$.

Тогда выражения (7) и (8) примут вид

$$\dot{y} = -gt, \tag{9}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + H. \tag{10}$$

По формуле (10) определим время t_1, через которое груз упал на землю, т.е. когда $y = 0$:

$$0 = -\frac{gt_1^2}{2} + H,$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

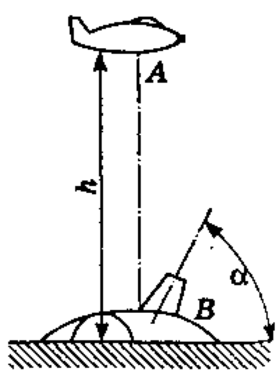
Подставим значение t_1 в формулу (6) и найдем расстояние, на котором должен быть сброшен груз:

$$x = 140\sqrt{\frac{2H}{g}} = 140\sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9{,}8}} = 4000 \text{ (м)}.$$

О т в е т: $x = 4000$ м.

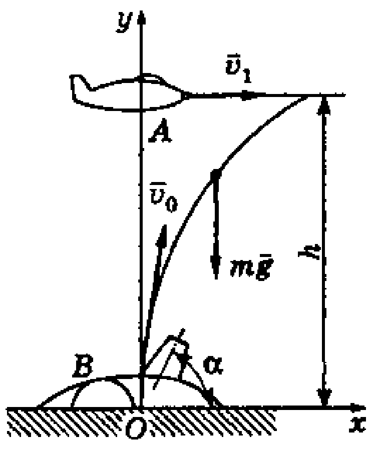
Задача 27.41

Самолет A летит над землей на высоте h с горизонтальной скоростью v_1. Из орудия B произведен выстрел по самолету в тот момент, когда самолет находится на одной вертикали с орудием. Найти: 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость v_0 снаряда для того, чтобы он мог попасть в самолет, и 2) под каким углом α к горизонту должен быть сделан выстрел. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение

Выберем систему координат Oxy. Покажем на рисунке снаряд в произвольном положении на плоскости и силу тяжести $m\bar{g}$, действующую на него. Запишем уравнения движения в проекции на выбранные оси:



$$m\ddot{x} = 0, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg. \qquad (2)$$

Решим дифференциальное уравнение (1):

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = C_1. \qquad (3)$$

Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int dx = \int C_1 dt$$

и получим

$$x = C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

Подставим в выражения (3) и (4) начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha_0$, и найдем постоянные интегрирования: $\dot{x}_0 = C_1 = v_0 \cos\alpha_0$, $x_0 = 0 = C_2$.

Тогда уравнения (3) и (4) примут вид

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha_0, \qquad (5)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha_0. \qquad (6)$$

Решим дифференциальное уравнение (2), записав его в виде

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -g.$$

Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int d\dot{y} = \int -g dt$$

и с учетом замены: $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, получим

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3. \qquad (7)$$

Еще раз разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dy = \int (-gt + C_3)\,dt.$$

Найдем

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \qquad (8)$$

Подставим в выражения (7) и (8) начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha_0$, $y_0 = 0$, и найдем постоянные интегрирования: $\dot{y}_0 = v_0 \times \sin\alpha_0 = C_3$, $y_0 = 0 = C_4$. Тогда выражения (7) и (8) примут вид

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha_0, \qquad (9)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0. \qquad (10)$$

Запишем уравнения движения самолета:

$$x_1 = v_1 t_1,$$

$$y_1 = h.$$

Чтобы снаряд попал в самолет, должны выполняться условия:

$$x_1 = x,\ y_1 = y,\ t_1 = t.$$

Тогда с учетом формулы (6) запишем

$$v_0 t \cos\alpha_0 = v_1 t.$$

Откуда

$$\cos\alpha_0 = \frac{v_1}{v_0}.$$

Время полета снаряда найдем из уравнения (10), приняв $y = h$. Тогда

$$h = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

Откуда

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2hg}{g^2}}.$$

Попадание снаряда в самолет возможно, когда

$$v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2hg > 0,$$

так как

$$\sin^2 \alpha_0 = 1 - \cos^2 \alpha_0 = 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2},$$

то условие попадания перепишем в виде

$$v_0^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right) - 2gh > 0.$$

Откуда

$$v_0^2 - v_1^2 - 2gh > 0 \quad \text{или} \quad v_0^2 \geq v_1^2 + 2gh.$$

О т в е т: 1) $v_0^2 \geq v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos \alpha_0 = v_1 / v_0$.

Задача 27.42

Наибольшая горизонтальная дальность снаряда равна L. Определить его горизонтальную дальность l при угле бросания $\alpha = 30°$ и высоту h траектории в этом случае. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е

Используем уравнения (12) и (13) решения задачи 27.39:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}, \tag{1}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}. \tag{2}$$

Наибольшая дальность полета снаряда достигается при $\sin 2\alpha_0 = 1$ или угле бросания $\alpha_0 = 45°$:

$$L = \frac{v_0^2 \cdot \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{3}$$

При $\alpha_0 = 30°$

$$l = \frac{v_0^2 \sin 60°}{g} = \frac{\sqrt{3}\, v_0^2}{2g}. \tag{4}$$

Из равенства (4) с учетом равенства (3) получим

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} L.$$

При $\alpha_0 = 30°$ из уравнения (2) найдем высоту h траектории снаряда

$$y_{max} = h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 30° = \frac{L}{2} 0{,}5^2 = \frac{L}{8}.$$

Ответ: $l = \frac{\sqrt{3}}{2} L$; $h = \frac{L}{8}$.

Задача 27.43

При угле бросания α снаряд имеет горизонтальную дальность l_α. Определить горизонтальную дальность при угле бросания, равном $\alpha/2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Используем формулу (12) из решения задачи 27.39:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

В рассматриваемом случае $x = l_\alpha$, $\alpha_0 = \alpha$. Тогда эта формула примет вид

$$l_\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1)$$

При $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}$ горизонтальная дальность полета

$$l_{\alpha/2} = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{g}. \qquad (2)$$

Разделим выражение (2) на выражение (1) и получим

$$\frac{l_{\alpha/2}}{l_\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

Откуда

$$l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Ответ: $l_{\alpha/2} = \dfrac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

Задача 27.44

Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если цель обнаружена на расстоянии 32 км, а начальная скорость снаряда $v_0 = 600$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Воспользуемся формулой (12) из решения задачи 27.39:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

В случае попадания снаряда в цель (см. рисунок в решении задачи 27.39)

$$x = L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g},$$

где $L = 32\ 000$ м.

Откуда

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{Lg}{v_0^2} = \frac{32\ 000 \cdot 9{,}8}{600^2} = 0{,}872.$$

Значит,

$$2\alpha_{01} = 60°36', \ \alpha_{01} = 30°18', \ \alpha_{02} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{01} = 59°42'.$$

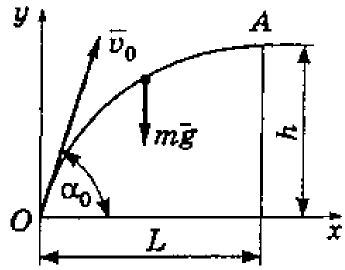
Ответ: $\alpha_{01} \approx 30°18'$; $\alpha_{02} = 59°42'$.

Задача 27.45

Решить предыдущую задачу в том случае, когда цель будет находиться на высоте 200 м над уровнем артиллерийских позиций.

Решение

Воспользуемся формулами (5) и (9) из решения задачи 27.39:



$$x = v_0 t\cos\alpha_0, \tag{1}$$

$$y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Из формулы (1) найдем

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}.$$

Подставим значение t в уравнение (2) и получим

$$y = x\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}. \tag{3}$$

Из формулы (3), с учетом того, что $\dfrac{1}{\cos^2\alpha_0} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0$, найдем

$$y = x\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0). \tag{4}$$

Откуда

$$\operatorname{tg}^2\alpha_0 - \frac{2v_0^2}{gx}\operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0. \tag{5}$$

Подставим численные значения: $v_0 = 600$ м/с, $x = 32\,000$ м, $y = 200$ м, в уравнение (5):

$$\operatorname{tg}^2\alpha_0 - 2{,}293\operatorname{tg}\alpha_0 + 1{,}014 = 0. \tag{6}$$

Решим квадратное уравнение (6): $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0{,}598$, $\alpha_1 = 30°51'$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = 1{,}6956$, $\alpha_2 = 59°31'$.

Ответ: $\alpha_1 = 30°51'$; $\alpha_2 = 59°31'$.

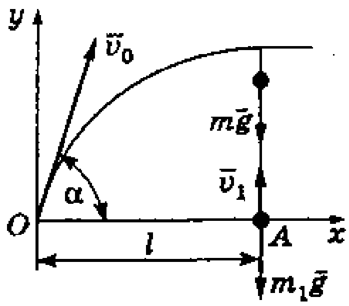
Задача 27.46

Из орудия, находящегося в точке O, произвели выстрел под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Одновременно из точки A, находящейся на расстоянии l по горизонтали от точки O, произвели выстрел вертикально вверх. Определить, с какой начальной скоростью v_1 надо выпустить этот снаряд, чтобы он столкнулся с первым снарядом, если скорость v_0 и точка A лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Воспользуемся формулой (9) из решения задачи 27.39. Для снаряда, вылетевшего из точки, совмещенной с началом координат,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha. \qquad (1)$$



Запишем уравнения движения снаряда, вылетевшего вертикально вверх из точки A (см. рисунок) в проекции на ось y:

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g.$$

Откуда

$$\ddot{y}_1 = -g. \qquad (2)$$

Решим уравнение (2) с учетом замены: $\ddot{y}_1 = \frac{d\dot{y}_1}{dt}$. Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int d\dot{y}_1 = \int -g dt$$

и получим

$$\dot{y}_1 = -gt + C_1. \qquad (3)$$

Подставим в выражение (3) начальные условия: $t = 0$, $\dot{y}_{01} = v_1$, и найдем

$$\dot{y}_{01} = v_1 = C_1.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\dot{y}_1 = -gt + v_1. \qquad (4)$$

Снова сделаем замену, тогда

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = -gt + v_1.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int dy_1 = \int(-gt + v_1)dt,$$

получим

$$y_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t + C_2. \qquad (5)$$

Используя начальные условия: $t=0$, $y_{01} = 0$, из формулы (5) получим

$$C_2 = y_{01} = 0.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$y_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t. \qquad (6)$$

Условие столкновения снарядов, выпущенных одновременно: $y = y_1$. Приравняем выражения (1) и (6):

$$-\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t.$$

Откуда найдем

$$v_1 = v_0 \sin\alpha.$$

При этом расстояние l должно быть меньше $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

Ответ: $v_1 = v_0 \sin\alpha$ (независимо от расстояния l, для $l < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$).

Задача 27.47

Найти геометрическое место положений в момент t материальных точек, одновременно брошенных в вертикальной плоскости из одной точки с одной и той же начальной скоростью v_0 под всевозможными углами к горизонту.

Решение

Воспользуемся формулами (5) и (9) из решения задачи 27.39:

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \qquad (1)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin\alpha_0. \qquad (2)$$

Запишем выражения (1) и (2) в виде

$$\frac{x}{v_0 t} = \cos\alpha_0, \tag{3}$$

$$\frac{\left(y + \frac{gt^2}{2}\right)}{v_0 t} = -\sin\alpha_0. \tag{4}$$

Возведем выражения (3) и (4) в квадрат, сложим и получим

$$\frac{x^2}{v_0^2 t_0^2} + \frac{\left(t + \frac{gt^2}{2}\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1$$

или

$$x^2 + \left(y + \frac{gt^2}{2}\right)^2 = v_0^2 t^2 \text{ — это уравнение окружности.}$$

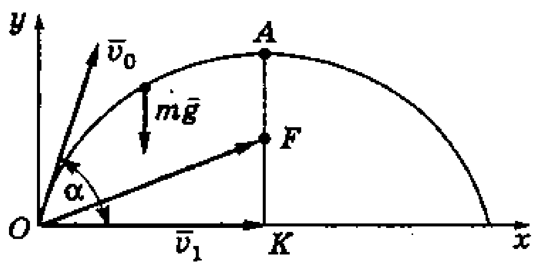
Ответ: окружность радиуса $v_0 t$ с центром, лежащим на вертикали точки бросания, ниже этой точки на $gt^2/2$.

Задача 27.48

Найти геометрическое место фокусов всех параболических траекторий, соответствующих одной и той же начальной скорости v_0 и всевозможным углам бросания.

Решение

Выберем систему координат Oxy и запишем дифференциальные уравнения движения тела в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = 0, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = -mg. \tag{2}$$

Дважды проинтегрируем уравнения (1) и (2) по времени и получим

$$\dot{x} = C_1, \tag{3}$$

$$x = C_1 t + C_2, \tag{4}$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, \qquad (5)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \qquad (6)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha$, в уравнения (3)–(6) и найдем постоянные интегрирования:

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha = C_1,$$

$$x_0 = 0 = C_2,$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha = C_3,$$

$$y_0 = 0 = C_4.$$

Тогда

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha, \qquad (7)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad (8)$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha, \qquad (9)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha. \qquad (10)$$

Из формулы (8) найдем

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

подставим это значение в уравнение (10) и запишем уравнение траектории:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + x\operatorname{tg}\alpha \text{ — это уравнение параболы.} \qquad (11)$$

Вершина параболы — точка A. В этой точке

$$\dot{y} = 0 = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Откуда

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставим значение t_1 в формулы (8) и (10):

$$x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \tag{12}$$

$$y_A = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Радиус параболы находится на прямой AK (см. рисунок):

$$FK = y_A - \frac{P}{2},$$

где P — фокальный параметр,

$$P = \frac{1}{2\left|-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right|} = \frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha.$$

Тогда

$$FK = y_A - \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Согласно рисунку

$$OF^2 = OK^2 + FK^2 = x^2 + y^2,$$

$$OK = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Тогда

$$OF = \sqrt{\left(\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

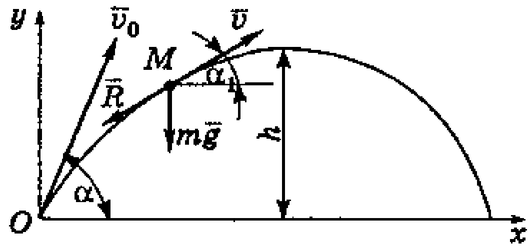
Геометрическое место фокусов параболических траекторий, соответствующих $v_0 = \text{const}$ и всевозможным α, является окружность радиусом $\dfrac{v_0^2}{2g}$.

Ответ: $x^2 + y^2 = \dfrac{v_0^4}{4g^2}$.

Задача 27.49

Тело веса P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления R воздуха. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R = kPv$.

Решение



Покажем действующие на тело в произвольно выбранной точке M силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу сопротивления $\bar{R}$ воздуха. Составим дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = -mg - R\sin\alpha_1,$$

где $\sin\alpha_1 = \dfrac{v_y}{v}$; $R = kmgv$.

Тогда

$$\ddot{y} = -g(1 + kv_y). \qquad (1)$$

Сделаем замену:

$$\dot{y} = v_y[y(t)] \Rightarrow \ddot{y} = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = v_y\frac{dv_y}{dy}$$

и, разделив переменные, представим уравнение (1) в виде

$$\frac{v_y dv_y}{1 + kv_y} = -gdy \Rightarrow \frac{1}{k}\frac{1 + kv_y}{1 + kv_y}dv - \frac{1}{k}\frac{dv_y}{1 + kv_y} = -g\,dy$$

или

$$\frac{1}{k}\int\limits_{v_0\sin\alpha}^{0} dv_y - \frac{1}{k^2}\int\limits_{v_0\sin\alpha}^{0}\frac{d(1 + kv_y)}{1 + kv_y} = -g\int\limits_0^h dy.$$

Здесь учтено, что при достижении наивысшего положения $v_y = 0$:

$$\frac{1}{k}v_y\Big|_{v_0\sin\alpha}^{0} - \frac{1}{k^2}\ln(1 + kv_y)\Big|_{v_0\sin\alpha}^{0} = -gy\Big|_0^h.$$

Тогда

$$-\frac{1}{k}v_0\sin\alpha + \frac{1}{k^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha) = -gh.$$

Откуда найдем наибольшую высоту

$$h = \frac{v_0\sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha).$$

Ответ: $h = \frac{v_0\sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha).$

Задача 27.50

В условиях задачи 27.49 найти уравнения движения точки.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения точки M (см. рисунок к решению задачи 27.49) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -R_x \Rightarrow \frac{mg}{g}\ddot{x} = -kmg\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -kg\dot{x}.$$

С учетом уравнения движения в проекции на ось y [см. формулу (1) решения задачи 27.49], получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение точки под действием силы тяжести и силы сопротивления:

$$\ddot{x} = -kg\dot{x}, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -g(1+k\dot{y}). \tag{2}$$

Решим дифференциальное уравнение (1). Введем замену: $\dot{x} = v_x(t)$, и получим

$$\frac{dv_x}{dt} = -kgv_x.$$

Разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int\limits_{v_0\cos\alpha}^{v_x}\frac{dv_x}{v_x} = -kg\int\limits_0^t dt$$

и получим

$$\ln v_x\Big|_{v_0\cos\alpha}^{v} = -kgt\Big|_0^t \Rightarrow \ln\frac{v_x}{v_0\cos\alpha} = -kgt \Rightarrow v_x = v_0\, e^{-kgt}\cos\alpha.$$

Сделаем замену: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = v_0\, e^{-kgt}\cos\alpha.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это выражение:

$$\int\limits_{x_0=0}^{x} dx = v_0\cos\alpha\int\limits_0^t e^{-kgt}dt.$$

Откуда

$$x = -\frac{v_0\cos\alpha}{kg}e^{-kgt}\Big|_0^t = \frac{v_0\cos\alpha}{kg}(1-e^{-kgt}).$$

Решим уравнение (2). Введем замену: $\dot{y} = u(t)$, тогда

$$\frac{du}{dt} = -g(1+ku) \Rightarrow \frac{du}{1+ku} = -gdt.$$

Проинтегрируем:

$$\frac{1}{k}\int\limits_{v_0\sin\alpha}^{u}\frac{d(1+ku)}{1+ku} = -g\int\limits_0^t dt$$

и получим

$$\frac{1}{k}\ln(1+ku)\Big|_{v_0\sin\alpha}^{u} = -gt\Big|_0^t.$$

Откуда

$$\ln\frac{1+ku}{1+kv_0\sin\alpha} = -kgt,$$

$$u = -\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)e^{-kgt}.$$

Так как $u = \dfrac{dy}{dt}$, то получим

$$\int_{y_0=0}^{y} dy = -\frac{1}{k}\int_0^t dt + \left(\frac{1}{k} + v_0 \sin\alpha\right)\int_0^t e^{-kgt}dt.$$

Проинтегрируем и найдем

$$y = -\frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + v_0 \sin\alpha\right)e^{-kgt}\Big|_0^t - \frac{1}{k}t\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k} + v_0 \sin\alpha\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

Ответ: $x = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt})$; $y = \dfrac{1}{kg}\left(\dfrac{1}{k} + v_0 \sin\alpha\right)(1 - e^{-kgt}) - \dfrac{t}{k}$.

Задача 27.51

При условиях задачи 27.49 определить, на каком расстоянии s по горизонтали точка достигает наивысшего положения.

Решение

Определим время подъема точки на высоту h. Из решения дифференциального уравнения (2) задачи 27.50 при условии, что в наивысшей точке подъема $v_y = 0$, найдем

$$\frac{du}{dt} = -g(1 + ku) \Rightarrow \frac{1}{k}\int_{v_0 \sin\alpha}^{0} \frac{d(1+ku)}{1+ku} = -g\int_0^{t_1} dt \Rightarrow \frac{1}{k}\ln(1+ku)\Big|_{v_0 \sin\alpha}^{0} =$$

$$= -gt\Big|_0^{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(1 + kv_0 \sin\alpha)}{kg}.$$

При решении задачи 27.50 получили

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt}).$$

Тогда

$$s = x(t = t_1) = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left[1 - e^{-\ln(1+kv_0 \sin\alpha)}\right] = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}\left[1 - \frac{1}{(1 + kv_0 \sin\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g(1 + kv_0 \sin\alpha)} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}.$$

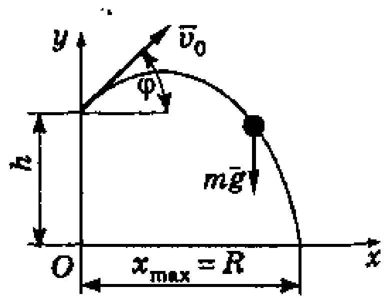
Ответ: $s = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + kv_0 \sin\alpha)}$.

Задача 27.52

В вертикальной трубе, помещенной в центре круглого бассейна и наглухо закрытой сверху, на высоте 1 м сделаны отверстия в боковой поверхности трубы, из которых выбрасываются наклонные струи воды под различными углами φ к горизонту ($\varphi < \pi/2$); начальная скорость струи равна $v_0 = \sqrt{\dfrac{4g}{3\cos\varphi}}$ м/с, где g — ускорение силы тяжести; высота трубы равна 1 м. Определить наименьший радиус R бассейна, при котором вся выбрасываемая трубой вода падает в бассейн, как бы мала ни была высота его стенки.

Решение

Выберем систему координат Oxy. Составим дифференциальные уравнения движения воды под действием силы тяжести $m\bar{g}$ (см. рисунок) в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g.$$

Решим полученные уравнения при начальных условиях:

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_{0x} = v_0 \cos\varphi;$$

$$y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = v_{0y} = v_0 \sin\varphi$$

и найдем

$$\dot{x} = v_0 \cos\varphi.$$

$$\dot{y} = v_0 \sin\varphi - gt.$$

Откуда

$$x = v_0 t \cos\varphi, \tag{1}$$

$$y = h + v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Из формулы (1) найдем

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}.$$

Подставляя это значение в уравнение (2), получим

$$y = h + x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi}.$$

По условию задачи $v_0^2 = \dfrac{4g}{3\cos\varphi}$, тогда

$$y = h + x \operatorname{tg}\varphi - \frac{3x^2}{8\cos\varphi}. \tag{3}$$

Определить $r_{\min}$ можно двумя способами.

1-й способ. Из формулы (3) после преобразований получим

$$x \sin\varphi + (h - y)\cos\varphi = \frac{3}{8}x^2. \tag{4}$$

Сделаем подстановку:

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$(h - y)\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2x \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{8}x^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

или

$$\left(\frac{3}{8}x^2+h-y\right)\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-2x\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}+\frac{3}{8}x^2-h+y=0.$$

Решения этого квадратного уравнения

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-\frac{9}{64}x^4+(h-y)^2}}{\frac{3}{8}x^2+h-y}.$$

Реальное значение $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$ возможно, когда $x^2+(h-y)^2\geq\frac{9}{64}x^4$; $\frac{9}{64}x^4=$ $=x^2+(h-y)^2$ — уравнение параболы.

При $y=0$ и $h=1$ получим

$$\frac{9}{64}x^4-x^2-1=0.$$

Введем обозначение $x^2=Z$ и решим квадратное уравнение:

$$\frac{9}{64}Z^2-Z-1=0,$$

$$Z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{9}{16}}}{\frac{9}{32}}.$$

Так как $Z=x^2\geq 0$, то

$$Z=\frac{32}{9}\left(1+\frac{5}{4}\right)=8.$$

Следовательно,

$$R=x_{\max}=\sqrt{Z}=\sqrt{8}=2{,}83\ (\text{м}).$$

2-й способ. Найдем решение огибающей семейства парабол как функцию угла φ.

Так как согласно формуле (3) $\frac{dy}{d\varphi}=0$, то

$$\frac{x}{\cos^2\varphi}-\frac{3x^2}{8}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=0,$$

где $\cos\varphi\neq 0$, так как $\varphi<\frac{\pi}{2}$ — по условию.

Тогда

$$\sin\varphi = \frac{8}{3x}, \ \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}.$$

Подставим это значение $\sin\varphi$ в формулу (3) при условии, что $x = x_{max} = R$, $y = 0$, $h = 1$, получим

$$0 = 1 + \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} - \frac{3}{8}R^2\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}},$$

$$0 = 1 + \frac{R\dfrac{8}{3R}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{3R}\right)^2}} - \frac{3}{8}R^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{3R}\right)^2}},$$

$$\sqrt{1-\frac{64}{9R^2}} = \frac{3}{8}R^2 - \frac{8}{3}$$

или

$$\sqrt{1-\frac{64}{9R^2}} = \frac{3}{8}R^2\left(1-\frac{64}{9R^2}\right),$$

$$\frac{8}{3R^2} = \sqrt{1-\frac{64}{9R^2}},$$

$$\frac{8}{R} = \sqrt{9R^2-64},$$

$$9R^4 - 64R^2 - 64 = 0.$$

Введем обозначение $R^2 = Z$ и получим квадратное уравнение

$$9Z^2 - 64Z - 64 = 0.$$

Откуда

$$Z = \frac{64+\sqrt{64^2+4\cdot 9\cdot 64}}{2\cdot 9} = 8,$$

тогда

$$R = \sqrt{Z} = \sqrt{8} = 2{,}83 \text{ (м)}.$$

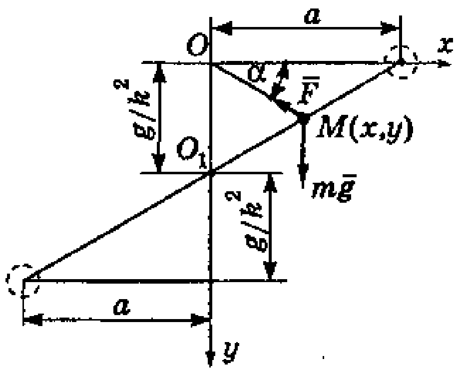
Ответ: $R = 2{,}83$ м.

Задача 27.53

Определить движение тяжелой материальной точки, масса которой равна m, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Движение происходит в пустоте; сила притяжения на единице расстояния равна k^2m; в момент $t = 0$: $x = a$, $\dot{x} = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$, причем ось Oy направлена по вертикали вниз.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси x и y (см. рисунок):



$$m\ddot{x} = -F\cos\alpha,$$

$$m\ddot{y} = -F\sin\alpha + mg.$$

Так как $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$, $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$, $F = k^2mr$,

где r — расстояние от точки до неподвижного центра, то

$$m\ddot{x} = -k^2mx,$$

$$m\ddot{y} = -k^2mr\frac{y}{r} + mg$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2y = g. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

$$\dot{x} = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt.$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = a$, $C_2 = 0$. Тогда

$$x = a\cos kt. \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y} = C_3\cos kt + C_4\sin kt$ — решение однородного уравнения, $y^* = A$ — частное решение.

Подставив y^* в уравнение (2), получим

$$k^2 A = g \Rightarrow A = \frac{g}{k^2}.$$

Итак,

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{g}{k^2},$$

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$, найдем постоянные интегрирования: $C_3 = -\frac{g}{k^2}$, $C_4 = 0$. Тогда

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt). \qquad (4)$$

Из равенства (3) найдем: $\cos kt = \frac{x}{a}$, подставив это выражение в равенство (4), получим уравнение траектории:

$$y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a} x \text{ — прямая,}$$

где $|x| \le a$, так как $|\cos kt| \le 1$.

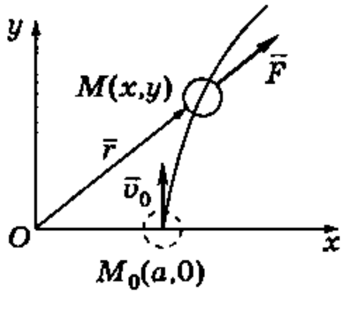
Ответ: гармоническое колебательное движение: $x = a \cos kt$, $y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$ по отрезку прямой $y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a} x$, $|x| \le a$.

Задача 27.54

Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O, изменяющейся по закону $\bar{F} = k^2 m \bar{r}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(a, 0)$ и имела скорость v_0, направленную параллельно оси y. Определить траекторию точки.

Решение

Выберем систему координат Oxy (см. рисунок). Запишем дифференциальные уравнения движения точки в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = mk^2 x,$$

$$m\ddot{y} = mk^2 y$$

или

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} - k^2 y = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt,$$

$$\dot{x} = C_1 k \operatorname{sh} kt + C_2 k \operatorname{ch} kt,$$

где $\operatorname{ch} kt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$ — гиперболический косинус, $\operatorname{sh} kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ — гиперболический синус.

Используя начальные условия: при $t = 0$ $x = a$, $\dot{x} = 0$, найдем C_1 и C_2: $a = C_1$, $0 = C_2$. Тогда

$$x = a \operatorname{ch} kt. \tag{3}$$

Аналогично

$$y = C_3 \operatorname{ch} kt + C_4 \operatorname{sh} kt,$$

$$\dot{y} = C_3 k \operatorname{sh} kt + C_4 k \operatorname{ch} kt.$$

Постоянные интегрирования: $0 = C_3$, $v_0 = C_4 k$. Тогда

$$y = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) найдем: $\operatorname{ch} kt = \dfrac{x}{a}$, $\operatorname{sh} kt = \dfrac{ky}{v_0}$.

Используя равенство

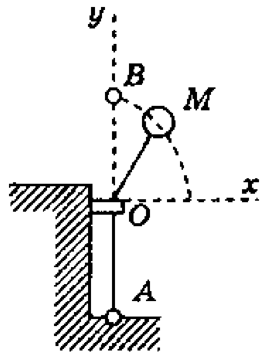
$$\operatorname{ch}^2 kt - \operatorname{sh}^2 kt = 1,$$

получим уравнение траектории в координатной форме:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$$ — уравнение гиперболы.

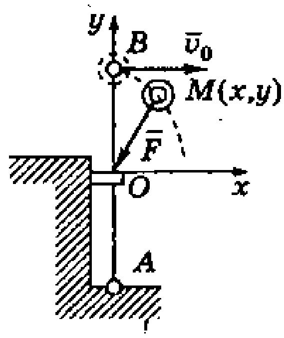
Ответ: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ (гипербола).

Задача 27.55



Упругая нить, закрепленная в точке A, проходит через неподвижное гладкое кольцо O; к свободному концу ее прикреплен шарик M, масса которого равна m. Длина невытянутой нити $l = AO$; для удлинения нити на 1 м нужно приложить силу, равную k^2m. Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарику скорость $\bar{v}_0$, перпендикулярную прямой AB. Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению.

Решение



Выберем систему координат Oxy (см. рисунок). Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекции на ось x и y:

$$m\ddot{x} = -mk^2x,$$

$$m\ddot{y} = -mk^2y$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2y = 0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

$$\dot{x} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, найдем: $0 = C_1$, $v_0 = kC_2$. Тогда

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt. \qquad (3)$$

Аналогично решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_3\cos kt + C_4\sin kt,$$

$$\dot{y} = -kC_3\sin kt + kC_4\sin kt.$$

Исходя из начальных условий: $t=0$, $y_0=l$, $\dot{y}_0=0$, найдем постоянные интегрирования: $l=C_3$, $0=kC_4$. Тогда

$$y = l\cos kt. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) найдем: $\sin kt = \dfrac{kx}{v_0}$, $\cos kt = \dfrac{y}{l}$.

Воспользуемся равенством $\sin^2 kt + \cos^2 kt = 1$ и получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$\frac{k^2x^2}{v_0^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1 \text{ — эллипс.}$$

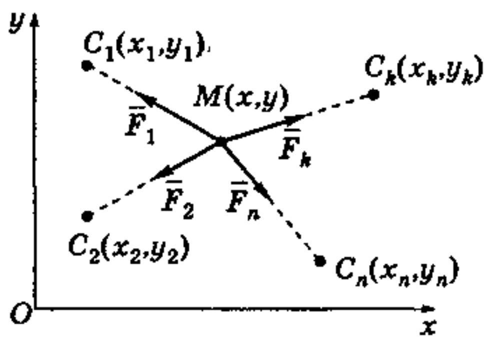
О т в е т: эллипс $\dfrac{k^2x^2}{v_0^2} + \dfrac{y^2}{l^2} = 1$.

Задача 27.56

Точка M, масса которой равна m, притягивается к n неподвижным центрам $C_1, C_2, ..., C_n$ силами, пропорциональными расстояниям; сила притяжения точки M к центру C_i $(i=1,2,...,n)$ равна $k_i m \cdot \overline{MC_i}$ Н; точка M и притягивающие центры лежат в плоскости Oxy. Определить траекторию точки M, если при $t=0$: $x=x_0$, $y=y_0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0$. Действием силы тяжести пренебречь.

Р е ш е н и е

Выберем систему координат Oxy. Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекции на оси x и y (см. рисунок):



$$m\ddot{x} = -\sum_{i=1}^{n} mk_i(x - x_i),$$

$$m\ddot{y} = -\sum_{i=1}^{n} mk_i(y - y_i)$$

или

$$\ddot{x} + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)x = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)y = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos\sqrt{k}\,t + C_2 \sin\sqrt{k}\,t$; $x^* = a \Rightarrow a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i}$.

Следовательно,

$$x = C_1 \cos\sqrt{k}\,t + C_2 \sin\sqrt{k}\,t + a,$$

$$\dot{x} = -C_1\sqrt{k}\sin\sqrt{k}\,t + C_2\sqrt{k}\cos\sqrt{k}\,t,$$

где $k = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$; $a = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i$.

Используя начальные условия: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, найдем C_1 и C_2:

$$x_0 = C_1 + a \Rightarrow C_1 = x_0 - a;$$

$$0 = C_2\sqrt{k} \Rightarrow C_2 = 0.$$

В результате получим

$$x = (x_0 - a)\cos\sqrt{k}\,t + a. \tag{3}$$

Аналогично найдем решение уравнения (2):

$$y = C_3 \cos\sqrt{k}\,t + C_4 \sin\sqrt{k}\,t + b;$$

$$\dot{y} = -C_3\sqrt{k}\sin\sqrt{k}\,t + C_4\sqrt{k}\cos kt,$$

где $b = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i y_i$.

Используя начальные условия: при $t = 0$ $y = y_0$, $\dot{y} = v_0$, определим C_3 и C_4:

$$y_0 = C_3 + b \Rightarrow C_3 = y_0 - b;$$

$$v_0 = C_4\sqrt{k} \Rightarrow C_4 = \frac{v_0}{\sqrt{k}}.$$

Тогда

$$y = (y_0 - b)\cos\sqrt{k}\,t + \frac{v_0}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}\,t + b. \tag{4}$$

Выразим из равенств (3) и (4)

$$\cos\sqrt{k}\,t = \frac{x-a}{a_0-a},$$

$$\sin\sqrt{k}\,t = \left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]\frac{\sqrt{k}}{v_0}.$$

Воспользуемся равенством $\sin^2\sqrt{k}\,t+\cos^2\sqrt{k}\,t=1$ и получим уравнение траектории точки M в координатной форме:

$$\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2\frac{k}{v_0^2}=1 \text{ — эллипс.}$$

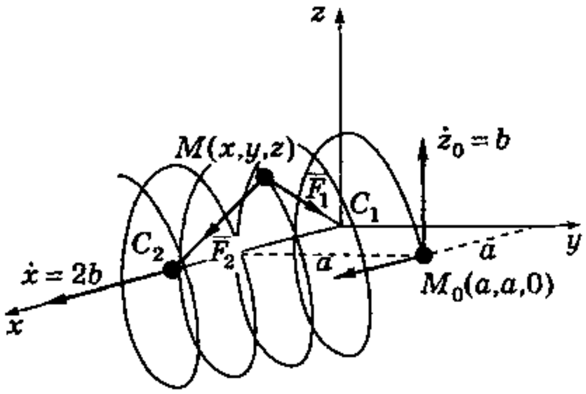
О т в е т: эллипс $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2\frac{k}{v_0^2}=1,$

где $a=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}k_i x_i$; $b=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}k_i y_i$; $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$.

Задача 27.57

Точка M притягивается к двум центрам C_1 и C_2 силами, пропорциональными расстояниям: $km\cdot\overline{MC_1}$ и $km\cdot\overline{MC_2}$; центр C_1 неподвижен и находится в начале координат, центр C_2 равномерно движется по оси Ox, так что $x_2=2(a+bt)$. Найти траекторию точки M, полагая, что в момент $t=0$ точка M находится в плоскости xy, координаты ее $x=y=a$ и скорость имеет проекции $\dot{x}=\dot{z}=b$, $\dot{y}=0$.

Р е ш е н и е



Выберем систему координат $Oxyz$. Составим дифференциальные уравнения движения точки под действием сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, направленных к центрам C_1 и C_2, в проекции на выбранные оси:

$$m\ddot{x}=km(x_2-x)-kmx,$$

$$m\ddot{y}=-2kmy,$$

$$m\ddot{z}=-2kmz.$$

Эти уравнения перепишем в виде

$$\ddot{x}+2kx=2k(a+bt), \tag{1}$$

$$\ddot{y}+2ky=0, \tag{2}$$

$$\ddot{z}+2kz=0. \tag{3}$$

Решение дифференциального уравнения (1) представим в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}=C_1\cos\sqrt{2k}\,t+C_2\sin\sqrt{2k}\,t$; $x^*=A+Bt$.

Подставим x^* в уравнение (1) и найдем

$$2k(A+Bt)=2k(a+bt),$$

откуда $A=a$, $B=b$, т.е. $x^*=a+bt$, и тогда

$$x=C_1\cos\sqrt{2k}\,t+C_2\sin\sqrt{k}\,t+a+bt, \tag{4}$$

$$\dot{x}=-C_1\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}\,t+C_2\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}\,t+b.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия: $t=0$, $x_0=a$, $\dot{x}_0=b$:

$$a=C_1+a\Rightarrow C_1=0,$$

$$b=C_2\sqrt{2k}+b\Rightarrow C_2=0.$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$x=a+bt. \tag{5}$$

Аналогично ищем решения уравнений (2) и (3):

$$y=C_3\cos\sqrt{2k}\,t+C_4\sin\sqrt{2k}\,t,$$

$$\dot{y}=-C_3\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}\,t+C_4\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}\,t,$$

так как $C_3=0$ и $C_4=a$, то

$$y=a\cos\sqrt{2k}\,t; \tag{6}$$

$$z=C_5\cos\sqrt{2k}\,t+C_6\sin\sqrt{2k}\,t,$$

$$\dot{z}=-C_5\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}\,t+C_6\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}\,t,$$

поскольку $C_5=0$, а $C_6=\dfrac{b}{\sqrt{2k}}$, то

$$z=\frac{b}{\sqrt{2k}}\sin\sqrt{2k}\,t. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) найдем

$$\cos\sqrt{2k}\,t=\frac{y}{a};\ \sin\sqrt{2k}\,t=\frac{z\sqrt{2k}}{b}.$$

Возведем обе части полученных соотношений в квадрат и просуммируем их. С учетом равенства $\sin^2\sqrt{2k}\,t+\cos^2\sqrt{2k}\,t=1$ получим уравнение траектории движения точки M:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{2kz^2}{b^2}=1$$ — эллиптический цилиндр.

Из уравнений (6) и (7) найдем период:

$$\sqrt{2k}(t+T)=\sqrt{2k}\,t+2\pi\Rightarrow T=\pi\sqrt{\frac{2}{k}},$$

$$\dot{x}_0=b\Rightarrow x_h=\dot{x}_0T=\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$$ — шаг винтовой линии.

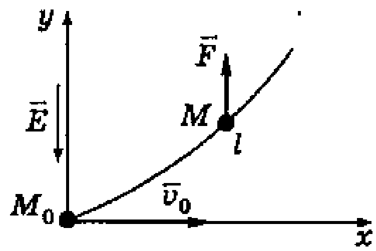
О т в е т: винтовая линия, расположенная на эллиптическом цилиндре, ось которого есть Ox, а уравнение имеет вид $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{2kz^2}{b^2}=1$; шаг винта равен: $\pi b\sqrt{\dfrac{2}{k}}$.

Задача 27.58

Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное электрическое поле напряжения $\overline{E}$ со скоростью v_0, перпендикулярной направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $\overline{F}=e\overline{E}$, направленная в сторону, противоположную напряжению $\overline{E}$; действием силы тяжести пренебречь.

Решение

Выберем декартову систему координат с началом в точке M_0. Составим дифференциальные уравнения движения точки под действием силы $\overline{F} = e\overline{E}$ в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = Ee$$

или

$$\ddot{x} = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{Ee}{m}. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 t + C_2,$$

$$\dot{x} = C_1.$$

Используя начальные условия: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, определим $C_1 = v_0$ и $C_2 = 0$. Тогда

$$x = v_0 t. \qquad (3)$$

Решим уравнение (2). Введем замену: $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt}$, разделим переменные и получим

$$d\dot{y} = \frac{eE}{m} dt.$$

Возьмем определенный интеграл:

$$\int\limits_{\dot{y}(0)=0}^{\dot{y}} = \frac{eE}{m}\int\limits_0^t dt \Rightarrow \dot{y} - \dot{y}(0) = \frac{eE}{m} dt\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{eE}{m} t.$$

Снова введем замену: $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int\limits_{y(0)}^{y} dy = \frac{eE}{m}\int\limits_0^t t dt$$

и найдем

$$y = \frac{eE}{2m} t^2. \tag{4}$$

Из уравнения (3) найдем $t = \frac{x}{v_0}$, подставим это значение в формулу (4) и получим уравнение траектории частицы в координатной форме:

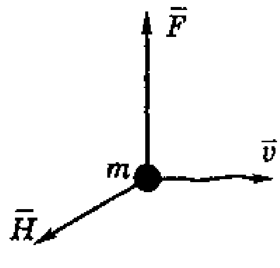
$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 \text{ — парабола.}$$

Если уравнение параболы записать в канонической форме $x^2 = 2py$, то ее параметр $p = \frac{mv_0^2}{eE}$.

Ответ: парабола, параметр которой равен $mv_0^2 / (eE)$.

Задача 27.59

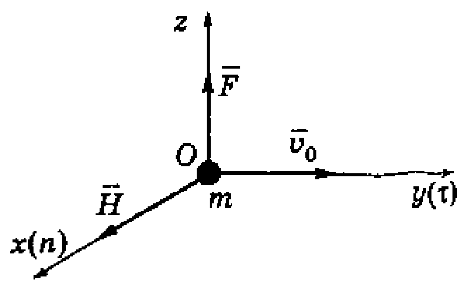
Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное магнитное поле напряженности $\overline{H}$, со скоростью $\bar{v}_0$, перпендикулярной направлению напряженности поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что на частицу действует сила $\overline{F} = -e(\bar{v} \times \overline{H})$.



При решении удобно использовать уравнения движения точки в проекциях на касательную и на главную нормаль к траектории.

Решение

Для решения задачи выберем декартову систему координат (см. рисунок), плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью $mn\tau$, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Тогда



$$\overline{F} = -e(\bar{v} \times \overline{H}) = -e \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — орты осей x, y, z; $H_x = H$, $H_y = 0$, $H_z = 0$.

Отсюда определим

$$F_x = -eH\dot{y},$$

$$F_y = -eH\dot{x},$$

$$F_z = 0.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в проекции на оси x, y и z имеют вид

$$m\ddot{x} = -eH\dot{y},$$

$$m\ddot{y} = eH\dot{x},$$

$$m\ddot{z} = 0$$

или

$$\ddot{x} + k^2\dot{y} = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} - k^2\dot{x} = 0, \tag{2}$$

$$\ddot{z} = 0, \tag{3}$$

где $k^2 = \dfrac{eH}{m}$.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -k^2\frac{dy}{dt}.$$

Тогда

$$\dot{x} = -k^2 y + C_1.$$

При $t = 0$: $\dot{x}_0 = v_0$, $y_0 = 0$, следовательно, $C_1 = v_0$. С учетом значения C_1 запишем

$$\dot{x} = v_0 - k^2 y. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в уравнение (2):

$$\ddot{y} - k^2(v_0 - k^2 y) = 0$$

или

$$\ddot{y} - k^4 y = k^2 v_0. \tag{5}$$

Решение неоднородного уравнения (5) ищем в виде

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ — решение однородного уравнения, $\bar{y} = C_2 \sin k^2 t + C_3 \cos k^2 t$.

Частное решение уравнения (5): $y^* = C_4$; $k^4 C_4 = k^2 v_0$. Отсюда $C_4 = \dfrac{v_0}{k^2}$.

Тогда полное решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_2 \sin k^2 t + C_3 \cos k^2 t + \frac{v_0}{k^2}. \tag{6}$$

Для определения постоянных интегрирования C_2 и C_3 найдем производную по времени

$$\dot{y} = C_2 k^2 \cos k^2 t - C_3 k^2 \sin k^2 t. \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) при начальных условиях движения: $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, получим: $C_2 = 0$, $C_3 = -\dfrac{v_0}{k^2}$. Тогда уравнение движения частицы вдоль оси y

$$y = \frac{v_0}{k^2}(1 - \cos k^2 t). \tag{8}$$

Продифференцируем уравнение (8) по времени и подставим полученное выражение в уравнение (1):

$$\dot{y} = v_0 \sin k^2 t, \tag{9}$$

$$\ddot{x} = -k^2 v_0 \sin k^2 t. \tag{10}$$

Сделаем замену: $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, разделим переменные в уравнении (10) и проинтегрируем:

$$d\dot{x} = -k^2 v_0 \sin k^2 t dt,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos k^2 t + C_4. \tag{11}$$

Разделим переменные в уравнении (11) и проинтегрируем:

$$dx = v_0 \cos k^2 t dt + C_4 dt,$$

$$x = \frac{v_0}{k^2} \sin k^2 t + C_4 t + C_5. \tag{12}$$

Найдем постоянные интегрирования C_4 и C_5 из уравнений (11) и (12) с учетом начальных условий движения: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$; $C_4 = 0$, $C_5 = 0$. Тогда уравнение движения частицы вдоль оси x примет вид

$$x = \frac{v_0}{k^2}\sin k^2 t. \tag{13}$$

При интегрировании уравнения (3) с учетом начальных условий: $t = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_0$, получим $z = 0$, т.е. частица будет двигаться в плоскости Oxy.

Найдем уравнение траектории в координатной форме, исключив из уравнений (8) и (13) $\cos k^2 t$ и $\sin k^2 t$:

$$-\cos k^2 t = \frac{k^2}{v_0}\left(y - \frac{v_0}{k^2}\right), \quad \sin k^2 t = \frac{k^2 x}{v_0}.$$

Возведем эти выражения в квадрат и сложим, получим

$$\frac{k^4 x^2}{v_0^2} + \frac{k^4}{v_0^2}\left(y - \frac{v_0}{k^2}\right)^2 = 1,$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{k^2}\right)^2 = \frac{v_0^2}{k^4}$$

— окружность радиусом $R = \dfrac{v_0}{k^2} = \dfrac{mv_0}{eH}$, центр которой смещен по оси y в положительном направлении оси на величину R в плоскости Oxy.

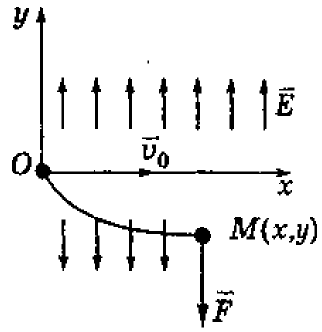
Ответ: окружность радиуса $mv_0 / (eH)$.

Задача 27.60

Определить траекторию движения частицы массы m, несущей заряд e электричества, если частица вступила в однородное электрическое поле с переменным напряжением $E = A\cos kt$ (A и k — заданные постоянные) со скоростью $\bar{v}_0$, перпендикулярной направлению напряжения поля; влиянием силы тяжести пренебречь. В электрическом поле на частицу действует сила $\bar{F} = -e\bar{E}$.

Решение

Выберем декартову систему координат Oxy (начало координат — точку O совместим с начальным положением частицы). Составим дифференциальное уравнение движения частицы M в электрическом поле под действием силы $\overline{F}$ (см. рисунок) в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = -eA\cos kt$$

или

$$\ddot{x} = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -\frac{eA}{m}\cos kt. \tag{2}$$

Решим уравнение (1):

$$\dot{x} = C_1,$$

$$x = C_1 t + C_2.$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$. Тогда

$$x = v_0 t. \tag{3}$$

Решим уравнение (2). Сделаем замену: $\ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt}$, разделим переменные, возьмем определенный интеграл

$$\int\limits_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}} d\dot{y} = \frac{-eA}{m}\int\limits_0^t \cos kt\,dt \Rightarrow \dot{y}\Big|_0^{\dot{y}} = \frac{-eA}{mk}\sin kt\Big|_0^t$$

и получим

$$\dot{y} = \frac{-eA}{mk}\sin kt.$$

Аналогично определим y:

$$\int\limits_{y(0)}^{y} dy = \frac{-eA}{mk}\int\limits_0^t \sin kt\,dt.$$

Откуда

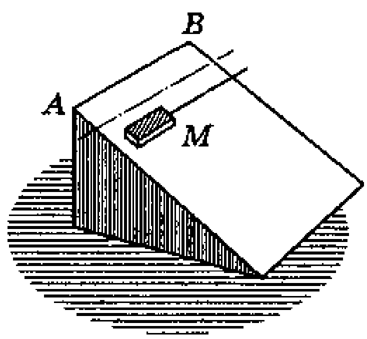
$$y=\frac{-eA}{mk^2}(1-\cos kt). \qquad (4)$$

Из уравнения (3) найдем $t=\frac{x}{v_0}$, подставим это значение в формулу (4). Уравнение траектории примет вид

$$y=-\frac{eA}{mk^2}\left(1-\cos\frac{kx}{v_0}\right).$$

Ответ: $y=-\frac{eA}{mk^2}\left(1-\cos\frac{kx}{v_0}\right)$, где ось y направлена по напряжению поля, начало координат совпадает с начальным положением точки в поле.

Задача 27.61



По негладкой наклонной плоскости движется тяжелое тело M, постоянно оттягиваемое посредством нити в горизонтальном направлении, параллельно прямой AB. С некоторого момента движение тела становится прямолинейным и равномерным, причем из двух взаимно перпендикулярных составляющих скорости та, которая направлена параллельно AB, равна 12 м/с. Определить вторую составляющую v_1 скорости, а также натяжение T нити при следующих данных: уклон плоскости $\operatorname{tg}\alpha = 1/30$, коэффициент трения $f=0{,}1$, масса тела 30 кг.

Решение

Возможны два способа решения.

Первый способ. Так как материальная точка движется по наклонной плоскости прямолинейно и равномерно, то действующие на нее в плоскости силы $\overline{T}$, $m\overline{g}\sin\alpha$ и $\overline{F}_{тр}$ (рис. 1) образуют уравновешенную систему.

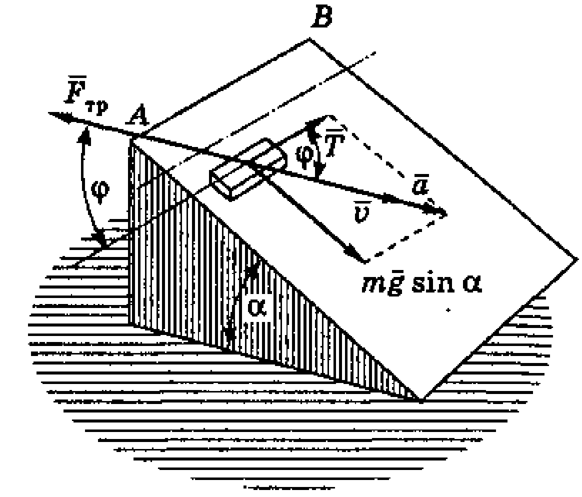


Рис. 1

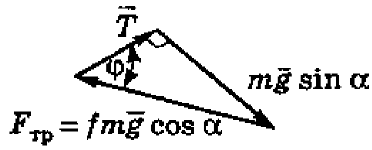


Рис. 2

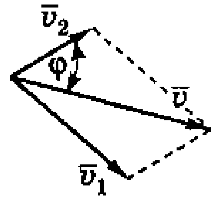


Рис. 3

Из силового треугольника (рис. 2) найдем натяжение нити:

$$T=\sqrt{(fmg\cos\alpha)^2-(mg\sin\alpha)^2}=mg\sqrt{f^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=mg\sqrt{\frac{f^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=mg\sqrt{\frac{f^2-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=30\cdot 9{,}8\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{100}-\frac{1}{900}}{1+\frac{1}{900}}}=27{,}7\ (\text{Н}).$$

Определим вторую составляющую скорости (рис. 3):

$$v_1=v_2\operatorname{tg}\varphi=v_2\frac{mg\sin\alpha}{T}=v_2\sin\alpha\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{f^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}=v_2\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{f^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}=$$

$$=12\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{900}}{\frac{1}{100}-\frac{1}{900}}}=4{,}24\ (\text{м/с}).$$

Второй способ. Запишем дифференциальные уравнения движения тела в проекциях на оси x и y (рис. 4):

$$m\ddot{x}=mg\sin\alpha-F_{\text{тр}}\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}=T-F_{\text{тр}}\cos\varphi, \qquad (2)$$

где сила трения $F_{\text{тр}}=fN=fmg\cos\alpha$;

$$\sin\varphi=\frac{\dot{x}}{v}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}};\ \cos\varphi=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}.$$

Тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) примут вид

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - fg\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\cos\alpha, \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = T - fmg\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\cos\alpha. \quad (4)$$

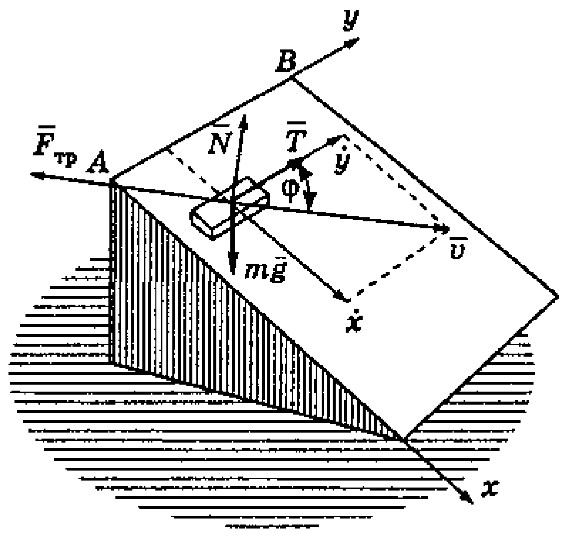


Рис. 4

Так как с некоторого момента движение равномерное и прямолинейное, то $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = 0$. Тогда из уравнения (3) найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$

или

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{f^2\dot{x}^2}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{\dot{y}^2\operatorname{tg}^2\alpha}{f^2-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

где $\dot{y} = 12$ м/с; $\operatorname{tg}\alpha = 1/30$; $f = 0{,}1$.

С учетом этого

$$\dot{x} = v_1 = \sqrt{\frac{144\cdot 1/900}{1/100 - 1/900}} = 4{,}24 \text{ (м/с)}.$$

Так как $\ddot{y} = 0$, то из формулы (4) определим натяжение нити

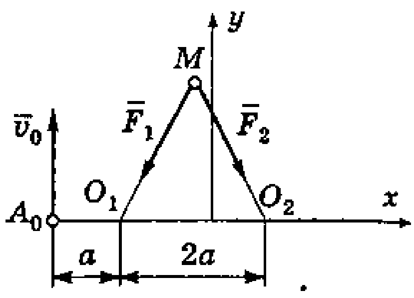
$$T = fmg\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\cos\alpha = \frac{0{,}1\cdot 30\cdot 9{,}8\cdot 12}{\sqrt{4{,}24^2+12^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{36\cdot 9{,}8}{\sqrt{17{,}98+144}}\frac{30}{\sqrt{901}} = 27{,}7 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $v_1 = 4{,}24$ см/с; $T = 27{,}7$ Н.

Задача 27.62

Точка M массы m находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 (см. рисунок). Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2. Коэффициент пропорциональности одинаков и равен c. Движение начинается в точке A_0 со скоростью v_0, перпендикулярной линии O_1O_2. Определить, какую траекторию опишет точка M. Найти моменты времени, когда она пересекает направление линии O_1O_2, и вычислить ее координаты в эти моменты времени. Расстояние от точки A_0 до оси y равно $2a$.



Решение

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекции на оси x и y:

$$m\ddot{x} = -c[(x-a)+(x+a)],$$

$$m\ddot{y} = -c(y+y)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{2c}{m}$.

Решение уравнение (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Тогда

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Используя начальные условия: $t=0$, $x_0 = -2a$, $\dot{x}_0 = 0$, определим: $C_1 = -2a$, $C_2 = 0$.

С учетом значений постоянных интегрирования C_1 и C_2 запишем решение уравнения (1):

$$x = -2a\cos kt. \qquad (3)$$

Аналогично решим уравнения (2):

$$y = C_3\cos kt + C_4\sin kt,$$

$$\dot{y} = -C_3 k\sin kt + C_4 k\cos kt.$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, найдем: $C_3 = 0$, $C_4 = \frac{v_0}{k}$. Тогда

$$y = \frac{v_0}{k}\sin kt. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем

$$\cos kt = -\frac{x}{2a}, \qquad (5)$$

$$\sin kt = \frac{ky}{v_0}. \qquad (6)$$

Возведем обе части выражений (5) и (6) в квадрат, сложим их и, учитывая, что $\sin^2 kt + \cos^2 kt = 1$, получим уравнение траектории точки в координатной форме:

$$\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1, \text{ — уравнение эллипса,}$$

где $k = \sqrt{\frac{2c}{m}}$.

Точка будет пересекать линию O_1O_2, т.е. ось x, когда $y = 0$. В этом случае из уравнения (4) следует, что

$$\sin kt = 0 \Rightarrow kt = m\pi \Rightarrow t = \frac{m\pi}{k},\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Если $m = 0$, то $t_0 = 0$, $x_0 = -2a\cos 0° = -2a$, $y_0 = 0$;
если $m = 1$, то $t_1 = \frac{\pi}{k}$, $x_1 = -2a\cos\pi = 2a$, $y_1 = 0$;
если $m = 2$, то $t_2 = \frac{2\pi}{k}$, $x_2 = -2a\cos\pi = -2a$, $y_2 = 0$ и т.д.

Следовательно, при четных m

$$x_m = -2a,\ y_m = 0,$$

при нечетных

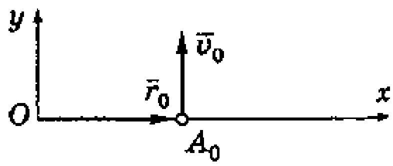
$$x_{m+1} = 2a,\ y_{m+1} = 0.$$

Период обращения точки при ее движении по эллипсу

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

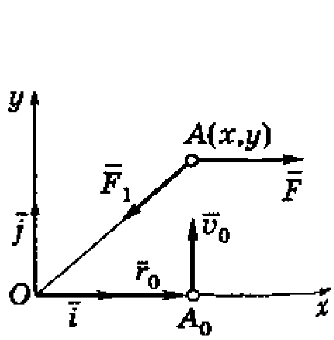
Ответ: эллипс $\dfrac{x^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{(v_0 / k)^2} = 1$, где $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}}$, $t = 0$, $x_0 = -2a$, $y_0 = 0$; $t_1 = \pi/k$, $x_1 = 2a$, $y_1 = 0$; $t_2 = 2\pi/k$, $x_2 = -2a$, $y_2 = 0$ и т.д. Время, в течение которого точка описывает эллипс, $T = 2\pi / k$.

Задача 27.63



На точку A массы m, которая начинает движение из положения $\bar{r} = \bar{r}_0$ (где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки), со скоростью $\bar{v}_0$, перпендикулярной $\bar{r}_0$, действует сила притяжения, направленная к центру O и пропорциональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен mc_1. Кроме того, на точку действует постоянная сила $mc\bar{r}_0$. Найти уравнение движения и траекторию точки. Каково должно быть отношение c_1/c, чтобы траектория движения проходила через центр O? С какой скоростью точка пройдет центр O?

Решение



Составим дифференциальные уравнения движения в проекции на оси x и y:

$$m\ddot{x} = -\bar{F}_1 + \bar{F},$$

$$m\ddot{y} = -\bar{F}_1$$

или с учетом условий задачи

$$m\ddot{x} = -mc_1 x + mcx_0,$$

$$m\ddot{y} = -mc_1 y.$$

откуда

$$\ddot{x} + c_1 x = c x_0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + c_1 y = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x}$ — решение однородного уравнения, $\bar{x} = A_1 \cos\sqrt{c_1}\,t + B_1 \sin\sqrt{c_1}\,t$; $x^* = D$ — частное решение, подставив которое в уравнение (1), найдем $D = \dfrac{c}{c_1} x_0$.

Тогда

$$x = A_1 \cos\sqrt{c_1}\,t + B_1 \sin\sqrt{c_1}\,t + \frac{c}{c_1} x_0,$$

$$\dot{x} = -A_1\sqrt{c_1}\sin\sqrt{c_1}\,t + B_1\sqrt{c_1}\cos\sqrt{c_1}\,t.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x}_0 = 0$, определим постоянные A_1 и B_1: $A_1 = x_0 - \dfrac{c}{c_1} x_0$, $B_1 = 0$.

С учетом значений A_1 и B_1 решение уравнения (1) примет вид

$$x = x_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t + \frac{c}{c_1} x_0. \tag{3}$$

Аналогично решим уравнение (2):

$$y = A_3 \cos\sqrt{c_1}\,t + B_3 \sin\sqrt{c_1}\,t,$$

$$\dot{y} = -A_3\sqrt{c_1}\sin\sqrt{c_1}\,t + B_3\sqrt{c_1}\cos\sqrt{c_1}\,t.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, найдем постоянные интегрирования: $A_3 = 0$, $B_3 = \dfrac{v_0}{\sqrt{c_1}}$.

Тогда

$$y = \frac{v_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t. \tag{4}$$

Умножим выражения (3) и (4) соответственно на $\bar{i}$ и $\bar{j}$, просуммируем их и с учетом равенства $\bar{r}_0 = x_0\bar{i}$ получим уравнение движения в векторной форме:

$$\bar{r} = \frac{c}{c_1}\bar{r}_0 + \frac{\bar{v}_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t + \bar{r}_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t.$$

Так как $|x_0| = |r_0|$, то из уравнения (3) найдем

$$\cos\sqrt{c_1}\,t = \frac{x - \dfrac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\dfrac{c}{c_1}\right)},$$

из уравнения (4)

$$\sin\sqrt{c_1}\,t = \frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}.$$

Возведем в квадрат обе части двух последних равенств, сложим их, с учетом равенства $\sin^2\sqrt{c_1}\,t + \cos^2\sqrt{c_1}\,t = 1$ получим уравнение траектории в координатной форме:

$$\left[\frac{x - \dfrac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\dfrac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2 = 1 \text{ — уравнение эллипса.} \qquad (5)$$

Траектория точки A пройдет через центр O, если координаты $x = 0$, $y = 0$ будут удовлетворять уравнению (5), которое в этом случае примет вид

$$\frac{c}{c_1}r_0 = r_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right).$$

Откуда получим

$$\frac{c_1}{c} = 2.$$

Точка A пройдет через центр O в момент времени, когда $y=0$, т.е.

$$\sin\sqrt{c_1}\,t=0 \Rightarrow t\sqrt{c_1}=\pi \Rightarrow t=\frac{\pi}{\sqrt{c_1}},$$

а ее скорость будет равна

$$v_{y0}=\dot{y}\left(t=\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right)=v_0\cos\left(\sqrt{c_1}\,\frac{\pi}{\sqrt{c}}\right)=-v_0,$$

$$v_{x0}=\dot{x}\left(t=\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right)=-x_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\sqrt{c_1}\sin\left(\sqrt{c_1}\,\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right)=0.$$

Таким образом,

$$\bar{v}_0=v_{x0}\bar{i}+v_{y0}\bar{j}=-v_0\bar{j}=-\bar{v}_0.$$

Ответ: 1) $\bar{r}=\dfrac{c}{c_1}\bar{r}_0+\dfrac{\bar{v}_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t+\bar{r}_0\left(1-\dfrac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t;$

2) эллипс $\left[\dfrac{x-\dfrac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\dfrac{c}{c_1}\right)}\right]^2+\left(\dfrac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2=1;$

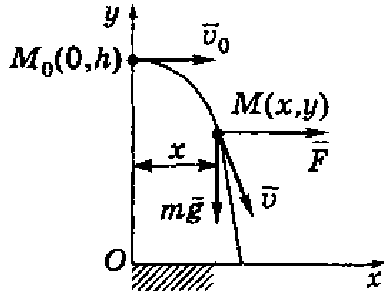
3) точка A пройдет через центр O, если $c_1/c=2$;

4) точка A пройдет через центр O со скоростью $v_0=-v_0$ в момент времени $t=\pi/\sqrt{c_1}$.

Задача 27.64

Тяжелая точка массы m падает из положения, определяемого координатами $x_0=0$, $\dot{y}_0=h$ при $t=0$, под действием силы тяжести (параллельной оси y) и силы отталкивания от оси y, пропорциональной расстоянию от этой оси (коэффициент пропорциональности c). Проекции начальной скорости точки на оси координат равны $v_x=v_0$, $v_y=0$. Определить траекторию точки, а также момент времени t_1 пересечения оси x.

Решение



Составим дифференциальные уравнения движения точки M в проекции на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \overline{F},$$

$$m\ddot{y} = -m\overline{g}$$

или с учетом условий задачи

$$m\ddot{x} = cx,$$

$$m\ddot{y} = -mg.$$

Откуда

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -g, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \operatorname{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt,$$

где $\operatorname{ch} kt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$ — гиперболический косинус, $\operatorname{sh} kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ — гиперболический синус.

Тогда

$$\dot{x} = C_1 k \operatorname{sh} kt + C_2 k \operatorname{ch} kt.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, определим постоянные интегрирования: $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$, и запишем решение уравнения (1):

$$x = \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} kt. \qquad (3)$$

Последовательно интегрируя уравнение (2), найдем его решение:

$$\int\limits_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}} d\dot{y} = -g\int\limits_0^t dt \Rightarrow \dot{y}\Big|_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}} = -gt\Big|_0^t \Rightarrow \dot{y} = -gt \Rightarrow \int\limits_{y(0)}^{y} dy = -g\int\limits_0^t t\,dt \Rightarrow y\Big|_{y(0)}^{y} =$$

$$= -g\frac{t^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow y = h - g\frac{t^2}{2}.$$

Откуда

$$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}. \qquad (4)$$

Подставим найденное значение t в уравнение (3) и получим уравнение траектории точки M в координатной форме:

$$x = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} k\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

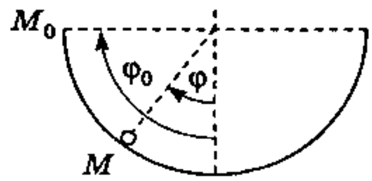
В момент пересечения t_1 точкой оси x $y = 0$, тогда согласно формуле (4)

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Ответ: траектория $x = \frac{v_0}{k}\operatorname{sh} k\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)}$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

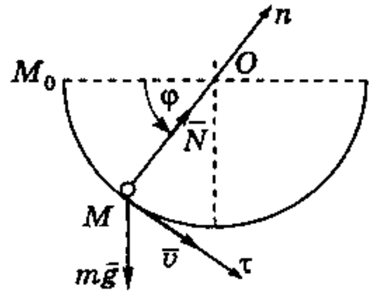
Задача 27.65

Точка M массы m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса r. В начальный момент угол $\varphi_0 = \pi/2$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки M и реакцию поверхности цилиндра при угле $\varphi = 30°$.



Решение

Составим уравнение движения точки M под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и нормальной реакции $\bar{N}$ (см. рисунок) в проекциях на оси n и τ:



$$m\frac{v^2}{r} = N - mg\sin\varphi, \quad m\frac{dv}{dt} = mg\cos\varphi$$

или

$$N = m\left(\frac{v^2}{r} + g\sin\varphi\right), \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = g\cos\varphi. \qquad (2)$$

Считая в уравнении (2) $v = v(\varphi)$, запишем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{dv}{d\varphi} = \frac{vdv}{rd\varphi}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{vdv}{rd\varphi} = g\cos\varphi.$$

Разделим переменные, проинтегрируем и определим скорость точки M:

$$\int\limits_0^v vdv = rg\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi \Rightarrow \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = rg\sin\varphi\Big|_0^{\pi/3} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}gr \Rightarrow v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}.$$

Из уравнения (1) при $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ получим

$$T = N = m\left(\frac{\sqrt{3}gr}{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}g\right) = mg\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

О т в е т: $v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$; $T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

28. Теорема об изменении количества движения материальной точки. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Методические указания к решению задач

Количество движения является одной из мер механического движения или одной из динамических характеристик движения точки и представляет собой векторную величину, равную произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\bar{K} = m\bar{v}. \tag{28.1}$$

Характеристикой действия силы в этом случае является импульс силы. Различают элементарный импульс силы и импульс силы за конечный промежуток времени.

Элементарным импульсом силы называется бесконечно малая векторная величина $d\bar{S}$, равная произведению вектора силы на бесконечно малое время dt действия силы:

$$d\bar{S} = \bar{F}dt. \tag{28.2}$$

Импульс $\bar{S}$ любой силы $\bar{F}$ за конечный промежуток времени t вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}dt. \tag{28.3}$$

Если сила постоянна, то импульс силы за конечный промежуток времени действия представляет векторное выражение

$$\bar{S} = \bar{F}t.$$

Модуль импульса силы в этом случае определяется по этой же формуле, где S, F — модули векторов $\bar{S}$ и $\bar{F}$.

В общем случае *модуль импульса силы* можно определить по его проекциям на оси координат:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}, \tag{28.4}$$

где $S_x = \int_0^t F_x dt$; $S_y = \int_0^t F_y dt$; $S_z = \int_0^t F_z dt$.

Из равенства (28.4) следует, что импульс силы можно вычислить для постоянных сил и сил, зависящих от времени. Для вычисления импульса других переменных сил надо знать закон движения точки под действием этих сил, т.е. уравнения

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

Импульс действующих на точку сил можно определить косвенным путем на основании ***теоремы об изменении количества движения материальной точки***:

изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех сил, действующих на точку, в этот промежуток времени.

В интегральной форме это записывается следующим образом:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k. \tag{28.5}$$

При решении задач вместо векторного уравнения (28.5) пользуются уравнениями в скалярной форме:

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \sum S_{kx}, \\ mv_y - mv_{0y} &= \sum S_{ky}, \\ mv_z - mv_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{28.6}$$

Из формул (28.6), зная действующие силы и время, можно найти скорость, которую приобретет материальная точка, либо, если известны начальная и конечная скорость, определить импульс сил, действующих на точку.

Теорему об изменении количества движения можно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F} \tag{28.7}$$

или в проекциях на декартовы оси координат:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(mv_x)}{dt} &= F_x, \\ \frac{d(mv_y)}{dt} &= F_y, \\ \frac{d(mv_z)}{dt} &= F_z. \end{aligned}\right\} \tag{28.7'}$$

Уравнение (28.7) представляет не что иное, как второй закон динамики материальной точки, а уравнения (28.7′) — это дифференциальные уравнения движения точки.

При решении задач теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме следует применять в тех случаях, когда на точку действуют постоянные и переменные силы.

Последовательность решения задач этого параграфа в таком случае:

1. По данным условия задачи определить, какая форма записи теоремы об изменении количества движения материальной точки является предпочтительной (или более приемлемой).

2. Выбрать оси координат (или одну ось при прямолинейном движении), направив их в сторону движения точки (тела).

3. Показать на рисунке движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на нее активные силы и силы реакций связи, если точка несвободна.

4. Записать в общем виде (можно сразу в скалярной форме) теорему об изменении количества движения с учетом действующих сил.

5. Решить полученные уравнения (дифференциальные или алгебраические) и определить искомые величины в общем виде.

6. Провести расчеты, обращая внимание на размерности всех величин.

Часть задач этого параграфа решается с помощью теоремы об изменении момента количества движения и ее следствий.

Различают момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра (точки) и оси.

Моментом количества движения материальной точки относительно некоторого центра O называется скалярная величина, взятая со знаком плюс или минус и равная произведению модуля количества движения mv на кратчайшее расстояние h от этого центра до линии, вдоль которой направлен вектор $m\bar{v}$, т.е.

$$l_0 = \pm mvh, \tag{28.8}$$

где h — перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия вектора $m\bar{v}$.

Момент количества движения относительно центра O можно представить в виде вектора $\bar{l}_0$, перпендикулярного плоскости, в которой расположены вектор $m\bar{v}$ и вектор $\bar{r}$, проведенный из центра O в начало вектора $m\bar{v}$, и направленного в ту сторону, откуда видно стремление вектора $m\bar{v}$ повернуть свое плечо против часовой стрелки. Этот вектор можно представить в виде векторного произведения:

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{28.9}$$

Момент количества движения относительно некоторой оси z — скалярная величина l_z:

$$l_z = \pm mv_{xy}h, \tag{28.10}$$

где mv_{xy} — модуль проекции вектора $m\bar{v}$ на плоскость xy, перпендикулярную оси z; h — перпендикуляр, опущенный из точки пересечения оси z с плоскостью xy на линию, вдоль которой направлена проекция вектора $m\bar{v}$.

Из формулы (28.10) следует, что момент количества движения материальной точки относительно оси z равен нулю, если вектор $m\bar{v}$ параллелен этой оси или пересекает ее.

Теорема об изменении момента количества движения (теорема моментов) относительно центра:

производная по времени от векторного момента количества движения материальной точки относительно некоторого центра геометрически равна моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра:

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}). \tag{28.11}$$

Следствие 1. Если линия действия равнодействующей приложенных к точке сил все время проходит через неподвижный центр, то момент количества движения материальной точки относительно этого центра остается постоянным.

Это имеет место в практически очень важном случае движения под действием центральной силы.

Центральной силой называется сила, линия действия которой в течение всего времени движения проходит через некоторый центр, а модуль этой силы зависит от расстояния между этим центром и точкой приложения силы.

Так как в этом случае $M_0(\bar{F}) = 0$, то $l_0 = mvh = \text{const}$, или $vh = \text{const}$, где $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Тогда

$$\frac{hds}{dt} = \frac{2d\sigma}{dt},$$

где $d\sigma$ — площадь треугольника, образованного радиусами, проведенными из центра O к концу и началу отрезка ds траектории.

Величина $\dfrac{d\sigma}{dt}$ называется *секторной скоростью точки*. Она определяет скорость, с которой увеличивается площадь, ометаемая радиусом-вектором $\bar{r}$, проведенным из центра O к движущейся точке:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}vh, \tag{28.12}$$

где h — перпендикуляр, опущенный из центра O на вектор скорости $\bar{v}$.

Следовательно, под действием центральной силы точка движется по плоской кривой с постоянной секторной скоростью, т.е. так, что радиус-вектор точки за любые равные промежутки времени ометает равные площади.

Эта формулировка закона площадей, имеющего важное практическое значение при изучении движения планет вокруг Солнца или спутников вокруг планет.

Некоторые задачи, в которых рассматривается движение точки под действием центральной силы, решаются с использованием *формулы Бине*, выражающей в общем виде центральную силу F:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right], \tag{28.13}$$

где c — удвоенная секторная скорость точки; r — радиус, проведенный из неподвижного центра к движущейся точке.

Теорема моментов относительно оси:

производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно некоторой оси равна моменту силы, действующей на точку, относительно той же оси:

$$\frac{dl_z}{dt} = M_z(\bar{F}). \tag{28.14}$$

Следствие 2. Если момент сил, действующих на точку относительно некоторой оси, равен нулю, то момент количества движения относительно той же оси остается величиной постоянной.

Последовательность решения задач этого параграфа в случае применения теоремы об изменении момента количества движения:

1. Показать на рисунке движущуюся точку (тело) в произвольном положении, а также все силы, действующие на точку, включая и реакции связи, если точка несвободна, и векторы (или вектор) количества движения.

2. Определить момент сил относительно оси или центра в зависимости от того, вокруг чего движется точка.

3. При условии выполнения следствия 1 или 2 записать момент количества движения точки в начальном и конечном положениях и, приравняв их, определить искомую величину.

4. При движении точки вокруг некоторого центра под действием центральной силы применить формулу Бине или формулы всемирного тяготения.

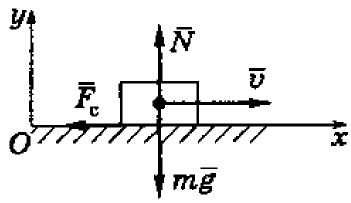
5. Провести вычисления с учетом размерности входящих в выражения величин.

Задачи и решения

Задача 28.1

Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

Решение



Рассмотрим движущийся поезд как материальную точку, на которую действуют силы: сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция $\overline{N}$, сила сопротивления $\overline{F}_c$ (см. рисунок). Ось x направим в сторону движения поезда.

Согласно теореме об изменении количества движения запишем уравнение

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_k,$$

или в проекции на ось x

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = -F_c t. \qquad (1)$$

Так как $t_0 = 0$, а $v_{1x} = v_0$, $v_{2x} = \dot{x}$, то уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} - v_0 = -\frac{F_c}{m}t = -\frac{0{,}1mgt}{m} = -0{,}1gt. \qquad (2)$$

Откуда получим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v_0 - 0{,}1gt. \qquad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (3):

$$x = v_0 t - 0{,}1g\frac{t^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из начальных условий: при $t_0 = 0$ $x_0 = 0$; $C = 0$.

Следовательно,

$$x = v_0 t - 0{,}1g\frac{t^2}{2}. \qquad (4)$$

Найдем время торможения T. При $t = T$ $\dot{x} = 0$, тогда согласно формуле (2)

$$0 = v_0 - 0{,}1gT,$$

откуда

$$T = \frac{v_0}{0{,}1g} = \frac{20}{0{,}1 \cdot 9{,}8} = 20{,}4 \text{ (с)}.$$

Определим тормозной путь: при $t = T = 20{,}4$ с $x = L$, тогда согласно формуле (4)

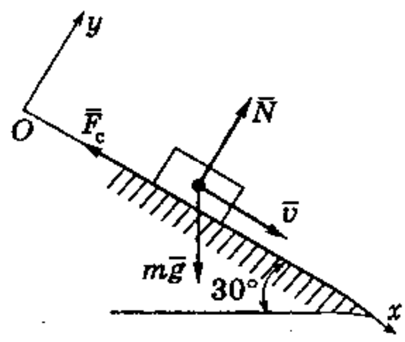
$$L = T\left(v_0 - 0{,}1g\frac{T}{2}\right) = 20{,}4\left(20 - 0{,}1\cdot 9{,}8\cdot\frac{20{,}4}{2}\right) = 204 \text{ (м)}.$$

Ответ: 20,4 с; 204 м.

Задача 28.2

По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длины $l = 39{,}2$ м, если коэффициент трения $f = 0{,}2$.

Решение



Примем движущееся тело за материальную точку, на которую действуют силы: сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция $\bar{N}$, сила трения $\bar{F}_c$. Ось x направим в сторону движения тела, т.е. вниз вдоль наклонной плоскости (см. рисунок).

Запишем уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_k$$

или в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = (mg\sin\alpha - F_c)t,$$

так как $t_0 = 0$.

Имея в виду, что $v_{1x} = v_0 = 0$, $v_{2x} = \dot{x}$, получим

$$m\dot{x} = (mg\sin\alpha - F_c)t.$$

Поскольку $F_c = Nf = mgf\cos\alpha$, то

$$\dot{x} = \frac{mg}{m}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t.$$

Проинтегрируем это выражение и получим

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C.$$

Найдем постоянную интегрирования C из начального условия: при $t=0$ $x_0=0$, значит, $C=0$. Тогда

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}. \qquad (1)$$

Определяем время T движения. При $t=T$ $x=l$, тогда формула (1) примет вид

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{T^2}{2},$$

откуда

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 39{,}2}{9{,}8(0{,}5-0{,}2\cdot 0{,}866)}} = 5\ (\text{c}).$$

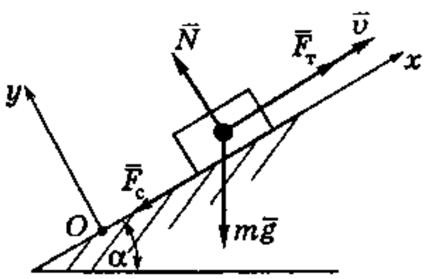
Ответ: $T = 5$ с.

Задача 28.3

Поезд массы $4\cdot 10^5$ кг входит на подъем $i=\operatorname{tg}\alpha = 0{,}006$ (где α — угол подъема) со скоростью 15 м/с. Коэффициент трения (коэффициент суммарного сопротивления) при движении поезда равен 0,005. Через 50 с после входа поезда на подъем его скорость падает до 12,5 м/с. Найти силу тяги тепловоза.

Решение

Рассмотрим движущийся поезд как материальную точку, на которую действуют силы: сила тяжести $m\bar{g}$, сила сопротивления $\bar{F}_c$, сила тяги $\bar{F}_т$, нормальная реакция $\bar{N}$. Ось x направим в сторону движения поезда (см. рисунок).



Запишем теорему об изменении количества движения в векторном виде:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_k$$

или в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix} = (F_т - F_c - mg\sin\alpha)T.$$

Так как $v_{2x} = v_2$; $v_{1x} = v_1$, то

$$F_т = \frac{m}{T}(v_2 - v_1) + F_с + mg\sin\alpha,$$

где $F_с = Nf = mgf\cos\alpha$.

Тогда

$$F_т = m\left[\frac{v_2 - v_1}{T} + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]. \qquad (1)$$

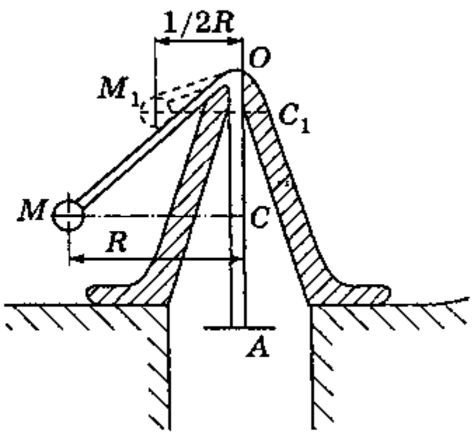
Согласно условию $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}006$, значит, $\alpha = 0{,}343°$, а $\sin\alpha = 0{,}006$, тогда $\cos\alpha = 1$.

Подставим исходные данные в формулу (1) и найдем

$$F_т = 4\cdot 10^5\left[\frac{12{,}5 - 15{,}0}{50} + 9{,}8(0{,}006 + 0{,}005\cdot 1)\right] = 23\,120 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 23 120 Н.

Задача 28.4



Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити MOA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая 120 об/мин. Медленно втягивая нить OA в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиусом $R/2$. Сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности?

Решение

Рассмотрим движение гирьки. На нее действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и реакция нити $\bar{N}$. Проведем ось z вертикально вверх (см. рисунок).

Запишем уравнение, выражающее теорему об изменении момента количества движения материальной точки относительно оси z:

$$\frac{dl_z}{dt} = \Sigma M,$$

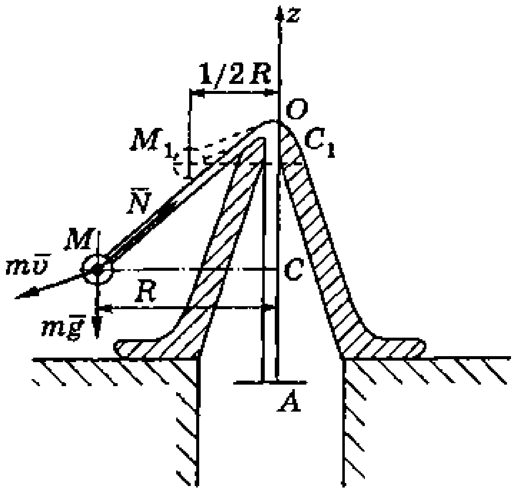
так как $\Sigma M = 0$, то $l_z = \text{const}$.

В начальный момент

$$l_z = mv \cdot MC = m\omega R \cdot R = m\frac{\pi n}{30}R^2,$$

а в конечный момент

$$l_{z_1} = mv_1 \cdot M_1C_1 = m\omega_1 \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} = m\frac{\pi n_1}{30}\frac{R^2}{4}.$$



Если $l_z = \text{const}$, то $l_z = l_{z_1}$. Тогда

$$m\frac{\pi n}{30}R^2 = m\frac{\pi n_1}{30}\frac{R^2}{4} \Rightarrow n_1 = 4n = 4 \cdot 120 = 480 \text{ (об/мин)}.$$

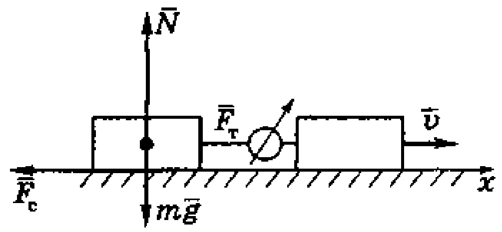
Ответ: 480 об/мин.

Задача 28.5

Для определения массы груженого железнодорожного состава между тепловозами и вагонами установили динамометр. Среднее показание динамометра за 2 мин оказалось 10^6 Н. За то же время состав набрал скорость 16 м/с (вначале состав стоял на месте). Найти массу состава, если коэффициент трения $f = 0{,}02$.

Решение

Рассмотрим движущийся состав как материальную точку массой m, на которую действуют: сила тяжести $m\bar{g}$, сила сопротивления $\bar{F}_c$, сила тяги $\bar{F}_т$, нормальная реакция $\bar{N}$. Направим ось x в сторону движения состава (см. рисунок).



Запишем уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_i$$

или в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = S_{kx} = (F_т - F_с)t.$$

Так как $v_{1x} = v_1 = 0$, $v_{2x} = v_2$, то

$$mv_2 = F_т t - F_с t,$$

где $F_с = fN = mgf$.

Тогда

$$mv_2 = F_т t - mgft.$$

Откуда

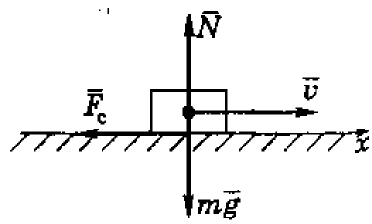
$$m = \frac{F_т t}{v_2 + gft} = \frac{120 \cdot 10^6}{16 + 9{,}8 \cdot 0{,}02 \cdot 120} = 3{,}036 \cdot 10^6 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 3036 т.

Задача 28.6

Каков должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды $v = 20$ м/с он останавливается через 6 с после начала торможения.

Решение



Рассмотрим движущийся автомобиль как материальную точку, на которую действуют сила тяжести $m\bar{g}$, сила сопротивления $\bar{F}_с$ и нормальная реакция $\bar{N}$. Направим ось x в сторону движения автомобиля (см. рисунок).

Запишем теорему об изменении количества движения:

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \sum \bar{S}_k$$

или в проекции на ось x:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = -F_с t.$$

Так как $v_{2x} = v_2 = 0$, $v_{1x} = v_1$, а $F_с = fN = mgf$, то

$$v_1 = gft.$$

Откуда найдем коэффициент трения

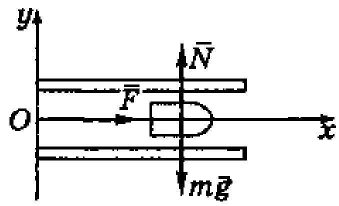
$$f = \frac{v_1}{gt} = \frac{20}{9{,}8 \cdot 6} = 0{,}34.$$

Ответ: $f = 0{,}34$.

Задача 28.7

Пуля массы 20 г вылетает из ствола винтовки со скоростью $v = 650$ м/с, пробегая канал ствола за время $t = 0{,}00095$ с. Определить среднюю величину идеального давления газов, выбрасывающих пулю, если площадь сечения канала $\sigma = 150$ мм^2.

Решение



На пулю действуют сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция $\bar{N}$ и сила давления пороховых газов $\bar{F}$ (см. рисунок).

Запишем теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось x:

$$mv - mv_0 = Ft, \tag{1}$$

где $v_0 = 0$; $F = q\sigma$, q — средняя величина давления газов.

Тогда уравнение (1) примет вид

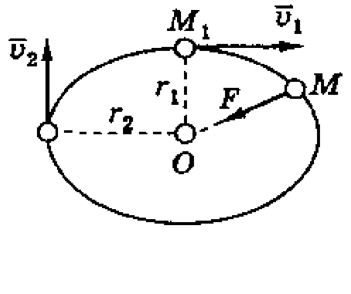
$$mv = q\sigma t,$$

откуда определим среднее давление газа

$$q = \frac{mv}{\sigma t} = \frac{0{,}020 \cdot 650 \cdot 10^6}{150 \cdot 0{,}00095} = 9{,}12 \cdot 10^4 \text{ (кН/м}^2\text{)}.$$

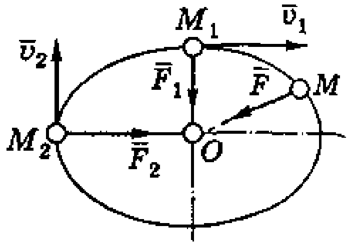
Ответ: среднее давление $9{,}12 \cdot 10^4$ Н/мм^2.

Задача 28.8



Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30$ см/с, а r_2 в пять раз больше r_1.

Решение



На точку M при движении вокруг центра O действует сила притяжения $\bar{F}$. Покажем на рисунке точку в положении M_1 — наиболее близком к центру O траектории, и M_2 — наиболее удаленном от него.

Запишем теорему об изменении момента количества движения точки относительно центра O:

$$\frac{dl_0}{dt} = M_0 = 0,$$

откуда $l_0 = \text{const}$, т.е.

$$l_{01} = l_{02}; \qquad (1)$$

$$l_{01} = mv_1r_1, \quad l_{02} = mv_2r_2. \qquad (2)$$

Подставим выражения (2) в уравнение (1):

$$v_1r_1 = v_2r_2,$$

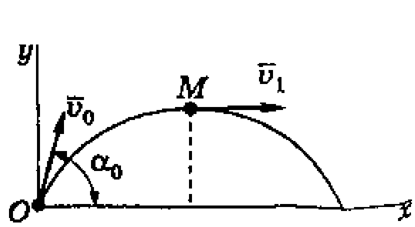
где $r_2 = 5r_1$.

Откуда найдем скорость точки в положении M_2:

$$v_2 = \frac{v_1r_1}{r_2} = \frac{30}{5} = 6 \text{ (см/с)}.$$

Ответ: $v_2 = 6$ см/с.

Задача 28.9



Найти импульс равнодействующих сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M. Дано: $v_0 =$ $= 500$ м/с; $\alpha_0 = 60°$; $v_1 = 200$ м/с; масса снаряда 100 кг.

Решение

Применим теорему об изменении количества движения точки в проекциях на оси x и y:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x, \quad (1)$$

$$mv_y - mv_{0y} = S_y. \quad (2)$$

Найдем

$$v_x = v_1, \; v_{0x} = v_0 \cos 60°;$$

$$v_y = 0, \; v_{0y} = v_0 \sin 60°.$$

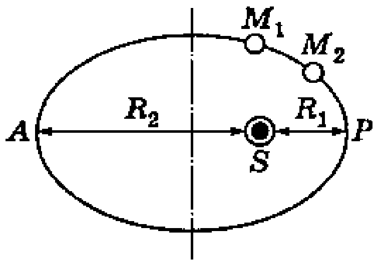
Подставим эти выражения в уравнения (1) и (2) и получим

$$S_x = m(v_1 - v_0 \cos 60°) = 100(200 - 500 \cdot 0{,}5) = -5000 \text{ (Н·с)},$$

$$S_y = -mv_{0y} = -mv_0 \sin 60° = -100 \cdot 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -43\,300 \text{ (Н·с)}.$$

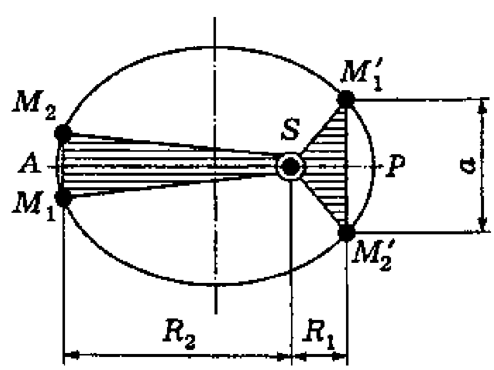
Ответ: проекции импульса равнодействующей: $S_x = -5000$ Н·с; $S_y = -43\,300$ Н·с.

Задача 28.10



Два астероида M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе которого S находится Солнце. Расстояние между ними настолько мало, что дугу M_1M_2 эллипса можно считать отрезком прямой. Известно, что длина дуги M_1M_2 равнялась a, когда середина ее находилась в перигелии P. Предполагая, что остероиды движутся с равными секториальными скоростями, определить длину дуги M_1M_2, когда середина ее будет проходить через афелий A, если известно, что $SP = R_1$ и $SA = R_2$.

Решение



Секториальная скорость астероида пропорциональна площадям треугольников $M_1'SM_2'$ и M_1SM_2 (см. рисунок). Из равенства соответствующих площадей следует, что

$$\frac{1}{2} R_1 a = \frac{1}{2} R_2 (\breve{M_1 M_2}).$$

Отсюда

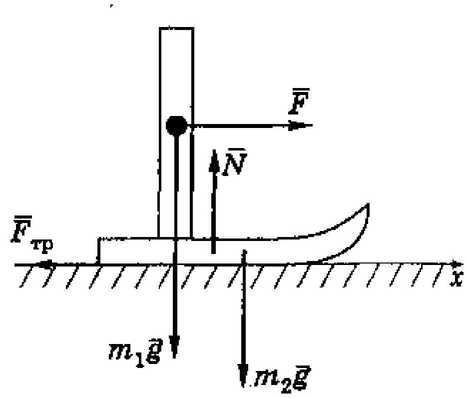
$$M_1{\cup}M_2 = \frac{aR_1}{R_2}.$$

Ответ: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2}a$.

Задача 28.11

Мальчик массы 40 кг стоит на полозьях спортивных саней, масса которых равна 20 кг, и делает каждую секунду толчок с импульсом 20 Н·с. Найти скорость, приобретаемую санями за 15 с, если коэффициент трения $f = 0{,}01$.

Решение



На сани действуют сила тяжести мальчика $m_1\bar{g}$, сила тяжести саней $m_2\bar{g}$, сила трения $\bar{F}_{тр}$, сила толчка $\bar{F}$ и нормальная реакция опоры $\bar{N}$. Направим ось x в сторону движения саней (см. рисунок).

Запишем теорему об изменении количества движения в проекции на ось x:

$$mv - mv_0 = (F - F_{тр})t,$$

где $v_0 = 0$; $m = m_1 + m_2$; F — сила толчка, $F = \frac{S}{\Delta t} = \frac{20}{1} = 20$ Н; $F_{тр} = fN$.

Тогда

$$(m_1 + m_2)v = [F - f(m_1 g + m_2 g)]t.$$

Откуда найдем скорость саней

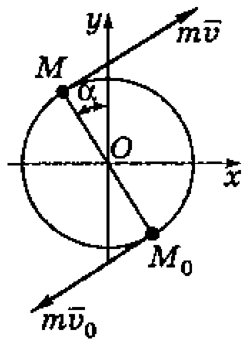
$$v = \frac{F - fg(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}t = \frac{20 - 0{,}01\cdot 9{,}8(40+20)}{40+20}\cdot 15 = 3{,}53 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v = 3{,}53$ м/с.

Задача 28.12

Точка совершает равномерное движение по окружности со скоростью $v = 0{,}2$ м/с, делая полный оборот за время $T = 4$ с. Найти импульс S сил, действующих на точку, за время одного полупериода, если масса точки $m = 5$ кг. Определить среднее значение силы F.

Решение



Применим теорему об изменении количества движения материальной точки, запишем проекции импульса силы на оси x и y:

$$S_x = mv_x - mv_{0x},$$

$$S_y = mv_y - mv_{0y}.$$

Так как $v_0 = v$, то

$$S_x = m(v\cos\alpha + v\cos\alpha) = 2mv\cos\alpha,$$

$$S_y = m(v\sin\alpha + v\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha.$$

Тогда

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 2mv\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 2mv = 2\cdot 5\cdot 0{,}2 = 2 \text{ (Н·с)}.$$

Если считать среднее значение силы $\bar{F}$ постоянным, то ее проекции на оси координат

$$F_x = \frac{S_x}{t} = \frac{2mv\cos\alpha}{t},$$

$$F_y = \frac{S_y}{t} = \frac{2mv\sin\alpha}{t}.$$

Тогда

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{2mv}{t}\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2mv}{t} = \frac{2\cdot 5\cdot 0{,}2}{2} = 1 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $S = 2$ Н·с; $F = 1$ Н.

Задача 28.13

Два математических маятника, подвешенных на нитях длин l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), совершают колебания одинаковой амплитуды. Оба маятника одновременно начали двигаться в одном направлении из своих крайних отклоненных положений. Найти условие, которому должны удовлетворять длины l_1 и l_2 для того, чтобы маятники по истечении некоторого промежутка времени одновременно вернулись в положение равновесия. Определить наименьший промежуток времени T.

Решение

Одновременно вернуться в начальное положение маятники могут при условии равенства целых кратных периодов:

$$T = kT_2 = nT_1,$$

т.е. когда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{n}. \qquad (1)$$

Периоды колебаний математических маятников

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}. \qquad (2)$$

С учетом формул (2) равенство (1) примет вид

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{k}{n}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{k}{n}$, где k, n — целые числа и дробь $\frac{k}{n}$ несократима; $T = kT_2 = nT_1$.

Задача 28.14

Шарик массы m, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити T, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

Решение

На шарик в точке M действует сила тяжести $m\bar{g}$, уравновешенная нормальной реакцией плоскости $\bar{N}$, и сила натяжения нити $\bar{T}$, которая проходит через точку O (рис. 1).

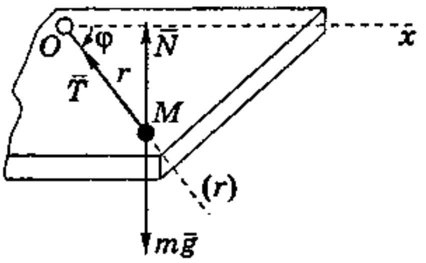


Рис. 1

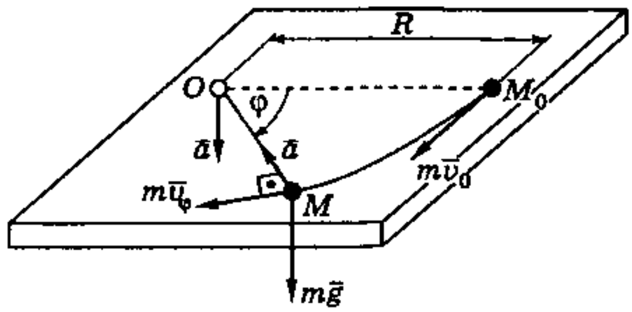


Рис. 2

В результате сумма моментов действующих сил относительно точки O равна нулю и момент количества движения относительно этой точки, согласно следствию 2 из теоремы моментов, не меняется. Поэтому (см. рис. 2)

$$l_{01} = l_{02},$$

где l_{01}, l_{02} — момент количества движения шарика относительно центра O соответственно в точке M_0 и M; $l_{01} = mv_0R$, $l_{02} = mv_\varphi r$.

Следовательно,

$$mv_0R = mv_\varphi r.$$

Откуда

$$v_\varphi = \frac{v_0R}{r}, \tag{1}$$

где v_φ — трансверсальная составляющая скорости.

Длина нити $OM = r$ (рис. 1) с течением времени изменяется. Так как проекция v_r скорости шарика на радиальное направление (r) равна скорости втягивания нити в отверстие, то

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -a \Rightarrow \int_R^r dr = -a\int_0^t dt,$$

$$r\big|_R^r = -at\big|_0^t \Rightarrow r = R - at. \tag{2}$$

Запишем основной закон динамики в проекции на радиальное направление

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=-T,$$

где $\dot{\varphi}=\dfrac{v_\varphi}{r}=\dfrac{v_0R}{r^2}$.

Используя выражения (1) и (2), с учетом того, что $\ddot{r}=0$, найдем натяжение нити

$$T=mr\dot{\varphi}^2=\frac{m(R-at)v_0^2R^2}{(R-at)^4}=\frac{mv_0^2R^2}{(R-at)^3}$$

и уравнение движения шарика

$$\varphi=v_0R\int_0^t\frac{dt}{(R-at)^2}=-\frac{v_0R}{a}\int_0^t\frac{d(R-at)}{(R-at)^2}=\frac{v_0R}{a}\frac{1}{R-at}\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{v_0R}{a}\left(\frac{1}{R-at}-\frac{1}{R}\right)=\frac{v_0t}{R-at}.$$

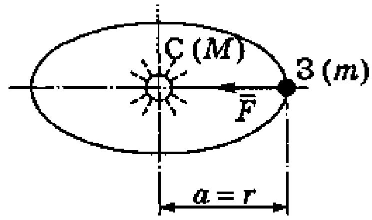
О т в е т: в полярных координатах (если принять отверстие за начало координат и угол φ_0 равным нулю):

$$r=R-at;\ \varphi=\frac{v_0t}{R-at};\ T=\frac{mv_0^2R^2}{(R-at)^3}.$$

Задача 28.15

Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м, средняя плотность 5,5 т/м^3, большая полуось земной орбиты $a=1{,}49\cdot10^{11}$ м, время обращения Земли вокруг Солнца $T=365{,}25$ сут. Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 кг, на расстоянии 1 м считаем равной $\dfrac{gR^2}{m}$ Н, где m — масса Земли; из законов Кеплера следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $\dfrac{4\pi^2a^3m}{T^2r^2}$, где r — расстояние Земли от Солнца.

Решение



В момент, когда Земля находится на расстоянии большой полуоси от Солнца (см. рисунок), сила $\bar{F}$ притяжения Земли Солнцем согласно закону Кеплера равна

$$F = \frac{4\pi^2 am}{T^2}, \qquad (1)$$

где $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ — масса Земли, ρ — средняя плотность.

По формуле Ньютона сила притяжения между Солнцем и Землей

$$F = \frac{R^2 g}{m}\frac{Mm}{a^2}. \qquad (2)$$

Приравнивая в соответствии с формулами (1) и (2) их правые части, получим

$$ma\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{R^2 g}{m}\frac{Mm}{a^2}.$$

Откуда масса Солнца

$$M = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 R^2 g} = \frac{16\pi^3 a^3 R\rho}{3T^2 g} =$$

$$= \frac{16\cdot 3{,}14^3\cdot(1{,}49\cdot 10^{11})^3\cdot 6{,}37\cdot 10^6\cdot 5{,}5\cdot 10^3}{3\cdot(365{,}25\cdot 24\cdot 3600)^2\cdot 9{,}8} = 1{,}966\cdot 10^{30} \text{ (кг)}.$$

Ответ: $M = 1{,}966\cdot 10^{30}$ кг.

Задача 28.16

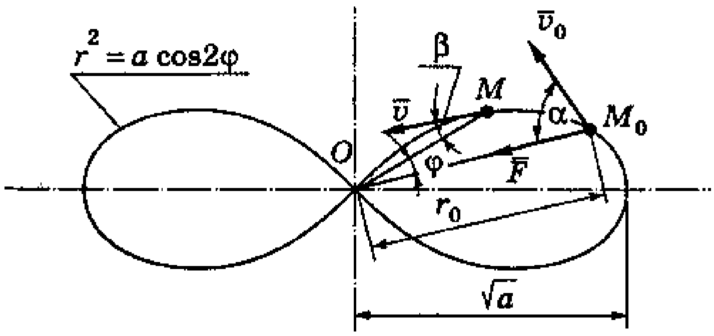
Точка массы m, подверженная действию центральной силы F, описывает лемнискату $r^2 = a\cos 2\varphi$, где a — величина постоянная, r — расстояние точки от силового центра; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с силовым центром. Определить величину силы F, зная, что она зависит только от расстояния r.

Решение

Воспользуемся формулой Бине, так как точка движется под действием центральной силы $\overline{F}$ (см. рисунок):

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right), \tag{1}$$

где $c = r^2\dot{\varphi}$ — удвоенная секторная скорость точки.



Так как на точку действует центральная сила F, то создаваемый ею момент относительно центра O равен нулю и тогда момент количества движения (в полярной системе координат — секторная скорость) сохраняет постоянное значение, т.е.

$$mrv\sin\beta = mr_0v_0\sin\alpha \Rightarrow rv\sin\beta = r_0v_0\sin\alpha.$$

Так как

$$rv\sin\beta = rv_\varphi = r\cdot r\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi},$$

то

$$c = r^2\dot{\varphi} = r_0v_0\sin\alpha. \tag{2}$$

Далее, так как $r = \sqrt{a}(\cos 2\varphi)^{1/2}$, найдем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{3/2}};$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2(\cos 2\varphi)^{5/2} + 3\sin^2 2\varphi(\cos 2\varphi)^{1/2}}{\cos^3 2\varphi} = \frac{1}{r}(2 + 3\operatorname{tg}^2 2\varphi). \tag{3}$$

Силу притяжения F определим по формуле (1) с учетом выражений (2), (3) и равенства $a^2\cos^2 2\varphi = r^4$:

$$F = \frac{mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3}(2 + 3\,\mathrm{tg}^2 2\varphi + 1) = \frac{3mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3}(1 + \mathrm{tg}^2 2\varphi) =$$

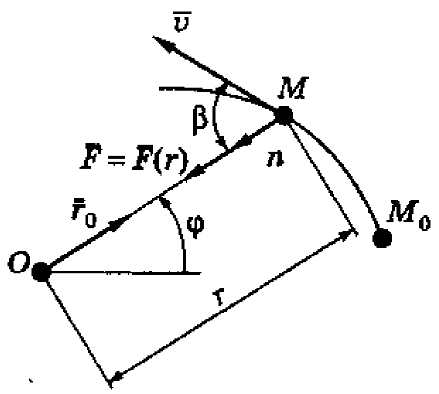
$$= \frac{3mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3\cos^2 2\varphi} = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha.$$

О т в е т: сила притяжения $F = \dfrac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha.$

Задача 28.17

Точка M, масса которой m, движется около неподвижного центра O под влиянием силы F, исходящей из этого центра и зависящей только от расстояния $MO = r$. Зная, что скорость точки $v = a/r$, где a — величина постоянная, найти величину силы F и траекторию точки.

Р е ш е н и е



Так как движение точки происходит под действием центральной силы $\overline{F}$, то $M_0(F) = 0 \Rightarrow l_0 = \mathrm{const}$.

Тогда момент количества движения точки в положении M_0

$$mv_\varphi \cdot r = mr\cdot r\dot\varphi = mr^2\dot\varphi = mh = \mathrm{const}.$$

Откуда

$$\dot\varphi = \frac{h}{r^2}, \tag{1}$$

где h — удвоенная секторная скорость.

Тогда

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2.$$

Так как $v = \dfrac{a}{r}$ — по условию, то

$$\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 = \frac{a^2}{r^2}. \tag{2}$$

С учетом равенства (1) из формулы (2) получим

$$\dot{r}^2 = \frac{a^2 - h^2}{r^2}. \tag{3}$$

Продифференцируем выражение (3) по времени:

$$2\dot{r}\ddot{r} = 2\frac{h^2 - a^2}{r^3}\cdot\dot{r}$$

и найдем

$$\ddot{r} = \frac{h^2 - a^2}{r^3}. \tag{4}$$

Основной закон динамики в проекции на направление радиуса-вектора $\bar{r}_0$ и нормаль n имеет вид

$$F_{\bar{r}_0} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \Rightarrow F = F_n = m(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}).$$

Подставим в это равенство выражения (1) и (4) и найдем силу притяжения

$$F = m\left(r\frac{h^2}{r^4} - \frac{h^2 - a^2}{r^3}\right) = \frac{ma^2}{r^3}.$$

Для определения траектории точки M из уравнения (3) найдем

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{r}$$

или с учетом того, что $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$,

$$rdr = \sqrt{a^2 - h^2}\,dt.$$

Так как $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то согласно выражению (1)

$$dt = \frac{r^2}{h}d\varphi,$$

тогда

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}rdr = r^2 d\varphi \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}\int\frac{dr}{r} = \int d\varphi \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{h^2 - a^2}}\ln r = \varphi$$ — логарифмическая спираль.

Ответ: сила притяжения $F = {ma^2}/{r^3}$; траектория — логарифмическая спираль.

Задача 28.18

Определить движение точки, масса которой 1 кг, под действием центральной силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от центра притяжения, при следующих данных: на расстоянии 1 м сила равна 1 Н. В начальный момент расстояние точки от центра притяжения равно 2 м, скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с и составляет угол 45° с направлением прямой, проведенной из центра к точке.

Решение

Поскольку точка движется под действием центральной силы притяжения, воспользуемся формулой Бине:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

С учетом данных задачи запишем

$$-\frac{1}{r^3} = -\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

Откуда

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{1}{rc^2}, \qquad (1)$$

где c — удвоенная секторная скорость точки, $c = r^2\dot{\varphi} = \text{const}$.

В начальный момент времени при $r = 2$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0\cos 45^\circ}{r} = \frac{0{,}5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ \text{(рад/с)},$$

$$c = 2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}=0.$$

Решение этого дифференциального уравнения ищем в виде

$$\frac{1}{r} = Ae^{\varphi}+Be^{-\varphi}, \qquad (2)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Продифференцируем это выражение по времени и получим

$$-\frac{\dot{r}}{r^2} = (Ae^{\varphi} - Be^{-\varphi})\dot{\varphi}. \qquad (3)$$

Постоянные A и B найдем из формул (2) и (3) с учетом начальных условий: при $\varphi = 0$ $r = 2$, $\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $\dot{r} = v_0 \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}$, тогда $A + B = \frac{1}{2}$, $A - B = -\frac{1}{2}$, откуда $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$.

Подставим значения A и B в выражение (2):

$$\frac{1}{r} = \frac{e^{-\varphi}}{2}$$

или $r = 2e^{\varphi}$ — уравнение траектории точки.

Из условия постоянства секторной скорости при $r = 2e^{\varphi}$ найдем, что

$$4e^{2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Откуда после интегрирования получим

$$2e^{2\varphi} = \frac{t}{\sqrt{2}} + C_1. \qquad (4)$$

Из начальных условий: при $t = 0$ $\varphi = 0$, найдем постоянную интегрирования $C_1 = 2$. Подставим значение C_1 в формулу (4) и с учетом того, что

$$e^{2\varphi} = \frac{r^2}{4},$$

окончательно запишем

$$r^2 = 4 + t\sqrt{2}.$$

Ответ: $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$; $r = 2e^{\varphi}$.

Задача 28.19

Частица M массы 1 кг притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния. Эта сила равна 8 Н на расстоянии 1 м. В начальный момент частица находится на расстоянии $OM_0 = 2$ м и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную 0,5 м/с. Определить траекторию частицы.

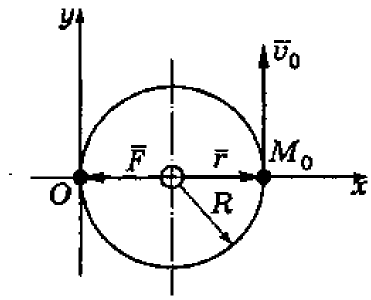
Решение

Поскольку точка движется под действием центральной силы $\bar{F}$, воспользуемся формулой Бине:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

С учетом данных задачи запишем:

$$F = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = \frac{8}{r^5},$$



так как удвоенная секторная скорость

$$c = r^2\dot{\varphi} = 4\cdot\frac{0{,}5}{2} = 1,$$

где $\dot{\varphi} = \frac{v_0}{r}$.

Проинтегрируем, полагая $p = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$,

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\dot{r}}{r^2\dot{\varphi}},$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{dp}{d\varphi} = p\frac{dp}{d\left(\frac{1}{r}\right)},$$

$$p\frac{dp}{d\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{8}{r^3} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{2}{r^4} - \frac{1}{2r^2} + C_1. \tag{1}$$

Постоянную C_1 найдем из начальных условий: при $t=0$ $\varphi=0$, $r=2$, $\dot{r}=0$, $\dot{\varphi}=\frac{0{,}5}{2}=\frac{1}{4}$, тогда

$$0=\frac{1}{16}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+C_1 \Rightarrow C_1=0.$$

Определим из формулы (1)

$$p=\sqrt{\frac{4}{r^4}-\frac{1}{r^2}},$$

тогда

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{r^2}\sqrt{4-r^2}.$$

Разделим переменные в этом выражении и после преобразований получим

$$-\frac{dr}{\sqrt{4-r^2}}=d\varphi,$$

проинтегрируем

$$\arccos\frac{r}{2}=\varphi+C_2. \qquad (2)$$

Найдем постоянную интегрирования из начальных условий: при $\varphi=0$ $r=2$; $C_2=\arccos 1=0$.

Подставим значение C_2 в формулу (2) и окончательно получим

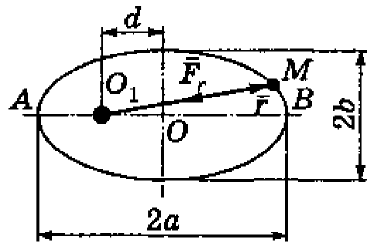
$$r=2\cos\varphi.$$

Ответ: окружность радиуса 1 м, центр которой лежит на линии OM_0 на расстоянии 1 м от центра притяжения.

Задача 28.20

Точка массы 0,2 кг, движущаяся под влиянием силы притяжения к неподвижному центру по закону тяготения Ньютона, описывает полный эллипс с полуосями 0,1 м и 0,08 м в течение 50 с. Определить наибольшую и наименьшую величину силы притяжения F при этом движении.

Р е ш е н и е



Для решения задачи воспользуемся формулой Бине в виде

$$F_r = \frac{c^2 m}{p}\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad (1)$$

где c — удвоенная секторная скорость точки; F_r — сила притяжения; $p = \dfrac{b^2}{a}$, где b, a — соответственно малая и большая полуоси эллипса; r — расстояние от фокуса эллипса до точки M.

Из рисунка найдем

$$O_1O = d = \sqrt{a^2 - b^2},$$

по условию $a = 0{,}1$ м, $b = 0{,}08$ м, тогда $d = 0{,}06$ м, $O_1A = 0{,}04$ м, $O_1B = 0{,}16$ м.

Определим удвоенную секторную скорость точки M

$$c = \frac{2\pi ab}{T},$$

где T — период движения.

Подставим найденные значения в формулу (1) и получим

$$F_{\max} = \frac{c^2 ma}{b^2(a-d)^2} = \left(\frac{2\pi ab}{T}\right)^2 \frac{ma}{b^2(a-d)} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2(a-d)^2} = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}2}{50^2(0{,}10-0{,}06)^2} =$$

$$= 1{,}97\cdot 10^{-3}\ (\text{Н}).$$

$$F_{\min} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2(a+d)^2} = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}2}{50^2\cdot(0{,}10+0{,}06)^2} = 1{,}23\cdot 10^{-4}\ (\text{Н}).$$

О т в е т: $F_{\max} = 1{,}97\cdot 10^{-3}$ Н; $F_{\min} = 1{,}23\cdot 10^{-4}$ Н.

Задача 28.21

Математический маятник, каждый размах которого длится одну секунду, называется секундным маятником и применяется для отсчета времени. Найти длину l этого маятника, считая ускорение силы тяжести равным 981 см/с^2. Какое время покажет этот маятник на Луне, где ускорение силы тяжести в 6 раз меньше земного? Какую длину l_1 должен иметь секундный лунный маятник?

Решение

Один размах математического маятника соответствует полупериоду

$$\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=1,$$

откуда

$$l=\frac{g}{\pi^2}=\frac{981}{3{,}14^2}=99{,}4\text{ (см)}.$$

На Луне полупериод

$$T_1=\pi\sqrt{\frac{6l}{g}}=\sqrt{6}=2{,}45\text{ (с)},$$

а длина маятника должна быть меньше в 6 раз, т.е.

$$l_1=\frac{l}{6}=\frac{99{,}4}{6}=16{,}56\text{ (см)}.$$

Ответ: l = 99,4 см; T_1 = 2,45 с; l_1 = 16,56 см.

Задача 28.22

В некоторой точке Земли секундный маятник отсчитывает время правильно. Будучи перенесен в другое место, он отстаёт на T секунд в сутки. Определить ускорение силы тяжести в новом положении секундного маятника.

Решение

По условию при правильном отсчете времени полупериод математического маятника

$$T_0=\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}=1\text{ с}.$$

Откуда

$$l=\frac{g_0}{\pi^2}.$$

В другой точке Земли при отставании маятника

$$T_0 + \frac{T}{24 \cdot 3600} = \pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}, \qquad (1)$$

где g_1 — ускорение силы тяжести в другой точке.

Преобразуем формулу (1):

$$T_0 + \frac{T}{86\,400} = \sqrt{\frac{g_0}{g_1}}.$$

Так как по условию $T_0 = 1$, то

$$1 + \frac{T}{86\,400} = \sqrt{\frac{g_0}{g_1}}.$$

Откуда найдем

$$\sqrt{g_1} = \sqrt{g_0}\,\frac{1}{1 + \frac{T}{86\,400}} = \sqrt{g_0}\left(1 - \frac{T}{86\,400} + \frac{T^2}{86\,400^2} - \ldots\right) \approx \sqrt{g_0}\left(1 - \frac{T}{86\,400}\right).$$

Ввиду малости величины $\frac{T^2}{86\,400^2}$ ограничимся первыми двумя членами в разложении функции $\frac{1}{1 + \frac{T}{86\,400}}$ в степенной ряд. Тогда

$$g_1 = g_0\left(1 - \frac{T}{86\,400}\right)^2.$$

О т в е т: $g_1 = g_0\left(1 - \frac{T}{86\,400}\right)^2$, где g_0 — ускорение силы тяжести в первоначальном положении маятника.

29. Работа и мощность

Методические указания к решению задач

Работа силы является одним из важнейших понятий теоретической механики и представляет собой одну из характеристик действия силы, оказываемого на тело при некотором его перемещении. При этом работа характеризует то действие силы, которое определяется изменением модуля скорости движущейся точки.

В общем случае различают элементарную работу силы и работу силы на конечном перемещении.

Элементарная работа силы — это бесконечно малая скалярная величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения точки приложения силы:

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \tag{29.1}$$

где $d\bar{r}$ — приращение радиуса-вектора точки приложения силы, годографом которого является траектория этой точки.

Элементарное перемещение точки ds по траектории равно $|d\bar{r}|$ в силу их малости, поэтому можно записать

$$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F\,ds\cos\left(\bar{F},\hat{\ }\tau\right). \tag{29.2}$$

Произведение $F\cos\left(\bar{F},\hat{\ }\tau\right)$ представляет собой проекцию силы на направление перемещения точки (при криволинейной траектории на касательную ось к траектории, т.е. на ось τ). Тогда

$$dA = F_\tau ds. \tag{29.3}$$

Таким образом, элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения [см. формулу (29.2)] или равна проекции силы на направление перемещения, умноженной на элементарное перемещение ds [см. формулу (29.3)].

При этом, если

$$dA > 0,\ \text{то}\ \angle(\bar{F}, \tau) < \frac{\pi}{2};$$

$$dA = 0,\ \text{то}\ \angle(\bar{F}, \tau) = \frac{\pi}{2};$$

$$dA < 0,\ \text{то}\ \angle(\bar{F}, \tau) > \frac{\pi}{2}.$$

Если в формуле (29.1) силу $\bar{F}$ и перемещение $d\bar{r}$ представить через их проекции на оси декартовых координат, т.е.

$$\bar{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y + \bar{k}F_z,$$

$$d\bar{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}F,$$

то элементарная работа силы может быть представлена выражением

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{29.4}$$

которое называется *аналитическим выражением элементарной работы.*

Если силы приложены к твердому телу, движущемуся поступательно, то элементарная работа всех сил

$$dA = \bar{R}^e \cdot d\bar{r} = R^e ds \cos(\bar{R}^e \hat{,} \tau)$$

или

$$dA = R^e_\tau ds, \tag{29.5}$$

где $\bar{R}^e$ — главный вектор внешних сил, $\bar{R}^e = \sum \bar{F}^e_k$; $R^e_\tau = \sum F^e_{k\tau}$ — проекция главного вектора на направление перемещения, равная сумме проекций всех сил на это направление.

При вращательном движении вокруг неподвижной оси (например, оси z)

$$dA = M^e_z d\varphi = \sum M_z(\bar{F}^e_k) d\varphi, \tag{29.6}$$

где $M^e_z = \sum M_z(\bar{F}^e_k)$ — главный момент всех внешних сил относительно оси; $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела.

При этом сумма работ внутренних сил, действующих в твердом теле при любом движении, равна нулю.

Работа силы на любом конечном перемещении s вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ:

$$A_s = \int_s F\,ds \cos(\bar{F} \wedge \tau). \qquad (29.7)$$

Если сила постоянная, а точка ее приложения перемещается прямолинейно, то работу на конечном перемещении вычисляют по формуле

$$A = Fs \cos(\bar{F} \wedge \tau). \qquad (29.8)$$

Формулы (29.7) и (29.8) можно использовать и при вычислении работы сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно, где вместо $F\cos(\bar{F} \wedge \tau)$ следует взять сумму проекций сил на направление движения.

При вращательном движении работа сил, приложенных к телу, на конечном перемещении

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^e\,d\varphi. \qquad (29.9)$$

Если момент внешних сил относительно оси постоянный, то

$$A = M_z^e(\varphi - \varphi_0) = \sum M_z^e \varphi_{пов}, \qquad (29.10)$$

где $\varphi_{пов} = \varphi - \varphi_0$ — конечный угол поворота тела.

При решении задач этого параграфа и задач других параграфов на применение теоремы об изменении кинетической энергии чаще всего приходится определять работу силы тяжести, силы упругости и сил, приложенных к вращающемуся телу.

Работа силы тяжести

$$A = \pm Gh = \pm mgh, \qquad (29.11)$$

силы упругости

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2), \qquad (29.12)$$

где λ_0, λ — соответственно начальное и конечное значения деформации (растяжение пружины или прогиб упругой балки).

При этом следует иметь в виду, что если направления силы и перемещения точки (тела) совпадают, то работа силы положительна, если эти направления противоположны — отрицательна.

Мощность силы — это работа, выполненная в единицу времени. Мощность силы обозначают N:

$$N = \frac{A}{t}, \tag{29.13}$$

где A — работа, равномерно совершенная силой на конечном перемещении за время t.

В более общем случае

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F\,ds \cos(\widehat{\overline{F}, \tau})}{dt} = F\,v \cos(\widehat{\overline{F}, \overline{v}}), \tag{29.14}$$

или

$$N = F_\tau v. \tag{29.14'}$$

С учетом формул (29.6) и (29.14) мощность сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси,

$$N = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = \sum M_z(\overline{F}_k^e)\omega, \tag{29.15}$$

где ω — угловая скорость вращения тела, рад/с.

Часть мощности или часть выполненной работы может затрачиваться на преодоление вредных сопротивлений. Для оценки этого явления вводится понятие «коэффициент полезного действия» (КПД), который обозначают η.

Коэффициент полезного действия — это отношение выполненной полезной работы $A_{пол}$ ко всей затраченной работе $A_{зат}$:

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{зат}}. \tag{29.16}$$

При расчете мощности, например, какого-либо двигателя с учетом КПД на основании формул (29.13) и (29.16) можно использовать формулу

$$N = \frac{A_{зат}}{t} = \frac{A_{пол}}{\eta t}. \tag{29.17}$$

При решении задач важным является соблюдение размерности физических величин в соответствии с выбранной системой единиц.

Единица измерения работы в СИ — джоуль (1 Дж = 1 Н · м), в системе МкГс — 1кГ · м.

Единица измерения мощности в СИ — ватт (1 Вт = 1 Дж/с), в системе МкГс — 1 кГ · м/с, 75 кГ · м/с = 1 л.с. (одна лошадиная сила).

Установим связь между 1 л.с. и 1 кВт:

1 кВт = 1000 Вт = 1000 Дж/с = 1000 Н · м/с, так как 1 кГ = 9,8 Н, то 1 кВт = 1000/9,8 = 102 кГ · м/с.

Тогда

$$1 \text{ кВт} = 102/75 = 1{,}36 \text{ л.с.}$$

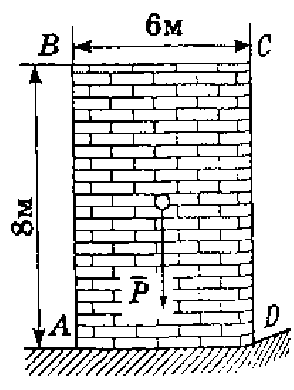
Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Показать на рисунке действующие на тело силы.
2. Записать в общем виде формулы, необходимые для вычисления искомых величин, и затем найти в общем виде выражения для определения этих величин.
3. Выполнить вычисления, проверить размерность величин, входящих в это выражение.

Задачи и решения

Задача 29.1

Бетонный блок $ABCD$, размеры которого указаны на рисунке, имеет массу 4000 кг. Определить работу, которую надо затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.



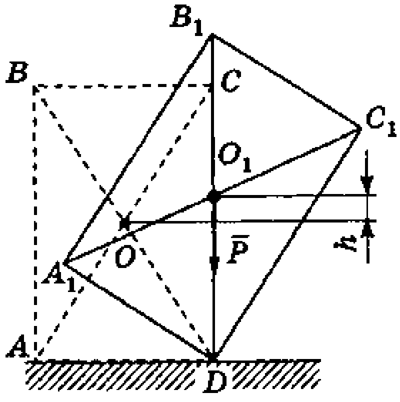
Решение

Чтобы опрокинуть блок, достаточно повернуть его до положения неустойчивого равновесия, когда диагональ DB займет вертикальное положение (см. рисунок). При этом необходимо совершить работу, равную работе силы тяжести $\overline{P}$ при перемещении точки ее приложения из положения O в положение O_1 на высоту h:

$$h = O_1 D - \frac{AB}{2}.$$

Из рисунка $O_1 D = \frac{B_1 D}{2}$,

$$B_1 D = \sqrt{A_1 B_1^2 + A_1 D^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ м}.$$



Тогда

$$h = 5 - 4 = 1 \text{ (м)}.$$

Рассчитаем работу, необходимую для опрокидывания блока:

$$A = |-mgh| = |-4000 \cdot 9{,}8 \cdot 1| = 39\,240 \text{ (Дж)}.$$

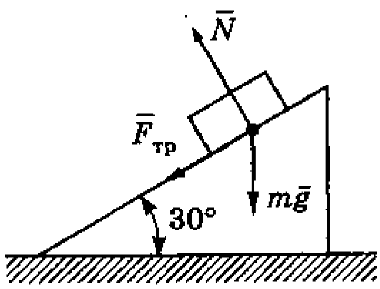
Ответ: 39,24 кДж.

Задача 29.2

Определить наименьшую работу, которую надо затратить для того, чтобы поднять на 5 м тело массы 2 т, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°. Коэффициент трения 0,5.

Решение

Наименьшая работа равна сумме работ силы тяжести $m\bar{g}$ и силы трения $\bar{F}_{тр}$ скольжения (см. рисунок):



$$A = \left| -mgh - F_{тр} \frac{h}{\sin 30°} \right|.$$

Найдем силу трения

$$F_{тр} = fN = fmg \cos 30°,$$

где N — реакция опоры, $N = mg \cos 30°$.

Тогда наименьшая работа

$$A = |-mgh - fmgh \operatorname{ctg} 30°| = |mgh(-1 - f \operatorname{ctg} 30°)| =$$

$$= 2000 \cdot 9{,}8 \cdot 5(-1 - 0{,}5 \cdot 1{,}73) = 183\,000 \text{ (Дж)} = 183 \text{ (кДж)}.$$

Ответ: 183 кДж.

Задача 29.3

Для того чтобы поднять 5000 м^3 воды на высоту 3 м, поставлен насос с двигателем в 2 л. с. Сколько времени потребуется для выполнения работы, если коэффициент полезного действия насоса 0,8?

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы, в данном случае работы, затраченной на поднятие воды, к работе движущей силы, которая должна быть больше полезной работы вследствие вредных сопротивлений.

Решение

Необходимая мощность

$$N = \frac{A_{зат}}{t},$$

где $A_{зат}$ — вся затраченная работа.

КПД насоса

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{зат}} \Rightarrow A_{зат} = \frac{A_{пол}}{\eta} = \frac{mgh}{\eta}.$$

Масса воды, поднимаемой насосом,

$$m = \rho V,$$

где ρ — плотность воды, $\rho = 1000$ кг/м^3; V — объем воды.

Тогда

$$N = \frac{mgh}{\eta t} = \frac{\rho V g h}{\eta t}.$$

Отсюда

$$t = \frac{\rho V g h}{\eta N}.$$

В условии N задано в лошадиных силах, 1 л.с. = 735 Вт. С учетом этого

$$t = \frac{1000 \cdot 5000 \cdot 9{,}8 \cdot 3}{0{,}8 \cdot 2 \cdot 735} = 125\,000 \text{с} = 34 \text{ч } 43 \text{ мин } 20 \text{ с}.$$

Ответ: t = 34 ч 43 мин 20 с.

Задача 29.4

Как велика мощность машины, поднимающей 84 раза в минуту молот массы 200 кг на высоту 0,75 м, если коэффициент полезного действия машины 0,7?

Решение

Необходимая мощность

$$N = \frac{A_{зат}}{t},$$

$$A_{зат} = \frac{A_{пол}}{\eta} = \frac{84mgh}{\eta}.$$

Тогда

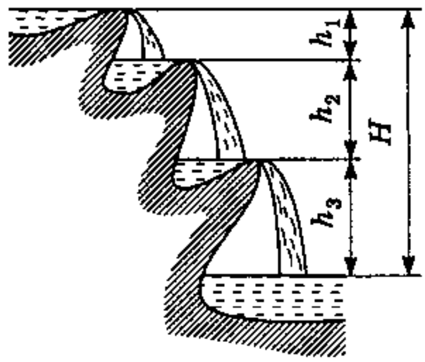
$$N = \frac{84mgh}{\eta t} = \frac{84 \cdot 200 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}75}{0{,}7 \cdot 60} = 2940 \text{ (Вт)}.$$

Ответ: 2,94 кВт.

Задача 29.5

Вычислить общую мощность трех водопадов, расположенных последовательно на одной реке. Высота падения воды: у первого водопада — 12 м, у второго — 12,8 м, у третьего —15 м. Средний расход воды в реке — 75,4 $м^3/с$.

Решение



Общая высота водопадов (см. рисунок) $H = h_1 + h_2 + h_3 = 12{,}0 + 12{,}8 + 15{,}0 = 39{,}8$ (м). Определим вес воды, протекшей за время Δt:

$$G = mg = V\rho g = V_р \Delta t \rho g,$$

где V — объем воды, $V = V_р \Delta t$, $V_р = 75{,}4$ $м^3/с$ — расход воды в реке; $\rho = 1 \cdot 10^3$ $кг/м^3$ — плотность воды.

Тогда работа

$$A = GH.$$

Искомая мощность

$$N = \frac{A}{\Delta t} = \frac{GH}{\Delta t} = V_p \rho g H = 75{,}4 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 39{,}8 = 29{,}4 \cdot 10^6 \text{ (Вт)} = 29{,}4 \text{ (МВт)}.$$

Ответ: 29,4 МВт.

Задача 29.6

Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 45, масса каждого вагона 10 т, сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона 3,3 м/с и потери в сети 5 %.

Решение

Мощность, потребляемая одним вагоном, идет на преодоление сил трения и с учетом потерь в сети равна

$$N_1 = \frac{100}{100-5} F_{тр} v.$$

Так как $F_{тр} = fmg$, то

$$N_1 = 1{,}05 fmgv.$$

Тогда суммарная мощность

$$N = nN_1 = \frac{n}{0{,}95} fmgv = \frac{45}{0{,}95} \cdot 0{,}02 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}3 =$$

$$= 306{,}4 \cdot 10^3 \text{ (Вт)} = 306{,}4 \text{ (кВт)}.$$

Ответ: 306,4 кВт.

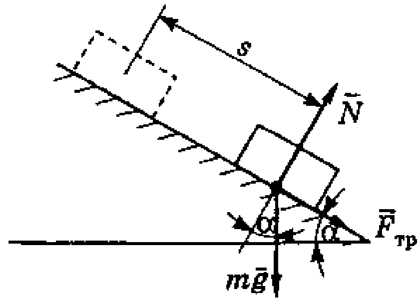
Задача 29.7

Вычислить работу, которая производится при подъеме груза массы 20 кг по наклонной плоскости на расстоянии 6 м, если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, равен 30°, а коэффициент трения равен 0,01.

Решение

Затраченная на подъем груза работа по модулю равна работе силы тяжести $m\bar{g}$ и силы трения $\bar{F}_{тр}$ (см. рисунок). Сила реакции опоры $\bar{N}$

работы не производит, так как она перпендикулярна перемещению. Таким образом



$$A = |A(\bar{F}_{тр}) + A(m\bar{g})| = |-F_{тр}s - mgs\sin\alpha| =$$

$$= fNs + mgs\sin\alpha = mgs(f\cos\alpha + \sin\alpha),$$

где $N = mg\cos\alpha$; $\alpha = 30°$.

Вычислим работу

$$A = 20 \cdot 9{,}8 \cdot 6 \cdot (0{,}01 \cdot 0{,}866 + 0{,}5) = 598 \text{ (Дж)}.$$

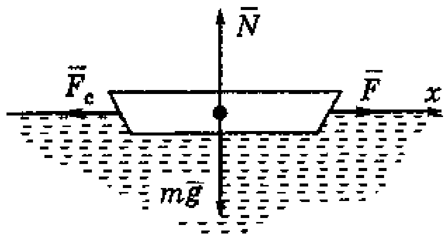
Ответ: 598 Дж.

Задача 29.8

Когда турбоход идет со скоростью 15 узлов, турбина его развивает мощность 3800 кВт. Определить силу сопротивления воды движению турбохода, зная, что коэффициент полезного действия турбины и винта равен 0,41 и 1 узел = 0,5144 м/с.

Решение

При прямолинейном равномерном движении турбохода действующие на него силы уравновешены и поэтому развиваемая турбинами мощность с учетом КПД идет на преодоление силы сопротивления $\bar{F}_c$ воды (см. рисунок):



$$\eta N = F_c v, \qquad (1)$$

где η — КПД; N — мощность; v — скорость турбохода.

Из формулы (1) найдем

$$F_c = \frac{\eta N}{v} = \frac{0{,}41 \cdot 3800 \cdot 10^3}{15 \cdot 0{,}5144} = 201{,}9 \cdot 10^3 \text{ (Н)} = 201{,}9 \text{ (кН)}.$$

Ответ: 201,9 кН.

Задача 29.9

Найти мощность двигателя внутреннего сгорания, если среднее давление на поршень в течение всего хода равно 49 Н на 1 см^2, длина хода поршня 40 см, площадь поршня 300 см^2, число рабочих ходов 120 в минуту и коэффициент полезного действия 0,9.

Решение

Мощность двигателя внутреннего сгорания с учетом КПД вычислим по формуле

$$N = \eta P v,$$

где η — КПД двигателя; $P = qF$ — сила давления на поршень, q — среднее давление на поршень, F — площадь поршня; v — скорость поршня.

Рассчитаем силу давления и скорость поршня:

$$P = 49 \cdot 300 = 14\,700 \text{ (Н)},$$

$$v = 0{,}4 \cdot \frac{120}{60} = 0{,}8 \text{ (м/с)}.$$

Тогда

$$N = 0{,}9 \cdot 14\,700 \cdot 0{,}8 = 10\,584 \text{ (Вт)} = 10{,}6 \text{ (кВт)}.$$

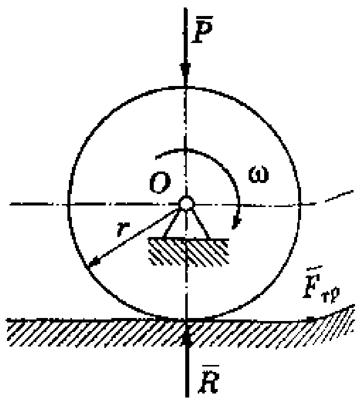
Ответ: 10,6 кВт.

Задача 29.10

Шлифовальный круг диаметра 0,6 м делает 120 об/мин. Потребляемая мощность 1,2 кВт. Коэффициент трения шлифовального круга о деталь равен 0,2. С какой силой круг прижимает шлифуемую деталь?

Решение

Мощность при шлифовании расходуется на преодоление сопротивления вращению круга, создаваемого силой трения (см. рисунок), и равна



$$N = M_0(\bar{F}_{тр})\omega,$$

где $M_0(\bar{F}_{тр}) = F_{тр} r = Rfr = Pfr$, R — нормальная реакция опоры; $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Тогда

$$N = Pfr\frac{\pi n}{30}.$$

Откуда

$$P = \frac{30N}{\pi rfn} = \frac{30 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 120} = 1591{,}5 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 1591,5 Н.

Задача 29.11

Определить мощность двигателя продольно-строгального станка, если длина рабочего хода 2 м, его продолжительность 10 с, сила резания 11,76 кН, коэффициент полезного действия станка 0,8. Движение считать равномерным.

Решение

Мощность двигателя продольно-строгального станка вычислим по формуле

$$N = \frac{Pv}{\eta},$$

где η — КПД станка; P — сила резания; v — скорость резания. Так как движение равномерное, то $v = \frac{s}{t} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ м/с.

Тогда

$$N = \frac{11{,}76 \cdot 0{,}2}{0{,}8} = 2{,}94 \text{ (кВт)}.$$

Ответ: 2,94 кВт.

Задача 29.12

К концу упругой пружины подвешен груз массы M. Для растяжения пружины на 1 м надо приложить силу в c Н. Составить выражение полной механической энергии груза на пружине. Движение отнести к оси x, проведенной вертикально вниз из положения равновесия груза на пружине.

Р е ш е н и е

Полная механическая энергия груза E на пружине равна сумме кинетической T_1, потенциальной энергии Π_1 груза и потенциальной энергии Π_2 пружины (при определении Π_1 и Π_2 за нулевой уровень принято положение статического равновесия груза):

$$E = T_1 + \Pi_1 + \Pi_2.$$

Поскольку

$$T_1 = \frac{M\dot{x}^2}{2},$$

$$\Pi_1 = -Mgx,$$

$$\Pi_2 = -\int_x^0 cxdx = \frac{cx^2}{2},$$

то

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{cx^2}{2} - Mgx.$$

О т в е т: $E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 - Mgx.$

Задача 29.13

При ходьбе на лыжах на дистанцию в 20 км по горизонтальному пути центр тяжести лыжника совершал гармонические колебания с амплитудой 8 см и с периодом $T = 4$ с, масса лыжника 80 кг, а коэффициент трения лыж о снег $f = 0{,}05$. Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 час 30 мин, а также среднюю мощность лыжника.

П р и м е ч а н и е. Считать, что работа торможения при опускании центра тяжести лыжника составляет 0,4 работы при подъеме центра тяжести на ту же высоту.

Р е ш е н и е

Определим работу по преодолению сил трения:

$$A(F_{тр}) = |-F_{тр}s|,$$

где $F_{тр} = mgf$.

Тогда

$$A(\overline{F}_{\text{тр}}) = mgfs = 80 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}05 \cdot 20\,000 = 784 \text{ (кДж)}.$$

Определим работу $A(m\overline{g})$ силы тяжести. За 1,5 ч центр тяжести лыжника совершил $k = \dfrac{t}{T} = \dfrac{5400}{4} = 1350$ циклов колебаний, так как работа торможения при опускании центра тяжести составляет 0,4 работы при подъеме центра тяжести, то работа силы тяжести за один цикл

$$A'(m\overline{g}) = 1{,}4mg \cdot 2a,$$

где a — амплитуда колебаний.

Работа силы тяжести за все время движения

$$A(m\overline{g}) = kA'(m\overline{g}) = 1{,}4kmg \cdot 2a = 1350 \cdot 1{,}4 \cdot 80 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}08 = 237 \text{ (кДж)}.$$

Тогда работа, совершенная лыжником на всей дистанции,

$$A = A(\overline{F}_{\text{тр}}) + A(m\overline{g}) = 784 + 237 = 1021 \text{ (кДж)},$$

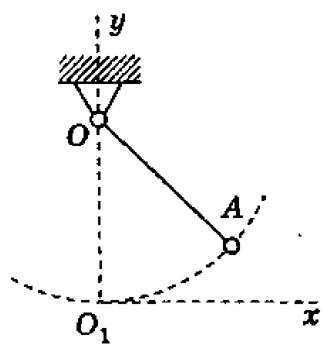
а средняя мощность

$$N = \frac{A}{t} = \frac{1021}{1{,}5 \cdot 3600} = 189{,}1 \text{ (Вт)}.$$

Ответ: A = 1021 кДж; N = 189,1 Вт.

Задача 29.14

Математический маятник A веса P и длины l под действием горизонтальной силы Px/l поднялся на высоту y. Вычислить потенциальную энергию маятника двумя способами: 1) как работу силы тяжести, 2) как работу, произведенную силой Px/l, и указать, при каких условиях оба способа приводят к одинаковому результату.

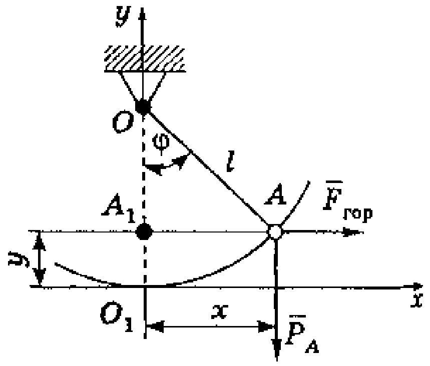


Решение

1) Вычислим потенциальную энергию маятника в положении A как работу силы тяжести $\overline{P}$:

$$\Pi(\overline{P}_A) = P_A\, y = Py.$$

2) Вычислим потенциальную энергию как работу силы $\frac{Px}{l}$, которую обозначим $\overline{F}_{гор}$ (см. рисунок):



$$П(\overline{F}_{гор}) = \int_0^x F_{гор}dx = \int_0^x \frac{Px}{l}dx = \frac{Px^2}{2l}.$$

Оба способа приводят к одному результату, если

$$Py = \frac{Px^2}{2l},$$

т.е. когда $y = \frac{x^2}{2l}$ или $2yl = x^2$.

Запишем выражение для y (см. рисунок):

$$y = l - l\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}$.

Тогда

$$y = l\left(1-\sqrt{\frac{1-x^2}{l^2}}\right) \Rightarrow (y-l)^2 = \left(-l\sqrt{\frac{1-x^2}{l^2}}\right)^2 \Rightarrow 2yl = x^2 + y^2.$$

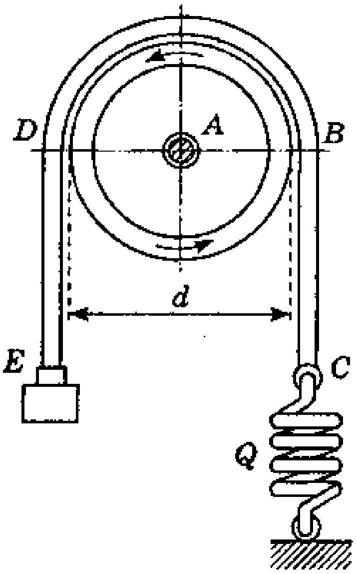
Оба результата будут иметь одно значение, если в этой формуле можно пренебречь y^2.

Ответ: 1) Py; 2) $\frac{1}{2}\frac{Px^2}{l}$. Оба ответа одинаковы, если можно пренебречь y^2.

Задача 29.15

Для измерения мощности двигателя на его шкив A надета лента с деревянными колодками. Правая ветвь BC ленты удерживается пружинными весами Q, а левая ее ветвь DE натягивается грузом. Определить мощность двигателя, если, вращаясь равномерно, он делает

120 об/мин; при этом пружинные весы показывают натяжение правой ветви ленты в 39,24 Н; масса груза равна 1 кг, диаметр шкива $d = 63{,}6$ см. Разность натяжений ветвей BC и DE ленты равна силе, тормозящей шкив. Определить работу этой силы в 1 с.



Решение

Найдем величину силы, тормозящей шкив (см. рисунок):

$$F_c = F - mg = 39{,}24 - 1 \cdot 9{,}8 = 29{,}4 \text{ (Н)}.$$

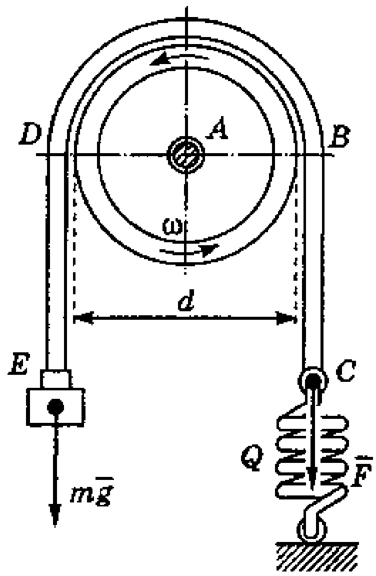
Определим мощность двигателя:

$$N = F_c v,$$

где v — скорость на ободе шкива, $v = \omega \dfrac{d}{2} = \dfrac{\pi n}{30}\dfrac{d}{2} = \dfrac{\pi d n}{60}$.

Тогда

$$N = F_c \frac{\pi d n}{60} = \frac{29{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}636 \cdot 120}{60} = 117{,}5 \text{ (Вт)}.$$



Примечание. Полученное для N выражение можно представить также в виде

$$N = M_{сопр}\omega,$$

где $M_{сопр} = F_c \dfrac{d}{2}$ — момент сопротивления вращению шкива; $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$ — угловая скорость шкива.

Ответ: 117,5 Вт.

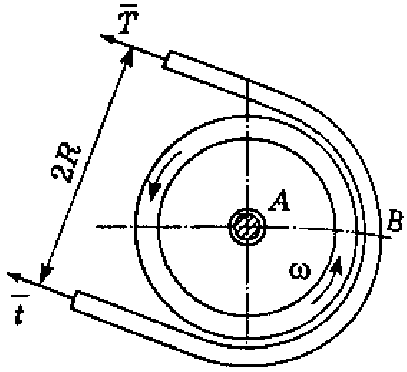
Задача 29.16

Посредством ремня передается мощность 14,71 кВт. Радиус ременного шкива 0,5 м, угловая скорость шкива соответствует 150 об/мин. Предполагая, что натяжение T ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения t ведомой ветви, определить натяжение T и t.

Р е ш е н и е

Мощность, передаваемая ременной передачей,

$$N = M_{вр}\,\omega,$$



где $M_{вр}$ — вращающий момент (см. рисунок), $M_{вр} = (T - t)R = (2t - t)R = tR$; ω — угловая скорость шкива, $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Тогда

$$N = \frac{tR\pi n}{30}.$$

Откуда натяжение ведомой ветви ремня

$$t = \frac{30N}{\pi n R} = \frac{30 \cdot 14{,}71 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 150 \cdot 0{,}5} = 1873 \text{ (Н)},$$

а натяжение ведущей ветви ремня

$$T = 2t = 2 \cdot 1873 = 3746 \text{ (Н)}.$$

О т в е т: t = 1873 Н; T = 3746 Н.

30. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Методические указания к решению задач

Кинетическая энергия материальной точки — одна из мер механического движения. Это скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат скорости ее движения, т.е. $\frac{mv^2}{2}$. Характеристикой действия силы в этом случае является работа силы.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки устанавливает связь между кинетической энергией точки и работой силы, действующей на нее. Различают две формы записи этой теоремы — дифференциальную и интегральную (или конечную).

Дифференциальная форма записи:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA, \qquad (30.1)$$

дифференциал от кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на нее.

Интегральная форма записи:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k), \qquad (30.2)$$

изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к точке на том же перемещении.

При решении задач теорема в дифференциальной форме применяется, когда на точку действуют переменные силы, и в частности силы, зависящие от перемещения или скорости. В этом случае уравнение (30.1) может быть сведено к дифференциальному уравнению движения точки с разделяющимися переменными.

Если же на точку действует переменная сила, зависящая только от перемещения, то, записав выражение элементарной работы, а затем проинтегрировав и определив работу силы на конечном перемещении, можно от дифференциальной формы перейти к интегральной, т.е. применить уравнение (30.2).

Вычисление работы сил рассмотрено в § 29.

Часть задач этого параграфа может быть решена с использованием ***закона сохранения механической энергии***, который формулируется следующим образом:

в любом положении материальной точки в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергий точки есть величина постоянная.

Согласно этому закону

$$\frac{mv^2}{2} + П = \text{const}. \qquad (30.3)$$

Силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которого на материальную точку действуют силы, зависящие от координат точки и времени. Силовое поле называется *стационарным*, если силы не зависят от времени.

Стационарное силовое поле называется потенциальным, если работа сил, действующих на точку, не зависит от траектории точки. Такое силовое поле создают силы тяжести, силы упругости, силы тяготения (притяжения).

Потенциальная энергия материальной точки — это энергия покоя. Она представляет собой работу, совершаемую потенциальными силами, при перемещении точки из заданного положения в некоторое нулевое положение (в нулевой уровень).

Проекции силы на оси декартовой системы координат в потенциальном силовом поле определяются по формулам

$$F_x = -\frac{dП}{dx}, \; F_y = -\frac{dП}{dy}, \; F_z = -\frac{dП}{dz}, \qquad (30.4)$$

где $П$ — потенциальная энергия точки.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Определить, в какой форме следует применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки, и записать соответствующую формулу (30.1) или (30.2).

2. Изобразить на рисунке движущуюся точку (тело) в произвольном положении и показать все действующие на нее силы, в том числе и силы реакций связи, если точка несвободна.

3. Определить начальную v_0 и конечную v скорости точки (возможно, что одна из скоростей или обе могут быть равны нулю).

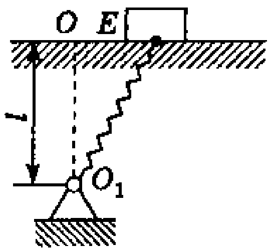
4. Определить в общем виде работу (элементарную или на конечном перемещении) всех сил, действующих на точку.

5. Пользуясь равенствами (30.1) или (30.2), составить уравнение и найти искомые величины в общем виде.

6. Провести вычисления. При этом обращать внимание на то, чтобы все величины имели размерность одной и той же системы единиц.

Задачи и решения

Задача 30.1

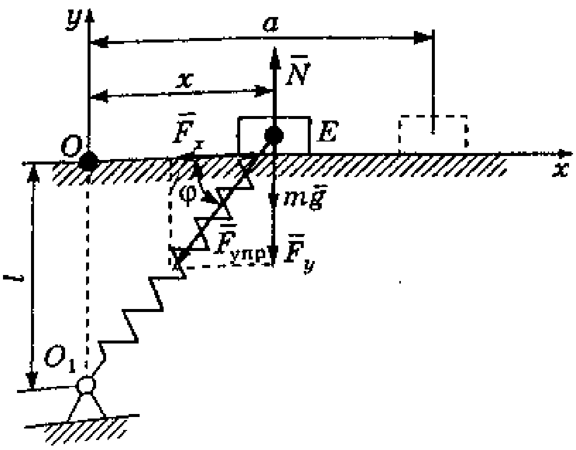


Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарику O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; $OO_1 = l$. В начальный момент тело E отклонено от положения равновесия O на конечную величину $OE = a$ и отпущено без начальной скорости. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k). \qquad (1)$$



Считаем, что пружина прикреплена к телу E с «натягом», т.е. $l_0 < l$. В этом случае положением устойчивого равновесия является начало координат O и для проекции силы упругости $\bar{F}_{упр}$ на ось x (см. рисунок) получим

$$F_x = -F_{упр}\cos\varphi =$$
$$= -c\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

Вертикальная составляющая F_y силы упругости $\bar{F}_{упр}$, сила тяжести $m\bar{g}$ и нормальная реакция $\bar{N}$ перпендикулярны к направлению перемещения и их работа равна нулю.

Вычислим работу сил упругости

$$A(\bar{F}_{упр}) = A(\bar{F}_x) = -c\int_a^0 \left(\sqrt{l^2+x^2} - l_0\right)\frac{x\,dx}{\sqrt{l^2+x^2}} = -c\int_a^0 x\,dx + \frac{cl_0}{2}\int_a^0 \frac{d(l^2+x^2)}{\sqrt{l^2+x^2}} =$$

$$= -\frac{cx^2}{2}\Big|_a^0 + cl_0\sqrt{l^2+x^2}\Big|_a^0 = c\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2+a^2}\right)\right]. \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1) и с учетом того, что $v_0 = 0$, найдем скорость тела в момент прохождения положения равновесия:

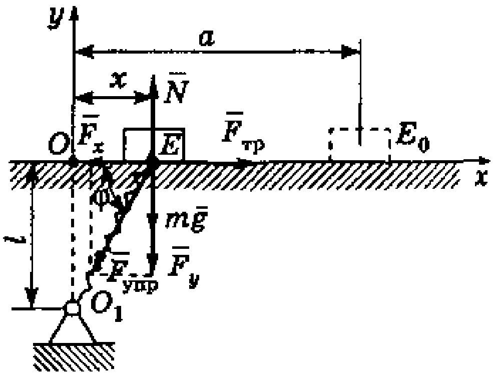
$$v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2+a^2}\right)\right]}.$$

О т в е т: $v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2+a^2}\right)\right]}$.

Задача 30.2

В условиях предыдущей задачи определить скорость тела E в момент прохождения положения равновесия O, предполагая, что плоскость шероховата и коэффициент трения скольжения равен f.

Р е ш е н и е



По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k). \qquad (1)$$

Работу будут производить сила упругости $F_{упр}$ (см. решение задачи 30.1) и сила трения $\bar{F}_{тр}$ (см. рисунок).

Найдем силу трения:

$$F_{тр} = fN = f(mg + F_y) = f(mg + F_{упр}\sin\varphi) = fmg + fc(\sqrt{l^2+x^2} - l_0)\times$$

$$\times\frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}} = f(mg + cl) - \frac{fcl_0 l}{\sqrt{l^2+x^2}}.$$

Вычислим работу силы трения:

$$A(\bar{F}_{\text{тр}}) = f(mg + cl)\int_a^0 dx - fcl_0 l\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{l^2 + x^2}} = f(mg + cl)x\Big|_a^0 -$$

$$-fcl_0 l \ln\left(x + \sqrt{l^2 + x^2}\right)\Big|_a^0 = -f(mg + cl)a - fcl_0 l\left[\ln l - \ln\left(a + \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right] =$$

$$= -f\left[(mg + cl)a + cl_0 l \ln\frac{1}{a + \sqrt{l^2 + a^2}}\right]. \qquad (2)$$

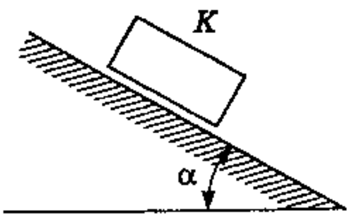
Подставим в уравнение (1) $v_0 = 0$, выражение (2) и значение работы силы упругости [см. формулу (2) в решении задачи 30.1] и найдем скорость тела E с учетом трения скольжения:

$$v^2 = \frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right] - f\left[(mg + cl)a + cl_0 l \ln\frac{l}{a + \sqrt{l^2 + a^2}}\right]\right\}.$$

Ответ:

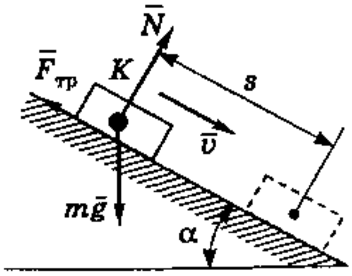
$$v^2 = \frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2} + l_0\left(l - \sqrt{l^2 + a^2}\right)\right] - f\left[(mg + cl)a + cl_0 l \ln\frac{l}{a + \sqrt{l^2 + a^2}}\right]\right\}.$$

Задача 30.3



Тело K находится на шероховатой наклонной плоскости в покое. Угол наклона плоскости к горизонту α и $f_0 > \operatorname{tg}\alpha$, где f_0 — коэффициент трения покоя. В некоторый момент телу сообщена начальная скорость $\bar{v}_0$, направленная вдоль плоскости вниз. Определить путь s, пройденный телом до остановки, если коэффициент трения при движении равен f.

Решение



По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k). \qquad (1)$$

Работу будут производить сила тяжести и сила трения (см. рисунок). Следовательно,

$$\sum A(\overline{F}_k) = A(m\overline{g}) - A(\overline{F}_{тр}) = mgh - F_{тр}s = mgs\sin\alpha - fNs =$$

$$= mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

где $h = mg\sin\alpha$; $N = mg\cos\alpha$.

С учетом того, что $v = 0$, формула (1) примет вид

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Откуда найдем путь, пройденный телом до остановки:

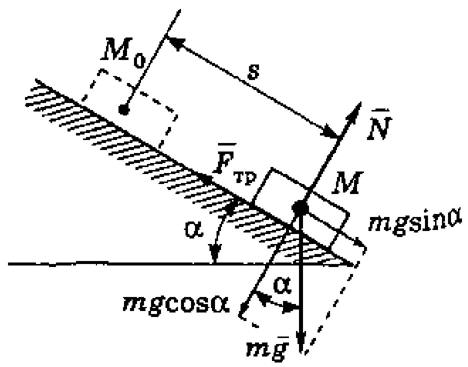
$$s = \frac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

Ответ: $s = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$.

Задача 30.4

По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения?

Решение



По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k), \qquad (1)$$

где $v_0 = 0$.

Работу будут производить (см. рисунок) сила тяжести и сила трения.

Найдем

$$\sum A(\overline{F}_k) = A(m\overline{g}) - A(\overline{F}_{тр}) = smg\sin\alpha - sfmg\cos\alpha = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mv^2}{2} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

где $\alpha = 30°$.

Откуда скорость тела

$$v = \sqrt{2gs(\sin 30° - f\cos 30°)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot (0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}866)} = 4{,}02 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 4,02 м/с.

Задача 30.5

Снаряд массы 24 кг вылетает из ствола орудия со скоростью 500 м/с. Длина ствола орудия 2 м. Каково среднее значение давления газов на снаряд?

Решение

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k),$$

где v_0 — скорость снаряда в стволе до выстрела, $v_0 = 0$.

Будем считать, что работу совершает только сила давления газов на снаряд, причем среднее значение давления газа $P_{ср}$ остается постоянным, пока снаряд движется в стволе. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = P_{ср} l.$$

Откуда

$$P_{ср} = \frac{mv^2}{2l} = \frac{24 \cdot 500^2}{2 \cdot 2} = 1500 \text{ (кН)}.$$

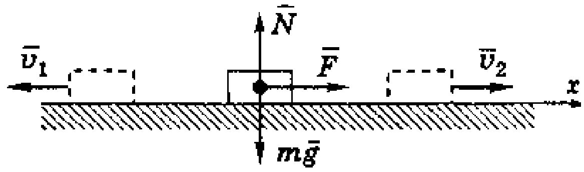
Ответ: 1500 кН.

Задача 30.6

Материальная точка массы 3 кг двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 55 м/с и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

Решение

По теореме об изменении количества движения в проекции на ось x (см. рисунок):



$$mv_{2x} - mv_{1x} = F_x t. \qquad (1)$$

Так как $v_{1x} = -v_1$, $v_{2x} = v_2$, $F_x = F$, то из формулы (1) найдем, что

$$F = m\frac{v_1 + v_2}{t} = 3\cdot\frac{5+55}{30} = 6 \text{ (Н)}.$$

Работу силы $\bar{F}$ найдем по теореме об изменении кинетической энергии:

$$A(\bar{F}) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{3}{2}[55^2 - (-5)^2] = 4{,}5 \text{ (кДж)}.$$

Ответ: $F = 6$ Н; $A = 4{,}5$ кДж.

Задача 30.7

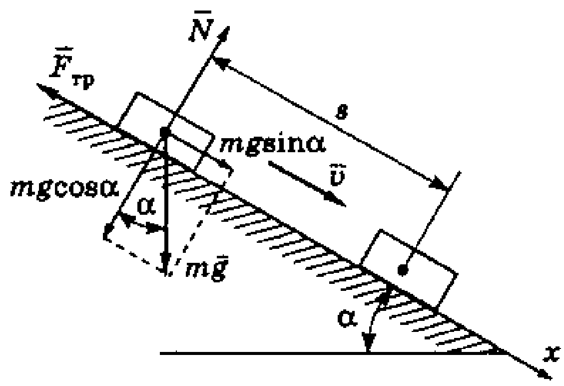
При подходе к станции поезд идет со скоростью 10 м/с под уклон, угол которого $\alpha = 0{,}008$ рад. В некоторый момент машинист начинает тормозить поезд. Сопротивление от трения в осях составляет 0,1 от веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через какое время от начала торможения поезд остановится. Принять, что $\sin\alpha = \alpha$.

Решение

При поступательном движении поезд можно принять за материальную точку. По теореме об изменении количества движения в проекции на ось x

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt$$

или



$$mv_1 - mv_0 = \int_0^{t_1} (mg\sin\alpha - F_{тр})\,dt =$$

$$= (mg\sin\alpha - F_{тр})t_1, \qquad (1)$$

где $F_x = mg\cos\alpha$ (см. рисунок).

С учетом того, что $v_1 = 0$, а $F_{тр} = 0{,}1mg$ по условию, формула (1) примет вид

$$-v_0 = g(\sin\alpha - 0{,}1)t_1.$$

Отсюда, приняв, что $\sin\alpha = \alpha$, найдем

$$t_1 = \frac{v_0}{g(0{,}1g\sin\alpha)} = \frac{10}{9{,}8(0{,}1-0{,}008)} = 11{,}08 \text{ (с)}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k), \qquad (2)$$

где $v_1 = 0$;

$$\sum A(\bar{F}_k) = mgs\,\sin\alpha - F_{тр}s = mgs\,\sin\alpha - 0{,}1mgs = mgs(\alpha - 0{,}1).$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$-\frac{v_0^2}{2} = gs(\alpha - 0{,}1).$$

Откуда

$$s = \frac{v_0^2}{2g(0{,}1-\alpha)} = \frac{10^2}{2\cdot 9{,}8\cdot(0{,}1-0{,}008)} = 55{,}3 \text{ (м)}.$$

Ответ: 55,3 м; 11,08 с.

Задача 30.8

Поезд массы 200 т идет по горизонтальному участку пути с ускорением 0,2 м/с^2. Сопротивление от трения в осях составляет 0,01 веса поезда и считается не зависящим от скорости. Определить мощность, развиваемую тепловозом в момент $t = 10$ с, если в начальный момент скорость поезда равнялась 18 м/с.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Мощность тепловоза

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mva,$$

где a — ускорение.

При $t = t_1 = 10$ с

$$N_1 = mv_1a_1,$$

где $v_1 = v_0 + at_1 = 18 + 0{,}2 \cdot 10 = 20$ (м/с); $a_1 = a + \mu g = 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 9{,}8 =$ $= 0{,}298$ (м/с^2).

В результате найдем

$$N_1 = 200 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 0{,}298 = 1192 \text{ (кВт)}.$$

Для вычислений мощности проще воспользоваться формулой

$$N_1 = Fv_1,$$

где F — сила тяги тепловоза. Силу тяги можно найти из уравнения $ma = F - F_{\text{тр}} \Rightarrow F = ma + F_{\text{тр}} = ma + \mu mg = m(a + \mu g)$.

Тогда

$$N_1 = m(a + \mu g)v_1 = 200 \cdot 10^3 (0{,}2 + 0{,}01 \cdot 9{,}8)20 = 1192 \text{ (кВт)}.$$

Замечание. Силу тяги тепловоза F можно найти также, применив теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

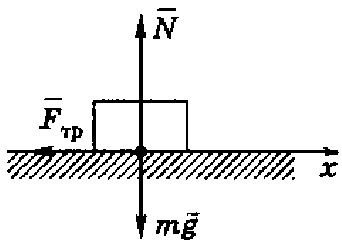
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (F - F_{\text{тр}})s.$$

Ответ: 1192 кВт.

Задача 30.9

Брус начинает двигаться с начальной скоростью v_0 по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние s. Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению.

Решение



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\bar{F}_k).$$

Так как $v=0$, а работу совершает только сила трения (см. рисунок), то

$$-\frac{mv_0^2}{2}=-mgfs.$$

Откуда найдем коэффициент трения

$$f=\frac{v_0^2}{2gs}.$$

Ответ: $f=\dfrac{v_0^2}{2gs}$.

Задача 30.10

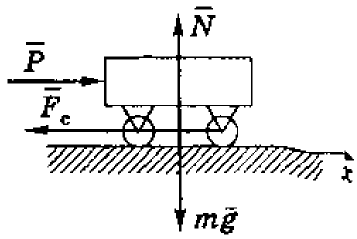
Железнодорожная платформа имеет массу 6 т и при движении испытывает сопротивление от трения в осях, равное 0,0025 ее веса. Рабочий уперся в покоящуюся платформу и покатил ее по горизонтальному и прямолинейному участку пути, действуя на нее с силой 250 Н. Пройдя 20 м, он предоставил платформе катиться самой. Вычислить, пренебрегая сопротивлением воздуха и трением колес о рельсы, наибольшую скорость платформы во время движения, а также весь путь, пройденный ею до остановки.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\bar{F}_k). \qquad (1)$$

Разобьем весь путь платформы на два участка: на первом — s_1, действует сила сопротивления $\bar{F}_c$ и сила $\bar{P}$, с которой рабочий толкает платформу (см. рисунок). Так как $v_0 = 0$, $v = v_{max}$, то уравнение (1) будет иметь вид



$$\frac{mv_{max}^2}{2} = (P - F_c)s_1.$$

Откуда

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(P - F_c)s_1}{m}} = \sqrt{\frac{2(250 - 0{,}0025 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8)20}{6 \cdot 10^3}} = 0{,}82 \text{ (м/с)}.$$

На втором участке s_2, когда платформа катится сама, на нее действует только сила сопротивления, а платформа движется до остановки. Поэтому уравнение (1) имеет вид

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_c s_2,$$

где $v_2 = 0$; $v_1 = v_{max}$; $F_c = 0{,}0025mg$.

Тогда

$$s_2 = \frac{v_{max}^2}{2 \cdot 0{,}0025g} = \frac{0{,}82^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 14 \text{ (м)}.$$

Найдем весь путь, пройденный платформой до остановки:

$$s = s_1 + s_2 = 20 + 14 = 34 \text{ (м)}.$$

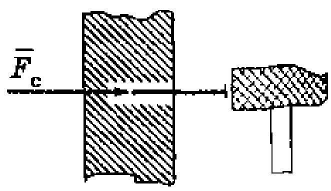
Ответ: $v_{max} = 0{,}82$ м/с; $s = 34$ м.

Задача 30.11

Гвоздь вбивается в стену, оказывающую сопротивление 700 Н. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину $l = 0{,}15$ см. Определить массу молотка, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость $v = 1{,}25$ м/с.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:



$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k).$$

Так как работу совершает только сила сопротивления, а $v = 0$, то

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_c l.$$

Откуда рассчитаем массу молотка

$$m = \frac{2F_c l}{v_0^2} = \frac{2 \cdot 700 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-2}}{1{,}25^2} = 1{,}344 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 1,344 кг.

Задача 30.12

Упавший на Землю метеорит массы 39 кг углубился в почву на 1,875 м. Вычислено, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление $5 \cdot 10^5$ Н. С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты он должен был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха.

Решение

Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме на участке проникновения метеорита в почву до остановки запищем

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_c s + mgs, \qquad (1)$$

где v_0 — скорость метеорита в момент падения на Землю; F_c — сила сопротивления грунта, $F_c = 5 \cdot 10^5$ Н; $m\bar{g}$ — сила тяжести метеорита; s — глубина проникновения метеорита в почву.

Тогда из формулы (1) найдем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(F_c - mg)s}{m}} = \sqrt{\frac{2(5 \cdot 10^5 - 39 \cdot 9{,}8) \cdot 1{,}875}{39}} = 219{,}18 \text{ (м/с)}.$$

Если пренебречь силой тяжести из-за ее незначительности, то

$$v_0 = \sqrt{\frac{2F_c s}{m}} = \sqrt{\frac{1{,}875 \cdot 10^6}{39}} = 219{,}26 \text{ (м/с)}.$$

По формуле свободного падения определим высоту, с которой должен упасть метеорит:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{48074{,}95}{2 \cdot 9{,}8} \approx 2452{,}8 \text{ (м)}.$$

Ответ: $v_0 = 219{,}3$ м/с; $H \approx 2453$ м.

Задача 30.13

Незаторможенный поезд массы 500 т, двигаясь с выключенным двигателем, испытывает сопротивление $R = (7650 + 500v)$ Н, где v – скорость в м/с. Зная начальную скорость поезда $v_0 = 15$ м/с, определить, какое расстояние пройдет поезд до остановки.

Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

или

$$mvdv = -Rds,$$

где R — сила сопротивления.

Откуда

$$ds = -\frac{mvdv}{R}.$$

Проинтегрируем это выражение с учетом данных задачи: $R = 7650 +$ $+ 500v$, $m = 500 \cdot 10^3$,

$$\int_0^s ds = -\int_{v_0}^{0} \frac{500 \cdot 10^3 vdv}{7650 + 500v} = -1 \cdot 10^3 \int_{v_0}^{0} \frac{vdv}{15{,}3 + v} = -1 \cdot 10^3 \int_{v_0}^{0} \frac{[(15{,}3 + v) - 15{,}3]dv}{15{,}3 + v} =$$

$$= -1 \cdot 10^3 \left[\int_{v_0}^{0} dv - \int_{v_0}^{0} \frac{15{,}3dv}{15{,}3 + v}\right] = -1 \cdot 10^3 \left[-v_0 - 15{,}3 \ln(15{,}3 + v)\Big|_{v_0}^{0}\right] =$$

$$= -1 \cdot 10^3 \{-v_0 - 15{,}3[\ln 15{,}3 - \ln(15{,}3 + v_0)]\} = 1 \cdot 10^3 \left(v_0 - 15{,}3 \ln \frac{15{,}3 + v_0}{15{,}3}\right).$$

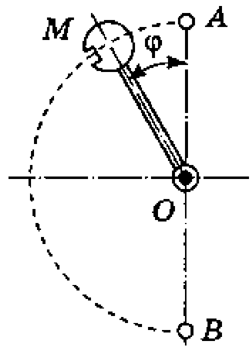
Тогда

$$s = 1 \cdot 10^3 \left[15 - 15{,}3 \ln\left(1 + \frac{15}{15{,}3} \right) \right] = 4{,}5 \text{ (км)}.$$

Ответ: 4,5 км.

Задача 30.14

Главную часть установки для испытания материалов ударом составляет тяжелая стальная отливка M, прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $OM = 0{,}981$ м. Определить скорость v этой точки в нижнем положении B, если она падает из верхнего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.



Решение

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k), \qquad (1)$$

где $v_0 = 0$; $\sum A(\overline{F}_k) = mgh$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где $h = 2R = 2 \cdot OM = 1{,}962$ м.

Откуда

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}962} = 6{,}2 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v = 6{,}2$ м/с.

Задача 30.15

Написать выражение потенциальной энергии упругой рессоры, прогибающейся на 1 см от нагрузки в 4 кН, предполагая, что прогиб x возрастает прямо пропорционально нагрузке.

Решение

Потенциальную энергию рессоры вычислим по формуле

$$П = \frac{cx^2}{2} + C,$$

где c — жесткость рессоры; C — постоянная, характеризующая начальное значение потенциальной энергии.

Согласно условию задачи

$$c = 4 \text{ кН/см} = 400 \text{ кН/м};$$

тогда

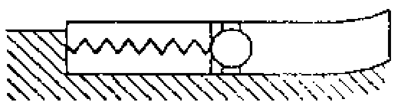
$$П = 200 \cdot 10^3 x^2 + C \text{ (если } x \text{ в м)},$$

или, если x в см,

$$П = \frac{200 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^4} x^2 + C = 20x^2 + C \text{ (Дж)}.$$

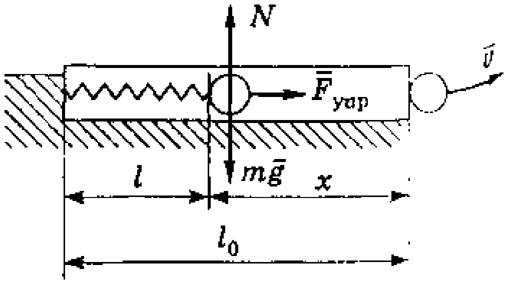
Ответ: $П = (20x^2 + C)$ Дж, если x в см.

Задача 30.16



Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 см, равна 1,96 Н. С какой скоростью v вылетит из трубки шарик массы 30 г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально.

Решение



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k).$$

Работу на перемещении x совершает только сила упругости $\bar{F}_{упр}$, а $v_0 = 0$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{cx^2}{2},$$

где $x = l_0 - l = 0{,}1$ м; c — жесткость пружины, $c = 196$ Н/м.

Отсюда

$$v = x\sqrt{\frac{c}{m}} = (l_0 - l)\sqrt{\frac{c}{m}} = 0{,}1\sqrt{\frac{196}{0{,}03}} = 8{,}08 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v = 8{,}08$ м/с.

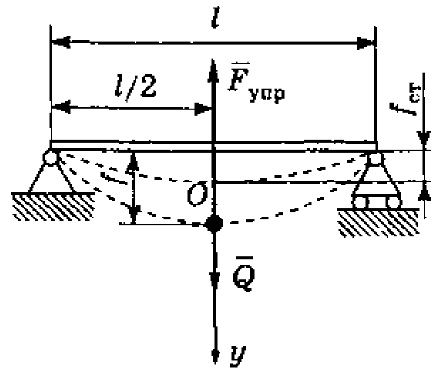
Задача 30.17

Статический прогиб балки, загруженной посередине грузом Q, равен 2 мм. Найти наибольший прогиб балки, пренебрегая ее массой, в двух случаях: 1) когда груз Q положен на неизогнутую балку и опущен без начальной скорости; 2) когда груз Q падает на середину неизогнутой балки с высоты 10 см без начальной скорости.

Примечание. При решении задачи следует иметь в виду, что сила, действующая на груз со стороны балки, пропорциональна ее прогибу.

Решение

1) Рассмотрим движение груза, положенного на середину балки без начальной скорости, под действием силы тяжести $\bar{Q}$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$. Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:



$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = Qf - \int_0^f F_{упр}dy, \quad (1)$$

где $F_{упр} = cy$.

Так как $v_0 = 0$ и $v = 0$, то согласно формуле (1)

$$Qf = \int_0^f cydy = \frac{cy^2}{2}\bigg|_0^f = \frac{cf^2}{2}.$$

Откуда

$$f = \frac{2Q}{c},$$

так как в положении равновесия $cf_{\text{ст}} = Q$, то $\frac{Q}{c} = f_{\text{ст}}$, тогда $f = 2f_{\text{ст}} = 2 \cdot 0{,}002 = 0{,}004$ (м) = 4 (мм).

2) Определим скорость, с которой груз падает на балку:

$$\frac{m(v')^2}{2} - \frac{m(v_0')^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = QH,$$

где H — высота, с которой груз падает на балку; $v_0' = 0$.

Откуда найдем

$$v' = \sqrt{\frac{2QH}{m}} = \sqrt{2gH}.$$

Рассмотрим движение груза на упругой балке:

$$\frac{m(v'')^2}{2} - \frac{m(v_0'')^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = Qf - \frac{cf^2}{2}, \tag{2}$$

где $v'' = 0$, $v_0'' = v' = \sqrt{2gH}$.

После подстановки этих значений в формулу (2) получим

$$-\frac{m}{2} \cdot 2gH = Qf - \frac{cf^2}{2},$$

$$-QH = Qf - \frac{cf^2}{2}$$

или

$$f^2 - \frac{2Q}{c} f - \frac{2QH}{c} = 0,$$

$$f^2 - 2f_{\text{ст}} f - 2f_{\text{ст}} H = 0.$$

Откуда

$$f_{1,2} = f_{\text{ст}} \pm \sqrt{f_{\text{ст}}^2 + 2f_{\text{ст}} H} = 0{,}002 \pm \sqrt{0{,}002^2 + 2 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}1} = 0{,}002 \pm 0{,}0201,$$

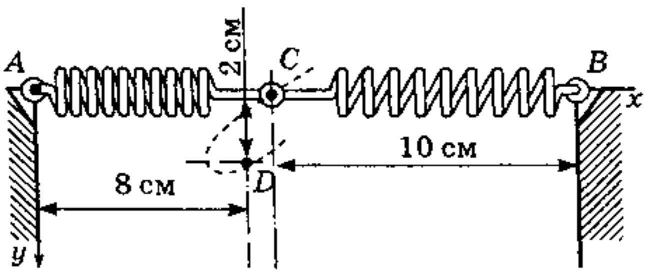
так как $f > 0$, то

$$f = 0{,}002 + 0{,}0201 = 0{,}0221 \text{ (м)} = 22{,}1 \text{ (мм)}.$$

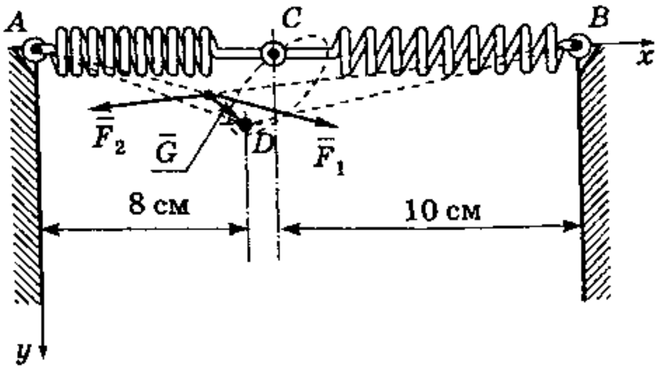
Ответ: 1) 4 мм; 2) 22,1 мм.

Задача 30.18

Две ненапряженные пружины AC и BC, расположенные по горизонтальной прямой Ax, прикреплены шарнирами к неподвижным точкам A и B, а в точке C — к гире массы 2 кг. Пружина AC сжимается на 1 см силой 20 Н, а пружина CB вытягивается на 1 см силой 40 Н. Расстояние $AC = BC = 10$ см. Гире C сообщена скорость $v_0 = 2$ м/с в таком направлении, что при последующем движении она проходит через точку D, координаты которой $x_D = 8$ см, $y_D = 2$ см, если за начало координат принять точку A и координатные оси направить, как указано на рисунке. Определить скорость гири в момент прохождения ее через точку D, лежащую в вертикальной плоскости xy.



Решение



Рассмотрим движение гири C под действием силы тяжести $\overline{G}$ и сил упругости пружин $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (см. рисунок). Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки при перемещении гири из начального положения в точку D:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{G}) + A(\overline{F}_1) + A(\overline{F}_2),$$

где $A(\overline{G}) = 0{,}02mg$; $A(\overline{F}_1) = -c_1\dfrac{\lambda_1^2}{2}$; $A(\overline{F}_2) = -c_2\dfrac{\lambda_2^2}{2}$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + 0{,}02mg - \frac{1}{2}(c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2),$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 0{,}04g - \frac{1}{m}(c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2)}, \qquad (1)$$

где

$$c_1 = \frac{P_1}{l_1} = \frac{20}{0{,}01} = 2000 \text{ (Н/м)};$$

$$c_2 = \frac{P_2}{l_2} = \frac{40}{0{,}01} = 4000 \text{ (Н/м)};$$

$$\lambda_1 = AC - AD = 0{,}10 - \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}02^2} = 0{,}0175 \text{ (м)};$$

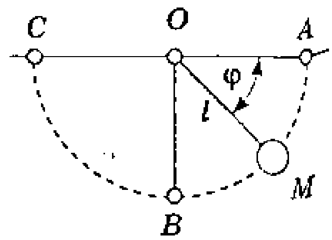
$$\lambda_2 = BD - BC = \sqrt{0{,}12^2 + 0{,}02^2} - 0{,}10 = 0{,}0216 \text{ (м)}.$$

Подставим эти значения в формулу (1) и рассчитаем скорость гири

$$v = \sqrt{2^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}04 - \frac{1}{2}(2000 \cdot 0{,}0175^2 + 4000 \cdot 0{,}0216^2)} = 1{,}77 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: v = 1,77 м/с.

Задача 30.19



Груз M веса P, подвешенный в точке O на нерастяжимой нити длины l, начинает двигаться в вертикальной плоскости без начальной скорости из точки A; при отсутствии сопротивления груз M достигнет положения C, где его скорость обратится в нуль. Приняв потенциальную энергию, обусловленную силой тяжести груза M в точке B, равной нулю, построить графики изменений кинетической и потенциальной энергии, а также их суммы в зависимости от угла φ. Массой нити пренебречь.

Решение

Определим кинетическую энергию груза в положении M (рис. 1):

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{P}) = Pl\sin\varphi.$$

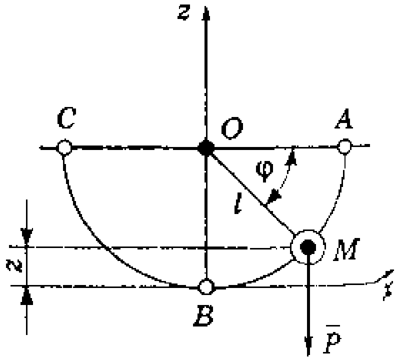


Рис. 1

Так как $v_0 = 0$, то

$T = \frac{mv^2}{2} = Pl\sin\varphi$ — уравнение синусоиды (рис. 2, кривая *1*).

Определим потенциальную энергию груза в положении M:

$П = P \cdot z = P(OB - l\sin\varphi) = Pl(1 - \sin\varphi)$ — уравнение синусоиды (рис. 2, кривая *2*).

Найдем сумму кинетической и потенциальной энергии груза:

$T + П = Pl\sin\varphi + Pl(1 - \sin\varphi) = Pl$ — уравнение прямой (рис. 2, линия *3*).

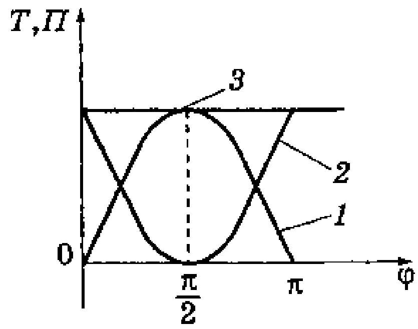


Рис. 2

Ответ: две синусоиды и прямая, имеющие уравнения $T = Pl\sin\varphi$, $П = Pl(1 - \sin\varphi)$, $T + П = Pl$.

Задача 30.20

Материальная точка массы m совершает гармонические колебания по прямой Ox под действием упругой восстанавливающей силы по следующему закону: $x = a\sin(kt + \beta)$. Пренебрегая сопротивлениями, построить графики изменения кинетической энергии T и потенциальной энергии $П$ движущейся точки в зависимости от координаты x; в начале координат $П = 0$.

Решение

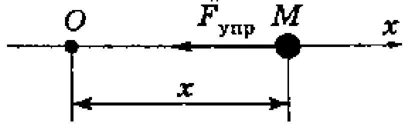


Рис. 1

Кинетическая энергия точки

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

где $v = \dot{x} = ka\cos(kt + \beta)$, $v^2 = k^2a^2\cos^2(kt + \beta) = a^2k^2\left[1 - \sin^2(kt + \beta)\right] = k^2(a^2 - x^2)$.

Тогда

$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2).$$

Определим потенциальную энергию точки в положении M (рис. 1):

$$П = A_{MO}(\overline{F}_{упр}) = \frac{cx^2}{2},$$

где $A_{MO}(\overline{F}_{упр})$ — работа восстанавливающей силы при перемещении точки из положения M в нулевое положение; $F_{упр} = -cx$, $c = k^2m$.

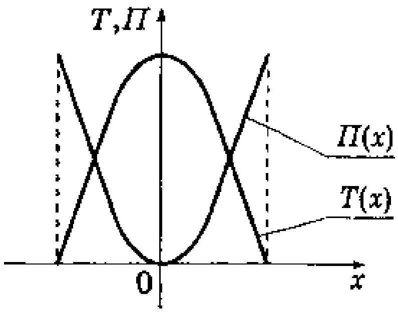


Рис. 2

Тогда

$$П = \frac{k^2mx^2}{2}.$$

Построим графики изменения T и $П$ в зависимости от x — параболы (рис. 2).

Ответ: оба графика — параболы, имеющие уравнения

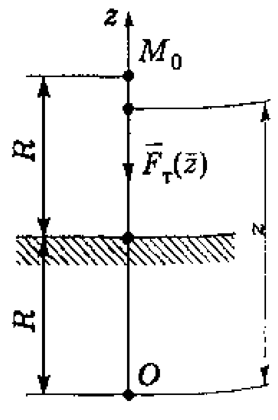
$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2);\ П = \frac{k^2mx^2}{2}.$$

Задача 30.21

Какую вертикальную силу, постоянную по величине и направлению, надо приложить к материальной точке, чтобы при падении точки на Землю с высоты, равной радиусу Земли, эта сила сообщила точке такую же скорость, как сила притяжения к Земле, обратно пропорциональная квадрату расстояния точки до центра Земли?

Решение

Рассмотрим падение материальной точки на Землю под действием силы тяготения $F_т$ (см. рисунок). На основании теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки с учетом того, что $v_0 = 0$, запишем



$$\frac{mv^2}{2} = A(\overline{F}_т),$$

где $A(\overline{F}_т) = \int\limits_{2R}^{R} F_т\, dz = -\int\limits_{2R}^{R} \frac{km}{z^2} dz = km\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{km}{2R}.$

Тогда

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{km}{2R},$$

$$v^2=\frac{k}{R}. \tag{1}$$

Рассмотрим падение материальной точки под действием искомой постоянной силы $\overline{F}$:

$$\frac{mv^2}{2}=A(\overline{F}),$$

где $A(\overline{F})=FR.$

Откуда

$$v^2=\frac{2FR}{m}. \tag{2}$$

Приравняем выражения (1) и (2) для v^2:

$$\frac{k}{R}=\frac{2FR}{m}$$

и найдем

$$F=\frac{km}{2R^2}.$$

Так как на поверхности Земли

$$mg=F=\frac{km}{R^2}\Rightarrow g=\frac{k}{R^2},$$

то

$$F=\frac{km}{2R^2}=\frac{gm}{2}=\frac{P}{2}.$$

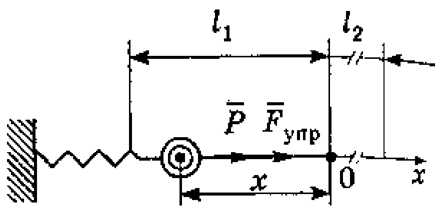
Ответ: $P/2$, где P — вес точки на поверхности Земли.

Задача 30.22

Горизонтальная пружина, на конце которой прикреплена материальная точка, сжата силой P и находится в покое. Внезапно сила P меняет направление на прямо противоположное. Определить, пренебрегая массой пружины, во сколько раз получающееся при этом наибольшее растяжение l_2 больше первоначального сжатия l_1.

Решение

Рассмотрим движение материальной точки после того, как сила $\overline{P}$ поменяла направление (см. рисунок). Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:



$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{упр}).$$

Так как

$$v = 0,\ v_0 = 0, \text{ то } A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{упр}) = 0,$$

где $A(P) = P(l_1 + l_2)$;

$$A(\overline{F}_{упр}) = -\int_{l_1}^{l_2} cx dx = -\frac{cx^2}{2}\Bigg|_{l_1}^{l_2} = -\frac{c}{2}(l_2^2 - l_1^2) = \frac{c}{2}(l_1^2 - l_2^2),$$

где c — жесткость пружины.

Тогда

$$P(l_1 + l_2) + \frac{c}{2}(l_1^2 - l_2^2) = P(l_1 + l_2) + \frac{c}{2}(l_1 - l_2)(l_1 + l_2) = 0,$$

или после сокращения на $(l_1 + l_2) \neq 0$

$$\frac{2P}{c} + (l_1 - l_2) = 0 \Rightarrow \frac{2P}{cl_1} + 1 - \frac{l_2}{l_1} = 0 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{2P}{cl_1}.$$

Поскольку $l_1 = \dfrac{P}{c}$, то

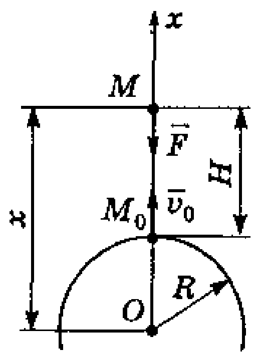
$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{2Pc}{cP} = 3.$$

Ответ: $\dfrac{l_2}{l_1} = 3.$

Задача 30.23

Тело брошено с поверхности Земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью $\bar{v}_0$. Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли $R = 6370$ км, $v_0 = 1$ км/с.

Решение



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k),$$

где $v = 0$; $F = \alpha x^{-2}$.

На поверхности Земли $x = R$ (см. рисунок):

$$F = \frac{\alpha}{R^2} = mg \Rightarrow \alpha = mgR^2.$$

Работу совершает только сила $\bar{F}$:

$$A(\bar{F}) = \int F dx = -\int_R^{R+H} \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgR^2}{x}\Bigg|_R^{R+H} = mgR^2\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

Приравняем кинетическую энергию работе и получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgRH}{R+H} \Rightarrow v_0^2 R + v_0^2 H = 2gRH.$$

Отсюда найдем

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = \frac{6370 \cdot 1^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370 - 1^2} = 51{,}38 \text{ (км)}.$$

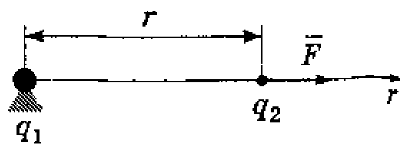
Ответ: $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51{,}38$ км.

Задача 30.24

Две частицы заряжены положительным электричеством, заряд первой частицы $q_1 = 100$ Кл, заряд второй частицы $q_2 = 0{,}1q_1$, первая частица остается неподвижной, а вторая движется вследствие силы отталкивания от первой частицы. Масса второй частицы равна 1 кг, начальное расстояние от первой частицы равно 5 м, а начальная скорость равна нулю. Определить верхний предел для скорости движущейся частицы, принимая во внимание действие только одной силы отталкивания $F = q_1 q_2 / r^2$, где r — расстояние между частицами.

Решение

Частица q_2 движется под действием силы отталкивания $\bar{F}$ (см. рисунок). Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме и для второй частицы запишем



$$\frac{m_2 v^2}{2} - \frac{m_2 v_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}), \qquad (1)$$

где $v_0 = 0$; $m_2 = 1$ кг.

Найдем работу силы $\bar{F}$

$$A(\bar{F}) = \int_5^r \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{r}\bigg|_5^r = -\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{5}.$$

Тогда из формулы (1) получим

$$v^2 = \frac{2}{5} q_1 q_2 - \frac{2}{r} q_1 q_2 = \frac{2}{5} q_1 q_2 \left(1 - \frac{5}{r}\right).$$

Скорость частицы будет максимальной при $r = \infty$, т.е. когда $\frac{5}{r}$ обращается в ноль. Следовательно,

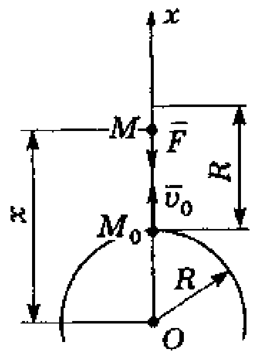
$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{5} q_1 q_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10}{5}} = 20 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 20 м/с.

Задача 30.25

Определить скорость v_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу, находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту, равную земному радиусу; при этом нужно принять во внимание только силу притяжения Земли, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли. Радиус Земли равен $6{,}37 \cdot 10^6$ м, ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно 9,8 м/с^2.

Решение



Применим теорему об изменении кинетической энергии, учитывая, что на тело действует лишь сила притяжения (см. рисунок), запишем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F})$$

или

$$-\frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}), \qquad (1)$$

так как $v = 0$.

Согласно условию задачи сила притяжения $F = \dfrac{\alpha}{x^2}$, на поверхности Земли

$$F = mg = \frac{\alpha}{R^2},$$

откуда $\alpha = mgR^2$. Тогда

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

Найдем работу силы притяжения

$$A(\bar{F}) = -\int F dx = -\int_R^{2R} \frac{mgR^2}{x^2} dx = \left.\frac{mgR^2}{x}\right|_R^{2R} = -\frac{mgR}{2}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgR}{2}.$$

Откуда

$$v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 9{,}8} = 7900 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: 7,9 км/с.

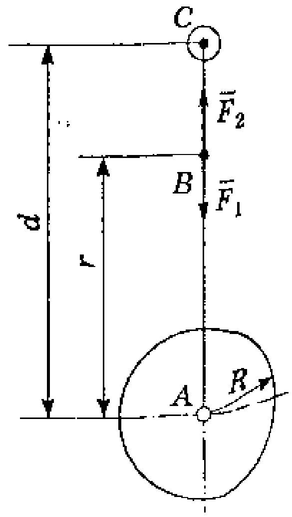
Задача 30.26

Найти, с какой скоростью v_0 нужно выбросить снаряд с поверхности Земли по направлению к Луне, чтобы он достиг точки, где силы притяжения Земли и Луны равны, и остался в этой точке в равновесии. Движением Земли и Луны и сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение силы тяжести у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с. Отношение массы Луны и Земли $m : M = 1 : 80$; расстояние между ними $d = 60R$, где считаем $R = 6000$ км (радиус Земли).

Коэффициент f, входящий в формулу для величины силы всемирного тяготения, находим из уравнения

$$mg = mf\left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Решение



Найдем силы притяжения снаряда Землей — F_1 и Луной — F_2:

$$F_1 = f\frac{m_1 M}{r^2}, \quad F_2 = f\frac{m_1 m}{(d-r)^2}, \qquad (1)$$

где m_1 — масса снаряда; f — гравитационная постоянная.

Пусть $F_1 = F_2$ в точке B (см. рисунок), тогда

$$\frac{M}{r^2} = \frac{m}{(d-r)^2},$$

откуда

$$r_{1,2} = \frac{d}{M-m}(M \pm \sqrt{Mm}) = \frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M} \pm \sqrt{m}}. \qquad (2)$$

Из выражения (2) следует, что возможны два значения r (два корня), но так как точка, в которой снаряд будет находиться в равновесии, единственная, то следует определить, какому условию должно удовлетворять значение r.

Представим формулу (2) в виде

$$\frac{r}{d}=\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}\pm\sqrt{m}}.$$

Поскольку $\frac{r}{d}<1$, то правая часть этого равенства будет меньше единицы при $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}$.

Значение $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}-\sqrt{m}}>1$, поэтому этот корень следует отбросить.
Таким образом,

$$r=\frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}. \qquad (2')$$

При движении от Земли к Луне на снаряд действует сила $F=F_1-F_2$. С учетом выражений (1)

$$F=m_1 f\left[\frac{M}{r^2}-\frac{m}{(d-r)^2}\right]. \qquad (3)$$

На поверхности Земли $F=m_1 g$, $r=R$. Тогда формула (3) примет вид

$$m_1 g=m_1 f\left[\frac{M}{R^2}-\frac{m}{(d-R)^2}\right],$$

откуда

$$f=\frac{g}{\frac{M}{R^2}-\frac{m}{(d-R)^2}}. \qquad (4)$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме к движению снаряда:

$$\frac{m_1 v^2}{2}-\frac{m_1 v_0^2}{2}=\sum A(\overline{F}_k).$$

Так как в точке B снаряд находится в равновесии, то $v = 0$. Следовательно,

$$-\frac{m_1 v_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k). \tag{5}$$

Найдем работу сил притяжения F_1 и F_2:

$$A(\overline{F}_1) = -\int_R^r f\frac{m_1 M}{r^2}dr = -\frac{fm_1 M}{r}\bigg|_R^r = -fm_1\left(\frac{M}{r} - \frac{M}{R}\right),$$

$$A(\overline{F}_2) = \int_R^r f\frac{m_1 m}{(d-r)^2}dr = \frac{fm_1 m}{d-r}\bigg|_R^r = fm_1\left(\frac{m}{d-r} - \frac{m}{d-R}\right)$$

и суммарную работу этих сил

$$\sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{F}_1) + A(\overline{F}_2) = -fm_1\left(\frac{M}{R} - \frac{m}{d-r} - \frac{M}{r} + \frac{m}{d-R}\right). \tag{6}$$

Подставим выражение (6) в формулу (5) и получим

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = fm_1\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{d-R} - \frac{M}{r} - \frac{m}{d-r}\right). \tag{7}$$

Откуда с учетом выражения (4) найдем

$$v_0^2 = 2g\,\frac{\dfrac{M}{R} + \dfrac{m}{d-R} - \dfrac{m}{d-r} - \dfrac{M}{r}}{\dfrac{M}{R^2} - \dfrac{m}{(d-R)^2}}. \tag{8}$$

С учетом формулы (2′)

$$\frac{M}{r} + \frac{m}{d-r} = \frac{M(d-r)+mr}{r(d-r)} = \frac{M\left(d - \dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right) + m\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}}{\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\left(d - \dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)} =$$

$$= \frac{M\dfrac{d\sqrt{M}+d\sqrt{m}-d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}} + m\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}}{\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\;\dfrac{d\sqrt{M}+d\sqrt{m}-d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}} = \frac{d(M\sqrt{m}+m\sqrt{M})(\sqrt{M}+\sqrt{m})}{d^2\sqrt{Mm}} =$$

$$=\frac{M\sqrt{Mm}+mM+Mm+m\sqrt{Mm}}{d\sqrt{Mm}}=\frac{\sqrt{Mm}(M+m)+2Mm}{d\sqrt{Mm}}=\frac{M+m}{d}+$$

$$+\frac{2Mm}{d\sqrt{Mm}}=\frac{M+m}{d}+\frac{2\sqrt{Mm}\sqrt{Mm}}{d\sqrt{Mm}}=\frac{M+2\sqrt{Mm}+m}{d}=\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}.$$

Подставим это выражение в формулу (8) и преобразуем:

$$v_0^2=2g\frac{\frac{M}{R}+\frac{m}{d-R}-\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}}{\frac{M}{R^2}-\frac{m}{(d-R)^2}}=2g\frac{\left[\frac{M}{R}+\frac{m}{d-R}-\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}\right]R^2(d-R)^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=2g\frac{[M(d-R)+mR]R(d-R)-\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}R^2(d-R)^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{[M(d-R)+mR]d-(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2R(d-R)}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{Md^2-MRd+mRd-(M+2\sqrt{Mm}+m)(Rd-R^2)}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{Md^2-MRd+mRd-MRd-2Rd\sqrt{Mm}}{M(d-R)^2-mR^2}-$$

$$-\frac{mRd+MR^2+2R^2\sqrt{Mm}+mR^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{Md^2-2MRd+MR^2-2\sqrt{Mm}R(d-R)+mR^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{M(d-R)^2-2\sqrt{Mm}R(d-R)+mR^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{\left[\sqrt{M}(d-R)-\sqrt{m}R\right]^2}{\left(\sqrt{M}(d-R)+\sqrt{m}R\right)\left(\sqrt{M}(d-R)-\sqrt{m}R\right)}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R}. \qquad (9)$$

Рассчитаем v_0^2 по формуле (9):

$$v_0^2 = \frac{2gR\cdot 59R}{60R}\frac{\sqrt{80}\cdot 59R - R}{\sqrt{80}\cdot 59R + R} = \frac{59}{30}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}gR,$$

где $\alpha = \dfrac{1}{59\sqrt{80}} = 0{,}002.$

Откуда найдем скорость снаряда

$$v_0 = \sqrt{\frac{59}{30}\cdot\frac{0{,}998}{1{,}002}\cdot 9{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^3} = 10{,}75 \text{ (км/с)}.$$

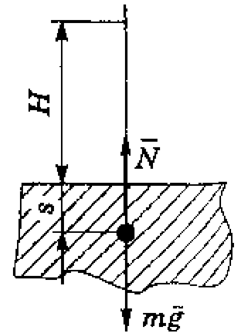
Ответ: $v_0^2 = \dfrac{2gR(d-R)}{d}\dfrac{\sqrt{\dfrac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\dfrac{M}{m}}(d-R)+R}$, где $\alpha = \dfrac{1}{59\sqrt{80}}$,

или $v_0 = 10{,}75$ км/с.

Задача 30.27

Грунт утрамбовывается ручной бабой массы 60 кг и с поперечным сечением 12 дм^2, которая падает с высоты 1 м. При последнем ударе баба входит в грунт на глубину 1 см, причем сопротивление грунта движению бабы можно считать постоянным. Какую наибольшую нагрузку выдержит грунт, не давая осадки? Допускается, что утрамбованный грунт может выдержать без осадки нагрузку, не превосходящую того сопротивления, которое встречает баба, углубляясь в грунт.

Решение



Покажем на рисунке груз в конечном положении, когда действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и сила сопротивления $\bar{N}$ утрамбованного грунта. Применим теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = A(m\bar{g}) + A(\bar{N})$$

или

$$0 = A(m\bar{g}) + A(\bar{N}), \tag{1}$$

так как $v = v_0 = 0$.

Найдем работу этих сил. Работа силы тяжести

$$A(m\bar{g}) = mg(H + s),$$

где H — высота, с которой падает баба; s — глубина проникновения бабы в грунт.

Работа силы сопротивления грунта

$$A(\overline{N}) = -Ns.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$mg(H + s) - Ns = 0.$$

Откуда

$$N = \frac{mg(H + s)}{s} = \frac{60 \cdot 9{,}8(1 + 0{,}001)}{0{,}01} = 59\,388 \text{ (Н)}.$$

Наибольшая нагрузка $[\sigma]$, которую может выдержать грунт без осадки:

$$[\sigma] = \frac{N}{S} = \frac{59\,388}{0{,}12} = 494\,900 \text{ (Па)},$$

где S — площадь поперечного сечения утрамбовочной бабы.

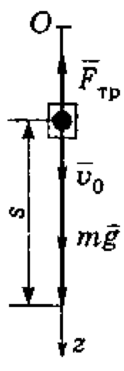
Ответ: 494,9 кПа.

Задача 30.28

Шахтный лифт движется вниз со скоростью $v_0 = 12$ м/с. Масса лифта 6 т. Какую силу трения между лифтом и стенками шахты должен развить предохранительный парашют, чтобы остановить лифт на протяжении пути $s = 10$ м, если канат, удерживающий лифт, оборвался? Силу трения считать постоянной.

Решение

При обрыве каната лифт движется под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы трения $\overline{F}_{\text{тр}}$ (см. рисунок).



Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{F}_{\text{тр}}) + A(m\bar{g}), \qquad (1)$$

где $v = 0$; $A(\overline{F}_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}s$; $A(m\bar{g}) = mgs$.

Тогда формула (1) примет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = F_{тр}s - mgs.$$

Откуда сила трения

$$F_{тр} = \frac{mv_0^2}{2s} + mg = \frac{6000 \cdot 12^2}{2 \cdot 10} + 6000 \cdot 9{,}8 = 102\,000 \text{ (Н)}.$$

О т в е т: $F = m\left(g + \frac{v_0^2}{2s}\right) = 102$ кН.

Задача 30.29

Кольцо массы 200 г скользит вниз по проволочной дуге, имеющей форму параболы $y = x^2$. Кольцо начало двигаться из точки $x = 3$ м, $y = 9$ м с нулевой начальной скоростью. Определить скорость кольца и силу, действующую на кольцо со стороны проволоки, в момент прохождения им нижней точки параболы.

Р е ш е н и е

Покажем силы, действующие на кольцо в произвольно выбранной точке M: силу тяжести $m\bar{g}$, силу реакции $\bar{N}_1$ со стороны проволоки (рис. 1).

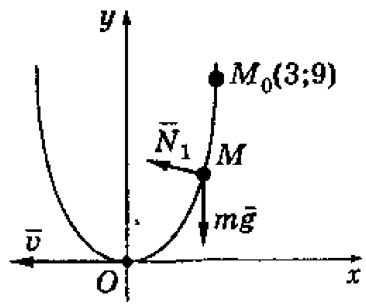


Рис. 1

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = A(m\bar{g}) + A(\bar{N}_1), \qquad (1)$$

где $v_0 = 0$; $A(m\bar{g}) = mgy$; $A(\bar{N}_1) = 0$, так как сила N_1 перпендикулярна перемещению.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$v_1^2 = 2gy,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 9} = 13{,}28 \text{ (м/с)}.$$

Для определения давления проволоки на кольцо в нижней точке траектории составим дифференциальное уравнение движения в проекции на главную нормаль (рис. 2). На кольцо в точке O действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и реакция $\bar{N}$ связи:

$$ma_n = N - mg, \qquad (2)$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, ρ — радиус кривизны траектории.

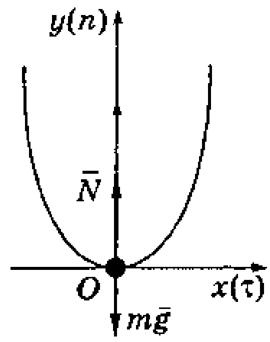


Рис. 2

Радиус кривизны кривой определяется по известной из математики формуле [2]:

$$\rho = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}.$$

Согласно условию $y = x^2$, тогда $y' = 2x$; $y'' = 2$. Так как в точке O $x = 0$, то $y' = 0$, а $\rho = 0{,}5$. Следовательно, $a_n = 2v^2$ и формула (2) примет вид

$$2mv^2 = N - mg,$$

откуда

$$N = 2mv^2 + mg = 0{,}2(2\cdot 13{,}28^2 + 9{,}8) = 72{,}5 \text{ (Н)}.$$

Ответ: $v_1 = 13{,}28$ м/с; $N = 72{,}5$ Н.

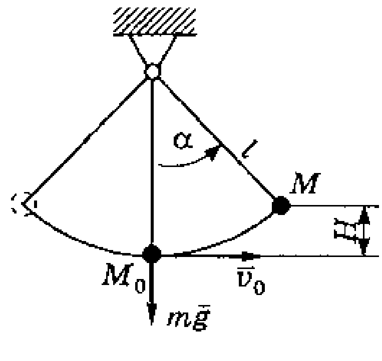
Задача 30.30

Математический маятник длины l вывели из положения равновесия, сообщив ему начальную скорость $\bar{v}_0$, направленную по горизонтали. Определить длину дуги, которую он опишет в течение одного периода.

Решение

Для определения максимального угла отклонения маятника от вертикали (см. рисунок) применим теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k) = A(m\bar{g}), \qquad (1)$$



где $v = 0$; $A(m\bar{g}) = -mgH = -l(1-\cos\alpha)mg$.

Тогда формула (1) примет вид

$$\frac{v_0^2}{2} = l(1-\cos\alpha)\,g.$$

Откуда

$$\cos\alpha = 1-\frac{v_0^2}{2gl}, \quad \alpha = \arccos\left(1-\frac{v_0^2}{2gl}\right).$$

Длина дуги, соответствующая углу α, $\overset{\smile}{M_0 M} = l\alpha$. За период маятник опишет дугу длиной

$$s = 4\overset{\smile}{M_0 M} = 4l\alpha = 4l\arccos\left(1-\frac{v_0^2}{2gl}\right).$$

О т в е т: $s = 4l\arccos\left(1-\frac{v_0^2}{2gl}\right)$.

31. Смешанные задачи

Методические указания к решению задач

В задачах этого параграфа рассматривается движение несвободной материальной точки. В качестве наложенных на движущуюся точку связей используются плоские, цилиндрические, конические и сферические поверхности, плоские кривые линии, невесомые стержни, нерастяжимые нити. Для решения таких задач можно применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме и дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Основной закон динамики для несвободной материальной точка, а следовательно, и дифференциальные уравнения ее движения имеют такой же вид, как и для свободной точки, но при этом к действующим на точку активным силам следует в соответствии с принципом освобождаемости от связей добавить силы реакций связи.

Однако иногда при решении первой и второй основных задач динамики силы реакций связей заранее не известны и их необходимо дополнительно определить по заданным уравнениям связей.

Поэтому вторую основную задачу динамики для несвободной материальной точки можно сформулировать так:

по заданным активным силам, массе точки, начальным условиям движения и связям, наложенным на точку, определить движение этой точки и силы реакции связи.

Второй закон динамики для несвободной материальной точки записывается в следующем виде:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N}, \qquad (31.1)$$

где $\bar{N}$ — равнодействующая реакций связей.

Для составления дифференциальных уравнений движения можно пользоваться декартовыми или естественными осями.

Например, при движении точки по поверхности, заданной уравнением

$$f(x, y, z) = 0,$$

x, y и z — координаты точки, дифференциальные уравнения движения в декартовой системе координат имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= \sum F_{kz} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (31.2)$$

В уравнениях (31.2) λ — неопределенный множитель Лагранжа,

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f},$$

где $\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$.

Уравнения (31.2) называют *дифференциальными уравнениями Лагранжа первого рода для несвободной материальной точки.*

Из уравнений (31.2) и уравнения связи $f(x, y, z) = 0$ можно найти четыре неизвестных — координаты точек: x, y, z, и неопределенный множитель Лагранжа λ — как функции времени и произвольных постоянных интегрирования. При известном значении λ нормальная реакция связей

$$N = \lambda \Delta f.$$

При движении точки ее траектория задается как линия пересечения двух поверхностей $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$. Нормальная реакция в этом случае

$$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2,$$

где $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ — нормальные реакции поверхностей.

Тогда в уравнения (31.2) входят два множителя Лагранжа: $\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}$, $\lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}$, или, вернее, два слагаемых, содержащих эти множители.

При движении точки по шероховатой поверхности или линии необходимо учитывать максимальную силу трения, направление которой противоположно направлению вектора скорости, что при составлении дифференциальных уравнений в форме Лагранжа приводит к весьма громоздким уравнениям, аналитическое решение которых практически невозможно.

Поэтому при решении задач этого параграфа более целесообразно применение дифференциальных уравнений движения несвободной материальной точки в форме Эйлера, которые представляют собой проекции векторного равенства (31.1) на естественные оси — касательную, главную нормаль и бинормаль. Например, при движении точки по гладкой кривой эти уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum F_{k\tau}^a, \\ &m\frac{s^2}{\rho} = m\frac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \sum F_{kn}^a + N_n, \\ &0 = \sum F_{kb}^a + N_b. \end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

При решении уравнений (31.3) уравнение движения по оси τ можно не интегрировать, а лучше применить теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме при условии, что на точку действуют постоянные силы.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Выбрать систему отсчета (систему осей).

2. Изобразить движущуюся точку (тело) в произвольном положении.

3. Показать все действующие на точку силы, включая реакции связей.

4. Составить необходимые дифференциальные уравнения движения в проекциях на выбранные оси. В случае криволинейного движения воспользоваться уравнениями в форме Эйлера. Для определения скорости движения по кривой вместо уравнения движения по касательной применить теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме, а для определения нормальной реакции — уравнение в проекции на главную нормаль.

5. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения и определить постоянные интегрирования по начальным условиям движения.

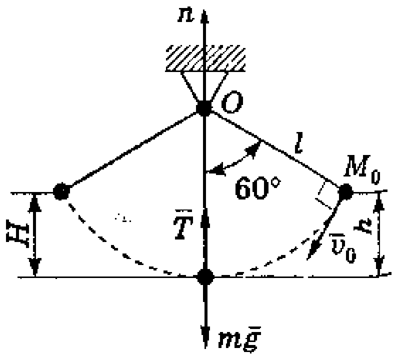
6. Найти искомую величину в общем виде и убедиться в правильности результата, проверив размерности входящих в это выражение величин. Провести вычисления.

Задачи и решения

Задача 31.1

Груз массы 1 кг подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке O. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 2,1 м/с. Определить натяжение нити в наинизшем положении и отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

Решение



Запишем второй закон динамики для несвободной материальной точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N},$$

где N — натяжение нити, т.е. $N = T$ (см. рисунок).

Проецируя это уравнение на главную нормаль n, получим

$$\frac{mv^2}{l} = -mg + T,$$

откуда

$$T = \frac{mv^2}{l} + mg. \quad (1)$$

Квадрат скорости найдем, используя теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh,$$

где $h = l - l\cos 60° = 0{,}5l$.

Тогда

$$v^2 = v_0^2 + 2gh = v_0^2 + gl.$$

Подставим значение v^2 в формулу (1) и рассчитаем натяжение нити:

$$T = \frac{m}{l}(v_0^2 + gl) + mg = \frac{mv_0^2}{l} + 2mg = \frac{2{,}1^2}{0{,}5} + 2 \cdot 9{,}8 = 28{,}4 \text{ (Н)}.$$

Высоту H, на которую поднимается груз, вычислим из условия равенства нулю кинетической энергии в верхнем положении, когда $T_1 = 0$, тогда

$$T_1 - T_0 = -mgH,$$

$$T_0 = \frac{m(v_0^2 + gl)}{2}.$$

Откуда

$$H = \frac{v_0^2 + gl}{2g} = \frac{(2{,}1)^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}475 \text{ (м)}.$$

Ответ: 28,4 Н; 47,5 см.

Задача 31.2

Сохраняя условия предыдущей задачи, кроме величины скорости v_0, найти, при какой величине скорости v_0 груз будет проходить всю окружность.

Решение

Используя решение задачи 31.1, запишем

$$H = \frac{v_0^2 + gl}{2g},$$

где $H = 2l$.

Откуда найдем

$$v_0^2 = 3gl, \quad v_0 = \sqrt{3gl},$$

где v_0 — скорость, имея которую, груз поднимется до верхней точки окружности, но не опишет полной окружности.

Чтобы груз описал полную окружность, натяжение нити в ее верхней точке должно быть равно нулю, т.е. согласно формуле (1) решения задачи 31.1 $\frac{mv^2}{l} = mg$.

На основании теоремы об изменении кинетической энергии запишем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(v_0^2 + gl) = -2mgl$$

или

$$\frac{gl}{2} - \frac{1}{2}(v_0^2 + gl) = -2gl.$$

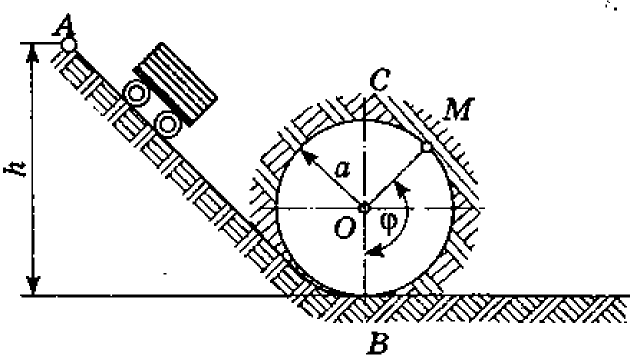
Откуда

$$v_0^2 = 4gl, \quad v_0 = 2\sqrt{gl} = 2\sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}5} = 4{,}43 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v_0 > 4{,}43$ м/с.

Задача 31.3

По рельсам, положенным по пути AB и образующим затем петлю в виде кругового кольца BC радиуса a, скатывается вагонетка массы m. С какой высоты h нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление N вагонетки на кольцо в точке M, для которой $\angle MOB = \varphi$.



Решение

В верхней точке окружности C реакция должна быть больше или равна нулю, т.е. должно выполняться условие

$$N = \frac{mv^2}{a} - mg = 0.$$

На основании теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки при перемещении вагонетки из положения A в C запишем

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg(h-2a), \qquad (1)$$

где $v_0=0$; $v^2=ag$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{a}{2}=h-2a.$$

Откуда

$$h\geq 2{,}5a.$$

Для определения давления N при произвольном угле φ запишем уравнение Эйлера и теорему об изменении кинетической энергии в виде

$$N=\frac{mv^2}{a}+mg\cos\varphi,$$

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg(h-a+a\cos\varphi),$$

откуда при $v_0=0$ найдем

$$N=\frac{mv^2}{a}+mg\cos\varphi=\frac{mg}{a}(2h-2a+2a\cos\varphi)+mg\cos\varphi=$$

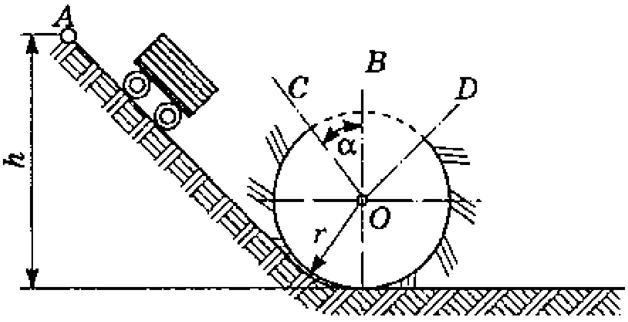
$$=mg\left(\frac{2h}{a}-2+3\cos\varphi\right).$$

Ответ: $h\geq 2{,}5a$; $N=mg\left(\dfrac{2h}{a}-2+3\cos\varphi\right)$.

Задача 31.4

Путь, по которому движется вагонетка, скатываясь из точки A, образует разомкнутую петлю радиуса r, как показано на рисунке; $\angle BOC=\angle BOD=\alpha$. Найти, с какой высоты h должна скатываться вагонетка без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю петлю, а также то значение угла α, при котором эта высота h наименьшая.

Указание. На участке DC центр тяжести вагонетки совершает параболическое движение.



Решение

В верхней точке C разомкнутой окружности должно выполняться равенство

$$\frac{mv^2}{r}\cos\alpha = mg$$

(равенство нулю вертикальной составляющей реакции). Поэтому на основе теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки запишем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg[h - r(1+\cos\alpha)],$$

где $v_0 = 0$.

Откуда найдем

$$h = r(1+\cos\alpha) + \frac{r}{2\cos\alpha} = r\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

Исследуем изменение h как функции от α на экстремум и найдем $h_{\min}$:

$$\frac{dh}{d\alpha} = r\left(-\sin\alpha + \frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} = r\left(-\cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{2\cos^4\alpha}\right).$$

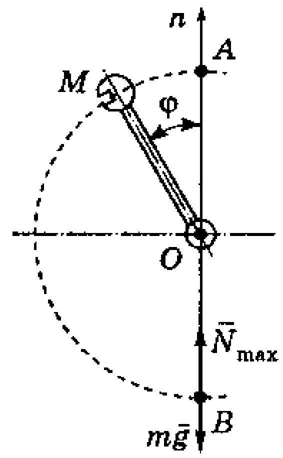
Итак, $h = h_{max}$ при $\alpha = 0°$, $h = h_{min}$ при $\alpha = 45°$.

Ответ: $h = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; h_{min} при $\alpha = 45°$.

Задача 31.5

Тяжелая стальная отливка массы $M = 20$ кг прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O. Отливка падает из верхнего положения A с ничтожно малой начальной скоростью. Пренебрегая массой стержня, определить наибольшее давление на ось. (См. рисунок к задаче 30.14.)

Решение



Наибольшим давление на ось будет в нижнем положении стальной отливки, т.е. в точке B (см. рисунок).

Запишем второй закон динамики для несвободной материальной точки:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k^a + \bar{N}.$$

Проецируя это уравнение на главную нормаль n и используя теорему об изменении кинетической энергии при перемещении отливки из точки A в точку B, получим

$$N_{max} = mg + \frac{mv^2}{R},$$

где $v^2 = 2gh = 4gR$.

Тогда

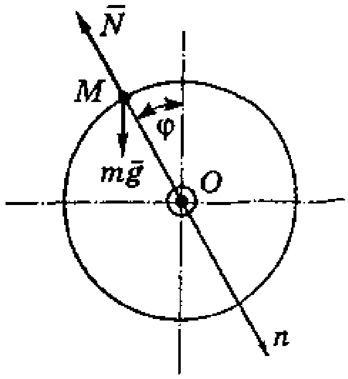
$$N_{max} = mg + 4mg = 5mg = 5 \cdot 20 \cdot 9{,}8 = 980 \text{ (Н)}.$$

Ответ: 980 Н.

Задача 31.6

Какой угол с вертикалью составляет вращающийся стержень (в предыдущей задаче) в тот момент, когда давление на ось равно нулю?

Р е ш е н и е



На основании уравнения движения вдоль нормали (см. рисунок) запишем

$$\frac{mv^2}{R} = -N + mg\cos\varphi. \qquad (1)$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\varphi). \qquad (2)$$

Уравнение (1) с учетом выражения (2) примет вид

$$-N + mg\cos\varphi = 2mg(1-\cos\varphi).$$

Откуда найдем

$$N = mg\cos\varphi - 2mg(1-\cos\varphi) = 3mg\cos\varphi - 2mg = mg(3\cos\varphi - 2).$$

Следовательно, при $N = 0$ $\cos\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

О т в е т: $\varphi = \arccos(2/3)$.

Задача 31.7

Парашютист массы 70 кг выбросился из самолета и, пролетев 100 м, раскрыл парашют. Найти силу натяжения стропов, на которых человек был подвешен к парашюту, если в течение первых пяти секунд с момента раскрытия парашюта, при постоянной силе сопротивления движению, скорость парашютиста уменьшилась до 4,3 м/с. Сопротивлением воздуха движению человека пренебречь.

Р е ш е н и е

Определим замедление при падении парашютиста:

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{44{,}3 - 4{,}3}{5} = 8 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

так как $v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{200g} = 44{,}3$ (м/с).

Натяжение стропов

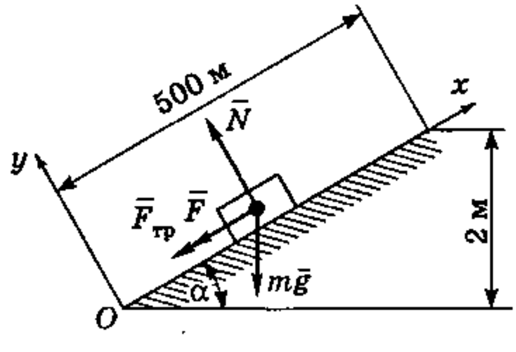
$$N = mg + ma = 70(9{,}8 + 8{,}0) = 1246 \text{ (Н)}.$$

О т в е т: 1246 Н.

Задача 31.8

За 500 м до станции, стоящей на пригорке высоты 2 м, машинист поезда, идущего со скоростью 12 м/с, закрыл пар и начал тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если масса поезда равна 1000 т, а сопротивление трения 20 кН?

Р е ш е н и е



Покажем на рисунке силы, действующие на поезд в произвольном положении: силу тяжести $m\bar{g}$, силу сопротивления $\bar{F}$ при торможении, силу трения $\bar{F}_{тр}$, нормальную реакцию $\bar{N}$ поверхности.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии и запишем

$$-\frac{mv^2}{2} = -(F + F_{тр} + mg\sin\alpha)s,$$

где s — тормозной путь.

Откуда найдем силу сопротивления $\bar{F}$ при торможении

$$F = \frac{mv^2}{2s} - F_{тр} - mg\sin\alpha, \qquad (1)$$

где $F_{тр} = 20$ кН; $\sin\alpha = \dfrac{2}{500} = 4\cdot10^{-3}$; $m = 1\cdot10^6$ кг; $s = 500$ м; $g = 9{,}8$ м/с^2.

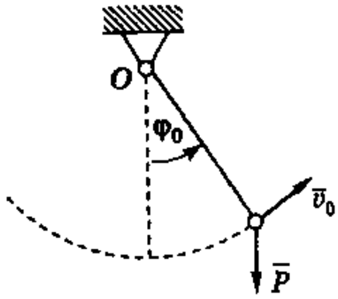
Подставим эти данные в формулу (1) и рассчитаем силу сопротивления

$$F = \frac{1\cdot10^6\cdot12^2}{2\cdot500} - 20\cdot10^3 - 1\cdot10^6\cdot9{,}8\cdot4\cdot10^{-3} = 84{,}8\ (\text{кН}).$$

О т в е т: 84,8 кН.

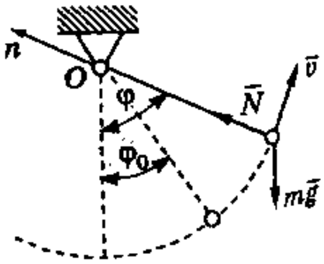
Задача 31.9

Тяжелая отливка массы m прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O и отклонен от вертикали на угол φ_0. Из этого начального положения отливке сообщают начальную скорость $\bar{v}_0$ (см. рисунок). Определить усилие в стержне как функцию угла отклонения стержня от вертикали, пренебрегая массой стержня. Длина стержня l.



Р е ш е н и е

Запишем уравнение Эйлера в проекции на нормаль (см. рисунок)



$$\frac{mv^2}{l} = -mg\cos\varphi + N. \qquad (1)$$

Согласно теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi),$$

откуда

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

Подставим это выражение в уравнение (1):

$$\frac{mv^2}{l} - 2mg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = -mg\cos\varphi + N.$$

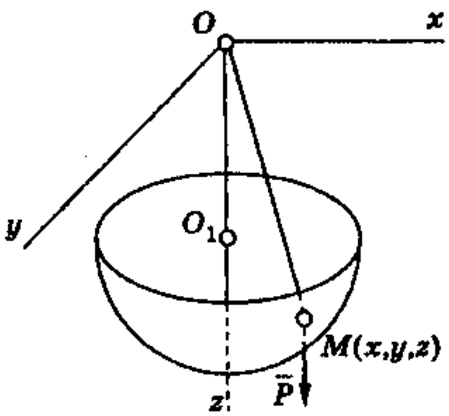
Откуда найдем

$$N = mg\cos\varphi + \frac{mv_0^2}{l} - 2mg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + \frac{mv_0^2}{l}.$$

При $N > 0$ стержень растянут, при $N < 0$ — сжат.

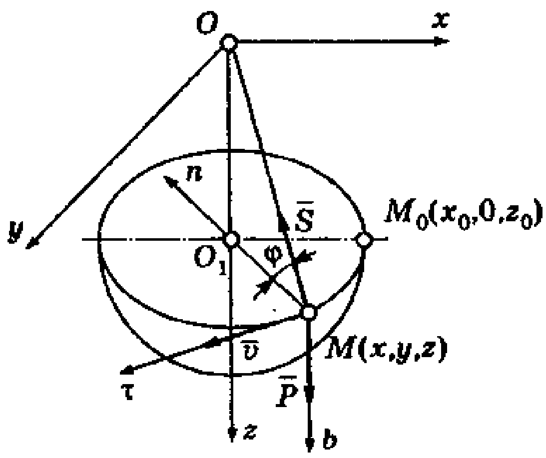
О т в е т: $N = 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + \frac{mv_0^2}{l}$. Если $N > 0$, стержень растянут; если $N < 0$, стержень сжат.

Задача 31.10



Сферический маятник состоит из нити OM длины l, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, и тяжелой точки M веса P, прикрепленной к другому концу нити. Точку M отклонили из положения равновесия так, что ее координаты стали: при $t = 0$ $x = x_0$, $y = 0$, и сообщили ей начальную скорость: $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, $\dot{z}_0 = 0$. Определить, при каком соотношении начальных условий точка M будет описывать окружность в горизонтальной плоскости и каково будет время обращения точки M по этой окружности.

Р е ш е н и е



Точка M движется по сферической поверхности под действием силы тяжести $\bar{P}$ и натяжения $\bar{S}$ нити (см. рисунок). Чтобы точка описала окружность в горизонтальной плоскости, ее движение должно подчиняться уравнениям в проекциях на естественные оси координат:

$$ma_n = \sum F_{kn} = S\cos\varphi,$$

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} = 0,$$

$$ma_b = \sum F_{kb} = P - S\sin\varphi,$$

где $a_n = \frac{v^2}{O_1M}$; $a_b = 0$.

Тогда

$$m\frac{v^2}{O_1M} = S\cos\varphi, \tag{1}$$

$$a_\tau = 0, \tag{2}$$

$$0 = P - S\sin\varphi. \tag{3}$$

Из уравнения (2) следует, что $v = \text{const} = v_0$. Согласно уравнению (3) $P = S\sin\varphi$.

Так как точка M движется в горизонтальной плоскости, то $\varphi = \text{const}$, $\sin\varphi = \text{const}$ и $\cos\varphi = \text{const}$.

Тогда из уравнения (1) при $\cos\varphi = \text{const}$ и $v = \text{const}$ получим, что $O_1M = \text{const} = x_0$.

Из ΔOO_1M определим

$$\sin\varphi = \frac{O_1O}{OM} = \frac{O_1O}{\sqrt{(OO_1)^2 + (O_1M)^2}} = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}$$

или

$$\cos\varphi = \frac{O_1M}{OM} = \frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}.$$

С учетом этих значений уравнения (1) и (3) примут вид

$$m\frac{v_0^2}{x_0} = S\frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}, \tag{4}$$

$$S = P\frac{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}{z_0}. \tag{5}$$

Подставим выражение (5) в формулу (4):

$$m\frac{v_0^2}{x_0} = P\frac{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}{z_0}\,\frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}} = P\frac{x_0}{z_0}.$$

Откуда получим

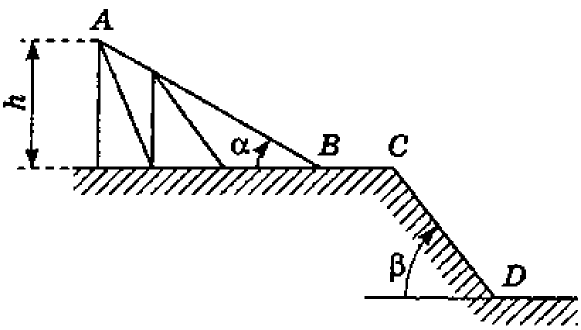
$$v_0 = x_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

Определим время обращения точки по окружности:

$$T=\frac{2\pi\cdot O_1M}{v_0}=\frac{2\pi x_0}{x_0\sqrt{g/z_0}}=2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

Ответ: $v_0=x_0\sqrt{g/z_0}$; $T=2\pi\sqrt{z_0/g}$.

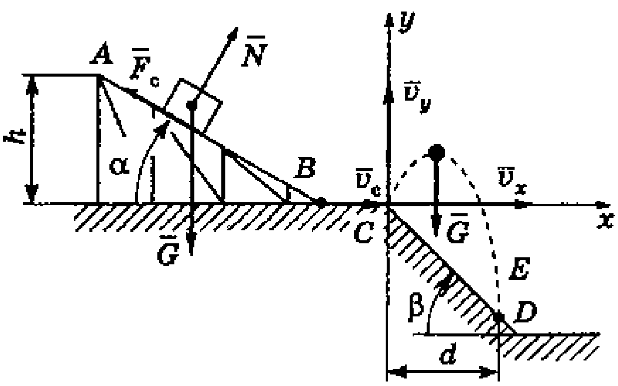
Задача 31.11



Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB, наклоненной под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC, длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $v_y=1$ м/с. Высота эстакады $h=9$ м, коэффициент трения лыж о снег $f=0{,}08$, линия приземления CD образует угол $\beta=45°$ с горизонтом. Определить дальность l полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Примечание. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки отрыва C до точки приземления лыжника на линии CD.

Решение



Рассмотрим движение лыжника на участке AB под действием силы тяжести $\bar{G}$, сопротивления $\bar{F}_c$ и реакции $\bar{N}$ (см. рисунок). Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=Gh-F_c\cdot AB,$$

где $v_1=0$; $G=mg$; $F_c=Nf=fG\cos\alpha$; $AB=2h$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = mgh(h - 2f\cos\alpha),$$

$$v_2 = \sqrt{2gh(1-2f\cos\alpha)} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 9(1-2\cdot 0{,}08\cdot 0{,}87)} = 12{,}33 \text{ (м/с)}.$$

Рассмотрим полет лыжника по траектории CE, который происходит под действием только силы тяжести $\overline{G}$. Запишем дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0,$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -G$$

или

$$\ddot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} = -g.$$

Проинтегрируем эти уравнения и получим

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2;$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Определим постоянные интегрирования с учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_x$, $\dot{y}_0 = v_y$, найдем: $C_1 = v_x$, $C_2 = 0$, $C_3 = v_y$, $C_4 = 0$. Подставим эти значения в выражения для x и y:

$$x = v_x t, \tag{1}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_y t. \tag{2}$$

Из формулы (1) найдем $t = \dfrac{x}{v_x}$. Подставим это выражение в формулу (2) и получим уравнение траектории

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2} + v_y\frac{x}{v_x}. \tag{3}$$

В момент приземления лыжника $x = d$, $y = -d$, так как $\beta = 45°$.

Тогда согласно уравнению (3)

$$-d = -\frac{g}{2}\frac{d^2}{v_x^2} + \frac{v_y}{v_x}d$$

или

$$1 = \frac{g}{2}\frac{d}{v_x^2} - \frac{v_y}{v_x}.$$

Откуда

$$d = \frac{2\left(1+\dfrac{v_y}{v_x}\right)v_x^2}{g} = \frac{2\left(1+\dfrac{1}{12{,}33}\right)\cdot 12{,}33^2}{9{,}8} = 33{,}54 \text{ (м)}.$$

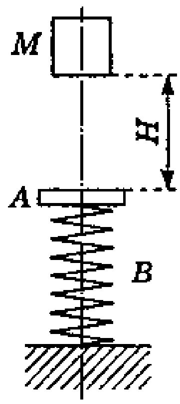
Найдем дальность полета лыжника:

$$l = CE = d\sqrt{2} = 33{,}54\cdot 1{,}41 = 47{,}4 \text{ (м)}.$$

О т в е т: $l = 47{,}4$ м.

Задача 31.12

Груз M веса P падает без начальной скорости с высоты H на плиту A, лежащую на спиральной пружине B. От действия упавшего груза M пружина сжимается на величину h. Не учитывая веса плиты A и сопротивлений, вычислить время T сжатия пружины на величину h и импульс S упругой силы пружины за время T.



Р е ш е н и е

Рассмотрим падение груза M под действием силы тяжести на плиту A (рис. 1). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P,$$

так как $P = mg$,

$$\ddot{x} = g.$$

Проинтегрируем это выражение дважды:

$$\dot{x} = gt, \quad x = g\frac{t^2}{2}.$$

Откуда найдем время падения $T_п$ груза

$$T_п = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

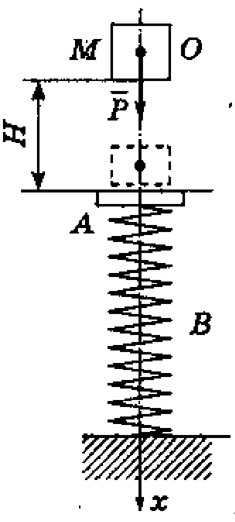


Рис. 1

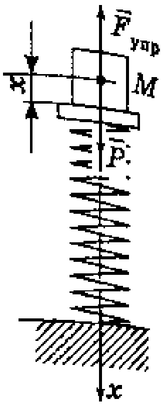


Рис. 2

и скорость

$$v = \sqrt{2gH}.$$

Рассмотрим движение груза M с плитой под действием силы тяжести $\overline{P}$ и силы упругости $\overline{F}_{упр}$ пружины (рис. 2). Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P - F_{упр}, \tag{1}$$

где $F_{упр} = cx$, c — жесткость пружины; $P = mg$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} = g - cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = g, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \cos kt$; $x^* = A = \dfrac{mg}{c}$.

Тогда

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{mg}{c}, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) определим постоянные интегрирования, исходя из начальных условий: $t = 0$; $\dot{x}_0 = v = \sqrt{2gH}$, $x_0 = 0$;

$$C_1 = -\frac{mg}{c}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{2gH}}{k}.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и получим

$$x = -\frac{mg}{c}\cos kt + \frac{\sqrt{2gH}}{k}\sin kt + \frac{mg}{c}, \tag{5}$$

где k — круговая частота свободных колебаний груза.

Уравнение (5) можно записать в виде

$$x = a\sin(kt + \alpha) + \frac{mg}{c}, \tag{6}$$

где $a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \frac{2gH}{k^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{mg}{c}\frac{k}{\sqrt{2gH}}$; $\sin\alpha = -\frac{mg}{c}\frac{1}{a}$.

Жесткость пружины определим по теореме об изменении кинетической энергии точки на перемещении от момента касания груза плиты до его остановки при максимальном сжатии пружины:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \sum A_k = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{\text{упр}}),$$

где $A(\overline{P}) = P(H + h)$; $A\left(\overline{F}_{\text{упр}}\right) = -\frac{ch^2}{2}$; $v_2 = 0$; $v_1 = 0$.

Тогда

$$0 = P(H + h) - \frac{ch^2}{2}.$$

Откуда

$$c = \frac{2P(H + h)}{h^2},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{2g(h + H)}}{h},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{mgk}{c\sqrt{2gH}} = -\frac{gk}{k^2\sqrt{2gH}} = -\frac{hg}{\sqrt{2g(h + H)}\sqrt{2gH}} = -\frac{h}{2\sqrt{H(H + h)}}.$$

Согласно уравнению (6) сжатие пружины будет максимальным при x_{max}, т.е. когда

$$\sin(kt+\alpha)=1,\ kt+\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Откуда найдем время T сжатия пружины

$$T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Для определения импульса S силы упругости пружины применим теорему об изменении количества движения груза за все время его движения:

$$mv_{2x}-mv_{1x}=\sum S_{kx}=S_x(\bar{P})-S_x(\bar{F}_{упр}),$$

где $S_x(\bar{P})=P(T_п+T)$.

Так как $v_2=0$, $v_1=0$, то

$$S=P(T_п+T)=P\left[\sqrt{\frac{2H}{g}}+T\right].$$

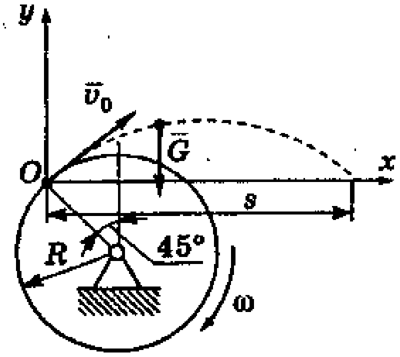
Ответ: $T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $S=P\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}+T\right)$, где $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$,
$k=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}$.

Задача 31.13

При разрыве маховика одна из его частей, наиболее удаленная от места катастрофы, оказалась на расстоянии $s=280$ м от первоначального положения. Пренебрегая сопротивлением воздуха при движении указанной части из первоначального положения в конечное, лежащее в той же горизонтальной плоскости, найти наименьшее возможное значение угловой скорости маховика в момент катастрофы, если радиус маховика $R=1{,}75$ м.

Решение

Известно, что дальность полета тела наибольшая, если оно брошено под углом 45° к горизонту. Это условие обеспечивает требуемую дальность полета при наименьшем значении угловой скорости маховика, так как $v_0 = \omega R$.



Рассмотрим движение части маховика в полете под действием силы тяжести $\bar{G}$ (см. рисунок). Составим дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0,$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{kx} = -G,$$

где $G = mg$.

Тогда

$$\ddot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} = -g.$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды и получим

$$\dot{x} = C_1, \ \ x = C_1 t + C_2;$$

$$\dot{y} = -gt + C_3, \ \ y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Определим постоянные интегрирования с учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0 \cos 45°$, $\dot{y}_0 = v_0 \sin 45°$; $C_1 = v_0 \cos 45°$, $C_2 = 0$, $C_4 = 0$, $C_3 = v_0 \sin 45°$.

Тогда

$$x = v_0 t \cos 45°, \qquad (1)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin 45°. \qquad (2)$$

В момент падения части маховика: $t = T$, $x = s$, $y = 0$, следовательно, уравнение (2) примет вид

$$0 = -\frac{gT^2}{2} + v_0 T \sin 45°,$$

откуда

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin 45°.$$

Подставим это выражение в формулу (1) и с учетом того, что $x = s$, запишем

$$s = v_0 T\cos 45° = \frac{2v_0^2 \sin 45° \cos 45°}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Откуда

$$v_0 = \sqrt{sg},$$

но, так как $v_0 = \omega R$, то, следовательно,

$$\omega R = \sqrt{sg}.$$

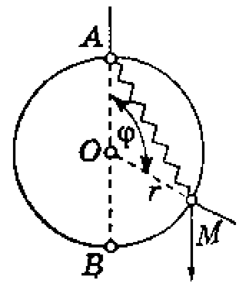
Тогда

$$\omega = \frac{\sqrt{sg}}{R} = \frac{\sqrt{280 \cdot 9{,}8}}{1{,}75} = 30 \text{ (рад/с)},$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 30}{3{,}14} = 286 \text{ (об/мин)}.$$

Ответ: $n = 286$ об/мин, или $\omega = 30$ рад/с.

Задача 31.14



Груз M, подвешенный на пружине к верхней точке A круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения. Найти, какова должна быть жесткость пружины для того, чтобы давление груза на кольцо в нижней точке B равнялось нулю при следующих данных: радиус кольца 20 см, масса груза 5 кг, в начальном положении груза расстояние AM равно 20 см и пружина имеет натуральную длину; начальная скорость груза равна нулю; массой пружины пренебречь.

Решение

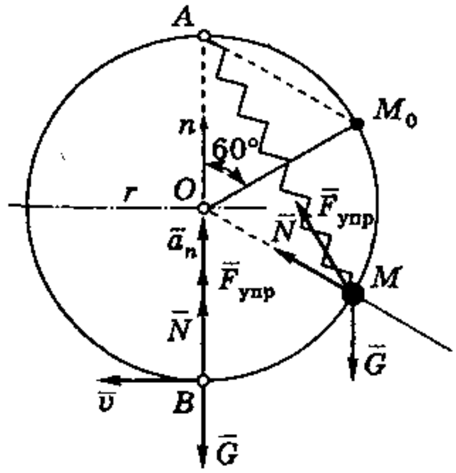
Рассмотрим движение груза M по кольцу под действием силы тяжести $\overline{G}$, силы упругости $\overline{F}_{упр}$ пружины и реакции опоры $\overline{N}$ (см. рисунок). Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на нормаль n в точке B:

$$ma_n = \sum F_{kn} = F_{упр} + N - G$$

или

$$\frac{mv^2}{r} = F_{упр} + N - G. \qquad (1)$$

При $N = 0$ уравнение (1) имеет вид



$$\frac{mv^2}{r} = F_{упр} - G,$$

где $F_{упр} = c\lambda = c(AB - l_0) = c(2r - l_0)$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{r} = c(2r - l_0) - G$$

или

$$mv^2 = cr(2r - l_0) - Gr. \qquad (2)$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k = A(\bar{G}) + A(\bar{F}_{упр}),$$

где $A(\bar{G}) = G(r + r\cos 60°)$; $A(\bar{F}_{упр}) = -c\frac{\lambda^2}{2}$; $v_0 = 0$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = Gr(1 + \cos 60°) - c\,\frac{(2r - l_0)^2}{2}$$

или

$$mv^2 = 2Gr(1 + \cos 60°) - c(2r - l_0)^2. \qquad (3)$$

Так как левые части выражений (2) и (3) равные, то приравняем их правые части и получим

$$cr(2r - l_0) - Gr = 2Gr(1 + \cos 60°) - c(2r - l_0)^2$$

или

$$c(2r - l_0)[r + (2r - l_0)] = Gr[1 + 2(1 + \cos 60°)],$$

откуда жесткость пружины

$$c = \frac{Gr[1 + 2(1 + \cos 60°)]}{(2r - l_0)[r + (2r - l_0)]} = \frac{5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2[1 + 2(1 + 0{,}5)]}{(0{,}4 - 0{,}2)[0{,}2 + (0{,}4 - 0{,}2)]} =$$

$$= 490 \text{ (Н/м)} = 4{,}9 \text{ (Н/см)}.$$

Ответ: пружина должна удлиняться на 1 см при действии силы, равной 4,9 Н.

Задача 31.15

Определить давление груза M на кольцо в нижней точке B (рисунок предыдущей задачи) при следующих данных: радиус кольца 20 см, масса груза 7 кг; в начальном положении груза расстояние AM равно 20 см, причем пружина растянута и длина ее вдвое больше натуральной длины, которая равна 10 см; жесткость пружины такова, что она удлиняется на 1 см при действии силы в 4,9 Н; начальная скорость груза равна нулю; массой пружины пренебрегаем.

Решение

Для того чтобы найти скорость груза в точке B, применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки (см. рисунок в решении задачи 31.14):

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A_k=A(\overline{G})+A(\overline{F}_{упр}),$$

где $A(\overline{G})=G(r+r\cos 60°)$; $A(\overline{F}_{упр})=-c\dfrac{\lambda^2-\lambda_0^2}{2}$.

Тогда, так как $v_0=0$,

$$\frac{mv^2}{2}=1{,}5Gr-\frac{c}{2}\left[(AB-l_0)^2-(AM_0-l_0)^2\right],$$

где $AB=2r$; $AM_0=r$, M_0 — начальное положение груза M, а ΔAOM_0 — равносторонний.

Откуда с учетом того, что $G=mg$, найдем

$$v=\sqrt{3gr-\frac{c}{m}\left[(2r-l_0)^2-(r_0-l_0)^2\right]}=$$

$$=\sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2-\frac{490}{7}\left[(0{,}4-0{,}1)^2-(0{,}2-0{,}1)^2\right]}=0{,}529\ (\text{Н/с}).$$

Определим силу давления груза на кольцо. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на нормаль n:

$$ma_n=\sum F_{kn}=F_{упр}+N-G$$

или

$$\frac{mv^2}{r} = F_{\text{упр}} + N - G.$$

Откуда найдем

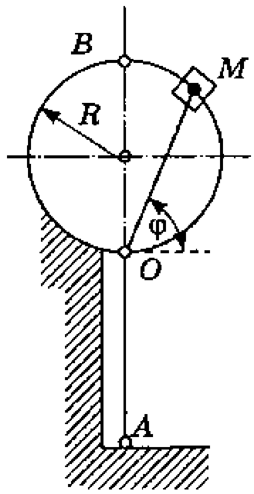
$$N = \frac{mv^2}{r} + G - F_{\text{упр}} = \frac{mv^2}{r} + mg - c(2r - l_0) =$$

$$= \frac{7 \cdot 0{,}529^2}{0{,}2} + 7 \cdot 9{,}8 - 490(0{,}4 - 0{,}1) = -68{,}6 \text{ (Н)}.$$

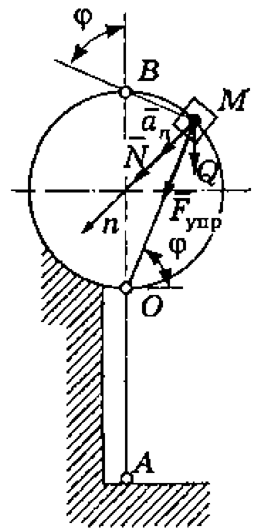
Знак минус показывает, что реакция $\overline{N}$ в действительности имеет направление, обратное показанному на рисунке. Следовательно, сила давления груза, которая обратна по направлению $\overline{N}$, будет направлена вверх.

Ответ: давление направлено вверх и равно 68,6 Н.

Задача 31.16



Гладкое тяжелое кольцо M веса Q может скользить без трения по дуге окружности радиуса R см, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A. Принять, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O, и что для вытягивания нити на 1 см нужно приложить силу c. В начальный момент кольцо находится в точке B в неустойчивом равновесии и при ничтожно малом толчке начинает скользить по окружности. Определить давление N, производимое кольцом на окружность.



Решение

Рассмотрим движение кольца по окружности под действием силы тяжести $\overline{Q}$, силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$ нити, реакции $\overline{N}$ (см. рисунок).

Составим дифференциальное уравнение движения кольца M в проекции на ось n:

$$ma_n = \sum F_{kn} = N + F_{\text{упр}} \cos(90° - \varphi) + Q\cos(180° - 2\varphi),$$

где $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; $F_{\text{упр}} = 2cR\sin\varphi$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{R} = 2cR\sin^2\varphi - Q\cos 2\varphi + N$$

или

$$mv^2 = 2cR^2\sin^2\varphi - QR\cos 2\varphi + NR. \qquad (1)$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки при перемещении кольца из точки B в точку M:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k = A(\overline{Q}) + A(\overline{F}_{\text{упр}}) + A(\overline{N}),$$

где $v_0 = 0$; $A(\overline{N}) = 0$.

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = 2QR\cos^2\varphi + \frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2) = 2QR\cos^2\varphi + \frac{c}{2}(4R^2 - 4R^2\sin^2\varphi) =$$

$$= 2QR\cos^2\varphi + 2cR^2\cos^2\varphi$$

или

$$mv^2 = 4QR\cos^2\varphi - 4cR^2\cos^2\varphi. \qquad (2)$$

Приравняем правые части уравнений (1) и (2) и получим

$$2cR^2\sin^2\varphi - QR\cos 2\varphi + NR = 4QR\cos^2\varphi + 4cR^2\cos^2\varphi,$$

откуда определим давление

$$N = -2cR\sin^2\varphi + 4cR\cos^2\varphi + Q\cos 2\varphi + 4Q\cos^2\varphi =$$

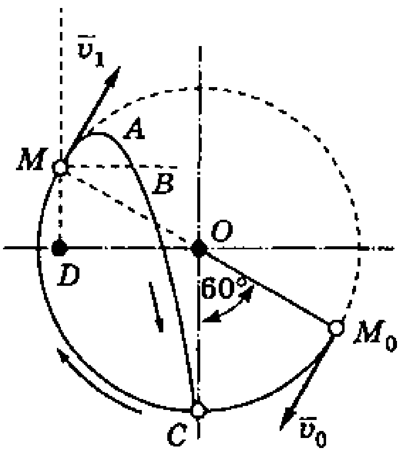
$$= -6cR\sin^2\varphi + 4cR + Q\cos 2\varphi + 4Q - 4Q\sin^2\varphi = 2Q + cR + 3(cR + Q)\cos 2\varphi.$$

Сила давления кольца на окружность $\overline{N}_{\text{д}} = -\overline{N}$.

Ответ: $N = 2Q + cR + 3(cR + Q)\cos 2\varphi$; давление направлено наружу при $N > 0$, внутрь при $N < 0$.

Задача 31.17

Груз подвешен на нити длины 0,5 м в неподвижной точке O. В начальном положении M_0 груз отклонен от вертикали на угол 60°, и ему сообщена скорость $\bar{v}_0$ в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 3,5 м/с.

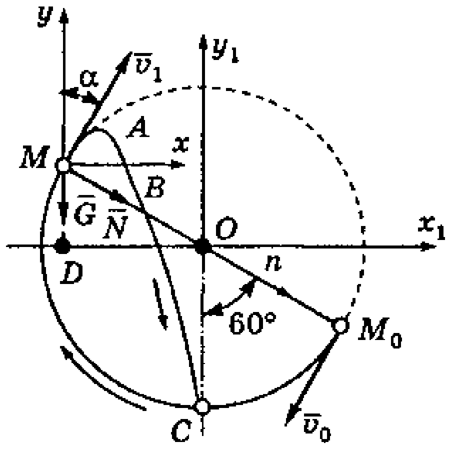


1) Найти то положение M груза, в котором натяжение нити будет равно нулю, и скорость v_1 в этом положении.

2) Определить траекторию последующего движения груза до того момента, когда нить будет опять натянута, и время, в течение которого точка пройдет эту траекторию.

Решение

1) Чтобы найти положение M груза, в котором натяжение нити $\bar{N} = 0$ (см. рисунок), применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:



$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k = A(G) =$$

$$= -mg(OM_0 \cos 60° + MD),$$

где $G = mg$; $OM_0 = R$.

Тогда

$$v_1^2 - v_0^2 = -2g(R\cos 60° + MD). \qquad (1)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось n:

$$ma_n = \sum F_{kn} = G\sin\alpha + N = mg\sin\alpha + N,$$

где $a_n = \dfrac{v_1^2}{R}$; $\sin\alpha = \dfrac{MD}{R}$; $N = 0$.

Тогда

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg\frac{MD}{R}. \tag{2}$$

Выразим v_1^2 из формул (1) и (2):

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(R\cos 60° + MD), \tag{3}$$

$$v_1^2 = g \cdot MD. \tag{4}$$

Откуда

$$g \cdot MD = v_0^2 - 2g \cdot MD - 2gR\cos 60°,$$

$$MD = \frac{v_0^2 - 2gR\cos 60°}{3g} = \frac{3{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 9{,}8} = 0{,}25 \text{ (м)}.$$

Тогда согласно формуле (4)

$$v_1 = \sqrt{g \cdot MD} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}25} = 1{,}565 \text{ (м/с)}.$$

2) Рассмотрим дальнейшее движение груза под действием силы тяжести $\overline{G}$. Составим дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси x и y:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0,$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -G,$$

где $G = mg$.

Тогда

$$\ddot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} = -g.$$

Проинтегрируем дважды эти дифференциальные уравнения:

$$\dot{x} = C_1,$$

$$x = C_1 t + C_2, \tag{5}$$

$$\dot{y} = -gt + C_3,$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \tag{6}$$

Найдем постоянные интегрирования, используя начальные условия: $t=0$, $x_0=0$, $y_0=0$,

$$\dot{x}_0 = v_1 \sin\alpha = v_1 \sin 30° = \frac{\sqrt{g}}{2}\cdot 0{,}5 = \frac{\sqrt{g}}{4},$$

$$\dot{y}_0 = v_1 \cos\alpha = v_1 \cos 30° = \frac{\sqrt{g}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3g}}{4}.$$

Следовательно, $C_1 = \frac{\sqrt{g}}{4}$, $C_2 = 0$, $C_3 = \frac{\sqrt{3g}}{4}$, $C_4 = 0$.

Тогда уравнение (5) примет вид

$$x = \frac{\sqrt{g}}{4}t.$$

Откуда

$$t = \frac{4x}{\sqrt{g}}.$$

Подставим это выражение в формулу (6) и с учетом значений постоянных C_3 и C_4 получим

$$y = -\frac{g}{2}\frac{16x^2}{g} + \frac{\sqrt{3g}}{4}\frac{4x}{\sqrt{g}} = x\sqrt{3} - 8x^2.$$

Это уравнение траектории MAB движения груза, т.е. уравнение параболы.

Далее определим время T, за которое груз, двигаясь по параболе $MABC$ (см. рисунок), окажется на окружности в точке C.

Запишем уравнения движения груза в осях Ox_1y_1:

$$x_1 = x - OD = x - R\cos\alpha = \frac{\sqrt{g}}{4}t - R\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$y_1 = y + MD = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3g}}{4}t + \frac{R}{2}.$$

Так как в конечный момент времени

$$x_1^2(T) + y_1^2(T) = R^2,$$

то

$$\left(\frac{\sqrt{g}}{4}T - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{gT^2}{2} + \frac{\sqrt{3g}T}{4} + \frac{R}{4}\right)^2 = R^2.$$

После преобразований получим

$$\frac{g}{16}T^2-\frac{R\sqrt{3g}}{4}T+\frac{3R^2}{4}+\frac{g^2T^4}{4}+\frac{3g}{16}T^2+\frac{R^2}{4}-\frac{\sqrt{3g}}{4}gT^3+$$

$$+\frac{R\sqrt{3g}}{4}T-\frac{gRT^2}{2}=R^2$$

или

$$gT-\sqrt{3g}=0.$$

Отсюда

$$T=\sqrt{\frac{3}{g}}=\sqrt{\frac{3}{9,8}}=0,55\text{ (с)}.$$

Ответ: 1) положение M находится над горизонталью точки O на расстоянии $MD=0,25$ м, $v_1=156,5$ см/с.
2) Парабола $MABC$, уравнение которой, отнесенное к осям Mx и My, имеет вид $y=x\sqrt{3}-8x^2$; груз описывает эту параболу в течение 0,55 с.

Задача 31.18

Математический маятник установлен на самолете, который поднимается на высоту 10 км. На какую часть надо уменьшить длину нити маятника, чтобы период малых колебаний маятника на этой высоте остался без изменений? Силу тяжести считать обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли.

Решение

Период малых колебаний математического маятника на поверхности Земли

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

на высоте $H=10$ км

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}}.$$

Так как $T_1 = T$, то

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{g}{g_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Поскольку

$$g_H = g\left(\frac{R}{R+H}\right)^2,$$

то

$$\frac{g}{g_H} = \frac{l}{l_1} = \left(\frac{R+H}{R}\right)^2, \qquad (1)$$

где $g_H = g_1$; $R = 6370$ км — радиус Земли.

Представим

$$l_1 = l - \Delta,$$

где Δ — величина, на которую надо уменьшить длину маятника.

Тогда формула (1) примет вид

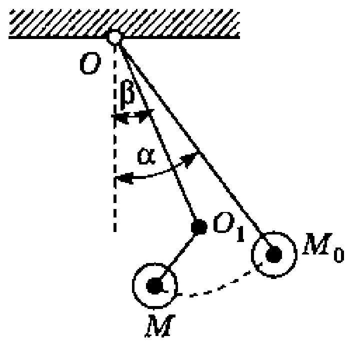
$$\frac{l}{l-\Delta} = \left(1+\frac{H}{R}\right)^2.$$

Откуда

$$\frac{\Delta}{l} = 1 - \frac{1}{\left(1+\dfrac{H}{R}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\left(1+\dfrac{1\cdot 10^4}{637\cdot 10^4}\right)^2} = 0{,}00313.$$

Ответ: на $0{,}00313l$, где l — длина нити на поверхности Земли.

Задача 31.19



В неподвижной точке O посредством нити OM длины l подвешен груз M массы m. В начальный момент нить OM составляет с вертикалью угол α и скорость груза M равна нулю. При последующем движении нить встречает тонкую проволоку O_1, направление которой перпендикулярно плоскости движения груза, а положение определяется полярными координатами: $h = OO_1$ и β. Определить наименьшее значение угла α, при котором нить *OM* после встречи с проволокой будет на нее навиваться, а также изменение натяжения нити в момент ее встречи с проволокой. Толщиной проволоки пренебречь.

Решение

Для определения скорости груза в момент встречи нити с проволокой (рис. 1) применим теорему об изменении кинетической энергии, учитывая, что $v_0 = 0$. Тогда

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg(h_0 - h_1), \qquad (1)$$

где $h_0 = l(1-\cos\alpha)$; $h_1 = l(1-\cos\beta)$.

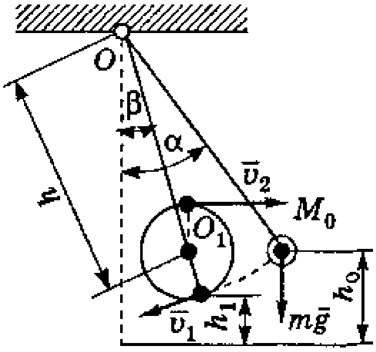


Рис. 1

С учетом значений h_0 и h_1 формула (1) примет вид

$$\frac{v_1^2}{2} = gl(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Откуда

$$v_1^2 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha). \qquad (2)$$

После встречи нити подвеса с проволокой груз будет описывать окружность (рис. 2) радиусом

$$r = l - h = l\left(1 - \frac{h}{l}\right).$$

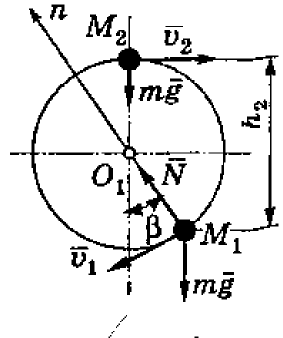


Рис. 2

Минимальную скорость груза v_2, при которой нить будет навиваться на проволоку, найдем из уравнения движения груза в проекции на естественную ось *n*; учитывая, что реакция нити равна нулю,

$$\frac{mv_2^2}{r} = mg. \qquad (3)$$

Откуда

$$v_2^2 = gr.$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки для груза *M*:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -mgh_2,$$

где $h_2 = r + r\cos\beta = r(1+\cos\beta)$.

Тогда, учитывая выражение (2), получим

$$v_2^2 = gr = v_1^2 - 2gr(1+\cos\beta)$$

или с учетом значения r

$$2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gl\left(1-\frac{h}{l}\right)\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) = 0.$$

Откуда найдем

$$\cos\alpha = \frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}, \qquad (4)$$

$$\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right].$$

Подставим выражение (4) в формулу (2):

$$v_1^2 = 2gl\left(\cos\beta + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{l-h}{l}\right) = 2g\left(\cos\beta + \frac{3}{2}\right)(l-h).$$

Далее определим натяжение нити в момент встречи нити с проволокой, когда $\overline{N} = N_1$ (рис. 2). Для этого составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на естественную ось n:

$$\frac{mv_1^2}{l} = N_1 - mg\cos\beta \Rightarrow N_1 = \frac{mv_1^2}{l} + mg\cos\beta.$$

Составим такое же уравнение для момента, когда нить будет навиваться на проволоку, т.е. когда $\overline{N} = N_2$:

$$\frac{mv_1^2}{r} = N_2 - mg\cos\beta \Rightarrow N_2 = \frac{mv_1^2}{r} + mg\cos\beta.$$

Тогда найдем изменение натяжения нити в момент ее встречи с проволокой:

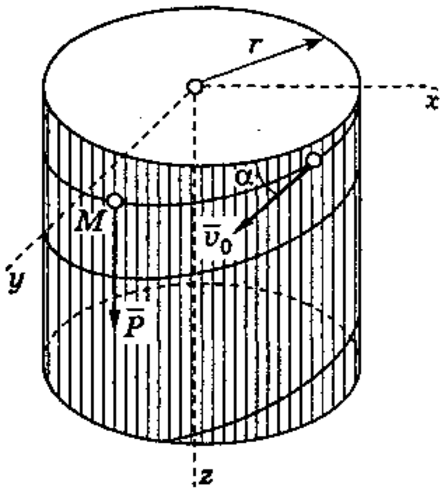
$$\Delta N = N_2 - N_1 = mv_1^2\left(\frac{1}{l-h} - \frac{1}{l}\right)$$

или

$$\Delta N = 2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right).$$

О т в е т: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$; натяжение нити увеличивается на величину $2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$.

Задача 31.20



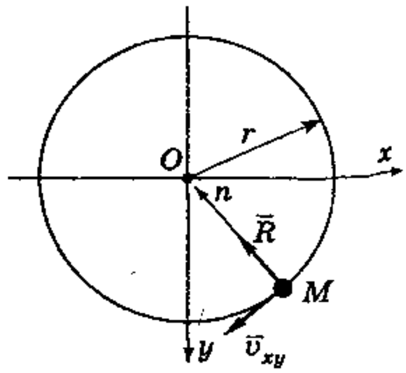
Тяжелая точка M массы m движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса r. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой и ось цилиндра вертикальной, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна по величине v_0 и составляет угол α с горизонтом.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на естественную ось n (см. рисунок):

$$ma_n = R,$$

где $a_n = \dfrac{v_{xy}^2}{r}$, $v_{xy} = v_0 \cos\alpha$; R — реакция поверхности цилиндра.



Тогда

$$R = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r},$$

а сила давления точки на цилиндр

$$N = R = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}.$$

Ответ: $N = \dfrac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}$.

Задача 31.21

В предыдущей задаче составить уравнения движения точки, если в начальный момент точка находилась на оси x.

Решение

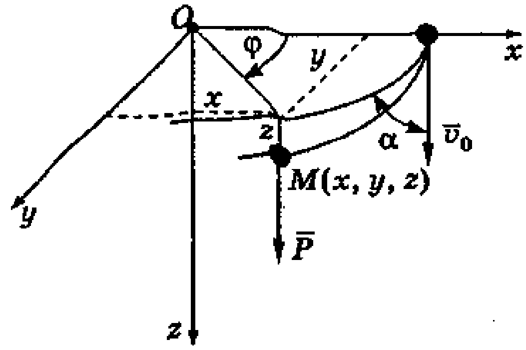
Запишем координаты x и y точки M в произвольный момент (см. рисунок):

$$x = r\cos\varphi, \tag{1}$$

$$y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Определим изменение угла φ:

$$\varphi = \omega t.$$



Учитывая, что

$$v_{xy} = \omega r = v_0 \cos\alpha,$$

получим

$$\varphi = \frac{v_0 \cos\alpha}{r} t.$$

Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$x = r\cos\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{r} t\right),$$

$$y = r\sin\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{r} t\right).$$

Для определения координаты z запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z:

$$m\ddot{z} = P$$

или

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = g, \qquad (3)$$

так как $P = mg$.

В выражении (3) разделим переменные и дважды проинтегрируем его:

$$\dot{z} = gt + C_1, \qquad (4)$$

$$z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha$, в формулы (4) и (5) и получим

$$\dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha = C_1,$$

$$z_0 = 0 = C_2.$$

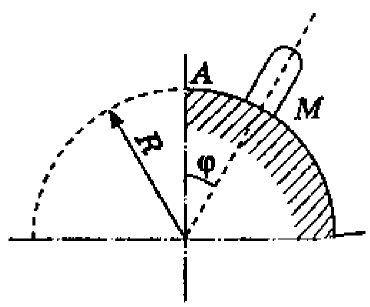
Подставим значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (5):

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha.$$

О т в е т: $x = r\cos\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{r} t\right)$; $y = r\sin\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{r} t\right)$; $z = v_0 t \sin\alpha + \frac{gt^2}{2}$.

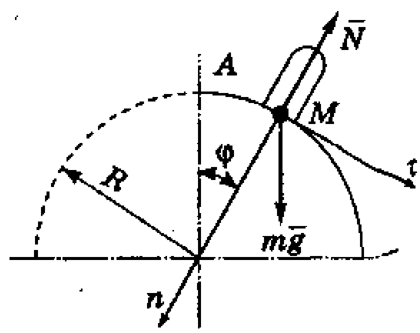
Задача 31.22

Камень M, находящийся на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R, получает начальную горизонтальную скорость $\bar{v}_0$. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях $\bar{v}_0$ камень сойдет с купола в начальный момент? Сопротивлением движению камня по куполу пренебречь.



Р е ш е н и е

На камень действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и реакция $\bar{N}$ поверхности (см. рисунок). Свяжем с движущимся камнем естественные оси n и τ. Запишем дифференциальное уравнение движения камня в проекции на ось n:



$$ma_n = mg\cos\varphi - N, \qquad (1)$$

где $a_n = \frac{v^2}{R}$.

В момент отрыва камня от купола $N = 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$v^2 = gR\cos\varphi. \qquad (2)$$

Для определения скорости камня запишем теорему об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgR(1 - \cos\varphi)$$

или

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi). \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в формулу (2) и получим

$$v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi) = gR\cos\varphi.$$

Откуда

$$v_0^2 + 2gR = 3gR\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right),$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right).$$

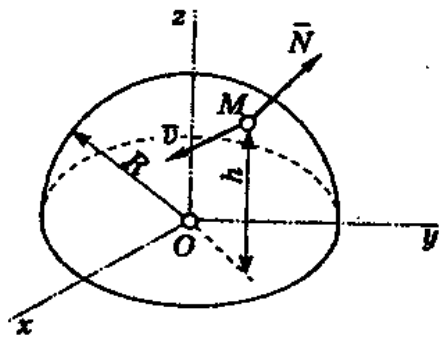
Из формулы (2) найдем значение v_0, при котором камень сойдет с купола в начальный момент. При этом $\varphi = 0$. Тогда

$$v_0 \geq \sqrt{gR}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $v_0 \geq \sqrt{gR}$.

Задача 31.23

Точка M массы m движется по гладкой поверхности полусферического купола радиуса R. Считая, что на точку действует сила тяжести, параллельная оси z, и зная, что в начальный момент точка имела скорость v_0 и находилась на высоте h_0 от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте h от основания купола.

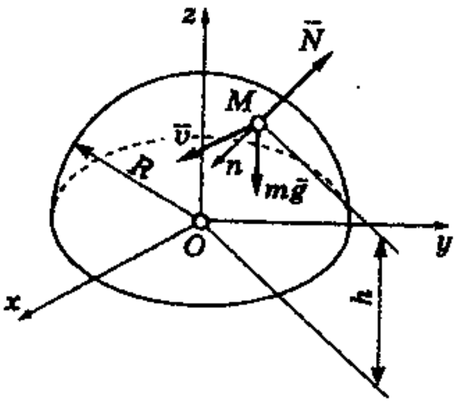


Решение

Тело движется по гладкой полусфере. На него действуют сила тяжести $m\bar{g}$ и реакция $\bar{N}$ поверхности (см. рисунок). Свяжем с телом естественные оси n и τ. Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось n:

$$ma_n = mg\cos\varphi - N, \qquad (1)$$

где $a_n = \frac{v^2}{R}$.



Откуда

$$N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Для определения скорости точки M применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h_0 - h).$$

Откуда

$$mv^2 = mv_0^2 + 2mg(h_0 - h). \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в формулу (2):

$$N = mg\cos\varphi - \left[mv_0^2 + 2mg(h_0 - h)\right]\frac{1}{R}.$$

Так как $\cos\varphi = \dfrac{h}{R}$, то

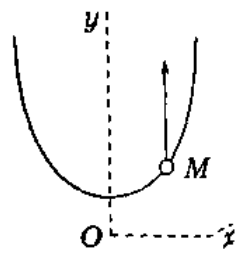
$$N = \frac{mgh}{R} - \left[mv_0^2 + 2mg(h_0 - h)\right]\frac{1}{R} = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right).$$

Ответ: $N = \dfrac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \dfrac{v_0^2}{g}\right)$.

Задача 31.24

Точка M массы m движется по цепной линии

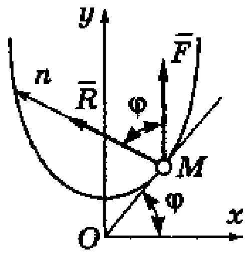
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$



под действием силы отталкивания, параллельной оси Oy, направленной от оси и равной kmy. В момент $t = 0$ $x = 1$ м, $\dot{x} = 1$ м/с. Определить давление N точки на кривую и движение точки при $k = 1$ рад/с^2 и $a = 1$ м (силой тяжести пренебрегаем). Радиус кривизны цепной линии равен y^2/a.

Решение

Свяжем с движущейся точкой M естественную ось n (см. рисунок) и составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на эту ось:



$$ma_n = \frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{kn},$$

где $\sum F_{kn} = R + F\cos\varphi$, $F = kmy$;

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \rho = \frac{y^2}{a}. \tag{1}$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{\rho} = R + kmy\cos\varphi.$$

Откуда

$$R = \frac{mv^2}{\rho} - kmy\cos\varphi, \tag{2}$$

где

$$\cos\varphi = \frac{\dot{x}}{v}. \tag{3}$$

Для определения $\dot{x}$ запишем дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение дважды и получим

$$\dot{x} = C_1 = \text{const}, \tag{4}$$

$$x = C_1 t + C_2. \tag{5}$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 1$; $\dot{x}_0 = 1$, найдем постоянные интегрирования. Из формулы (4): $\dot{x}_0 = 1 = C_1$, из формулы (5): $x_0 = 1 = C_2$.

Подставим значения C_1 и C_2 в (4) и (5) и найдем:

$$\dot{x} = 1, \; x = t + 1.$$

Найдем проекцию скорости точки M на ось y:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x}, \tag{6}$$

где $y' = \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$.

Тогда

$$\dot{y} = \dot{x}\operatorname{sh}\frac{x}{a},$$

$$v = \dot{x}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}. \tag{7}$$

Подставим выражения (1), (3), (7) в формулу (2):

$$R = \frac{m\dot{x}^2\left(1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right)a}{y^2} - \frac{kmy\dot{x}}{\dot{x}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}}} = \frac{m\dot{x}^2\left(1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}\right)}{a\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}} - \frac{akm\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}}}.$$

Учтем, что $1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a} = \operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}$, и получим

$$R = \frac{m\dot{x}^2}{a} - kma. \tag{8}$$

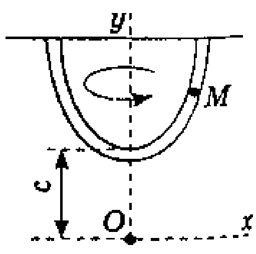
Подставим в выражение (8) заданные в условии задачи величины и получим, что $R = 0$.

Сила давления $\overline{N}$ точки M на кривую равна реакции связи, т.е. $N = R = 0$.

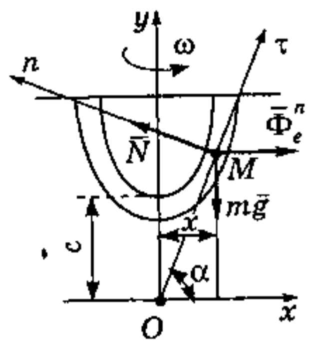
Ответ: $N = 0$; $x = (1+t)$ м.

Задача 31.25

По какой плоской кривой следует изогнуть трубку, чтобы помещенный в нее в любом месте шарик оставался по отношению к трубке в равновесии, если трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy?



Решение



Свяжем подвижную ось τ с точкой M (см. рисунок) и запишем уравнение относительного движения в проекции на эту ось, учитывая, что $\Phi_e^n = m\omega^2 x$:

$$m\frac{dv_r}{dt} = -mg\sin\alpha + \Phi_e^n\cos\alpha, \qquad (1)$$

так как $\bar{N} \perp \tau$.

Согласно условию задачи шарик должен оставаться по отношению к трубке в равновесии, значит,

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 0.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\omega^2 x\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Разделим переменные, проинтегрируем

$$\int dy = \int \frac{\omega^2}{g} x dx$$

и получим

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C. \qquad (2)$$

В начальный момент $x_0 = 0$, тогда согласно формуле (2): $C = y_0 = c$.

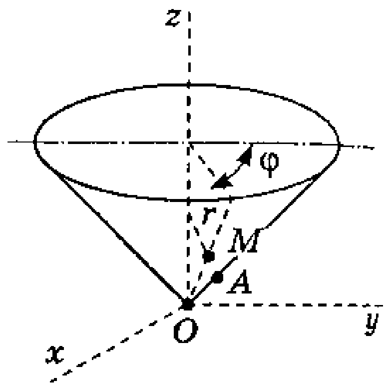
Подставим найденное значение постоянной интегрирования в формулу (2) и запишем:

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + c \text{ — парабола.}$$

О т в е т: по параболе $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g} + c.$

Задача 31.26

Точка M массы $m = 1$ кг движется по гладкой поверхности круглого конуса, угол раствора которого $2\alpha = 90°$, под влиянием силы отталкивания от вершины O, пропорциональной расстоянию: $F = c \cdot OM$ Н, где $c = 1$ Н/м. В начальный момент точка M находилась в точке A, расстояние OA равно $a = 2$ м, начальная скорость $v_0 = 2$ м/с и направлена параллельно основанию конуса.

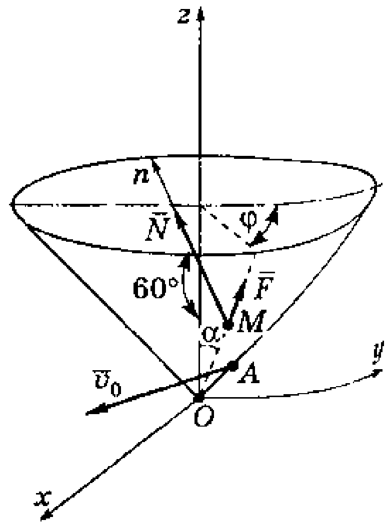


Определить движение точки M (силой тяжести пренебречь).

У к а з а н и е. Положение точки M определяем координатой z и полярными координатами r и φ в плоскости, перпендикулярной оси Oz; уравнение поверхности конуса $r^2 - z^2 = 0$.

Р е ш е н и е

Покажем на рисунке точку M в произвольном положении и действующие на нее силы: силу $F = c \cdot OM$, нормальную реакцию $\overline{N}$. Запишем дифференциальные уравнения движения точки в проекции на полярные оси r и φ:



$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r + N_r = F\sin\alpha - N\cos\alpha, \quad (1)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi + N_\varphi = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что

$$r^2\dot{\varphi} = A = \text{const}. \tag{3}$$

При $t = 0$: $r = r_0 = a\sin\alpha = 2\sin 45° = \sqrt{2}$; $r_0\dot{\varphi}_0 = v_0$. Тогда

$$A = r_0(r_0\,\dot{\varphi}_0) = r_0 v_0 = 2\sqrt{2}. \tag{4}$$

Так как $r^2\dot{\varphi} = \text{const}$, то

$$r^2\,\dot{\varphi} = r_0^2\,\dot{\varphi}_0 = r_0\,v_0 = 2\sqrt{2}. \tag{5}$$

Запишем основное уравнение динамики для точки M в проекции на ось n:

$$m\frac{v^2}{r}\cos\alpha = N,$$

где $v^2 = r^2\dot{\varphi}^2$; N — нормальная реакция.

Тогда

$$N = mr\dot{\varphi}^2\cos\alpha. \tag{6}$$

Подставим выражение (6) в уравнение (1):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = c\cdot OM\cdot\sin\alpha - mr\dot{\varphi}^2\cos^2\alpha = c\frac{r}{\sin\alpha}\sin\alpha - mr\dot{\varphi}^2\cos^2 45°. \tag{7}$$

После преобразования выражения (7) получим

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - cr + \frac{1}{2}mr\dot{\varphi}^2 = 0$$

или

$$\ddot{r} - \frac{c}{m}r - \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{8}$$

С учетом выражения (3) уравнение (8) представим в виде

$$\ddot{r} - \frac{c}{m}r - \frac{1}{2}\frac{A^2}{r^3} = 0. \tag{9}$$

Умножим уравнение (9) на $\dot{r}$:

$$\dot{r}\ddot{r} - \frac{c}{m}r\dot{r} - \frac{A^2\dot{r}}{2r^3} = 0. \tag{10}$$

Введем замену:

$$\ddot{r}\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{r}^2), \quad r\dot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2), \quad \frac{\dot{r}}{2r^3} = \frac{\dot{r}r}{2r^4} = \frac{1}{4r^4}\frac{d}{dt}(r^2).$$

Обозначим $r^2 = x$, $\dot{r}^2 = \dot{x}$.

С учетом этого уравнение (10) примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d\dot{x}}{dt} - \frac{1}{2}\frac{c}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{4}\frac{A^2}{x^2}\frac{dx}{dt} = 0. \tag{11}$$

Умножив уравнение (11) на dt и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{1}{2}\frac{c}{m}x + \frac{1}{4}\frac{A^2}{x} = C_1$$

или

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\frac{c}{m}r^2 + \frac{1}{4}\frac{A^2}{r^2} = C_1. \tag{12}$$

Определим C_1 с учетом начальных условий движения: $t = 0$, $\dot{r}_0 = 0$, $r_0 = a\sin\alpha = \sqrt{2}$ м, $A = 2\sqrt{2}$ м²/с.

Так как $\dfrac{c}{m} = 1$, то из формулы (12) найдем: $C_1 = 0$. Тогда, подставив значение C_1 в уравнение (12), получим

$$\dot{r}^2 = \frac{c}{m}r^2 - \frac{A^2}{2r^2}. \tag{13}$$

Умножим уравнение (9) на r:

$$\ddot{r}r - \frac{c}{m}r^2 - \frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2} = 0.$$

Откуда

$$\ddot{r}r = \frac{c}{m}r^2 + \frac{A^2}{2r^2}. \tag{14}$$

Сложим выражения (13) и (14) и получим

$$\dot{r}^2 + \ddot{r}r = \frac{2c}{m}r^2. \tag{15}$$

Введем замену:

$$(\dot{r}^2 + \ddot{r}r) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2),$$

где $r^2 = x$.

Тогда уравнение (15) примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2c}{m}x$$

или

$$\ddot{x} - k^2x = 0, \tag{16}$$

где $k^2 = \frac{4c}{m}$.

Общее решение однородного уравнения (16) имеет вид

$$x = C_2e^{kt} + C_3e^{-kt}$$

или с учетом введенного обозначения

$$r^2 = C_2e^{kt} + C_3e^{-kt}. \tag{17}$$

Продифференцируем выражение (17) по времени:

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2r\dot{r} = kC_2e^{kt} - kC_3e^{-kt}. \tag{18}$$

Определим C_2 и C_3 из формул (17) и (18) с учетом начальных условий: при $t = 0$ $r_0 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\dot{r}_0 = 0$. Найдем

$$\frac{1}{2}a^2 = C_2 + C_3,\ 0 = C_2 - C_3 \Rightarrow C_2 = C_3 = C$$

или

$$C = \frac{a^2}{4} = \frac{4}{4} = 1\ (\text{м}^2).$$

Подставим значения постоянных интегрирования в формулу (17):

$$r^2 = e^{2t} + e^{-2t}.$$

Далее из формулы (5) найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t}} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Разделим переменные в этом выражении:

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{2}dt}{e^{2t} + e^{-2t}} = \frac{\sqrt{2}de^{2t}}{e^{4t} + 1},$$

проинтегрируем и получим

$$\varphi = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,e^{2t} + C_4. \qquad (19)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, в формулу (19) и определим постоянную интегрирования:

$$0 = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,e^{2t} + C_4,$$

$$C_4 = -\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}1 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

С учетом найденного значения C_4 формула (19) примет вид:

$$\varphi = \sqrt{2}\left(\mathrm{arctg}\,e^{2t} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Откуда

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}.$$

Ответ: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$; $\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}$.

Задача 31.27

При условиях предыдущей задачи, считая ось конуса направленной по вертикали вверх и учитывая силу тяжести, определить давление точки на поверхность конуса.

Решение

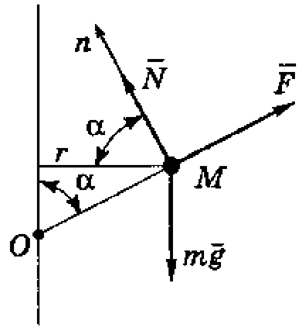
Свяжем с движущейся точкой естественную ось n (см. рисунок) и составим дифференциальное уравнение движения точки M в проекции на эту ось:

$$ma_n = \sum F_{in}, \qquad (1)$$

где $a_n = \dfrac{v^2 \cos\alpha}{r}$, $r = OM \cdot \sin\alpha$; $\sum F_{in} = N - mg\sin\alpha$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{mv_0^2\cos\alpha}{OM\cdot\sin\alpha}=N-mg\sin\alpha.$$



Откуда найдем нормальную реакцию

$$N=m\sin\alpha\left(g+\frac{v_0^2\cos\alpha}{OM\cdot\sin^2\alpha}\right)=$$

$$=m\sin\alpha\left(g+\frac{v^2\sin2\alpha}{2\cdot OM\cdot\sin^3\alpha}\right)=$$

$$=m\sin\alpha\left[g+\frac{(OM)^2\cdot v^2\sin2\alpha}{2r^3}\right].$$

Учтем, что $r^2\varphi=r_0^2\varphi_0=r_0v_0=\text{const}$ [см. решение задачи 31.26, формула (5)] или

$$r(r\varphi)=r_0(r_0\varphi_0)\Rightarrow rv=r_0v_0.$$

Так как $r=OM\cdot\sin\alpha$, $r_0=a\sin\alpha$, то

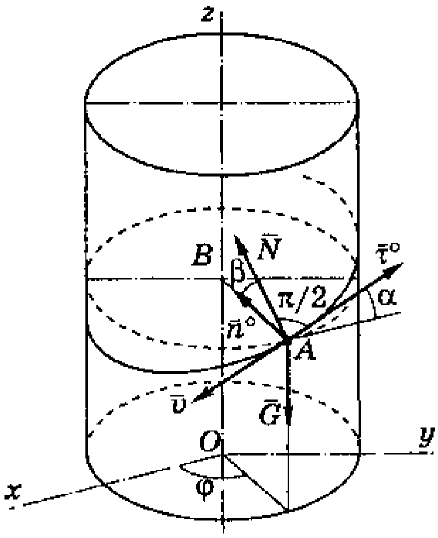
$$OM\cdot v\sin\alpha=av_0\sin\alpha\Rightarrow OM\cdot v=a\cdot v_0.$$

Тогда

$$N=m\sin\alpha\left(g+\frac{a^2v_0^2\sin2\alpha}{2r^3}\right).$$

Ответ: $N=m\sin\alpha\left(g+\dfrac{a^2v_0^2\sin2\alpha}{2r^3}\right)$.

Задача 31.28



Материальная точка A под действием силы тяжести движется по шероховатой винтовой поверхности, ось которой Oz вертикальна; поверхность задана уравнением $z=a\varphi+f(r)$; коэффициент трения точки о поверхность равен k. Найти условие, при котором движение точки происходит на постоянном расстоянии от оси

$AB = r_0$, т.е. происходит по винтовой линии, а также найти скорость этого движения, полагая, что $a = \text{const}$.

Указание. Для решения задачи целесообразно воспользоваться системой естественных осей, проектируя уравнение движения на касательную, главную нормаль и бинормаль винтовой линии в точке A. На рисунке угол между нормальной компонетной $\bar{N}$ реакции винтовой поверхности и ортом главной нормали $\bar{n}^\circ$ обозначен через β.

Решение

При $r = r_0 = \text{const}$ (рис. 1) из уравнения винтовой поверхности $z = a\varphi + f(r)$ найдем шаг винтовой линии (рис. 2):

$$h = 2\pi a.$$

С учетом того, что $b = 2\pi r_0$, из рис. 2 получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{b} = \frac{a}{r_0}.$$

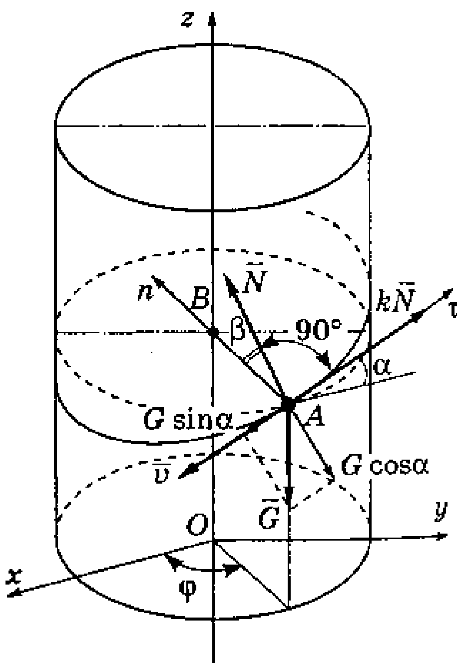


Рис. 1

Уравнения движения точки A в проекции на касательную, нормаль и бинормаль имеют вид (рис. 3):

$$m\frac{dv}{dt} = G\sin\alpha - kN, \qquad (1)$$

$$\frac{mv_\varphi^2}{r_0} = N\cos\beta, \qquad (2)$$

$$G\cos\alpha = N\sin\beta. \qquad (3)$$

Учитывая, что $v_\varphi = v\cos\alpha$, $G = mg$, из уравнений (1) и (3) получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{mgr_0\cos\alpha}{mv^2\cos^2\alpha} = \frac{r_0 g}{v^2\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Из геометрии поверхности, заданной уравнением $z = a\varphi + f(r)$, следует, что $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{f'(r_0)\cos\alpha}$. Тогда выражение (4) примет вид

$$v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}.$$

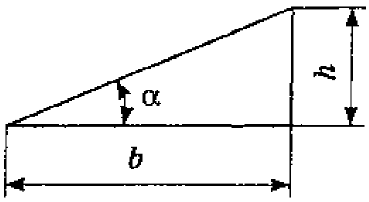


Рис. 2

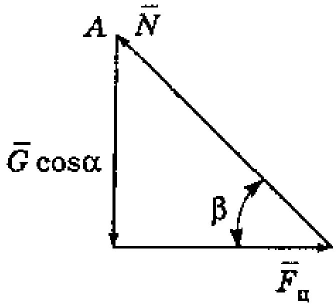


Рис. 3

Движение точки происходит под действием силы тяжести $\bar{G}$ и нормальной $\bar{N}$ реакции поверхности, момент которых относительно оси z равен нулю, следовательно, $L_{oz} = L_z$. Кроме того, точка A согласно условию задачи отстоит от оси z на постоянном расстоянии, значит,

$$mv_0 r_0 \cos\alpha = mvr_0 \cos\alpha \Rightarrow v = v_0 = \text{const},$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$G\sin\alpha = kN. \qquad (5)$$

Разделим уравнение (5) на уравнение (3) и получим

$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{k}{\sin\beta} = 0.$$

Произведя в этом равенстве замену

$$\frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = \sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}} = \sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha},$$

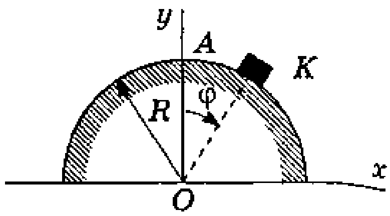
найдем условие движения точки A по винтовой линии:

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0.$$

Ответ: движение по винтовой линии возможно при условии $\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0$, где $\operatorname{tg}\alpha = a/r_0$; скорость движения $v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}$.

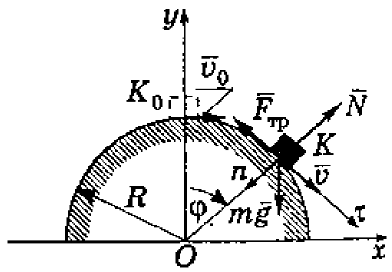
Задача 31.29

Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в верхней точке A шероховатой поверхности неподвижного полуцилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно, начав движение, остановилось на поверхности цилиндра, если коэффициенты трения скольжения при движении и покое одинаковы и равны f.



Решение

Уравнение движения тела K в проекции на ось n (см. рисунок) имеет вид



$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi - N.$$

Откуда

$$N = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R}\right). \qquad (1)$$

Запишем уравнение движения тела K в проекции на ось τ:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\varphi - F_{\text{тр}},$$

где $T_{\text{тр}} = fN = fm\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R}\right)$.

Тогда

$$\frac{dv}{dt} - f\frac{v^2}{R} = g(\sin\varphi - f\cos\varphi). \qquad (2)$$

Предельное равновесие тела K возможно при условии

$$mg\sin\varphi_0 = fmg\cos\varphi_0.$$

Откуда угол предельного равновесия $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.

Осуществим в уравнении (2) замену переменных: $v = R\omega$, где $\omega = \omega(\varphi)$; $\dfrac{dv}{dt} = R\omega\dfrac{d\omega}{d\varphi}$, и получим

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} - f\omega^2 = \frac{g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi).$$

Введем замену $u = \omega^2$, тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{du}{d\varphi} - 2fu = \frac{2g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi). \qquad (3)$$

Найдем решение однородного уравнения

$$\frac{du}{d\varphi} - 2fu = 0 \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = 2fu \Rightarrow \frac{du}{u} = 2fd\varphi \Rightarrow \ln u = 2f\varphi + \ln C \Rightarrow \ln\frac{u}{C} = 2f\varphi.$$

Откуда

$$u = Ce^{2f\varphi}.$$

Частное решение $u^* = C(\varphi)$ ищем методом вариации постоянной:

$$\frac{du^*}{d\varphi} = \frac{dC}{d\varphi}e^{2f\varphi} + 2fCe^{2f\varphi}.$$

Подставим найденные значения в уравнение (3) и получим

$$\frac{dC}{d\varphi}e^{2f\varphi} + 2fCe^{2f\varphi} - 2fCe^{2f\varphi} = \frac{2g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi). \qquad (4)$$

Проинтегрируем выражение (4):

$$\int dC = \frac{2g}{R}\int(\sin\varphi - f\cos\varphi)e^{-2f\varphi}d\varphi.$$

Отдельно вычислим

$$\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{2f}\int\sin\varphi\cdot de^{-2f\varphi} = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2f}\int e^{-2f\varphi}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{4f}\int\cos\varphi\cdot de^{-2f\varphi} = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{4f}e^{-2f\varphi}\cos\varphi -$$

$$-\frac{1}{4f^2}\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{2f}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\cos\varphi.$$

Аналогично

$$\int e^{-2f\varphi}\cos\varphi d\varphi = -\frac{1}{2f}\int \cos\varphi\cdot de^{-2f\varphi} = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\cos\varphi -$$

$$-\frac{1}{2f}\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{4f^2}\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi\cdot de^{-2f\varphi} =$$

$$= -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{4f^2}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{4f^2}\int e^{-2f\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \int e^{-2f\varphi}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2f}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\sin\varphi.$$

В результате получим

$$C = \frac{2g}{R(1+4f^2)}(-2f\sin\varphi - \cos\varphi + 2f^2\cos\varphi - f\sin\varphi)e^{-2f\varphi}$$

или

$$u^* = \frac{2g}{R(1+4f^2)}(-3f\sin\varphi - \cos\varphi + 2f^2\cos\varphi).$$

Тогда при условии, что $u = \frac{v^2}{R^2}$,

$$v^2 = C_1 e^{2f\varphi} - \frac{2gR}{1+4f^2}(3f\sin\varphi + \cos\varphi - 2f^2\cos\varphi). \qquad (5)$$

Так как $v = 0$ при $\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arctg} f$ и $\sin\varphi_0 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$, $\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$, найдем

$$C_1 = \frac{2gR}{1+4f^2}\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0}.$$

Подставим значение C_1 в формулу (5) и получим

$$v^2 = \frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}e^{2f(\varphi-\varphi_0)} - (3f\sin\varphi + \cos\varphi - 2f^2\cos\varphi)\right].$$

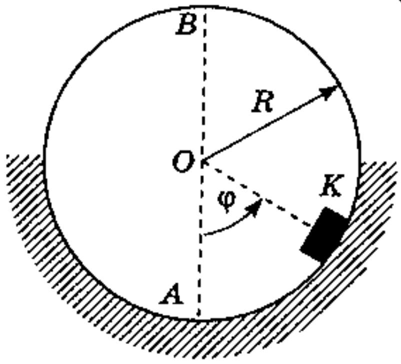
Так как движение начинается из положения $\varphi = 0$, то

$$v_0 \le \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}.$$

О т в е т: $v_0 \le \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}$, где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.

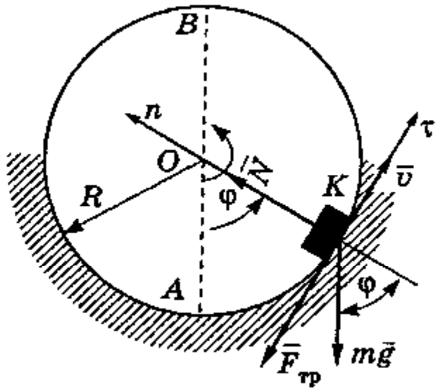
Задача 31.30

Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в нижней точке A внутренней части шероховатой поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно достигло верхней точки B цилиндра? Коэффициент трения скольжения равен f.



Решение

Запишем уравнения движения тела K на участке AKB (см. рисунок) в проекции на оси τ и n:



$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi - F_{тр}, \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\varphi. \tag{2}$$

Выразим из уравнения (2)

$$N = m\left(g\cos\varphi + \frac{v^2}{R}\right)$$

и найдем

$$F_{тр} = fN = fm\left(g\cos\varphi + \frac{v^2}{R}\right).$$

Подставим это выражение в уравнение (1) и получим дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dv}{dt} + f\frac{v^2}{R} = -g(\sin\varphi + f\cos\varphi).$$

Введем замену

$$v = v(\varphi) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vdv}{Rd\varphi},$$

так как $\varphi = \frac{v}{R}$, получим

$$v\frac{dv}{d\varphi} + fv^2 = -gR(\sin\varphi + f\cos\varphi).$$

Обозначим $u = v^2$ и запишем

$$\frac{du}{d\varphi} + 2fu = -2gR(\sin\varphi + f\cos\varphi). \tag{3}$$

Решение уравнения (3) представим в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 — решение однородного уравнения; u_2 — частное решение.

Найдем решение однородного уравнения

$$\frac{du_1}{u_1} = -2fd\varphi \Rightarrow \ln u_1 = -2f\varphi + \ln C \Rightarrow u_1 = Ce^{-2f\varphi}.$$

Частное решение ищем методом вариации постоянных:

$$u_2 = C(\varphi)e^{-2f\varphi} \Rightarrow \frac{du_2}{d\varphi} = \frac{dC}{d\varphi}e^{-2f\varphi} - 2Cfe^{-2f\varphi}.$$

Тогда уравнение (3) для $C(\varphi)$ принимает вид

$$\frac{dC}{d\varphi}e^{-2f\varphi} - 2Cfe^{-2f\varphi} + 2fCe^{-2f\varphi} = -2gR(\sin\varphi + f\cos\varphi)$$

или

$$\int dC = -2gR\int(\sin\varphi + f\cos\varphi)e^{2f\varphi}d\varphi.$$

По аналогии с решением задачи 31.29 найдем

$$\int e^{2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = \frac{2f}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\cos\varphi;$$

$$\int e^{2f\varphi}\cos\varphi d\varphi = \frac{2f}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\sin\varphi.$$

Тогда

$$C=\frac{2gR}{1+4f^2}(-3f\sin\varphi+\cos\varphi-2f^2\cos\varphi)e^{-2f\varphi}.$$

Итак, закон изменения скорости принимает вид

$$v^2=C_1e^{-2f\varphi}+\frac{2gR}{1+4f^2}[-3f\sin\varphi+(1-2f^2)\cos\varphi]. \quad (4)$$

Полагая $v=0$ при $\varphi=\pi$, найдем

$$C_1=\frac{2gR}{1+4f^2}(1-2f^2)e^{2\pi f}.$$

Подставим выражение C_1 в формулу (4) и для $\varphi=0$ получим

$$v_0\ge\sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}(1-2f^2)(e^{2\pi f}+1)}.$$

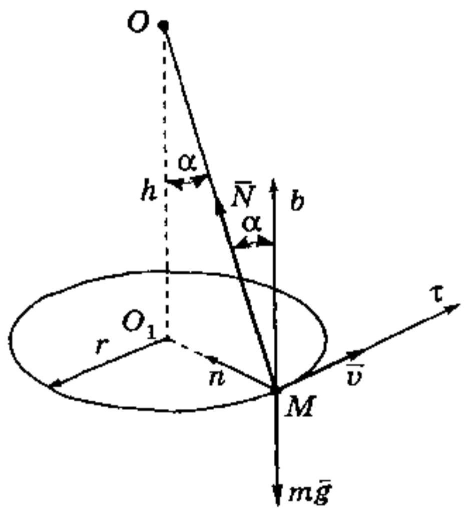
Ответ: $v_0\ge\sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}]}$.

Задача 31.31

Шарик, подвешенный на нити, описывает окружность в горизонтальной плоскости, образуя конический маятник. Найти высоту конуса, если шарик совершает 20 оборотов в минуту.

Решение

Рассмотрим движение шарика под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и реакции $\overline{N}$ нити (см. рисунок).



Запишем уравнения движения в проекциях на естественные оси n, τ, b:

$$m\frac{dv}{dt}=0, \quad (1)$$

$$m\frac{v^2}{r}=N\sin\alpha, \quad (2)$$

$$m\ddot{b}=N\cos\alpha-mg. \quad (3)$$

Из уравнения (1) следует, что $v = \text{const}$, тогда $\dot{v} = 0$ и уравнение (3) примет вид

$$N\cos\alpha = mg.$$

Откуда

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

Подставим выражение (4) в уравнение (2) и получим

$$v^2 = gr\,\text{tg}\,\alpha. \tag{5}$$

Так как $\text{tg}\,\alpha = \frac{r}{h}$, $v = \omega r = \frac{\pi n}{30} r$, то формула (5) примет вид

$$\frac{\pi^2 n^2}{900} r^2 = \frac{gr^2}{h}.$$

Откуда

$$h = \frac{900g}{\pi^2 n^2} = \frac{900 \cdot 9{,}8}{3{,}14^2 \cdot 20^2} = 2{,}25 \text{ (м)}.$$

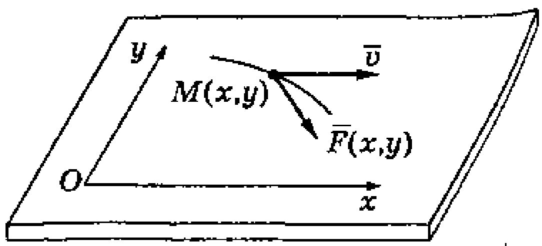
Ответ: $h = 2{,}25$ м.

Задача 31.32

Материальная точка единичной массы движется в горизонтальной плоскости под действием силового поля с потенциалом $\Pi = x^2 + xy + y^2$. В начальный момент точка имеет координаты $x = 3$ см, $y = 4$ см и скорость 10 см/с, параллельную положительному направлению оси x. Определить движение точки.

Решение

Запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки (см. рисунок), находящейся в потенциальном поле, в проекции на оси x и y:



$$m\ddot{x} = -\frac{d\Pi}{dx},$$

$$m\ddot{y} = -\frac{d\Pi}{dy}$$

или

$$\ddot{x} - 2x + y = 0, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} + 2y + x = 0. \qquad (2)$$

При составлении уравнений учтено, что $m = 1$, $F_x = -\dfrac{d\Pi}{dx}$, $F_y = -\dfrac{d\Pi}{dy}$.
Начальные условия движения:

$$x_0 = 3\,\text{см}, \quad \dot{x}_0 = 10\ \text{см/с}, \qquad (3)$$

$$y_0 = 4\,\text{см}, \quad \dot{y}_0 = 0. \qquad (4)$$

Решение дифференциальных уравнений (1) и (2) ищем в виде

$$x = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t},$$

$$y = Ae^{\lambda t} - Be^{\mu t}.$$

Тогда эти уравнения примут вид

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2Ae^{\lambda t} + B\mu^2 e^{\mu t} + 2Be^{\mu t} + Ae^{\lambda t} - Be^{\mu t} = 0,$$

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2Ae^{\lambda t} - B\mu^2 e^{\mu t} - 2Be^{\mu t} + Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} = 0.$$

Откуда

$$\begin{cases} \lambda^2 + 3 = 0, \\ \mu^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{3}i; \quad \lambda_2 = -\sqrt{3}i, \\ \mu_1 = i; \quad \mu_2 = -i. \end{cases}$$

Поэтому решение дифференциальных уравнений (1) и (2) примет вид

$$x = A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t + B_1 \cos t + B_2 \sin t, \qquad (5)$$

$$y = A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t - B_1 \cos t - B_2 \sin t. \qquad (6)$$

Продифференцируем эти выражения по времени:

$$\dot{x} = -\sqrt{3}A_1 \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}A_2 \cos\sqrt{3}t - B_1 \sin t + B_2 \cos t,$$

$$\dot{y} = -\sqrt{3}A_1 \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}A_2 \cos\sqrt{3}t + B_1 \cos t - B_2 \cos t.$$

С учетом начальных условий движения [см. формулы (3), (4)] получим

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A_1 + B_1, \\ 4 &= A_1 - B_1, \\ 10 &= \sqrt{3}A_2 + B_2, \\ 0 &= \sqrt{3}A_2 - B_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Решим систему уравнений (7) и найдем: $A_1 = 3{,}5$, $B_1 = -0{,}5$, $A_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $B_2 = 5$.

Подставим значения постоянных в уравнения (5) и (6):

$$x = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t - 0{,}5\cos t + 5\sin t,$$

$$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t + 0{,}5\cos t - 5\sin t.$$

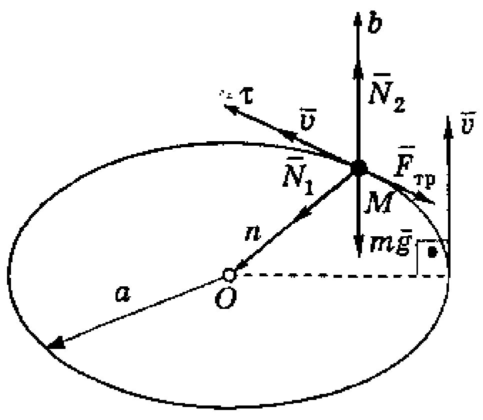
Ответ: $x = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t - 0{,}5\cos t + 5\sin t$;

$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t + 0{,}5\cos t - 5\sin t$.

Задача 31.33

Маленькому кольцу, надетому на проволочную горизонтальную окружность радиуса a, сообщили начальную скорость v_0. Коэффициент трения кольца о проволоку равен f. Определить, через какое время кольцо остановится.

Решение



Рассмотрим движение кольца M под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$ и реакций $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ проволочной окружности (см. рисунок).

Запишем дифференциальные уравнения движения в проекциях на естественные оси τ, n, b:

$$m\frac{dv}{dt} = -f\sqrt{N_1^2 + N_2^2} \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{a} = N_1, \qquad (2)$$

$$mg = N_2, \qquad (3)$$

где $f\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = F_{тр}$.

Выражения (2) и (3) подставим в уравнение (1) и получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{a}\sqrt{v^4 + a^2 g^2}.$$

Разделим переменные, проинтегрируем и определим время, через которое кольцо остановится:

$$-\frac{a}{f}\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{\sqrt{v^4 + a^2 g^2}} = \int_0^t dt,$$

$$t = \frac{a}{f}\int_0^{v_0}\frac{dv}{\sqrt{v^4 + a^2 g^2}}.$$

Ответ: $t = \frac{a}{f}\int_0^{v_0}\frac{dv}{\sqrt{v^4 + a^2 g^2}}$.

Задача 31.34

Материальная точка массы 2 кг притягивается к некоторому центру силой $\bar{F} = (-8x\bar{i} - 8y\bar{j} - 2z\bar{k})$ Н. Начальное положение материальной точки определяется координатами $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = 4$ см. Начальная скорость равна нулю. Определить уравнения движения точки и ее траекторию.

Решение

Запишем основной закон динамики точки в векторном виде:

$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}. \tag{1}$$

В декартовой системе координат $Oxyz$:

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k}. \tag{2}$$

Согласно условию задачи

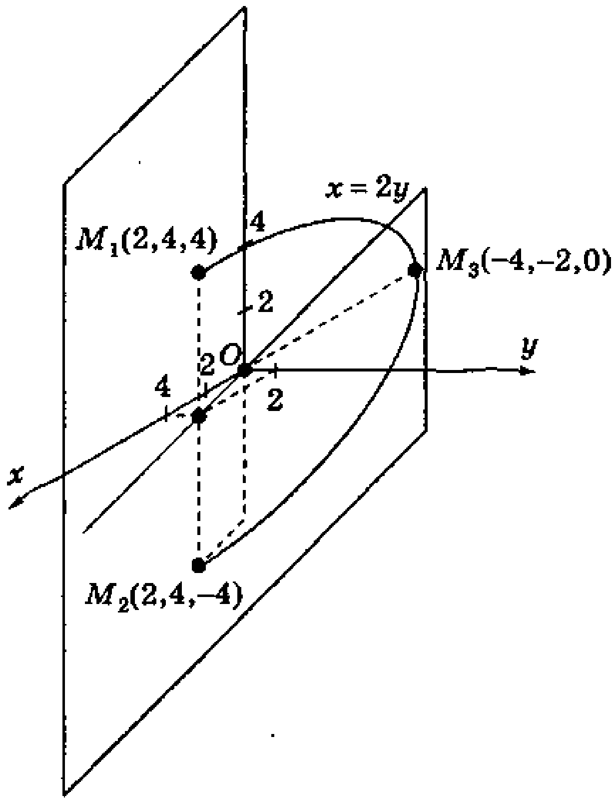
$$\bar{F} = -8x\bar{i} - 8y\bar{j} - 2z\bar{k}. \tag{3}$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (1) и запишем дифференциальные уравнения движения материальной точки (см. рисунок) в проекциях на оси x, y, z:

$$m\ddot{x} = -8x,$$

$$m\ddot{y} = -8y,$$

$$m\ddot{z} = -2z$$



или, так как $m = 2$,

$$\ddot{x} + 4x = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{y} + 4y = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{z} + z = 0. \tag{6}$$

Решения уравнений (4)–(6) имеют вид:

$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \quad \dot{x} = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t;$

$y = C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t, \quad \dot{y} = -2C_3 \sin 2t + 2C_4 \cos 2t;$

$z = C_5 \cos t + C_6 \sin t, \quad \dot{z} = -C_5 \sin t + C_6 \cos t.$

Найдем постоянные интегрирования, подставив начальные условия: $x_0 = 4$, $\dot{x}_0 = 0$, $y_0 = 2$, $\dot{y}_0 = 0$, $z_0 = 4$, $\dot{z}_0 = 0$, получим: $C_1 = 4$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2$, $C_4 = 0$, $C_5 = 4$, $C_6 = 0$.

Тогда

$$x = 4\cos 2t, \tag{7}$$

$$y = 2\cos 2t, \tag{8}$$

$$z = 4\cos t. \tag{9}$$

Исключим параметр t из уравнений (7)–(9), воспользовавшись формулой

$$\cos 2t = 2\cos t - 1.$$

Получим из формул (7) и (9)

$$x = \frac{z^2}{2} - 4,$$

из формул (8) и (9)

$$y = \frac{z^2}{4} - 4,$$

из формул (7) и (8)

$$x = 2y.$$

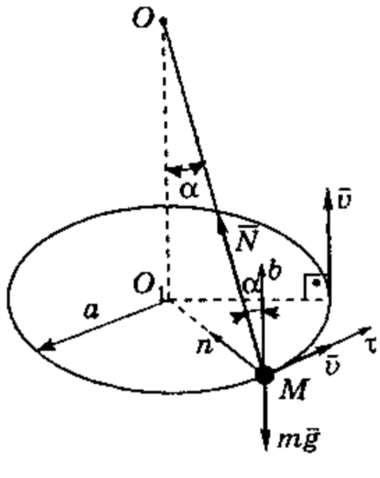
О т в е т: $x = 4\cos 2t$, $y = 2\cos 2t$, $z = 4\cos t$. Траектория — линия пересечения двух параболических цилиндров $x = \frac{z^2}{2} - 4$ и $y = \frac{z^2}{4} - 4$. Это — парабола, лежащая в плоскости $x = 2y$. Движение по траектории осуществляется на участке от точки $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = 4$ см до точки $x = 4$ см, $y = 2$ см, $z = -4$ см.

Задача 31.35

Конический маятник имеет длину l и описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса a. Определить период обращения конического маятника.

Р е ш е н и е

Запишем дифференциальные уравнения движения маятника (см. рисунок) в проекциях на естественные оси τ, n, b:



$$m\frac{dv}{dt} = 0, \tag{1}$$

$$m\frac{v^2}{a} = N\sin\alpha, \tag{2}$$

$$ma_b = N\cos\alpha - mg. \tag{3}$$

Из формулы (1) следует, что $v = \text{const}$, так как $a_b = 0$, то из уравнения (3) найдем

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Подставим это значение в уравнение (2) и получим

$$v^2 = ag\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4}$$

Из ΔOO_1M определим

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{O_1M}{O_1O} = \frac{a}{\sqrt{l^2 - a^2}}.$$

Тогда из формулы (4)

$$v = a\frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{l^2 - a^2}}. \tag{5}$$

Так как $v = \text{const}$, то

$$2\pi a = vT$$

или с учетом выражения (5)

$$2\pi a = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt[4]{l^2 - a}}T,$$

где T — время одного оборота (период).

Откуда найдем

$$T = \frac{2\pi\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{2\pi\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}$.

32. Колебательное движение

Методические указания к решению задач

Колебательным движением материальной точки называется такое движение, при котором точка попеременно движется в двух противоположных направлениях. Для того чтобы точка совершала такое движение, необходимо наличие восстанавливающей силы, которая возвращала бы точку в положение равновесия, если она выведена из этого положения. Такой силой является сила упругих связей — пружин, тросов, ремней и тому подобных деталей либо другие силы, например сила тяжести при колебании математического маятника.

Восстанавливающую силу упругих связей называют ***силой упругости*** и обозначают $\bar{F}_{\text{упр}}$. Величина силы упругости в пределах применимости закона Гука пропорциональна деформации, или отклонению x точки от положения равновесия, и направлена к этому положению. Поэтому проекция силы упругости на ось Ox, направленную в сторону отклонения точки (начало оси совмещено с положением равновесия)

$$F_{\text{упр}\,x} = -cx, \tag{32.1}$$

где c — коэффициент жесткости упругой связи.

Если при движении точки на нее действует, кроме силы упругости, некоторая постоянная сила, например сила тяжести, направление которой совпадает с направлением упругой связи (пружины), то в положении статического равновесия пружина уже растянута на величину $f_{\text{ст}}$, а проекция силы упругости на ось Ox с началом в положении равновесия в этом случае примет вид

$$F_{\text{упр}\,x} = -c(f_{\text{ст}} + x). \tag{32.2}$$

В ряде случаев на точку действуют также сила сопротивления $\bar{R}$ и возмущающая сила $\bar{Q}$.

Законы изменения этих сил могут быть любыми, однако наибольший интерес представляют случаи, когда движение происходит в вязкой (жидкой) среде, а сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости точки и направлена противоположно вектору скорости:

$$\bar{R} = -\alpha\bar{v},$$

где α — коэффициент сопротивления.

Возмущающая сила $\bar{Q}$ изменяется по гармоническому закону

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),$$

где Q_0 — наибольшее значение силы (амплитуда); p — частота; $(pt + \delta)$ — фаза возмущающей силы, δ — начальная фаза возмущающей силы.

В некоторых задачах этого параграфа сила сопротивления является силой сухого трения

$$F_{тр} = fN,$$

где f — коэффициент трения скольжения; N — нормальная реакция шероховатой поверхности.

Свободные колебания. Эти колебания возникают при действии на точку силы упругости и некоторой постоянной силы, кроме силы сопротивления движению (силы трения).

Если начало координат выбрано в положении равновесия, то дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (32.3)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, k — циклическая (круговая) частота колебаний.

Уравнение (32.3) является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого можно представить в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (32.4)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют по начальным условиям движения: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. Продифференцировав выражение (32.4) по времени и подставив в полученное выражение и в уравнение (32.4) начальные условия, находим

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Общее решение уравнения (32.3) в амплитудной форме

$$x = a\sin(kt + \delta), \tag{32.5}$$

где δ — начальная фаза.

Из формулы (32.5) видно, что отклонения точки от положения равновесия подчиняются гармоническому (синусоидальному) закону, поэтому такие колебания называют *гармоническими*.

Наибольшее отклонение точки от положения равновесия называется *амплитудой колебаний*:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}. \tag{32.6}$$

Период колебаний — время одного полного колебания:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \tag{32.7}$$

Если колебание происходит на совокупности соединенных между собой определенным образом упругих связей, то период колебаний определяют по формуле (32.7), но вместо жесткости c подставляют эквивалентную жесткость $c_{экв}$ упругих связей, т.е. жесткость такой одной упругой связи, которая должна быть эквивалентна жесткости всех связей.

Если жесткость пружины неизвестна, но известна ее статическая деформация $f_{ст}$, то циклическую частоту колебаний k и период колебаний T определяют по формулам

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f_{ст}}{g}}, \tag{32.8}$$

что следует из равенства силы упругости и силы тяжести в положении равновесия, т.е.

$$cf_{\text{ст}} = mg \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{g}{f_{\text{ст}}} = k^2.$$

Влияние сопротивления на свободные колебания. В случае, когда точка движется в вязкой среде, на нее, кроме силы упругости и некоторой постоянной силы, действует сила сопротивления среды $\overline{R} = -\alpha\bar{v}$. Тогда дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x при выборе начала координат в положении статического равновесия имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}. \qquad (32.9)$$

Если ввести обозначния

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\alpha}{m} = 2n,$$

то уравнение (32.9) можно представить в виде однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (32.10)$$

где n — коэффициент затухания.

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (32.10), имеет вид

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0. \qquad (32.11)$$

Корни уравнения (32.11)

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \qquad (32.12)$$

Из формулы (32.12) следует, что возможны три случая: $n < k$, $n > k$, $n = k$.

1. При $n < k$ корни характеристического уравнения (32.11) комплексные:

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{-(k^2 - n^2)} = -n \pm ik_1, \qquad (32.12')$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

В этом случае общее решение уравнения (32.10) имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \qquad (32.13)$$

Введем замену: $C_1 = a\sin\alpha$, $C_2 = a\cos\alpha$. Тогда выражение (32.13) можно представить в амплитудной форме:

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha). \qquad (32.14)$$

Продифференцируем выражение (32.13) по времени:

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t).$$

Подставим в это выражение и в уравнение (32.13) начальные условия движения: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, и найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Согласно формуле (32.14) при $\sin(k_1 t + \alpha) = 1$ отклонение точки максимальное:

$$x_{max} = ae^{-nt},$$

все другие отклонения изменяются по закону синуса и с течением времени уменьшаются. Так как функция $\sin(k_1 t + \alpha)$ — периодическая, то движение точки носит колебательный характер, но размах колебаний будет уменьшаться, т.е. в данном случае точка совершает затухающие колебания.

Амплитуда затухающих колебаний

$$A_{зат} = ae^{-nt} \qquad (32.15)$$

с течением времени уменьшается.

При $t = 0$

$$A_{зат} = a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k_1^2}} = A_0,$$

где A_0 — начальное значение амплитуды.

Период затухающих колебаний представляет время между двумя последовательными прохождениями точки через положение равновесия в одном и том же направлении:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \qquad (32.16)$$

Установим закон изменения амплитуды затухающих колебаний. Пусть $A_1 = ae^{-nt_1}$, тогда при $t_2 = t_1 + \frac{T_1}{2}$

$$A_2 = ae^{-n\left(t_1 + \frac{T_1}{2}\right)} = ae^{-nt_1}e^{-\frac{nT_1}{2}} = A_1 e^{-\frac{nT_1}{2}},$$

при $t_3 = t_2 + \frac{T_1}{2}$

$$A_3 = ae^{-n\left(t_2 + \frac{T_1}{2}\right)} = ae^{-nt_1}e^{-\frac{2nT_1}{2}} = A_1 e^{-\frac{2nT_1}{2}}.$$

Следовательно,

$$A_m = A_1 e^{-\frac{nT_1}{2}(m-1)}. \qquad (32.17)$$

Из формулы (32.17) следует, что изменение амплитуды затухающих колебаний происходит по закону убывающей геометрической прогрессии, знаменателем q которой является $e^{-\frac{nT_1}{2}}$, так как любой член геометрической прогрессии $a_m = a_1 q^{m-1}$.

В теории колебаний $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ называется *декрементом колебаний*, обозначается D,

$$D = e^{-\frac{nT_1}{2}}.$$

Декремент колебаний показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда последующего колебания по сравнению с амплитудой предыдущего, если считать амплитуды через полупериод. Если сравнивать амплитуды через период, то $D = e^{-nT_1}$.

Если точка совершила N колебаний, то

$m = 2N + 1$ — число амплитуд через полупериод,

$m = N + 1$ — число амплитуд через период.

Например, если $N = 4$, то число амплитуд через полупериод равно 9. Пусть $\frac{n}{k} = 0{,}05$. Необходимо определить, во сколько раз уменьшилась A_9 по сравнению с A_1. Для этого воспользуемся формулой (32.17) и запишем

$$A_9 = A_1 e^{-\frac{nT_1}{2}\cdot 8} \Rightarrow \frac{A_9}{A_1} = e^{-4nT_1} = e^{-4n\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}} = e^{\frac{-8\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1}}} \cong e^{-0{,}4\pi} = 0{,}285.$$

Тогда

$$\frac{A_1}{A_9} = \frac{1}{0{,}285} \approx 3{,}5.$$

Если задано отношение $\frac{A_1}{A_9} = z$, то можно определить $\ln D$ — логарифмический декремент колебаний:

$$\ln z = \frac{nT_1}{2}\cdot 8 \Rightarrow \frac{nT_1}{2} = \frac{\ln z}{8} = |\ln D|.$$

Начальную фазу затухающих колебаний α определяют по формуле

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2} = \operatorname{arctg}\frac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{\dot{x}_0 + nx_0}. \tag{32.18}$$

2. При $n > k$ корни характеристического уравнения (32.12) являются разными и вещественными:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2-k^2}, \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2-k^2}.$$

Тогда решение уравнения (32.10) в общем виде

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right). \tag{32.19}$$

3. При $n = k$ корни характеристического уравнения (32.12) вещественные и одинаковые:

$$z_1 = z_2 = -n.$$

Тогда решение уравнения (32.10) имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \tag{32.20}$$

Уравнения (32.19) и (32.20) описывают некоторое затухающее апериодическое, т.е. неколебательное, движение.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяют с учетом начальных условий: $t=0$, $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$.

При действии на точку силы сухого трения дифференциальное уравнение движения точки (груза) по шероховатой поверхности имеет вид

$$m\ddot{x}+cx=\pm fN. \tag{32.21}$$

Вынужденные колебания. Такие колебания возникают при движении точки под действием восстанавливающей и возмущающей сил, а также некоторой постоянной силы и силы сопротивления среды. Возможны также случаи кинематического возбуждения.

Если возмущающая сила гармоническая, а сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, то дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x имеет вид

$$m\ddot{x}=-cx-\alpha\dot{x}+Q_0\sin(pt+\delta). \tag{32.22}$$

Обозначив $\dfrac{c}{m}=k^2$, $\dfrac{\alpha}{m}=2n$, $\dfrac{Q_0}{m}=h$, уравнение (32.21) можно представить в виде неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=h\sin(pt+\delta), \tag{32.23}$$

которое является *уравнением вынужденных колебаний материальной точки с учетом сопротивления*.

Решение уравнения (32.23)

$$x=\bar{x}+x^*$$

представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (32.10) — $\bar{x}$, и частного решения уравнения (32.23) — x^*.

Общее решение $\bar{x}$ в зависимости от соотношения n и k может быть дано в виде выражений (32.13) или (32.14) при $n<k$ либо (32.19) при $n>k$ и (32.20) при $n=k$. Наличие в этих выражениях множителя e^{-nt} указывает на то, что движение быстро затухает. Поэтому колебания будут описываться частным решением x^*, которое по существу при больших значениях t является полным решением дифференциального уравнения (32.23).

Частное решение x^* зависит от вида правой части неоднородного уравнения (32.23), т.е.

$$x^* = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon), \tag{32.24}$$

где A_c — амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления,

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}; \tag{32.25}$$

ε — величина сдвига фазы возмущающей силы и вынужденных колебаний,

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad 0 \le \varepsilon \le \pi. \tag{32.26}$$

Следует заметить, что в случае резонанса, когда $k = p$, амплитуда вынужденных колебаний имеет конечное значение

$$A_{рез} = \frac{h}{2np} = \frac{h}{2nk}, \tag{32.27}$$

а $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$, что следует из формулы (32.26).

Однако резонансная амплитуда не является максимальной. Существует такая частота p возмущающей силы, при которой амплитуда имеет максимальное значение. Для определения этой частоты нужно исследовать на экстремум выражение (32.25), откуда найдем

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \tag{32.28}$$

Тогда формула (32.25) примет вид

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{h}{2nk\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \tag{32.29}$$

Сравнив выражения (32.27) и (32.29), получим

$$A_{max} = \frac{A_{рез}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \tag{32.30}$$

Таким образом, если сопротивление вязкой среды незначительно (например, $\frac{n}{k} = 0{,}05$), то

$$A_{max} \approx A_{рез},$$

т.е. максимальное значение амплитуды равно резонансному.

Если сопротивлением пренебречь, то в формулах (32.23), (32.25) и (32.26) $n = 0$. Тогда выражение (32.23) примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta) \qquad (32.31)$$

— это дифференциальное *уравнение вынужденных колебаний без учета сопротивления*.

Решение уравнения (32.31) также можно представить в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x}$ описывается уравнениями (32.4) или (32.5), а x^* можно получить из выражения (32.24) при условии, что $k \neq p$:

$$x^* = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta - \varepsilon). \qquad (32.32)$$

При этом, если $p < k$ (вынужденные колебания малой частоты), то величина сдвига фаз $\varepsilon = 0$, если $p > k$ (вынужденные колебания большой частоты), то $\varepsilon = \pi$, а амплитуда вынужденных колебаний

$$A_в = \frac{h}{p^2 - k^2}. \qquad (32.33)$$

Следовательно, при $p > k$

$$x^* = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta - \pi). \qquad (32.34)$$

Таким образом, если необходимо определить только вынужденные колебания, то следует учитывать только частное решение x^*. При определении полных колебаний с учетом или без учета сопротивления нужно найти полное решение $x = \bar{x} + x^*$.

Из выражений (32.27), (32.32) и (32.33) следует, что при $n = 0$ или при $k = p$ амплитуда вынужденных колебаний равна бесконечности.

Тогда частное решение x^* уравнения (32.31) нельзя представить в виде формулы (32.32) или (32.34). Поэтому в случае резонанса x^* ищут в виде

$$x^* = Bt\cos(kt + \delta). \tag{32.35}$$

В результате математических преобразований получим, что $B = -\dfrac{h}{2k}$.

Тогда выражение (32.35) примет вид

$$x^* = -\frac{h}{2k}t\cos(kt+\delta) = \frac{h}{2k}t\sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right), \tag{32.36}$$

т.е. при резонансе $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$.

В теории вынужденных колебаний важным является понятие *коэффициента динамичности* η, который представляет отношение амплитуды A вынужденных колебаний к некоторому статическому значению A_0 отклонения (расстоянию упругой связи) под действием максимальной возмущающей силы, т.е.

$$\eta = \frac{A}{A_0},$$

где

$$A_0 = \frac{Q_0}{c} = \frac{hm}{c} = \frac{h}{k^2}. \tag{32.37}$$

Значение A_0 можно получить из выражения (32.25), если принять $p=0$, это частный случай решения x^* (32.24) при $p=0$ и $\delta = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Тогда коэффициент динамичности вынужденных колебаний с учетом сопротивления, когда $A = A_c$,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{p}{k}\right)^2\right]^2 + \dfrac{4n^2p^2}{k^4}}}, \tag{32.38}$$

без учета сопротивления ($A = A_в$) при $p < k$

$$\eta = \frac{1}{1-\left(\dfrac{p}{k}\right)^2}, \tag{32.39}$$

при $p > k$

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{p}{k}\right)^2 - 1}. \qquad (32.40)$$

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Провести координатную ось, совместив начало координат с положением статического равновесия материальной точки. Направить ось в сторону смещения точки.

2. Определить начальные условия движения.

3. Изобразить точку в произвольном положении.

4. Показать на рисунке силы, действующие на материальную точку.

5. Записать дифференциальное уравнение движения в проекции на выбранную ось.

6. Решить полученное дифференциальное уравнение.

7. Определить постоянные интегрирования, используя начальные условия.

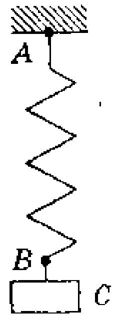
8. В случае вынужденных колебаний найти только частное решение x^* дифференциального уравнения.

Свободные колебания

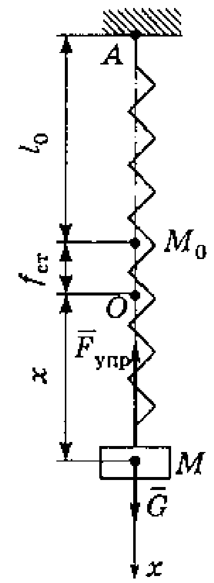
Задачи и решения

Задача 32.1

Пружина AB, закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на 1 м необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу 19,6 Н. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C массы 0,1 кг и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.



Решение



Рассмотрим колебание гири под действием силы тяжести $\bar{G}$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$. Ось x направим вертикально вниз, начало координат O совместим с положением статического равновесия. Изобразим груз в произвольном положении M, определяемом координатой x.

Запишем дифференциальное уравнение движения гири в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = f_{ст} + x$ — деформация пружины.

Тогда

$$m\ddot{x} = G - c(f_{ст} + x) = G - cf_{ст} - cx.$$

Так как в положении статического равновесия

$$G = F_{упр}(0) = c\Delta_0 = cf_{ст},$$

запишем

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (1)$$

Продифференцируем выражение (1) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (2)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 по начальным условиям: при $t = 0$ $x_0 = -f_{ст} = -\dfrac{G}{c}$, $\dot{x}_0 = v_0 = 0$.

Из формулы (1) найдем $C_1 = x_0 = -\dfrac{G}{c}$, из формулы (2) — $C_2 = 0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и получим

$$x = -\frac{G}{c}\cos kt, \qquad (3)$$

где $G = mg$.

Рассчитаем жесткость пружины

$$c=\frac{P}{l}=\frac{19{,}6}{1}=19{,}6\ (\text{Н/м})$$

и круговую частоту

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}}=14\ (\text{рад/с}).$$

Подставим эти значения в формулу (3) и запишем уравнение движения гири

$$x=-\frac{0{,}1\cdot 9{,}8}{19{,}6}\cos 14t=-0{,}05\cos 14t\ (\text{м}).$$

Вычислим период

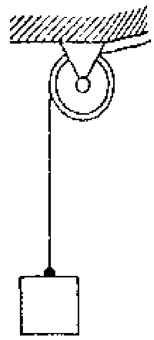
$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\cdot 3{,}14}{14}=0{,}45\ (\text{с})$$

и амплитуду колебаний гири

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}=\sqrt{0{,}05^2+0}=0{,}05\ (\text{м}).$$

О т в е т: $x=-0{,}05\cos 14t$ м; $T=0{,}45$ с; $a=5$ см.

Задача 32.2

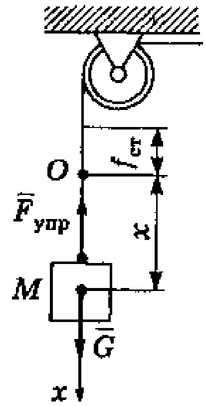


При равномерном спуске груза массы $M=2$ т со скоростью $v=5$ м/с произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором опускался груз, из-за защемления троса в обойме блока. Пренебрегая массой троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $4\cdot 10^6$ Н/м.

Р е ш е н и е

Груз колеблется под действием силы тяжести $\bar{G}$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$. Ось x направим вниз, начало координат O поместим в положение статического равновесия. Изобразим груз в произвольном положении M, определенном координатой x.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = G - F_{упр}, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = f_{ст} + x$ — деформация троса.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = G - c(f_{ст} + x) = G - cf_{ст} - cx.$$

Так как в положении статического равновесия $G = F_{упр}(0) = cf_{ст}$, то

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение полученного уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, так как колебательное движение начинается из положения статического равновесия, то $\dot{x}_0 = v_0$, тогда $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (2) и получим

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Представим это уравнение в виде

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

где $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{k}\right)^2} = \dfrac{v_0}{k}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{kx_0}{\dot{x}_0} = \dfrac{k \cdot 0}{v_0} = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

Тогда

$$\ddot{x} = -ak^2 \sin kt = -v_0 k \sin kt.$$

Из уравнения (1) определим силу упругости, т.е. натяжение троса,

$$F_{упр} = G - m\ddot{x} = m(g - \ddot{x}),$$

где $G = mg$.

Эта сила максимальна, когда $\ddot{x}$ принимает максимальное значение $\ddot{x} = -ak^2$ и направлена вверх, т.е. при $\sin(kt + \alpha) = 1$. Следовательно, наибольшее натяжение троса

$$F_{max} = m(g + ak^2) = m(g + v_0 k) = m\left(g + v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\right) =$$

$$= 2\left(9{,}8 + 5\sqrt{\frac{4\cdot10^6}{2\cdot10^3}}\right) = 466{,}8 \text{ (кН)}.$$

Ответ: 466,8 кН.

Задача 32.3

Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $c_1 = 4\cdot10^5$ Н/м.

Решение

В данном случае груз колеблется на двух последовательно соединенных упругих элементах, жесткость которых c_1 и c_2. Заменим эти элементы одним с эквивалентной жесткостью $c_{экв}$:

$$\Delta_{экв} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где $\Delta_{экв}$, Δ_1, Δ_2 — соответственно деформация эквивалентного, первого и второго упругого элемента.

Так как $\Delta = \dfrac{F_{упр}}{c}$, то

$$\frac{F_{упр}}{c_{экв}} = \frac{F_{упр(1)}}{c_1} + \frac{F_{упр(2)}}{c_2}, \qquad (1)$$

где $F_{упр}$, $F_{упр(1)}$, $F_{упр(2)}$ — сила упругости соответственно эквивалентного, первого и второго упругого элемента.

Тогда

$$\ddot{x} = -ak^2 \sin kt = -v_0 k \sin kt.$$

Из уравнения (1) определим силу упругости, т.е. натяжение троса,

$$F_{\text{упр}} = G - m\ddot{x} = m(g - \ddot{x}),$$

где $G = mg$.

Эта сила максимальна, когда $\ddot{x}$ принимает максимальное значение $\ddot{x} = -ak^2$ и направлена вверх, т.е. при $\sin(kt + \alpha) = 1$. Следовательно, наибольшее натяжение троса

$$F_{\max} = m(g + ak^2) = m(g + v_0 k) = m\left(g + v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\right) =$$

$$= 2\left(9{,}8 + 5\sqrt{\frac{4\cdot 10^6}{2\cdot 10^3}}\right) = 466{,}8 \text{ (кН)}.$$

Ответ: 466,8 кН.

Задача 32.3

Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $c_1 = 4\cdot 10^5$ Н/м.

Решение

В данном случае груз колеблется на двух последовательно соединенных упругих элементах, жесткость которых c_1 и c_2. Заменим эти элементы одним с эквивалентной жесткостью $c_{\text{экв}}$:

$$\Delta_{\text{экв}} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где $\Delta_{\text{экв}}$, Δ_1, Δ_2 — соответственно деформация эквивалентного, первого и второго упругого элемента.

Так как $\Delta = \dfrac{F_{\text{упр}}}{c}$, то

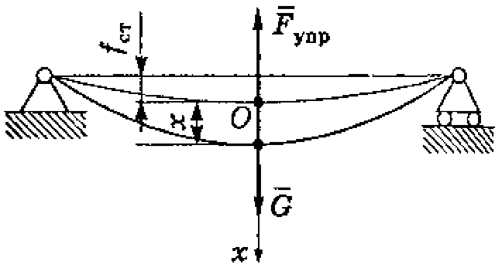
$$\frac{F_{\text{упр}}}{c_{\text{экв}}} = \frac{F_{\text{упр}(1)}}{c_1} + \frac{F_{\text{упр}(2)}}{c_2}, \tag{1}$$

где $F_{\text{упр}}$, $F_{\text{упр}(1)}$, $F_{\text{упр}(2)}$ — сила упругости соответственно эквивалентного, первого и второго упругого элемента.

Задача 32.4

Груз Q, падая с высоты $h = 1$ м без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине; концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке равен 0,5 см; массой балки пренебречь.

Решение



Рассмотрим колебание груза на середине упругой балки под действием силы тяжести $\bar{G}$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$ (см. рисунок). Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия. Груз изобразим в произвольный момент времени, когда его координата равна x. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G - F_{упр}, \tag{1}$$

где $G = mg$; $F_{упр} = c\Delta$.

Прогиб балки $\Delta = f_{ст} + x$, тогда

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{ст} + x) = mg - cf_{ст} - cx.$$

Так как в положении статического равновесия

$$mg = F_{упр}(0) = cf_{ст}, \tag{2}$$

то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Начальные условия: при $t = 0$ $x_0 = -f_{\text{ст}}$, $\dot{x}_0 = v_0$.

Найдем скорость v_0, с которой груз упал на балку. Применив теорему об изменении кинетической энергии для падающего груза, получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m(v_0')^2}{2} = \sum A_k = A(\overline{G}) = mgh,$$

так как $v_0' = 0$, то

$$v = v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 4{,}43 \text{ (м/с)}.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2: $C_1 = -f_{\text{ст}}$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$. Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и запишем

$$x = -f_{\text{ст}} \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt = -f_{\text{ст}} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}\, t + v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}}\, t.$$

Из формулы (2) найдем

$$c = \frac{mg}{f_{\text{ст}}}.$$

Тогда согласно формуле (3) уравнение движения груза (x в метрах)

$$x = -f_{\text{ст}} \cos \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\, t + v_0 \sqrt{\frac{f_{\text{ст}}}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\, t = -0{,}005 \cos \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}005}}\, t +$$

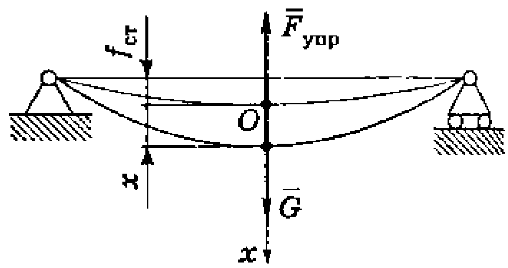
$$+ 4{,}43 \sqrt{\frac{0{,}005}{9{,}8}} \sin \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}005}}\, t = -0{,}005 \cos 44{,}3t + 0{,}1 \sin 44{,}3t.$$

Ответ: $x = (-0{,}5 \cos 44{,}3t + 10 \sin 44{,}3t)$ см.

Задача 32.5

На каждую рессору вагона приходится нагрузка P Н; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 см. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

Решение



Полагая, что рессоры вагона обладают одинаковой жесткостью c и на каждую рессору приходится одинаковая нагрузка P, можно считать, что колебания вагона идентичны колебаниям груза весом P на одной рессоре. Покажем на рисунке груз в произвольном положении, определяемом координатой x. Ось x направлена вертикально вниз из положения статического равновесия. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_{упр}, \tag{1}$$

где $G = mg$; $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = f_{ст} + x$ — деформация рессоры.

В положении статического равновесия

$$mg = F_{упр}(0) = cf_{ст},$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Полученное дифференциальное уравнение (2) описывает свободные колебания. Период свободных колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Жесткость рессоры c определим из условия статического равновесия:

$$cf_{\text{ст}} = mg \Rightarrow c = \frac{mg}{f_{\text{ст}}}.$$

Тогда период собственных колебаний вагона

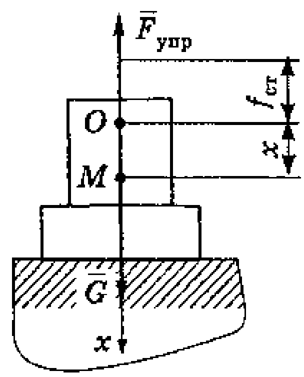
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{\text{ст}}}{g}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}05}{9{,}8}} = 0{,}45 \text{ (c)}.$$

Ответ: $T = 0{,}45$ с.

Задача 32.6

Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если масса фундамента с машиной $M = 90$ т, площадь подошвы фундамента $S = 15$ м^2, коэффициент жесткости грунта $c = \lambda S$, где $\lambda = 30$ Н/см^3 — так называмая удельная жесткость грунта.

Решение



Рассмотрим колебания машины с фундаментом на упругом грунте под действием силы тяжести $\overline{G}$ и силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$ (см. рисунок). Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия O. Изобразим колеблющееся тело в произвольном положении M и запишем дифференциальное уравнение движения в прекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_{\text{упр}}, \qquad (1)$$

где $G = mg$; $F_{\text{упр}} = c\Delta$, $\Delta = f_{\text{ст}} + x$ — деформация грунта.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{\text{ст}} + x) = mg - cf_{\text{ст}} - cx.$$

Так как в положении равновесия

$$mg = F_{\text{упр}}(0) = cf_{\text{ст}},$$

то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

— это дифференциальное уравнение свободных колебаний, период которых

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — круговая частота, $c = \lambda S$.

Следовательно, период свободных колебаний фундамента машины

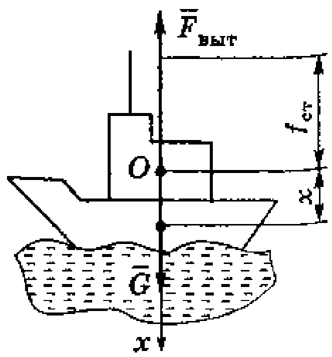
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda S}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{90\,000}{30 \cdot 15 \cdot 10^6}} = 0{,}089 \text{ (с)}.$$

О т в е т: $T = 0{,}089$ с.

Задача 32.7

Найти период свободных вертикальных колебаний коробля на спокойной воде, если масса корабля M т, площадь его горизонтальной проекции S м^2. Плотность воды $\rho = 1$ т/м^2. Силами, обусловленными вязкостью воды, пренебречь.

Р е ш е н и е



Рассмотрим колебания корабля на воде под действием силы тяжести $\bar{G}$ и выталкивающей силы $\bar{F}_{выт}$ (см. рисунок). Ось x направлена вниз из положения равновесия O корабля.

Составим дифференциальное уравнение колебаний корабля в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = G - F_{выт}, \qquad (1)$$

где $F_{выт} = V\rho g$, V — объем вытесняемой кораблем воды, $V = S(f_{ст} + x)$.

Тогда

$$M\ddot{x} = G - (f_{ст} + x)\rho g S = G - \rho g S f_{ст} - x\rho g S.$$

Так как при равновесии корабля на воде

$$G = F_{\text{выт}}(0) = \rho g S f_{\text{ст}},$$

то уравнение (1) примет вид

$$M\ddot{x} = -\rho g S x,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

– это уравнение свободных колебаний, где $k^2 = \dfrac{\rho g S}{M}$.

Найдем период вертикальных колебаний корабля

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho g S}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\rho g S}}$.

Задача 32.8

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения корабля, если он был спущен на воду с нулевой вертикальной скоростью.

Решение

Решение дифференциального уравнения, полученного в задаче 32.7:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$$

где $k^2 = \dfrac{\rho g S}{M}$.

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = -f_{\text{ст}} = -\dfrac{G}{\rho g S} = -\dfrac{M}{\rho S}$, $\dot{x}_0 = 0$; $-\dfrac{M}{\rho S} = C_1$, $C_2 = 0$.

Подставим найденные значения C_1 и C_2 в формулу (1) и запишем уравнение движения корабля:

$$x = -\frac{M}{\rho S}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho g S}{M}}\,t\right).$$

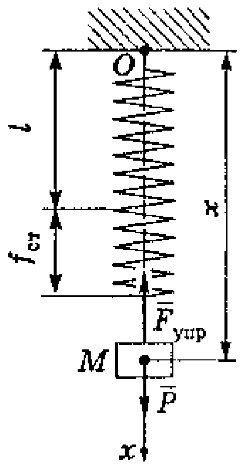
Ответ: $x = -\frac{M}{\rho S}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho g S}{M}}\,t\right)$ м.

Задача 32.9

Груз, вес которого равен P Н, подвешен на упругой нити в неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия груз начинает совершать колебания. Выразить длину нити x в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная длина ее x_0, чтобы во время движения гири нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина ее в нерастянутом состоянии равна l; от действия статической нагрузки, равной q Н, нить удлиняется на 1 см. Начальная скорость груза равна нулю.

Решение

Рассмотрим колебания груза под действием силы тяжести $\overline{P}$ и силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$. Ось x направим вертикально вниз, начало координат O поместим в точке подвеса (см. рисунок). Изобразим груз в произвольном положении M, определяемом координатой x. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = P - F_{\text{упр}},$$

где $F_{\text{упр}} = c\Delta$, Δ — деформация пружины, $\Delta = x - l$. Тогда

$$m\ddot{x} = P - c(x-l) = P + cl - cx$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = g + \frac{c}{m}l, \tag{1}$$

где $c = q$ — жесткость пружины.

Обозначим

$$\frac{c}{m}=\frac{q}{m}=\frac{qg}{P}=k^2.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x}+k^2x=g+k^2l. \tag{2}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (2) ищем в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}=C_1\cos kt+C_2\sin kt$; $x^*=A=\text{const}$.

Найдем частное решение, подставив его в уравнение (2):

$$k^2A=g+k^2l\Rightarrow A=\frac{g}{k^2}+l=\frac{P}{q}+l.$$

Следовательно,

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt+\frac{P}{q}+l, \tag{3}$$

$$\dot{x}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt. \tag{4}$$

Постоянные C_1 и C_2 определим из формул (3) и (4) с учетом начальных условий: при $t_0=0$ $x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0=0$;

$$C_1=x_0-l-\frac{P}{q},\ C_2=0.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и получим

$$x=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos kt=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right).$$

Найдем, при каких значениях x_0 нить всегда будет натянутой, т.е. $x\geq l$,

$$l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)\geq l$$

или

$$\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)\geq 0. \tag{5}$$

Рассмотрим два случая, так как $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)$ в неравенстве (5) принимает экстремальные значения ±1:

1) если $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)=1$, тогда

$$\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\geq 0,\quad x_0\geq l;$$

2) если $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)=-1$, тогда

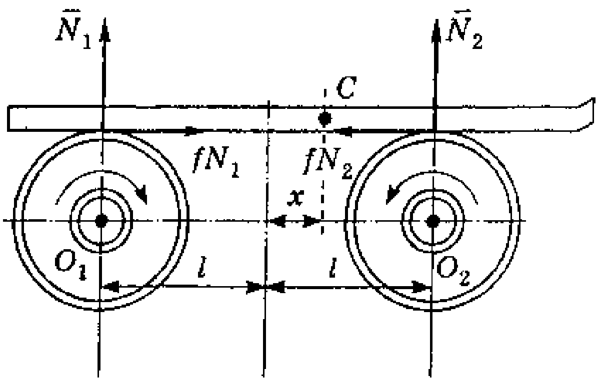
$$\frac{P}{q}-\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\geq 0,\quad x_0\leq l+\frac{2P}{q}.$$

Следовательно,

$$l\leq x_0\leq l+\frac{2P}{q}.$$

Ответ: $x=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right);\quad l\leq x_0\leq l+\frac{2P}{q}.$

Задача 32.10

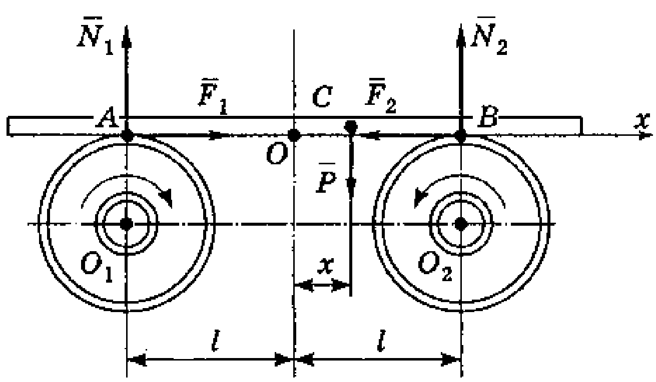


На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на рисунке, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой O_1O_2; расстояние $O_1O_2=2l$; стержень приводится в движение силами трения, развивающимися в точках касания его со шкивами; эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен f.

1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на x_0 при $v_0 = 0$.

2) Найти коэффициент трения f, зная, что период колебаний T стержня при $l = 25$ см равен 2 с.

Решение



1) Рассмотрим горизонтальное движение стержня под действием силы тяжести $\bar{P}$, сил трения $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, реакций $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ (см. рисунок). Ось x направим горизонтально вправо, начало координат — точка O.

Запишем дифференциальное уравнение движения стержня в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_1 - F_2, \qquad (1)$$

где $F_1 = N_1 f$; $F_2 = N_2 f$.

Выразим силы N_1 и N_2 через силу тяжести P, учитывая смещение x стержня. Составим уравнения равновесия системы сил, приложенных к стержню:

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad 2lN_2 - P(l + x) = 0;$$

$$\sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \quad P(l - x) - 2lN_1 = 0.$$

Откуда

$$N_2 = P\frac{l + x}{2l} = \frac{P}{2} + \frac{P}{2l}x, \quad N_1 = P\frac{l - x}{2l} = \frac{P}{2} - \frac{P}{2l}x.$$

Тогда

$$F_1 = f\left(\frac{P}{2} - \frac{P}{2l}x\right), \quad F_2 = f\left(\frac{P}{2} + \frac{P}{2l}x\right)$$

и уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = \frac{-fP}{l}x$$

или с учетом того, что $P = mg$,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $k^2 = \frac{fg}{l}$.

Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 с учетом начальных условий: при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x}_0 = v_0 = 0$; $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и получим

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\, t\right).$$

2) Определим коэффициент трения f. Так как период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{fg}{l}}},$$

то

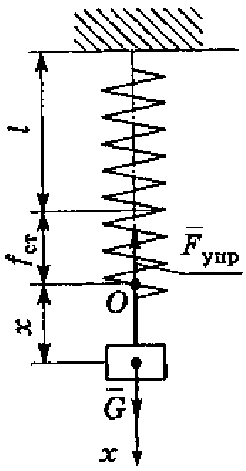
$$f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}25}{9{,}8 \cdot 2^2} = 0{,}25.$$

Ответ: 1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\, t\right)$; 2) $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25$.

Задача 32.11

К одной и той же пружине подвесили сначала груз веса P, а во второй раз груз веса $3P$. Определить, во сколько раз изменится период колебаний. Зная коэффициент жесткости пружины c, а также начальные условия (грузы подвешивались к концу нерастянутой пружины и отпускались без начальной скорости), найти уравнения движения грузов.

Решение



Рассмотрим колебания груза под действием силы тяжести $\bar G$ и силы упругости $\bar F_{упр}$ (см. рисунок). Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия O.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot x = G - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = f_{ст} + x$ — деформация пружины.

Тогда

$$m\ddot x = G - c(f_{ст} + x). \qquad (1)$$

Так как в положении равновесия

$$G = F_{упр}(0) = cf_{ст},$$

то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot x = -cx$$

или

$$\ddot x + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot x = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст}$, $\dot x_0 = 0$, найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = -f_{ст} = -\frac{G}{c}, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$x = -\frac{G}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right).$$

Откуда для груза весом $G = P$

$$x_1 = -\frac{P}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t;$$

для груза весом $G = 3P$

$$x_2 = -\frac{3P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3P}}\,t\right).$$

Так как период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

то

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{3P}{cg}}}{2\pi\sqrt{\frac{P}{cg}}} = \sqrt{3}.$$

О т в е т: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$; $x_1 = -\frac{P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}\,t\right)$; $x_2 = -\frac{3P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3P}}\,t\right)$.

Задача 32.12

К пружине жесткости $c = 2$ кН/м сначала подвесили груз массы 6 кг, а затем заменили его грузом вдвое большей массы. Определить частоты и периоды колебаний грузов.

Р е ш е н и е

Известно, что тело, подвешенное к пружине, совершает гармонические колебания. Частота и период этих колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Рассчитаем для грузов массой $m_1 = 6$ кг и $m_2 = 12$ кг частоты

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{2000}{6}} = 18{,}26 \text{ (рад/с)},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}} = \sqrt{\frac{2000}{12}} = 12{,}9 \text{ (рад/с)}$$

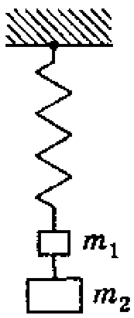
и периоды колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{6}{2000}} = 0{,}344 \text{ (с)},$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{c}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{12}{2000}} = 0{,}49 \text{ (с)}.$$

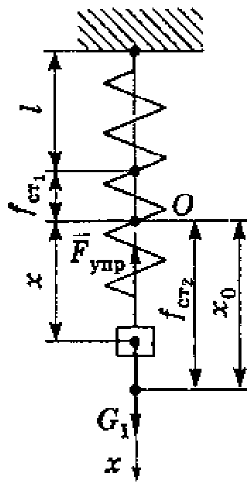
Ответ: $k_1 = 18{,}26$ рад/с; $k_2 = 12{,}9$ рад/с; $T_1 = 0{,}344$ с; $T_2 = 0{,}49$ с.

Задача 32.13



К пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6$ Н/м, были подвешены два груза с массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}8$ кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.

Решение



Рассмотрим колебание груза m_1 под действием силы тяжести $\bar{G}_1$ и силы упругости $\bar{F}_{упр}$ (см. рисунок). Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия O груза m_1. Изобразим груз в произвольном положении, определяемом координатой x.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m_1\ddot{x} = G_1 - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст_1} + x)$.

Тогда

$$m_1\ddot{x} = G_1 - c(f_{ст_1} + x) = -cx$$

или, так как в положении равновесия $G_1 = F_{упр}(0) = cf_{ст_1}$,

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m_1}$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = f_{\text{ст}\,2} = \dfrac{G_2}{c} = \dfrac{m_2 g}{c}$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = \dfrac{m_2 g}{c}$, $C_2 = 0$.

Тогда уравнение движения груза

$$x = \frac{m_2 g}{c} \cos kt = \frac{0{,}8 \cdot 9{,}8}{19{,}6} \cos\left(\sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}5}}\, t\right) = 0{,}4 \cos 6{,}26t.$$

Найдем круговую частоту

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}5}} = 6{,}26 \text{ (рад/с)},$$

период

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{6{,}26} = 1 \text{ (с)}$$

и частоту колебаний

$$f = \frac{1}{T} = 1 \text{ (Гц)}.$$

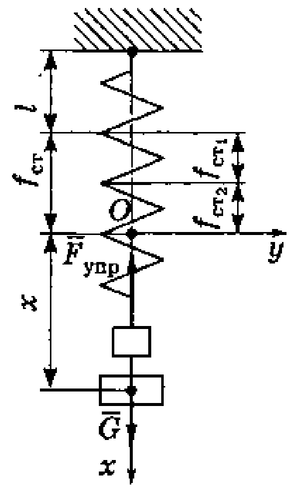
О т в е т: $x = 0{,}4 \cos 6{,}26t$ м; $f = 1$ Гц; $k = 6{,}26$ рад/с; $T = 1$ с.

Задача 32.14

Груз массы $m_1 = 2$ кг, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c = 98$ Н/м, находится в равновесии. В некоторый момент к грузу m_1 добавили груз $m_2 = 0{,}8$ кг. Определить уравнение движения и период колебаний двух грузов.

Р е ш е н и е

Рассмотрим колебания двух грузов массой $m = m_1 + m_2$ под действием силы тяжести $\overline{G}$ и силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$ (см. рисунок). Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия O двух грузов.



Составим дифференциальное уравнение движения грузов в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G - F_{упр}, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

Тогда

$$m\ddot{x} = G - c(f_{ст} + x) = -cx,$$

так как в положении статического равновесия грузов

$$G = F_{упр}(0) = cf_{ст}.$$

Уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \qquad (3)$$

Определим постоянные интегрирования C_1 и C_2 по начальным условиям: при $t = 0$ $x_0 = -f_{ст_2} = -\dfrac{G_2}{c} = -\dfrac{m_2 g}{c}$, $\dot{x}_0 = 0$. По формулам (2) и (3) найдем

$$C_1 = -\frac{m_2 g}{c}, \quad C_2 = 0.$$

Тогда согласно формуле (2)

$$x = -\frac{m_2 g}{c} \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\, t = -\frac{0{,}8 \cdot 9{,}8}{98} \cos\sqrt{\frac{98}{2 + 0{,}8}}\, t = -0{,}08 \cos 5{,}916 t.$$

Рассчитаем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5{,}916} = 1{,}062 \text{ (c)}.$$

Ответ: $x = -0{,}08 \cos 5{,}916 t$; $T = 1{,}062$ с.

Задача 32.15

Груз массы 4 кг подвесили сначала к пружине с жесткостью $c_1 = 2$ кН/м, а затем к пружине с жесткостью $c_2 = 4$ кН/м. Найти отношение частот и отношение периодов колебаний груза в этих двух случаях.

Решение

Груз, подвешенный к пружине, совершает гармонические колебания, круговая частота и период которых

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Следовательно, для пружины жесткости c_1

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1}},$$

для пружины жесткости c_2

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_2}}.$$

Поэтому отношение круговых частот колебаний груза

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\frac{c_1}{m}}}{\sqrt{\frac{c_2}{m}}} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071,$$

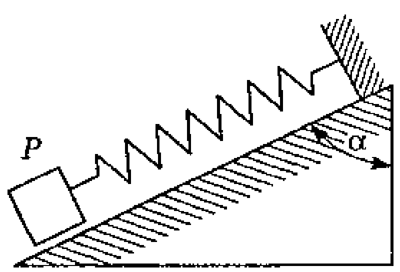
отношение периодов

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{c_2}}} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} = \sqrt{2} = 1{,}4142.$$

Ответ: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$; $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} = 1{,}4142$.

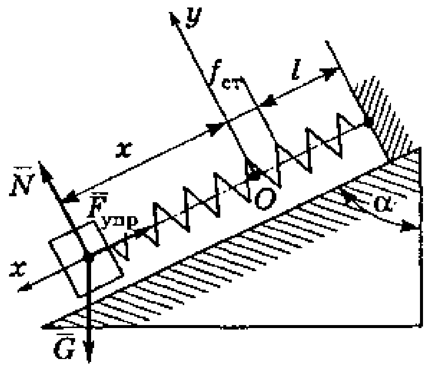
Задача 32.16

Тело массы m находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с вертикалью. К телу прикреплена пружина, жесткость которой c. Пружина параллельна наклонной плоскости. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость $\bar{v}_0$, направленная вниз по наклонной плоскости. Начало координат взять в положении статического равновесия.



Решение

Рассмотрим колебания тела массой m. Покажем на рисунке силы, действующие на него: силу тяжести $\bar{G}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$, реакцию $\bar{N}$ опоры. Ось x направим параллельно наклонной плоскости из положения статического равновесия O в сторону удлинения пружины.



Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G\cos\alpha - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

Тогда

$$m\ddot{x} = G\cos\alpha - c(f_{ст} + x) = -cx, \qquad (1)$$

так как в положении статического равновесия $G\cos\alpha = F_{упр}(0) = cf_{ст}$.

Уравнение (1) запишем в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \qquad (4)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем начальные условия: при $t = 0$ $x_0 = -f_{ст} = -\dfrac{G\cos\alpha}{c} = -\dfrac{mg\cos\alpha}{c}$, $\dot{x}_0 = v_0$, тогда из формул (3) и (4) найдем

$$-\frac{mg\cos\alpha}{c} = C_1, \quad v_0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

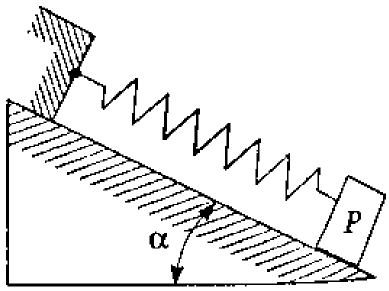
Окончательно уравнение движения (3) имеет вид

$$x = -\frac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt.$$

Ответ: $x = \dfrac{v_0}{k}\sin kt - \dfrac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt$, где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

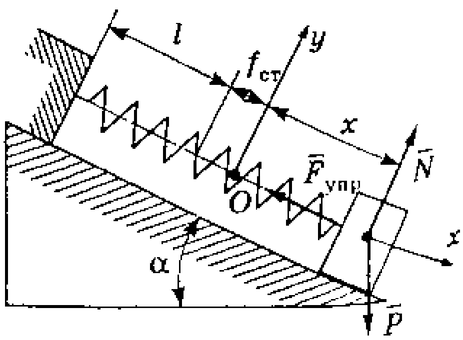
Задача 32.17

На гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α, находится прикрепленный к пружине груз веса P. Статическое удлинение пружины равно f. Определить колебания груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния на длину, равную $3f$, и груз отпущен без начальной скорости.



Решение

Рассмотрим колебание груза под действием силы тяжести $\overline{P}$, реакции опоры $\overline{N}$ и силы упругости $\overline{F}_{упр}$ (см. рисунок). Ось x направим вниз вдоль наклонной плоскости из положения статического равновесия O.



Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P\sin\alpha - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

Тогда, так как в положении статического равновесия $P\sin\alpha = F_{\text{упр}}(0) = cf_{\text{ст}}$,

$$m\ddot{x} = P\sin\alpha - cf_{\text{ст}} - cx = -cx. \qquad (1)$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \qquad (4)$$

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2, используя начальные условия: при $t = 0$ $v_0 = 0$, $x_0 = 2f$, из формул (3) и (4) получим: $C_1 = 2f$, $C_2 = 0$.

Окончательно согласно формуле (3)

$$x = 2f\cos kt = 2f\cos\left(\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{f}}\,t\right),$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g\sin\alpha}{f}}$.

Ответ: $x = 2f\cos\left(\sqrt{\dfrac{g\sin\alpha}{f}}\,t\right)$.

Задача 32.18

Тело массы $M = 12$ кг, прикрепленное к концу пружины, совершает гармонические колебания. При помощи секундомера установлено, что тело совершило 100 полных колебаний за 45 с. После этого к концу пружины добавочно прикрепили груз массы $M_1 = 6$ кг. Определить период колебаний двух грузов на пружине.

Решение

Период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

где k — круговая частота; c — жесткость пружины.

Найдем период колебаний груза массой M:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M} \tag{1}$$

и груза массой $M + M_1$:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M + M_1}{c}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M + M_1}. \tag{2}$$

Согласно формуле (1)

$$\frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{T}{\sqrt{M}}.$$

Подставим это выражение в формулу (2) и получим

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M + M_1} = \frac{T}{\sqrt{M}}\sqrt{M + M_1} = T\sqrt{\frac{M + M_1}{M}}. \tag{3}$$

Вычислим период T колебания груза массой M, воспользовавшись данными задачи:

$$T = \frac{45}{100} = 0{,}45\ (\text{с}).$$

Тогда согласно формуле (3) найдем

$$T_1 = 0{,}45\sqrt{\frac{12 + 6}{12}} = 0{,}55\ (\text{с}).$$

Ответ: $T_1 = T\sqrt{\frac{M + M_1}{M}} = 0{,}55$ с.

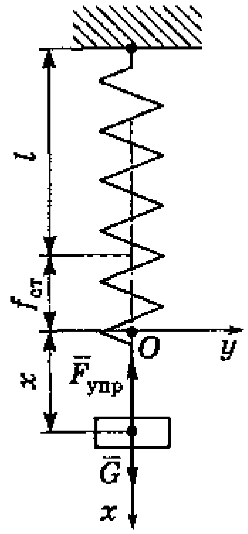
Задача 32.19

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза M и двух грузов $M + M_1$, если в обоих случаях грузы были подвешены к концу нерастянутой пружины.

Решение

Рассмотрим колебания грузов под действием силы тяжести $\vec{G}$ и силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$. Ось x направим вертикально вниз из положения статического равновесия O грузов (см. рисунок).

Запишем дифференциальное уравнение движения грузов в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

Тогда

$$m\ddot{x} = G - cf_{ст} - cx. \qquad (1)$$

Так как в положении статического равновесия

$$G = F_{упр}(0) = cf_{ст},$$

то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_1 \cos kt. \qquad (4)$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст}$, $\dot{x}_0 = v_0 = 0$, из формул (3) и (4) найдем: $-f_{ст} = C_1$, $0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = 0$.

Подставим значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (3) и запишем уравнение движения грузов

$$x = -f_{ст} \cos kt,$$

где k — круговая частота, $k = \dfrac{2\pi}{T}$; $f_{ст}$ — статическая деформация пружины.

Найдем статическую деформацию

$$f_{ст} = \frac{G}{c} = \frac{g}{k^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2},$$

где c — жесткость пружины, $c = k^2 m$.

Тогда

$$x = -\frac{gT^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \tag{5}$$

Для груза массой M уравнение (5) с учетом значения $T = 0{,}45$ с, найденного в решении задачи 32.18, примет вид

$$x = \frac{-9{,}8\cdot 0{,}45^2}{4\cdot 3{,}14^2}\cos\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}45}t\right) = -0{,}05\cos 14t \text{ (м)},$$

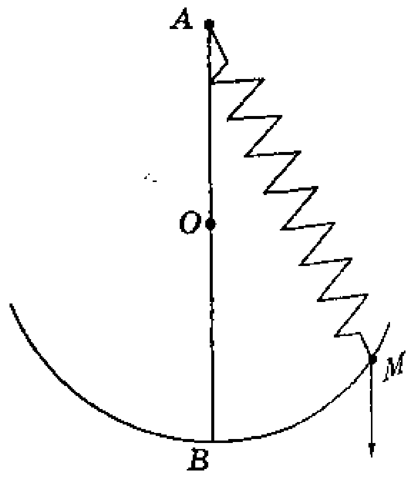
для груза массой $M + M_1$ период колебаний $T_1 = 0{,}55$ с, поэтому

$$x_1 = \frac{-9{,}8\cdot 0{,}55^2}{4\cdot 3{,}14^2}\cos\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}55}t\right) = -0{,}07\cos 11{,}4t \text{ (м)}.$$

Ответ: 1) $x = -0{,}05\cos 14t$ (м); 2) $x_1 = -0{,}07\cos 11{,}4t$ (м), где x и x_1 отсчитываются соответственно от каждого из двух положений статического равновесия.

Задача 32.20

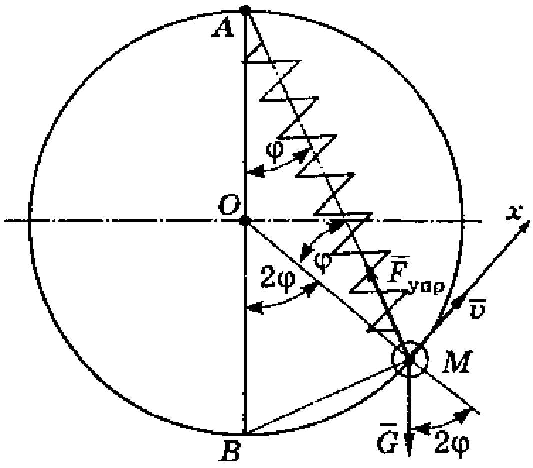
Груз M, подвешенный к неподвижной точке A на пружине, совершает малые гармонические колебания в вертикальной плоскости, скользя без трения по дуге окружности, диаметр которой AB равен l; натуральная длина пружины a; жесткость пружины такова, что при действии силы, равной весу груза M, она получает удлинение, равное b. Определить период T колебаний в том случае, когда $l = a + b$; массой пружины пренебречь и считать, что при колебаниях она остается растянутой.



Решение

Рассмотрим гармонические колебания груза M в вертикальной плоскости под действием силы тяжести $\overline{G}$ и силы упругости $\overline{F}_{упр}$ (см. рисунок).

Составим дифференциальное уравнение движения груза M в проекции на ось x, направленную по касательной к окружности:



$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = F_{упр}\sin\varphi - G\sin 2\varphi, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c\Delta$, $\Delta = AM - a = (a+b)\times$ $\times\cos\varphi - a$ — деформация пружины.

Тогда

$$F_{упр} = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right],$$

а уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right]\sin\varphi - G\sin 2\varphi. \qquad (2)$$

Так как $\dot{v} = \ddot{x}$, $v = \omega\cdot OM = (2\varphi)'\cdot OM = 2\dot{\varphi}\cdot OM = 2\dot{\varphi}\dfrac{l}{2} = l\dot{\varphi}$, то $\ddot{x} = l\ddot{\varphi}$.

С учетом этого перепишем уравнение (2):

$$ml\ddot{\varphi} = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right]\sin\varphi - G\sin 2\varphi.$$

Ввиду малости угла φ можно считать, что $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, тогда

$$ml\ddot{\varphi} = c\left[(a+b) - a\right]\varphi - 2\varphi G = cb\varphi - 2G\varphi. \qquad (3)$$

Согласно условию $l = a+b$, т.е. находясь в точке B, груз занимает положение статического равновесия, в котором

$$F_{упр}(0) = c\Delta_0 = cb = G \Rightarrow c = \frac{G}{b}.$$

Следовательно, выражение (3) можно записать в виде

$$ml\ddot{\varphi} = \frac{G}{b}\cdot b\varphi - 2G\varphi = -G\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{g}{l}$.

Это дифференциальное уравнение описывает гармонические колебания с круговой частотой $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ и периодом $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Задача 32.21

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза M, если в начальный момент $\angle BAM = \varphi_0$ и точке M сообщили начальную скорость $\bar{v}_0$, направленную по касательной к окружности вниз.

Р е ш е н и е

Согласно результатам решения задачи 32.20 уравнение движения груза M имеет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \frac{g}{l}$.

Решение этого дифференциального уравнения

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{1}$$

$$\dot{\varphi} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) найдем C_1 и C_2 по начальным условиям: при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $v = v_0 \Rightarrow \dot{\varphi}_0 = -\frac{v_0}{l}$, так как $\bar{v}_0$ направлено в сторону, обратную возрастанию угла φ; $C_1 = \varphi_0$, $C_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{lg}}$.

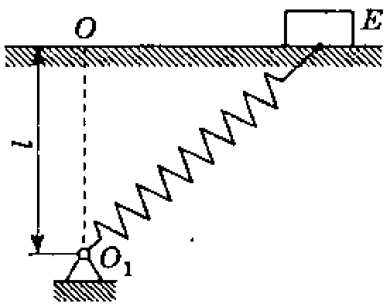
Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и окончательно получим

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{v_0}{\sqrt{lg}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

О т в е т: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{v_0}{\sqrt{lg}} \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$.

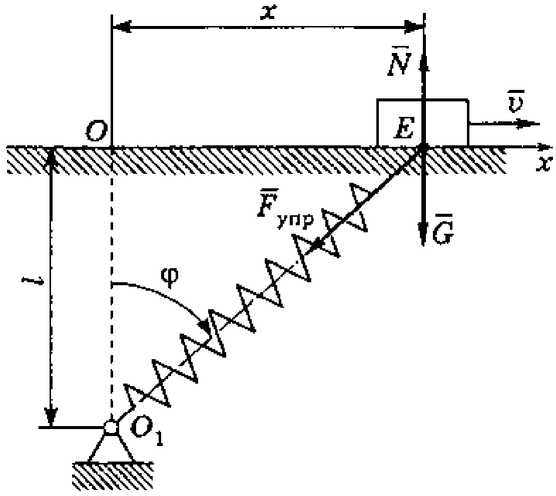
Задача 32.22

Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; в положении равновесия тела пружина имеет конечный предварительный натяг, равный $F_0 = c(l - l_0)$, где $l = OO_1$. Учитывая в горизонтальной составляющей упругой силы пружины лишь линейные члены относительно отклонения тела от положения равновесия, определить период малых колебаний тела.



Решение

Рассмотрим малые колебания тела E, происходящие под действием силы тяжести $\overline{G}$, реакции плоскости $\overline{N}$ и силы упругости $\overline{F}_{\text{упр}}$. Ось x направим вдоль плоскости из положения O равновесия тела по ходу его движения (см. рисунок).



Запишем дифференциальное уравнение движения тела E в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = -F_{\text{упр}} \sin\varphi. \qquad (1)$$

Найдем силу упругости

$$F_{\text{упр}} = c\Delta,$$

где Δ — деформация пружины, $\Delta = O_1E - l_0$, $O_1E = \dfrac{1}{\cos\varphi}$.

Тогда

$$F_{\text{упр}} = c\left(\frac{1}{\cos\varphi} - l_0\right).$$

Ввиду малости угла φ можно считать, что $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x}{l}$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -c(l - l_0)\,\frac{x}{l}. \qquad (2)$$

По условию задачи

$$F_0 = c(l - l_0) \Rightarrow c = \frac{F_0}{l - l_0}.$$

С учетом этого уравнение (2) запишем в виде

$$m\ddot{x} = -\frac{F_0}{l - l_0}(l - l_0)\frac{x}{l} = -\frac{F_0}{l}x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{F_0}{lm}$.

Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний с круговой частотой $k = \sqrt{\dfrac{F_0}{lm}}$ и периодом $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{F_0}}$.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{lm/F_0}$.

Задача 32.23

Материальная точка массы m подвешена к концу нерастянутой пружины с коэффициентом жесткости c и отпущена с начальной скоростью $\bar{v}_0$, направленной вниз. Найти уравнение движения и период колебаний точки, если в момент времени, когда точка находилась в крайнем нижнем положении, к ней прикладывают силу $Q = \text{const}$, направленную вниз.

Начало координат выбрать в положении статического равновесия, т.е. на расстоянии P/c от конца нерастянутой пружины.

Решение

Рассмотрим движение материальной точки с момента, когда ее подвесили к нерастянутой пружине, до нижнего крайнего положения (рис. 1). Силы, действующие на точку: сила упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$, сила тяжести $\bar{P}$. Начало оси x совместим с положением статического равновесия и направим ее вниз.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P - F_{\text{упр}}, \qquad (1)$$

где $F_{\text{упр}} = c\Delta$, $\Delta = f_{\text{ст}} + x$ — деформация пружины.

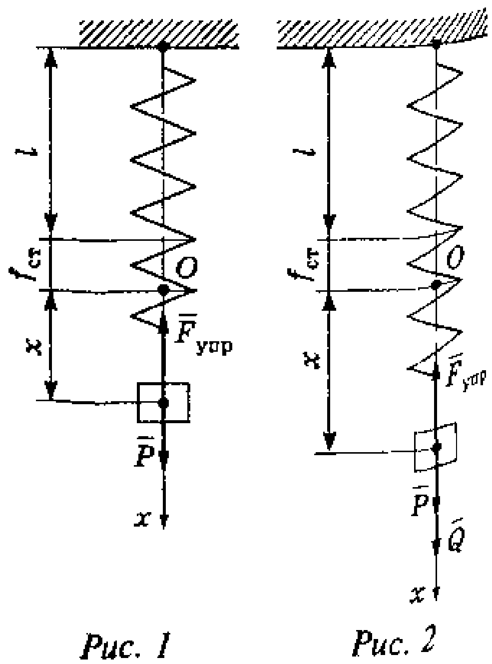


Рис. 1 Рис. 2

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = P - cf_{\text{ст}} - cx. \tag{2}$$

В положении равновесия

$$F_{\text{упр}}(0) = cf_{\text{ст}} = P,$$

тогда согласно формуле (2)

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{3}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) определим C_1 и C_2 по начальным условиям движения: $t = 0$, $x_0 = -f_{\text{ст}} = -\dfrac{P}{c} = -\dfrac{mg}{c}$, $\dot{x}_0 = v_0$; $-\dfrac{mg}{c} = C_1$, $v_0 = kC_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (4) и получим

$$x = -\frac{mg}{c} \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}.$$

Рассмотрим дальнейшее движение точки после того, как к ней приложили силу $\overline{Q}$ (рис. 2).

Дифференциальное уравнение движения точки (начало координат и ось — те же) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = Q + P - F_{\text{упр}} = Q + P - c(f_{\text{ст}} + x) = Q - cx,$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{Q}{m}, \tag{6}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения (6) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$; $x^* = A$.

Из уравнения (6) найдем

$$k^2 A = \frac{Q}{m}, \quad A = \frac{Q}{c}.$$

Тогда

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{Q}{c}, \tag{7}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) определим C_1 и C_2 по начальным условиям: при $t = 0$ $\dot{x}_0 = 0$, $x_0 = a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$. Тогда

$$\sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = C_1 + \frac{Q}{c} \Rightarrow C_1 = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} - \frac{Q}{c},$$

$$0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (7) и запишем уравнение движения точки после того, как к ней приложим силу Q:

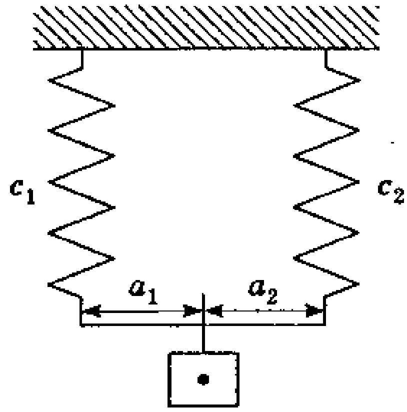
$$x = \left[\sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} - \frac{Q}{c}\right] \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right) + \frac{Q}{c}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

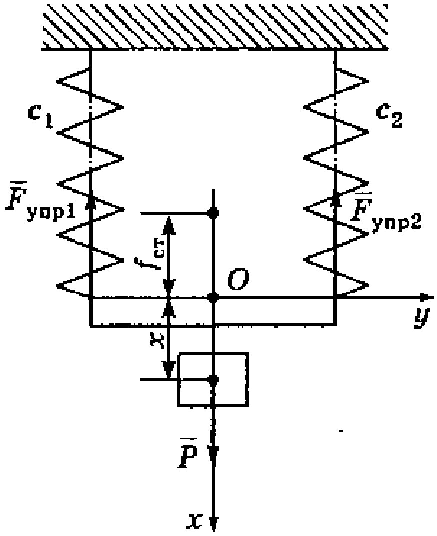
Ответ: $x = \left[\sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} - \frac{Q}{c}\right] \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t\right) + \frac{Q}{c}$, где t отсчитывается от момента времени, когда начала действовать сила Q; $T = 2\pi\sqrt{m/c}$.

Задача 32.24



Определить период свободных колебаний груза массы m, прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, одинаковы.

Решение



Рассмотрим движение груза на двух параллельных пружинах. Ось x направим вниз из положения O статического равновесия (см. рисунок).

Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = P - F_{упр1} - F_{упр2}$$

или

$$m\ddot{x} = P - c_1(f_{ст} + x) - c_2(f_{ст} + x). \qquad (1)$$

В положении статического равновесия

$$P = c_1 f_{ст} + c_2 f_{ст},$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -c_1 x - c_2 x = -(c_1 + c_2)x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m}$.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}.$$

Эквивалентная пружина должна иметь жесткость

$$c = c_1 + c_2.$$

О т в е т: $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(c_1 + c_2)}}$; $c = c_1 + c_2$; расположение груза таково, что $a_1/a_2 = c_2/c_1$.

Задача 32.25

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если его подвесили к нерастянутым пружинам и сообщили ему начальную скорость $\bar{v}_0$, направленную вверх.

Р е ш е н и е

Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

полученного в решении задачи 32.24, имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{1}$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \tag{2}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}$ — круговая частота.

Из формул (1) и (2) определим постоянные C_1 и C_2 по начальным условиям: $t = 0$, $x_0 = -f_{\text{ст}} = -\dfrac{P}{c_1 + c_2}$, $\dot{x}_0 = -v_0$;

$$C_1 = -\frac{P}{c_1 + c_2}, \ -v_0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_0}{k} = -v_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}},$$

где $P = mg$.

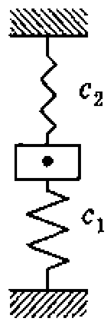
Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и запишем уравнение движения груза:

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2}\cos\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}\,t\right) - v_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}\,t\right).$$

О т в е т: $x = -\dfrac{mg}{c_1 + c_2}\cos\left(\sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}\,t\right) - v_0\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}\,t\right)$.

Задача 32.26

Определить период свободных колебаний груза массы m, зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2.



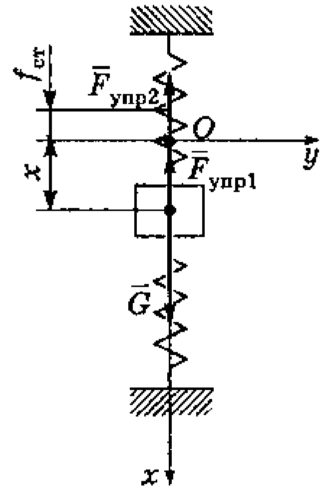
Решение

Выберем начало координат в положении статического равновесия груза и направим ось x в сторону его смещения (см. рисунок).

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = G - F_{\text{упр}1} - F_{\text{упр}2},$$

где $F_{\text{упр}1} = c_1(f_{\text{ст}} + x)$, $\quad F_{\text{упр}2} = c_2(f_{\text{ст}} + x)$.



Тогда

$$m\ddot{x} = G - c_1(f_{\text{ст}} + x) - c_2(f_{\text{ст}} + x). \qquad (1)$$

Так как в положении равновесия

$$G = F_{\text{упр}1}(0) + F_{\text{упр}2}(0) = c_1 f_{\text{ст}} + c_2 f_{\text{ст}},$$

то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -c_1 x - c_2 x = -(c_1 + c_2)x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m}$.

Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний с круговой частотой

$$k = \frac{\sqrt{c_1 + c_2}}{m},$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}.$$

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(c_1 + c_2)}}$.

Задача 32.27

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в положении равновесия ему сообщим скорость $\bar{v}_0$, направленную вниз.

Решение

Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

полученного в решении задачи 32.26, имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$$

где $k = \sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}$ — круговая частота.

Определим постоянные C_1 и C_2 по начальным условиям: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$; $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

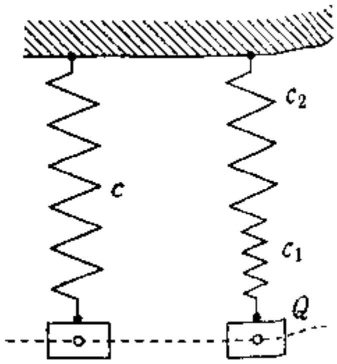
Подставим значения C_1 и C_2 в выражение (1) и запишем уравнение движения груза:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt = v_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}\, t\right).$$

Ответ: $x = v_0 \sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}} \sin\left(\sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}\, t\right)$.

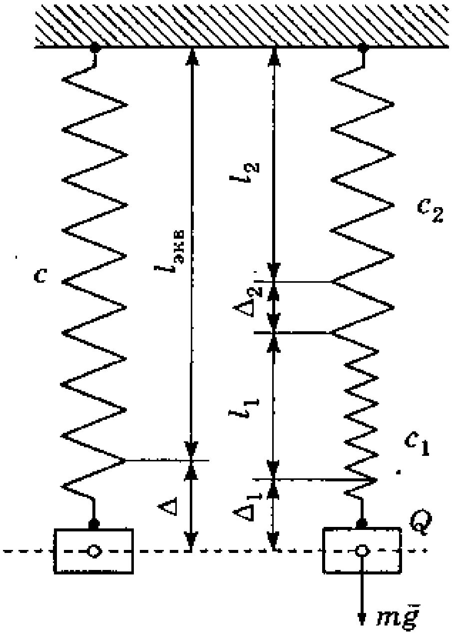
Задача 32.28

Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, и указать также период колебаний груза массы m, подвешенного на указанной двойной пружине.



Решение

Найдем жесткость c эквивалентной пружины (см. рисунок), учитывая, что



$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ — удлинение эквивалентной пружины; $\Delta_1 = mg/c_1$, $\Delta_2 = mg/c_2$ — удлинение соответственно первой и второй пружины.

Тогда

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

или

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \qquad (1)$$

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Тогда с учетом выражения (1)

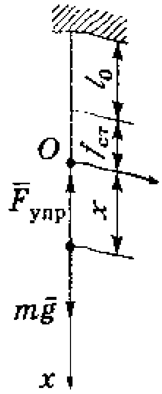
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}.$$

Ответ: $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}$.

Задача 32.29

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в начальный момент он находился ниже положения равновесия на расстоянии x_0 и ему сообщили скорость $\bar{v}_0$, направленную вверх.

Решение



Выберем начало координат в положении статического равновесия. Направим ось x в сторону смещения груза от положения равновесия, покажем действующие силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ (см. рисунок).

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$, $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$ (см. решение задачи 32.28).

В положении статического равновесия

$$mg = cf_{ст}.$$

Тогда

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (2)$$

Дифференцируем выражение (2) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (3)$$

Подставим в формулы (2) и (3) начальные условия: $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x}_0 = -v_0$, и найдем

$$x = x_0 = C_1,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = -v_0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = -\frac{v_0}{k}.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в выражение (2) и запишем уравнение движения груза:

$$x = x_0 \cos kt - \frac{v_0}{k} \sin kt$$

или с учетом значения k:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1+c_2)}}\, t\right) - v_0 \sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1 c_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1+c_2)}}\, t\right).$$

Ответ: $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1+c_2)}}\, t\right) - v_0 \sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1 c_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1+c_2)}}\, t\right).$

Задача 32.30

Определить коэффициент жесткости составной пружины, состоящей из двух последовательно соединенных пружин с разными коэффициентами жесткости $c_1 = 9{,}8$ Н/см и $c_2 = 29{,}4$ Н/см. Найти период колебаний, амплитуду и уравнения движения груза массы 5 кг, подвешенного к указанной составной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 см вниз и ему была сообщена начальная скорость 49 см/с, направленная также вниз.

Решение

Заменим две последовательно соединенные пружины одной эквивалентной. Учтем, что

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ — деформация эквивалентной пружины; Δ_1, Δ_2 — деформация соответственно первой и второй пружины.

Согласно закону Гука

$$\Delta = \frac{mg}{c}, \quad \Delta_1 = \frac{mg}{c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{mg}{c_2}.$$

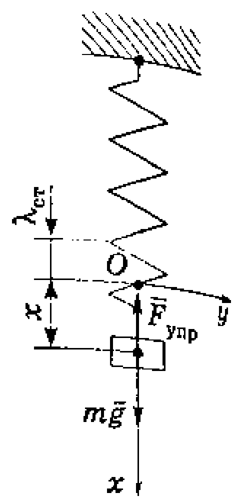
Тогда

$$\frac{mg}{c} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2},$$

откуда

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{9{,}8 \cdot 29{,}4}{9{,}8 + 29{,}4} = 7{,}35 \text{ (Н/см)} = 735 \text{ (Н/м)}.$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x. Начало координат выбираем в положении статического равновесия груза, из которого груз смещается в сторону положительного направления оси x (см. рисунок). Покажем действующие на груз силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$, и запишем



$$m\ddot{x} = mg - F_{упр}. \qquad (1)$$

Найдем силу упругости

$$F_{упр} = c(f_{ст} + x)$$

и подставим в уравнение (1):

$$m\ddot{x} = mg - cf_{ст} - cx. \qquad (2)$$

В положении статического равновесия груза

$$mg = cf_{ст}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx \qquad (3)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (4)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 12{,}13$ (рад/с) — круговая частота.

Дифференциальное уравнение (4) имеет решение:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (6)$$

С учетом начальных условий движения: $t = 0$, $x_0 = 5$ см, $\dot{x}_0 = 49$ см/с, из формул (5) и (6) найдем: $x_0 = C_1 = 5$; $\dot{x}_0 = C_2 k$, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{k} = 4{,}04$.

Тогда согласно формуле (5)

$$x = 5\cos 12{,}13t + 4{,}04 \sin 12{,}13t.$$

Найдем период и амплитуду колебаний:

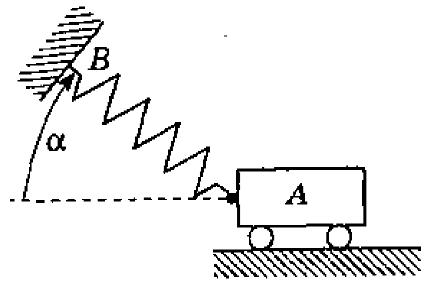
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{12{,}13} = 0{,}517 \text{ (с)},$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} = \sqrt{5^2 + 4{,}04^2} = 6{,}43 \text{ (см)}.$$

Ответ: $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 7{,}35$ Н/см; $T = 0{,}517$ с; $a = 6{,}43$ см;

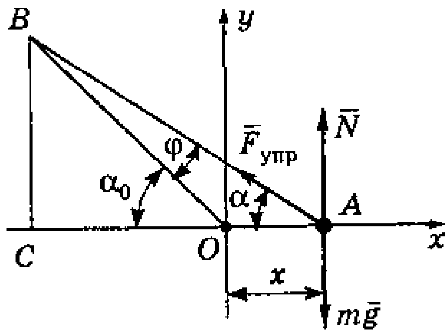
$x = 5\cos 12{,}13t + 4{,}04 \sin 12{,}13t$ см.

Задача 32.31



Тело A, масса которого равна m, может перемещаться по горизонтальной прямой. К телу прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой c. Второй конец пружины укреплен в неподвижной точке B. При угле $\alpha = \alpha_0$ пружина не деформирована. Определить частоту и период малых колебаний тела.

Решение



Начало системы координат Oxy выберем в положении тела, когда пружина не деформирована. Сместим тело в сторону положительного направления оси x и покажем на рисунке действующие на него силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$, реакцию $\bar{N}$ опоры.

Составим дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр}\cos\alpha. \qquad (1)$$

Найдем силу упругости:

$$F_{упр} = c\Delta l = cx\cos\alpha,$$

где $\Delta l = l_0\cos\varphi + x\cos\alpha - l_0 = x\cos\alpha$, так как $\cos\varphi \approx 1$, $OB = l_0$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} = -\frac{c\cos^2\alpha}{m}x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{c\cos^2\alpha}{m}$.

Так как колебания являются малыми, то можно считать, что $\cos\alpha = \cos\alpha_0$, поэтому

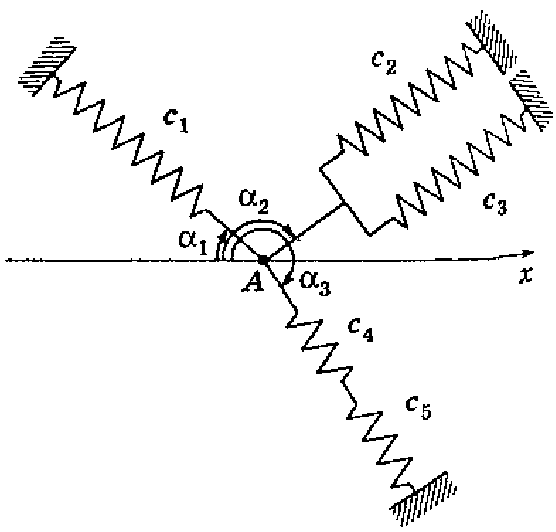
$$k = \sqrt{\frac{c}{m}\cos^2\alpha_0},$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c\cos^2\alpha_0}}.$$

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}\cos^2\alpha_0}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c\cos^2\alpha_0}}$.

Задача 32.32

Точка A, масса которой равна m, прикреплена пружинами, как указано на рисунке. В исходном положении точка находится в равновесии и все пружины не напряжены. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины при малых колебаниях точки вдоль оси x в абсолютно гладких направляющих и частоту свободных колебаний.



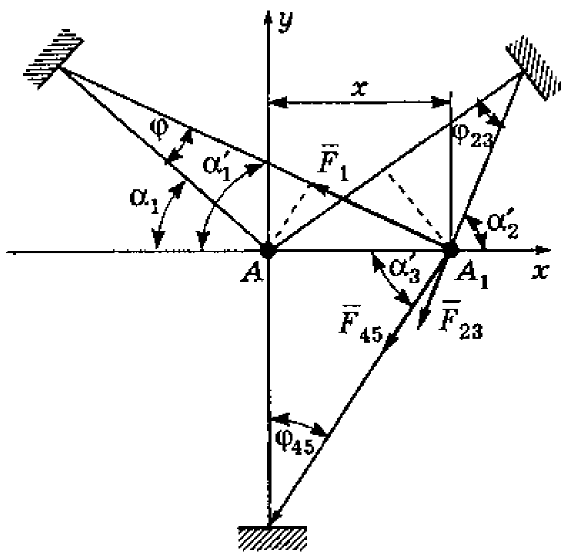
Решение

Определим эквивалентные жесткости c_{23} пружин с жесткостью c_2 и c_3, а также c_{45} пружин с жесткостью c_4 и c_5:

$$c_{23} = c_2 + c_3,$$

$$c_{45} = \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}.$$

Начало системы координат выберем в положении равновесия, когда пружины не деформированы. Сместим точку A в сторону положительного направления оси x и покажем на рисунке действующие на нее силы в произвольной точке A_1: силу упругости $\bar{F}_1$ пружины c_1, силу упругости $\bar{F}_{45}$ пружин c_4 и c_5, силу упругости $\bar{F}_{23}$ пружин c_2 и c_3.



Определим проекции сил упругости каждой пружины на ось x:

$$F_{1x} = -F_1 \cos\alpha_1',$$

$$F_{23x} = -F_{23} \cos\alpha_2',$$

$$F_{45x} = -F_{45} \cos\alpha_3',$$

где $F_1 = c_1 \Delta l_1;\quad F_{23} = c_{23}\Delta l_2;\quad F_{45} = c_{45}\Delta l_3.$

Найдем деформацию каждой пружины:

$$\Delta l_1 = l_{01} \cos\varphi + x\cos\alpha_1' - l_{01},$$

$$\Delta l_2 = l_{02} \cos\varphi_{23} + x\cos\alpha_2' - l_{02},$$

$$\Delta l_3 = l_{03} \cos\varphi_{45} + x\cos\alpha_3' - l_{03}.$$

Ввиду малости углов φ_1, φ_{23} и φ_{45} считаем, что их косинусы равны единице. Тогда

$$\Delta l_1 = x\cos\alpha_1',$$

$$\Delta l_2 = x\cos\alpha_2',$$

$$\Delta l_3 = x\cos\alpha_3'.$$

С учетом этих значений получим

$$F_{1x} = -c_1 x\cos^2\alpha_1',$$

$$F_{23x} = -c_{23} x\cos^2\alpha_2',$$

$$F_{45x} = -c_{45} x\cos^2\alpha_3'.$$

Введем обозначение $F_x = -cx$, c — коэффициент жесткости эквивалентной пружины. Тогда

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

или

$$c = c_1 \cos^2 \alpha' + c_{23} \cos^2 \alpha_2' + c_{45} \cos^2 \alpha_3'.$$

Так как колебания являются малыми, то можно считать, что $\cos\alpha_1' = \cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2' = \cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3' = \cos\alpha_3$. Поэтому с учетом значений жесткости эквивалентных пружин получим

$$c = c_1 \cos^2 \alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2 \alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x = -cx$$

или

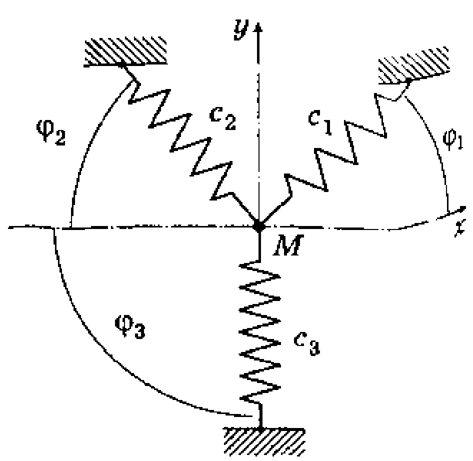
$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

О т в е т: $c = c_1 \cos^2 \alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2 \alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Задача 32.33

Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной трем пружинам, показанным на рисунке, при колебаниях точки M в абсолютно гладких направляющих вдоль оси x. Решить ту же задачу, если направляющие расположены вдоль оси y. Определить частоты этих колебаний.



Решение

Начало координат O выберем в положении, когда пружины не деформированы. Рассмотрим движение точки вдоль оси x. Сместим точку M в сторону положительного направления оси x (рис. 1). Покажем действующие на точку силы упругости: $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и $\bar{F}_3$.

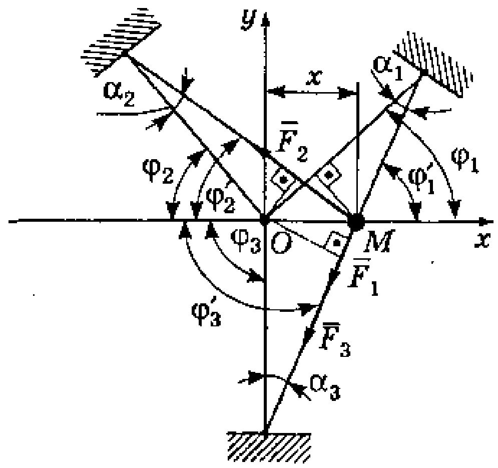


Рис. 1

Определим проекции сил упругости каждой пружины на ось x:

$$F_{1x} = -F_1 \cos\alpha_1',$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos\alpha_2',$$

$$F_{3x} = -F_3 \cos\alpha_3',$$

где $F_1 = c_1 \Delta l_1$; $F_2 = c_2 \Delta l_2$; $F_3 = c_3 \Delta l_3$.

Найдем деформацию каждой из пружин:

$$\Delta l_1 = l_{01} \cos\alpha_1 + x\cos\varphi_1' - l_{01},$$

$$\Delta l_2 = l_{02} \cos\alpha_2 + x\cos\varphi_2' - l_{02},$$

$$\Delta l_3 = l_{03} \cos\alpha_3 + x\cos\varphi_3' - l_{03}.$$

Ввиду малости углов α_1, α_2, α_3 считаем, что $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = 1$. Тогда

$$\Delta l_1 = x\cos\varphi_1',$$

$$\Delta l_2 = x\cos\varphi_2',$$

$$\Delta l_3 = x\cos\varphi_3',$$

$$F_{1x} = -c_1 x \cos^2\varphi_1',$$

$$F_{2x} = -c_2 x \cos^2\varphi_2',$$

$$F_{3x} = -c_3 x \cos^2\varphi_3'.$$

Обозначим $F_x = -c_x x$, c_x — коэффициент жесткости пружины, эквивалентной всем трем пружинам.

Тогда

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

или

$$c_x x = (c_1 \cos^2 \varphi_1' + c_2 \cos^2 \varphi_2' + c_3 \cos^2 \varphi_3')\, x,$$

$$c_x = c_1 \cos^2 \varphi_1' + c_2 \cos^2 \varphi_2' + c_3 \cos^2 \varphi_3'. \qquad (1)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F_x = -c_x x$$

или

$$\ddot{x} + k_x^2 x = 0,$$

где $k_x^2 = \dfrac{c_x}{m}$, $k_x = \sqrt{\dfrac{c_x}{m}}$.

Теперь рассмотрим движение точки M вдоль оси y (рис. 2). Сместим точку в сторону положительного направления оси y. Покажем силы упругости $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и $\bar{F}_3$, действующие на точку. Определим проекции сил упругости каждой пружины на ось y:

$$F_{1y} = -F_1 \sin\varphi_1',$$

$$F_{2y} = -F_2 \sin\varphi_2',$$

$$F_{3y} = -F_3.$$

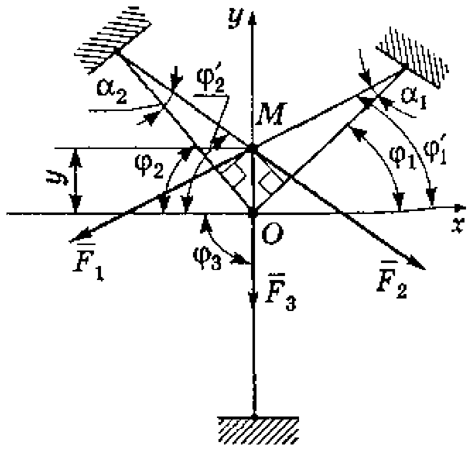


Рис. 2

Найдем деформацию пружин:

$$\Delta l_1 = l_{01} - y\sin\varphi_1' - l_{01}\cos\alpha_1,$$

$$\Delta l_2 = l_{02} - y\sin\varphi_2' - l_{02}\cos\alpha_2,$$

$$\Delta l_3 = y.$$

Ввиду малости углов α_1 и α_2 считаем, что $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1$. Тогда

$$\Delta l_1 = |-y\sin\varphi_1'|,$$

$$\Delta l_2 = |-y\sin\varphi_2'|,$$

$$F_{1y} = -c_1 y\sin^2\varphi_1',$$

$$F_{2y} = -c_2 y\sin^2\varphi_2',$$

$$F_{3y} = -c_3 y.$$

Обозначим $F_y = -c_y y$, c_y — коэффициент жесткости пружины, эквивалентной всем трем пружинам.

Тогда

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

или

$$c_y y = (c_1 \sin^2 \varphi_1' + c_2 \sin^2 \varphi_2' + c_3 \sin^2 \varphi_3')\, y,$$

откуда

$$c_y = c_1 \sin^2 \varphi_1' + c_2 \sin^2 \varphi_2' + c_3 \sin^2 \varphi_3'. \qquad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = F_y = -c_y y$$

или

$$\ddot{y} + k_y^2 y = 0,$$

где $k_y^2 = \dfrac{c_y}{m}$, $k_y = \sqrt{\dfrac{c_y}{m}}$.

Так как колебания являются малыми, то можно считать, что $\cos\varphi_1' = \cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2' = \cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3' = \cos\varphi_3 = 0$, $\sin\varphi_1' = \sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2' = \sin\varphi_2$. Тогда выражения (1) и (2) примут вид

$$c_x = c_1 \cos^2 \varphi_1 + c_2 \cos^2 \varphi_2,$$

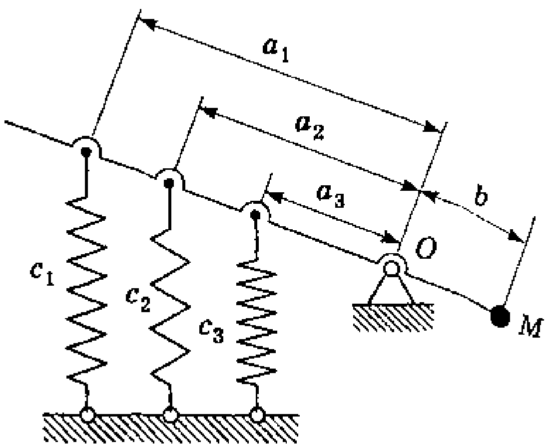
$$c_y = c_1 \sin^2 \varphi_1 + c_2 \sin^2 \varphi_2 + c_3.$$

Ответ: $c_x = c_1 \cos^2 \varphi_1 + c_2 \cos^2 \varphi_2$; $c_y = c_1 \sin^2 \varphi_1 + c_2 \sin^2 \varphi_2 + c_3$; $k_x = \sqrt{c_x/m}$; $k_y = \sqrt{c_y/m}$.

В исходном положении пружины не напряжены и точка M находится в равновесии.

Задача 32.34

Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины, если груз M массы m прикреплен к стержню, массой которого можно пренебречь. Стержень шарнирно закреплен в точке O и прикреплен тремя вертикальными пружинами к фундаменту. Коэффициенты жесткости пружин c_1, c_2, c_3. Пружины прикреплены к стержню на расстояниях a_1, a_2, a_3 от шарнира. Груз M прикреплен к стержню на расстоянии b от шарнира. В положении равновесия стержень горизонтален. Эквивалентная пружина крепится к стержню на расстоянии b от шарнира. Найти частоту малых колебаний груза.



Решение

В положении равновесия, когда стержень горизонтален,

$$mgb = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3, \tag{1}$$

где $F_1 = c_1\Delta_1$; $F_2 = c_2\Delta_2$; $F_3 = c_3\Delta_3$.

Сила упругости пружины, которую следует присоединить к грузу,

$$F = c\Delta = mg,$$

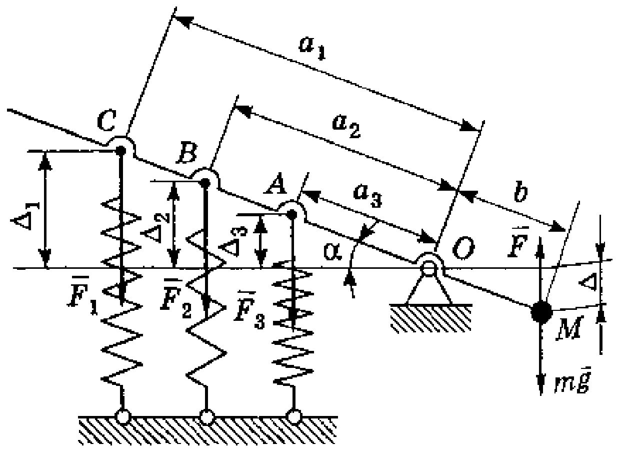
где c — коэффициент упругости эквивалентной пружины.

Из рисунка видно, что

$$\Delta_1 = \Delta\frac{a_1}{b},$$

$$\Delta_2 = \Delta\frac{a_2}{b},$$

$$\Delta_3 = \Delta\frac{a_3}{b},$$



где Δ — деформация эквивалентной пружины.

Тогда

$$F_1 = c_1\frac{a_1\Delta}{b},$$

$$F_2 = c_2\frac{a_2\Delta}{b},$$

$$F_3 = c_3\frac{a_3\Delta}{b}. \tag{2}$$

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$mgb = cb\Delta = c_1\Delta\frac{a_1^2}{b} + c_2\Delta\frac{a_2^2}{b} + c_3\Delta\frac{a_3^2}{b}.$$

Откуда

$$c = \frac{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}{b^2}.$$

Частота колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}}{mb^2}.$$

Ответ: $c = \frac{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}{b^2}$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Задача 32.35

Винтовая пружина состоит из n участков, коэффициенты жесткости которых соответственно равны c_1, c_2, ..., c_n. Определить коэффициент жесткости c однородной пружины, эквивалентной данной, и период свободных колебаний точки, масса которой равна m.

Решение

Винтовая пружина состоит из n последовательно соединенных участков с различной жестостью. Поэтому деформация эквивалентной пружины равна сумме деформаций всех ее участков:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i,$$

где $\Delta_i = \frac{mg}{c_i}$.

Тогда коэффициент жесткости эквивалентной пружины

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}$$

или

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}}.$$

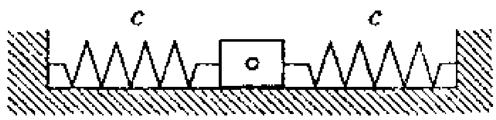
Период свободных колебаний точки массой m

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

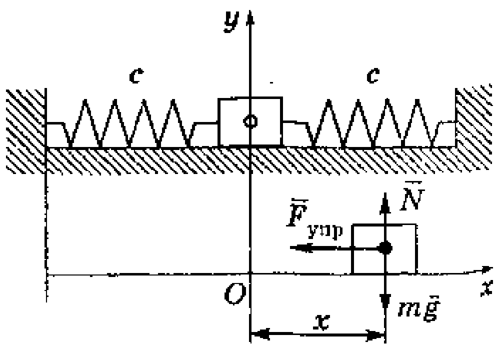
Ответ: $c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}}$; $T = \frac{2\pi}{k}$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Задача 32.36



Груз массы 10 кг, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, зажат между двумя пружинами одинаковой жесткости c = 19,6 Н/см. В некоторый момент груз был сдвинут на 4 см от положения равновесия вправо и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения, период колебаний, а также максимальную скорость груза.

Решение



Когда груз зажат между двумя пружинами, то это равносильно действию эквивалентной пружины, коэффициент жесткости которой

$$c = c_1 + c_2 = 2c = 39{,}2 \text{ (Н/см)}.$$

Выберем начало системы координат Oxy в положении равновесия груза. Сместим груз из положения равновесия в сторону положительного направления оси x, покажем на рисунке действующие на груз силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$, реакцию $\bar{N}$ опоры.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр}, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c_{экв}x$.

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{c_{экв}}{m}$, $k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{39{,}2 \cdot 10^2}{10}} = 19{,}8$ (рад/с).

Дифференциальное уравнение (2) имеет решение:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (4)$$

Из формул (3) и (4) найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2, используя начальные условия движения: $t = 0$, $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = 0$; $C_1 = 4$, $C_2 = 0$.

Тогда выражение (3) примет вид

$$x = 4 \cos 19{,}8t.$$

Период колебаний груза

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{19{,}8} = 0{,}317 \text{ (с)}.$$

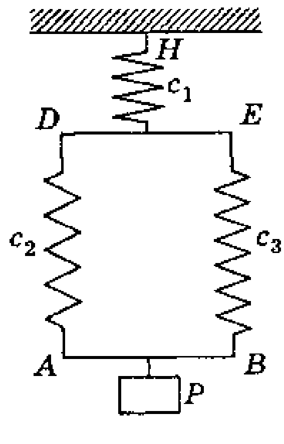
Для определения максимальной скорости груза воспользуемся выражением (4):

$$\dot{x} = -4 \cdot 19{,}8 \sin 19{,}8t = -79{,}2 \sin 19{,}8t.$$

Максимальная скорость достигается, когда $\sin 19{,}8t = 1$. Поэтому $\dot{x}_{max} = 79{,}2$ см/с.

Ответ: $x = 4 \cos 19{,}8t$ см; $T = 0{,}317$ с; $\dot{x}_{max} = 79{,}2$ см/с.

Задача 32.37



Груз P массы m подвешен к стержню AB, который соединен двумя пружинами, с коэффициентами жесткости c_2 и c_3, со стержнем DE. Последний прикреплен к потолку в точке H пружиной, коэффициент жесткости которой c_1. При колебаниях стержни AB и DE остаются горизонтальными. Определить коэффициент жесткости одной эквивалентной пружины, при которой груз P будет колебаться с той же частотой. Найти период свободных колебаний груза. Массой стержней пренебречь.

Решение

Заменим две пружины с коэффициентами жесткости c_2 и c_3 одной эквивалентной с коэффициентом жесткости

$$c' = c_2 + c_3.$$

Далее две последовательно соединенные пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c' (рис. 1) заменим эквивалентной пружиной, для которой

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c'},$$

где c — коэффициент жесткости эквивалентной пружины.

Откуда с учетом значения c' получим

$$c = \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Теперь рассмотрим движение груза на одной пружине, эквивалентной трем заданным (рис. 2); l — длина недеформированной пружины, $f_{ст}$ — деформация пружины, при которой груз находится в положении статического равновесия.

Начало координат выберем в положении статического равновесия груза. Направим ось x в сторону смешения груза из положения равновесия. Покажем на рисунке действующие на груз P силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$.

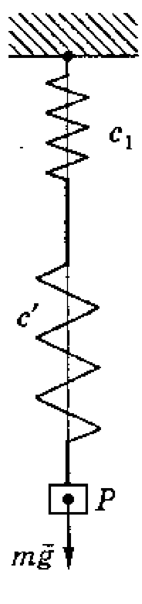


Рис. 1

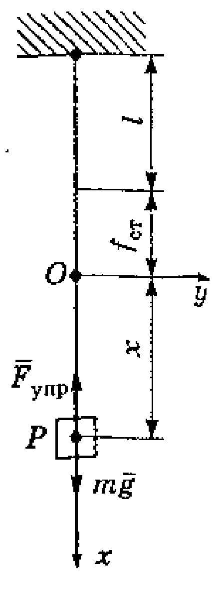


Рис. 2

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = mg - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cf_{ст} - cx. \tag{1}$$

В положении статического равновесия

$$mg = cf_{ст}$$

и уравнение (1) можно записать в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Уравнение (2) — это дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Найдем круговую частоту

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1(c_2 + c_3)}{[c_1 + (c_2 + c_3)]m}}$$

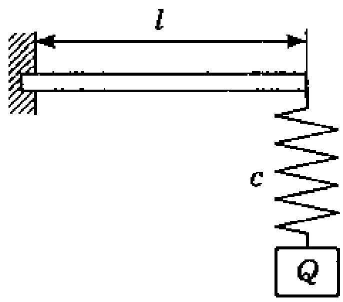
и период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{(c_1 + c_2 + c_3)m}{c_1(c_2 + c_3)}}.$$

Ответ: $c = \dfrac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(c_1 + c_2 + c_3)m}{c_1(c_2 + c_3)}}$.

Задача 32.38

Определить собственную частоту колебаний груза Q массы m, подвешенного на конце упругой консоли длины l. Пружина, удерживающая груз, имеет жесткость c. Жесткость на конце консоли определяется формулой $c_1 = 3EI/l^3$ (E — модуль упругости, I — момент инерции). Массой консоли пренебречь.



Решение

Собственная частота колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}}, \tag{1}$$

где $c_{экв}$ — эквивалентная жескость пружины и конца консоли.

Пружина жесткости c подвешена к концу упругой консоли жесткости c_1, считая это последовательным соединением пружин, получим

$$\frac{1}{c_{\text{экв}}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c},$$

где $c_1=3EI/l_3$.

Откуда

$$c_{\text{экв}}=\frac{c_1 c}{c_1+c}=\frac{3EIc}{l^3\left(c+\dfrac{3EI}{l^3}\right)},$$

или после преобразований

$$c_{\text{экв}}=\frac{3EIc}{cl^3+3EI}. \tag{2}$$

Подставим выражение (2) в формулу (1) и определим

$$k=\sqrt{\frac{3EIc}{m(cl^3+3EI)}}.$$

Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{3EIc}{m(cl^3+3EI)}}$.

Задача 32.39

Колебания груза массы $M = 10$ кг, лежащего на середине упругой балки жесткости $c = 20$ Н/см, происходят с амплитудой 2 см. Определить величину начальной скорости груза, если в момент времени $t = 0$ груз находился в положении равновесия.

Решение

Амплитуда гармонических колебаний груза

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}.$$

Отсюда

$$v_0=\dot{x}_0=k\sqrt{a^2-x_0^2}, \tag{1}$$

где k — круговая частота колебаний, $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}=\sqrt{\dfrac{20\cdot10^2}{10}}=14{,}14$ (рад/с).

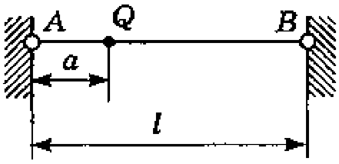
Выбрав начало координат в положении равновесия, получим, что $x_0 = 0$. Тогда согласно формуле (1)

$$v_0 = ka = 14{,}14 \cdot 2 = 28{,}3 \text{ (см/с)}.$$

Ответ: $v_0 = 28{,}3$ см/с.

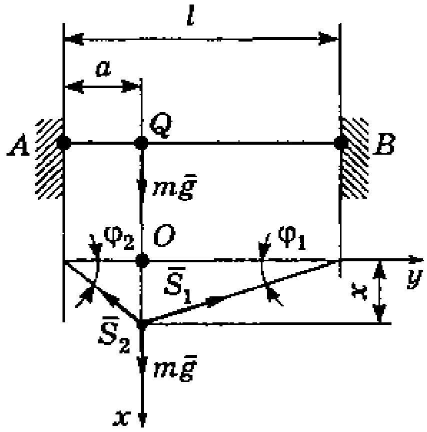
Задача 32.40

Груз Q массы m закреплен горизонтально натянутым тросом $AB = l$. При малых вертикальных колебаниях груза натяжение троса S можно считать постоянным. Определить частоту свободных колебаний груза, если расстояние груза от конца троса A равно a.



Решение

Рассмотрим движение груза под действием приложенных сил: силы тяжести $m\bar{g}$, сил натяжения $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ троса.



Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -S_1 \sin\varphi_1 - S_2 \sin\varphi_2. \qquad (1)$$

Считаем, что при малых вертикальных колебаниях груза $S_2 = S_1 = S$, тогда

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \sin\varphi_1 = \varphi_1 = \frac{x}{l-a},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \sin\varphi_2 = \varphi_2 = \frac{x}{a}$$

и уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -S\frac{x}{l-a} - S\frac{x}{a} = -\frac{S}{a}\frac{l}{l-a}x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{Sl}{ma(l-a)}$.

Откуда частота свободных колебаний груза

$$k=\sqrt{\frac{Sl}{ma(l-a)}}.$$

Ответ: $k=\sqrt{\frac{Sl}{ma(l-a)}}$ рад/с.

Задача 32.41

Груз веса 490,5 Н лежит посередине балки AB. Момент инерции поперечного сечения балки $I=80$ см^4. Определить длину балки l из условия, чтобы период свободных колебаний груза на балке был равен $T=1$ с.

Примечание. Статический прогиб балки определяется формулой $f=\frac{Pl^3}{48EI}$, где модуль упругости $E=2{,}05\cdot10^{11}$ Н/м^2.

Решение

Зная период свободных колебаний, найдем частоту собственных колебаний груза

$$k=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\cdot3{,}14}{1}=6{,}28\ (\text{рад/с}). \qquad (1)$$

Так как в положении статического равновесия $cf=mg$, то

$$\frac{c}{m}=\frac{g}{f}=k^2\Rightarrow k^2f=g.$$

С учетом значения f запишем

$$k^2\frac{Pl^3}{48EI}=g.$$

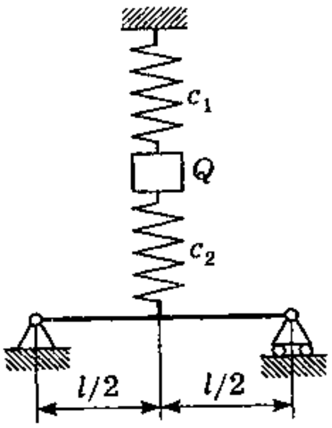
Откуда рассчитаем длину балки

$$l=\sqrt[3]{\frac{48gEI}{k^2P}}=\sqrt[3]{\frac{48\cdot9{,}8\cdot2{,}05\cdot10^{11}\cdot8\cdot10^{-7}}{6{,}28^2\cdot490{,}5}}=15{,}9\ (\text{м}).$$

Ответ: $l=15{,}9$ м.

Задача 32.42

Груз Q массы m зажат между двумя вертикальными пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно, а нижний конец второй пружины прикреплен к середине балки. Определить длину балки l так, чтобы период колебаний груза был равен T. Момент инерции поперечного сечения балки I, модуль упругости E.



Решение

Жесткость балки $c_б$ определим по формуле

$$c_б = \frac{48EI}{l^3}.$$

Тогда эквивалентная жесткость c' пружины c_2 и балки, которые составляют последовательно соединенные элементы,

$$c' = \frac{c_2 c_б}{c_2 + c_б} = \frac{48c_2EI}{c_2l^3 + 48EI}.$$

Следовательно, коэффициент жесткости $c_{экв}$ всей системы

$$c_{экв} = c_1 + c' = c_1 + \frac{48c_2EI}{c_2l^3 + 48EI} = \frac{48c_2EI + c_1(c_2l^3 + 48EI)}{c_2l^3 + 48EI}.$$

Частота собственных колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}},$$

$$k^2 = \frac{c_{экв}}{m} = \frac{48c_2EI + c_1(c_2l^3 + 48EI)}{(c_3l^3 + 48EI)m}.$$

Откуда

$$l^3 = \frac{48EI(c_2 + c_1 - mk^2)}{c_2(mk^2 - c_1)},$$

где

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

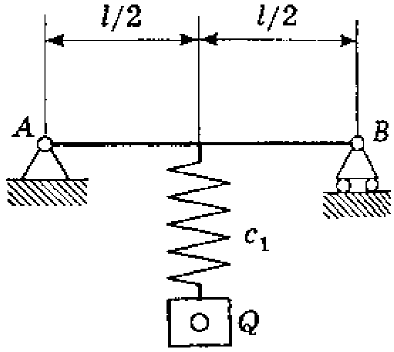
Тогда длина балки

$$l = \sqrt[3]{\frac{48EI\left(c_2 + c_1 - \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1\right)}}.$$

О т в е т: $l = \sqrt[3]{\dfrac{48EI\left(c_2 + c_1 - \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1\right)}}$.

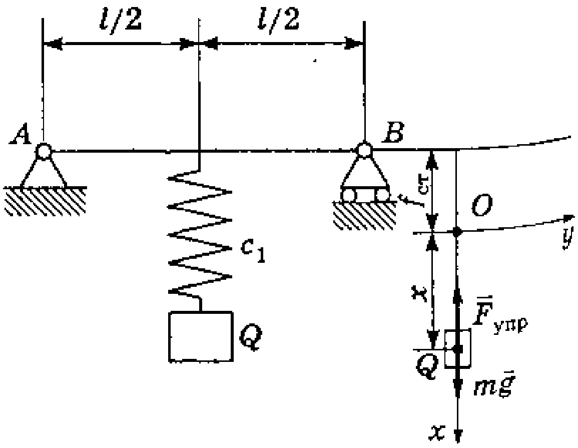
Задача 32.43

Найти уравнение движения и период колебаний груза Q массы m, подвешенного к пружине с коэффициентом жесткости c_1, если пружина прикреплена к середине балки длины l. Жесткость балки на изгиб EI. В начальный момент груз находился в положении статического равновесия и ему была сообщена скорость $\bar{v}_0$, направленная вниз.



Р е ш е н и е

Выбираем начало системы координат Oxy в положении статического равновесия. Сместим груз в сторону положительного направления оси x и покажем действующие на него силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ (см. рисунок).



Запишем дифференциальное уравнение движения груза Q в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр}, \tag{1}$$

где $F_{упр} = c_{экв}(f_{ст} + x)$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = mg - c_{экв} f_{ст} - c_{экв} x. \tag{2}$$

В положении статического равновесия

$$mg = c_{экв} f_{ст}.$$

Следовательно, согласно формуле (2) уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = -c_{экв} x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (3)$$

где $k^2 = \dfrac{c_{экв}}{m}$.

Пружина и упругая балка соединены последовательно, поэтому

$$c_{экв} = \frac{c_1 c_б}{c_1 + c_б} = \frac{48EIc_1}{c_1 l^3 + 48EI}, \qquad (4)$$

где $c_б$ — коэффициент жесткости балки, $c_б = \dfrac{48EI}{l^3}$.

Решение дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (5)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (6)$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, в формулы (5) и (6) и получим: $x_0 = 0 = C_1$, $\dot{x}_0 = v_0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

Запишем уравнение движения груза (5) с учетом найденных значений C_1 и C_2:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (7)$$

Найдем частоту колебаний груза с учетом формулы (4):

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}}.$$

Тогда согласно формуле (7)

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}} \sin \sqrt{\frac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}}\, t.$$

Определим период колебаний груза

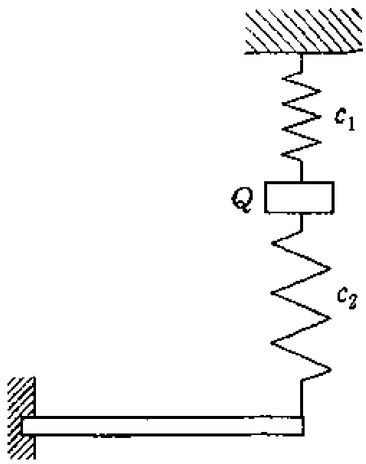
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}}.$$

Ответ: $x = v_0\sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}}\sin\sqrt{\frac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}}\,t;$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}}.$$

Задача 32.44

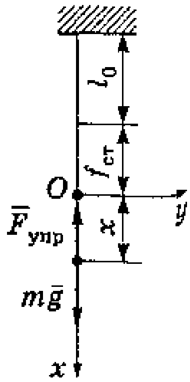
Груз веса Q зажат между двумя вертикальными пружинами, коэффициенты жесткости которых равны c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно. Нижний конец второй пружины прикреплен к свободному концу балки, заделанной другим концом в стене. Зная, что свободный конец заделанной балки под действием силы P, приложенной к свободному концу балки, дает прогиб



$$f = \frac{Pl^3}{3EI},$$

где EI — заданная жесткость балки при изгибе, определить длину балки l, при которой груз будет колебаться с данным периодом T. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент он был подвешен к концам нерастянутых пружин и отпущен без начальной скорости.

Решение



Начало системы координат Oxy поместим в положение статического равновесия груза, где

$$mg = c_{экв} f_{ст},$$

где $c_{экв}$ — коэффициент жесткости упругой связи, эквивалентной всем другим связям.

Сместим груз в сторону положительного направления оси x. Покажем на рисунке действующие на него силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}},$$

где $F_{\text{упр}} = c_{\text{экв}}(f_{\text{ст}} + x)$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - c_{\text{экв}} f_{\text{ст}} - c_{\text{экв}} x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

где $k^2 = \dfrac{c_{\text{экв}}}{m} = c_{\text{экв}} \dfrac{g}{Q}$.

Найдем $c_{\text{экв}}$, учитывая, что упругая балка и пружина с коэффициентом жесткости c_2 соединены последовательно, а груз зажат между ними и пружиной с коэффициентом жесткости c_1:

$$c_{\text{экв}} = c_1 + c, \tag{2}$$

где $c = \dfrac{c_2 c_б}{c_2 + c_б}$, $c_б = \dfrac{3EI}{l^3}$.

Тогда

$$c = \frac{3c_2 EI}{c_2 l^3 + 3EI}. \tag{3}$$

Подставим выражение (3) в формулу (2) и получим

$$c_{\text{экв}} = c_1 + \frac{3c_2 EI}{c_2 l^3 + 3EI}.$$

Учтем, что

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{c_{\text{экв}} g}{Q} = \frac{g}{Q}\left(c_1 + \frac{3c_2 EI}{c_2 l^3 + 3EI}\right) = \frac{g[c_1 c_2 l^3 + 3EI(c_1 + c_2)]}{Q(c_2 l^3 + 3EI)}.$$

Откуда определим длину балки

$$l=\sqrt[3]{\frac{3EI\left(c_2+c_1-\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}-c_1\right)}}.$$

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \tag{4}$$

Продифференцируем выражение (4) по времени:

$$\dot{x}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt. \tag{5}$$

Подставим начальные условия: $t=0$, $x_0=-f_{\text{ст}}$, $\dot{x}_0=v_0=0$, в формулы (4) и (5) и найдем постоянные интегрирования: $x=x_0=-f_{\text{ст}}=C_1$, $\dot{x}=\dot{x}_0=0=C_2k\Rightarrow C_2=0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (4) и получим уравнение движения груза

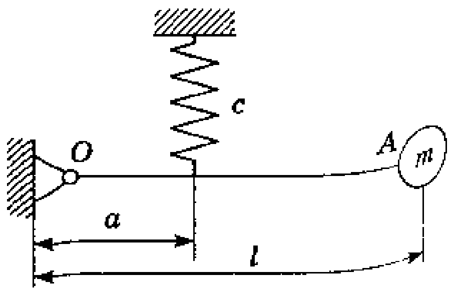
$$x=-f_{\text{ст}}\cos kt,$$

где $f_{\text{ст}}=\dfrac{Q(c_2l^3+3EI)}{c_1c_2l^3+3EI(c_1+c_2)}$, $k=\sqrt{\dfrac{[c_1c_2l^3+3(c_1+c_2)EI]\,g}{(c_2l^3+3EI)Q}}\,t$.

Ответ: $l=\sqrt[3]{\dfrac{3EI\left(c_2+c_1-\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}-c_1\right)}}$;

$$x=-\frac{Q(c_2l^3+3EI)}{c_1c_2l^3+3(c_1+c_2)EI}\cos\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+3(c_1+c_2)EI]\,g}{Q(c_2l^3+3EI)}}\,t.$$

Задача 32.45

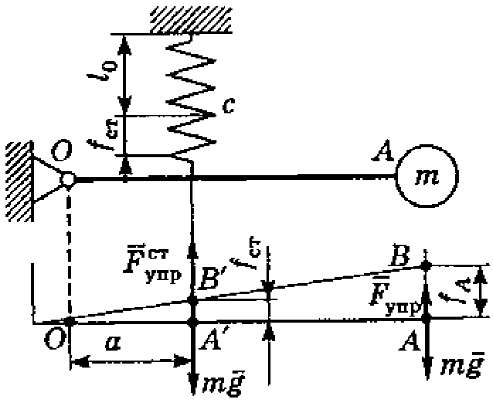


Стержень OA длины l, на конце которого помещен груз массы m, может поворачиваться вокруг оси O. На расстоянии a от оси O к стержню прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c. Определить собственную частоту колебаний груза, если стержень OA в положении равновесия занимает горизонтальное положение. Массой стержня пренебречь.

Решение

Собственная частота колебаний груза

$$k=\sqrt{\frac{c_{\text{экв}}}{m}}, \qquad (1)$$



где $c_{\text{экв}}$ — жесткость эквивалентной пружины, закрепленной в точке A.

Из подобия ΔOAB и $\Delta OA'B'$ (см. рисунок) следует, что

$$\frac{f_{\text{ст}}}{f_A}=\frac{a}{l}.$$

В положении статического равновесия

$$F^{\text{ст}}_{\text{упр}}a=mgl=F_{\text{упр}_A}l.$$

С учетом того, что

$$F^{\text{ст}}_{\text{упр}}=cf_{\text{ст}},$$

$$F_{\text{упр}_A}=c_{\text{экв}}f_A,$$

получим

$$cf_{\text{ст}}\,a=c_{\text{экв}}f_Al.$$

Откуда найдем

$$c_{\text{экв}}=\frac{cf_{\text{ст}}\,a}{lf_A}=\frac{ca^2}{l^2}.$$

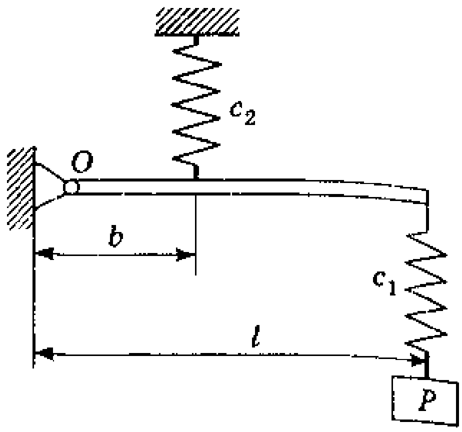
Тогда согласно формуле (1)

$$k=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Ответ: $k=\dfrac{a}{l}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ рад/с.

Задача 32.46

Груз P массы m подвешен на пружине к концу стержня длины l, который может поворачиваться вокруг оси O. Коэффициент жесткости пружины c_1. Пружина, поддерживающая стержень, установлена на расстоянии b от точки O и имеет коэффициент жесткости c_2. Определить собственную частоту колебаний груза P. Массой стержня пренебречь.

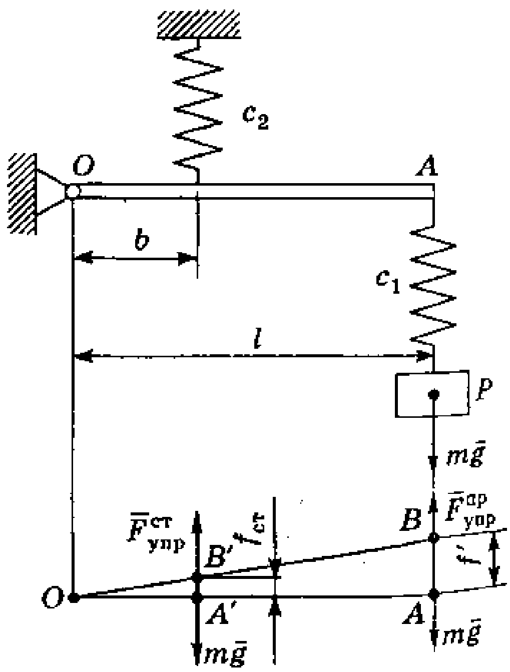


Решение

Перенесем пружину с коэффициентом жесткости c_2 в точку A и определим коэффициент жесткости $c_{пр}$ приведенной пружины исходя из условия

$$F_{упр}^{ст} b = F_{упр}^{пр} l, \qquad (1)$$

где $F_{упр}^{ст} = c_2 f_{ст}$ — сила упругости пружины 2 в положении статического равновесия; $F_{упр}^{пр} = c_{пр} f'$ — сила упругости пружины 2, приведенная в точку A.



Тогда условие (1) запишем в виде

$$c_2 f_{ст} b = c_{пр} f' l,$$

откуда

$$c_{пр} = c_2 \frac{f_{ст}}{f'} \frac{b}{l}. \qquad (2)$$

Из подобия ΔOAB и $\Delta OA'B'$ (см. рисунок) получим

$$\frac{f_{ст}}{f'} = \frac{b}{l},$$

тогда выражение (2) примет вид

$$c_{пр} = \frac{c_2 b^2}{l^2}.$$

Итак, в точке A имеем две последовательно соединенные пружины с коэффициентами жесткости c_1 и $c_{пр}$.

Найдем коэффициент жесткости эквивалентной пружины

$$c_{экв} = \frac{c_1 c_{пр}}{c_1 + c_{пр}} = \frac{c_1 c_2}{\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}$$

и собственную частоту колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}}.$$

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{c_1 c_2}{m\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}}$ рад/с.

Задача 32.47

Для определения ускорения силы тяжести в данном месте земного шара производятся два опыта. К концу пружины подвешивают груз P_1 и измеряют статическое удлинение пружины l_1. Затем к концу этой же пружины подвешивают другой груз P_2 и опять измеряют статическое удлинение l_2. После этого повторяют оба опыта, заставляя оба груза по очереди совершать свободные колебания, и измеряют при этом периоды колебаний T_1 и T_2. Второй опыт делают для того, чтобы учесть влияние массы самой пружины, считая, что при движении груза это влияние эквивалентно прибавлению к колеблющейся массе некоторой добавочной массы. Найти формулу для определения ускорения силы тяжести по этим опытным данным.

Решение

Период колебаний груза P_1

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}}, \tag{1}$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{f_{ст}}} = \sqrt{\dfrac{g}{l_1}}$.

Период колебаний груза P_2

$$T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}}, \tag{2}$$

где $k_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$.

Возведем в квадрат выражения (1) и (2) и найдем разность

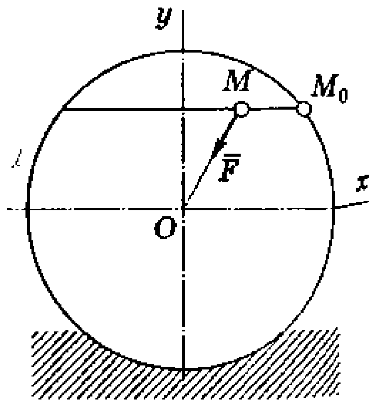
$$T_1^2 - T_2^2 = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{g},$$

откуда получим формулу для определения ускорения силы тяжести

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Ответ: $g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$.

Задача 32.48

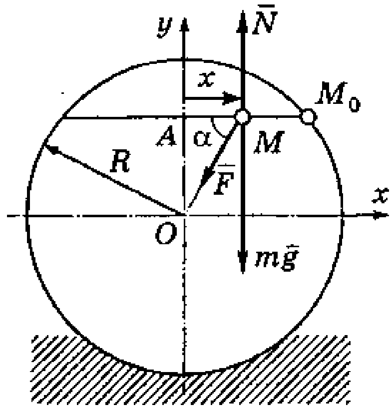


По горизонтальной хорде (пазу) вертикально расположенного круга движется без трения точка M массы 2 кг под действием силы притяжения $\bar{F}$, пропорциональной по величине расстоянию до центра O, причем коэффициент пропорциональности 98 Н/м. Расстояние от центра круга до хорды равно 20 см, радиус окружности 40 см. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в правом крайнем положении M_0 и отпущена без начальной скорости. С какой скоростью точка проходит через середину хорды?

Решение

Изобразим на рисунке точку в промежуточном положении, покажем действующие на нее силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу притяжения $\bar{F}$, реакцию $\bar{N}$ опоры.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = -F\cos\alpha,$$

где $F = \mu \cdot OM$, μ — коэффициент пропорциональности; $\cos\alpha = \dfrac{x}{OM}$.

Тогда

$$m\ddot{x} = -\mu x.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $k^2 = \dfrac{\mu}{m} = \dfrac{98}{2} = 49$, $k = 7$ рад/с.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (3)$$

Найдем постоянные интегрирования при заданных начальных условиях: $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формулы (2) получим

$$C_1 = x = x_0 = AM_0 = \sqrt{R^2 - AO^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34{,}6 \text{ (см)},$$

из формулы (3)

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = 0.$$

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (2) и запишем закон движения точки:

$$x = 34{,}6 \cos 7t.$$

Скорость точки согласно формуле (3)

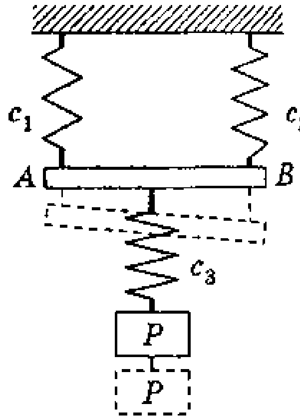
$$\dot{x} = -242 \sin 7t \text{ см/с}.$$

При прохождении точкой середины хорды $x = 0$, поэтому

$$\dot{x} = \pm 242 \text{ см/с}.$$

О т в е т: $x = 34{,}6 \cos 7t$ см, $\dot{x} = \pm 242$ см/с.

Задача 32.49



К стержню AB, массой которого пренебречь, прикреплены три пружины. Две, с жесткостью c_1 и c_2, удерживают стержень и расположены на его концах. Третья пружина, жесткость которой c_3, прикреплена к середине стержня и несет груз P массы m. Определить собственную частоту колебаний груза.

Решение

Найдем усилия S_1 и S_2, возникающие в точках крепления пружин A и B:

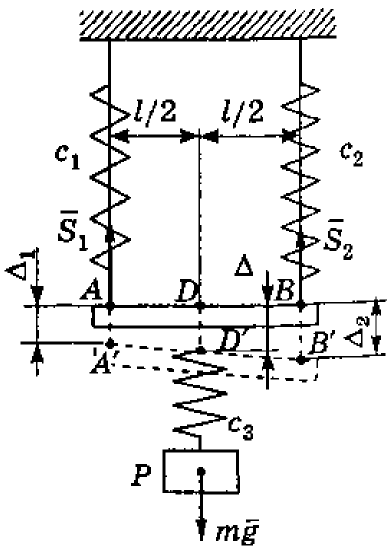
$$S_1 = S_2 = \frac{mg}{2}. \qquad (1)$$

Тогда удлинение каждой пружины будет:

$$\Delta_1 = \frac{mg}{2c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{mg}{2c_2}. \qquad (2)$$

Найдем перемещение Δ точки подвеса D третьей пружины:

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right). \qquad (3)$$



В точке D' поместим пружину с приведенной жесткостью $c_{пр}$:

$$c_{пр} = \frac{mg}{\Delta}.$$

Откуда

$$\Delta = \frac{mg}{c_{пр}}. \qquad (4)$$

Подставим выражение (4) в формулу (3) и найдем

$$c_{пр} = \frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2}.$$

Итак, в точке D имеем две последовательно соединенные пружины с коэффициентами жесткости $c_{пр}$ и c_3. Заменим их эквивалентной пружиной и найдем коэффициент жесткости $c_{экв}$ этой пружины:

$$c_{экв} = \frac{c_{пр}c_3}{c_{пр} + c_3} = \frac{4c_1c_2c_3}{4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3},$$

а также собственную частоту колебаний груза

$$k = \sqrt{\frac{c_{экв}}{m}} = \sqrt{\frac{4c_1c_2c_3}{m(4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}}.$$

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{4c_1c_2c_3}{m(4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}}$ рад/с.

Задача 32.50

Груз массы 10 кг, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $c = 1{,}96$ кН/м, совершает колебания. Определить полную механическую энергию груза и пружины, пренебрегая массой пружины, построить график зависимости упругой силы от перемещения и показать на нем потенциальную энергию пружины. Принять положение статического равновесия за начало отсчета потенциальной энергии.

Решение

Полная механическая энергия E рассматриваемой системы

$$E = T + П, \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия груза; $П$ — потенциальная энергия пружины.

При движении груза

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

$$П = A(F_{упр}) = \int_0^x F_{упр}dx = \int_0^x cxdx = \frac{cx^2}{2}.$$

Тогда согласно форомуле (1) с учетом данных задачи

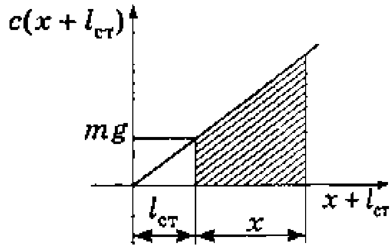
$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = 5\dot{x}^2 + 980x^2.$$

Так как

$$F_{\text{упр}} = c(x + l_{\text{ст}}),$$

то график зависимости упругой силы от перемещения — прямая линия (см. рисунок в ответе). Начало отсчета потенциальной энергии принято в положении статического равновесия, поэтому потенциальная энергия пружины равна площади трапеции (см. рисунок), ограниченной по оси абсцисс координатами $l_{\text{ст}}$ и $x + l_{\text{ст}}$.

Ответ: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = (5\dot{x}^2 + 980x^2)$ Дж, если x — в м, $\dot{x}$ — в м/с. Заштрихованная на рисунке площадь равна потенциальной энергии пружины.



Задача 32.51

Материальная точка массы m находится в поле действия силы с потенциалом

$$П = 1/2\, k(x^2 + 4y^2 + 16z^2).$$

Доказать, что при движении точки из любого (ненулевого) начального положения через некоторое время точка снова придет в это положение. Определить это время. Будет ли скорость при возвращении равна начальной скорости?

Решение

Определим проекции силы на декартовы оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial П}{\partial x} = -kx;$$

$$F_y = -\frac{\partial П}{\partial y} = -4ky;$$

$$F_z = -\frac{\partial П}{\partial z} = -16kz.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \beta^2 x = 0, \tag{1}$$

где $\beta^2 = \dfrac{k}{m}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t. \tag{2}$$

Продифференцируем выражение (2) по времени и получим

$$\dot{x} = -\beta C_1 \sin\beta t + \beta C_2 \cos\beta t. \tag{3}$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$, из формул (2) и (3) найдем постоянные интегрирования: $x_0 = C_1$; $\dot{x}_0 = C_2\beta$, следовательно, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\beta} = \dot{x}_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Тогда выражения (2) и (3) примут вид

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \dot{x}_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{5}$$

Найдем период колебаний точки вдоль оси x:

$$T_x = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = -4ky$$

или

$$\ddot{y} + \alpha^2 y = 0, \tag{6}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{4k}{m}$, $\alpha = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$y = C_3 \cos\alpha t + C_4 \sin\alpha t. \tag{7}$$

Продифференцируем выражение (7) по времени и получим

$$\dot{y} = -\alpha C_3 \sin\alpha t + \alpha C_4 \cos\alpha t. \tag{8}$$

При начальных условиях: $t = 0$, $y_0 > 0$, $\dot{y}_0 > 0$, из формул (7) и (8) найдем постоянные интегрирования: $y_0 = C_3$, $\dot{y}_0 = C_4\alpha$, следовательно, $C_4 = \frac{\dot{y}_0}{\alpha} = \frac{\dot{y}_0\sqrt{m}}{2\sqrt{k}}$.

Тогда выражения (7) и (8) примут вид

$$y = y_0 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{\dot{y}_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \tag{9}$$

$$\dot{y} = -2y_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \dot{y}_0 \cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right). \tag{10}$$

Найдем период колебаний точки вдоль оси y:

$$T_y = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z:

$$m\ddot{z} = -16kz$$

или

$$\ddot{z} + \gamma^2 z = 0, \tag{11}$$

где $\gamma^2 = \frac{16k}{m}$, $\gamma = 4\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$z = C_5 \cos\gamma t + C_6 \sin\gamma t. \tag{12}$$

Продифференцируем выражение (12) по времени и получим

$$\dot{z} = -\gamma C_5 \sin\gamma t + \gamma C_6 \cos\gamma t. \tag{13}$$

Исходя из начальных условий: $t=0$, $z_0>0$, $\dot z_0>0$, найдем из формул (12) и (13) постоянные интегрирования: $z_0=C_5$; $\dot z_0=C_6\gamma$, следовательно, $C_6=\dfrac{\dot z_0}{\gamma}=\dfrac{\dot z_0\sqrt{m}}{4\sqrt{k}}$.

Тогда выражения (12), (13) примут вид

$$z=z_0\cos\left(4\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)+\frac{\dot z_0}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \tag{14}$$

$$\dot z=-4z_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(4\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)+\dot z_0\cos\left(4\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right). \tag{15}$$

Период колебаний точки вдоль оси z:

$$T_z=\frac{2\pi}{\gamma}=\frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Так как

$$T_x=2T_y=4T_z,$$

то через $t_{\min}=T_x$ точка должна вернуться в начальное положение. Подставим $t=T_x$ в формулы (4), (9) и (14) и соответственно получим

$$x=x_0\cos 2\pi+\dot x_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 2\pi=x_0,$$

$$y=y_0\cos 4\pi+\frac{\dot y_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 4\pi=y_0,$$

$$z=z_0\cos 8\pi+\frac{\dot z_0}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 8\pi=z_0.$$

Следовательно,

$$T_x=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Скорость материальной точки при $t=T_x=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ определим из формул (5), (10), (15):

$$\dot x=-x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 2\pi+\dot x_0\cos 2\pi=\dot x_0,$$

$$\dot{y} = -2y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 4\pi + \dot{y}_0 \cos 4\pi = \dot{y}_0,$$

$$\dot{z} = -4z_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 8\pi + \dot{z}_0 \cos 8\pi = \dot{z}_0.$$

Значит, через промежуток времени $T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ точка будет иметь скорость, равную ее начальному значению.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Скорость точки через промежуток времени T станет равной своему начальному значению.

Задача 32.52

Материальная точка массы m находится в поле действия силы, потенциал которой

$$\Pi = 1/2k(x^2 + 2y^2 + 5z^2).$$

Вернется ли точка в этом случае в исходное положение по прошествии некоторого времени?

Решение

Определим проекции силы на декартовы оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -kx,$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -2ky,$$

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -5kz.$$

Запишем дифференциальные уравнения движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -kx$$

или

$$\ddot{x} + \beta^2 x = 0, \quad (1)$$

где $\beta^2 = \frac{k}{m}$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t. \tag{2}$$

Продифференцируем выражение (2) по времени и получим

$$\dot{x} = -\beta C_1 \sin\beta t + \beta C_2 \cos\beta t. \tag{3}$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$, из формул (2) и (3) найдем постоянные интегрирования: $x_0 = C_1$; $\dot{x}_0 = C_2\beta$, следовательно, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\beta} = \dot{x}_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Тогда выражения (2) и (3) примут вид

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \tag{4}$$

$$\dot{x} = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \dot{x}_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{5}$$

Найдем период колебаний точки вдоль оси x:

$$T_x = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = -2ky$$

или

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = 0, \tag{6}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{2k}{m}$, $\alpha = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (6) имеет вид

$$y = C_3 \cos\alpha t + C_4 \sin\alpha t. \tag{7}$$

Продифференцируем выражение (7) по времени и получим

$$\dot{y} = -\alpha C_3 \sin\alpha t + \alpha C_4 \cos\alpha t. \tag{8}$$

Исходя из начальных условий: $t=0$, $y_0>0$, $\dot{y}_0>0$, из формул (7) и (8) найдем постоянные интегрирования: $y_0=C_3$; $\dot{y}_0=C_4\alpha$, следовательно, $C_4=\frac{\dot{y}_0}{\alpha}=\frac{\dot{y}_0\sqrt{m}}{\sqrt{2k}}$.

Тогда выражения (7) и (8) примут вид

$$y=y_0\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t+\dot{y}_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t, \tag{9}$$

$$\dot{y}=-y_0\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t+\dot{y}_0\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t. \tag{10}$$

Найдем период колебаний точки вдоль оси y:

$$T_y=\frac{2\pi}{\alpha}=\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z:

$$m\ddot{z}=-5kz$$

или

$$\ddot{z}+\gamma^2 z=0, \tag{11}$$

где $\gamma^2=\frac{5k}{m}$, $\gamma=\sqrt{\frac{5k}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$z=C_5\cos\gamma t+C_6\sin\gamma t. \tag{12}$$

Продифференцируем выражение (12) по времени и получим

$$\dot{z}=-\gamma C_5\sin\gamma t+\gamma C_6\cos\gamma t. \tag{13}$$

Исходя из начальных условий: $t=0$, $z_0>0$, $\dot{z}_0>0$, из формул (12) и (13) найдем постоянные интегрирования: $z_0=C_5$; $\dot{z}_0=C_6\gamma$, следовательно, $C_6=\frac{\dot{z}_0}{\gamma}=\frac{\dot{z}_0\sqrt{m}}{\sqrt{5k}}$.

Тогда выражения (12) и (13) примут вид

$$z=z_0\cos\sqrt{\frac{5k}{m}}\,t+\dot{z}_0\sqrt{\frac{m}{5k}}\sin\sqrt{\frac{5k}{m}}\,t, \tag{14}$$

$$\dot{z}=-z_0\sqrt{\frac{5k}{m}}\sin\sqrt{\frac{5k}{m}}\,t+\dot{z}_0\cos\sqrt{\frac{5k}{m}}\,t. \tag{15}$$

Период колебаний точки вдоль оси z

$$T_z = \frac{2\pi}{\gamma} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

Так как T_y и T_z не являются кратными T_x, то нельзя указать момент времени, когда все три координаты примут исходные значения.

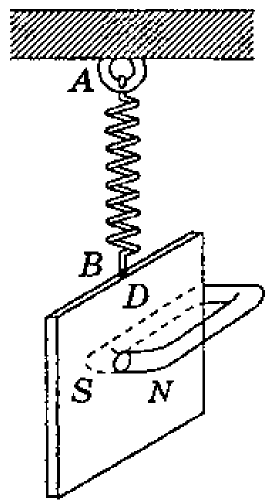
Ответ: нельзя указать момент времени, когда все три координаты примут исходные значения. Точка в процессе сложения трех колебательных движений не вернется в исходное положение.

Влияние сопротивления на свободные колебания

Задачи и решения

Задача 32.53

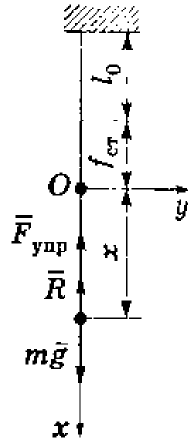
Пластина D массы 100 г, подвешенная на пружине AB в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита. Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $kv\Phi^2$ Н, где $k = 0{,}001$, v — скорость в м/с, Φ — магнитный поток между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута. Удлинение ее на 1 м получается при статическом действии силы в 19,6 Н, приложенной в точке B. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб (вебер — единица магнитного потока в СИ).



Решение

Выберем начало системы координат Oxy в положении статического равновесия пластины. Сместим пластину в сторону положительного направления оси x. Покажем на рисунке действующие на пластину силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$, силу сопротивления $\bar{R}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения пластины в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg - R - F_{упр},$$

где $R = \alpha\dot{x}$, $\alpha = k\Phi^2 = 0{,}001(10\sqrt{5})^2 = 0{,}5$; $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

В положении статического равновесия $mg = cf_{ст}$. Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cf_{ст} - cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \qquad (1)$$

где $2n = \dfrac{\alpha}{m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Найдем $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (рад/с), $n = 2{,}5$ (рад/с). Получили, что $k > n$ — случай малого сопротивления.

Тогда решение дифференциального уравнения (1) запишем в следующем виде:

$$x = e^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right). \qquad (2)$$

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$\dot{x} = -ne^{-nt}\left(C_1\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right) +$$

$$+e^{-nt}\left(-C_1\sqrt{k^2 - n^2}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t + C_2\sqrt{k^2 - n^2}\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right). \qquad (3)$$

Подставим в выражения (2) и (3) начальные условия движения: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст}$, $\dot{x}_0 = 0$, и получим: $x_0 = C_1 = -f_{ст} = -\dfrac{mg}{c} = -0{,}05$ (м); $\dot{x}_0 = 0 = -nC_1 + \sqrt{k^2 - n^2}C_2$, откуда $C_2 = \dfrac{nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = -0{,}00907$ (м).

Подставив значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (2), окончательно получим

$$x = -e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t).$$

О т в е т: $x = -e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t)$ м, где ось x направлена вниз из положения статического равновесия центра тяжести пластинки.

Задача 32.54

Определить движение пластинки D при условиях предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi = 100$ Вб.

Решение

Воспользуемся дифференциальным уравнением движения пластины, полученным при решении задачи 32.53:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

где $2n = \dfrac{\alpha}{m}$, $\alpha = 0{,}001 \cdot 10^2 = 10$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Определим $k = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (рад/с), $n = \dfrac{10}{2 \cdot 0{,}1} = 50$ (рад/с).

Получили $k < n$ — случай большого сопротивления. В этом случае решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-98t}. \tag{2}$$

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$\dot{x} = -2C_1 e^{-2t} - 98 C_2 e^{-98t}. \tag{3}$$

Подставим в формулы (2) и (3) начальные условия движения: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст} = -\dfrac{mg}{c} = -0{,}05$ (м), $\dot{x}_0 = 0$, и получим: $x_0 = -f_{ст} = C_1 + C_2$; $\dot{x}_0 = 0 = -2C_1 - 98C_2$, откуда $C_1 = -0{,}051$ м, $C_2 = -0{,}001$ м.

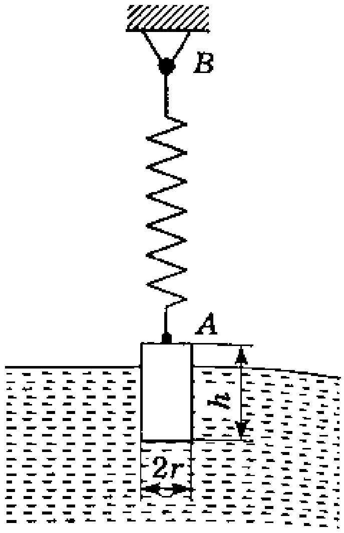
Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (2) и окончательно запишем

$$x = -0{,}051 e^{-2t} + 0{,}001 e^{-98t}.$$

Ответ: $x = -0{,}051 e^{-2t} + 0{,}001 e^{-98t}$.

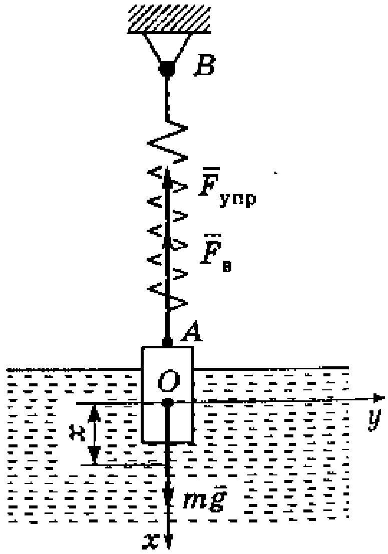
Задача 32.55

Цилиндр веса P, радиуса r и высоты h подвешен на пружине AB, верхний конец которой B закреплен; цилиндр погружен в воду. В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. В начальный момент времени цилиндр был погружен в воду на 2/3 своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной c и предполагая, что действие воды сводится к добавочной архимедовой силе, определить движение цилиндра относительно положения равновесия. Принять удельный вес воды равным γ.



Решение

Введем систему координат Oxy с началом в положении статического равновесия цилиндра. Покажем на рисунке силы, действующие на цилиндр: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, выталкивающую $\bar{F}_{в}$ силу Архимеда.



Запишем дифференциальное уравнение движения цилиндра в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр} - F_{в} + mg, \tag{1}$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$; $F_{в} = \gamma\pi r^2\left(\frac{1}{2}h + x\right)$,

$\left(\frac{1}{2}h + x\right)$ — высота погруженной в воду части цилиндра.

В положении статического равновесия $x = 0$,

$$F_{упр}(0) + F_{в}(0) = mg$$

или

$$cf_{ст} + \gamma\pi r^2\frac{h}{2} = mg.$$

Определим величину $f_{ст}$:

$$f_{ст} = \frac{1}{c}\left(mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2}\right).$$

Тогда

$$F_{упр} = mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2} + cx.$$

Подставим значения $F_{упр}$ и $F_в$ в уравнение (1) и после преобразований получим

$$m\ddot{x} = -cx - \gamma\pi r^2 x$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c+\gamma\pi r^2}{m} = \dfrac{g}{P}(c+\gamma\pi r^2)$.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos k. \tag{4}$$

Для нахождения C_1 и C_2 используем начальные условия: при $t=0$ $x_0 = \left(\dfrac{2}{3}h - \dfrac{1}{2}h\right) = \dfrac{1}{6}h$, $\dot{x}_0 = 0$. Из формул (3) и (4) получим: $C_1 = \dfrac{1}{6}h$, $C_2 = 0$.

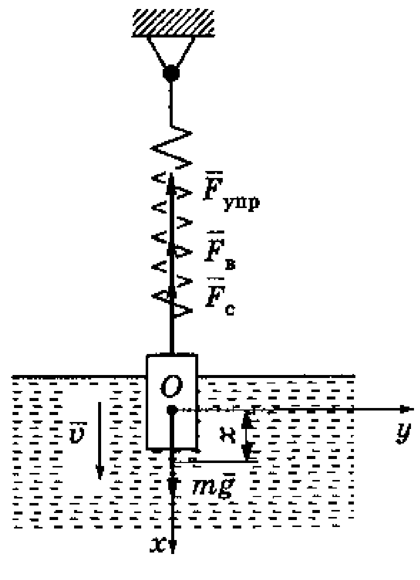
Подставим значения постоянных интегрирования в формулу (3) и запишем уравнение движения цилиндра:

$$x = \frac{1}{6}h\cos kt.$$

Ответ: $x = \dfrac{1}{6}h\cos kt$, где $k^2 = \dfrac{g}{P}(c+\gamma\pi r^2)$.

Задача 32.56

В предыдущей задаче определить колебательное движение цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости и равно αv.



Решение

Считая, что сила сопротивления $\bar{F}_c$ воды направлена в сторону, противоположную скорости (см. рисунок), составим дифференциальное уравнение движения цилиндра в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{в}} - F_{\text{с}}, \tag{1}$$

где $F_{\text{упр}} = c(f_{\text{ст}} + x)$ — сила упругости; $F_{\text{в}} = \gamma\pi r^2\left(\frac{h}{2} + x\right)$ — выталкивающая сила Архимеда; $F_{\text{с}} = \alpha\dot{x}$ — сила сопротивления воды.

Для определения величины $f_{\text{ст}}$ запишем уравнение статического равновесия:

$$cf_{\text{ст}} + \gamma\pi r^2\frac{h}{2} = mg \Rightarrow f_{\text{ст}} = \frac{1}{c}\left(mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2}\right),$$

тогда

$$F_{\text{упр}} = mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2} + cx.$$

Подставим значения $F_{\text{с}}$, $F_{\text{упр}}$ и $F_{\text{в}}$ в уравнение (1) и после преобразований получим

$$m\ddot{x} = -cx - \gamma\pi r^2 x - \alpha\dot{x}$$

или

$$m\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $n = \frac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \frac{c}{m} + \gamma\frac{\pi r^2}{m}$.

При условии $k > n$ или

$$k_1^2 = k^2 - n^2 = \left(\frac{c}{m} + \gamma\frac{\pi r^2}{m}\right) - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0$$

движение цилиндра будет колебательным. Тогда решение уравнения (2) имеет вид

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \beta), \tag{3}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$; A, β — произвольные постоянные.

Продифференцируем выражение (3) по времени:

$$\dot{x} = -Ane^{-nt}\sin(k_1 t + \beta) + Ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \beta). \tag{4}$$

Используя начальные условия: $t=0$, $x_0=\left(\frac{2}{3}h-\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{6}$, $\dot{x}_0=0$, из формул (3) и (4) получим

$$\frac{h}{6}=A\sin\beta, \tag{5}$$

$$\frac{nh}{6k_1}=A\cos\beta. \tag{6}$$

Разделим выражение (5) на (6) и найдем

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{k_1}{n}=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}.$$

Возведем выражения (5) и (6) в квадрат, сложим и получим

$$A=\frac{h}{6}\sqrt{1+\frac{n^2}{k_1^2}}=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k_1^2+n^2}{k_1^2}}=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}. \tag{7}$$

Подставим выражение (7) в формулу (3) и запишем уравнение колебательных движений цилиндра:

$$x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}\,e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right).$$

Ответ: движение цилиндра будет колебательным, если

$$\left(\frac{c}{m}+\gamma\frac{\pi r^2}{m}\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2>0.$$

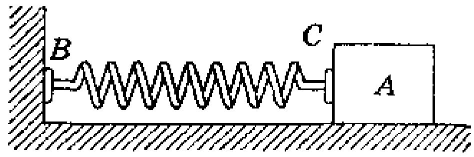
Тогда

$$x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}\,e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right),$$

где $k^2=\frac{c}{m}+\gamma\frac{\pi r^2}{m}$; $n=\frac{\alpha}{2m}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{k_1}{n}=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}$; $m=\frac{P}{g}$.

Задача 32.57

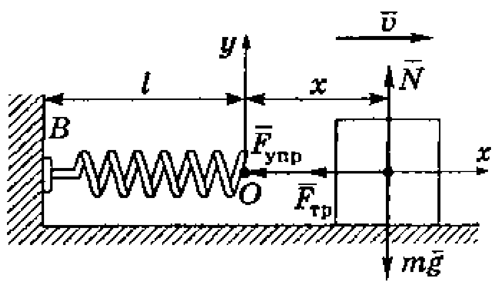
Тело A массы 0,5 кг лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой BC горизонтальна. Коэффициент трения тела о плоскость 0,2; пружина такова, что для удлинения ее на 1 см требуется сила 2,45 Н. Тело A отодвинуто от точки B так, что пружина вытянулась на 3 см, и затем отпущено без начальной скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело A, 2) величины размахов и 3) продолжительность T каждого из них.



Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю, сила упругости пружины будет равна силе трения или меньше ее.

Решение

При движении тела в горизонтальном направлении вдоль оси x (см. рисунок) к нему будут приложены сила упругости $\bar{F}_{упр}$ и сила трения $\bar{F}_{тр}$, перпендикулярные к оси x, силы $\bar{N}$ и $m\bar{g}$ взаимно уравновешены. Сила трения всегда противоположна направлению скорости.



Рассмотрим последовательные этапы колебаний тела A, начиная с момента $t = 0$, когда

$$x_0 > 0, \quad \dot{x}_0 = 0. \tag{1}$$

Движение начнется, если $c|x_0| > fmg$.

Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр} - F_{тр},$$

где $F_{упр} = cx$; $F_{тр} = fN = fmg$.

Тогда

$$m\ddot{x} + cx = fmg$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = fg, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, $x^* = A = \dfrac{fg}{k^2}$.

Тогда

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{fg}{k^2}, \tag{3}$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{4}$$

Используя начальные условия (1), из формул (3) и (4) получим

$$C_1 = x_0 - \frac{fg}{k^2}, \; C_2 = 0.$$

Подставим значения постоянных интегрирования в формулу (3), окончательно запишем:

$$x = \frac{fg}{k^2} + \left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt, \tag{5}$$

$$\dot{x} = -k\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\sin kt.$$

Если $\dot{x} < 0$, то $\sin kt > 0$, поэтому $0 < t < \dfrac{\pi}{k}$. При $t = t_1 = \dfrac{\pi}{k}$: $\dot{x}_1 = 0$, $x_1 = -x_0 + 2\dfrac{fg}{k^2}$.

Движение продолжается, пока выполняется неравенство

$$c|x_1| > fmg$$

или

$$\left|-x_0 + 2\frac{fg}{k^2}\right| > \frac{fg}{k^2},$$

так как $\dfrac{mg}{c} = \dfrac{g}{k^2}$.

В этом случае $x_1 < 0$ и уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = -cx - fmg$$

или

$$\ddot{x}+k^2x=fg, \tag{6}$$

причем начальные условия: при $t=t_1$ $x=x_1$, $\dot{x}_1=0$. (7)

По аналогии для $t_1\le t\le t_2$ получим

$$x=-\frac{fg}{k^2}+\left(x_1+\frac{fg}{k^2}\right)\cos k(t-t_1)$$

или, подставив значения t_1 и x_1:

$$x=-\frac{fg}{k^2}-\left(\frac{3fg}{k^2}-x_0\right)\cos kt.$$

Если $\dot{x}=0$ в момент $t_2=\dfrac{2\pi}{k}$, то

$$x_2=-x_0-\frac{4fg}{k^2}.$$

Движение не прекратится, если $|x_2|>\dfrac{fg}{k^2}$ и т.д.

Итак, максимальные по абсолютной величине последовательные отклонения от положения равновесия будут происходить при:

$$x_0,\ x_1=-x_0+\frac{2fg}{k^2},\ x_2=-x_0-\frac{4fg}{k^2},\ x_3=-x_0+\frac{6fg}{k^2},\ \ldots,$$

$$x_n=(-1)^n\left(x_0-\frac{2nfg}{k^2}\right), \tag{8}$$

а соответствующие им моменты остановок тела:

$$t=0,\ \frac{\pi}{k},\ \frac{2\pi}{k},\ \ldots,\ \frac{n\pi}{k}.$$

Если $|x_n|<\dfrac{fg}{k^2}$, то движение прекратится.

Период колебаний тела

$$T^*=t_n-t_{n-2}=\frac{2\pi}{k},$$

т.е. равен периоду колебаний при отсутствии силы трения. В данном случае

$$c = \frac{2{,}45}{0{,}01} = 245 \text{ (Н/м)},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{245}{0{,}5} = 490 \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

$$\frac{fg}{k^2} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^2}{490} = 0{,}4 \text{ (см)}.$$

Найдем:

1) число n размахов, которое совершит тело A:

$$x_0 - \frac{2nfg}{k^2} < \frac{fg}{k^2} \Rightarrow 2n+1 = \frac{x_0 fk^2}{g} \Rightarrow 2n+1 = \frac{3}{0{,}4} \Rightarrow n_{\min} = 3{,}25, \text{ т.е. } n = 4;$$

2) величины размахов:

$$A_1 = |x_0| + |x_1| = 3{,}0 + |-3{,}0 + 2 \cdot 0{,}4| = 3{,}0 + 2{,}2 = 5{,}2 \text{ (см)},$$

$$A_2 = |x_1| + |x_2| = 2{,}2 + |3{,}0 - 4 \cdot 0{,}4| = 2{,}2 + 1{,}4 = 3{,}6 \text{ (см)},$$

$$A_3 = |x_2| + |x_3| = 1{,}4 + |-3{,}0 + 6 \cdot 0{,}4| = 1{,}4 + 0{,}6 = 2{,}0 \text{ (см)},$$

$$A_4 = |x_3| = |3{,}0 - 8{,}0 \cdot 0{,}4| = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 \text{ (см)};$$

3) продолжительность одного размаха

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{3{,}14}{22{,}14} = 0{,}14 \text{ (с)}.$$

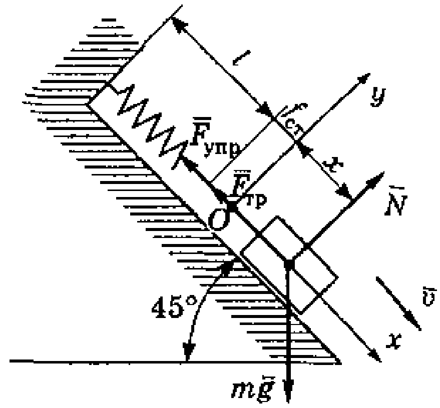
Ответ: 1) 4 размаха; 2) 5,2 см, 3,6 см, 2 см, 0,4 см; 3) $T = 0{,}14$ с.

Задача 32.58

Груз массы $M = 20$ кг, лежащий на наклонной негладкой плоскости, прикрепили к нерастянутой пружине и сообщили ему начальную скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с, направленную вниз. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}08$, коэффициент жесткости пружины $c = 20$ Н/см. Угол, образованный наклонной плоскостью с горизонтом, $\alpha = 45°$. Определить: 1) период колебаний, 2) число максимальных отклонений от положения равновесия, которые совершит груз, 3) величины этих отклонений.

Решение

Начало системы координат Oxy совместим с положением статического равновесия (см. рисунок). Запишем уравнение движения груза в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg\sin 45° - F_{упр} \pm F_{тр},$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$; $F_{тр} = fN = fmg\cos 45°$.

В положении статического равновесия

$$mg\sin 45° = cf_{ст}.$$

Тогда

$$m\ddot{x} = -cx \pm fmg\cos 45°$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = \pm fg\cos 45°. \tag{1}$$

При движении тела вниз уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg\cos 45°. \tag{2}$$

Решение уравнения (2):

$$x = A_1 \sin(kt - \beta) - \frac{fg}{k^2}\cos 45°, \tag{3}$$

$$\dot{x} = A_1 k\cos(kt - \beta), \tag{4}$$

где A_1 — амплитуда колебаний.

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст}$, $\dot{x}_0 = v_0$, из формул (3) и (4) получим

$$-f_{ст} = A_1 \sin\beta_1 - \frac{fg}{k^2}\cos 45° \Rightarrow \frac{-fg}{k^2}\cos 45° + f_{ст} = A_1 \sin\beta_1,$$

$$v_0 = A_1 k\cos\beta_1 \Rightarrow \frac{v_0}{k} = A_1 \cos\beta_1.$$

Откуда

$$A_1 = \sqrt{\left(-\frac{fg}{k^2}\cos 45° + f_{ст}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2},$$

$$\mathrm{tg}\beta_1 = \frac{-fg\cos 45° + k^2 f_{ст}}{k v_0}.$$

В момент остановки $\dot{x}=0$, следовательно,

$$\cos(kt_1-\beta_1)=0 \Rightarrow kt_1-\beta_1=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1\right),$$

$$x_1=A_1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1-\beta_1\right)-\frac{fg}{k^2}\cos 45°=A_1-\frac{fg}{k^2}\cos 45°.$$

Вычислим частоту колебаний

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{2000}{20}=100, \quad k=10 \text{ рад/с}$$

и рассчитаем x_1

$$f_{\text{ст}}-\frac{fg}{k^2}\cos 45°=\frac{mg\sin 45°}{c}-\frac{fg}{k^2}\cos 45°=\frac{g}{k^2}(\sin 45°-f\cos 45°)=$$

$$=\frac{g}{\sqrt{2}k^2}(1-f)=\frac{980\cdot 0{,}92}{1{,}414\cdot 100}=6{,}38 \text{ (см)};$$

$$\frac{v_0}{k}=\frac{50}{10}=5 \text{ (см)};$$

$$A_1=\sqrt{6{,}38^2+5^2}=8{,}1 \text{ (см)};$$

$$\frac{fg}{k^2}\cos 45°=\frac{0{,}08\cdot 980\cdot 0{,}707}{100}=0{,}55 \text{ (см)},$$

$$x_1=8{,}10-0{,}55=7{,}55 \text{ (см)}.$$

При движении тела вверх по наклонной плоскости дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x}+k^2x=fg\cos 45° \tag{5}$$

при условии, что $cx_1>mg(\sin 45°+f\cos 45°)$.

Тогда решение уравнения (5)

$$x=A_2\sin\left[k(t-t_1)-\beta_2\right]+\frac{fg\cos 45°}{k^2},$$

$$\dot{x}=A_2k\cos\left[k(t-t_1)-\beta_2\right].$$

При начальных условиях: $t = t_1$, $x_1 = 7{,}55$, $\dot{x}_1 = 0$, получим

$$x_1 = -A_2 \sin\beta_2 + \frac{fg\cos 45^\circ}{k^2},$$

$$0 = A_2 k \cos\beta_2,$$

откуда найдем: $A_2 = \dfrac{fg}{k^2}\cos 45^\circ - x_1$, $\beta_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

В момент остановки $t = t_2$ и $\dot{x}_2 = 0$, следовательно,

$$\cos\left[k(t_2 - t_1) - \beta_2\right] = \sin k(t_2 - t_1) = 0,$$

$$k(t_2 - t_1) = \pi \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k}.$$

Тогда

$$x_2 = A_2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{fg}{k^2}\cos 45^\circ = \frac{2fg}{k^2}\cos 45^\circ - x_1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}55 - 7{,}55 = 1{,}10 - 7{,}55 = -6{,}45 \text{ (см)}.$$

Для n-го колебания получим эмпирическую формулу

$$x_{n-1} = (-1)^{n-1}\left(-\frac{2(n-1)fg}{k^2}\cos 45^\circ + x_1\right),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

1) Найдем период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{10} = 0{,}628 \text{ (с)}.$$

2) Так как после одного размаха амплитуда уменьшается на 1,10 см, а «область застоя» имеет радиус 0,55 см, то

$$7{,}55 - 1{,}1(n-1) < 0{,}55,$$

откуда

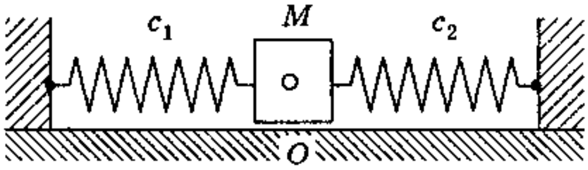
$$n = \frac{7{,}55 - 0{,}55}{1{,}10} + 1 = 7.$$

3) Определим по формуле (6) отклонение при последнем $(n = 7)$ колебании

$$x_7 = (-1)^7\left[x_1 - \frac{2(7-1)fg}{k^2}\right] = 7{,}55 - 6{,}60 = 0{,}95 \text{ (см)}.$$

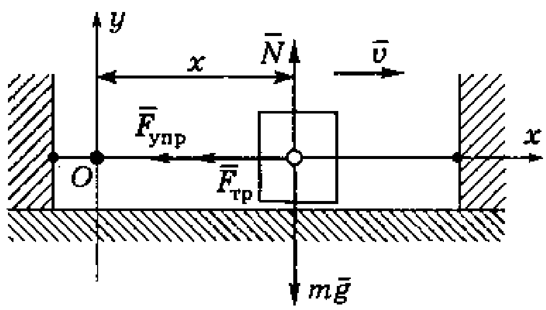
Ответ: 1) $T = 0{,}628$ с; 2) 7 отклонений; 3) 7,55 см; 6,45 см; 5,35 см; 4,25 см; 3,15 см; 2,05 см; 0,95 см.

Задача 32.59



Тело массы $M = 0{,}5$ кг совершает колебания на горизонтальной плоскости под действием двух одинаковых пружин, прикрепленных к телу одним концом и к неподвижной стойке — другим; оси пружин лежат на одной горизонтальной прямой. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = 1{,}225$ Н/см, коэффициент трения при движении тела $f = 0{,}2$, при покое $f_0 = 0{,}25$. В начальный момент тело было отодвинуто от своего среднего положения O вправо в положение $x_0 = 3$ см и отпущено без начальной скорости. Найти: 1) область возможных равновесных положений тела — «область застоя», 2) величину размахов тела, 3) число его размахов, 4) продолжительность каждого из них, 5) положение тела после колебаний.

Решение



Определим коэффициент жесткости $c_{экв}$ эквивалентной пружины

$$c_{экв} = c_1 + c_2.$$

После замены двух пружин одной эквивалентной эта задача аналогична задаче 32.57, поэтому воспользуемся результатами ее решения.

Дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x имеет вид [см. решение задачи 32.57, формула (2)]:

$$\ddot{x} + k^2 x = fg,$$

где $k^2 = \dfrac{c_{экв}}{m} = \dfrac{245}{0{,}5} = 490$ (рад/с^2).

1) Найдем «область застоя». В состоянии покоя

$$\frac{f_0 g}{k^2} = \frac{0{,}25 \cdot 980}{490} = 0{,}5 \text{ (см)},$$

следовательно,

$$-0{,}5 \text{ см} < x < 0{,}5 \text{ см} \text{ — это «область застоя».}$$

2) Определим максимальные по абсолютной величине последовательные отклонения тела от положения равновесия по формуле (8) в решении задачи 32.57:

$x_0 = 3{,}0$ см,

$$x_1 = -x_0 + \frac{2fg}{k^2} = -3 + 2 \cdot 0{,}4 = -2{,}2 \text{ (см)},$$

$$x_2 = x_0 - \frac{4fg}{k^2} = 3 - 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}4 \text{ (см)},$$

$$x_3 = -x_0 + \frac{6fg}{k^2} = -3 + 6 \cdot 0{,}4 = -0{,}6 \text{ (см)},$$

$$x_4 = x_0 - \frac{8fg}{k^2} = 3 - 8 \cdot 0{,}4 = -0{,}2 \text{ (см)}$$

и найдем амплитуды колебаний:

$A_1 = |x_0| + |x_1| = 3{,}0 + 2{,}2 = 5{,}2$ (см),

$A_2 = |x_1| + |x_2| = 2{,}2 + 1{,}4 = 3{,}6$ (см),

$A_3 = |x_2| + |x_3| = 1{,}4 + 0{,}6 = 2{,}0$ (см),

$A_4 = |x_3| - |x_4| = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$ (см).

3) Число размахов равно четырем (см. решение задачи 32.57).

4) Определим продолжительность размахов

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{3{,}14}{\sqrt{490}} = 0{,}141 \text{ (с)}.$$

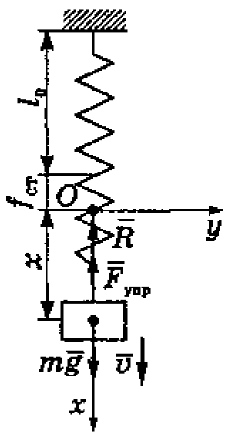
5) После остановки координата тела $x = x_4 = -0{,}2$ см.

Ответ: 1) $-0{,}5$ см $< x < 0{,}5$ см; 2) 5,2 см, 3,6 см, 2 см, 0,4 см; 3) 4 размаха; 4) $T = 0{,}141$ с; 5) $x = -0{,}2$ см.

Задача 32.60

Под действием силы сопротивления R, пропорциональной первой степени скорости ($R = \alpha v$), тело массы m, подвешенное к пружине жесткости c, совершает затухающие колебания. Определить, во сколько раз период затухающих колебаний T превосходит период незатухающих колебаний T_0, если отношение $n / k = 0{,}1$ ($k^2 = c / m$, $n = \alpha / (2m)$).

Решение



Начало системы координат Oxy совместим с положением статического равновесия тела. Покажем на рисунке действующие на тело силы: силу тяжести $m\overline{g}$, силу упругости $\overline{F}_{упр}$, силу сопротивления $\overline{R}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - R \tag{1}$$

или

$$m\ddot{x} = mg - c(x + f_{ст}) - \alpha\dot{x},$$

где $f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cx - mg - \alpha\dot{x}.$$

После преобразований запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{2}$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение уравнения (2) при $k > n$ имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ — круговая частота колебаний.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k_1},$$

период незатухающих колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}.$$

Тогда

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k}{k_1} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 1{,}005.$$

Откуда найдем

$$T \approx 1{,}005 T_0.$$

Ответ: $T \approx 1{,}005 T_0$.

Задача 32.61

В условиях предыдущей задачи определить, через сколько полных колебаний амплитуда уменьшится в сто раз.

Решение

За одно полное колебание амплитуда уменьшается в e^{-nT} раз. Если амплитуда уменьшится в 100 раз, то

$$A_m = A_1 e^{-NnT_1} = A_1 / 100.$$

Тогда

$$e^{-NnT_1} = 1 \cdot 10^{-2}. \qquad (1)$$

Прологарифмируем выражение (1) и получим

$$NnT_1 = \ln 100$$

или

$$N = \frac{\ln 100}{nT_1}, \qquad (2)$$

где

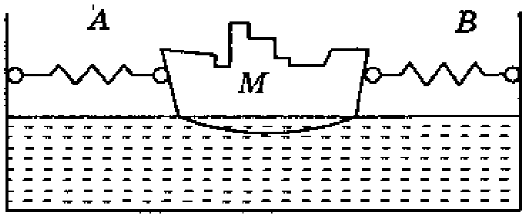
$$nT_1 = n\frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{10^2 - 1}} = 0{,}63.$$

Подставим это значение в формулу (2) и найдем

$$N = \frac{\ln 100}{0{,}63} \approx 7{,}5.$$

Ответ: через 7,5 полных колебаний.

Задача 32.62



Для определения сопротивления воды движению модели судна при очень малых скоростях модель M пустили плавать в сосуде, привязав нос и корму посредством двух одинаковых пружин A и B, силы натяжения которых пропорциональны удлинениям. Результаты наблюдений показали, что отклонения модели от положения равновесия после каждого размаха уменьшаются, составляя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен 0,9, а продолжительность каждого размаха $T = 0{,}5$ с. Определить силу R сопротивления воды, приходящуюся на каждый килограмм массы модели, при скорости ее, равной 1 м/с, предполагая, что сопротивление воды пропорционально первой степени скорости.

Решение

За один размах амплитуда уменьшается в 0,9 раза, т.е.

$$A_1 = A_0 e^{-nT} = 0{,}9 A_0.$$

Тогда

$$e^{-nT} = 0{,}9 = \left(\frac{10}{9}\right)^{-1}.$$

Прологарифмируем это выражение и получим

$$nT = \ln\frac{10}{9}$$

или

$$n = \frac{1}{T}\ln\frac{10}{9}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$R = \alpha v = 2nmv.$$

При $m = 1$ кг и $v = 1$ м/с с учетом выражения (1) получим

$$R = 2n = \frac{2}{T}\ln\frac{10}{9} = \frac{2}{0{,}5}\ln\frac{10}{9} = 0{,}42 \text{ (Н)}.$$

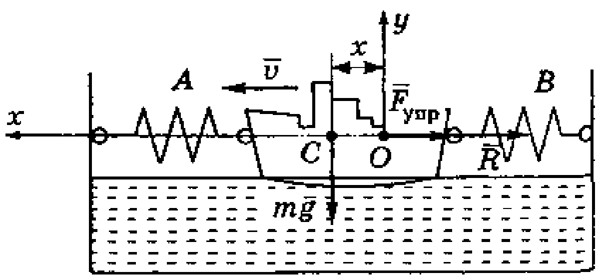
Ответ: $R = 0{,}42$ Н.

Задача 32.63

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения модели, если в начальный момент пружина A была растянута, а пружина B сжата на величину $\Delta l = 4$ см и модель была отпущена без начальной скорости.

Решение

Составим уравнение движения модели (см. рисунок) в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = F_{упр} - R,$$

где $F_{упр} = -cx$; $R = \alpha v$.

Тогда

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - cx$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний (1) при $k > n$ имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \tag{2}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Продифференцируем выражение (2) по времени и получим

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t). \quad (3)$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = \Delta l = 4$ см, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2) и (3) найдем: $C_1 = 4$, $C_2 = \dfrac{4n}{k_1}$.

В данном случае [см. решение задачи 32.62, формула (1)]

$$n = \frac{1}{T}\ln\frac{10}{9} = 0{,}21 \text{ (рад/с)}.$$

Тогда, так как $T_1 = 2T$,

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{2\cdot 0{,}5} = 6{,}28 \text{ (рад/с)},$$

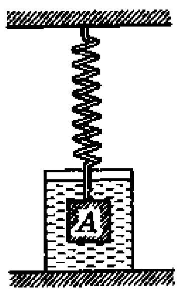
$$C_2 = \frac{4\cdot 0{,}21}{6{,}28} = 0{,}134 \text{ (см)}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (2) и запишем уравнение движения модели

$$x = e^{-0{,}21t}(4\cos 6{,}28t + 0{,}134\sin 6{,}28t).$$

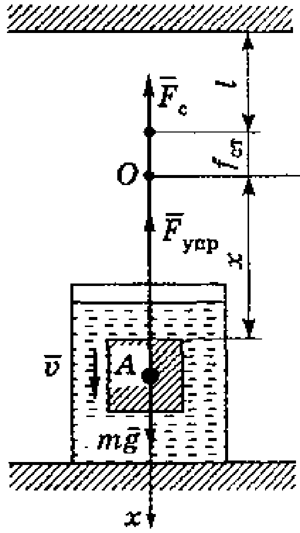
Ответ: $x = e^{-0{,}21t}(4\cos 6{,}28t + 0{,}134\sin 6{,}28t)$ см.

Задача 32.64



Для определения вязкости жидкости Кулон употреблял следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку A, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил продолжительность одного размаха: T_1 — в первом случае и T_2 — во втором. Сила трения между пластинкой и жидкостью может быть выражена формулой $2S\mu v$, где $2S$ — поверхность пластинки, v — ее скорость, μ — коэффициент вязкости. Пренебрегая трением между пластинкой и воздухом, определить коэффициент μ по найденным из опыта величинам T_1 и T_2, если масса пластинки равна m.

Решение



Пренебрегая выталкивающей силой, рассмотрим движение пластины в жидкости под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы упругости $\bar{F}_{упр}$ и силы сопротивления $\bar{F}_c$ (см. рисунок).

Запишем дифференциальное уравнение движения пластины в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - F_c$$

или

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{ст} + x) - \alpha v.$$

С учетом того, что $v = \dot{x}$, $f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$, получим

$$m\ddot{x} = mg - c\frac{mg}{c} - cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где n — коэффициент затухания, $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{2S\mu}{2m} = \dfrac{S\mu}{m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Уравнение (1) — это дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

Если пластина движется в воздухе, то $n = 0$ и уравнение (1) приобретает вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Из выражения для коэффициента затухания найдем коэффициент вязкости жидкости

$$\mu = \frac{mn}{S} = \frac{m}{S}\sqrt{k^2 - k_1^2},$$

где $n = \sqrt{k^2 - k_1^2}$.

Так как

$$k_1 = \frac{2\pi}{2T_2} = \frac{\pi}{T_2},$$

$$k=\frac{2\pi}{2T_1}=\frac{\pi}{T_1},$$

то

$$\mu=\frac{\pi m}{S}\sqrt{\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}}=\frac{\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}.$$

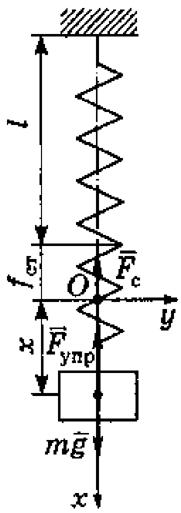
Ответ: $\mu=\dfrac{\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}$.

Задача 32.65

Тело массы 5 кг подвешено на пружине, коэффициент жесткости которой равен 2 кН/м. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз. Определить период и логарифмический декремент колебаний.

Решение

Выберем начало системы координат Oxy в положении статического равновесия. Покажем на рисунке силы, действующие на тело в произвольном положении: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, силу сопротивления $\bar{F}_с$ среды.



Запишем уравнение движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x}=mg-F_{упр}-F_с.$$

С учетом того, что $F_{упр}=c(f_{ст}+x)$, $f_{ст}=\dfrac{mg}{c}$, $F_с=\alpha\dot{x}$, уравнение примет вид

$$m\ddot{x}=mg-c\frac{mg}{c}-cx-\alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0, \qquad (1)$$

где $n=\dfrac{\alpha}{2m}$ — коэффициент затухания; $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ — частота свободных колебаний.

Найдем

$$k = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3}{5}} = 20 \text{ (рад/с)}.$$

Так как движение является затухающим и носит колебательный характер ($k > n$), то

$$A_9 = A_1 e^{-8\frac{nT}{2}},$$

где учтено, что четыре колебания соответствуют восьми размахам.

По условию задачи $A_9 = \dfrac{1}{12} A_1$, тогда

$$\frac{1}{12} A_1 = A_1 e^{-8\frac{nT}{2}}.$$

Прологарифмируем это выражение и получим

$$8\lambda = \ln 12,$$

где λ — логарифмический декремент колебаний.

Откуда

$$\lambda = \frac{nT}{2} = \frac{1}{8} \ln 12 = 0{,}3106.$$

С другой стороны, коэффициент затухания

$$n = \frac{2\lambda}{T}.$$

Тогда

$$k_1^2 = k^2 - n^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = k^2 - \frac{4\lambda^2}{T^2} \Rightarrow T = \frac{2}{k}\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{20}\sqrt{3{,}14^2 + 0{,}3106^2} = 0{,}316 \text{ (с)}.$$

Ответ: $T = 0{,}316$ с; $\lambda = nT/2 = 0{,}3106$.

Задача 32.66

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения тела, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Р е ш е н и е

Движение тела описывается дифференциальным уравнением, полученным при решении задачи 32.65:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0. \qquad (1)$$

Было также рассчитано, что $k=20$ рад/с, $n=\dfrac{2\lambda}{T}=\dfrac{2\cdot 0{,}3106}{0{,}316}=$ $=1{,}97$ (рад/с), т.е. $n<k$.

Решение уравнения (1) имеет вид

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t), \qquad (2)$$

где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{20^2-1{,}97^2}=19{,}9.$

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$\dot{x}=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+e^{-nt}(-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t). \qquad (3)$$

В соответствии с начальными условиями: $t=0$, $x_0=-f_{ст}$, $\dot{x}_0=0$, из формул (2) и (3) получим:

$$C_1=-\frac{mg}{c}=-\frac{5\cdot 980}{2000}=-2{,}45\ (\text{см});$$

$$0=-nC_1+C_2k_1,$$

тогда

$$C_2=\frac{nC_1}{k_1}=\frac{1{,}97(-2{,}45)}{19{,}9}=-0{,}242\ (\text{см}).$$

Подставим полученные значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (2) и запишем уравнение движения тела

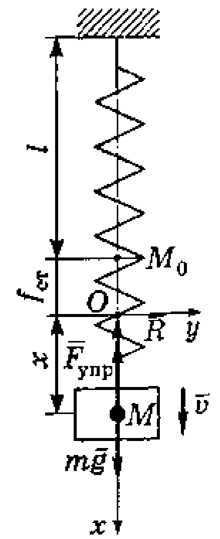
$$x=e^{-1{,}97t}(-2{,}45\cos 19{,}9t-0{,}242\sin 19{,}9t).$$

О т в е т: $x=e^{-1{,}97t}(-2{,}45\cos 19{,}9t-0{,}242\sin 19{,}9t)$ см.

Задача 32.67

Тело массы 6 кг, подвешенное на пружине, при отсутствии сопротивления колеблется с периодом $T = 0{,}4\pi$ с, а если действует сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, с периодом $T_1 = 0{,}5\pi$ с. Найти коэффициент пропорциональности α в выражении силы сопротивления $R = -\alpha v$ и определить движение тела, если в начальный момент пружина была растянута из положения равновесия на 4 см и тело представлено самому себе.

Решение



Запишем дифференциальное уравнение движения тела под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы упругости $F_{упр}$ пружины и силы сопротивления R (см. рисунок) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - R$$

или

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{ст} + x) - \alpha v,$$

где $f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$; $v = \dot{x}$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - mg - cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $n = \dfrac{2\alpha}{m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Уравнение (1) — это дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

Если $R = 0$, то коэффициент затухания $n = 0$ и тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) — дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

По условию задачи при отсутствии сопротивления

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4\pi,$$

откуда

$$k = \frac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5 \text{ (рад/с)},$$

при действии сопротивления

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 0{,}5\pi,$$

откуда

$$k_1 = \frac{2\pi}{0{,}5\pi} = 4 \text{ (рад/с)}.$$

С другой стороны,

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} \Rightarrow n = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (рад/с)}.$$

Зная величину n, найдем коэффициент α:

$$\alpha = 2mn = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36 \text{ (Н} \cdot \text{с/м)}.$$

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \tag{3}$$

$$\dot{x} = -Ane^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha) + Ak_1 e^{-nt} \cos(k_1 t + \alpha). \tag{4}$$

Для нахождения A и α используем начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 4$ см, $\dot{x}_0 = 0$. Из формул (3) и (4) с учетом начальных условий получим:

$$4 = A \sin\alpha, \tag{5}$$

$$\frac{4n}{k_1} = A \cos\alpha. \tag{6}$$

Возведем уравнения (5) и (6) в квадрат, затем просуммируем их и с учетом того, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

получим

$$A = 4\sqrt{1+\frac{n^2}{k_1^2}} = 4\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Разделим уравнение (5) на уравнение (6) и найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1}{n} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Подставим значение A и α в формулу (3) и запишем уравнение движения тела

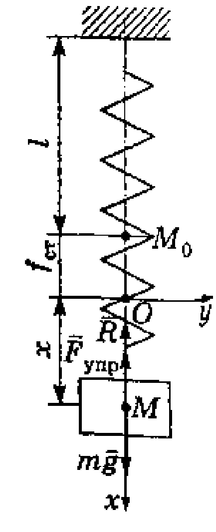
$$x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right).$$

О т в е т: $\alpha = 36$ Н · с/м; $x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$ см.

Задача 32.68

Тело массы 1,96 кг, подвешенное на пружине, которая силой 4,9 Н растягивается на 10 см, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 м/с равное 19,6 Н. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 см и тело пришло в движение без начальной скорости. Найти закон этого движения.

Р е ш е н и е



Составим дифференциальное уравнение движения тела под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы упругости $F_{упр}$ пружины и силы сопротивления R (см. рисунок) в проекции на ось x (начало координат — в положении равновесия):

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - R,$$

где $F_{упр}$ — сила упругости пружины, $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$; R — сила сопротивления, $R = \alpha\dot{x}$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{ст} + x) - \alpha\dot{x}.$$

Так как $f_{\text{ст}} = \dfrac{mg}{c}$, то

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $2n = \dfrac{\alpha}{m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

Рассчитаем параметры колебательной системы, описываемой дифференциальным уравнением (1):

$$F_{\text{упр}} = c\Delta l \Rightarrow c = \frac{F_{\text{упр}}}{\Delta l} = \frac{4{,}9}{0{,}1} = 49 \ (\text{Н/м});$$

$$R = \alpha v \Rightarrow \alpha = \frac{R}{v} = \frac{1{,}96}{1} = 19{,}6 \ (\text{Н/м});$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1{,}96}} = 5 \ (\text{рад/с});$$

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{19{,}6}{2 \cdot 1{,}96} = 5 \ (\text{рад/с}).$$

Так как $k = n$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$x = e^{-nt}(C_1 t + C_2), \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 t + C_2) + C_1 e^{-nt}. \qquad (3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 5$ см, $v_0 = 0$, подставив их в формулы (2) и (3):

$$5 = C_2,$$

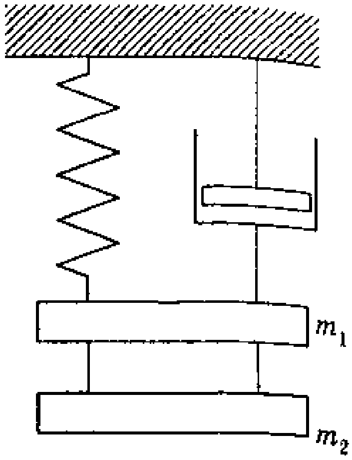
$$0 = -5C_2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 5C_2 = 25.$$

Значения C_1 и C_2 подставим в формулу (2) и в результате получим

$$x = 5e^{-5t}(5t + 1).$$

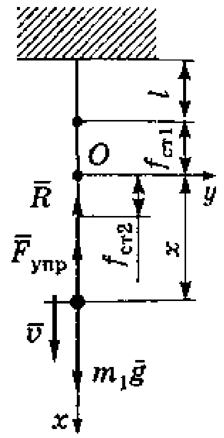
Ответ: $x = 5e^{-5t}(5t + 1)$ см.

Задача 32.69



Грузы массы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены в положении статического равновесия к пружине, коэффициент жесткости которой $c = 392$ Н/м. Масляный демпфер вызывает силу сопротивления, пропорциональную первой степени скорости и равную $R = -\alpha v$, где $\alpha = 98$ Н · с/м. Груз m_2 сняли. Найти после этого уравнение движения груза m_1.

Решение



Запишем дифференциальное уравнение движения оставшегося груза массой m_1 под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы упругости $F_{упр}$ и силы сопротивления R (см. рисунок) в проекции на ось x:

$$m_1\ddot{x} = m_1 g - F_{упр} - R,$$

где $F_{упр} = c(f_{ст1} + x)$, $f_{ст1} = \dfrac{m_1 g}{c}$; $R = \alpha v = \alpha\dot{x}$.

Тогда

$$m_1\ddot{x} = m_1 g - c\frac{m_1 g}{c} - cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m_1} = \dfrac{98}{2\cdot 2} = 24{,}5$ (рад/с); $k^2 = \dfrac{c}{m_1}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{392}{2}} = 14$ (рад/с).

Корни характеристического уравнения вида $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -24{,}5 \pm \sqrt{\frac{49^2}{4} - 14^2} = -24{,}5 \pm 3{,}5\sqrt{33}.$$

Откуда

$$\lambda_1 = -24{,}5 - 3{,}5\sqrt{33} = -4{,}4 \text{ (рад/с)},$$

$$\lambda_2 = -24{,}5 + 3{,}5\sqrt{33} = -44{,}6 \text{ (рад/с)}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (3)$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = f_{\text{ст}\,2} = \dfrac{m_2 g}{c} = \dfrac{3 \cdot 980}{392} = 7{,}5$ (см); $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2) и (3) найдем постоянные C_1 и C_2:

$$7{,}5 = C_1 + C_2,$$

откуда

$$C_1 = \frac{7{,}5\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{7{,}5 \cdot (-44{,}6)}{-44{,}6 - (-4{,}4)} = 8{,}32 \text{ (см)};$$

$$0 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{7{,}5\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{7{,}5 \cdot (-4{,}4)}{-44{,}6 - (-4{,}4)} = -0{,}82 \text{ (см)}.$$

Подставим значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (2) и в результате получим

$$x = 8{,}32 e^{-4{,}4t} - 0{,}82 e^{-44{,}6t}.$$

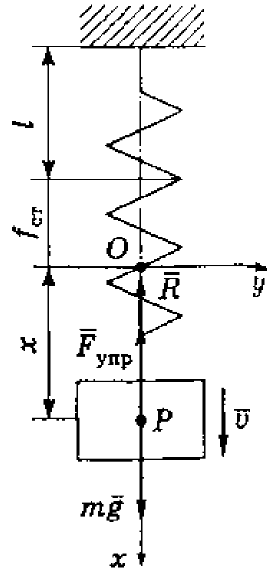
Ответ: $x = 8{,}32 e^{-4{,}4t} - 0{,}82 e^{-44{,}6t}$ см.

Задача 32.70

Статическое удлинение пружины под действием груза веса P равно f. На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости. Определить наименьшее значение коэффициента сопротивления α, при котором процесс движения будет апериодическим. Найти период затухающих колебаний, если коэффициент сопротивления меньше найденного значения.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения груза (см. задачу 32.69 и рисунок) в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - R,$$

где $F_{упр}$ — сила упругости пружины, $F_{упр} = c(f + x)$; R — сила сопротивления среды, $R = \alpha v$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - c(f + x) - \alpha v.$$

С учетом того, что $f = f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$, $v = \dot{x}$, уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Так как $c = \dfrac{mg}{f}$, то

$$k = \sqrt{\frac{mg}{mf}} = \sqrt{\frac{g}{f}}.$$

Наименьшее значение коэффициента сопротивления α, при котором процесс движения будет апериодическим, определим из равенства $k = n$ или

$$\sqrt{\frac{g}{f}} = \frac{\alpha}{2m}.$$

Откуда

$$\alpha = 2m\sqrt{\frac{g}{f}} = \frac{2P}{g\sqrt{\dfrac{f}{g}}} = \frac{2P}{\sqrt{gf}}.$$

При $\frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{g}{f}}$, т.е. при $\alpha < \frac{2P}{\sqrt{gf}}$, движение груза будет колебательным.

Тогда

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}},$$

а период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}.$$

Ответ: $\alpha = \frac{2P}{\sqrt{gf}}$. При $\alpha < \frac{2P}{\sqrt{gf}}$ движение будет колебательным с периодом $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$.

Задача 32.71

Груз массы 100 г, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c = 19{,}6$ Н/м. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R = \alpha v$, где $\alpha = 3{,}5$ Н · с/м.

Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения равновесия на $x_0 = 1$ см и отпущен без начальной скорости.

Решение

Начало системы координат Oxy выберем в положении статического равновесия груза, направим ось x в сторону смещения груза из этого положения (см. рисунок на с. 434).

Запишем дифференциальное уравнение движения груза (см. задачу 32.69) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} - R,$$

где $F_{\text{упр}} = c(f_{\text{ст}} + x)$, $f_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}$; $R = \alpha v = \alpha\dot{x}$.

Тогда

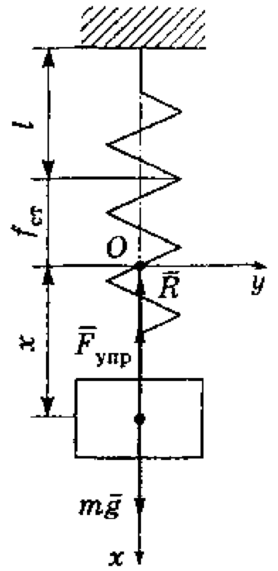
$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x}$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{3{,}5}{2\cdot 0{,}1} = 17{,}5$ (рад/с); $k^2 = \dfrac{c}{m}$,

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (рад/с).



Так как $n > k$, то движение носит апериодический характер и решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (3)$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$,

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 14^2} = -17{,}5 \pm 10{,}5.$$

Откуда

$$\lambda_1 = -17{,}5 + 10{,}5 = -7 \text{ (рад/с)};$$

$$\lambda_2 = -17{,}5 - 10{,}5 = -28 \text{ (рад/с)}.$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 1$ см, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2) и (3) определим постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1\cdot(-28)}{-28-(-7)} = 1{,}33 \text{ (см)},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1\cdot(-7)}{-28-(-7)} = -0{,}33 \text{ (см)}.$$

Подставим значения постоянных C_1 и C_2 в формулу (2) и запишем уравнение движения груза

$$x = 1{,}33e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}.$$

Ответ: $x = 1{,}33e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}$ см.

Задача 32.72

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени, если в начальный момент груз смещен из положения статического равновесия на расстояние $x_0 = 1$ см и ему сообщена начальная скорость 50 см/с в направлении, противоположном смещению.

Решение

Согласно решению задачи 32.71 дифференциальное уравнение движения груза

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

имеет решение вида

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2)$$

где $\lambda_1 = -7$ рад/с; $\lambda_2 = -28$ рад/с.

Подставим начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 1$ см, $\dot{x}_0 = -50$ см/с, в формулы (1) и (2) и получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -50 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2. \end{cases}$$

Откуда найдем значения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1 \cdot \lambda_2 + 50}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1 \cdot (-28) + 50}{-28 - (-7)} = -1 \text{ (см)},$$

$$C_2 = -\frac{1 \cdot \lambda_1 + 50}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1 \cdot (-7) + 50}{-28 - (-7)} = 2 \text{ (см)}.$$

Подставим эти значения в формулу (1) и запишем уравнение движения груза

$$x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}. \qquad (3)$$

Для построения графика зависимости перемещения x от времени t вычислим значения функции (3) в характерных точках:

1) $t_0 = 0$, $x = 1$ см;

2) $x = 0 \Rightarrow e^{-21t} = 0{,}5 \Rightarrow e^{-21t} = 2^{-1} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\ln 2}{21} = 0{,}033$ (с);

3) точка минимума

$$\dot{x} = 7e^{-7t} - 56e^{-28t} = 0 \Rightarrow e^{-21t} = 2^{-3} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{7} = 0{,}099 \text{ (c)},$$

так как

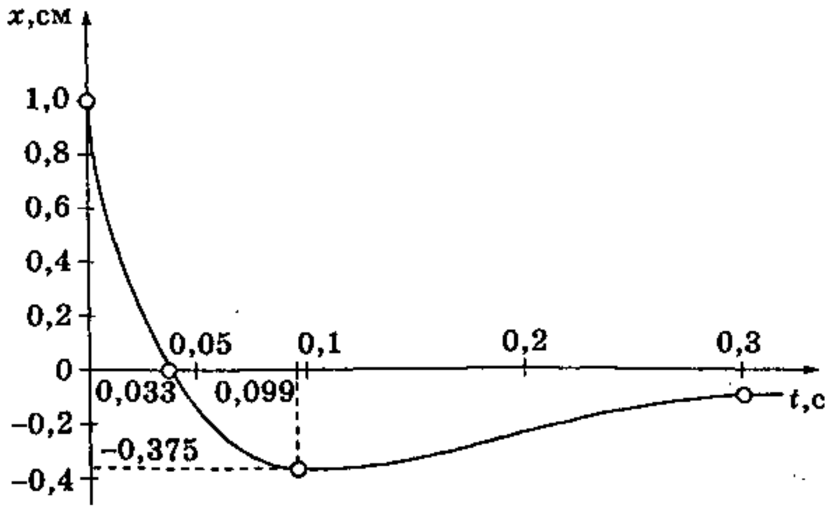
$$\ddot{x}\big|_{t=t_2} = -49e^{-7t_2} + 56\cdot 28e^{-28t_2} = -49e^{-\ln 2} + 1568e^{-4\ln 2} = -\frac{49}{2} + \frac{1568}{16} = 73{,}5 > 0,$$

то

$$x_{\min} = x\big|_{t=t_2} = -e^{-\ln 2} + 2e^{-4\ln 2} = -\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{16} = -0{,}375 \text{ (см)}.$$

При возрастании t перемещение x стремится к нулю [график функции (3) см. в ответе].

Ответ: $x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}$ см.



Задача 32.73

В условиях задачи 32.71 в начальный момент груз смещен из положения равновесия на расстояние $x_0 = 5$ см и ему сообщена скорость $v_0 = 100$ см/с в том же направлении. Найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения груза, полученное в задаче 32.71:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0.$$

Его решение имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{1}$$

$$\dot{x} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2}$$

где $\lambda_1 = -7$ рад/с; $\lambda_2 = -28$ рад/с.

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 5$ см, $\dot{x}_0 = 100$ см/с, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 100 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2. \end{cases}$$

Откуда найдем значения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{5\lambda_2 - 100}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{5(-28) - 100}{-28 - (-7)} = 11{,}4 \text{ (см)},$$

$$C_2 = \frac{5\lambda_1 - 100}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{5(-7) - 100}{-7 - (-28)} = -6{,}4 \text{ (см)}.$$

Подставим эти значения в формулу (2) и в результате получим

$$x = 11{,}4 e^{-7t} - 6{,}4 e^{-28t}. \tag{3}$$

Для построения графика зависимости перемещения x от времени t вычислим значения функции в характерных точках:

$$t_0 = 0, \; x = 11{,}4 - 6{,}4 = 5 \text{ (см)}.$$

Найдем экстремальные точки:

$$\dot{x} = -11{,}4 \cdot 7e^{-7t} + 6{,}4 \cdot 28e^{-28t} = 0,$$

откуда

$$e^{-21t} = \frac{11{,}4}{4 \cdot 6{,}4} = \left(\frac{128}{57}\right)^{-1},$$

$$t = t_1 = \frac{1}{21} \ln\frac{128}{57} = 0{,}0385 \text{ (с)},$$

$$\ddot{x}\big|_{t=t_1} = 11{,}4 \cdot 7^2 e^{-7t_1} - 6{,}4 \cdot 28^2 e^{-28t_1} = \frac{11{,}4 \cdot 49}{4} \sqrt[3]{28{,}5} - \frac{6{,}4 \cdot 784}{4 \cdot 128} \sqrt[3]{28{,}5} < 0.$$

Следовательно, в точке $t = t_1$ имеется максимум

$$x_1 = \frac{11{,}4}{4}\sqrt[3]{28{,}5} - \frac{6{,}4\cdot 57}{4\cdot 128}\sqrt[3]{28{,}5} = \left(\frac{11{,}4}{4} - \frac{6{,}4\cdot 784}{4\cdot 128}\right)\cdot 3{,}055 = 6{,}53 \text{ (см)};$$

$$\ddot{x} = 11{,}4\cdot 7^2 e^{-7t} - 6{,}4\cdot 28^2 e^{-28t} = 0,$$

откуда

$$e^{-21t} = \frac{11{,}4}{6{,}4\cdot 16} = \left(\frac{512}{57}\right)^{-1},$$

$$t = t_2 = \frac{1}{21}\ln\frac{512}{57} = 0{,}1$$

— точка перегиба, в которой

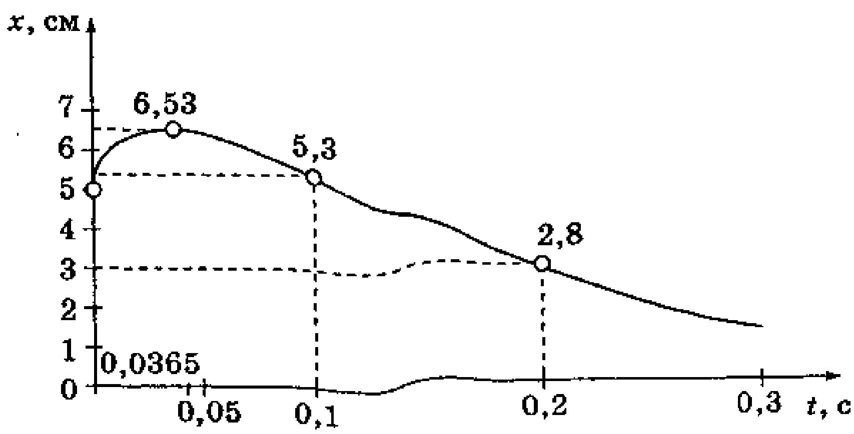
$$x_2 = 11{,}4e^{-0{,}7} - 6{,}4e^{-2{,}8} = 5{,}3 \text{ (см)}.$$

При $t = t_3 = 0{,}2$

$$x_3 = 11{,}4e^{-1{,}4} - 6{,}4e^{-5{,}6} \approx 2{,}8 \text{ (см)}.$$

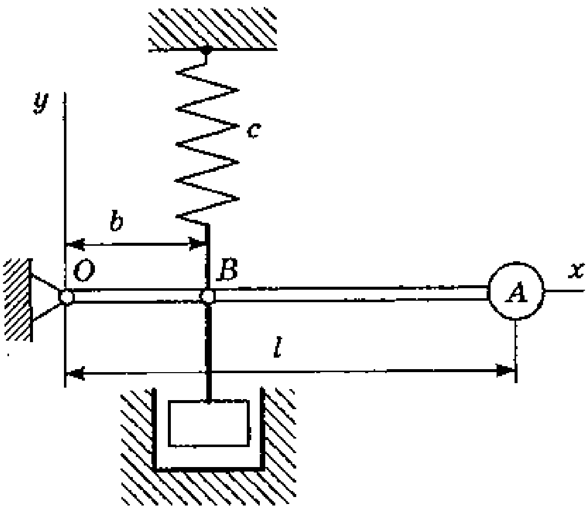
При возрастании t функция $x(t)$ стремится к нулю [график функции (3) см. в ответе].

О т в е т: $x = 11{,}4e^{-7t} - 6{,}4e^{-28t}$ см.



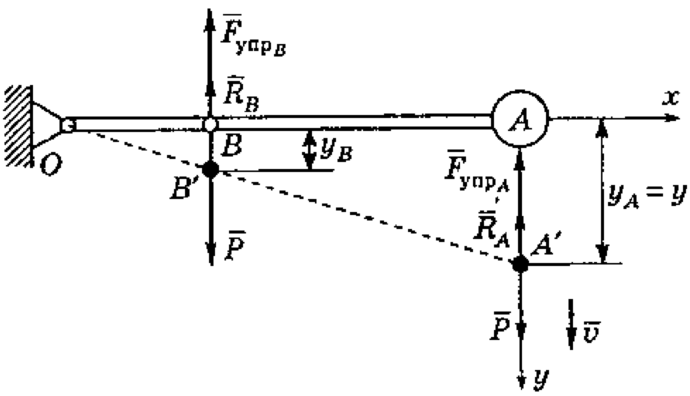
Задача 32.74

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тяжелой точки A, находящейся на конце стержня, закрепленного шарнирно в точке O, считая силу сопротивления среды пропорциональной первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности α, и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, длина стержня l, расстояние $OB = b$. Массой стержня пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?



Решение

Заменим пружину и силу сопротивления демпфера в точке B на эквивалентные им пружину и силу сопротивления демпфера, расположенные в точке A (см. рисунок). При этом



$$F_{\text{упр}_B} b = F_{\text{упр}_A} l \Rightarrow c y_B b = c_{\text{экв}} y_A l.$$

Откуда

$$c_{\text{экв}} = c\,\frac{y_B}{y_A}\frac{b}{l} = c\,\frac{b^2}{l^2},$$

так как $\dfrac{y_B}{y_A} = \dfrac{b}{l}$.

Аналогично

$$R_B b = R_A l \Rightarrow \alpha v_B b = \alpha_{\text{экв}} v_A l.$$

Откуда

$$\alpha_{\text{экв}} = \alpha \frac{b}{l}\frac{v_B}{v_A} = \alpha \frac{b^2}{l^2},$$

так как $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{b}{l}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки A в проекции на ось y (см. рисунок):

$$m\ddot{y} = P - F_{\text{упр}\,A} - R_A,$$

где $F_{\text{упр}A}$ — сила упругости, приведенная к точке A ($F_{\text{упр}A} = c_{\text{экв}}(f_{\text{ст}} + y)$); R_A — сила сопротивления, приведенная к точке A ($R = \alpha_{\text{экв}}\dot{y}$)

или

$$m\ddot{y} = P - c_{\text{экв}}(f_{\text{ст}} + y) - \alpha_{\text{экв}}\dot{y}.$$

С учетом того, что $c_{\text{экв}}f_{\text{ст}} = P = mg$, получим

$$\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y} + c\frac{b^2}{l^2}y = 0 \qquad (1)$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{cb^2 g}{Pl^2}$; $n = \dfrac{ab^2 g}{2Pl^2}$.

Вычислим частоту k_1 затухающих колебаний

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{cb^2 g}{Pl^2} - \frac{\alpha^2 b^4 g^2}{4P^2 l^4}} = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha b g}{2Pl}\right)^2}.$$

Движение будет апериодическим, если $n \geq k$, т.е.

$$\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2} \geq \sqrt{\frac{cb^2 g}{Pl^2}}$$

или

$$\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2} \geq \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Откуда

$$\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

Ответ: $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y}+c\frac{b^2}{l^2}y=0$; $k_1=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}-\left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}$ рад/с; $\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

Задача 32.75

При колебаниях груза массы 20 кг, подвешенного на пружине, было замечено, что наибольшее отклонение после 10 полных колебаний уменьшилось вдвое. Груз совершил 10 полных колебаний за 9 с. Как велик коэффициент сопротивления α (при сопротивлении среды, пропорциональном первой степени скорости) и каково значение коэффициента жесткости c?

Решение

Одно полное колебание состоит из двух размахов, максимальные отклонения за один размах уменьшаются в геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $e^{-\frac{n\tau_1}{2}}$, следовательно, за полное колебание амплитуда уменьшится в $e^{-n\tau_1}$ раз, тогда

$$A_{11}=A_1e^{-10n\tau_1}.$$

В соотвтествии с условием задачи

$$A_{11}=\frac{A_1}{2}.$$

Откуда

$$e^{-10n\tau_1}=2^{-1},$$

$$n\tau_1=\frac{\ln 2}{10}.$$

Так как $\tau_1=\frac{9}{10}$, то $n=\frac{\ln 2}{9}$.

Поскольку коэффициент затухания $n=\frac{\alpha}{2m}$, то коэффициент сопротивления

$$\alpha=2mn=2\cdot 20\cdot\frac{\ln 2}{9}=3{,}08\ (\text{Н}\cdot\text{с/м}).$$

Определим коэффициент жесткости. Частоту k_1 затухающих колебаний

$$k_1^2 = k^2 - n^2.$$

Откуда

$$k^2 = k_1^2 + n^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\ln 2}{10\tau_1}\right)^2 = \frac{1}{\tau_1^2}\left[(2\pi)^2 + (0{,}1\ln 2)^2\right] =$$

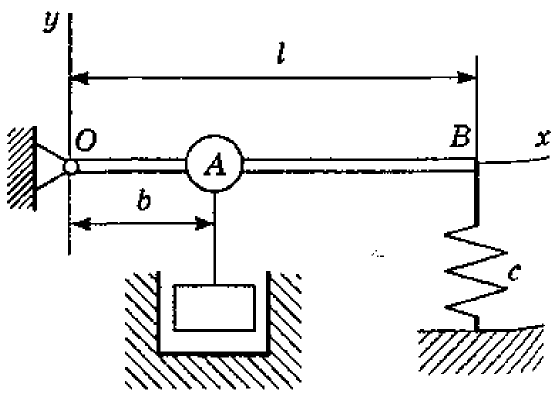
$$= \frac{100}{81}(6{,}28^2 + 0{,}069^2) = 48{,}74.$$

Так как $k^2 = \dfrac{c}{m}$, то

$$c = k^2 m = 48{,}74 \cdot 20 = 974{,}8 \text{ (Н/м)}.$$

Ответ: $\alpha = 3{,}08$ Н · с/м; $c = 974{,}8$ Н/м.

Задача 32.76



Составить дифференциальное уравнение малых колебаний точки A и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, расстояние $OA = b$, $OB = l$. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, коэффициент пропорциональности равен α. Массой стержня OB, шарнирно закрепленного в точке O, пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?

Решение

Перенесем пружину из точки B в точку A (рис. 1), используя соотношение

$$F_{\text{упр}B}\, l = F_{\text{упр}A}\, b$$

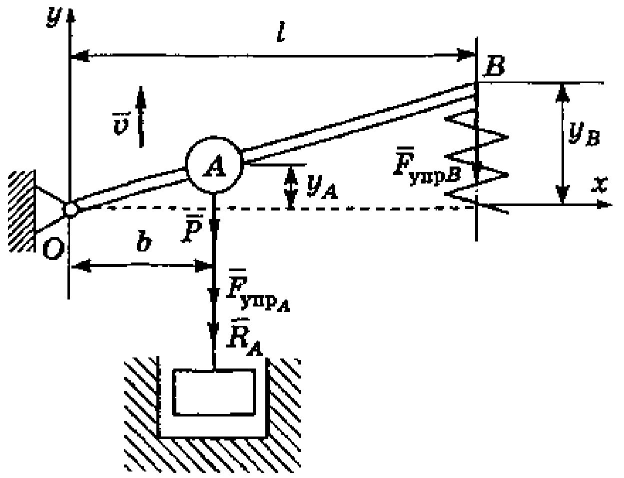


Рис. 1

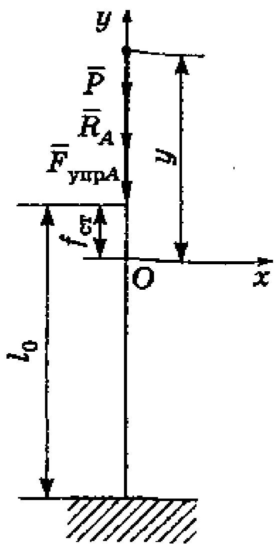


Рис. 2

или

$$cy_B l = c_{экв} y_A b.$$

Учитывая, что $\frac{y_B}{y_A} = \frac{l}{b}$, получим

$$c_{экв} = c\frac{l^2}{b^2}.$$

Запишем дифференциальное уравнение движения точки A в проекции на ось y (рис. 2):

$$m\ddot{y} = -P - F_{упр_A} - R_A,$$

где $F_{упр A} = c = y - f_{ст}$, $R_A = \alpha\dot{y}$

или

$$m\ddot{y} = -P - c_{экв}(y - f_{ст}) - \alpha\dot{y},$$

где $f_{ст} = \frac{mg}{c}$.

После подстановки и преобразований получим дифференциальное уравнение колебаний точки A:

$$\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\dot{y} + c\frac{l^2}{b^2}y = 0$$

или

$$\ddot{y}+2n\dot{y}+k^2y=0, \qquad (1)$$

где $n=\dfrac{\alpha}{2m}=\dfrac{\alpha g}{2P}$; $k^2=c\dfrac{l^2g}{b^2P}$.

Частота затухающих колебаний

$$k_1=\sqrt{k^2-n^2}=\sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2}-\frac{\alpha^2g^2}{4P^2}}.$$

Движение будет апериодическим, если $n\geq k$, т.е. когда

$$\frac{\alpha g}{2P}\geq\sqrt{\frac{cl^2g}{b^2P}}$$

или

$$\frac{\alpha g}{2P}\geq\frac{l}{b}\sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

Откуда

$$\alpha\geq\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

Ответ: $\dfrac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\dfrac{cl^2}{b^2}y=0$; $k_1=\sqrt{\dfrac{cl^2g}{Pb^2}-\dfrac{\alpha^2g^2}{4P^2}}$ рад/с; $\alpha\geq\dfrac{2l}{b}\sqrt{\dfrac{cP}{g}}$.

Задача 32.77

Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жесткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний.

Решение

Определим частоту k свободных гармонических колебаний:

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{20}{5}=4,$$

откуда

$$k = \sqrt{4} = 2 \text{ (рад/с)}.$$

Рассчитаем частоту k_1 затухающих колебаний:

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{10} = 0{,}628 \text{ (рад/с)}.$$

Найдем коэффициент затухания:

$$n = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{2^2 - 0{,}628^2} = 1{,}9 \text{ (рад/с)}.$$

Так как $k > n$, то движение будет колебательным и затухающим. Определим постоянную демпфирования:

$$\alpha = 2mn = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}9 = 19 \text{ (Н} \cdot \text{с/м)}.$$

Рассчитаем логарифмический декремент

$$\lambda = \frac{nT}{2} = \frac{1{,}9 \cdot 10}{2} = 9{,}5$$

и период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2} = 3{,}14 \text{ (с)}.$$

Ответ: $\alpha = 19$ Н · с/м; $\lambda = \dfrac{nT}{2} = 9{,}5$; $T = 3{,}14$ с.

Вынужденные колебания

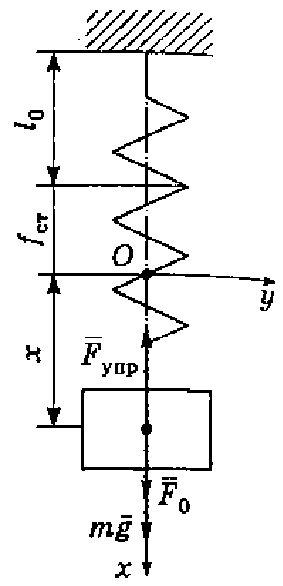
Задачи и решения

Задача 32.78

Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и постоянной силы F_0. В начальный момент $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Найти также период колебаний.

Решение

На материальную точку действует восстанавливающая сила, подчиняющаяся закону Гука, значит, эта механическая система содержит упругий элемент (пружину), а движение точки носит колебательный характер. Покажем на рисунке силы, действующие на точку массой m: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, силу $\bar{F}_0$. Начало системы координат Oxy выбрано в положении статического равновесия.



Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + F_0,$$

где $F_{упр} = cf_{ст} + Q$, $f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$.

Тогда уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} = mg - c\frac{mg}{c} - cx + F_0$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{F_0}{m}, \tag{1}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ — частота гармонических колебаний.

Решение дифференциального уравнения (1) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ — решение однородного уравнения; $x^* = A$ — частное решение.

После подстановки x^* в уравнение (1) получим

$$Ak^2 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{mk^2}.$$

В результате решение уравнения (1) приобретет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0}{mk^2}, \tag{2}$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{3}$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2), (3) определим постоянные C_1 и C_2: $C_1 = -\dfrac{F_0}{mk^2}$; $C_2 = 0$.

Подставим значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в формулу (2) и так как $mk^2 = c$, получим уравнение движения точки

$$x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt).$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Ответ: $x = \dfrac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

Задача 32.79

Определить уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и силы $F = \alpha t$. В начальный момент времени точка находится в положении статического равновесия и скорость ее равна нулю.

Решение

Используя схему решения задачи 32.78, с учетом того, что $F_0 = \alpha t$, получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для этого случая:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{\alpha t}{m}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде суммы однородного $\bar{x}$ и частного x^* решений, т.е.

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$; $x^* = At$.

Подставим x^* в уравнение (1):

$$Ak^2 = \frac{\alpha}{m}$$

и найдем

$$A = \frac{\alpha}{mk^2}.$$

Тогда

$$x^* = \frac{\alpha t}{mk^2}$$

и решение дифференциального уравнения (1) примет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\alpha t}{mk^2}, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{\alpha}{mk^2}. \qquad (3)$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2), (3) определим постоянные C_1 и C_2: $C_1 = 0$; $C_2 = -\frac{\alpha}{mk^3}$.

Подставим эти значения в формулу (2) и окончательно запишем

$$x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt),$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Ответ: $x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt)$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Задача 32.80

Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, на которую действует восстанавливающая сила $Q = -cx$ и сила $F = F_0 e^{-\alpha t}$, если в начальный момент точка находилась в положении равновесия в состоянии покоя.

Решение

Используем схему решения задачи 32.78, с учетом того, что вместо F_0 приложена сила $F = F_0 e^{-\alpha t}$. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний для этого случая имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}, \qquad (1)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Решение дифференциального уравнения (1) ищем в виде суммы однородного $\bar{x}$ и частного x^* решений, т.е.

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$.

Частное решение зависит от вида правой части уравнения (1), т.е. $x^* = Ae^{-\alpha t}$. После подстановки x^* в уравнение (1) найдем

$$A\alpha^2 e^{-\alpha t} + Ak^2 e^{-\alpha t} = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \Rightarrow A = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}.$$

Тогда

$$x^* = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} e^{-\alpha t}$$

и решение уравнения (1) примет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} e^{-\alpha t}, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{\alpha F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} e^{-\alpha t}. \qquad (3)$$

Используя начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (2), (3) определим постоянные C_1 и C_2:

$$C_1 = -\frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)};$$

$$C_2 = \frac{\alpha F_0}{m(k^2 + \alpha^2)k}.$$

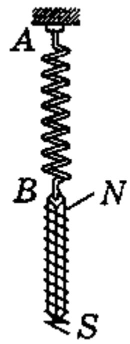
Подставим эти значения в формулу (2) и запишем уравнение движения

$$x = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt \right).$$

О т в е т: $x = \dfrac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)} \left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \dfrac{\alpha}{k} \sin kt \right)$, где $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Задача 32.81

На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 19{,}6$ Н/м, подвешен магнитный стержень массы 100 г. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20\sin 8\pi t$ А. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 0{,}016\pi i$ Н. Определить вынужденные колебания магнита.



Решение

Принимая стержень за материальную точку, покажем на рисунке действующие на него силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу взаимодействия $\bar{F}$ магнита с катушкой, восстанавливающую $\bar{F}_{упр}$ силу.

Запишем уравнение движения стержня в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + F, \tag{1}$$

где $F_{упр} = c(f_{ст} + x)$.

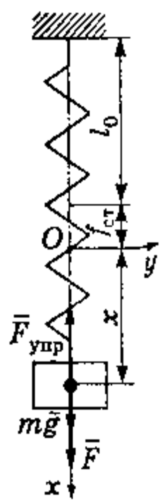
Так как $f_{ст} = \dfrac{mg}{c}$, то

$$F_{упр} = mg + cx.$$

С учетом условия определим силу взаимодействия магнита с катушкой

$$F = 0{,}016\pi i = 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t = 0{,}32\pi \sin 8\pi t = \sin 8\pi t.$$

Подставим значения $F_{упр}$ и F в уравнение (1) и получим



$$m\ddot{x} = mg - mg - cx + \sin 8\pi t$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \tag{2}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (рад/с); $h = \dfrac{1}{m} = 10$ м/с^2, $p = 8\pi$.

Уравнение (2) — это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета сопротивления.

Частное решение уравнения (2) определяется видом его правой части:

$$x = x^* = A\sin pt.$$

Возьмем вторую производную от x^*:

$$\ddot{x}^* = -Ap^2 \sin pt$$

и подставим выражения $\ddot{x}^*$ и x^* в уравнение (2).

После подстановки получим

$$-Ap^2 \sin pt + k^2 A\sin pt = h\sin pt.$$

Откуда

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{1000}{14^2 - 64\cdot 3{,}14^2} = -2{,}3 \text{ (см)}.$$

Тогда

$$x = -2{,}3\sin 8\pi t.$$

Ответ: $x = -2{,}3\sin 8\pi t$ см.

Задача 32.82

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения магнитного стержня, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Решение

Запишем общее решение неоднородного дифференциального уравнения колебаний, полученного в решении задачи 32.81 [см. формулу (1)], в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (рад/с) — собственная частота колебаний магнитного стержня; $x^* = -2{,}3\sin 8\pi t$ — частное решение, найденное в решении задачи 32.81.

Тогда

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - 2{,}3 \sin 8\pi t. \qquad (1)$$

Проинтегрируем выражение (1) по времени:

$$\dot{x} = (-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)k - 2{,}3 \cdot 8\pi \cos 8\pi t. \qquad (2)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся начальными условия: $t = 0$, $x_0 = -f_{ст} = -\dfrac{mg}{c} = -\dfrac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{19{,}6} = -5$ см, $\dot{x}_0 = 0$. Из формул (1) и (2) найдем: $C_1 = -5$ см; $C_2 = \dfrac{2{,}3 \cdot 8\pi}{14} = 4{,}13$ (см).

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и запишем уравнение движения магнитного стержня

$$x = -5\cos 14t + 4{,}13 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t.$$

Ответ: $x = -5\cos 14t + 4{,}13 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t$ см.

Задача 32.83

В условиях задачи 32.81 найти уравнение движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ см/с.

Решение

Решение этой задачи аналогично решению задачи 32.82, отличаются только начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 5$ см/с.

Запишем уравнение движения магнитного стержня, полученное в решении задачи 32.82:

$$x = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t, \qquad (1)$$

$$\dot{x} = 14(-C_1 \sin 14t + C_2 \cos 14t) - 2{,}3 \cdot 8\pi \cos 8\pi t. \qquad (2)$$

Подставим начальные условия в формулы (1) и (2) и найдем: $C_1 = 0$; $C_2 = \dfrac{5 + 2{,}3 \cdot 8\pi}{14} = 4{,}486$ (см).

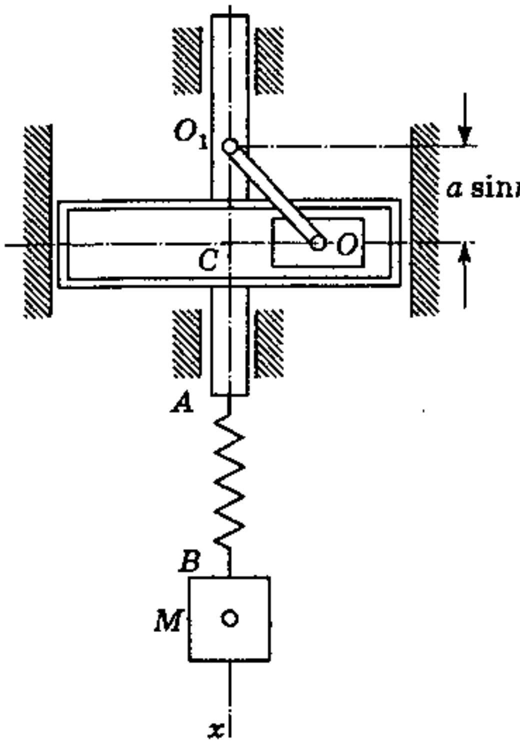
Запишем уравнение (1) движения магнитного стержня с учетом найденных значений постоянных C_1 и C_2:

$$x = 4{,}486 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t.$$

Ответ: $x = 4{,}486 \sin 14t - 2{,}3 \sin 8\pi t$ см.

Задача 32.84

Гиря M подвешена на пружине AB, верхний конец которой совершает гармонические колебания по вертикальной прямой амплитуды a и частоты n: $O_1C = a\sin nt$ см. Определить вынужденные колебания гири M при следующих данных: масса гири равна 400 г, от действия силы 39,2 Н пружина удлиняется на 1 м, $a = 2$ см, $n = 7$ рад/с.



Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки M в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр},$$

где mg — сила тяжести; $F_{упр}$ — восстанавливающая сила, $F_{упр} = c(f_{ст} + x - a\sin nt)$, $f_{ст} + x - a\sin nt$ — деформация пружины.

Тогда после преобразований

$$m\ddot{x} + cx = ca\sin nt$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin pt, \tag{1}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{39{,}2}{0{,}4} = 98$; $h = \dfrac{ca}{m} = \dfrac{39{,}2 \cdot 0{,}02}{0{,}4} = 196$ (см); $p = n$.

Уравнение (1) — это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета сопротивления. Частное решение этого уравнения определяется видом его правой части, т.е.

$$x = x^* = An^2\sin nt,$$

$$\ddot{x}^* = -An^2\sin nt.$$

Подставим выражения $\ddot{x}^*$ и x^* в уравнение (1) и найдем

$$A = \frac{h}{k^2 - n^2}.$$

Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$x = \frac{h\sin nt}{k^2 - n^2}$$

или после подстановки значений h, k и n

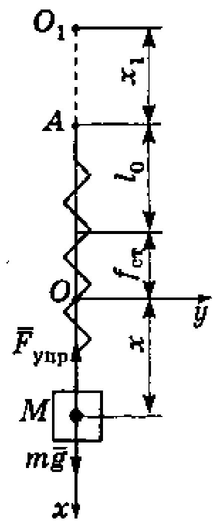
$$x = 4\sin 7t.$$

Ответ: $x = 4\sin 7t$ см.

Задача 32.85

Определить движение гири M (см. задачу 32.84), подвешенной на пружине AB, верхний конец которой A совершает гармонические колебания по вертикали амплитуды a и круговой частоты k, статическое растяжение пружины под действием веса гири равно δ. В начальный момент точка A занимает свое среднее положение, а гиря M находится в покое; начальное положение гири принять за начало координат, а ось Ox направить по вертикали вниз.

Решение



Запишем дифференциальное уравнение движения гири M (см. рисунок) в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр},$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст} - x_1)$, $x_1 = a\sin kt$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{ст} + cx_1$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin kt, \qquad (1)$$

где ω — собственная частота колебаний, $\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{\delta}$, c — жесткость пружины, $c = \frac{mg}{\delta}$, δ — статическое растяжение пружины; $h = \frac{ac}{m}$; k — частота возмущающей силы.

Уравнение (1) — дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета сопротивления среды.

Общее решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + \frac{h}{\frac{g}{\delta} - k^2} \sin kt, \tag{2}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}\left(-C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t\right) + \frac{hk}{\frac{g}{\delta} - k^2} \cos kt. \tag{3}$$

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = -\frac{hk}{\sqrt{\frac{g}{\delta}}\left(\frac{g}{\delta} - k^2\right)} = -\frac{agk\sqrt{\delta}}{\sqrt{g}(g - \delta k^2)},$$

где $h = \dfrac{ac}{m} = \dfrac{ag}{\delta}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (2) и запишем уравнение движения гири

$$x = \frac{ag}{\delta k^2 - g}\left[-\sin kt + k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t\right],$$

где $k \neq \sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$.

При резонансе, т.е. при $k = \sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$, решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \frac{ht}{2k} \cos kt, \tag{4}$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{g}{\delta}}\left(-C_1 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t\right) + \frac{h}{2k} \cos kt + \frac{ht}{2} \sin kt. \tag{5}$$

Найдем значения постоянных интегрирования из формул (4) и (5) исходя из начальных условий: $C_1 = 0$; $C_2 = \sqrt{\dfrac{\delta}{g}} \dfrac{ag}{2\delta\sqrt{\dfrac{g}{\delta}}} = \dfrac{a}{2}$.

Подставим эти значения C_1 и C_2 в формулу (4) и запишем уравнение колебаний при резонансе:

$$x = \frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\cos kt\right],$$

где $k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$.

Ответ: $x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sin kt\right]$ при $k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}}$; ;

$$x = \frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t\cos kt\right] \text{ при } k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Задача 32.86

Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\Delta l_{ст} = 5$ см. Определить критическую скорость движения вагона, при которой начинается «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания вагона на рессорах; длина рельсов $L = 12$ м.

Решение

«Галопирование» вагона возникает при резонансе, т.е. когда время прохождения одного рельса равно периоду колебаний

$$\frac{L}{v} = \frac{2\pi}{k},$$

где L — длина рельсов; v — скорость вагона.

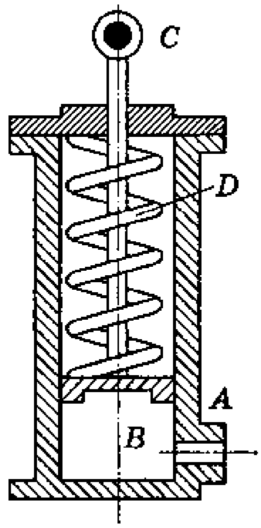
Определим критическую скорость

$$v = \frac{Lk}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l_{ст}}} = \frac{12}{6{,}28}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}05}} = 26{,}75 \text{ (м/с)} = 96 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: $v = 96$ км/ч.

Задача 32.87

Индикатор машины состоит из цилиндра A, в котором ходит поршень B, упирающийся в пружину D; с поршнем соединен стержень BC, к которому прикреплен пишущий штифт C. Предполагая, что давление пара, выраженное в паскалях, изменяется согласно формуле $p = 10^5\left(4 + 3\sin\dfrac{2\pi t}{T}\right)$, где T — время одного оборота вала, определить амплитуду вынужденных колебаний штифта C, если вал совершает 180 об/мин, при следующих данных: площадь поршня индикатора $\sigma = 4$ см^2, масса подвижной части индикатора 1 кг, пружина сжимается на 1 см силой 29,4 Н.



Решение

По условию задачи возмущающая сила

$$Q = p\sigma = 10^5\left(4 + 3\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sigma.$$

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin\omega t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$a = \frac{h}{k^2 - \omega^2},$$

где $h = \dfrac{H}{m}$, $\quad H = 3\cdot 10^5\,\sigma$, $\quad \sigma = 4\cdot 10^{-4}$ м^2, $\quad h = \dfrac{3\cdot 10^5\cdot 4\cdot 10^{-4}}{1} = 120$ (м/с^2);

$k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{2940}{1} = 2940$; $\quad \omega = \dfrac{180\pi}{30} = 6\pi.$

Тогда

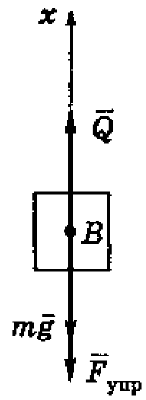
$$a = \frac{120}{2940 - 36\cdot 3{,}14^2} = 0{,}0464 \text{ (м)}.$$

Ответ: $a = 4{,}64$ см.

Задача 32.88

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения штифта C, если в начальный момент система находилась в покое в положении статического равновесия.

Решение



Приняв поршень B за материальную точку, рассмотрим его движение (см. рисунок) под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины и возмущающей силы $\bar{Q}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения поршня в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -mg - F_{упр} + Q, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $Q = p\sigma = 10^5\left(4 + 3\sin\dfrac{2\pi t}{T}\right)\sigma$.

Тогда

$$m\ddot{x} = -mg - cx - cf_{ст} + 4\cdot 10^5\sigma + 3\cdot 10^5\sigma\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

В начальный момент времени $Q_0 = 4\cdot 10^5\sigma$, а в положении статического равновесия

$$-mg - cf_{ст} + Q_0 = 0.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} + cx = 3\cdot 10^5\sigma\sin\frac{2\pi t}{T}$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = h\sin\omega t, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = 2940$, $k = 54{,}22$ рад/с; $h = \dfrac{3\cdot 10^5\sigma}{m} = 120$ м/с^2; $\omega = 6\pi$.

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + a\sin\omega t,$$

где $a = 4{,}64$ см (см. решение задачи 32.87).

Тогда

$$x = C_1 \cos 54{,}22t + C_2 \sin 54{,}22t + 4{,}64 \sin 6\pi t, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = 54{,}22(-C_1 \sin 54{,}22t + C_2 \cos 54{,}22t) + 4{,}64 \cdot 6\pi \cos 6\pi t. \qquad (4)$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (3) и (4) найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 0$, $C_2 = -1{,}61$ (см).

Подставим эти значения в формулу (3) и получим

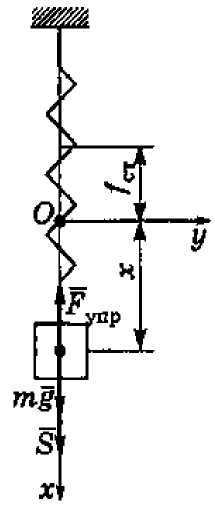
$$x = -1{,}61 \sin 54{,}22t + 4{,}64 \sin 6\pi t.$$

Ответ: $x = -1{,}61 \sin 54{,}22t + 4{,}64 \sin 6\pi t$ см.

Задача 32.89

Груз массы $m = 200$ г, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой 9,8 Н/см, находится под действием силы $S = H \sin pt$, где $H = 20$ Н, $p = 50$ рад/с. В начальный момент $x_0 = 2$ см, $v_0 = 10$ см/с. Начало координат выбрано в положении статического равновесия. Найти уравнение движения груза.

Решение



Покажем на рисунке силы, действующие на груз: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, возмущающую силу $\bar{S}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + S,$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $S = H \sin pt$.

Тогда, так как в положении статического равновесия $mg = cf_{ст}$

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{ст} + H \sin pt$$

или

$$m\ddot{x} + cx = H \sin pt. \qquad (1)$$

Перепишем уравнение (1) с учетом данных задачи

$$0{,}2\ddot{x} + 980x = 20 \sin 50t$$

или

$$\ddot{x}+k^2x=h\sin pt, \qquad (2)$$

где $k^2=4900$, $k=70$ рад/с; $h=100$ м/с^2; $p=50$ рад/с.

Уравнение (2) — это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без учета сопротивления.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$a=\frac{h}{k^2-p^2}=\frac{100}{4900-2500}=4{,}17\ (\text{см}).$$

Общее решение уравнения (2) запишем в виде

$$x=C_1\cos 70t+C_2\sin 70t+4{,}17\sin 50t, \qquad (3)$$

$$\dot{x}=70(-C_1\sin 70t+C_2\cos 70t)+4{,}17\cdot 50\cos 50t. \qquad (4)$$

Подставив начальные условия: $t=0$, $x_0=2$ см, $\dot{x}_0=10$ см/с, из формул (3), (4) найдем $C_1=2$ см; $C_2=-2{,}83$ см.

Полученные значения постоянных интегрирования подставим в формулу (3) и получим

$$x=2\cos 70t-2{,}83\sin 70t+4{,}17\sin 50t.$$

Ответ: $x=2\cos 70t-2{,}83\sin 70t+4{,}17\sin 50t$ см.

Задача 32.90

В условиях предыдущей задачи изменилась частота возмущающей силы, получив значение $p=70$ рад/с. Определить уравнение движения груза.

Решение

При частоте возмущающей силы $p=70$ рад/с возникает резонанс. В случае резонанса, когда $p=k$, уравнение вынужденных колебаний принимает вид

$$\ddot{x}+k^2x=h\sin kt. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где x^* — частное решение.

В случае резонанса

$$x^* = -\frac{ht}{2p}\cos pt$$

или с учетом данных задачи: $h = 100$ м/с^2, p = 70 рад/с,

$$x^* = -\frac{100t}{2\cdot 70}\cos 70t = -71{,}428\cos 70t.$$

Тогда общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$x = C_1\cos 70t + C_2\sin 70t - 71{,}428t\cos 70t, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = 70(-C_1\sin 70t + C_2\cos 70t) - 71{,}428\cos 70t + 71{,}428\cdot 70t\sin 70t. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) с учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 2$ см, $\dot{x}_0 = 10$ см/с, найдем: $C_1 = 2$ см; $C_2 = 1{,}16$ см.

Подставим значения постоянных C_1 и C_2 в формулу (2) и получим

$$x = 2\cos 70t - 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t.$$

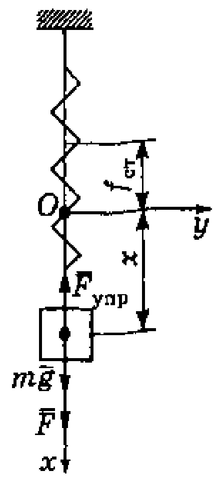
Ответ: $x = 2\cos 70t - 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t$ см.

Задача 32.91

Груз массы 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. На груз начинает действовать сила $F(t) = 156{,}8\sin 4t$ Н. Определить закон движения груза.

Решение

Покажем на рисунке силы, действующие на груз массой m: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, возмущающую силу $\bar{F}$. Начало системы координат Oxy выберем в положении статического равновесия.



Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k,$$

$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + F,$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $F = H\sin pt$, $H = 156{,}8$ Н, $p = 4$ рад/с.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{ст} + H\sin pt. \qquad (1)$$

Так как в положении статического равновесия $mg = cf_{ст}$, уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} + cx = H\sin pt$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = 16$, $k = 4$ рад/с; $h = \dfrac{H}{m} = 6{,}4$.

Поскольку $k = p = 4$ рад/с, то наблюдается резонанс. Поэтому общее решение уравнения (2) запишем в виде

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt - \frac{ht\cos kt}{2k}, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = k(-C_1\sin kt + C_2\cos kt) - \frac{h}{2k}\cos kt + \frac{h}{2k}kt\sin kt. \qquad (4)$$

С учетом начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, из формул (3) и (4) найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 0$; $C_2 = 0{,}2$.

Подставим эти значения в формулу (3) и получим

$$x = 0{,}2\sin 4t - 0{,}8t\cos 4t.$$

О т в е т: $x = 0{,}2\sin 4t - 0{,}8t\cos 4t$ м.

Задача 32.92

Груз массы 24,5 кг висит на пружине жесткости 392 Н/м. Определить движение груза, если на него начинает действовать сила $F = 39{,}2\cos 6t$ Н.

Р е ш е н и е

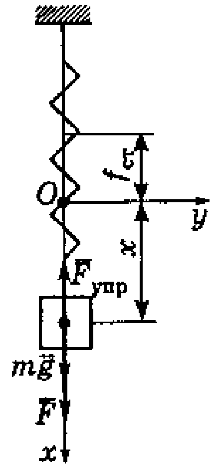
Покажем на рисунке силы, действующие на груз: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, возмущающую силу $\bar{F}$. Начало системы координат Oxy выберем в положении статического равновесия.

Запишем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k,$$

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} + F,$$

где $F_{\text{упр}} = c(x + f_{\text{ст}})$; $F = 39{,}2\cos 6t$.



Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{\text{ст}} + 39{,}2\cos 6t.$$

В положении статического равновесия $mg = cf_{\text{ст}}$, следовательно, с учетом данных задачи

$$24{,}5\ddot{x} + 392x = 39{,}2\cos 6t$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\cos pt,$$

где $k^2 = \dfrac{392}{24{,}5} = 16$; $h = \dfrac{39{,}2}{24{,}5} = 1{,}6$; $p = 6$.

Общее решение этого уравнения ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*.$$

В данном случае

$$x = C_1\cos 4t + C_2\sin 4t,$$

$$x^* = \frac{1{,}6\cos 6t}{16 - 36} = -0{,}08\cos 6t.$$

Тогда

$$x = C_1\cos 4t + C_2\sin 4t - 0{,}08\cos 6t,$$

$$\dot{x} = 4(-C_1\sin 4t + C_2\cos 4t) + 0{,}08\cdot 6\sin 6t.$$

Постоянные интегрирования найдем исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$: $C_1 = 0{,}08$; $C_2 = 0$.

Подставим значения C_1 и C_2 в выражение для x и получим

$$x = 0{,}08(\cos 4t - \cos 6t) = 16\sin t\sin 5t.$$

О т в е т: $x = 16\sin t\sin 5t$ см. Колебания носят характер биений.

Задача 32.93

Груз на пружине движется так, что его движение описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x}+cx=5\cos\omega t+2\cos 3\omega t.$$

Найти закон движения груза, если в начальный момент его смещение и скорость были равны нулю, а также определить, при каких значениях ω наступит резонанс.

Решение

Общее решение дифференциального уравнения движения груза ищем в виде

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t+C_2\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t+\frac{5\cos\omega t}{c-m\omega^2}+\frac{2\cos 3\omega t}{c-9m\omega^2}, \tag{1}$$

$$\dot{x}=\sqrt{\frac{c}{m}}\left(-C_1\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right)-\frac{5\omega\sin\omega t}{c-m\omega^2}-\frac{6\omega\sin 3\omega t}{c-9m\omega^2}. \tag{2}$$

С учетом начальных условий: $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, из формул (1) и (2) найдем:

$$C_1+\frac{5}{c-m\omega^2}+\frac{2}{c-9m\omega^2}=0,$$

$$C_1=\frac{47m\omega^2-7c}{(c-m\omega^2)(c-9m\omega^2)};$$

$$C_2=0.$$

Подставим значения постоянных C_1 и C_2 в формулу (1) и получим

$$x=\frac{(47m\omega^2-7c)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}{(c-m\omega^2)(c-9m\omega^2)}+\frac{5\cos\omega t}{c-m\omega^2}+\frac{2\cos 3\omega t}{c-9m\omega^2}$$

— закон движения груза.

Резонанс наступит в двух случаях: при $c-9m\omega^2=0$ и $c-m\omega^2=0$, т.е. когда

$$\omega_{1\,\text{кр}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}},$$

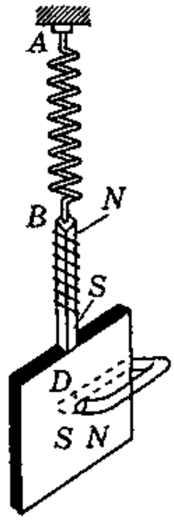
$$\omega_{2_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Ответ: $x = \dfrac{(47m\omega^2 - 7c)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} + \dfrac{5\cos\omega t}{c - m\omega^2} + \dfrac{2\cos 3\omega t}{c - 9m\omega^2}$. Резонанс наступит в двух случаях: $\omega_{1_{\text{кр}}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ и $\omega_{2_{\text{кр}}} = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Влияние сопротивления на вынужденные колебания

Задачи и решения

Задача 32.94



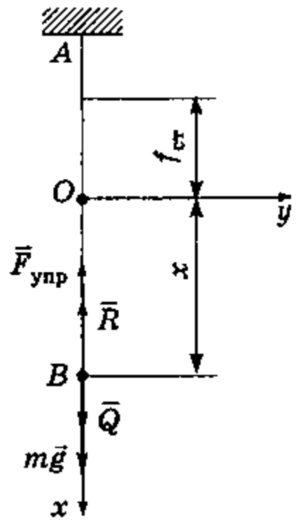
На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 19{,}6$ Н/м, подвешены магнитный стержень массы 50 г, проходящий через соленоид, и медная пластинка массы 50 г, проходящая между полюсами магнита. По соленоиду течет ток $i = 20\sin 8\pi t\,A$, который развивает силу взаимодействия с магнитным стержнем $0{,}016\pi i$ Н. Сила торможения медной пластинки вследствие вихревых токов равна $kv\Phi^2$, где $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ Вб и v — скорость пластинки в м/с. Определить вынужденные колебания пластинки.

Решение

Выберем систему координат Oxy, начало которой совместим с положением статического равновесия пластины.

Примем магнитный стержень и медную пластинку за материальную точку. Покажем на рисунке (см. с. 466) приложенные к ней силы: силу тяжести $m\bar{g}$, силу упругости $\bar{F}_{\text{упр}}$, возмущающую силу $\bar{Q}$, силу торможения $\bar{R}$.

Запишем дифференциальное уравнение движения материальной точки в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} - R + Q,$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $R = k\,v\Phi^2$; $Q = 0{,}016\pi i$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{ст} - k\,v\Phi^2 + 0{,}016\pi i.$$

В положении статического равновесия

$$mg = cf_{ст},$$

поэтому

$$m\ddot{x} + cx + k\,v\Phi^2 = 0{,}016\pi i. \qquad (1)$$

Подставим в уравнение (1) данные задачи:

$$0{,}1\ddot{x} + 19{,}6x + 0{,}001 \cdot 500\dot{x} = 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t,$$

или в общем виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (2)$$

где $k^2 = 196$; $n = 2{,}5$; $h = 3{,}2\pi$; $p = 8\pi$.

Уравнение (2) — это уравнение вынужденных колебаний.

Вынужденные колебания пластинки будут определяться уравнением

$$x^* = A_c\sin(pt + \beta) = \frac{h\sin(p + \beta)}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}},$$

где A_c — амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления; β — сдвиг фазы.

Найдем амплитуду

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{3{,}2\pi}{\sqrt{(64\pi^2 - 196)^2 + 4 \cdot 2{,}5^2 \cdot 64 \cdot 3{,}14^2}} = 0{,}022 \text{ (м)}$$

и сдвиг фазы вынужденных колебаний

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = 0{,}288,$$

$$\beta = 0{,}089\pi.$$

Угол β лежит в третьей четверти, а потому

$$\beta = -\pi + 0{,}089\pi \cong -0{,}91\pi.$$

Следовательно, уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$x = 0{,}022\sin(8\pi t - 0{,}91\pi).$$

Ответ: $x = 0{,}022\sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ м.

Задача 32.95

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения пластинки, если ее подвесили вместе с магнитным стержнем к концу нерастянутой пружины и сообщили им начальную скорость 5 см/с, направленную вниз.

Решение

Запишем общее решение уравнения вынужденных колебаний, полученного в задаче 32.94 в виде

$$x = e^{-nt}(C_1\cos k_1 t + C_2\sin k_1 t) + A_c\sin(8\pi t - 0{,}91\pi), \qquad (1)$$

$$\dot{x} = k_1 e^{-nt}(-C_1\sin k_1 t + C_2\cos k_1 t) - ne^{-nt}(C_1\cos k_1 t + C_2\sin k_1 t) +$$

$$+ A_c\cdot 8\pi\cos(8\pi t - 0{,}91\pi),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 2{,}5^2} = 13{,}77$ (рад/с).

Исходя из начальных условий: $t = 0$, $x_0 = -\dfrac{mg}{c} = -\dfrac{0{,}1\cdot 9{,}8}{19{,}6} = -0{,}05$ (м) $=$ $= -5$ см, $\dot{x}_0 = 5$ см/с, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = -5 + 2{,}2\cdot 0{,}28 = -4{,}39$ (см), $C_2 = 3{,}42$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (1) и запишем уравнение движения пластины:

$$x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39\cos 13{,}77t + 3{,}42\sin 13{,}77t) + 2{,}2\sin(8\pi t - 0{,}91\pi).$$

Ответ: $x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39\cos 13{,}77t + 3{,}42\sin 13{,}77t) + 2{,}2\sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ см.

Задача 32.96

Материальная точка массы $m = 2$ кг подвешена к пружине, коэффициент жесткости которой 4 кН/м. На точку действует возмущающая сила $S = 120\sin(pt + \delta)$ Н и сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости и равная $R = 0{,}5\sqrt{mc}\,v$ Н. Чему равно наибольшее значение A_{max} амплитуды вынужденных колебаний? При какой частоте p амплитуда вынужденных колебаний достигнет наибольшего значения?

Решение

Максимальной амплитуда вынужденных колебаний будет при $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$. Тогда

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Рассчитаем по данным задачи

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{4 \cdot 10^3}{2} = 2 \cdot 10^3,$$

$$n = \frac{0{,}5\sqrt{mc}}{2m} = \frac{0{,}5\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^3}}{2 \cdot 2} = 11{,}18 \text{ (рад/с)},$$

$$h = \frac{120}{2} = 60 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

и найдем

$$A_{max} = \frac{60}{2 \cdot 11{,}18 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^3 - (11{,}18)^2}} = 0{,}062 \text{ (м)} = 6{,}2 \text{ (см)}.$$

Определим частоту p, при которой достигается это значение амплитуды:

$$p = \sqrt{2 \cdot 10^3 - 250} = 41{,}83 \text{ (рад/с)}.$$

Ответ: $A_{max} = 6{,}2$ см; $p = 41{,}83$ рад/с.

Задача 32.97

В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени ее положение и скорость были равны: $x_0 = 2$ см, $v_0 = 3$ см/с. Частота возмущающей силы $p = 30$ рад/с, начальная фаза возмущающей силы $\delta = 0$. Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

Решение

Запишем общее решение уравнения вынужденных колебаний с учетом сопротивления среды в общем виде

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A_c \sin(pt + \beta),$$

где $A_c = \dfrac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \dfrac{60}{\sqrt{(2000 - 900)^2 + 4 \cdot 125 \cdot 900}} = 4{,}66$ (см),

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = -0{,}6098,$$

$$\beta = -31{,}4° = -0{,}174\pi;$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{2 \cdot 10^3 - (11{,}18)^2} = 43{,}3 \text{ (рад/с)}.$$

Итак,

$$x = e^{-11{,}18t}(C_1 \cos 43{,}3t + C_2 \sin 43{,}3t) + 4{,}66 \sin(30t - 0{,}174\pi), \qquad (1)$$

$$\dot{x} = -11{,}18 e^{-11{,}18t}(C_1 \cos 43{,}3t + C_2 \sin 43{,}3t) +$$

$$+ 43{,}3 e^{-11{,}18t}(-C_1 \sin 43{,}3t + C_2 \cos 43{,}3t) + 4{,}66 \cdot 30 \cos(30t - 0{,}174\pi).$$

При $t = 0$ $x_0 = 2$ см, $\dot{x}_0 = 3$ см/с найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 4{,}422$ см; $C_2 = -1{,}547$ см.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$x = e^{-11{,}18t}(4{,}422 \cos 43{,}3t - 1{,}547 \sin 43{,}3t) + 4{,}66 \sin(30t - 0{,}174\pi).$$

Ответ: $x = e^{-11{,}18t}(4{,}422 \cos 43{,}3t - 1{,}547 \sin 43{,}3t) + 4{,}66 \sin(30t - 0{,}174\pi)$ см.

Задача 32.98

Материальная точка массы 3 кг подвешена к пружине с коэффициентом жесткости $c = 117{,}6$ Н/м. На точку действует возмущающая сила $F = H\sin(6{,}26t + \beta)$ Н и сила вязкого сопротивления среды $\overline{R} = -\alpha\overline{v}$ (R в Н). Как изменится амплитуда вынужденных колебаний точки, если вследствие изменения температуры вязкость среды (коэффициент α) увеличится в 3 раза?

Решение

Амплитуда вынужденных колебаний при наличии сопротивления среды

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}}, \tag{1}$$

где n — коэффициент затухания, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

По данным задачи рассчитаем

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{117{,}6}{3} = 39{,}2, \quad k = \sqrt{39{,}2} = 6{,}26 \text{ (рад/с)}.$$

Так как $p = k$, то формула (1) примет вид

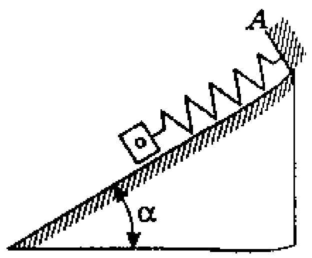
$$A_c = \frac{h}{2np}.$$

Очевидно, что при увеличении n, характеризующего сопротивление среды, в 3 раза, амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза.

Ответ: амплитуда вынужденных колебаний уменьшится в три раза.

Задача 32.99

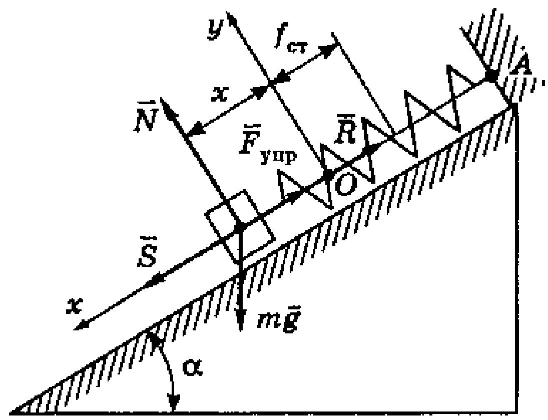
Тело массы 2 кг, прикрепленное пружиной к неподвижной точке A, движется по гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием возмущающей силы $S = 180\sin 10t$ Н и силы сопротивления, пропорциональной скорости $\overline{R} = -29{,}4\overline{v}$ (R в Н). Коэффициент жестко-



сти пружины $c = 5$ кН/м. В начальный момент тело находилось в покое в положении статистического равновесия. Найти уравнение движения тела, периоды T свободных и T_1 вынужденных колебаний, сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Приняв тело за материальную точку, покажем на рисунке приложенные к ней силы: силу тяжести $m\bar{g}$, возмущающую силу $\bar{S}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, силу сопротивления $\bar{R}$.



Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha + S - F_{упр} - R,$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $R = \alpha v$, $\alpha = 29{,}4$; $S = H\sin pt$, $H = 180$, $p = 10$.

Следовательно,

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - cx - cf_{ст} - \alpha v + H\sin pt.$$

При статическом равновесии $mg\sin\alpha = cf_{ст}$, тогда

$$m\ddot{x} + \alpha v + cx = H\sin pt$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin pt, \qquad (1)$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2m} = 7{,}35$; $k^2 = \dfrac{c}{m} = 2500$; $h = \dfrac{H}{m}$.

Определим амплитуду вынужденных колебаний

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{90}{\sqrt{(2500 - 100)^2 + 4\cdot 54\cdot 100}} = 0{,}0374\ (\text{м}) = 3{,}74\ (\text{см})$$

и сдвиг фазы β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{2\cdot 7{,}35\cdot 10}{100 - 2500} = -0{,}061,$$

откуда $\beta = \varepsilon = -3°30'$.

Найдем период T свободных и вынужденных T_1 колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{49{,}46} = 0{,}127 \text{ (с)},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{p} = \frac{6{,}28}{10} = 0{,}628 \text{ (с)}.$$

Общее решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A_c \sin(pt + \beta),$$

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + k_1 e^{-nt} \times$$

$$\times(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) + A_c\, p \cos(pt + \beta),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 49{,}46$ (рад/с).

При $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Найдем постоянные интегрирования: $C_1 = 0{,}228$ см; $C_2 = -0{,}72$ см.

Следовательно, уравнение движения тела имеет вид

$$x = e^{-7{,}35t}(0{,}228 \cos 49{,}46t - 0{,}72 \sin 49{,}46t) + 3{,}74 \sin(10t - 3°30').$$

Ответ: $x = e^{-7{,}35t}(0{,}228 \cos 49{,}46t - 0{,}72 \sin 49{,}46t) + 3{,}74 \sin(10t - 3°30')$, $T = 0{,}127$ с; $T_1 = 0{,}628$ с; $\varepsilon = 3°30'$.

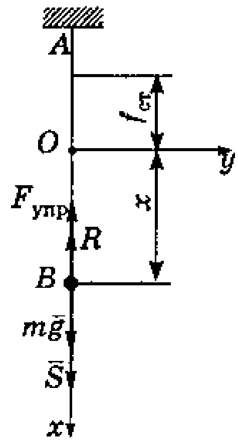
Задача 32.100

На тело массы 0,4 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 4$ кН/м, действуют сила $S = 40 \sin 50t$ Н и сила сопротивления среды $\bar{R} = -\alpha\bar{v}$, где $\alpha = 25$ Н · с/м, v — скорость тела (v в м/с). В начальный момент тело покоится в положении статического равновесия. Найти закон движения тела и определить значение частоты возмущающей силы, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Решение

Приняв тело за материальную точку B, покажем на рисунке приложенные к ней силы: силу тяжести $m\bar{g}$, возмущающую силу $\bar{S}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, силу сопротивления среды $\bar{R}$.

Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:



$$m\ddot{x} = mg - F_{упр} + S - R,$$

где $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $R = \alpha v = \alpha\dot{x}$; $S = H\sin pt$, $H = 40$, $p = 50$.

Следовательно,

$$m\ddot{x} = mg - cx - cf_{ст} - \alpha\dot{x} + H\sin pt.$$

При статическом равновесии $mg = cf_{ст}$, тогда

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin pt, \tag{1}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = 1\cdot 10^4$ (рад/с^2), $n = \dfrac{\alpha}{2m} = 31{,}25$ (рад/с), $h = \dfrac{H}{m} = 100.$

Найдем амплитуду

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}} =$$

$$= \frac{90}{\sqrt{(1\cdot 10^4 - 2{,}5\cdot 10^3)^2 + 4\cdot 976{,}6\cdot 2500}} = 0{,}0123 \text{ (м)} = 1{,}23 \text{ (см)}$$

и сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы·

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{2\cdot 31{,}5\cdot 50}{2500 - 1\cdot 10^4} = -0{,}42,$$

$$\beta = -22°36'.$$

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha) + A_c\sin(pt + \beta),$$

$$\dot{x} = -ane^{-nt}\sin(k_1t + \alpha) + ak_1e^{-nt}\cos(k_1t + \alpha) + A_cp\cos(pt + \beta),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{1\cdot 10^4 - (31{,}25)^2} = 95$ (рад/с).

При $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, тогда $a = 0{,}647$, $\sin\alpha = 0{,}73$, $\alpha = -46°55'$.

С учетом найденных значений a и α решение уравнения (1) примет вид·

$$x = 0{,}647e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46°55') + 1{,}23\sin(50t - 22°36').$$

Найдем частоту p колебаний, при которой достигается максимум амплитуды, и значение $A_{c_{max}}$:

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{1 \cdot 10^4 - 2(31{,}25)^2} = 89{,}7 \text{ (рад/с)},$$

$$A_{c_{max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{100}{62{,}5 \cdot 95} = 0{,}01684 \text{ (м)} = 1{,}684 \text{ (см)}.$$

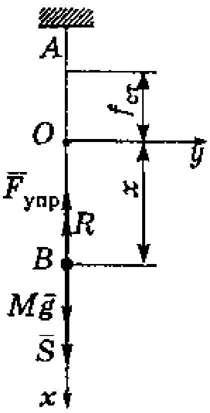
Ответ: 1) $x = 0{,}647e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46°55') + 1{,}23\sin(50t - 22°36')$ см;

2) максимальная амплитуда вынужденных колебаний получается при $p = 89{,}7$ рад/с и равна 1,684 см.

Задача 32.101

На тело массы M кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c Н/м, действует возмущающая сила $S = H\sin pt$ Н и сила сопротивления $\bar{R} = -\alpha\bar{v}$ (R в Н), где $\bar{v}$ — скорость тела. В начальный момент тело находилось в положении статического равновесия и не имело начальной скорости. Найти уравнение движения тела, если $c > \alpha^2/(4M)$.

Решение



Приняв тело за материальную точку, покажем на рисунке приложенные к ней силы: силу тяжести $M\bar{g}$, возмущающую силу $\bar{S}$, силу упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, силу сопротивления $\bar{R}$.

Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x:

$$M\ddot{x} = Mg + S - F_{упр} - R,$$

где $S = H\sin pt$; $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $R = \alpha v = \alpha\dot{x}$.

Следовательно,

$$M\ddot{x} = Mg + H\sin pt - \alpha\dot{x} - cx - cf_{ст}.$$

В положении статического равновесия $Mg = cf_{ст}$, тогда

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = H\sin pt$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h\sin pt, \tag{1}$$

где $n = \dfrac{\alpha}{2M}$; $k^2 = \dfrac{c}{M}$; $h = \dfrac{H}{M}$.

При $c > \dfrac{\alpha^2}{4M}$ общее решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$; $x^* = A\cos pt + B\sin pt$.

Тогда

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A\cos pt + B\sin pt, \qquad (2)$$

$$\dot{x} = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + k_1 e^{-nt}(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) +$$
$$+ p(-A\sin pt + B\cos pt).$$

Найдем коэффициенты A и B частного решения неоднородного уравнения

$$x^* = A\cos pt + B\sin pt = \frac{h(k^2 - p^2)\sin pt - 2nph\cos pt}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}.$$

Из начальных условий: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, найдем C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2};$$

$$C_2 = \frac{ph(2n^2 + p^2 - k^2)}{\sqrt{k^2 - n^2}\left[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2\right]}.$$

Подставим значения постоянных C_1 и C_2, коэффициентов A и B в уравнение (2) и запишем уравнение движения тела в окончательном виде:

$$x = \frac{phe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[2n\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right] +$$
$$+ \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[(k^2 - p^2)\sin pt - 2np\cos pt\right].$$

Ответ:

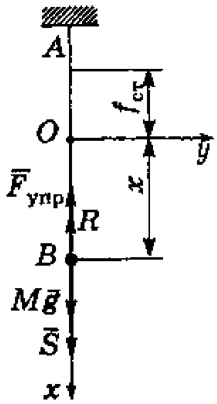
$$x = \frac{phe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[2n\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right] +$$
$$+ \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[(k^2 - p^2)\sin pt - 2np\cos pt\right],$$

где $h = \dfrac{H}{M}$, $k^2 = \dfrac{c}{M}$, $n = \dfrac{\alpha}{2M}$.

Задача 32.102

На тело массы 6 кг, подвешенное к пружине с жесткостью $c = 17{,}64$ кН/м, действует возмущающая сила $P_0 \sin\omega t$. Сопротивление жидкости пропорционально скорости. Каким должен быть коэффициент сопротивления α вязкой жидкости, чтобы максимальная амплитуда вынужденных колебаний равнялась утроенному значению статического удлинения пружины? Чему равняется коэффициент расстройки z (отношение круговой частоты вынужденных колебаний к круговой частоте свободных колебаний)? Найти сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение



Приняв тело за материальную точку, составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось x, если к ней приложены силы (см. рисунок): сила тяжести $m\bar g$, возмущающая сила $\bar S$, сила упругости $\bar F_{упр}$ пружины, сила сопротивления $\bar R$ среды:

$$m\ddot x = mg + S - F_{упр} - R,$$

где $S = P_0 \sin\omega t$; $F_{упр} = c(x + f_{ст})$; $R = \alpha v = \alpha\dot x$.

Следовательно,

$$m\ddot x = mg + P_0 \sin\omega t - c(x + f_{ст}) - \alpha\dot x.$$

При статическом равновесии $mg = cf_{ст}$, тогда

$$m\ddot x + \alpha\dot x + cx = P_0 \sin pt,$$

разделив на m, получим

$$\ddot x + 2n\dot x + k^2 x = h\sin pt.$$

Максимальную амплитуду $A_{c_{max}}$ определим по формуле

$$A_{c_{max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}},$$

где $h = \frac{P_0}{m}$; $n = \frac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{17{,}64 \cdot 10^3}{6} = 2{,}94 \cdot 10^3$.

Согласно условию задачи $A_{c_{max}} = 3f_{ст}$, тогда коэффициент сопротивления $\alpha = 110$ Н·с/м.

Найдем коэффициент затухания

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{110}{2 \cdot 6} = 9{,}17$$

и коэффициент расстройки

$$z = \frac{\sqrt{k^2 - 2n^2}}{k} = \frac{\sqrt{2{,}94 \cdot 10^3 - 2 \cdot 9{,}17^2}}{\sqrt{2{,}94 \cdot 10^3}} = 0{,}97.$$

С учетом того, что $z = \frac{p}{k}$, определим частоту возмущающей силы

$$p = zk = 0{,}97 \cdot \sqrt{2{,}94 \cdot 10^3} = 52{,}6 \text{ (рад/с)}$$

и рассчитаем сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{2 \cdot 9{,}17 \cdot 52{,}6}{2771{,}9 - 2940} = -5{,}74; \quad \beta = -80°7', \quad \varepsilon = 80°7'.$$

Ответ: $\alpha = 110$ Н · с/м; $z = 0{,}97$; $\varepsilon = 80°7'$.

Задача 32.103

На тело массы 0,1 кг, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 5$ кН/м, действует сила $S = H \sin pt$, где $H = 100$ Н, $p = 100$ рад/с, и сила сопротивления $R = \beta v$ Н, где $\beta = 50$ Н · с/м. Написать уравнение вынужденных колебаний и определить значение частоты p, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Решение

Составим дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x (см. решение задачи 32.101):

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = H \sin pt$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt, \qquad (1)$$

где $n = \frac{\beta}{2m} = \frac{50}{2 \cdot 0{,}1} = 250$ (рад/с); $k^2 = \frac{c}{m} = 5 \cdot 10^4$; $h = \frac{H}{m} = 1 \cdot 10^3$.

Частное решение x^* уравнения (1)

$$x^* = A_c \sin(pt - \varepsilon)$$

или

$$x^* = A_c(\sin pt \cos\varepsilon - \cos pt \sin\varepsilon), \qquad (2)$$

где A_c — амплитуда вынужденных колебаний; ε — величина сдвига фазы возмущающей силы.

Рассчитаем A_c и ε с учетом данных задачи:

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{1\cdot 10^3}{\sqrt{(5\cdot 10^4 - 1\cdot 10^4)^2 + 4\cdot 250^2\cdot 10^4}} =$$

$$= 0{,}0156 \text{ (м)} = 1{,}56 \text{ см};$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2\cdot 250\cdot 10^2}{5\cdot 10^4 - 1\cdot 10^4} = 1{,}25.$$

Тогда $\varepsilon = 51°20'$, $\cos\varepsilon = 0{,}625$, $\sin\varepsilon = 0{,}781$.

Подставим эти значения в выражение (2):

$$x^* = 1{,}56(0{,}625 \sin pt - 0{,}781 \cos pt)$$

или

$$x^* = 0{,}98 \sin 100t - 1{,}22 \cos 100t,$$

где $x^* = x_2$.

Так как $A_{c_{max}}$ возможно только при $k^2 - 2n^2 > 0$, то проверим эту возможность. В данном случае

$$k^2 - 2n^2 = 5\cdot 10^4 - 2\cdot 250^2 = 50\,000 - 125\,000 \ll 0.$$

Следовательно, максимума амплитуды не существует.

О т в е т: $x_2 = 0{,}98 \sin 100t - 1{,}22 \cos 100t$ см; максимума амплитуды не существует, так как $n > k/\sqrt{2}$.

Задача 32.104

В условиях предыдущей задачи определить сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Для вычисления сдвига ε фазы вынужденных колебаний воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{p^2 - k^2}.$$

Значения: $n = 250$ рад/с, $k^2 = 5 \cdot 10^4$, возьмем из решения задачи 32.103, тогда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{500 \cdot 100}{100^2 - 5 \cdot 10^4} = 1{,}25,$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} 1{,}25 = 51°20'.$$

Ответ: $\varepsilon = \operatorname{arctg} 1{,}25 = 51°20'$.

Задача 32.105

Груз массы 0,2 кг подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 19{,}6$ Н/м. На груз действует возмущающая сила $S = 0{,}2 \sin 14t$ Н и сила сопротивления $R = 49v$ Н. Определить сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Решение

Запишем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x [см. решение задачи 32.101, формула (1)]:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = h \sin pt.$$

С учетом данных задачи рассчитаем:

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{49}{2 \cdot 0{,}2} = 122{,}5 \text{ (рад/с)},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19{,}6}{0{,}2} = 98 \text{ (рад/с)},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{0{,}2}{0{,}2} = 1.$$

Определим сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{245 \cdot 14}{98 - 196} = -35,$$

$$\varepsilon = 91°38'.$$

Ответ: $\varepsilon = 91°38'$.

Задача 32.106

В условиях предыдущей задачи найти коэффициент жесткости c_1 новой пружины, которой нужно заменить данную пружину, чтобы сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы стал равным $\pi/2$.

Решение

Сдвиг фаз ε вынужденных колебаний и возмущающей силы определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Так как согласно условию $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\varepsilon = \infty$ и, следовательно, $p = k$.

Тогда

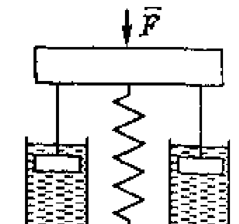
$$k^2 = 14^2 = \frac{c_1}{m}.$$

Откуда

$$c_1 = 196 \cdot 0{,}2 = 39{,}2 \text{ (Н/м)}.$$

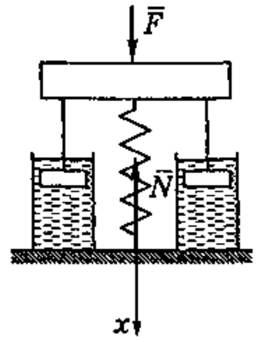
Ответ: $c_1 = 39{,}2$ Н/м.

Задача 32.107



Для уменьшения действия на тело массы m возмущающей силы $F = F_0 \sin(pt + \delta)$ устанавливают пружинный амортизатор с жидкостным демпфером. Коэффициент жесткости пружины c. Считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости ($F_{сопр} = \alpha v$), найти максимальное динамическое давление всей системы на фундамент при установившихся колебаниях.

Р е ш е н и е



При установившемся движении будут иметь место только вынужденные колебания, уравнение которых имеет вид

$$x = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon), \quad (1)$$

A_c — амплитуда вынужденных колебаний,

$$Ac = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}},$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; $h = \dfrac{F_0}{m}$.

Представим

$$\sin(pt + \delta - \varepsilon) = \sin(pt + \delta)\cos\varepsilon - \cos(pt + \delta)\sin\varepsilon,$$

где $\cos\varepsilon = \dfrac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}}$, $\sin\varepsilon = \dfrac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$x = \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) - 2np\cos(pt + \delta)\right],$$

$$\ddot{x} = \frac{hp^2}{(k^2 - p^2) + 4n^2p^2}\left[-(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) + 2np\cos(pt + \delta)\right].$$

Дифференциальное уравнение колебаний тела в проекции на ось x (см. рисунок):

$$m\ddot{x} = F - N.$$

Откуда с учетом того, что $F_0 = mh$, получим

$$N = F - m\ddot{x} = F_0\sin(pt + \delta) + \frac{F_0p^2\left[(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) - 2pn\cos(pt + \delta)\right]}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}$$

или

$$N = a\sin(pt+\delta) + b\cos(pt+\delta),$$

где $a = F_0\left[1 + \dfrac{p^2(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right]$, $b = F_0\left[-\dfrac{2np^3}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right]$.

Максимальное значение динамического давления

$$N_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}$$

или

$$N_{\max} = F_0\sqrt{\left[1+\frac{p^2(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right]^2 + \frac{4n^2p^6}{\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2\right]^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sqrt{\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2+p^2(k^2-p^2)\right]^2+4n^2p^6} =$$

$$= \frac{F_0}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sqrt{(k^4-p^2k^2+4n^2p^2)^2+4n^2p^6} =$$

$$= F_0\sqrt{\frac{k^4+4n^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}},$$

так как подкоренное выражение

$$(k^2-p^2k^2+4n^2p^2)^2+4n^2p^6$$

делится без остатка на $(k^2-p^2)^2+4n^2p^2$.

Ответ: $N_{\max} = F_0\sqrt{\dfrac{k^4+4n^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$, где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

33. Относительное движение

Методические указания к решению задач

Относительным движением материальной точки называется движение точки относительно подвижной системы координат. В общем случае такая система координат может двигаться произвольно и поэтому не является инерциальной. В этой системе координат второй закон динамики в обычном виде неприменим.

Так как абсолютное ускорение точки в сложном движении определяется по теореме Кориолиса,

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c, \tag{33.1}$$

где $\bar{a}_r$, $\bar{a}_e$, $\bar{a}_c$ — ускорение точки соответственно относительное, переносное и Кориолиса.

Второй закон динамики в подвижной системе координат имеет вид

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c, \tag{33.2}$$

где $\overline{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ — переносная сила инерции; $\overline{\Phi}_c = -m\bar{a}_c = -2m(\overline{\omega}_e \times \bar{V}_r)$ — сила инерции Кориолиса материальной точки.

Уравнение (33.2) выражает основной закон динамики для относительного движения материальной точки. Проектируя это уравнение на подвижные оси координат, например $Oxyz$, получим дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в проекциях на эти оси:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \tag{33.3}$$

Уравнение (33.2) можно записать и в проекциях на естественные оси, в частности на касательную и главную нормаль, в случае криволинейного движения, когда траектория точки известна, например, при исследовании движения математического маятника.

Таким образом, при решении задач на движение точки в подвижной системе координат все уравнения и теоремы механики для относительного движения материальной точки составляются так же, как и уравнения абсолютного движения, если к силам, действующим на точку, прибавить переносную силу инерции и силу инерции Кориолиса.

Если точка в подвижной системе координат покоится, то ее относительная скорость $\bar{v}_r = 0$ и относительное ускорение $\bar{a}_r = 0$, следовательно, и $\overline{\Phi}_c = 0$, тогда равенство (33.2) примет вид

$$\sum \overline{F}_k + \overline{\Phi}_e = 0. \qquad (33.4)$$

Уравнение (33.4) — уравнение относительного равновесия (покоя) точки.

На точку (тело), покоящуюся на земной поверхности, действуют сила $\overline{P}$ притяжения к центру Земли, нормальная реакция $\overline{N}$ поверхности и центробежная сила инерции $\overline{\Phi}_e^{\text{ц}}$. Силы $\overline{P}$ и $\overline{\Phi}_e^{\text{ц}}$ обусловливают давление тела на поверхность Земли, а их сумма является силой тяжести $\overline{G}$, т.е.

$$\overline{G} = \overline{P} + \overline{\Phi}_e^{\text{ц}}.$$

Поэтому при решении задач статики, принимая систему координат, связанную с Землей, за неподвижную, никаких поправок вследствие вращения Земли вводить не надо.

При движении тела по земной поверхности или вблизи Земли с некоторой относительной скоростью $\bar{v}_r$ на него действует сила инерции Кориолиса, которая при движении тела в Северном полушарии стремится отклонить его вправо от направления движения. Этим объясняется боковое давление поезда на рельсы, подмыв правого берега рек, отклонение ветров постоянного направления и морских течений. Вследствие вращения Земли свободно падающее тело отклоняется от вертикали к востоку.

Последовательность решения задач этого параграфа:

1. Выбрать подвижную систему декартовых либо естественных осей.

2. Изобразить материальную точку в выбранной системе координат в произвольном положении.

3. Записать выражения для переносного ускорения и ускорения Кориолиса и показать векторы этих ускорений на рисунке.

4. Показать все действующие на точку силы, включая и силы реакций связи, если точка несвободна, а также силы инерции — переносную и Кориолиса.

5. Составить необходимые дифференциальные уравнения движения точки в выбранной системе координат.

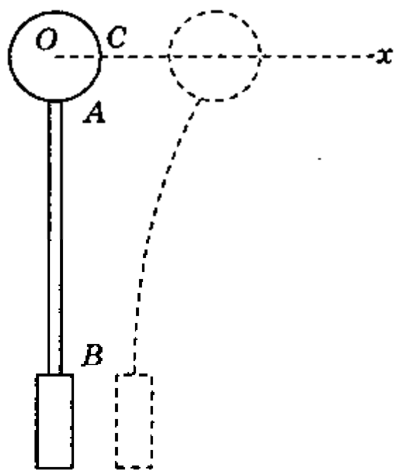
6. Определить начальные условия движения.

7. Проинтегрировать дифференциальные уравнения и с учетом начальных условий движения определить искомые величины в общем виде.

Задачи и решения

Задача 33.1

К концу A вертикального упругого стержня AB прикреплен груз C массы 2,5 кг. Груз C, будучи выведен из положения равновесия, совершает гармонические колебания под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от положения равновесия. Стержень AB таков, что для отклонения конца его A на 1 см нужно приложить силу 1 Н. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза C в том случае, когда точка закрепления стержня B совершает по горизонтальной прямой гармонические колебания амплитуды 1 мм и периода 1,1 с.



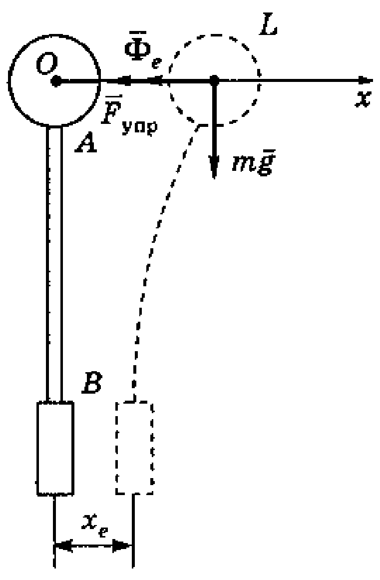
Решение

Покажем на рисунке силы, приложенные к грузу: силу упругости $\bar{F}_{упр}$ стержня, переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, силу тяжести $m\bar{g}$.

Запишем основное уравнение относительного движения груза C в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр} - \Phi_e, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = cx$; $\Phi_e = m\ddot{x}_e$, $x_e = A_B \sin \omega t$ — уравнение гармонических колебаний точки закрепления стержня, амплитуда колебаний которых $A_B = 1$ мм.



Найдем вторую производную от x_e по времени

$$\ddot{x}_e = -A_B\omega^2 \sin\omega t,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1{,}1} = 5{,}7$ (рад/с).

Тогда

$$\Phi_e = -mA_B\omega^2 \sin\omega t.$$

Подставим $F_{упр}$ и Φ_e в уравнение (1) и получим

$$m\ddot{x} = -cx + A_B\omega^2 \sin\omega t$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin\omega t, \tag{2}$$

где $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{100}{2{,}5} = 40$; $h = A_B\omega^2$.

Общее решение уравнения (2) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x}$ — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$; x^* — частное решение уравнения (2):

$$x^* = B\sin\omega t, \tag{3}$$

$$\ddot{x}^* = -B\omega^2 \sin\omega t. \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в уравнение (2) и получим

$$-B\omega^2 \sin\omega t + Bk^2 \sin\omega t = h\sin\omega t.$$

Откуда

$$B = \frac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2}.$$

Тогда общее решение уравнения (2)

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{5}$$

В выражении (5) последнее слагаемое описывает вынужденные колебания точки C в относительном движении, амплитуда которых

$$A_{отн} = \frac{A_B\omega^2}{k^2-\omega^2} = \frac{1\cdot 5{,}7^2}{40-32{,}49} \approx 4{,}42 \text{ (мм)}.$$

Тогда общая амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{вын} = A_{отн} + A_B = 4{,}42 + 1{,}00 = 5{,}42 \text{ (мм)}.$$

Ответ: 5,42 мм.

Задача 33.2

Точка привеса математического маятника длины l движется по вертикали равноускоренно. Определить период T малых колебаний маятника в двух случаях: 1) когда ускорение точки привеса направлено вверх и имеет какую угодно величину p; 2) когда это ускорение направлено вниз и величина его $p < g$.

Решение

1) Движение маятника сложное: движение точки привеса — переносное, а качание маятника — относительное. Покажем на рис. 1 силы, приложенные к маятнику: переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, силу тяжести $m\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ нити.

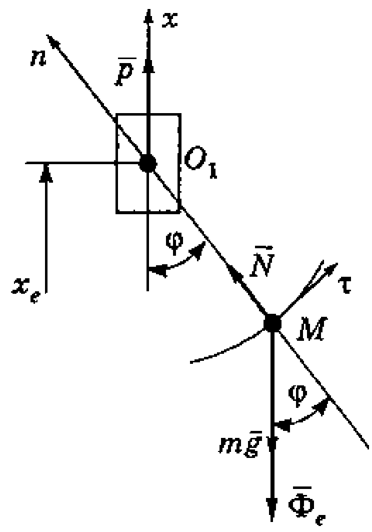


Рис. 1

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на естественную ось τ, когда ускорение p точки привеса направлено вверх:

$$ma_r^\tau = -(mg\sin\varphi + \Phi_e \sin\varphi), \qquad (1)$$

где $\Phi_e = ma_e = mp$, так как $a_e = p$.

Уравнение (1) примет вид

$$ma_r^\tau = -mg\sin\varphi - mp\sin\varphi, \qquad (2)$$

где $a_r^\tau = l\ddot{\varphi}$; $\sin\varphi \approx \varphi$.

Тогда уравнение (2) запишем в виде

$$l\ddot{\varphi} = -(g+p)\varphi \qquad (3)$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{4}$$

где $k^2 = \dfrac{g+p}{l}$.

Период колебаний маятника

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

подставим значение $k = \sqrt{\dfrac{g+p}{l}}$ и найдем

$$T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g+p}}.$$

2) Рассмотрим движение маятника, когда точка привеса движется с ускорением $p < g$ вниз. На рис. 2 покажем силы, действующие на маятник: переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, силу тяжести $m\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ нити.

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на ось τ:

$$ma_r^\tau = -mg\sin\varphi + \Phi_e \sin\varphi, \tag{5}$$

где $a_r^\tau = l\ddot{\varphi}$, $\sin\varphi \approx \varphi$; $\Phi_e = ma_e = mp$, так как $a_e = p$.

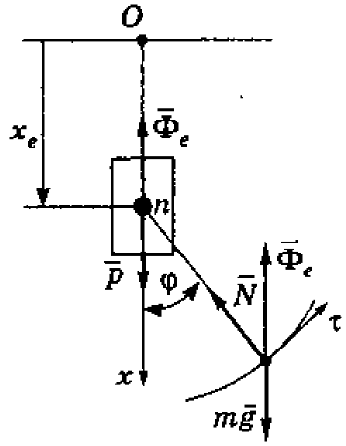


Рис. 2

Тогда уравнение (5) примет вид

$$l\ddot{\varphi} = -(g - p_2)\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{g-p}{l}$.

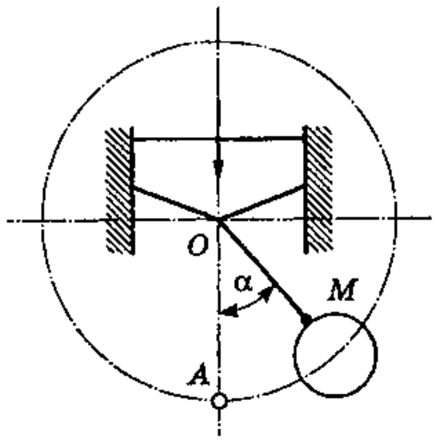
В этом случае $k = \sqrt{\dfrac{g-p}{l}}$, а период колебаний

$$T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g-p}}.$$

Ответ: 1) $T = \dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g+p}}$; 2) $T = \dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g-p}}$.

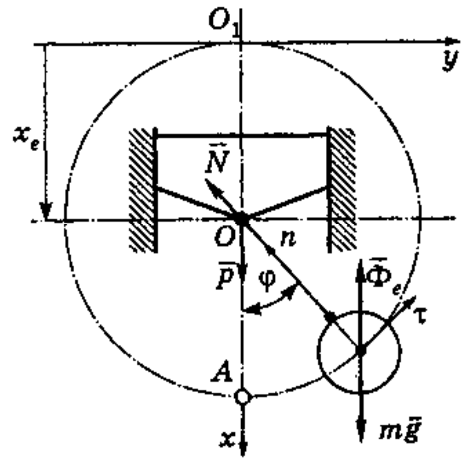
Задача 33.3

Математический маятник OM длины l в начальный момент отклонен от положения равновесия OA на некоторый угол α и имеет скорость, равную нулю; точка привеса его в этот момент имеет также скорость, равную нулю, но затем опускается с постоянным ускорением $p \geq g$. Определить длину s дуги окружности, описываемой точкой M в относительном движении вокруг точки O.



Решение

Движение маятника сложное: движение точки привеса — переносное, а качание маятника — относительное. Свяжем с маятником естественные оси (n и τ) и составим дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на ось τ:



$$ma_r^\tau = -mg\sin\varphi + \Phi_e \sin\varphi, \qquad (1)$$

где $a_r^\tau = l\ddot{\varphi}$; $\Phi_e = m\ddot{x}_e = mp$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$l\ddot{\varphi} = -(g-p)\sin\varphi \qquad (2)$$

или

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{g-p}{l}\sin\varphi d\varphi, \qquad (3)$$

так как

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

Проинтегрируем выражение (3) и получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g-p}{l}\cos\varphi + C_1. \qquad (4)$$

Поскольку в начальный момент $\varphi_0 = \alpha$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, то

$$C_1 = -\frac{g-p}{l}\cos\alpha.$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g-p}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha). \qquad (5)$$

Рассмотрим два случая, так как в условии задачи дано, что $p \geq g$.

1) При $p = g$ по формуле (5) получим $\cos\varphi - \cos\alpha = 0$, или $\cos\varphi = \cos\alpha$. Следовательно, $\varphi = 0$, т.е. угол отклонения маятника не изменяется и равен начальному углу отклонения. Тогда $s = 0$.

2) При $p > g$ согласно формуле (5)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2(g-p)}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha). \qquad (6)$$

Так как в положении, соответствующем углу α, маятник имеет угловую скорость, равную нулю, то из выражения (6) следует, что

$$\cos\varphi - \cos\alpha = 0, \quad \cos\varphi = \cos\alpha \quad \text{или} \quad \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$$

Следовательно, $\varphi = 2\pi - \alpha$. Тогда $\Delta\varphi = \varphi - \alpha = 2(\pi - \alpha)$. Поэтому

$$s = l\Delta\varphi = 2l(\pi - \alpha).$$

Ответ: 1) при $p = g$ $s = 0$; 2) при $p > g$ $s = 2l(\pi - \alpha)$.

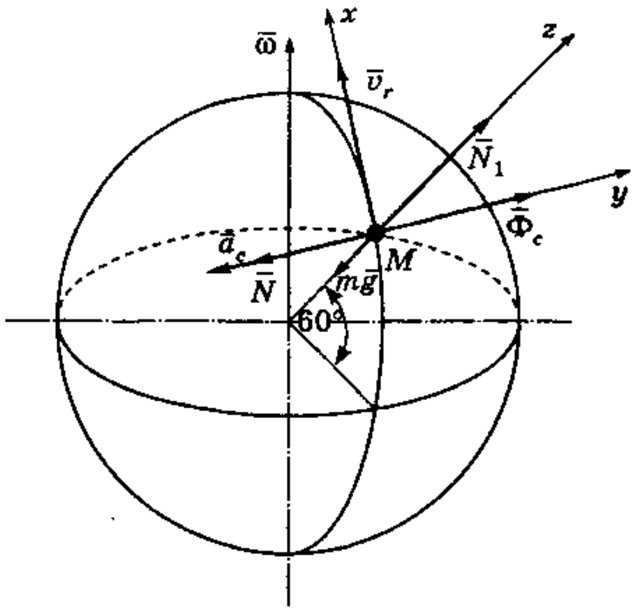
Задача 33.4

Железнодорожный поезд идет со скоростью 15 м/с по рельсам, проложенным по меридиану с юга на север. Масса поезда 2000 т. 1) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он пересекает в данный момент северную широту 60°. 2) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он идет в этом же месте с севера на юг.

Решение

Свяжем с поездом систему координат $Mxyz$ (см. рисунок), где ось y перпендикулярна рельсовому пути и направлена по касательной к поверхности земли. Поезд идет с юга на север.

Составим дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на ось y, учитывая силу инерции Кориолиса $\overline{\Phi}_c$ и реакцию $\overline{N}$ рельса. Проекции остальных сил равны нулю.



Тогда

$$m\ddot{y} = \Phi_c - N = 0, \qquad (1)$$

так как перемещение поезда вдоль оси y отсутствует.

Сила инерции Кориолиса

$$\Phi_c = 2m\omega v_r \sin(\omega;\hat{\ } v_r),$$

где ω — угловая скорость вращения Земли, $\omega = \dfrac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}$; $(\omega;\hat{\ } v_r) = 60°$.

Из уравнения (1) найдем

$$N = 2m\omega v_r \sin(\omega;\hat{\ } v_r) = 2\cdot 2\cdot 10^6 \cdot \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\cdot 15\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3778{,}7\ (\text{Н}).$$

Сила давления Q равна реакции рельса, т.е. $Q = N = 3778{,}7$ Н.

1) При движении с юга на север поезд давит на правый восточный рельс, если смотреть по ходу движения;

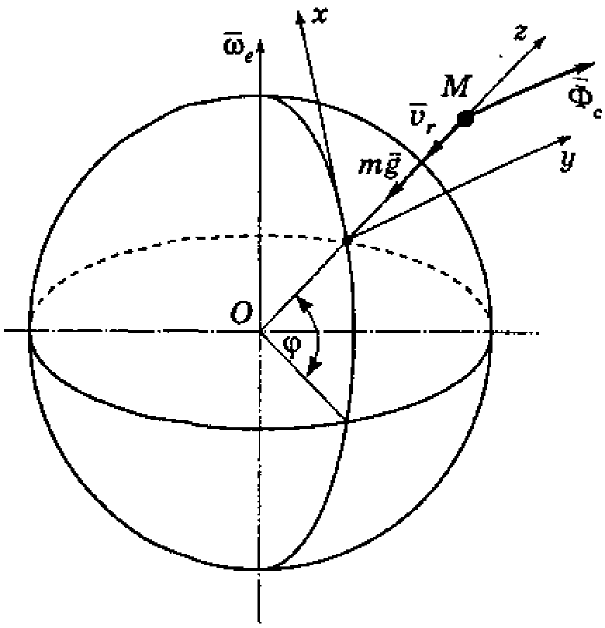
2) при движении с севера на юг поезд давит на правый западный рельс за счет изменения направления силы инерции Кориолиса.

О т в е т: 1) 3778,7 Н на правый восточный рельс; 2) 3778,7 Н на правый западный рельс.

Задача 33.5

Материальная точка свободно падает в северном полушарии с высоты 500 м на Землю. Принимая во внимание вращение Земли вокруг своей оси и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на сколько отклонится на восток точка при падении. Географическая широта места равна 60°.

Решение



При свободном падении (см. рисунок) точки вблизи поверхности Земли на нее действуют сила притяжения $\overline{P}$, переносная сила $\overline{\Phi}_e$ инерции и сила инерции $\overline{\Phi}_c$ Кориолиса.

Дифференциальное уравнение относительного движения имеет вид

$$m\overline{a}_r = \overline{P} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c, \qquad (1)$$

или

$$m\overline{a}_r = m\overline{g} + \overline{\Phi}_c, \qquad (2)$$

так как

$$\overline{P} + \overline{\Phi}_e = m\overline{g}.$$

Проекции выражения (2) на декартовы оси координат:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad (3)$$

$$m\ddot{y} = \Phi_c, \qquad (4)$$

$$m\ddot{z} = -mg. \qquad (5)$$

Найдем силу инерции Кориолиса

$$\Phi_c = 2m\omega_e v_r \sin(\widehat{\omega_e;\, v_r}),$$

где ω_e — угловая скорость вращения Земли; $\sin(\widehat{\omega_e;\, v_r}) = \cos\varphi$, $(\widehat{\omega_e;\, v_r}) = 90° + \varphi$.

Тогда

$$\Phi_c = 2m\omega_e v_r \cos\varphi,$$

а уравнения (3)—(5) запишем так:

$$\ddot{x} = 0, \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = 2\omega_e v_r \cos\varphi, \qquad (7)$$

$$\ddot{z} = -g. \qquad (8)$$

Решим дифференциальное уравнение (8):

$$\dot{z} = -gt + C_1, \tag{9}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{10}$$

Подставим в выражения (9) и (10) начальные условия: $t = 0$, $z_0 = H$, $\dot{z}_0 = 0$, и получим: $C_1 = 0$, $C_2 = H$. Тогда

$$\dot{z} = -gt, \tag{11}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + H. \tag{12}$$

Примем, что $v_r = |\dot{z}| = gt$ и подставим это значение в уравнение (7):

$$\ddot{y} = 2\omega_e gt\cos\varphi. \tag{13}$$

Проинтегрируем уравнение (13) дважды и получим

$$\dot{y} = \omega_e gt^2\cos\varphi + C_3, \tag{14}$$

$$y = \frac{1}{3}\omega_e gt^3\cos\varphi + C_3 t + C_4. \tag{15}$$

Подставим начальные условия: $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, в формулы (14) и (15). Найдем, что $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Тогда выражения (14) и (15) примут вид

$$\dot{y} = \omega_e gt^2\cos\varphi, \tag{16}$$

$$y = \frac{1}{3}\omega_e gt^3\cos\varphi. \tag{17}$$

Из формулы (12), учитывая, что $z = 0$:

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + H$$

определим время падения точки

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставим это выражение в уравнение (17) и с учетом того, что $\omega_e = \dfrac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}$, найдем, на сколько точка отклонится к востоку:

$$y = \frac{1}{3}\omega_e g\left(\sqrt{\frac{2H}{g}}\right)^3 \cos\varphi = \frac{1}{3}\,\frac{2\cdot 3{,}14}{24\cdot 60\cdot 60}\cdot 9{,}81\left(\sqrt{\frac{1000}{9{,}81}}\right)^3 \cos 60^\circ = 0{,}12 \text{ (м)}.$$

Ответ: на 12 см.

Задача 33.6

В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол 6°.

1) Определить ускорение a вагона. 2) Найти разность периодов колебания маятника: T — в случае неподвижного вагона и T_1 — в данном случае.

Решение

1) Покажем на рис. 1 силы, действующие на маятник в движущемся вагоне: силу тяжести $m\bar{g}$, реакцию нити $\bar{N}$, переносную силу инерции $\bar{\Phi}_e$, $\Phi_e = ma$, где a — ускорение вагона.

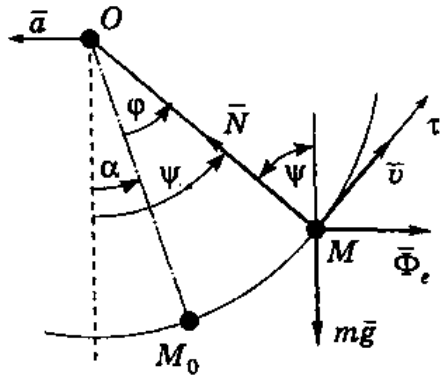


Рис. 1

В положении равновесия, определяемом углом $\alpha = 6°$, силы $m\bar{g}$, $\bar{N}$ и $\bar{\Phi}_e$ образуют уравновешенную систему (рис. 2), откуда следует, что

$$\Phi_e = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

или

$$ma = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

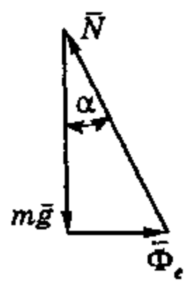


Рис. 2

Откуда

$$a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha = g\,\mathrm{tg}\,6° = 9{,}81\cdot 0{,}1051 = 1{,}03 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

2) Дифференциальное уравнение относительного движения маятника в проекции на ось τ имеет вид

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\psi+ma\cos\psi,$$

где $v=l\dot{\varphi}$, $\dfrac{dv}{dt}=\ddot{\varphi}$; $a=g\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $\psi=\alpha+\varphi$.

Преобразуем правую часть данного уравнения:

$$-mg\sin\psi+mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\psi=-\sin\psi+\mathrm{tg}\,\alpha\cos\psi=$$

$$=-\frac{1}{\cos\alpha}[\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha-\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)]=-\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}=-\frac{\varphi}{\cos\alpha}.$$

В результате уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

где $k^2=\dfrac{g}{l\cos\alpha}$.

Тогда период колебания маятника в движущемся вагоне

$$T_1=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}=T\sqrt{\cos\alpha},$$

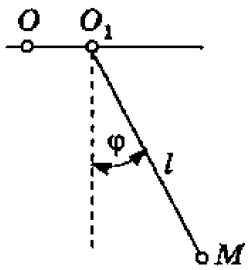
где $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ — период колебания маятника в неподвижном вагоне.

Откуда

$$T-T_1=(1-\sqrt{\cos\alpha})T=(1-\sqrt{\cos 6^\circ})T=0{,}0028T.$$

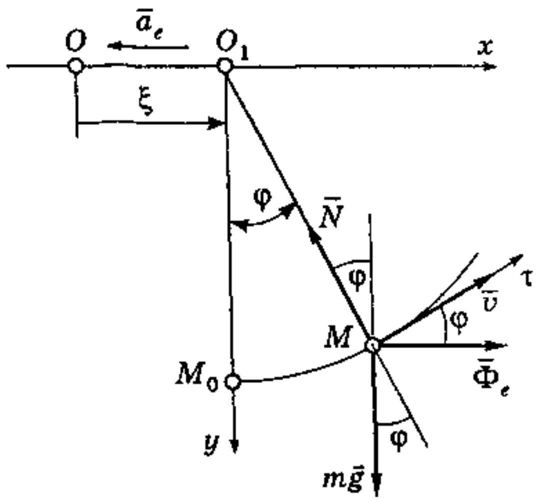
Ответ: 1) $a=1{,}03$ м/с^2; 2) $T-T_1=0{,}0028T$.

Задача 33.7



Точка O_1 привеса маятника длины l совершает прямолинейные гармонические колебания около неподвижной точки O: $OO_1=a\sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в момент, равный нулю, $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$.

Р е ш е н и е



Покажем на рисунке силы, действующие на маятник: силу тяжести $m\bar{g}$, реакцию $\bar{N}$ нити, переносную $\bar{\Phi}_e$ силу инерции.

В этом случае дифференциальное уравнение относительного движения в проекции на ось τ имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = \Phi_e \cos\varphi - mg\sin\varphi,$$

где $v = l\dot{\varphi}$, $\dfrac{dv}{dt} = \ddot{\varphi}$; $|\Phi_e| = m\ddot{\xi} = map^2 \sin pt$.

После преобразований, считая, что для малых колебаний $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$, получим

$$l\ddot{\varphi} = ap^2 \sin pt - g\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = h\sin pt, \qquad (1)$$

где $k^2 = \dfrac{g}{l}$; $h = \dfrac{ap^2}{l}$.

Уравнение (1) описывает вынужденные колебания, а его решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt, \qquad (2)$$

$$\dot{\varphi} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos pt.$$

Используя начальные условия: $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, определим постоянные C_1 и C_2: $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{hp}{(k^2 - p^2)k}$.

Тогда решение (2) примет вид

$$\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right),$$

где $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $p \neq k$.

О т в е т: $\varphi = \dfrac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \dfrac{p}{k}\sin kt\right)$, $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Задача 33.8

Точка, находящаяся на широте λ, брошена в западном направлении под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Определить время и дальность полета точки.

Решение

Введем декартову систему координат (рис. 1), проведя оси x и y соответственно по касательным к меридиану на юг и к параллели на восток, ось z по истинной вертикали.

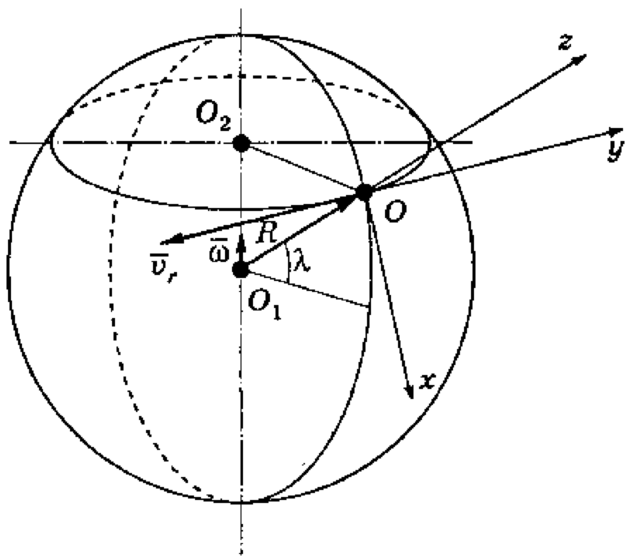


Рис. 1

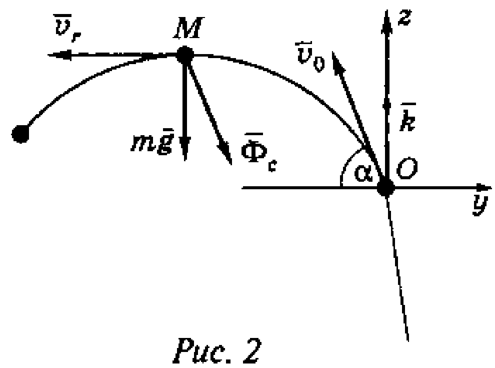


Рис. 2

Тогда относительное движение точки будет происходить под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и силы $\bar{\Phi}_c$ инерции Кориолиса (рис. 2).

Уравнение движения точки имеет вид

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{\Phi}_c$$

или

$$\bar{a}_r = \bar{g} - 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r). \quad (1)$$

Составим таблицу проекций векторов, входящих в это уравнение, на оси x, y и z и начальных условий.

Ось	$\bar{a}_r$	$\bar{g}$	$\bar{\omega}$	$\bar{v}_r$	t	$\bar{r}_0$	$\dot{\bar{r}}_0$
x	$\ddot{x}$	0	$-\omega\cos\lambda$	$\dot{x}$	0	0	0
y	$\ddot{y}$	0	0	$\dot{y}$	0	0	$-v_0\cos\alpha$
z	$\ddot{z}$	$-g$	$\omega\sin\lambda$	$\dot{z}$	0	0	$v_0\sin\alpha$

Кроме того, найдем

$$\bar{\omega}\times\bar{v}_r=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}=$$

$$=-\bar{i}\dot{y}\,\omega\sin\lambda+\bar{j}\omega\,(\dot{x}\sin\lambda+\dot{z}\cos\lambda)-\bar{k}\,\omega\dot{y}\cos\lambda.$$

Тогда уравнение (1) в проекциях на оси координат:

$$\ddot{x}=2\omega\dot{y}\sin\lambda,$$

$$\ddot{y}=-2\omega\dot{x}\sin\lambda-2\omega\dot{z}\cos\lambda,$$

$$\ddot{z}=-g+2\omega\dot{y}\cos\lambda.$$

Интегрируя эти уравнения по времени, получим

$$\dot{x}=2\omega y\sin\lambda+C_1,$$

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\lambda-2\omega z\cos\lambda+C_2,$$

$$\dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda+C_3.$$

Согласно начальным условиям (см. три последние колонки таблицы) найдем: $C_1=0$, $C_2=-v_0\cos\alpha$, $C_3=v_0\sin\alpha$.

Тогда запишем

$$\dot{x}=2\omega y\sin\lambda, \tag{2}$$

$$\dot{y}=-2\omega x\sin\lambda-2\omega z\cos\lambda-v_0\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\dot{z}=-gt+2\omega y\cos\lambda+v_0\sin\alpha. \tag{4}$$

Из формулы (2) определим

$$y=\frac{\dot{x}}{2\omega\sin\lambda},$$

подставим это выражение в формулу (4) и получим

$$\dot{z}=-gt+\frac{\dot{x}}{\operatorname{tg}\lambda}+v_0\sin\alpha. \tag{5}$$

Проинтегрируем выражение (5) с учетом начальных условий:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \frac{x}{\operatorname{tg}\lambda} + v_0 t \sin\alpha. \tag{6}$$

Подставим найденное значение z, а также выражение

$$\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{2\omega\sin\lambda}$$

в формулу (3) и получим

$$\ddot{x} + 4\omega^2 x = 4\omega^2\left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t\sin\alpha\right)\sin\lambda\cos\lambda - 2\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha.$$

Пренебрегая ω^2, ввиду его малости по сравнению с ωv_0, приходим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} = -2\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha. \tag{7}$$

Решим уравнение (7) и с учетом начальных условий: $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, получим

$$x = -(\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha)t^2.$$

Подставим это выражение в уравнение (6) и, считая в момент падения точки на Землю $z = 0$, запишем

$$0 = -\frac{gt^2}{2} - \frac{\omega v_0 t^2 \sin\lambda\cos\alpha}{\operatorname{tg}\lambda} + v_0 t\sin\alpha,$$

откуда время $T = t$ полета точки

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g + 2\omega v_0\cos\lambda\cos\alpha} \approx \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0\cos\lambda\cos\alpha}{g}\right),$$

где учтено, что ω — малая величина.

Для определения зависимости $y = y(t)$ выразим из уравнения (7)

$$\dot{x} = -(2\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha)t,$$

подставим в уравнение (2) и получим

$$y = -v_0 t\cos\alpha.$$

Тогда дальность L полета точки

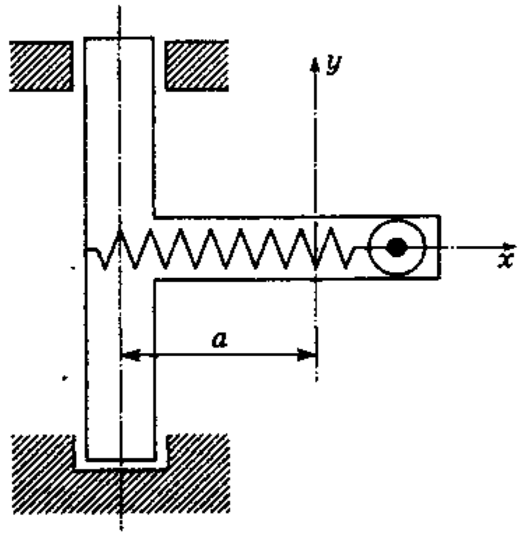
$$L = y(t) = \frac{-v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{4v_0^3 \omega \cos\lambda \sin\alpha \cos^2\alpha}{g^2}.$$

Ответ: $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g + 2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha} \approx \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \dfrac{2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right)$;

$L = \dfrac{-v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \dfrac{4v_0^3 \omega \cos\lambda \sin\alpha \cos^2\alpha}{g^2}$, где ω — угловая скорость вращения Земли.

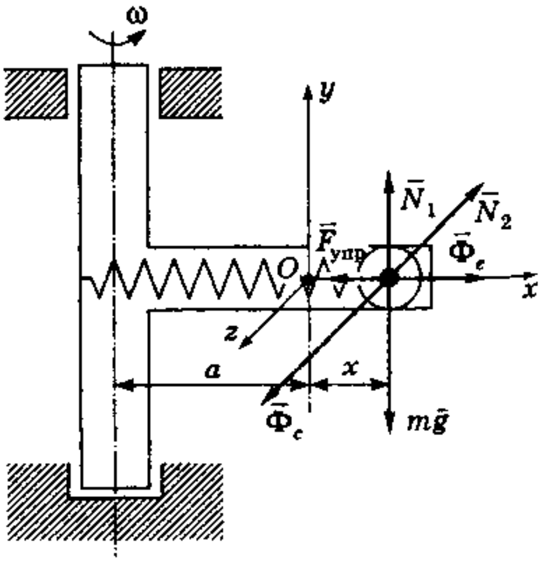
Задача 33.9

Шарик массы m, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.



Решение

При относительном движении шарика вдоль оси x (см. рисунок) на него действуют сила упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины и переносная $\bar{\Phi}_e$ сила инерции. Сила тяжести $m\bar{g}$ и сила $\bar{\Phi}_c$ инерции Кориолиса перпендикулярны к оси x и уравновешены соответствующими силами $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ реакции стенки трубки.



Запишем уравнение движения шарика в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -F_{упр} + \Phi_e, \qquad (1)$$

где $F_{упр} = cx$; $\Phi_e = ma_e^n = m(a + x)\omega^2$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x}+\left(k^2-\omega^2\right)x=a\omega^2, \tag{2}$$

где $k^2=\dfrac{c}{m}$.

1. Если $k^2>\omega^2$, то уравнение (2) описывает свободные колебания материальной точки и его решение ищем в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}=C_1\cos\sqrt{k^2-\omega^2}\,t+C_2\sin\sqrt{k^2-\omega^2}\,t$ — решение однородного уравнения; x^* — частное решение, $x^*=A$.

Подставим x^* в уравнение (2) и найдем

$$A=\frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2}.$$

Следовательно,

$$x=C_1\cos\sqrt{k^2-\omega^2}\,t+C_2\sin\sqrt{k^2-\omega^2}\,t+\frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2}, \tag{3}$$

$$\dot{x}=-C_1\sqrt{k^2-\omega^2}\sin\sqrt{k^2-\omega^2}\,t+C_2\sqrt{k^2-\omega^2}\cos\sqrt{k^2-\omega^2}\,t. \tag{4}$$

Определим C_1 и C_2, подставив начальные условия: $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$, в выражения (3) и (4): $C_1=-\dfrac{a\omega^2}{k^2-\omega^2}$, $C_2=0$.

Подставим значения постоянных интегрирования в формулу (3):

$$x=\frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2}\left(1-\cos\sqrt{k^2-\omega^2}\,t\right).$$

Использовав тождество

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

применительно к этому выражению $\left(\alpha=\sqrt{k^2-\omega^2}\,t\right)$ получим

$$x=\frac{2a\omega^2}{k^2-\omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}\,t}{2}.$$

2. При $k^2 < \omega^2$ уравнение (2) перепишем в виде

$$\ddot{x} - (\omega^2 - k^2)x = a\omega^2. \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$x = \bar{x} + x^*,$$

где $\bar{x} = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус; $x^* = -\dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}$.

Тогда

$$x = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t - \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}, \qquad (6)$$

$$\dot{x} = C_1\sqrt{\omega^2 - k^2}\operatorname{sh}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t + C_2\sqrt{\omega^2 - k^2}\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t.$$

Используя начальные условия, найдем постоянные интегрирования: $C_1 = \dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}$, $C_2 = 0$.

С учетом значений C_1 и C_2 уравнение (6) примет вид

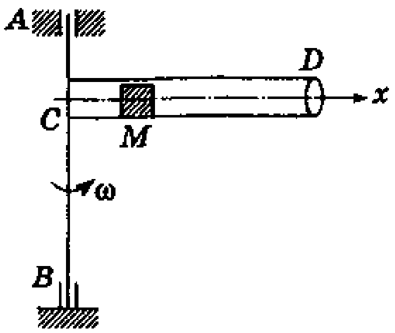
$$x = \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t - 1).$$

Ответ: в системе координат, начало которой совпадает с точкой равновесия шарика,

$$x = \frac{2a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}}{2}t \text{ при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} > \omega;$$

$$x = \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\, t - 1) \text{ при } k = \sqrt{\frac{c}{m}} < \omega.$$

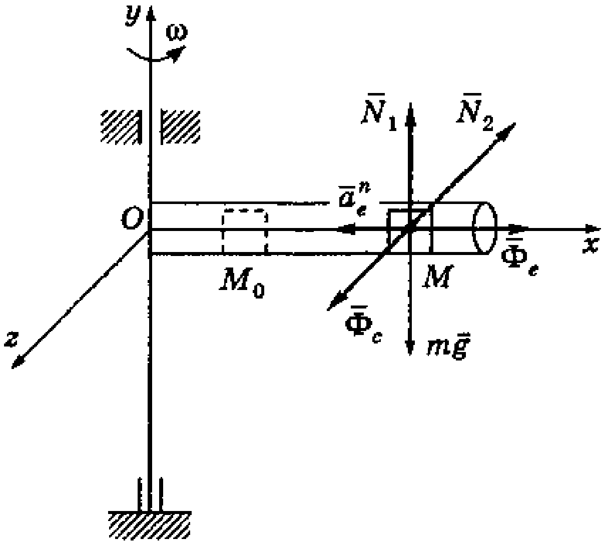
Задача 33.10



Горизонтальная трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость v тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна L. Трением пренебречь.

Решение

При относительном движении тела M по трубке (см. рисунок) действующие на него сила тяжести $m\bar{g}$ и сила $\bar{\Phi}_c$ инерции Кориолиса перпендикулярны к оси x и уравновешены соответствующими реакциями $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ стенки трубки. Таким образом, в направлении оси x действует переносная $\Phi_e = ma_e^n$ сила инерции, которая противоположна переносному $\bar{a}_e^n$ нормальному ускорению.



Дифференциальное уравнение относительного движения тела в проекции на ось x

$$m\ddot{x} = ma_e^n,$$

или, так как $a_e^n = \omega^2 x$

$$\ddot{x} = \omega^2 x. \tag{1}$$

Полагая $\dot{x} = v(x)$, запишем

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

Уравнение (1) примет вид

$$vdv = \omega^2 xdx. \tag{2}$$

Проинтегрируем выражение (2) с учетом начальных условий:

$$\int_0^v vdv = \omega^2 \int_{x_0}^L xdx$$

и найдем

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = \omega^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^L \Rightarrow v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega.$$

Ответ: $v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega.$

Задача 33.11

В условиях предыдущей задачи определить время движения тела в трубке.

Р е ш е н и е

Согласно решению задачи 33.10, движение тела описывается уравнением

$$\ddot{x} = \omega^2 x. \tag{1}$$

Сделаем замену переменных $\dot{x} = v(x)$ и приведем уравнение (1) к виду

$$v = \omega\sqrt{x^2 - x_0^2}.$$

Полагая

$$v = \frac{dx}{dt},$$

разделим переменные, проинтегрируем:

$$\int_{x_0}^{L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \omega\int_0^T dt$$

и получим

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - x_0^2}\right)\Big|_{x_0}^{L} = \omega t\Big|_0^T,$$

$$\ln\left(L + \sqrt{L^2 - x_0^2}\right) - \ln x_0 = \omega T. \tag{2}$$

Так как

$$\ln\left(L + \sqrt{L^2 - x_0^2}\right) - \ln x_0 = \ln\frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0},$$

то из формулы (2) получим

$$T = \frac{1}{\omega}\ln\frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}.$$

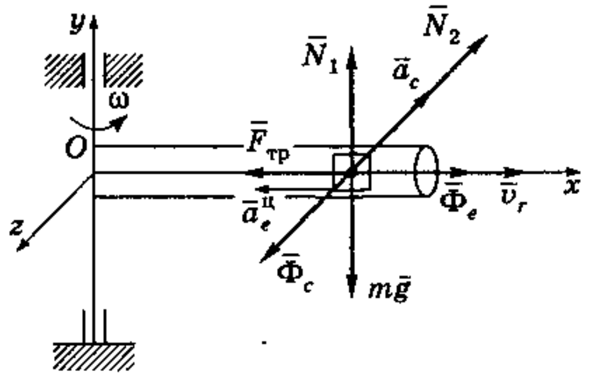
О т в е т: $T = \dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$.

Задача 33.12

В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f.

Решение

Рассмотрим движение тела внутри трубки (см. рисунок) под действием силы тяжести $m\bar{g}$, силы трения $\bar{F}_{тр}$, нормальной реакции $\bar{N}$, где $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$.



Запишем дифференциальное уравнение относительного движения тела в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \Phi_e - F_{тр},$$

где $\Phi_e = ma_e = m\omega^2 x$; $F_{тр} = fN = f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$.

Тогда

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x - f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}. \qquad (1)$$

Для определения N_1 и N_2 запишем уравнение движения тела в проекциях на оси y и z:

$$m\ddot{y} = N_1 - mg, \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = \Phi_c - N_2, \qquad (3)$$

где Φ_c — сила инерции Кориолиса, $\Phi_c = ma_c = 2m\omega\dot{x}$.

Так как движение вдоль осей y и z отсутствует, то $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Тогда из формул (2) и (3) получим

$$N_1 = mg,$$

$$N_2 = 2m\omega\dot{x}.$$

Зная значения составляющих нормальной реакции, найдем

$$N = \sqrt{(mg)^2 + (2m\omega\dot{x})^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}^2}.$$

Окончательно дифференциальное уравнение (1) имеет вид

$$\ddot{x} = \omega^2 x - f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2},$$

если тело движется вправо, т.е. $\dot{x} > 0$;

$$\ddot{x} = \omega^2 x + f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2},$$

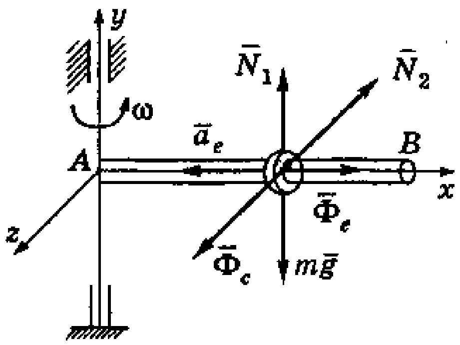
если тело движется влево, т.е. $\dot{x} < 0$.

Ответ: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$; верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $\dot{x} > 0$.

Задача 33.13

Кольцо движется по гладкому стержню AB, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A, делая один оборот в секунду; длина стержня 1 м; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 см от конца A и имело скорость, равную нулю. Определить момент t_1, когда кольцо сойдет со стержня.

Решение



Рассмотрим движение кольца (см. рисунок) под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и нормальной реакции $\bar{N}$, где $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$.

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения кольца в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \Phi_e,$$

где Φ_e — переносная сила инерции, $\Phi_e = ma_e = mx\omega^2$.

Тогда

$$m\ddot{x} = mx\omega^2$$

или

$$\ddot{x} = x\omega^2. \qquad (1)$$

Введем замену:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

и перепишем выражение (1) в виде

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=\omega^2 x.$$

Разделим переменные, проинтегрируем и получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2}=\omega^2\frac{x^2}{2}+C_1. \qquad (2)$$

С учетом начальных условий: $x_0=l_0$, $\dot{x}_0=0$, найдем

$$C_1=-\frac{\omega^2 l_0}{2}.$$

Подставим значение C_1 в уравнение (2) и получим

$$\dot{x}=\omega\sqrt{x^2-l_0^2}$$

или, так как $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=\omega\sqrt{x^2-l_0^2}.$$

Разделим переменные в этом выражении:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-l_0^2}}=\omega dt$$

и проинтегрируем:

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-l_0^2}\right)=\omega t+C_2. \qquad (3)$$

Исходя из начальных условий: $t=0$, $x_0=l_0$, найдем $C_2=\ln l_0$. Подставив значение C_2 в уравнение (3), определим

$$t=\frac{1}{\omega}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-l_0^2}}{l_0}.$$

В момент t_1 схода кольца со стержня $x=l$, следовательно,

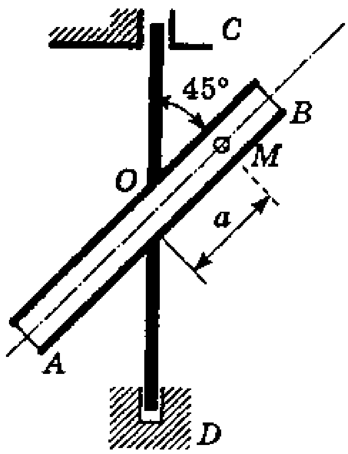
$$t_1=\frac{1}{\omega}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-l_0^2}}{l_0}.$$

С учетом данных задачи: $\omega = 2\pi$ рад/с, $l = 1$ м, $l_0 = 0{,}6$ м, рассчитаем

$$t_1 = \frac{1}{2\pi}\ln 3 = 0{,}175 \text{ (с)}.$$

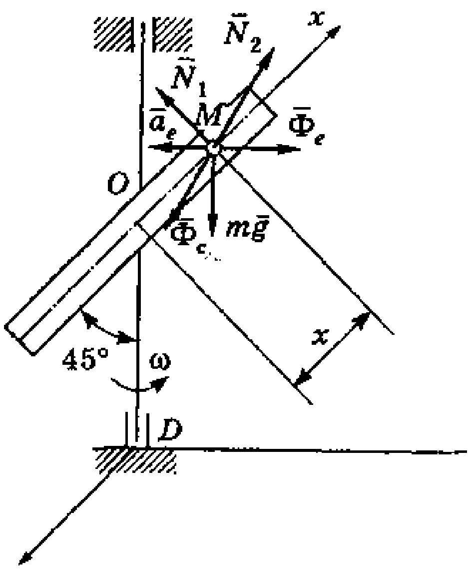
О т в е т: $t_1 = \dfrac{\ln 3}{2\pi} = 0{,}175$ с.

Задача 33.14



Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол 45° (см. рисунок). В трубке находится тяжелый шарик M. Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a. Трением пренебречь.

Р е ш е н и е



Рассмотрим движение тяжелого шарика (см. рисунок) под действием силы тяжести $m\bar{g}$ и нормальной реакции $\bar{N}$, где $\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$.

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения шарика в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = \Phi_e \cos 45° - mg\cos 45°, \qquad (1)$$

где $\bar{\Phi}_e$ — переносная сила инерции;

$\Phi_e = \Phi_e^{\text{ц}} = m\omega^2 x \cos 45°$.

После преобразований уравнение (1) примет вид

$$\ddot{x} - \frac{\omega^2}{2}x = -g\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - \frac{\omega^2}{2} = 0$$

имеет решения

$$r_{1,2}=\pm\frac{\omega\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому решение уравнения (2) ищем в виде

$$x=\bar{x}+x^*,$$

где $\bar{x}=C_1e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}+C_2l^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}$; $x^*=\dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

Тогда

$$x=C_1e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}+C_2e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}+\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}, \tag{3}$$

$$\dot{x}=\frac{\omega\sqrt{2}}{2}\left(C_1e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}-C_2e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right).$$

Используя начальные условия: $t=0$, $x=a$, $\dot{x}=0$, найдем постоянные интегрирования: $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и запишем уравнение движения шарика:

$$x=OM=\frac{1}{2}\left(a-\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}+e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right)+\frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

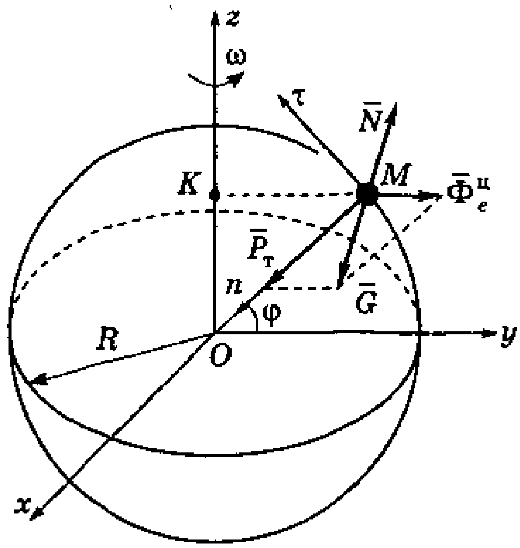
Ответ: $OM=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}+e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right)+\dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$

Задача 33.15

Определить, как меняется ускорение силы тяжести в зависимости от широты места φ вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли $R=6370$ км.

Решение

Рассмотрим состояние относительного покоя материальной точки M на поверхности Земли. Условие относительного покоя выражается равенством



$$\bar{P}_{\text{т}} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e^{\text{ц}} = 0,$$

где $\bar{P}_{\text{т}}$ — сила притяжения Земли, направленная к ее центру; $\bar{\Phi}_e^{\text{ц}}$ — переносная сила инерции, которая вследствие равномерного вращения Земли представляет собой центробежную силу инерции,

$$\Phi_e^{\text{ц}} = m|MK|\omega_e^2 = m\omega^2 R\cos\varphi.$$

Очевидно (см. рисунок), что действие точки на опору $\bar{G} = -\bar{N}$, причем

$$\bar{G} = \bar{P}_{\text{т}} + \bar{\Phi}_e^{\text{ц}}. \qquad (1)$$

Направление силы тяжести $\bar{G}$ определяет направление вертикали в данной точке земной поверхности. Спроецируем векторное равенство (1) на оси n и τ:

$$G_n = P_{\text{т}} - \Phi_e^{\text{ц}}\cos\varphi,$$

$$G_\tau = \Phi_e^{\text{ц}}\sin\varphi.$$

Тогда

$$G = mg_1 = \sqrt{(P_{\text{т}} - \Phi_e\cos\varphi)^2 + (\Phi_e\sin\varphi)^2},$$

где g_1 — ускорение силы тяжести на любой широте; φ — географическая широта.

Пренебрегая слагаемым $(\Phi_e\sin\varphi)^2$ ввиду малости значения ω^4, запишем

$$mg_1 = P_{\text{т}} - \Phi_e\cos\varphi = P_{\text{т}} - mR\omega^2\cos^2\varphi,$$

откуда

$$g_1 = \frac{P_т}{m} - R\omega^2\cos^2\varphi = g - R\omega^2\cos^2\varphi = g\left(1 - \frac{R\omega^2\cos^2\varphi}{g}\right),$$

где g — ускорение силы тяжести на полюсе.

С учетом значений радиуса Земли и ускорения силы тяжести на полюсе найдем

$$g_1 = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$

О т в е т: если пренебречь членом ω^4 ввиду его малости, то $g_1 = g\left(1 - \frac{R\omega^2\cos^2\varphi}{g}\right)$ или $g_1 = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right)$, где g — ускорение силы тяжести на полюсе, φ — географическая широта места.

Задача 33.16

Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тяжелая точка, находящаяся на поверхности Земли на экваторе, не имела бы веса? Радиус Земли $R = 6370$ км.

Р е ш е н и е

На основе результата решения задачи 33.15 на экваторе, где $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$,

$$g_1 = g - R\omega^2.$$

При невесомости на Земле $g_1 = 0$, тогда

$$\omega_э^2 = \frac{g}{R}.$$

Поскольку угловая скорость вращения Земли $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{24\cdot 3600}$, то

$$\frac{\omega_э}{\omega_0} = \sqrt{\frac{9{,}81}{6370\cdot 10^3}}\cdot\frac{24\cdot 3600}{2\pi} = \frac{1{,}24\cdot 3{,}6\cdot 24}{2\cdot 3{,}14} \approx 17.$$

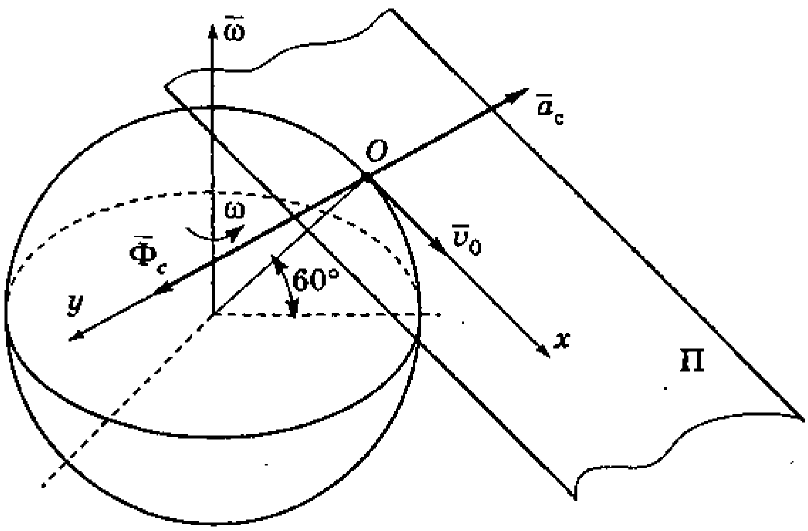
О т в е т: в 17 раз.

Задача 33.17

Артиллерийский снаряд движется по настильной траектории (т.е. по траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Горизонтальная скорость снаряда во время движения $v_0 = 900$ м/с. Снаряд должен поразить цель, отстоящую от места выстрела на расстоянии 18 км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на сколько отклонится снаряд от цели вследствие вращения Земли. Стрельба происходит на северной широте $\lambda = 60°$.

Решение

Угол между касательной плоскостью П и осью Земли (см. рисунок) $\lambda = 60°$. Следовательно, проведенная вдоль меридиана прямая, находящаяся в указанной касательной плоскости, также составляет с осью Земли угол 60°.



Запишем дифференциальное уравнение движения снаряда в проекции на ось y:

$$m\ddot{y} = \Phi_c,$$

где Φ_c — сила инерции Кориолиса, $\Phi_c = 2m\omega v_0 \sin\lambda$.

Тогда

$$\ddot{y} = 2\omega v_0 \sin\lambda.$$

Введем замену $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}$, разделим переменные, проинтегрируем и получим

$$\dot{y} = 2\omega v_0 t \sin\lambda + C_1.$$

С учетом начальных условий: $t=0$, $\dot{y}=0$, найдем $C_1=0$, следовательно,

$$\dot{y}=2\omega v_0 t\sin\lambda.$$

Сделаем замену $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, разделим переменные, проинтегрируем и найдем

$$y=\omega v_0 t^2\sin\lambda+C_2.$$

Определим постоянную интегрирования C_2 исходя из начальных условий: $t=0$, $y=0$; $C_2=0$, тогда

$$y=\omega v_0 t^2\sin\lambda.$$

Определим время полета снаряда до цели

$$t=\frac{l}{v_0}=\frac{18\cdot10^3}{9\cdot10^2}=20\ (\text{с})$$

и рассчитаем отклонение

$$y=\frac{2\cdot3{,}14\cdot900\cdot20^2\cdot\sqrt{3}}{24\cdot3600\cdot2}=22{,}7\ (\text{м}).$$

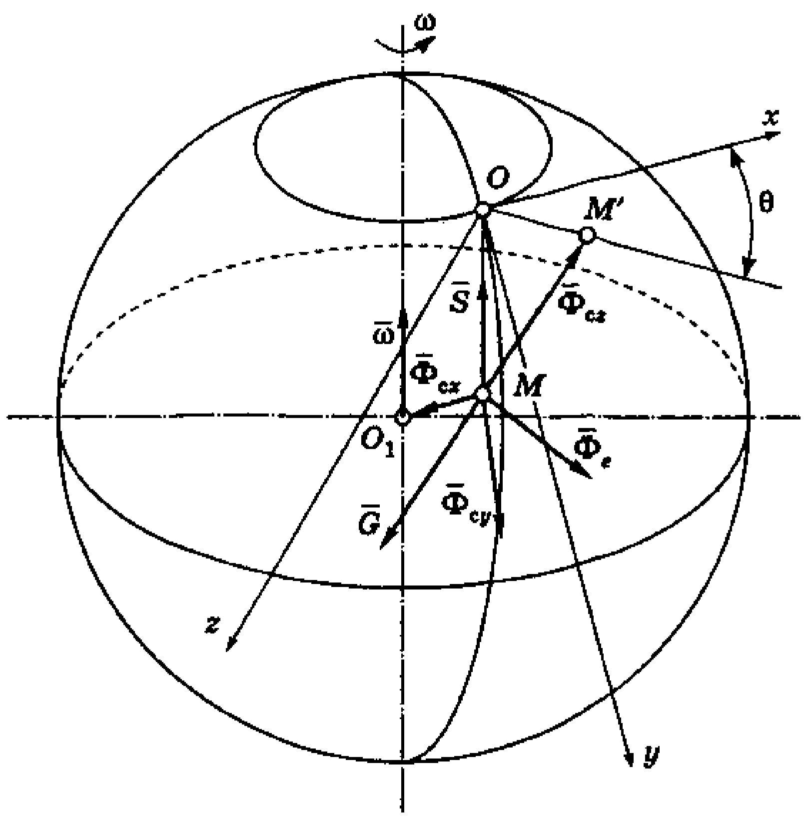
О т в е т: снаряд отклонится вправо (если смотреть на него сверху перпендикулярно к скорости) на величину $y=\omega v_0 t^2\sin\lambda=22{,}7$ м независимо от направления стрельбы.

Задача 33.18

Маятник на длинной нити получает небольшую начальную скорость в плоскости север — юг. Считая отклонения маятника по сравнению с длиной нити и принимая во внимание вращение Земли вокруг оси, найти время, по истечении которого плоскость качаний маятника совпадает с плоскостью запад – восток. Маятник расположен на 60° северной широты.

Р е ш е н и е

Маятник совершает сложное движение: переносное — вращение вместе с Землей с угловой скоростью $\overline{\omega}$ и относительное — колебание в подвижной системе координат $Oxyz$.



Для составления дифференциальных уравнений относительного движения маятника покажем на рисунке силы, действующие на маятник: силу тяжести $\bar{G}$, силу натяжения нити $\bar{S}$, составляющие $\bar{\Phi}_{cx}$, $\bar{\Phi}_{cy}$, $\bar{\Phi}_{cz}$ силы инерции Кориолиса, переносную $\bar{\Phi}_e$ силу инерции.

Так как угловая скорость Земли ω мала, то можно принять, что $\bar{\Phi}_e \approx 0$.

В проекциях на подвижные оси координат уравнение движения маятника имеет вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -S\frac{x}{L} - 2m\omega(\dot{y}\sin\varphi - \dot{z}\cos\varphi), \\ m\ddot{y} &= -S\frac{y}{L} + 2m\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ m\ddot{z} &= -S\frac{z}{L} + mg - 2m\omega\dot{x}\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где L — длина маятника; φ — географическая широта, φ = 60°.

Для малых колебаний маятника можно считать, что

$$z = L = \text{const}, \quad S = G = mg.$$

Тогда первые два уравнения системы (1) примут вид

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -g\frac{x}{L} - 2\omega\dot{y}\sin\varphi,\\ \ddot{y} &= -g\frac{y}{L} + 2\omega\dot{x}\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Умножим первое уравнение системы (2) на $-y$, второе — на x, просуммируем и получим

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega(y\dot{y} + x\dot{x})\sin\varphi,$$

или

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 2\omega\sin\varphi\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right). \tag{3}$$

Перейдем к полярным координатам: $OM' = R$ и θ, тогда

$$x = R\cos\theta,$$

$$y = R\sin\theta,$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = R^2\frac{d\theta}{dt},$$

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \omega\frac{d}{dt}(R^2)\sin\varphi. \tag{4}$$

Проинтегрируем уравнение (4):

$$R^2\frac{d\theta}{dt} = R^2\omega\sin\varphi + C_1.$$

Так как в начальный момент $t = 0$, $R = 0$, $v_0 \neq 0$, то $C_1 = 0$. Тогда

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\sin\varphi. \tag{5}$$

Проинтегрируем уравнение (5) и получим

$$\theta = \omega t\sin\varphi + C_2.$$

В начальный момент $t = 0$, $\theta = 0$, следовательно, $C_2 = 0$. Тогда

$$\theta = \omega t \sin\varphi. \tag{6}$$

Уравнение (6) определяет закон вращения плоскости колебания маятника с угловой скоростью $\omega \sin\varphi$.

Таким образом, плоскость колебания маятника повернется на угол $\frac{\pi}{2}$ за время

$$t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega \sin\varphi} = \frac{\pi}{2\omega \sin\varphi}.$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{24}$ рад/ч, то

$$T = t = \frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 6{,}93 \text{ (ч)}.$$

Учитывая периодичность изменения направления плоскости колебания маятника,

$$T = 6{,}93(1 + 2k) = 13{,}86(0{,}5 + k),$$

где k = 1,2,3...

Ответ: $t = 13{,}86(0{,}5 + k)$ часов, где k = 1,2,3...

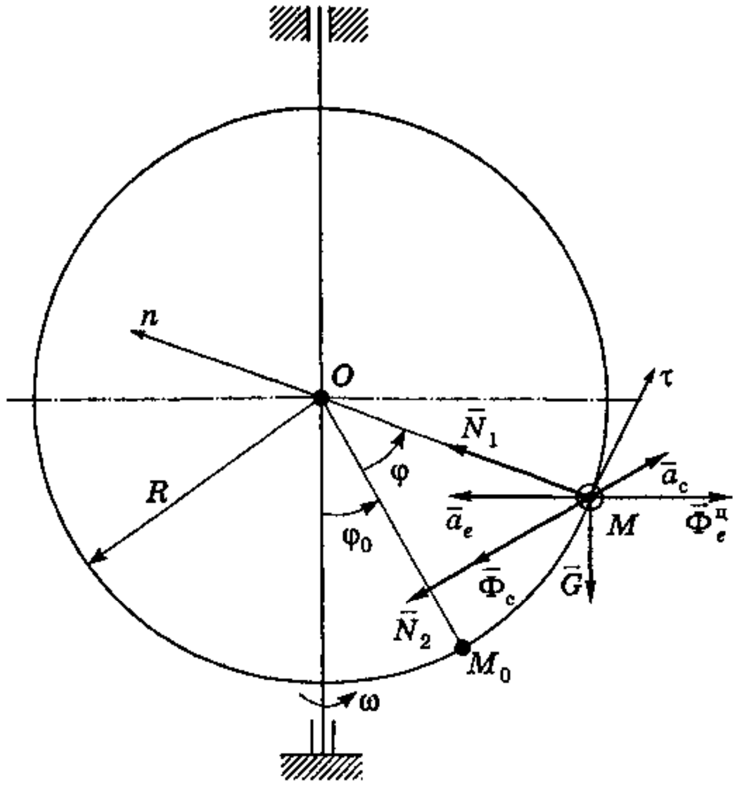
Задача 33.19

Тяжелая точка может двигаться без трения по вертикальному проволочному кольцу, которое вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Радиус кольца равен R. Найти положение равновесия точки и определить, как будет двигаться точка, если в положении равновесия она получит малую скорость v_0 по касательной вверх.

Решение

Точка M совершает сложное движение: относительное — перемещение по кольцу, и переносное — вращение вместе с кольцом. В положении M_0, определяемом углом φ_0, точка находится в равновесии.

Обозначим M — произвольное положение точки, которому соответствует угол отклонения $\varphi_0 + \varphi$. Для составления уравнения относительного движения точки покажем на рисунке действующие на нее силы: силу тяжести $\overline{G}$, реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, переносную $\overline{\Phi}_e^{ц}$ силу инерции, силу $\overline{\Phi}_c$ инерции Кориолиса.



При этом

$$\overline{\Phi}_c = -m\overline{a}_c,$$

$$\overline{\Phi}_e^{ц} = -m\overline{a}_e = -m\overline{a}_e^{ц},$$

а векторы $\overline{a}_c$, $\overline{\Phi}_c$, $\overline{N}_2$ перпендикулярны плоскости кольца.

Запишем уравнение относительного движения точки:

$$m\overline{a}_r = \overline{G} + \overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{\Phi}_e^{ц} + \overline{\Phi}_c .$$

Спроецируем это уравнение на ось τ:

$$ma_r^{\tau} = -G\sin(\varphi_0 + \varphi) + \Phi_e^{ц}\cos(\varphi_0 + \varphi),$$

где $G = mg$; $\Phi_e^{ц} = m\omega^2 R\sin(\varphi_0 + \varphi)$.

Тогда

$$ma_r^\tau = -mg\sin(\varphi_0 + \varphi) + m\omega^2 R\sin(\varphi_0 + \varphi)\cos(\varphi_0 + \varphi). \qquad (1)$$

Найдем положение равновесия точки, т.е. угол φ_0. В этом положении $a_r^\tau = 0$, $\varphi = 0$. Следовательно, уравнение (1) имеет вид

$$0 = -mg\sin\varphi_0 + m\omega^2 R\sin\varphi_0\cos\varphi_0.$$

Откуда

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}, \qquad (2)$$

$$\varphi_0 = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}.$$

Определим дальнейшее движение точки, если в положении M_0 ей сообщили скорость $\bar{v}_0$. В уравнение (1) подставим $a_r^\tau = R\ddot{\varphi}$ и получим

$$mR\ddot{\varphi} = -mg(\sin\varphi_0\cos\varphi + \cos\varphi_0\sin\varphi) +$$

$$+ m\omega^2 R(\sin\varphi_0\cos\varphi + \cos\varphi_0\sin\varphi)(\cos\varphi_0\cos\varphi - \sin\varphi_0\sin\varphi). \qquad (3)$$

Преобразуем уравнение (3). Ввиду малости угла φ можно считать, что $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, а также можно пренебречь членом уравнения, содержащим $\sin^2\varphi$, так как $\sin^2\varphi \approx \varphi^2 \approx 0$. Кроме того, согласно формуле (2)

$$g = \omega^2 R\cos\varphi_0.$$

После преобразований уравнение (3) примет вид

$$R\ddot{\varphi} = -\omega^2 R\varphi\sin^2\varphi_0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi\sin^2\varphi_0 = 0. \qquad (4)$$

Так как $\cos\varphi_0 = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ [см. формулу (2)], то

$$\sin^2\varphi_0 = 1 - \cos^2\varphi_0 = 1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} = \frac{\omega^4 R^2 - g^2}{\omega^4 R^2}.$$

Подставим это выражение в уравнение (4) и получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{\omega^4 R^2 - g^2}{\omega^2 R^2}\varphi = 0$$

или

$$\dot{\varphi}+k^2\varphi=0, \qquad (5)$$

где $k=\dfrac{\sqrt{\omega^4R^2-g^2}}{\omega R}$.

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$\varphi=C_1\cos kt+C_2\sin kt, \qquad (6)$$

$$\dot{\varphi}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt.$$

Используя начальные условия: $t=0$, $\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=\dfrac{v_0}{R}$, найдем постоянные интегрирования: $C_1=0$, $C_2=\dfrac{v_0}{Rk}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (6) и запишем уравнение движения точки:

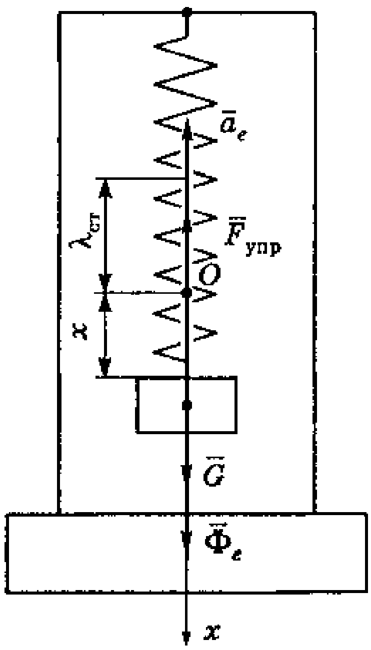
$$\varphi=\frac{v_0}{Rk}\sin kt.$$

Ответ: положение равновесия соответствует углу $\varphi_0=\arccos\dfrac{g}{\omega^2R}$, отсчитываемому от нижнего положения точки на круге. Точка, получившая малую скорость $\bar{v}_0$, будет совершать малые колебания около положения равновесия согласно уравнению: $\varphi=\dfrac{v_0}{Rk}\sin kt$, где $k=\dfrac{\sqrt{\omega^4R^2-g^2}}{\omega R}$.

Задача 33.20

Пружинный вибродатчик используется для измерения вертикального ускорения поезда, круговая частота вертикальных колебаний которого равна 10 рад/с. База прибора составляет одно целое с корпусом одного из вагонов поезда. К базе прибора крепится пружина с коэффициентом жесткости $c=17{,}64$ кН/м. К пружине прикреплен груз массы $m=1{,}75$ кг. Амплитуда относительного движения груза вибродатчика равна 0,125 см по записи прибора. Найти максимальное вертикальное ускорение поезда. Какова амплитуда вибрации поезда?

Р е ш е н и е



Рассмотрим относительное движение груза (см. рисунок) под действием сил: тяжести $\bar{G}$, упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины, переносной $\bar{\Phi}_e$ силы инерции, которая определяется вертикальным колебанием вагона, $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$. Направим ось x вниз из положения статического равновесия груза, тогда $F_{упр} = c(\lambda_{ст} + x)$.

Вертикальное перемещение поезда представляет собой переносное движение и описывается уравнением

$$\xi = b \sin pt.$$

Тогда

$$a_e = \ddot{\xi} = -bp^2 \sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt.$$

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_{упр} + \Phi_e$$

или

$$m\ddot{x} = G - c(\lambda_{ст} + x) - mbp^2 \sin pt. \qquad (1)$$

Так как в положении статического равновесия $G = c\lambda_{ст}$, то уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - mbp^2 \sin pt$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

Уравнение (2) — это уравнение вынужденных колебаний. Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad (3)$$

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt.$$

Определим постоянные интегрирования с учетом начальных условий: $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$. Найдем: $C_1=0$, $C_2=-\dfrac{hp}{k(k^2-p^2)}$.

Подставим значения C_1 и C_2 в формулу (3) и окончательно получим

$$x=-\frac{hp}{k(k^2-p^2)}\sin kt+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt.$$

Амплитуда a относительного движения груза

$$a=\left|\frac{h}{k^2-p^2}\right|=\frac{bp^2}{k^2-p^2},$$

где b — амплитуда вертикальных колебаний поезда;
$k^2=\dfrac{c}{m}=\dfrac{17\,640}{1{,}75}=10\,080$; $p=10$ рад/с.

Откуда

$$b=\frac{a(k^2-p^2)}{p^2}=\frac{0{,}125(10080-100)}{100}=12{,}47\ (\text{см}).$$

Максимальное вертикальное ускорение поезда

$$a_{\max}=bp^2=12{,}47\cdot10^2=1247\ (\text{см/с}^2).$$

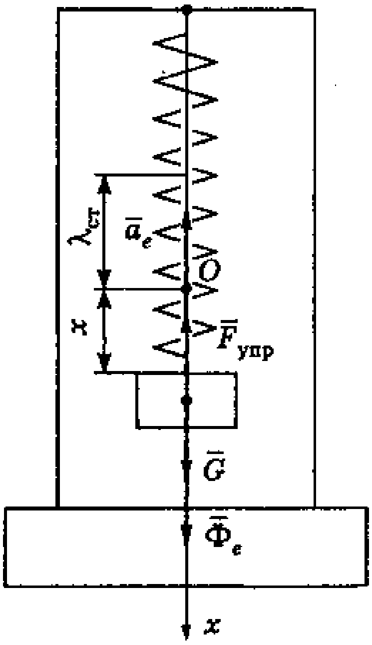
О т в е т: максимальное вертикальное ускорение поезда равно $a_{\max}=1247$ см/с^2. Амплитуда вертикальных колебаний поезда равна: $b=12{,}47$ см.

Задача 33.21

Виброметр используется для определения вертикальных колебаний одной из частей машины. В подвижной системе прибора демпфер отсутствует. Относительное смещение датчика виброметра (массивного груза) равно 0,005 см. Собственная частота колебаний виброметра — 6 Гц, частота колебаний вибрирующей части машины — 2 Гц. Чему равны амплитуда колебаний, максимальная скорость и максимальное ускорение вибрирующей части машины?

Решение

Рассмотрим относительное движение массивного груза датчика (см. рисунок) под действием силы тяжести $\bar{G}$, силы упругости $\bar{F}_{упр}$, переносной $\bar{\Phi}_e$ силы инерции, $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$. Направим ось x вниз из положения статического равновесия груза, тогда $F_{упр} = c(\lambda_{ст} + x)$.



Вертикальное перемещение вибрирующей части машины описывается уравнением

$$\xi = b\sin pt,$$

тогда

$$a_e = \ddot{\xi} = -bp^2 \sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt.$$

Составим дифференциальное уравнение относительного движения груза датчика в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - c(\lambda_{ст} + x) - mbp^2 \sin pt. \qquad (1)$$

В положении равновесия $G = c\lambda_{ст}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$m\ddot{x} = -cx - mbp^2 \sin pt$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \qquad (2)$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

Дифференциальное уравнение (2) описывает вынужденные колебания материальной точки. Амплитуда вынужденных колебаний в относительном движении определяется по формуле

$$a = \left|\frac{h}{k^2 - p^2}\right| = \frac{bp^2}{k^2 - p^2},$$

где b — амплитуда колебаний вибрирующей части машины.

Откуда

$$b = \frac{a(k^2 - p^2)}{p^2}.$$

Период собственных колебаний датчика виброметра

$$T_{д} = \frac{1}{f_{д}} = \frac{2\pi}{k},$$

откуда

$$k = 2\pi f_{д}.$$

Период переносных колебаний, т.е. вибрирующей части машины,

$$T_{м} = \frac{1}{f_{м}} = \frac{2\pi}{p},$$

откуда

$$p = 2\pi f_{м}.$$

Следовательно,

$$b = \frac{a\left[(2\pi f_{д})^2 - (2\pi f_{м})^2\right]}{(2\pi f_{м})^2} = \frac{a(f_{д}^2 - f_{м}^2)}{f_{м}^2} = \frac{0{,}005(6^2 - 2^2)}{2^2} = 0{,}04 \text{ (см)}.$$

Переносная скорость

$$v_e = \dot{\xi} = bp\cos pt.$$

Максимальной скорость вибрирующей части будет тогда, когда $\cos pt = 1$, т.е.

$$v_{e\,\max} = bp = 2b\pi f_{м} = 2 \cdot 0{,}04 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 0{,}5 \text{ (см/с)}.$$

Переносное ускорение

$$a_e = \ddot{\xi} = -bp^2 \sin pt$$

будет минимальным, когда $\sin pt = -1$, т.е.

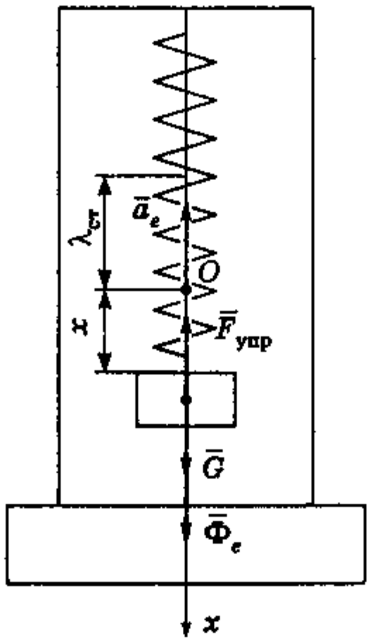
$$a_{e\,\max} = bp^2 = b(2\pi f_{м})^2 = 0{,}0004(2 \cdot 3{,}14 \cdot 2)^2 = 0{,}0631 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

О т в е т: амплитуда колебаний равна $b = 0{,}04$ см, максимальная скорость равна $v_{e\,\max} = 0{,}5$ см/с, максимальное ускорение равно $a_{e\,\max} = 6{,}316$ см/с^2.

Задача 33.22

Груз массы $m = 1{,}75$ кг подвешен внутри коробки на вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой $c = 0{,}88$ кН/м. Коробка установлена на столе, вибрирующем в вертикальном направлении. Уравнение колебаний стола $x = 0{,}225\sin 3t$ см. Найти абсолютную амплитуду колебаний груза.

Решение



Относительное движение груза (см. рисунок) происходит под действием силы тяжести $\bar{G}$, силы упругости $\bar{F}_{упр}$ пружины и переносной $\bar{\Phi}_e$ силы инерции, $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$. Направим ось x вниз из положения статического равновесия груза, тогда $F_{упр} = c(\lambda_{ст} + x)$.

Вертикальное перемещение стола описывается уравнением

$$\xi = b\sin pt,$$

тогда

$$a_e = \ddot{\xi} = -bp^2 \sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt,$$

где $p = 3$ рад/с, $b = 0{,}225$ см.

Запишем дифференциальное уравнение относительного движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G - F_{упр} + \Phi_e.$$

Так как в положении равновесия $G = c\lambda_{ст}$, то

$$m\ddot{x} = -cx - mbp^2 \sin pt$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt,$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

Это дифференциальное уравнение описывает вынужденные колебания материальной точки, амплитуда которых

$$a = \left|\frac{h}{k^2 - p^2}\right| = \frac{bp^2}{k^2 - p^2} = \frac{0{,}00225 \cdot 3^2}{\frac{880}{1{,}75} - 3^2} = 0{,}00004 \text{ (м)} = 0{,}004 \text{ (см)}.$$

Так как груз совершает сложное движение, a — амплитуда относительного движения, b — амплитуда переносного движения, то абсолютная амплитуда колебаний груза

$$A = a + b = 0{,}004 + 0{,}225 = 0{,}229 \text{ (см)}.$$

Ответ: $A = 0{,}229$ см.

Список использованных источников

Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике / А.И. Аркуша. М. : Высшая школа, 2004. 336 с.

Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. М. : Наука, 1991. 638 с.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. СПб. : Лань, 2002. 729 с.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. М. : Астраль, 2002. 991 с.

Добронравов В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 1983. 575 с.

Лойцянский К.Г. Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика / К.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. М. : Наука, 1983. 640 с.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М. : Наука, 1986. 448 с.

Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. М. : Высшая школа, 2003. 719 с.

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. М. : Высшая школа, 2006. 416 с.

Федута А.А. Теоретическая механика и математические методы / А.А. Федута, А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. Минск : Технопринт, 2000. 500 с.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. М. : Интеграл-пресс, 2006. 603 с.

Оглавление