ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА
Курс лекций

Книга является второй частью курса лекций по теоретической механике. В ней изложены сведения по разделу «Динамика». Приведены основные понятия, определения, аксиомы, теоремы, касающиеся динамического равновесия и движения материальных объектов.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – наука, основным содержанием которой является математическое моделирование механического состояния твердых материальных объектов.

Одним из основных допущений, принятых в теоретической механике, является допущение о геометрической неизменяемости тел, и по этому общему признаку она представляет собой механику твердого тела. Ее основные положения и методы используются в разделах механики деформируемых тел.

Основной задачей математического моделирования является получение количественно-качественной картины изучаемого явления. Реализация математической модели, доведение решений до численных результатов и их последующий анализ являются основными составляющими при изучении курса в техническом вузе. Математический аппарат и современный уровень электронных вычислительных средств позволяют преодолевать возникающие при этом трудности.

Изучение курса теоретической механики базируется на знаниях математики, физики, начертательной геометрии. В свою очередь, на его основе изучаются последующие дисциплины: сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин и многие другие из ряда общетехнических и специальных дисциплин. Овладение основами теоретической механики дает возможность обрести первые навыки инженерного мышления.

Инженер должен иметь представление о фундаментальном единстве естественных наук, математическом и физическом моделировании. Он должен уметь использовать основные понятия и положения механики, методы теоретических и экспериментальных исследований, представлять изображения пространственных объектов на плоских чертежах, производить оценки характерных величин.

ЛЕКЦИЯ 1

Введение в динамику. Основные понятия и определения. Законы Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки. Две основные задачи динамики материальной точки

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается зависимость между механическим движением материальных тел и действующими на них силами. Это наиболее общий раздел механики, представляющий собой эспериментально-теоретическую научную дисциплину. В ее основу положены исходные положения, аксиомы, проверенные на опыте. Впервые они были сформулированы Ньютоном и Галилеем в XVII веке.

Основные положения механики Ньютона разработаны применительно к простейшему случаю – для ***материальной точки*** (МТ). Под МТ понимается тело пренебрежимо малых размеров (в зависимости от условий задачи они могут разными по величине), обладающее массой. Другими словами, это точка, в которой сосредоточено некоторое количество материи.

Совокупность МТ, взаимодействующих между собой, называется ***механической системой***, или просто системой. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему МТ, расстояния между которыми не изменяются ни при каких условиях, то есть геометрически неизменяемую систему.

В основе классической механики лежат два допущения, утверждающие существование ***абсолютного пространства*** и ***абсолютного времени***: пространство обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения. Время, по Ньютону, также абсолютно (является независимым).

Поэтому допускается существование абсолютно неподвижной системы отсчета, по отношению к которой можно изучать абсолютное движение тела, а также независимость изменения времени от движения самой системы отсчета.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Первый закон (закон инерции)

Закон инерции описывает простейшее из возможных механических движений МТ в условиях полной ее изолированности от влияния на нее других материальных тел.

Всякая изолированная МТ, то есть точка, не подверженная воздействию каких-либо других материальных объектов, по отношению к неподвижной системе отсчета может находиться только в состоянии равномерного прямолинейного движения ($\bar{v} = \overline{\text{const}}$) или состоянии покоя ($\bar{v} = 0$).

Свойство МТ сохранять состояние своего движения неизменным при отсутствии сил, действующих на нее, или при их равновесии называется ее ***инерцией***.

Система отсчета, по отношению к которой справедлив закон инерции, называется ***основной***, или ***инерциальной***, системой, движение относительно этой системы называется ***абсолютным.***

Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной поступательно, прямолинейно, равномерно, является также инерциальной. С достаточным для практических решений приближением за инерциальную систему отсчета принимается система, неподвижно связанная с Землей.

Второй закон (основной закон динамики)

Причиной нарушения инерционного состояния МТ, то есть появления ее ускорения, является воздействие на нее других материальных тел или точек. Характеристика этого воздействия представляет собой векторную величину, называемую ***силой***, приложенной к данной точке.

Силу характеризуют: 1) направление воздействия на данную точку со стороны другой точки или тела; 2) интенсивность воздействия и зависимость ускорения МТ от ее сопротивляемости этому воздействию.

Способность МТ сопротивляться изменению состояния ее покоя или равномерного прямолинейного движения выражает собой ***инерцию***, или ***инертность.*** Мерой инертности МТ является ее масса.

Сила, действующая на МТ, пропорциональна массе точки и ускорению, сообщаемому точке приложенной к ней силой:

$$\overline{F} = km\overline{w}, \tag{1.1}$$

где $\overline{F}$ – вектор силы, m – масса МТ, $\overline{w}$ – вектор ускорения, k – коэффициент пропорциональности.

С выбором единиц силы, массы и ускорения таким, чтобы $k=1$, получим выражение основного закона динамики в виде

$$\overline{F} = m\overline{w}, \tag{1.2}$$

где $\overline{w}$ – абсолютное ускорение точки, то есть ускорение по отношению к инерциальной системе отсчета.

Таким образом, массу точки можно определить по тому ускорению, которое она получает при действии известной силы.

Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения тел $g = \text{const}$, а сила, сообщающая телу это ускорение, называется ***весом***, то есть $P = mg$. Отсюда вытекает понятие ***весомой массы*** $m = \dfrac{P}{g}$.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

Этот закон рассмотрен ранее как IV-я аксиома статики.

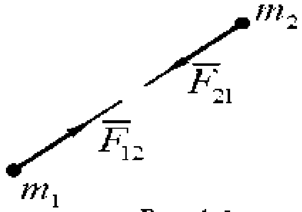

Рис 1.1

Силы взаимодействия двух МТ действуют по одной прямой, противоположно направлены и численно равны между собой (рис. 1.1)

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}. \qquad (1.3)$$

Каждую из сил можно представить следующим образом: $\overline{F}_{21} = m_1\overline{w}_1$, $\overline{F}_{21} = m_2\overline{w}_2$. А так как $F_{12} = F_{21}$, то $m_1 w_1 = m_2 w_2$, откуда $\dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$. То есть модули ускорений, сообщаемых друг другу материальными точками при взаимодействии, обратно пропорциональны их массам.

Четвертый закон (закон независимости действия сил)

Материальная точка под действием нескольких сил получает ускорение, равное геометрической сумме тех ускорений, которые она получает от каждой силы, действующей отдельно, независимо от других.

Иначе, система сил, приложенных к одной МТ, динамически эквивалентна одной равнодействующей силе, равной главному вектору системы сил.

Пусть на МТ массой m действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, сообщая ей ускорение $\overline{w}$. При этом каждая из сил сообщает три ускорения $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n$. Ускорение при действии нескольких сил является векторной суммой ускорений, созданных отдельными силами, то есть

$$\overline{w} = \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \ldots + \overline{w}_n. \qquad (1.4)$$

Умножим обе части этого выражения на m

$$m\overline{w} = m\overline{w}_1 + m\overline{w}_2 + \ldots + m\overline{w}_n, \qquad (1.5)$$

где $m\overline{w}_1 = \overline{F}_1$, $m\overline{w}_2 = \overline{F}_2$, …, $m\overline{w}_n = \overline{F}_n$.

Тогда

$$m\overline{w} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n},$$

следовательно,

$$m\overline{w} = \overline{R}, \qquad (1.6)$$

где $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n}$.

Получено основное уравнение динамики для случая одновременного действия нескольких сил. Под силой $\overline{R}$ подразумевается равнодействующая всех сил, действующих на МТ.

СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Все физические величины могут быть выражены через три основные единицы, совокупность которых определяет их систему: единицы длины, времени и массы (или силы в технической системе).

Техническая система единиц использовалась до 1961 года

Основные единицы: 1 метр (м) – длина, 1 секунда (с) – время, 1 килограмм (кГ) – сила.

Единицей массы является техническая единица массы (т.е.м.). Это масса, которой сила 1 кГ сообщает ускорение 1 м/с^2, то есть 1 т.е.м. = 1 кГс^2/м. Т.е.м. – это масса тела, вес которого равен 9,81 кГ.

Международная система единиц (СИ) принята в 1961 году в Париже XI-й Генеральной конференцией по мерам и весам.

Основные единицы: 1 метр (м) – длина, 1 секунда (с) – время, 1 килограмм (кг) – масса.

Единица силы – ньютон (Н). Это сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2.

Единица работы (энергии) – джоуль (дж): 1 дж = 1 Н·м.

Имеют место соотношения: 1 кГ = 9,81 Н, или 1 Н = 0,102 кГ.

Система CGS известна из прошлого.

Основные единицы: 1 сантиметр (см) – длина, 1 секунда (с) – время, 1 грамм (г) – масса.

Единица силы – дина (дин). Это такая сила, которая массе 1 г сообщает ускорение 1 см/с^2: 1 дин = 1 гсм/с^2.

Справедливо соотношение: 1 Г = 981 дин, 1 Н = 10^5 дин.

Единица работы (энергии): 1 эрг = 1 дин·см = 10^{-7} Н·м = 10^{-7} дж.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пользуясь основным законом динамики, можно вывести дифференциальные уравнения движения МТ в различных системах координат.

Декартовая система координат

Обозначая через $\overline{F}$ равнодействующую всех активных и реактивных сил (рис. 1.2), приложенных к точке, напишем

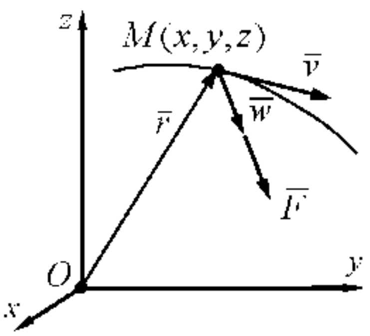

Рис. 1.2

$$m\overline{w}=\overline{F}\,, \tag{1.7}$$

где ускорение $\overline{w}=\dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$.

Дифференциальное уравнение движения МТ в векторной форме

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=\overline{F}\,. \tag{1.8}$$

Спроектируем это уравнение на оси

$$mw_x=F_x\,,\quad mw_y=F_y\,,\quad mw_z=F_z\,, \tag{1.9}$$

где $$w_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}, \quad w_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y},$$

$$w_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}.$$

Дифференциальные уравнения движения МТ в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$m\ddot{x}=F_x, \quad m\ddot{y}=F_y, \quad m\ddot{z}=F_z.$$

При движении точки в плоскости остаются два уравнения, в прямолинейном движении – одно.

Естественная система координат

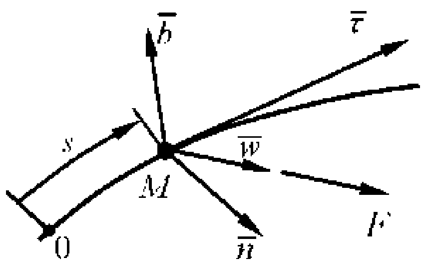

Рис. 1.3

Ускорения вдоль осей координат: касательное $w_\tau=\dfrac{dv}{dt}$; нормальное $w_n=\dfrac{v^2}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны траектории; бинормальное $w_b=0$ (рис. 1.3).

Проектируя уравнение $m\overline{w}=\overline{F}$ на координатные оси, получим дифференциальные уравнения движения МТ в естественных координатах

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n, \quad 0=F_b. \qquad (1.10)$$

ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1-я задача. Зная массу МТ и закон ее движения, требуется найти действующую на точку силу.

Известны законы движения вдоль координатных осей

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t). \tag{1.11}$$

Проекции силы на оси

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x} = mf''_{1t}(t), \\ F_y &= m\ddot{y} = mf''_{2t}(t), \\ F_z &= m\ddot{z} = mf''_{3t}(t). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Следовательно, модуль вектора силы

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\,. \tag{1.13}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\overline{F}\,\hat{,}\,x)=\frac{F_x}{F}, \quad \cos(\overline{F}\,\hat{,}\,y)=\frac{F_y}{F}, \quad \cos(\overline{F}\,\hat{,}\,z)=\frac{F_z}{F}. \tag{1.14}$$

Заметим, что реакции связей входят как составляющие в силу $\overline{F}$.

2-я задача. По заданной массе и действующей на МТ силе требуется определить закон движения точки.

Напишем выражение ускорения

$$\overline{w}=\frac{\overline{F}}{m}\,. \tag{1.15}$$

Дважды интегрируя по времени, находим закон движения точки вдоль траектории $s=s(t)$.

ЛЕКЦИЯ 2

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки в простейших случаях. Постоянные интегрирования и их определение из начальных условий. Прямолинейное колебательное движение материальной точки. Свободные колебания. Амплитуда, фаза, круговая частота и период

ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Эта задача связана с интегрированием дифференциальных уравнений движения МТ. Рассмотрим решение задачи в прямоугольной декартовой системе координат (рис. 2.1).

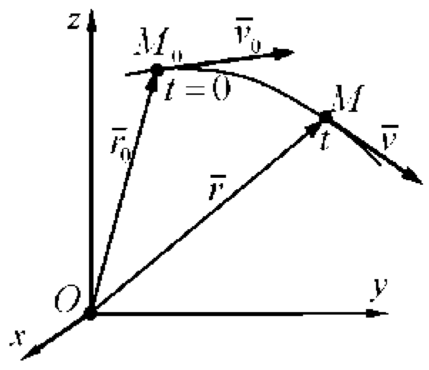

Рис. 2.1

Пусть в общем случае сила $\bar{F}$ и ее проекции на оси зависят от времени, положения точки и ее скорости. Тогда дифференциальные уравнения в проекциях на оси

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\
m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \qquad (2.1) \\
m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).
\end{aligned}
$$

Решение сводится к интегрированию системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Известно, что решение одного такого уравнения содержит две ***произвольные постоянные интегрирования***. Всего для системы их окажется шесть: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Решение представляется в виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Если продифференцировать систему (2.2) по времени, то проекции скорости точки на координатные оси

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = f_1'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_y &= \dot{y} = f_2'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_z &= \dot{z} = f_3'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Таким образом, задание силы определяет целый класс движений, характеризующийся произвольными постоянными. Действующая сила определяет лишь ускорение точки. Для определения движения необходимо располагать дополнительно ***начальными условиями***, позволяющими определить произвольные постоянные. При $t = 0$ задаются начальные координаты x_0, y_0, z_0 и проекции скорости v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}.

Используя эти условия, на основании систем (2.2), (2.3) можно написать шесть уравнений для определения постоянных

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y_0 &= f_2(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z_0 &= f_3(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_{x0} &= f_1'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_{y0} &= f_2'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ v_{z0} &= f_3'(0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Если система (2.4) удовлетворяет условиям разрешимости, то из нее можно найти все шесть произвольных постоянных интегрирования.

План решения второй задачи динамики

1. Выбираем систему отсчета. Ее начало желательно разместить в начальном положении точки. Желательно также, чтобы в рассматриваемый момент времени координаты точки и проекции скорости на оси были положительны. В естественных координатах за их начало принимается сама точка.

2. Составляется расчетная схема. Изображается точка с действующими на нее активными и реактивными силами.

3. Записываются начальные условия.

4. Составляются дифференциальные уравнения в проекциях на координатные оси. При этом в правой части записываются алгебраические суммы проекций всех сил, действующих на точку, с обязательным указанием тех параметров, от которых они зависят.

5. Производится интегрирование дифференциальных уравнений.

6. С помощью начальных условий находятся произвольные постоянные, которые целесообразно определять после каждого интегрирования. В отдельных случаях удобно брать определенный интеграл в заданных пределах.

7. С нахождением закона движения определяются искомые в задаче величины.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть на МТ массой m действует сила F.

За координатную ось x выбирается прямая, вдоль которой движется точка (рис. 2.2). Возможны следующие случаи.

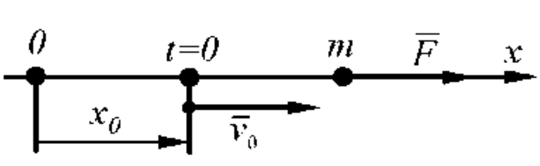

Рис. 2.2

1. **Сила зависит от времени** $F = F(t)$.

Дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \quad , \qquad (2.5)$$

или $$mdv = F(t)dt.$$

Обозначив интеграл $\int_0^t F(t)dt = \Phi(t)$, получим

$$mv - mv_0 = \Phi(t),$$

откуда $$v = v_0 + \frac{1}{m}\Phi(t). \tag{2.6}$$

Далее

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m}\Phi(t),$$

или $$dx = v_0 dt + \frac{1}{m}\Phi(t)dt. \tag{2.7}$$

Интегрируя второй раз, имеем

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t \Phi(t)dt. \tag{2.8}$$

Получен искомый закон движения.

2. **Сила зависит от положения точки** $F = F(x)$.

Дифференциальное уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = F(x). \tag{2.9}$$

Представим уравнение в виде

$$m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = F(x), \quad \text{или} \quad mvdv = F(x)dx. \tag{2.10}$$

Найдем определенный интеграл:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx. \tag{2.11}$$

Обозначив $\Phi(x)=\int\limits_{x_0}^{x}F(x)dx$, имеем

$$v=\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\Phi(x)}\ . \qquad (2.12)$$

После интегрирования имеем

$$\pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{v_0^2+\frac{2}{m}\Phi(x)}}=t\ , \qquad (2.13)$$

откуда определяется закон движения точки $x=x(t)$.

3. Сила зависит от скорости точки $F=F(v)$.

Дифференциальное уравнение

$$m\frac{dv}{dt}=F(v)\ . \qquad (2.14)$$

Возможны два способа его решения.

1-й способ. Разделим переменные

$$m\frac{dv}{F(v)}=dt\ . \qquad (2.15)$$

После интегрирования получим

$$m\int\limits_{v_0}^{v}\frac{dv}{F(v)}\ =\ t\ , \qquad (2.16)$$

откуда находим зависимость скорости от времени $v=v(t)$.

Далее

$$v = \frac{dx}{dt} = v(t), \qquad \text{или} \qquad dx = v(t)dt. \tag{2.17}$$

Интегрируя второй раз, находим закон движения точки

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt. \tag{2.18}$$

2-й способ. Напишем дифференциальное уравнение в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F(v), \qquad \text{или} \qquad m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = F(v). \tag{2.19}$$

Разделим переменные

$$mv\frac{dv}{F(v)} = dx. \tag{2.20}$$

После интегрирования имеем

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{F(v)} = x - x_0,$$

откуда находим скорость как функцию координаты x:

$$v = \frac{dx}{dt} = v(x), \qquad \text{или} \qquad \frac{dx}{v(x)} = dt.$$

Интегрируя, получим

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)} = t, \tag{2.21}$$

откуда находится закон движения $x = x(t)$.

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В природе колебательное движение является широко распространенным явлением. Его изучение представляется задачей, имеющей важное практическое значение.

В зависимости от характера деформаций упругого элемента различаются продольные, поперечные, изгибные, крутильные колебания. Вместе с тем они имеют общую природу. Это определено наличием силовых факторов, которые при отклонении системы от положения устойчивого равновесия стремятся вернуть ее в исходное положение. Предполагается, что величина каждого из этих силовых факторов прямо пропорциональна величине деформации упругого элемента, который работает в зоне линейной упругости, то есть в пределах закона Гука.

Удобно в качестве упругого элемента принять пружину, работающую на продольное растяжение-сжатие. Ее упругая сила определяется выражением

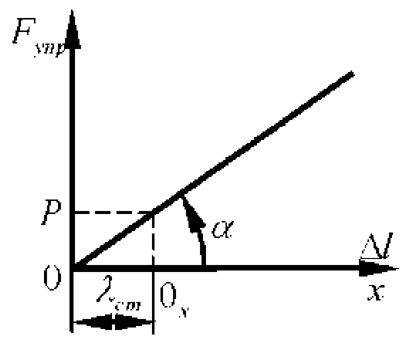

Рис. 2.3

$$F_{упр} = c \cdot \Delta l\ ,$$

где Δl – деформация, c – ***коэффициент жесткости*** пружины.

Размерность $[c] = \left[\dfrac{\text{сила}}{\text{длина}}\right]$, в системе СИ $[c] = \left[\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}\right]$. Он численно равен значению силы, деформирующей пружину на единицу длины.

На графике $F_{упр} = F_{упр}(\Delta l)$ (рис. 2.3) коэффициент жесткости выражается тангенсом угла наклона прямой к оси Δl, т.е. $c = \operatorname{tg}\alpha$.

Существуют два основных вида соединения пружин: ***параллельное*** и ***последовательное***.

При параллельном соединении (рис. 2.4) две пружины можно заменить одной пружиной с эквивалентным коэффициентом жесткости:

$$c_{экв} = c_1 + c_2. \qquad (2.22)$$

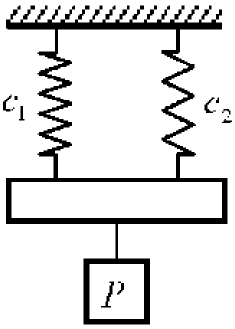

Рис. 2.4

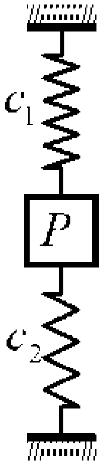

Рис. 2.5

Параллельным также является соединение, показанное на рис. 2.5.

При последовательном соединении (рис. 2.6) справедливо равенство

$$\frac{1}{c_{экв}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}, \text{ или } c_{экв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}. \qquad (2.23)$$

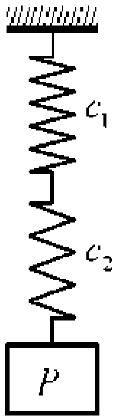

Рис. 2.6

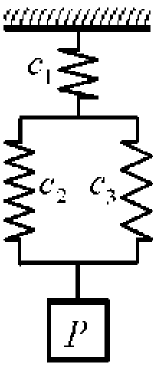

Рис. 2.7

Формулы (2.22), (2.23) аналогичны соотношениям, используемым при расчетах конденсаторных цепей в электротехнике. Это обстоятельство используется при электрическом моделировании механических явлений.

Располагая этими соотношениями, можно определить коэффициент жесткости системы упругих элементов, сколь бы сложной она ни была. Например, коэффициент жесткости системы пружин при их смешанном соединении (рис. 2.7) находится по формуле

$$\frac{1}{c_{экв}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2 + c_3}, \text{ то есть } c_{экв} = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}. \qquad (2.24)$$

Колебания делятся на ***свободные, затухающие, вынужденные***. На рис. 2.8 приведена расчетная схема, общая для каждого из названных видов прямолинейных колебаний точки.

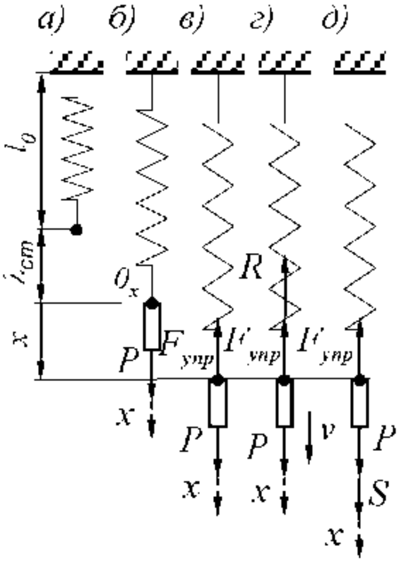

Рис. 2.8

Вертикально подвешенная пружина имеет начальную длину l_0 (рис. 2.8, *а*). При отсутствии нагрузки упругая сила пружины равна нулю.

При подвешивании тела (рис. 2.8, *б*) весом $P = mg$ упругая сила пружины равна силе тяжести тела $F_{упр} = mg$. Пружина растянута на величину статической деформации $\lambda_{ст} = \dfrac{mg}{c}$. Это положение тела удобно принимать за начало отсчета перемещений x.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

На МТ действует сила тяжести и упругая сила пружины (рис. 2.8, *в*). Рассмотрим движение точки в текущий момент времени t, когда ее координата равна x.

Дифференциальное уравнение движения МТ

$$m\ddot{x} = P - F_{упр}, \tag{2.25}$$

где $P = mg$, $F_{упр} = c(x + \lambda_{ст})$.

Учитывая, что $c\lambda_{ст} = mg$, имеем

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \tag{2.26}$$

Обозначим $\frac{c}{m} = k^2$, тогда

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \tag{2.27}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, однородное. Оно решается с помощью характеристического уравнения

$$u^2 + k^2 = 0,$$

откуда

$$u_{1,2} = \pm ki. \tag{2.28}$$

Заметим, что наличие комплексных корней характеристического уравнения здесь и далее является признаком колебательного движения.

Общее решение записывается в виде

$$x = A\cos kt + B\sin kt, \tag{2.29}$$

где A и B – произвольные постоянные интегрирования.

Обозначив $A = a\cos\alpha$, $B = a\sin\alpha$, можно написать иначе

$$x = a\sin\alpha\cos kt + a\cos\alpha\sin kt,$$

или в амплитудной форме

$$x = a\sin(\alpha + kt). \tag{2.30}$$

Это ***гармоническое колебательное движение*** (рис. 2.9).

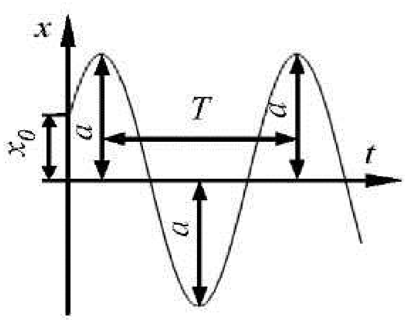

Рис. 2.9

Колебания точки, происходящие под действием только восстанавливающей силы, называются ***свободными,*** или ***собственными***.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k}, \tag{2.31}$$

где k – циклическая (круговая) ***частота*** колебаний:

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}\,. \tag{2.32}$$

Следовательно, $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$.

Частота и период свободных колебаний зависят от массы точки и коэффициента c. Величина $(kt+\alpha)$ – фаза колебаний, α – начальная фаза колебаний, a – ***амплитуда*** свободных колебаний.

Определим a и α из начальных условий. Дифференцируем формулу (2.30) по времени

$$v=\frac{dx}{dt}=ak\cos(kt+\alpha)\ . \tag{2.33}$$

Подставляя $t=0$, $x=x_0$ и $v=v_0$ в формулы (2.29) и (2.30), имеем уравнения

$$\begin{cases} x_0=a\sin\alpha=A, \\ v_0=ak\cos\alpha=kB. \end{cases} \tag{2.34}$$

Решая эти уравнения совместно, находим

$$A=x_0, \qquad B=\frac{v_0}{k}, \qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{kx_0}{v_0}, \qquad a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{k}\right)^2}\ . \tag{2.35}$$

ЛЕКЦИЯ 3

Затухающие колебания материальной точки.
Период и декремент колебаний. Апериодическое движение.
Вынужденные колебания точки без учета
сопротивления среды. Случай резонанса

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

При затухающих колебаниях, кроме силы тяжести и упругой силы пружины, на МТ массой m действуют ***сила сопротивления среды*** $\overline{R}$.

Рассмотрим случай, когда она пропорциональна первой степени скорости, $\overline{R}=-\mu\overline{v}$ (направлена противоположно вектору $\overline{v}$) (рис. 2.8, *г*). Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x}=mg-F_{упр}-R\ ,$$

где $F_{упр}=cx,\ \ R=\mu\dot{x}$.

Тогда $\quad m\ddot{x}\ =\ -\ cx-\mu\dot{x}, \quad$ или $\quad \ddot{x}+\dfrac{\mu}{m}\dot{x}+\dfrac{c}{m}x\ =\ 0\,.$

Обозначим $\dfrac{\mu}{m}=2n$, где n – коэффициент затухания; $\dfrac{c}{m}\ =\ k^2$,

где k – частота собственных колебаний. Тогда

$$\ddot{x}\ +\ 2n\dot{x}\ +\ k^2x\ =\ 0\,. \qquad (3.1)$$

Размерности n и k одинаковы ($1/c$), поэтому можно их сравнивать.

Уравнение (3.1) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, однородное. Соответствующее характеристическое уравнение

$$u^2 + 2nu + k^2 = 0, \text{ откуда } u_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Рассмотрим случай $n < k$, тогда

$$u_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2} = -n \pm ik_1,$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – ***частота затухающих колебаний.***

Общее решение уравнения

$$x = e^{-nt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t), \qquad (3.2)$$

где $A = x_0$, $B = \dfrac{v_0 + nx_0}{k_1}$ – постоянные интегрирования, найденные из начальных условий.

Полагая $A = a\sin\alpha$, $B = a\cos\alpha$, получим решение в амплитудной форме

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha), \qquad (3.3)$$

где постоянные интегрирования, найденные из начальных условий,

$$a = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \qquad (3.4)$$

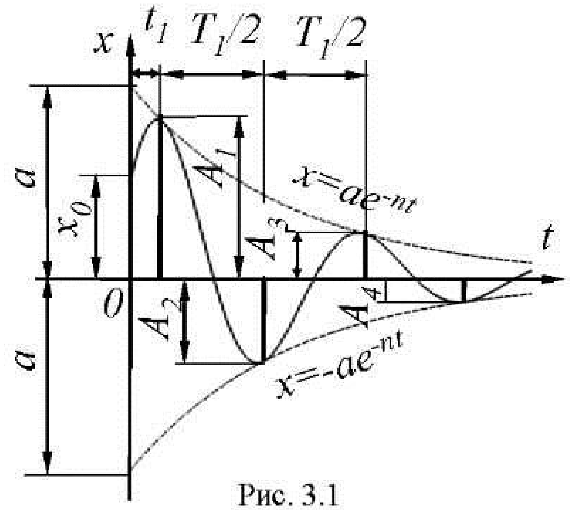

Рис. 3.1

Эти колебания называются ***затухающими***, так как амплитуда ae^{-nt} убывает с течением времени. Их график – затухающая синусоида, ограниченная двумя симметричными кривыми $x=ae^{-nt}$ и $x=-ae^{-nt}$, так как $\sin(k_1t+\alpha)$ изменяется пределах от -1 до $+1$ (рис. 3.1).

Промежуток времени между двумя соседними крайними (нижними или верхними) положениями точки называется ***периодом затухающих колебаний***

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}. \qquad (3.5)$$

Так как $k_1<k$, то $T_1>T$, то есть период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний. В случае малых сопротивлений ($n<<k$) их разницей можно пренебречь и считать $T_1 \approx T = \frac{2\pi}{k}$.

Определим значения амплитуд $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$A_1 = ae^{-nt_1},$$

$$A_2 = ae^{-n(t_1+\frac{T_1}{2})} = ae^{-nt_1}\cdot e^{-\frac{nT_1}{2}} = A_1e^{-\frac{nT_1}{2}},$$

$$A_3 = ae^{-n(t_1+2\frac{T_1}{2})} = ae^{-nt_1}\cdot e^{-2\frac{nT_1}{2}} = A_1e^{-2\frac{nT_1}{2}} = A_2e^{-\frac{nT_1}{2}}, \qquad (3.6)$$

$$\ldots$$

$$A_{r+1} = A_re^{-\frac{nT_1}{2}}.$$

Число $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ называется ***декрементом*** колебаний, а его натуральный логарифм, величина $\left(-\frac{nT_1}{2}\right)$, – ***логарифмическим декрементом*** колебаний.

Очевидно, последовательные значения амплитуд затухающих колебаний представляют собой убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен декременту колебаний.

АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (3.1), когда $n > k$.

Корни характеристического уравнения

$$u_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$$

действительные и меньше нуля.

Решение уравнения

$$x = C_1 e^{u_1 t} + C_2 e^{u_2 t} . \tag{3.7}$$

Так как $u_1 < 0$ и $u_2 < 0$, то, независимо от значений C_1 и C_2 , при $t \to \infty$ $x \to 0$. Это означает, что с течением времени точка неограниченно приближается к равновесному положению.

Представив корни характеристического уравнения в виде $u_1 = -n + k_2$, $u_2 = -n - k_2$, получим

$$x = e^{-nt}\left(C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}\right) . \tag{3.8}$$

Определим моменты, когда точка занимает крайние положения. В них ее скорость равна нулю:

$$v = \dot{x} = e^{-nt}\left[C_1 (k_2 - n) e^{k_2 t} - C_2 (k_2 + n) e^{-k_2 t}\right] = 0 .$$

Обозначим $e^{k_2 t}=z$, тогда

$$C_1(k_2-n)z-C_2(k_2+n)/z=0,$$

$$\text{или } C_1(k_2-n)z^2-C_2(k_2+n)=0.$$

Получено неполное квадратное уравнение. Момент времени t имеет действительное положительное значение только при $z>1$, а этих значений в зависимости от C_1 и C_2 имеется или одно, или совсем не имеется, что относится и к случаю $v=0$.

На рис. 3.2 показаны кривые возможных движений точки в зависимости от начальных условий при $x_0>0$.

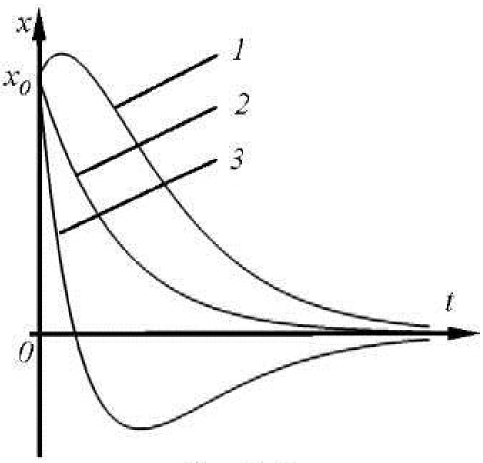

Рис. 3.2

Кривая *1* соответствует начальной скорости, направленной в положительную сторону оси x; кривая *2* – относительно небольшой начальной скорости, направленной в отрицательную сторону оси x; кривая *3* – большой начальной скорости, направленной в отрицательную сторону оси x.

При $n=k$ корни характеристического уравнения равны между собой ($u_1=u_2$), и решение дифференциального уравнения:

$$x=e^{-nt}(C_1+C_2 t). \tag{3.9}$$

Характер движения тот же, что и при $n>k$. В случае большого сопротивления ($n>>k$) колебаний нет. Это движение называется ***апериодическим*** затухающим.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ УЧЕТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

На МТ массой m, кроме силы тяжести P и восстанавливающей силы $F_{упр}$, действует периодически изменяющаяся, называемая ***возмущающей***, сила $S = H\sin(pt+\beta)$, где H – ее амплитуда, p – частота, β – начальная фаза (рис. 2.8, *д*). Тогда дифференциальное уравнение движения МТ

$$m\ddot{x} = -cx + H\sin(pt+\beta), \tag{3.10}$$

или
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m}\sin(pt+\beta).$$

Обозначив $h = \dfrac{H}{m}$, $k^2 = \dfrac{c}{m}$ (частота собственных колебаний), имеем

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt+\beta). \tag{3.11}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородное. Его общее решение есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений:

$$x = x_1 + x_2. \tag{3.12}$$

Решением однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$ является

$$x_1 = A\cos kt + B\sin kt, \quad \text{или} \quad x_1 = a\sin(kt+\alpha). \tag{3.13}$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет разные выражения в зависимости от p.

Рассмотрим случай $p \neq k$. Решение ищем в виде

$$x_2 = D\sin(pt + \beta). \tag{3.14}$$

Требуется найти D.

Находим производные $\dot{x}_2 = Dp\cos(pt + \beta)$, $\ddot{x}_2 = -Dp^2 \sin(pt + \beta)$ и подставляем в формулу (3.11):

$$-Dp^2 \sin(pt+\beta) + k^2 D\sin(pt+\beta) = h\sin(pt+\beta),$$

откуда $D = \dfrac{h}{k^2 - p^2}$, и частное решение имеет вид

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\beta). \tag{3.15}$$

Тогда общее решение

$$x = A\cos kt + B\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\beta),$$

(3.16)

или
$$x = a\sin(kt+\alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt+\beta).$$

Произвольные постоянные интегрирования A, B (a, α) находятся с помощью начальных условий.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$b = \left|\frac{h}{k^2 - p^2}\right|. \tag{3.17}$$

Отношение амплитуды b к статической деформации $\lambda_{ст}$ называется *коэффициентом динамичности*:

$$\eta = \frac{b}{\lambda_{ст}}. \tag{3.18}$$

При $k > p$ вынужденные колебания и возмущающая сила находятся в одной фазе (имеют одновременно максимумы и минимумы): $x_2 = h\sin(pt + \beta)$.

При $p > k$ вынужденные колебания и возмущающая сила имеют противоположные фазы:

$$x_2 = h\sin(pt + \beta - \pi). \tag{3.19}$$

ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим случай, когда $p = k$, то есть частота возмущающей силы совпадает с частотой собственных колебаний. Это явление называется ***резонансом.***

Дифференциальное уравнение движения

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin(pt + \beta). \tag{3.20}$$

Частное решение имеет вид

$$x_2 = t[D(\cos(kt + \beta) + E\sin(kt + \beta)]. \tag{3.21}$$

Находим производные по времени:

$$\dot{x}_2 = [D(\cos(kt + \beta) + E\sin(kt + \beta)] + kt[-D\sin(kt + \beta) + E\cos(kt + \beta)],$$

$$\ddot{x}_2 = 2k[-D\sin(kt + \beta) + E\cos(kt + \beta)] +$$
$$k^2 t[-D(\cos(kt + \beta) - E\sin(kt + \beta)].$$

Найденные выражения подставляем в уравнение (3.20):

$$2k[-D\sin(kt + \beta) + E\cos(kt + \beta)] - k^2 t[D(\cos(kt + \beta) + E\sin(kt + \beta)] +$$

$$+ k^2 t[D(\cos(kt + \beta) + E\sin(kt + \beta)] = h\sin(pt + \beta).$$

Приравняв коэффициенты при одноименных функциях аргумента $(pt+\beta)$, получим

$$-2Dk=h,\ 2Ek=0,$$

откуда $D=-\dfrac{h}{2k}$, $E=0$.

Следовательно,

$$x_2=-\frac{h}{2k}t\cos(pt+\beta), \quad \text{или} \quad x_2=\frac{h}{2k}t\sin\left(pt+\beta-\frac{\pi}{2}\right). \quad (3.22)$$

Из выражений (3.22) следует:

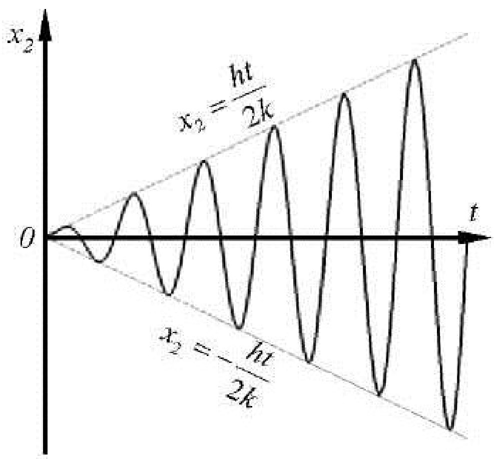

Рис. 3.3

1) множитель перед синусом (косинусом) возрастает с течением времени и может стать сколь угодно большой величиной;

2) вынужденные колебания при резонансе отстают по фазе от возмущающей силы на $\dfrac{\pi}{2}$.

График расстояний при резонансе представляет собой синусоидальную кривую (рис. 3.3), ограниченную прямыми $x_2=\pm\left(-\dfrac{h}{2k}t\right)$, так как $\left[\sin\left(pt+\beta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]_{\min}^{\max}=\pm1$.

Полное решение уравнения следующее:

$$x=A\cos kt+B\sin kt-\frac{h}{2k}t\cos(pt+\beta), \quad (3.23)$$

$$\text{или } x=a\sin(kt+\alpha)-\frac{h}{2k}t\cos(pt+\beta),$$

где A, B (a, α) находятся из начальных условий.

Член $-\dfrac{h}{2k}t\cos(pt+\beta)$, содержащий сомножителем время t, называется ***вековым членом*** решения.

ЛЕКЦИЯ 4

Относительное движение МТ. Дифференциальные уравнения относительного движения МТ. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности классической механики. Инвариантность уравнений динамики. Случай относительного покоя

До сих мы ассматривали абсолютное движение точки – движение относительно инерциальной (неподвижной) системы отсчета. Только для него применимы второй закон динамики и вытекающие из него теоремы и уравнения.

Перейдем к изучению относительного движения точки, то есть ее движения по отношению к неинерциальным системам отсчета, движущимся произвольно относительно инерциальной системы.

Изучение относительного движения имеет большое практическое значение. С ним связана работа различных приборов и устройств летательных аппаратов (космических ракет, самолетов, артиллерийских снарядов), автотранспорта, железнодорожных поездов, речных и морских судов и т. д.

Различие абсолютного и относительного движения определяется тем, что соответствующие им ускорения различны и связаны между собой теоремой Кориолиса

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + \overline{w}_k \,. \tag{4.1}$$

Отсюда следует различие остальных кинематических характеристик движения точки (траекторий, скоростей).

Пользуясь вторым законом Ньютона, выведем дифференциальные уравнения относительного движения МТ.

Пусть материальная точка M массой m движется в подвижной системе отсчета $O'x'y'z'$, движущейся произвольно относительно неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$ (рис. 4.1). Положение точки в системе $O'x'y'z'$ определяется радиусом-вектором $\overline{R}$.

Обозначим равнодействующую всех сил, непосредственно приложенных к МТ, через $\overline{F}$, тогда

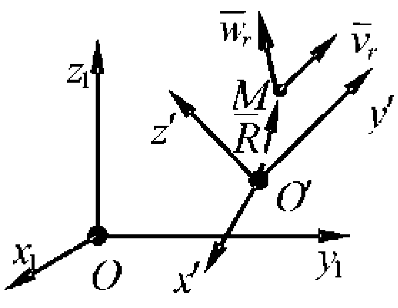

Рис. 4.1

$$\overline{F} = m\overline{w}_a,$$

где $\overline{w}_a$ – абсолютное ускорение точки (относительно неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$).

Умножим левую и правую части выражения (4.1) на массу m:

$$m\overline{w}_a = m\overline{w}_e + m\overline{w}_r + m\overline{w}_k,$$

или

$$\overline{F} = m\overline{w}_e + m\overline{w}_r + m\overline{w}_k,$$

откуда

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + (-m\overline{w}_e) + (-m\overline{w}_k). \qquad (4.2)$$

Очевидно, что относительное движение определяется тремя силами: равнодействующей непосредственно приложенных к МТ сил и двумя дополнительными, которые наблюдаются только относительно подвижной системы отсчета.

Одной из этих сил является ***переносная сила инерции***

$$\overline{F}_e^{(и)} = -m\overline{w}_e. \qquad (4.3)$$

Она направлена противоположно переносному ускорению точки и численно равна произведению массы на его величину.

Вторая сила называется ***кориолисовой силой инерции***

$$\overline{F}_k^{(и)} = -m\overline{w}_k. \qquad (4.4)$$

Она направлена противоположно ускорению Кориолиса и численно равна произведению массы на его величину.

Следовательно,

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{F}_e^{(u)} + \overline{F}_k^{(u)}, \qquad (4.5)$$

или

$$m\frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = \overline{F} + \overline{F}_e^{(u)} + \overline{F}_k^{(u)}.$$

Это соотношение выражает динамическую теорему Кориолиса: ***относительное движение МТ происходит под действием не только непосредственно приложенной силы $\overline{F}$, но и переносной силы инерции $\overline{F}_e^{(u)}$ и силы инерции Кориолиса $\overline{F}_k^{(u)}$.***

Дифференциальные уравнения относительного движения МТ в проекциях подвижные на оси имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{x'} + F_{ex'}^{(u)} + F_{rx'}^{(u)}, \\ m\ddot{y} &= F_{y'} + F_{ey'}^{(u)} + F_{ry'}^{(u)}, \\ m\ddot{z} &= F_{z'} + F_{ez'}^{(u)} + F_{rz'}^{(u)}. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Предположим, что переносное движение подвижной системы координат является поступательным, то есть $\overline{\omega}_e = 0$, следовательно, равны нулю кориолисовы ускорение и сила инерции:

$$\overline{w}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r) = 0, \qquad \overline{F}_k^{(u)} = -m\overline{w}_k = 0.$$

Тогда

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{F}_e^{(u)}, \qquad (4.7)$$

то есть относительное движение определяется действием непосредственно приложенных сил и переносной силы инерции.

Далее предположим, что оси подвижной системы координат движутся равномерно, прямолинейно и параллельно осям неподвижной системы координат. Тогда проекции силы $\overline{F}$ на оси каждой системы координат будут одинаковы, а переносная сила инерции равна нулю. Следовательно, дифференциальные уравнения движения МТ относительно систем отсчета будут одинаковыми.

Наблюдатель, связанный с изолированной системой отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно, не ощущает действия переносной силы инерции и силы инерции Кориолиса. Он не может определить, находится ли система в покое или движется по инерции. Такая система отсчета называется инерциальной.

Инерциальной системой отсчета называется такая система, по отношению к которой МТ может получать ускорение только вследствие движения самой системы отсчета.

С другой стороны, инерциальную систему отсчета можно определить как такую подвижную систему, относительно которой дифференциальные уравнения движения имеют тот же вид, какой они имеют, когда система находится в покое (то есть без учета сил инерции $\overline{F}_e^{(u)}$ и $\overline{F}_k^{(u)}$).

В этом заключается ***принцип относительности*** классической механики Галилея-Ньютона.

Заметим, что в инерциальных системах одинаковы лишь ускорения точки, а скорости, координаты и, следовательно, траектории могут быть различными вследствие возможных различных начальных условий.

Так, для наблюдателя на борту летящего самолета, с которого выбрасывают груз, и наблюдателя, находящегося на земле, траектории полета груза будут казаться различными.

Определим условия, при которых относительное ускорение точки равно нулю ($\overline{w}_r = 0$), то есть когда ее относительное движение является равномерным, прямолинейным ($\overline{v}_r = \overline{\text{const}}$) и, в частности, когда $\overline{v}_r = 0$, то есть МТ находится в относительном покое.

Положим, $\overline{w}_r = 0$, тогда

$$\overline{F} + \overline{F}_e^{(u)} + \overline{F}_k^{(u)} = 0. \qquad (4.8)$$

Это уравнение выражает условие относительного прямолинейного движения МТ.

При этом для относительного покоя необходимо, чтобы относительная скорость точки равнялась нулю ($\overline{v}_r = 0$). Тогда равны нулю кориолисовы ускорение ($\overline{w}_k = 0$) и сила инерции ($\overline{F}_k^{(u)} = 0$).

Следовательно,

$$\overline{F} + \overline{F}_e^{(u)} = 0. \qquad (4.9)$$

Чтобы МТ находилась в состоянии относительного покоя, необходимо и достаточно, чтобы непосредственно приложенная к ней сила и переносная сила инерции взаимно уравновешивались.

Это возможно и в том случае, когда векторы относительной скорости и переносной угловой скорости параллельны ($\overline{v}_r \parallel \overline{\omega}_e$), но при этом обязательно $\overline{v}_r = \overline{\mathrm{const}}$ (иначе $\overline{w}_r \neq 0$).

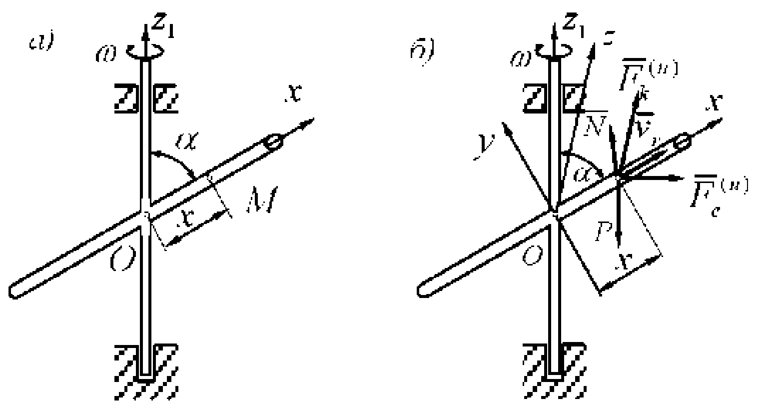

Рис. 4.2

Пример. Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней угол 45° (рис. 4.2, *а*). В трубке находится тяжелый шарик M. Определить движение этого шарика, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a. Трением пренебречь.

Решение. Назовем силы, действующие на шарик. В плоскости чертежа вертикальная сила тяжести $P \parallel z_1$, нормальная реакция

$N \perp x$, переносная сила инерции $F_e^{(u)} \perp z_1$, в перпендикулярной к плоскости чертежа кориолисова сила инерции $F_k^{(u)} \perp z$.

Напишем дифференциальное уравнение относительного движения точки в проекциях на ось x (рис. 4.2, *б*):

$$m\ddot{x} = F_x + N_x + F_{ex}^{(u)} + F_{kx}^{(u)},$$

где $N_x = 0$, $F_{kx}^{(u)} = 0$, $F_x = -mg\cos 45^0$, $F_e^{(u)} = m\omega^2 x \sin 45^0$.

Тогда

$$\ddot{x} - 0{,}5\omega^2 x = -g\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородное. Его решение является суммой общего решения однородного уравнения x_0 и частного решения неоднородного уравнения $\overline{x}$, то есть

$$x = x_0 + \overline{x}, \tag{4.10}$$

где

$$\overline{x} = \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}.$$

Найдем общее решение однородного уравнения

$$\ddot{x} - 0{,}5\omega^2 x = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$u^2 - 0{,}5\omega^2 = 0,$$

откуда его корни

$$u_{1,2} = \pm 0{,}5\omega\sqrt{2}.$$

Тогда

$$x_0 = C_1 e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + C_2 e^{-0,5\omega t\sqrt{2}}.$$

Следовательно, на основании равенства (4.10)

$$x_0 = C_1 e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + C_2 e^{\ 0,5\omega t\sqrt{2}} + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}.$$

Находим C_1 и C_2 из начальных условий. При $t=0$ имеем

$$x_0 = C_1 + C_2 + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2} = a,$$

$$v_0 = 0{,}5\omega\sqrt{2}(C_1 e^{0,5\omega t\sqrt{2}} - C_2 e^{-0,5\omega t\sqrt{2}}) = 0{,}5\omega\sqrt{2}(C_1 - C_2) = 0,$$

откуда

$$C_1 = C_2 = 0{,}5a - \frac{g}{\omega^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}\right).$$

Окончательно

$$x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}\right)(e^{0,5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0,5\omega t\sqrt{2}}) + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}.$$

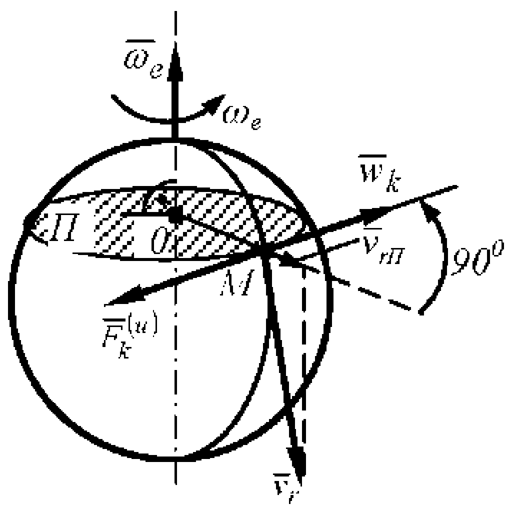

Рис. 4.3

В заключение остановимся на одном явлении природы. Известно, что на Земном шаре у рек, текущих в меридианальном направлении, независимо от полушария, Северного или Южного, один из берегов крутой, а другой пологий. Это легко объясняется с позиций рассмотренной теории сложного движения точки. Рассмотрим реку Волгу, у которой крутой правый (по течению реки) берег (рис. 4.3).

Земля вращается так, что со стороны Северного полюса ее вращение представляется направленным против часовой стрелки (Японию называют «страной восходящего Солнца»). Вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e$ на рисунке направлен вверх.

Покажем движущуюся точку M (частицу воды) и плоскость $П$, в которой она находится, перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_e$. Спроектируем на нее направленный по касательной к меридиану вектор относительной скорости $\overline{v}_r$. По правилу Жуковского, повернув эту проекцию $v_{rП}$ на 90^0 вокруг оси Земли в сторону переносного вращения, получим направление кориолисова ускорения $\overline{w}_k$. Оно совпадает с касательной к окружности, лежащей в плоскости $П$, и направлено в сторону левого берега.

Это ускорение вызывает силу инерции Кориолиса, равную по модулю произведению массы точки M на ускорение Кориолиса и направленную противоположно ему, к правому берегу

$$\overline{F}_k^{(u)} = -m\overline{w}_k .$$

Ее величина небольшая, но на протяжении многих тысячелетий она определяет то обстоятельство, что правый берег реки становится крутым.

ЛЕКЦИЯ 5

Количество движения материальной точки. Импульс силы и его проекции на оси. Теорема об изменении количества движения МТ. Момент количества движения МТ относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения МТ. Сохранение момента количества движения МТ в случае центральной силы. Понятие о секторной скорости. Закон площадей

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Количество движения МТ – вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость $\bar{v}$:

$$\bar{q} = m\bar{v}.$$

Так как масса положительная величина, то вектор $\bar{q}$ имеет то же направление, что и вектор скорости $\bar{v}$.

Проекции вектора $\bar{q}$ на координатные оси

$$q_x = (m\bar{v})_x = mv_x,\ q_y = (m\bar{v})_y = mv_y,\ q_z = (m\bar{v})_z = mv_z.$$

Размерность количества движения $[q]$ = [масса · скорость] = = [сила · время]. В технической системе – [кГс], в системе СИ – [Н·с].

ИМПУЛЬС СИЛЫ

1. Случай постоянной силы.

Импульс постоянной силы за некоторый промежуток времени есть вектор, равный произведению силы $\bar{F}$ на данный промежуток времени t:

$$\bar{S}=\bar{F}t. \qquad (5.1)$$

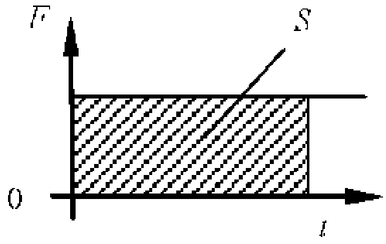

Рис. 5.1

На графике $F=F(t)$ импульс постоянной силы выражен площадью S (рис. 5.1).

Так как время скалярная величина, то импульс силы по направлению совпадает с вектором силы. Размерность $[S]$ = [сила · время], то есть импульс силы имеет такую же размерность, что и количество движения.

2. Случай переменной силы

Элементарным импульсом силы называется импульс за бесконечно малый промежуток времени ее действия (рис. 5.2):

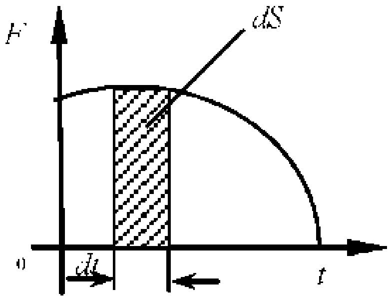

Рис. 5.2

$$d\bar{S}=\bar{F}dt.$$

Импульс переменной силы за конечный промежуток времени равен векторному определенному интегралу от силы $\bar{F}$ по времени t, вычисленному в соответствующих пределах:

$$\bar{S}=\int_0^t \bar{F}dt. \qquad (5.2)$$

Импульс может быть вычислен через проекции. Следует иметь в виду, что проекция на какую-либо ось импульса $\bar{S}$ силы, действующей на точку, за некоторый промежуток времени равна импульсу проекции силы на ту же ось за то же время:

$$S_x=\int_0^t F_x dt, \quad S_y=\int_0^t F_y dt, \quad S_z=\int_0^t F_z dt. \qquad (5.3)$$

Если сила постоянна, то

$$S_x=F_x t, \quad S_y=F_y t, \quad S_z=F_z t. \qquad (5.4)$$

Полный импульс по модулю

$$S = \sqrt{S^2{}_x + S^2{}_y + S^2{}_z}\ . \tag{5.5}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Напишем основное уравнение динамики МТ:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}\ , \qquad \text{или} \qquad \frac{d(m\overline{v})}{dt} = \overline{F}\ . \tag{5.6}$$

В левой части равенства содержится производная от количества движения по времени, а справа – действующая сила или равнодействующая системы сил.

Теорема об изменении количества движения МТ в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения МТ равна силе, действующей на МТ.***

Разделив переменные и взяв определенный интеграл в соответствующих пределах, получим

$$\int_{v_0}^{v} d(m\overline{v}) = \int_{0}^{t} \overline{F}dt\ ,$$

откуда вытекает теорема об изменении количества движения МТ в конечной форме

$$m\overline{v} - m\overline{v}_0 = \overline{S}\ , \tag{5.7}$$

то есть ***изменение количества движения МТ за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующей на точку, за то же время.***

На практике удобно применять теорему в проекциях

$$
\begin{aligned}
mv_x - mv_{x_0} &= S_x, \\
mv_y - mv_{y_0} &= S_y, \qquad (5.8)\\
mv_z - mv_{z_0} &= S_z,
\end{aligned}
$$

то есть ***изменение проекции вектора количества движения МТ на какую-либо ось за некоторый промежуток времени равно проекции на ту же ось импульса действующей на МТ силы за то же время.***

МОМЕНТ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

При решении ряда задач движение МТ удобнее характеризовать изменением момента относительно какого-либо центра или оси. При этом учитывается не только вектор $\overline{q}$ количества движения МТ, но и положение точки. При определении момента количества движения МТ используем понятие момента относительно центра и оси (из статики).

Векторным моментом количества движения МТ относительно центра O называется вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой расположены вектор $\overline{q} = m\overline{v}$ и центр O, и направленный в ту сторону, откуда вращательное действие вектора $\overline{k}$ видно направленным против часовой стрелки (рис. 5.3).

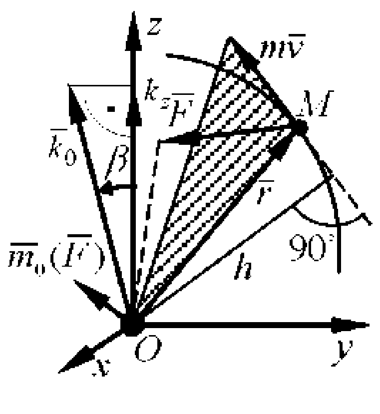

Рис. 5.3

Другими словами,

$$\overline{k}_0 = \overline{r} \times m\overline{v}\,, \qquad (5.9)$$

то есть ***векторный момент количества движения точки М относительно центра***

O равен векторному произведению радиуса-вектора $\bar{r}$ этой точки с полюсом O на ее вектор количества движения $m\bar{v}$.

По модулю

$$k_0 = rmv\,\sin(\bar{r}\,\hat{,}\,\bar{v}).$$

Аналогично понятию момента относительно оси, взятому из статики, можно написать

$$k_z = k_0 \cos\beta\,, \tag{5.10}$$

то есть момент k_z количества движения МТ относительно оси z равен проекции векторного момента на эту ось.

Он же равен алгебраическому моменту проекции $mv_П$ количества движения этой точки на плоскость $П$, перпендикулярную к оси z, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$[\bar{k}_0]_z = k_z = m_z(m\bar{v}) = m_0(mv_П)\,.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Напишем выражение момента количества движения МТ массы m, движущейся под действием силы $\bar{F}$, относительно центра O:

$$\bar{k}_0 = \bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r}\times m\bar{v}\,, \tag{5.11}$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M.

Дифференцируем равенство (5.11) по времени:

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v} + \bar{r}\times\frac{d(m\bar{v})}{dt}\,, \tag{5.12}$$

где $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}$ и $\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}=\bar{v}\times m\bar{v}=0$, так как $\sin(\bar{v}\,\hat{,}\,m\bar{v})=0$.

По теореме об изменении количества движения МТ имеем $\frac{d(m\bar{v})}{dt}=\bar{F}$. Следовательно, на основании выражения (5.12)

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\bar{r}\times\bar{F}, \qquad (5.13)$$

где в правой части содержится выражение векторного момента силы $\bar{F}$ относительно центра O.

Таким образом,

$$\frac{d\bar{k}_0}{dt}=\bar{m}_0(\bar{F}), \qquad (5.14)$$

то есть ***производная по времени от момента количества движения МТ относительно какого-либо центра равна векторному моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра***.

В проекциях это также справедливо

$$\left[\frac{d\bar{k}_0}{dt}\right]_z=[\bar{m}_0(\bar{F})]_z.$$

Так как проекция производной вектора на неподвижную ось равна производной проекции на ту же ось, то

$$\frac{dk_z}{dt}=m_z(\bar{F}), \qquad (5.15)$$

то есть ***производная по времени от момента количества движения МТ относительно какой-либо оси равна моменту силы, действующей на точку, относительно той же оси.***

Следствие. Если $\overline{m}_0(\overline{F})=0$, то $\overline{k}_0=\overline{\text{const}}$, то есть ***если момент силы, действующей на МТ, относительно какого-либо центра равен нулю, то момент количества движения точки относительно этого центра есть величина постоянная***.

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Центральной силой называется сила, линия действия которой постоянно проходит через заданный центр. Примером ее может служить сила притяжения между небесными телами (планетами и Солнцем, спутниками и Землей).

Так как в этом случае $\overline{m}_0(\overline{F})=0$, то $\overline{k}_0=\overline{r}\times m\overline{v}=\overline{\text{const}}$. Вектор $\overline{k}_0$ постоянно направлен перпендикулярно к плоскости, образованной векторами $\overline{r}$ и $\overline{v}$. Это означает, что точка движется по плоской кривой.

Модуль $|\overline{k}_0|=|\overline{m}_0(m\overline{v})|=mvh=\text{const}$, то есть $vh=\text{const}$ (рис. 5.4).

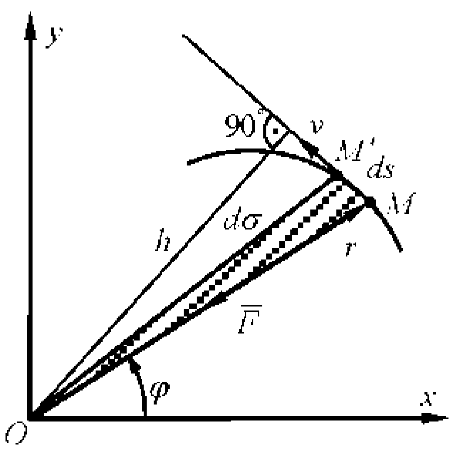

Рис. 5.4

Определим vh. Рассмотрим перемещение материальной точки M за время dt:

$$MM' = ds = vdt.$$

Площадь сектора

$$d\sigma = \frac{1}{2}h\cdot ds = \frac{1}{2}vhdt, \quad (5.16)$$

откуда
$$vh = 2\frac{d\sigma}{dt} = \text{const}.$$

Величина $\dfrac{d\sigma}{dt}$ характеризует быстроту изменения со временем площади, ометаемой радиусом-вектором OM, и называется ***секторной скоростью*** точки.

Под действием центральной силы МТ может двигаться только вдоль плоской кривой с постоянной секторной скоростью. Это один из законов Кеплера, называемый «законом площадей».

Пример. Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы F, притягивающей ее к этому центру (рис. 5.5, *а*). Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если в наиболее близком к нему положению $v_1 = 0{,}3$ м/с и $r_2 = 5r_1$.

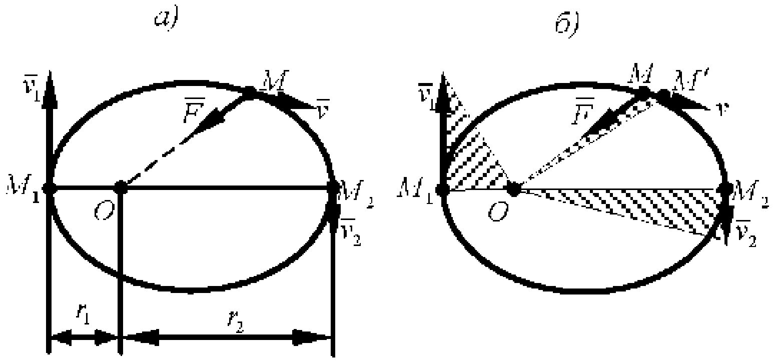

Рис. 5.5

Решение. Так как движение материальной точки сопровождается действием центральной силы, то ее момент количества движения относительно центра O постоянный ($l_0 = \text{const}$). Из условия равенства площадей треугольников (рис. 5.5, *б*) имеем

$$\frac{1}{2}r_1 v_1 = \frac{1}{2}r_2 v_2,$$

откуда

$$v_2 = v_1\frac{r_1}{r_2} = 0{,}3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}06 \text{ м/с}.$$

ЛЕКЦИЯ 6

Элементарная работа силы. Работа силы на конечном пути. Мощность. Теорема о работе равнодействующей. Аналитическое выражение элементарной работы силы. Работа силы тяжести, силы упругости. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

РАБОТА СИЛЫ

Работа силы на каком-либо перемещении является одной из основных характеристик, показывающих влияние силы на движение МТ. Элементарная работы силы F – это работа силы на бесконечно малом перемещении ds (рис. 6.1). Она определяется по формуле

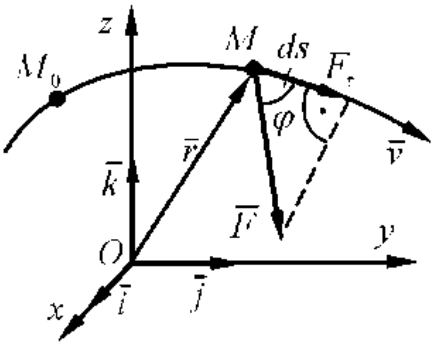

Рис. 6.1

$$dA = F_\tau ds\,, \tag{6.1}$$

где F_τ – проекция силы на направление скорости точки (касательной к траектории).

Элементарная работа является скалярной величиной. Ее знак определяется знаком проекции силы F_τ, так как $ds > 0$. При $F_\tau > 0$ элементарная работа $dA > 0$, а при $F_\tau < 0$ работа $dA < 0$. Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, где φ – угол между силой $\overline{F}$ и направлением скорости $\overline{v}$, то выражение элементарной работы имеет вид

$$dA = F\cos\varphi\, ds\,. \tag{6.2}$$

В этой формуле $F > 0$ и $ds > 0$, и знак dA определяется знаком $\cos\varphi$. Если $\varphi < 90^0$, то $dA > 0$; если $\varphi > 90^0$, то $dA < 0$.

Таким образом, ***элементарная работа силы равна произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.***

Отметим частные случаи:

если $\varphi = 0^0$, то $dA = Fds$,

если $\varphi = 90^0$, то $dA = 0$ (работа силы на перпендикулярном к ней перемещении равна нулю),

если $\varphi = 180^0$, то $dA = -Fds$ (работа силы отрицательна).

Следовательно, если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю. В частности, работа нормальной к скорости составляющей F_n всегда равна нулю.

Приведем другие формулы для определения элементарной работы силы.

Из кинематики известно: $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$, $v = |\bar{v}| = \dfrac{ds}{dt}$, следовательно, $ds = |d\bar{r}| = vdt$.

Поэтому $dA = F|d\bar{r}|\cos\varphi = \bar{F}d\bar{r}$, то есть ***элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.***

Так как $d\bar{r} = \bar{v}dt$, то

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = \bar{F}\bar{v}dt = \bar{F}dt \cdot \bar{v} = d\bar{S} \cdot \bar{v}, \qquad (6.3)$$

то есть элементарная работа силы равна скалярному произведению ее элементарного импульса на скорость точки.

Если силу $\bar{F}$ и радиус-вектор $\bar{r}$ разложить по осям координат, то

$$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}, \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k},$$

откуда $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$.

Следовательно,

$$dA = \overline{F}d\overline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,. \qquad (6.4)$$

Эта формула называется ***аналитическим выражением элементарной работы силы.***

Для определения полной работы силы $\overline{F}$ на перемещении от точки M_0 до точки M разобьем это перемещение на n перемещений, каждое из которых в пределе (при $n \to \infty$) переходит в элементарное.

Тогда работа

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} dA_k\,,$$

где dA_k – работа на k-м элементарном перемещении, на которые разбито полное перемещение.

Так как эта сумма является интегральной суммой на кривой M_0M, то, используя для элементарной работы формулу $dA = F_\tau ds$, имеем

$$A = \int_{M_0}^{M} F_\tau ds\,. \qquad (6.5)$$

Используя другие выражения для элементарной работы, полную работу силы получим в виде

$$A = \int_{M_0}^{M} \overline{F}d\overline{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \text{ или } A = \int_0^t \overline{F}\overline{v}dt\,, \qquad (6.6)$$

где $t = 0$ для точки M_0, а t – для точки M.

Последняя формула удобна при вычислении работы, когда $\overline{F} = \overline{F}(t)$.

Из определения элементарной и полной работы следует:

1) работа равнодействующей на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении;

2) работа силы на полном перемещении равна сумме ее работ на составляющих перемещениях, на которые любым образом разбито все перемещение.

Первое свойство достаточно доказать для элементарной работы равнодействующей силы.

Если сила $\overline{R}$ – равнодействующая системы сил, то $\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+...+\overline{F}_n$, т.е. $\overline{R}$ равна геометрической сумме сил. По определению элементарной работы силы,

$$\overline{R}d\overline{r} = (\overline{F}_1+\overline{F}_2+...+\overline{F}_n)d\overline{r} = \overline{F}_1 d\overline{r}+\overline{F}_2 d\overline{r}+...+\overline{F}_n d\overline{r}. \qquad (6.7)$$

В правой части каждый член представляет собой элементарную работу соответствующей силы в отдельности, то есть свойство подтверждено.

Второе свойство непосредственно следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим.

Размерность полной работы такая же, как и для элементарной работы: $[A]$=[сила·длина]. В технической системе единиц $[A]=[\text{кГм}]$, в системе СИ $[A]=\left[\frac{\text{кгм}^2}{\text{с}^2}\right]=[\text{Н}\cdot\text{м}]=[\text{Дж}]$.

Если $F_\tau = \text{const}$, то из формулы (6.5) следует

$$A = F_\tau s, \qquad (6.8)$$

где s – пройденный точкой путь.

Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, то

$$A = Fs\cos\varphi.$$

Если при этом $\varphi = 0^0$ или $\varphi = 180^0$, то $A = \pm Fs$.

Эта формула применима как для криволинейного движения, так и для прямолинейного. Для этого необходимо, чтобы сила $\overline{F}$ была постоянной величиной и всегда направлена по касательной к траектории. Если движение прямолинейное, то сила должна быть направлена по этой прямой.

МОЩНОСТЬ

Мощность, или работоспособность, какого-либо источника оценивается той работой, которую он может совершить за единицу времени.

По определению,

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Учитывая формулу для определения элементарной работы (6.3), мощность можно представить в виде $N = \overline{F}\overline{v} = Fv\cos\varphi$, то есть ***мощность равна скалярному произведению силы на скорость точки***.

Из этой формулы видно, что от источника с заданной мощностью можно получить бóльшую силу при меньшей скорости («золотое правило механики»). Например, локомотив трогает с места железнодорожный состав при малой скорости, развивая значительно бóльшую силу тяги, чем при движении.

Размерность мощности $[N] = \left[\frac{\text{сила} \cdot \text{длина}}{\text{время}}\right]$.

В технической системе единиц $[N] = \left[\frac{\text{кГм}}{\text{с}}\right]$, в системе СИ $\left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}\right] = \left[\frac{\text{дж}}{\text{с}}\right] = [\text{Вт}]$, 1 кВт = 1000 Вт.

В инженерной практике существует единица мощности «лошадиная сила» (л.с.): $1\ \text{л.с.} = 75\ \dfrac{\text{кГм}}{\text{с}} = 736\ \text{Вт} = 0{,}736\ \text{кВт}$, $1\ \text{кВт} = 1{,}36\ \text{л.с.}$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТЫ СИЛЫ

Работа силы тяжести

Силу тяжести G считаем постоянной, направленной вертикально вниз (рис. 6.3). Ее проекции на координатные оси $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = -mg$.

Вычислим работу силы тяжести при перемещении из точки M_0 в точку M_1:

$$A = \int\limits_{M_0}^{M_1} (G_x dx + G_y dy + G_z dz) = -mg \int\limits_{z_0}^{z_1} dz = mg(z_1 - z_0) = \qquad (6.9)$$

$$= mg(z_0 - z_1).$$

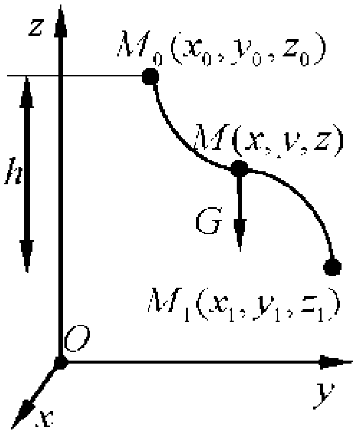

Рис. 6.3

Обозначим высоту опускания $h = z_0 - z_1$. Тогда

$$A = mgh,$$

то есть ***работа силы тяжести равна произведению силы тяжести на разность горизонтальных уровней в начале и конце перемещения.***

В общем случае $A = \pm mgh$ (при опускании "+", при поднятии "-"). Работа на замкнутом перемещении равна нулю.

Работа линейной силы упругости

Линейной силой упругости (линейной восстанавливающей силой) называется сила, действующая по закону Гука:

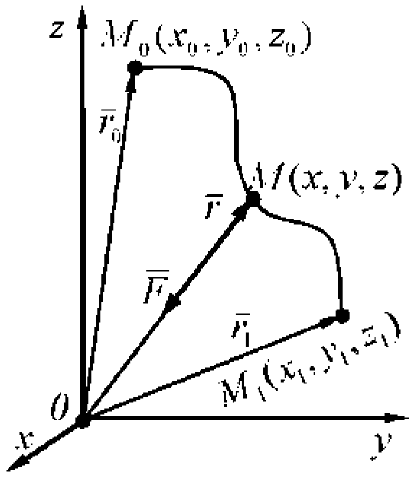

Рис. 6.4

$$\bar{F} = -c\bar{r}, \qquad (6.10)$$

где $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M (рис. 6.4), его модуль – расстояние от рассматриваемой точки до точки статического равновесия, то есть точки, в которой эта сила равна нулю; c – постоянная величина.

Выбрав начало координат в положении статического равновесия, имеем

$$F_x = -cx, \quad F_y = -cy, \quad F_z = -cz.$$

Тогда

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c\int_{z_0}^{z_1}(xdx + ydy + zdz) = -c\int_{r_0}^{r_1} rdr,$$

так как $xdx - ydy - zdz - rdr$, где $r^2 - x^2 + y^2 + z^2$.

Выполнив интегрирование, получим

$$A = -\frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2). \qquad (6.11)$$

Если точка M_0 совпадает с точкой статического равновесия, то работа силы упругости на этом перемещении $A = -\dfrac{cr^2}{2}$, где r кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки M до точки O.

Обозначим $r = \lambda$, тогда $A = -\dfrac{cr^2}{2}$, то есть работа линейной силы упругости на перемещении из положения статического равновесия всегда отрицательна и равна половине произведения коэффициента жесткости на квадрат перемещения из положения статического равновесия. Отсюда следует, что работа линейной силы упругости не зависит от формы перемещения и работа по любому замкнутому перемещению равна нулю.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинетической энергией МТ (ее «живой силой») называется половина произведения ее массы на квадрат скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\overline{v}^2}{2}. \qquad (6.12)$$

Размерность кинетической энергии в системе СИ $\left[\frac{\text{кгм}^2}{\text{с}^2}\right] = [\text{Н}\cdot\text{м}] = [\text{дж}]$, то есть такая же, как и у работы.

Напишем основное уравнение динамики для МТ:

$$m\frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}.$$

Умножим обе части этого выражения скалярно на дифференциал радиуса-вектора точки $d\overline{r}$

$$md\overline{v}\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{F}d\overline{r}, \quad \text{или} \quad m\overline{v}d\overline{v} = \overline{F}d\overline{r},$$

где $\overline{v} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$.

Учитывая, что $dA = \overline{F}d\overline{r}$ – элементарная работа, имеем $m\overline{v}d\overline{v} = dA$.

Так как $m\overline{v}d\overline{v} = d\left(\dfrac{m\overline{v}^2}{2}\right) = d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$, то окончательно

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA. \qquad (6.13)$$

Это теорема об изменении кинетической энергии МТ в дифференциальной форме: ***дифференциал кинетической энергии МТ равен элементарной работе силы, действующей на нее.***

Разделив обе части на dt, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = N \,, \tag{6.14}$$

то есть производная по времени от кинетической энергии МТ равна мощности, подводимой к ней.

Интегрируя обе части формулы (6.3) от точки M_0 до точки M_1, получим теорему об изменении кинетической энергии МТ в конечной форме

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A \,, \tag{6.15}$$

то есть ***изменение кинетической энергии МТ на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на МТ, на том же перемещении.***

ЛЕКЦИЯ 7

Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Главный вектор и главный момент внутренних сил. Моменты инерции системы и твердого тела относительно плоскости, оси и полюса. Радиус инерции. Теорема Штейнера-Гюйгенса. Примеры вычисления моментов инерции тел

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ

Механической системой (в дальнейшем просто ***системой***) называется совокупность МТ, взаимодействующих между собой. Эти МТ находятся во взаимосвязи, и движение и положение каждой из них определяется движением и положением всех остальных МТ.

Система считается свободной, если движение ее МТ не ограничено какими-либо связями, и несвободной, если такие связи имеются.

Системы делятся на изменяемые и неизменяемые. Неизменяемые системы те, в которых расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными при движении (например, абсолютно твердое тело). Если эти расстояния изменяются, то система называется изменяемой (например, деформируемое тело).

В статике силы разделялись на активные и реакции связей. В динамике силы делят на внешние и внутренние.

Внешними силами механической системы называются силы взаимодействия точек этой системы с телами и точками, не входящими в состав механической системы (обозначаются $\overline{F}^{(e)}$).

Внутренними силами механической системы называются силы взаимодействия между точками системы (обозначаются $\overline{F}^{(i)}$).

Деление сил на внешние и внутренние имеет условный характер и определяется постановкой задачи. По отношению к снаряду, движущемуся по стволу орудия, сила давления пороховых газов является внешней, а в отношении системы «орудие-снаряд» она внутренняя.

По закону равенства сил действия и противодействия, силы, которыми действуют две любые МТ друг на друга, равны по модулю, противоположно направлены, линии их действия совпадают. Рассматривая попарно силы взаимодействия всех МТ системы, можно сделать выводы.

1. Главный вектор внутренних сил системы и его проекции на координатные оси (алгебраические суммы проекций этих сил на оси) равны нулю (рис. 7.1).

Так как

$$\overline{F}_1^{(i)} + \overline{F}_2^{(i)} = 0 \text{, то } \overline{R}^{(i)} = \sum \overline{F}_k^{(i)} = 0 . \quad (7.1)$$

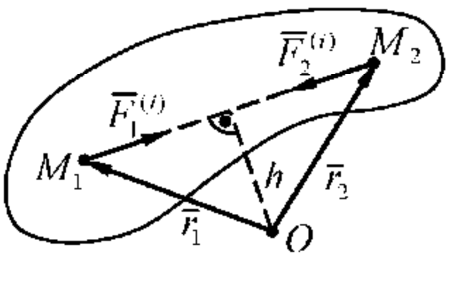

Рис. 7.1

В проекциях на координатные оси

$$R_x^{(i)} = \sum F_{kx}^{(i)} = 0 ,$$
$$R_y^{(i)} = \sum F_{ky}^{(i)} = 0 , \quad (7.2)$$
$$R_z^{(i)} = \sum F_{kz}^{(i)} = 0 .$$

2. Главный момент внутренних сил относительно любого центра и главный момент (алгебраическая сумма моментов) этих сил относительно любой оси равны нулю. Из рис. 7.1 видно, что

$$\overline{M}_O(\overline{F}_1^{(i)}) + \overline{M}_O(\overline{F}_2^{(i)}) = 0 . \quad (7.3)$$

Обе силы имеют одинаковые модули и противоположные направления.

Главный момент $\overline{L}_O$ относительно точки O состоит из векторной суммы этих выражений, равных нулю, следовательно,

$$\overline{L}_o^{(i)} = \sum \overline{M}_o(\overline{F}_k^{(i)}) = \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(i)} = 0\,. \tag{7.4}$$

В проекциях также

$$L_x^{(i)} = \sum M_x(\overline{F}_k^{(i)}) = 0\,,$$
$$L_y^{(i)} = \sum M_y(\overline{F}_k^{(i)}) = 0\,, \tag{7.5}$$
$$L_z^{(i)} = \sum M_z(\overline{F}_k^{(i)}) = 0\,.$$

Эти уравнения схожи с уравнениями равновесия, но не являются ими, так как силы приложены к разным МТ, которые под их действием могут перемещаться. Они уравновешиваются в случае абсолютно твердых тел (то есть когда все МТ принадлежат твердому телу).

ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

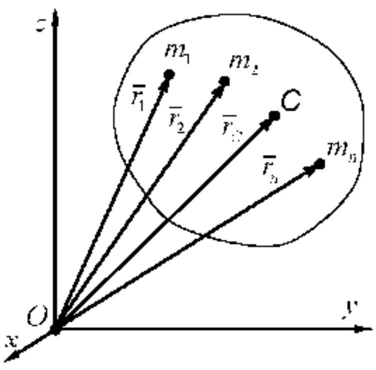

Рис. 7.2

Центр масс имеет важное значение в динамике. Его положение определяется радиусом-вектором

$$\overline{r}_C = \frac{\sum m_k \overline{r}_k}{M}\,, \tag{7.6}$$

где m_k, $\overline{r}_k$ – масса и радиус-вектор k-й МТ; $M = \sum m_k$ – масса системы.

Координаты центра масс

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}\,,\quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}\,,\quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}\,, \tag{7.7}$$

откуда

$$\sum m_k \overline{r}_k = M\overline{r}_C\,,\ \sum m_k x_k = Mx_C\,,\ \sum m_k y_k = My_C\,,\ \sum m_k z_k = Mz_C\,.$$

Выражение $\sum m_k \bar{r}_k$ называется ***статическим моментом массы системы относительно полюса*** O, а $\sum m_k x_k$, $\sum m_k y_k$, $\sum m_k z_k$ – ***статическими моментами массы системы относительно плоскостей*** yOz, xOz, xOy соответственно.

Если полюс совпадает с центром масс, то статический момент относительно него равен нулю:

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C = 0.$$

То же касается и статических моментов относительно плоскостей, проходящих через центр масс.

Предположим, что система находится вблизи Земли. Умножив числитель и знаменатель выражения (7.6) на g, имеем

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k g \bar{r}_k}{Mg} = \frac{G_k \bar{r}_k}{G}, \tag{7.8}$$

где $G_k = m_k g$ – вес k-й МТ.

У поверхности Земли центр тяжести и центр масс совпадают. Понятие центра тяжести не имеет смысла вне поля земного тяготения, а центр масс существует и в этом случае. Центр масс является более общим понятием, чем центр тяжести.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

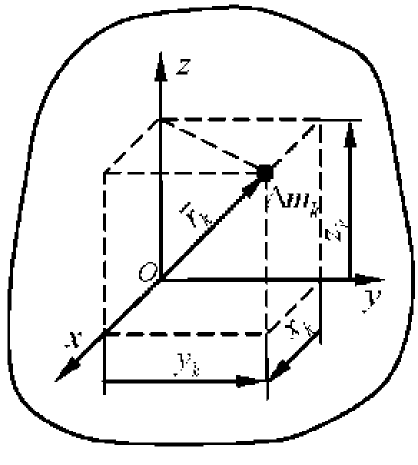

Рис. 7.3

При решении ряда задач определяются динамические величины, выражающиеся через суммы произведений масс точек системы на квадраты их расстояний до оси, точки или плоскости. Эти величины характеризуют распределение масс системы относительно них. Они называются ***моментами инерции*** относительно оси, точки, плоскости.

Разобьем твердое тело на n элементарных частиц и напишем выражения его моментов инерции (рис. 7.3).

Относительно полюса O

$$I_0 = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k r_k^2 = \int_{(M)} r^2 dm = \int_{(M)} (x^2+y^2+z^2)dm. \tag{7.9}$$

Относительно осей

$$I_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k (y_k^2+z_k^2) = \int_{(M)} y^2 dm + \int_{(M)} z^2 dm,$$

$$I_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k (z_k^2+x_k^2) = \int_{(M)} z^2 dm + \int_{(M)} x^2 dm, \tag{7.10}$$

$$I_z = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k (x_k^2+y_k^2) = \int_{(M)} x^2 dm + \int_{(M)} y^2 dm.$$

Относительно плоскостей

$$I_{xoy} = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k z_k^2 = \int_{(M)} z^2 dm,$$

$$I_{xoz} = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k y_k^2 = \int_{(M)} y^2 dm, \tag{7.11}$$

$$I_{yoz} = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\Delta m_k x_k^2 = \int_{(M)} x^2 dm.$$

Отсюда вытекают соотношения

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0, \tag{7.12}$$

то есть ***сумма моментов инерции относительно координатных осей равна двум моментам инерции относительно полюса (начала системы координат)***;

$$I_{xoy}+I_{yoz}+I_{xoz}=I_0, \qquad (7.13)$$

то есть ***сумма моментов инерции относительно координатных плоскостей равна моменту инерции относительно полюса.***

Размерность момента инерции $[I]$=[масса · длина^2]. В системе СИ $[I]$=[кг·м^2].

Нередко при расчетах используется понятие радиуса инерции. ***Радиусом инерции*** относительно оси Oz называется линейная величина, определяемая из соотношения

$$I_z=m\rho_z^2,$$

откуда
$$\rho_z=\sqrt{\frac{I_z}{m}}, \qquad (7.14)$$

где m – масса тела.

Радиус инерции ρ_z равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу тела, чтобы ее момент инерции относительно этой оси был равен моменту инерции тела.

Понятием радиуса инерции пользуются, когда имеется тело неправильной (сложной) формы. Тогда в техническую документацию на изделие вносится масса и радиус инерции, соответствующие значению момента инерции, найденному экспериментально.

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА-ГЮЙГЕНСА

Момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс системы параллельно ей, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между осями (рис. 7.4).

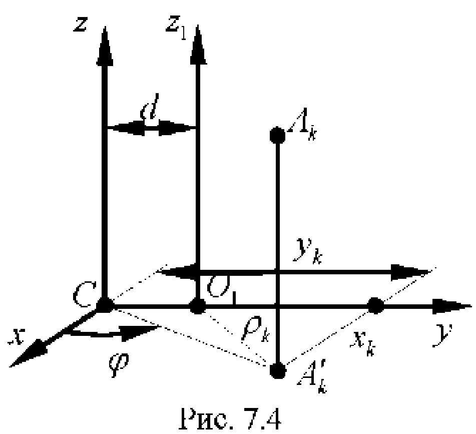

Рис. 7.4

Напишем

$$I_z = \sum m_k r_k^2 \,,$$
$$I_{z1} = \sum m_k \rho_k^2 \,,$$

где по теореме косинусов $\rho_k^2 = r_k^2 + d^2 - 2r_k d \sin\varphi_k$.

Тогда

$$I_{z1} = \sum m_k (r_k^2 + d^2 - 2r_k d \sin\varphi_k) = \sum m_k r_k^2 + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k y_k \,,$$

где $y_k = r_k \sin\varphi_k$, $\sum m_k = M$, $\sum m_k y_k = M y_C = 0$.

Следовательно,

$$I_{z1} = I_z + Md^2 \,. \qquad (7.15)$$

Из этой формулы видно, что для совокупности параллельных осей момент инерции относительно центральной оси (проходящий через центр масс) является наименьшим.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

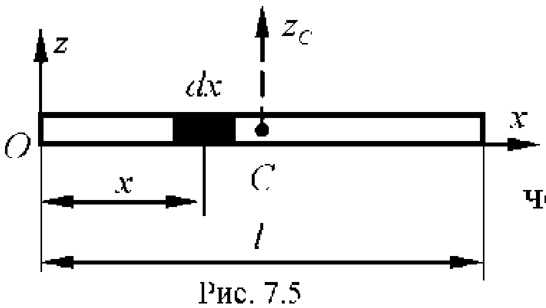

Рис. 7.5

Стержень.

Масса стержня M, длина l (рис. 7.5).

Относительно оси, проходящей че- через конец стержня,

$$I_z = \int_0^l x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3} \,, \qquad (7.16)$$

где $\rho = \dfrac{M}{l}$ – погонная масса стержня.

Центральный момент инерции находим по теореме Штейнера-Гюйгенса

$$I_z = I_{z_C} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

откуда

$$I_{z_C} = \frac{Ml^2}{12}. \qquad (7.17)$$

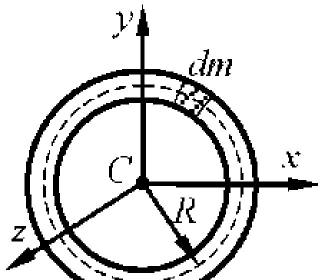

Рис. 7.6

Кольцо.

Масса распределена по ободу (рис. 7.6). Центральный момент инерции относительно оси z, перпендикулярной к плоскости кольца,

$$I_z = \int\limits_{(M)} R^2 dm = R^2 \int\limits_{(M)} dm = MR^2. \qquad (7.18)$$

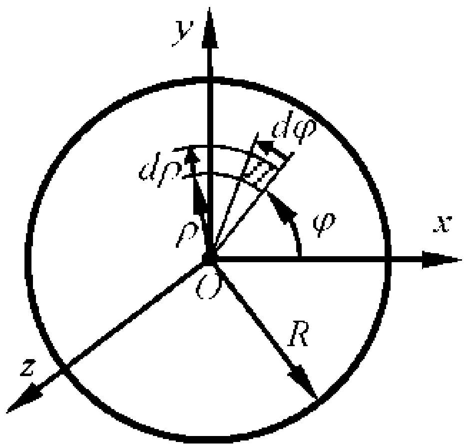

Рис. 7.7

В соответствии с равенством (7.12)

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{2}. \qquad (7.19)$$

Круглый диск

Центральный момент инерции относительно оси z, перпендикулярной к плоскости диска (рис. 7.7),

$$I_{0z} = \int\limits_{(M)} \rho^2 dm = \iint\limits_{\rho\varphi} b\rho^2\gamma\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \gamma b\int\limits_0^R \rho^3 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = b\gamma\frac{R^4}{4}2\pi = \pi\gamma b\frac{R^4}{2},$$

где $\gamma = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\pi R^2 b}$, V объем диска.

Тогда
$$I_z = \frac{bMR^4 2\pi}{4\pi R^2 b} = \frac{MR^2}{2}. \qquad (7.20)$$

Другие осевые моменты инерции

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}. \tag{7.21}$$

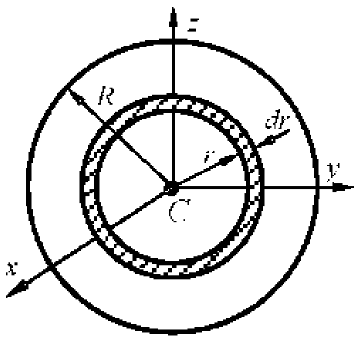

Рис. 7.8

Шар

Момент инерции относительно центра (рис. 7.8):

$$I_C = \gamma \int\limits_{(V)} r^2 dv,$$

где $dv = 4\pi\rho^2 d\rho$.

Тогда
$$I_C = \gamma \int\limits_0^R 4\pi\rho^4 d\rho = 4\pi\gamma \frac{R^5}{5},$$

где плотность $\gamma = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Следовательно,

$$I_C = 4\pi \frac{R^5}{5} \cdot \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{5} MR^2. \tag{7.22}$$

На основании равенства (7.12) осевые моменты инерции

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_C = \frac{2}{5} MR^2. \tag{7.23}$$

ЛЕКЦИЯ 8

Работа внутренних сил. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Теорема об изменении кинетической энергии системы

РАБОТА ВНУТРЕННИХ СИЛ

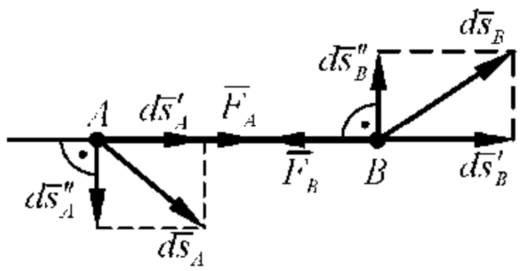

Рис. 8.1

Рассмотрим работу внутренних сил в абсолютно твердом теле (рис. 8.1). Пусть точки *A* и *B* при движении тела получают перемещения $d\overline{s}_A$ и $d\overline{s}_B$. Силы $\overline{F}_A = -\overline{F}_B$ – силы взаимодействия между точками.

Разложим перемещения точек по направлениям, параллельным и перпендикулярным прямой *AB*:

$$d\overline{s}_A = d\overline{s}'_A + d\overline{s}''_A, \quad d\overline{s}_B = d\overline{s}'_B + d\overline{s}''_B. \qquad (8.1)$$

Заметим, что силы $\overline{F}_A$ и $\overline{F}_B$ на перемещениях ds''_A и ds''_B, перпендикулярных к их векторам, работы не совершают. С другой стороны, поскольку $AB = \text{const}$, то $d\overline{s}'_A = d\overline{s}'_B$, то есть эти перемещения равны по модулю и одинаково направлены. Следовательно,

$$F_A ds'_A \cos 0^0 + F_B ds'_B \cos 180^0 = 0. \qquad (8.2)$$

Этот вывод можно отнести к любой паре точек системы. Таким образом, ***сумма работ внутренних сил неизменяемой системы при любом её перемещении равна нулю.***

Отметим, что это справедливо только для случая неизменяемой системы, а для произвольной механической системы в общем случае работа внутренних сил отличается от нуля.

РАБОТА И МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ТВЕРДОМУ ТЕЛУ, ВРАЩАЮЩЕМУСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Скорость точки M по векторной формуле Эйлера (рис. 8.2)

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} .$$

Элементарная работа силы

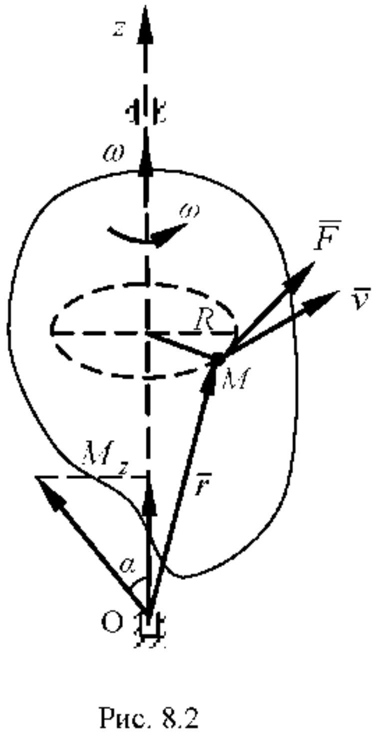

Рис. 8.2

$$dA = \overline{F}\overline{v}dt = \overline{F}(\overline{\omega} \times \overline{r})dt . \qquad (8.3)$$

В смешанном векторном произведении сомножители можно переставлять в круговом порядке

$$\overline{F}(\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{\omega}(\overline{r} \times \overline{F}) . \qquad (8.4)$$

Следовательно,

$$dA = \overline{\omega}(\overline{r} \times \overline{F})dt = \overline{\omega}\overline{M}_o dt = \omega M_o \cos\alpha \, dt ,$$

где $\overline{r} \times \overline{F} = \overline{M}_o(\overline{F}) = \overline{M}_o$ – векторный момент силы относительно точки O.

Учитывая, что $M_o \cos\alpha = M_z$, а $\omega dt = d\varphi$, окончательно имеем

$$dA = M_z d\varphi . \qquad (8.5)$$

Таким образом, ***элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на дифференциал угла поворота.***

Полная работа

$$A=\int_{0}^{\varphi} M_z d\varphi . \tag{8.6}$$

Если $M_z = \text{const}$, то $A=M_z\varphi$, где φ – угол поворота тела, на котором вычисляется работа силы.

Так как $dA=\overline{\omega}\overline{M}_o dt$, то мощность

$$N=\frac{dA}{dt}=\overline{\omega}\overline{M}_o=M_z\omega , \tag{8.7}$$

то есть ***мощность силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно этой оси на угловую скорость.***

Если сила $\overline{F}$ направлена по касательной к окружности, описываемой точкой её приложения, то она называется ***окружной силой***. Ее момент в этом случае $M=FR$.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кинетической энергией механической системы T называется сумма кинетических энергий всех МТ механической системы:

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\sum\frac{m_k \overline{v}_k^2}{2} . \tag{8.8}$$

Кинетическая энергия механической системы, как и кинетическая энергия *МТ*, не зависит от направления скоростей точек. Она равна нулю только в том случае, когда все точки находятся в покое.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЯХ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Поступательное движение тела. Скорости всех точек тела равны между собой, следовательно,

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m_k ,$$

где $\sum m_k = M$ – масса тела,

тогда

$$T=\frac{Mv^2}{2}, \tag{8.8}$$

то есть ***кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы M на квадрат его скорости v.***

При поступательном движении тела кинетическая энергия вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе всего тела. По этой формуле находится кинетическая энергия любой системы, движущейся так, что модули скоростей всех её точек одинаковы.

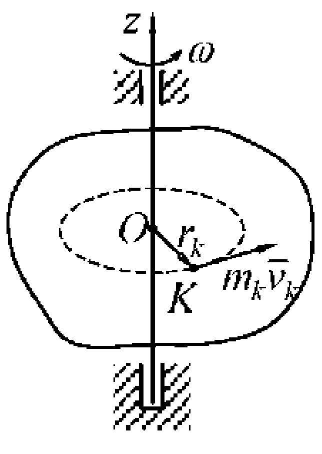

Рис. 8.3

Вращение тела вокруг неподвижной оси (рис. 8.3). Скорость любой точки определяется по формуле $v_k = \omega r_k$, где r_k – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения, ω – угловая скорость вращения тела. Тогда

$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\sum\frac{m_k(\omega r_k)^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_k r_k^2 ,$$

так как угловая скорость для всех точек одинакова и может быть вынесена за знак суммы.

Здесь $\sum m_k r_k^2 = I_z$ – момент инерции относительно оси вращения, следовательно,

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}, \tag{8.9}$$

то есть ***кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции точки относительно этой оси на квадрат его угловой скорости.***

Сравнивая формулы (8.8) и (8.9), отметим, что они аналогичны. Друг другу при поступательном и вращательном движении тела соответствуют скорости v и ω, масса M и момент инерции I_z, играющий роль массы при вращении.

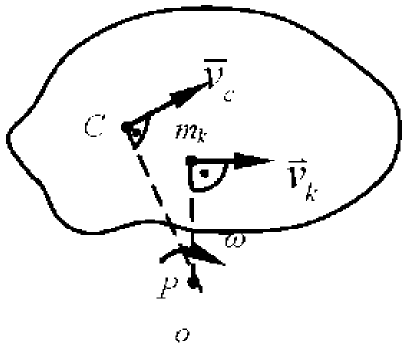

Рис. 8.4

Плоско-параллельное движение тела (рис. 8.4). Кинетическая энергия вычисляется в соответствии с теоремой Кёнига. Покажем сечение тела плоскостью, проходящее через центр масс C и параллельное данной неподвижной плоскости.

Пусть известны v_C и ω. Тело в данное мгновение вращается вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС), положение которого определяется отрезком CP, повернутым перпендикулярно к v_C и направленным в сторону вращения ω: $CP = \frac{v_C}{\omega}$.

Кинетическая энергия тела

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega r_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_P \omega^2}{2},$$

где $\sum m_k r_k^2 = I_P$ – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной к плоскости сечения, проходящей через МЦС и являющейся мгновенной осью вращения.

Пользоваться этой формулой неудобно, так как $I_P \neq \text{const}$. Преобразуем момент инерции по формуле Штейнера-Гюйгенса: $I_P = I_C + M\cdot(CP)^2$, где I_C – момент инерции тела относительно центральной оси, параллельной мгновенной оси вращения.

Тогда

$$T = \frac{[I_C + M\cdot(CP)^2]\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left[I_C\omega^2 + M\omega^2\left(\frac{v_C}{\omega}\right)^2\right] = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}.$$

Окончательно имеем

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \tag{8.11}$$

то есть ***кинетическая энергия тела при плоско-параллельном движении равна сумме кинетических энергий тела в переносном поступательном движении со скоростью центра масс и вращательного движения вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости движения.***

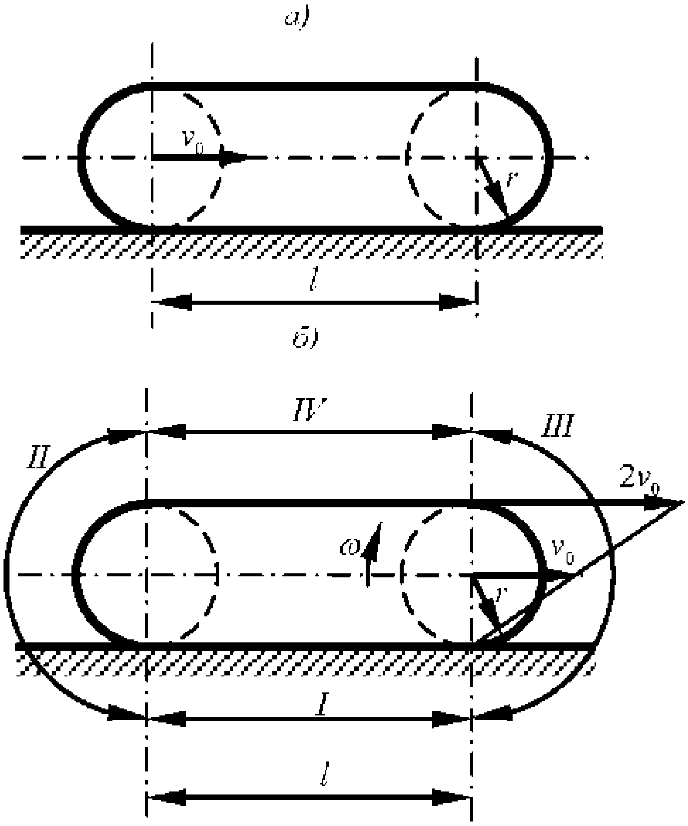

Рис. 8.5

Пример. Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями l, радиус колеса r, погонный вес гусеничной цепи γ (рис. 8.5, *а*).

Решение. Разобьем тело гусеницы на участки *I, II, III, IV* (рис. 8.5, *б*). Тогда кинетическая энергия гусеницы

$$T = T_I + T_{II} + T_{III} + T_{IV},$$

где $T_I = 0$ (скорость участка I равна нулю). Участки II, III совокупно представляют собой кольцо, движущееся плоско-параллельно, его масса $M = \dfrac{2\pi r\gamma}{g}$, момент инерции $I = Mr^2 = \dfrac{2\pi r\gamma}{g}\cdot r^2 = \dfrac{2\pi r^3\gamma}{g}$, скорость центра масс v_0, угловая скорость $\omega = \dfrac{v_0}{r}$, поэтому

$$T_{II} + T_{III} = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{2\pi r\gamma}{g}\cdot\frac{v_0^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi r^3\gamma}{g}\cdot\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 = \frac{2\pi r v_0^2}{g}.$$

Участок IV движется поступательно со скоростью $2v_o$, его масса $M = \dfrac{l\gamma}{g}$, поэтому $T_{IV} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{l\gamma}{g}\cdot(2v_0)^2 = \dfrac{2l\gamma v_0^2}{g}$.

Следовательно, кинетическая энергия гусеницы

$$T = \frac{2\pi r\gamma v_0^2}{2} + \frac{2l\gamma v_0^2}{2} = \frac{2\gamma}{g}(l + \pi r)v_0^2.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для k-й точки системы применим теорему об изменении кинетической энергии МТ

$$\frac{m_k v_{k1}^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k, \tag{8.12}$$

где $\dfrac{m_k v_{k1}^2}{2}$, $\dfrac{m_k v_{k0}^2}{2}$ – кинетическая энергия точки в конце и начале некоторого перемещения системы соответственно, A_k – работа на том же перемещении равнодействующей всех сил, действующих на данную точку.

Написав аналогичные соотношения для каждой точки системы и сложив их почленно, получим

$$\sum\frac{m_k v_{k1}^2}{2}-\sum\frac{m_k v_{k0}^2}{2}=\sum A_k ,$$

где $\sum\frac{m_k v_{k1}^2}{2}=T_1$, $\sum\frac{m_k v_{k0}^2}{2}=T_0$ – кинетическая энергия механической системы в конце и начале данного ее перемещения.

Следовательно, с учетом работ внешних и внутренних сил имеем

$$T_1-T \ =\sum A_k=\sum A_k^{(e)}+\sum A_k^{(i)} , \qquad (8.13)$$

то есть ***изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на этом перемещении.***

Частный случай. Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил равна нулю

$$\sum A_k^{(i)}=0 ,$$

Следовательно,

$$T_1-T \ =\sum A_k^{(e)} , \qquad (8.14)$$

то есть ***изменение кинетической энергии твердого тела при каком-либо перемещении равно сумме работ всех внешних сил, действующих на тело, на соответствующих перемещениях точек при его перемещении.***

Таким образом, в отличие от других общих теорем динамики системы, в эту теорему входят внутренние силы. Работа внутренних сил вообще не равна нулю, так как материальные точки системы под их действием могут перемещаться, то есть эти силы работают.

Однако они не входят в теорему, если тело абсолютно твердое или система неизменяемая, а также, когда на систему наложены идеальные связи (лекция 12).

Теоремой об изменении кинетической энергии удобно пользоваться, если в число параметров, известных и неизвестных, по условию задачи входят силы, перемещения и скорости.

Эта теорема применима в задачах, где определяются скорости. Вместе с тем справедлива теорема в дифференциальной форме: ***дифференциалы кинетической энергии системы и работы равны между собой***, то есть

$$dT = dA. \tag{8.15}$$

С ее помощью определяются ускорения. После дифференцирования по времени имеем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt} = N, \tag{8.16}$$

то есть ***производная по времени от кинетической энергии равна мощности.***

Для членов, входящих в выражение кинетической энергии и относящихся к поступательно движущимся телам,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = mvw.$$

Мощность

$$N = Fv.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим

$$mvw = Fv,$$

откуда находим ускорение

$$w = \frac{F}{m}.$$

Аналогично для членов, относящихся к вращающимся телам,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\frac{m\omega^2}{2}\right)}{dt} = m\omega \frac{d\omega}{dt} = m\omega\varepsilon .$$

Мощность

$$N = M\omega .$$

Приравниваем правые части между собой

$$I\omega\varepsilon = M\omega ,$$

откуда угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M}{I}. \tag{8.17}$$

Очевидно, в том и другом случае с исключением скоростей происходит переход к ускорениям, которые легко находятся.

ЛЕКЦИЯ 9

Теорема об изменении количества движения системы. Теорема о движении центра масс. Кинетический момент системы относительно центра и оси. Кинетический момент твердого тела относительно неподвижной оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента системы

КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Напишем выражение, определяющее положение центра масс системы:

$$\sum m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_C \,.$$

Продифференцировав по времени левую и правую части, имеем

$$\frac{d}{dt}\sum m_k \bar{r}_k = \frac{d(M\bar{r}_C)}{dt}, \text{ или } \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = M\frac{d\bar{r}_C}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k$, а $\dfrac{d\bar{r}_C}{dt} = \bar{v}_C$, то

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = M\bar{v}_C \,, \tag{9.1}$$

то есть ***количество движения механической системы равно количеству движения ее центра масс в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы*** (рис. 9.1).

Спроектируем соотношение (9.1) на координатные оси:

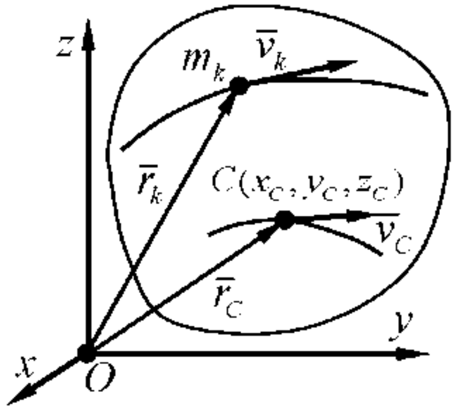

Рис. 9.1

$$
\begin{aligned}
Q_x &= \sum m_k v_{kx} = M v_{Cx}, \\
Q_y &= \sum m_k v_{ky} = M v_{Cy}, \qquad (9.2) \\
Q_z &= \sum m_k v_{kz} = M v_{Cz}.
\end{aligned}
$$

Проекция на любую ось количества движения механической системы равна проекции на ту же ось количества движения ее центра масс в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Напишем теорему об изменении количества движения k-й материальной точки, выделив внешние и внутренние силы:

$$\frac{d(m_k \overline{v}_k)}{dt} = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}, \qquad (9.3)$$

где $\overline{F}_k^{(e)}$ и $\overline{F}_k^{(i)}$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на МТ.

Составим по аналогии эти выражения и для других МТ системы, сложим их левые и правые части соответственно:

$$\sum \frac{d(m_k \overline{v}_k)}{dt} = \sum \overline{F}_k^{(e)} + \sum \overline{F}_k^{(i)}.$$

Заметим, что

$$\sum \frac{d(m_k \overline{v}_k)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \overline{v}_k\right) = \frac{d\overline{Q}}{dt}, \quad \sum \overline{F}_k^{(i)} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\overline{Q}}{dt}=\sum \overline{F}_k^{(e)} . \tag{9.4}$$

Получена теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: ***производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на систему***.

Спроектируем соотношение (9.4) на координатные оси:

$$\frac{dQ_x}{dt}=\sum F_{kx}^{(e)} , \quad \frac{dQ_y}{dt}=\sum F_{ky}^{(e)} , \quad \frac{dQ_z}{dt}=\sum F_{kz}^{(e)} ,$$

то есть ***производная по времени от проекции количества движения системы на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на систему***.

Умножив обе части соотношения (9.4) на dt, получим

$$d\overline{Q}=\sum \overline{F}_k^{(e)} dt , \tag{9.5}$$

то есть ***дифференциал количества движения системы равен векторной сумме элементарных импульсов внешних сил, действующих на систему***.

В проекциях на координатные оси

$$dQ_x=\sum F_{kx}^{(e)} dt , \quad dQ_y=\sum F_{ky}^{(e)} dt , \quad dQ_z=\sum F_{kz}^{(e)} dt . \tag{9.6}$$

Беря интеграл от обеих частей равенства (9.5), имеем

$$\overline{Q}-\overline{Q}_0=\sum \overline{S}_k^{(e)} . \tag{9.7}$$

Получена теорема об изменении количества движения механической системы в конечной форме: ***изменение количества движения системы за какой-то промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему, за то же время.***

В проекциях на координатные оси

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{kx}^{(e)}, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{ky}^{(e)}, \quad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{kz}^{(e)}. \quad (9.8)$$

Отметим следующее:

1) внутренние силы не входят в теорему об изменении количества движения системы и, следовательно, не влияют на его величину;

2) при некоторых условиях для внешних сил можно получить первые интегралы системы дифференциальных уравнений движения системы.

Следствие. Закон сохранения количества движения системы.

Положим, что $\sum \overline{F}_k^{(e)} = 0$, тогда $\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k = \text{const}$.

Если в течение некоторого времени главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то количество движения системы за это время остается постоянным.

По аналогии для проекций на координатные оси, если $\sum F_{kx}^{(e)} = 0$, то $Q_x = \sum m_k v_{kx} = \text{const}$.

Если в течение некоторого времени алгебраическая сумма проекций на какую-либо ось внешних сил, действующих на систему, остается равной нулю, то проекция на ту же ось количества движения системы за это время остается постоянной величиной.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ

На основании выражения (9.4), с учетом того, что $\overline{Q} = M\overline{v}_C$, имеем

$$M\frac{d\overline{v}_C}{dt} = \sum \overline{F}_k^{(e)}.$$

Здесь $\dfrac{d\overline{v}_C}{dt} = \overline{w}_C$ – ускорение центра масс, поэтому

$$M\overline{w}_C = \sum \overline{F}_k^{(e)} \, . \tag{9.9}$$

Получена теорема о движении центра масс системы: ***центр масс системы движется так же, как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действуют все внешние силы, приложенные к системе.***

Аналогично для проекций на координатные оси

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} \, , \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} \, , \quad M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{(e)} \, , \tag{9.10}$$

где x_C , y_C , z_C – координаты центра масс.

Следствия.

1. Если $\sum \overline{F}_k^{(e)} = 0$, то $\overline{v}_C = \text{const}$, то есть если главный вектор внешних сил, действующих на систему, в течение какого-либо времени равен нулю, то вектор скорости центра масс системы за это время есть величина постоянная. Это же справедливо и для проекций. Например, если $\sum F_x^{(e)} = 0$, то $v_{Cx} = \text{const}$.

2. Если при этом и скорость центра масс вначале равнялась нулю, то в течение этого времени центр масс не изменяет своего положения. Внутренние силы при отсутствии внешних сил не могут изменять движения центра масс системы, как не могут изменить и ее общего количества движения. Например, человек на скользком льду при отсутствии сил трения не может сделать ни шага, как и автомобиль не может сдвинуться с места.

Пример 1. На неподвижной воде (на озере, пруду) в безветрие стоит лодка. В ее носовой части находится рыбак. Как поведет себя лодка, если рыбак вдоль ее продольной оси переместится в кормовую часть? Сопротивление воды пренебрежимо мало.

Ответ. Поскольку между рыбаком и лодкой действуют внутренние силы, а начальная скорость равна нулю, то лодка переместится так, что общий центр масс системы «лодка-рыбак» останется на месте (количество движения системы равно нулю, как и до начала движения).

Пример 2. При игре на бильярде шаром бьют по неподвижно стоящему шару. Как поведут себя шары после соударения? Удар считать прямым центральным, абсолютно упругим (лекция 16).

Ответ. Шары обмениваются скоростями, так как количество движения системы сохраняется постоянным из-за отсутствия внешних сил.

Пример 3. В безвоздушном пространстве летит артиллерийский снаряд. В какой-то момент он взрывается. Что характерно для движения облака осколков?

Ответ. Так как разрыв снаряда происходит под действием внутренних сил, то центр масс «облака» осколков продолжает двигаться по той же траектории, что и центр масс снаряда до разрыва. Нарушение этой закономерности произойдет в тот момент, когда хотя бы один осколок не упадет на землю или не столкнется с целью.

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА И ОСИ

Кинетическим моментом системы относительно центра О называется главный момент количества движения системы относительно этого центра. Другими словами, вектор $\overline{K}_O$ равен сумме векторов $\overline{k}_{Ok}$ моментов количества движения $m_k\overline{v}_k$ всех точек системы относительно этого центра:

$$\overline{K}_O = \sum \overline{k}_{Ok} = \sum \overline{m}_O(m_k\overline{v}_k) = \sum(\overline{r}_k \times m_k\overline{v}_k). \qquad (9.11)$$

Кинетическим моментом системы относительно оси, например, z называется главный момент K_z количества движения системы относительно этой оси, равный алгебраической сумме моментов количества движения всех точек системы относительно этой оси k_{kz}:

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_z(m_k \bar{v}_k).$$

Так же, как и для векторных моментов относительно центра и оси, проходящих через этот центр, справедливо соотношение

$$K_z = K_O \cos\alpha, \tag{9.12}$$

где α – угол между направлением $\overline{K}_O$ и положительным направлением оси z. ***Проекция вектора кинетического момента системы относительно центра на какую-либо ось, проходящую через него, равна кинетическому моменту данной системы относительно этой оси.***

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω (рис. 8.3). Тело можно считать неизменной системой, состоящей из множества МТ. Поэтому кинетический момент тела относительно оси вращения

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_z(m_k \bar{v}_k). \tag{9.13}$$

Из рисунка видно

$$k_{kz} = m_z(m_k \bar{v}_k) = m_k v_k r_k = m_k r_k^2 \omega.$$

Тогда

$$K_z = \sum k_{kz} = \sum m_k r_k^2 \omega = \omega \sum m_k r_k^2,$$

где при ω=const и $\sum m_k r_k^2 = I_z$ имеем

$$K_z = I_z \omega, \tag{9.14}$$

то есть ***кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на его угловую скорость.***

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ

Напишем теорему об изменении момента количества движения относительно центра O для k-й точки:

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)]=\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)})+\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)}). \tag{9.15}$$

Составляя аналогичные соотношения для других МТ и суммируя их, получим

$$\sum\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)]=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)})+\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)}).$$

Заметим, что

$$\sum\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)]=\frac{d}{dt}\sum[\overline{m}_O(m_k\overline{v}_k)]=\frac{d\overline{K}_O}{dt}.$$

Так как сумма моментов внутренних сил относительно центра равна нулю $\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)})=0$, то

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt}=\sum\overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)})=\sum\overline{M}_O^{(e)}, \tag{9.16}$$

то есть ***производная по времени от кинетического момента системы относительно центра O равна главному моменту внешних сил, действующих на систему, относительно этого центра.***

По аналогии для проекций, если

$$\left[\frac{d\overline{K}_O}{dt}\right]_x=\left[\sum\overline{m}_o(\overline{F}_k^{(e)})\right]_x=\sum m_x(F_O^{(e)}),$$

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum M_x^{(e)}, \quad \frac{dK_y}{dt}=\sum M_y^{(e)}, \quad \frac{dK_z}{dt}=\sum M_z^{(e)}, \qquad (9.17)$$

то есть ***производная по времени от кинетического момента системы K_x (K_y, K_z) относительно неподвижной оси $x\,(y,z)$ равна главному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой оси.***

Следствие. Закон сохранения кинетического момента системы.

Если $\sum \overline{M}_O^{(e)}=0$, то

$$\overline{K}_O=\sum \overline{m}_O(m_k\overline{v}_k)=\overline{\text{const}}, \qquad (9.18)$$

то есть ***если главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно центра в течение некоторого времени равен нулю, то ее кинетический момент относительно центра в течение этого времени остается постоянным.***

Это же справедливо и для проекций на оси: если $\sum M_x^{(e)}=0$, $\sum M_y^{(e)}=0$, $\sum M_z^{(e)}=0$, то $K_x=\text{const}$, $K_y=\text{const}$, $K_z=\text{const}$.

Если в течение некоторого времени главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси постоянный.

Внутренние силы системы не могут изменить ее кинетический момент.

Примером служит скамья Жуковского. Если человек, сидящий на ней, раздвигает гантели (увеличивается момент инерции системы относительно оси вращения), то скорость вращения скамьи уменьшается, а при их сближении она увеличивается (момент инерции уменьшается), что соответствует соотношению

$$K_z=I_{z1}\omega_1=I_{z2}\omega_2=\text{const}.$$

ЛЕКЦИЯ 10

Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоского движения твердого тела. Физический маятник

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

В поступательном движении твердого тела все его точки движутся так же, как и его центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения его движения являются дифференциальными уравнениями движения тела:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_C &= \sum X^{(e)} = R_x^{(e)}, \\
m\ddot{y}_C &= \sum Y^{(e)} = R_y^{(e)}, \\
m\ddot{z}_C &= \sum Z^{(e)} = R_z^{(e)},
\end{aligned}
\qquad (10.1)
$$

где m – масса тела; $\sum X^{(e)}$, $\sum Y^{(e)}$, $\sum Z^{(e)}$ – алгебраические суммы проекций внешних сил на координатные оси; $R_x^{(e)}$, $R_y^{(e)}$, $R_z^{(e)}$ – проекции главного вектора внешних сил на эти оси.

С помощью этих уравнений можно решать два основных типа задач:

1) по заданному движению тела найти главный вектор внешних сил $\overline{R}^{(e)}$;

2) по заданным внешним силам, действующим на тело, найти кинематические уравнения его движения, если известно, что оно поступательное.

Таким образом, изучение поступательного движения тела сводится к изучению движения отдельной материальной точки, имеющей такую же массу, как и тело.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω (рис. 10.1).

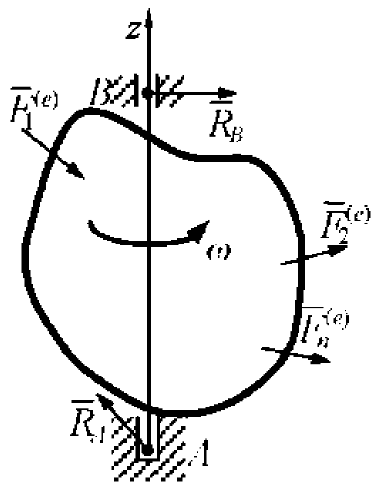

Рис. 10.1

Напишем теорему об изменении кинетического момента системы:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z^{(e)} . \qquad (10.2)$$

Реакции опор A и B являются внешними силами, но они пересекают ось вращения и момента относительно нее не дают. Поэтому в выражении $\sum M_z^{(e)}$ входят только моменты внешних сил.

Подставив в выражение (10.2) значение кинетического момента в виде

$$K_z = I_z\omega = I_z\dot{\varphi} .$$

получим

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = \sum M_z^{(e)} .$$

Так как $I_z = \mathrm{const}$, то

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z^{(e)} ,$$

или

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z^{(e)} . \qquad (10.3)$$

Получено дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При сравнении этого уравнения с дифференциальными уравнениями (10.1) поступательного прямолинейного движения твердого тела видно, что момент инерции при вращении твердого тела играет ту же роль, что и его масса при поступательном движении.

С помощью дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела можно решать следующие задачи.

1. По заданному закону вращения $\varphi=\varphi(t)$ и моменту инерции тела I_z можно определить главный момент внешних сил, действующих на тело,

$$M_z^{(e)}=I_z\ddot{\varphi}.$$

2. По заданным внешним силам и моменту инерции тела можно найти уравнение вращательного движения $\varphi=\varphi(t)$.

3. По величинам $M_z^{(e)}$ и φ можно определить момент инерции тела I_z.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Пусть твердое тело совершает плоское движение так, что центр масс C движется в плоскости чертежа (рис. 10.2). В динамике за полюс принимается центр масс тела, а не произвольная точка (как в кинематике).

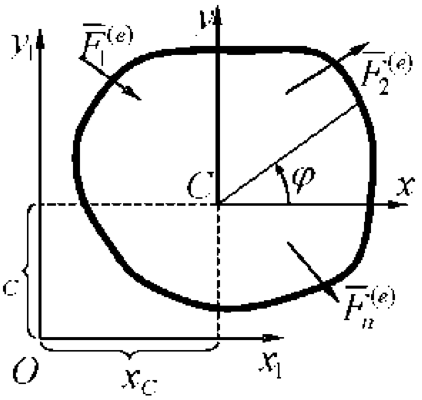

Рис. 10.2

Уравнения движения плоской фигуры

$$x_C=x_C(t),$$
$$y_C=y_C(t), \qquad (10.4)$$
$$\varphi=\varphi(t).$$

При известных силах $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела выглядят так:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_C &= \sum X^{(e)} = R_x^{(e)}, \\
m\ddot{y}_C &= \sum Y^{(e)} = R_y^{(e)}, \\
I_{C\varsigma}\ddot{\varphi} &= \sum M_{i\varsigma}^{(e)} = M_{\varsigma}^{(e)},
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

где $R_x^{(e)}, R_y^{(e)}$ – проекции главного вектора внешних сил на координатные оси, $M_{\varsigma}^{(e)}$ – главный момент внешних сил относительно оси C_{ς}, перпендикулярной к плоскости чертежа.

Третье из этих уравнений выводится аналогично дифференциальному уравнению вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Решением системы (10.5) с использованием начальных условий находятся уравнения плоского движения твердого тела.

Если траектория центра масс задана, то удобно использовать дифференциальные уравнения движения точки C в проекциях на естественные координатные оси

$$
\begin{aligned}
m\ddot{s}_C &= \sum F_{\tau}^{(e)}, \\
m\frac{v^2}{\rho} &= \sum F_n^{(e)}, \\
I_{C\varsigma} &= M_{C\varsigma}^{(e)},
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

где s_c – путь центра масс, v_c – его скорость, ρ – радиус кривизны его траектории.

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Физический маятник – это твердое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через его центр тяжести и находящееся под действием только силы тяжести (рис. 10.3). Ось вращения физического маятника называется осью привеса маятника.

Пусть ось привеса проходит через точку O, то есть является осью x (плоскость движения центра тяжести C совпадает с координатной плоскостью yOz). Тогда дифференциальное уравнение вращательного движения маятника имеет вид (реакции Z_0, Y_0 момента не дают, а моментом силы трения в шарнире O пренебрегаем)

$$I_x\ddot{\varphi} = -Gd\sin\varphi,$$

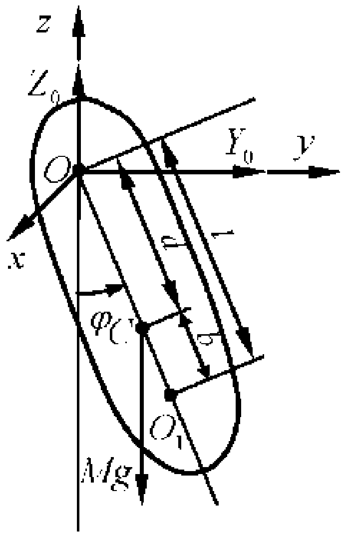

Рис. 10.3

где I_x – момент инерции маятника относительно оси привеса, $G = Mg$ – вес маятника, d – расстояние от центра тяжести маятника до оси привеса.

Перепишем уравнение иначе

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{I_x}\sin\varphi = 0. \qquad (10.7)$$

Это дифференциальное уравнение качаний физического маятника.

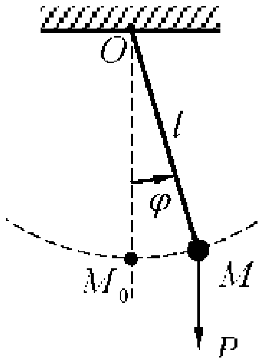

Рис. 10.4

Для математического маятника (рис. 10.4) уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (10.8)$$

Сравнивая уравнения (10.7) и (10.8), заметим, что они отличаются друг от друга коэффициентами при $\sin\varphi$. Приравняв эти коэффициенты между собой, определим длину соответствующего математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника.

$$\frac{g}{l}=\frac{Gd}{I_x},$$

откуда

$$l=\frac{I_x g}{Gd}=\frac{I_x}{md}. \qquad (10.9)$$

Таким образом, приведенная длина физического маятника есть длина такого математического маятника, период качаний которого равен периоду качаний данного физического маятника.

По формуле Штейнера-Гюйгенса имеем

$$I_x=I_{Cx}+md^2=mi_{Cx}^2+md^2,$$

где i_{Cx} – радиус инерции маятника относительно оси Cx. Тогда

$$l=\frac{mi_{Cx}^2+md^2}{md}=\frac{i_{Cx}^2}{d}+d.$$

Очевидно, что $l > d$.

Отложим отрезок $OO_1 = l$. Получим точку O_1, которая называется центром качаний маятника. Ось, проходящая через нее, называется осью качаний маятника.

Обозначим $\frac{i_{Cx}^2}{d}=b$, тогда $i_{Cx}^2=bd$.

Приведенная длина при оси привеса, проходящей через точку O,

$$l_1=b+d.$$

Теперь сделаем осью привеса ось $O_1 x$, тогда приведенная длина маятника

$$l_2=\frac{i_{Cx}^2}{b}+b.$$

Учитывая, что $i_{Cx}^2 = bd$, имеем $l_2 = d + b$.

Следовательно,

$$l_1 = l_2 . \tag{10.10}$$

Таким образом, если ось качаний физического маятника сделать осью привеса, то прежняя ось привеса станет его осью качаний (суть теоремы Гюйгенса о взаимности оси привеса и оси качаний физического маятника).

При малых углах φ (до 15^0) $\sin\varphi \approx \varphi$, тогда формула (10.7) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gd}{I_x}\varphi = 0, \text{ или } \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \tag{10.11}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{Gd}{I_x}}$ – частота колебаний маятника.

Общее решение этого уравнения:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad \text{или } \varphi = a \sin(kt - \beta). \tag{10.12}$$

где a – амплитуда колебаний в радианах, β – начальная фаза колебаний. Они, как и произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, определяются из начальных условий.

Период малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{I_x}{Gd}} . \tag{10.13}$$

С учетом выражения (10.9)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} .$$

ЛЕКЦИЯ 11

Силы инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Основы кинетостатики. Определение динамических реакций. Главный вектор и главный момент сил инерции

СИЛЫ ИНЕРЦИИ. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения материальной точки массой m в некоторой инерциальной системе отсчета под действием приложенных к ней сил

$$m\overline{w}=\overline{F}+\overline{R}\,, \tag{11.1}$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая активных сил, $\overline{R}$ – реакция связей, $\overline{w}$ – ускорение точки.

Уравнение можно представить в виде

$$\overline{F}+\overline{R}-m\overline{w}=0\,. \tag{11.2}$$

Левая часть уравнения (11.2) представляет собой сумму векторов, имеющих размерность сил. Удобно вектор ($-m\overline{w}$) считать условной силой. Эту силу называют силой инерции точки в данной системе отсчета.

Силой инерции называется вектор, направленный противоположно ускорению точки и равный по величине произведению массы на модуль ускорения:

$$\overline{F}^{(u)}=-\,m\overline{w}\,.$$

Уравнение (11.2) можно представить в виде

$$\overline{F}+\overline{R}+F^{(u)}=0\,.$$

Оно описывает состояние динамического равновесия МТ и выражает принцип Даламбера: ***при движении МТ непосредственно приложенная к ней сила, реакция связей и сила инерции точки составляют систему сил, эквивалентную нулю, то есть находящуюся в динамическом равновесии***.

МТ движется с ускорением $\overline{w}$, так как на нее действуют тела с силой ($\overline{F}+\overline{R}$).

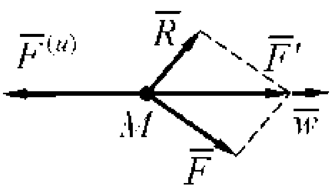

Рис. 11.1

По закону о равенстве сил действия и противодействия МТ оказывает противодействие этим телам, характеризуемое силой ($\overline{F}+\overline{R}$), равной силе инерции $\overline{F}^{(u)}$ (рис. 11.1).

Таким образом, сила инерции $\overline{F}^{(u)}$ равна векторной сумме сил воздействия со стороны МТ на тела, которые сообщают ей движение с данным ускорением $\overline{w}$.

Силы инерции условно прикладывают к МТ и рассуждают о ее динамическом равновесии. Этот прием носит название «***метод кинетостатики***». Существуют и другие точки зрения на природу сил инерции [1,2].

Так как полное ускорение МТ можно разложить на касательную и нормаль (рис. 11.2)

$$\overline{w}=\overline{w}_{\tau}+\overline{w}_{n}\,,$$

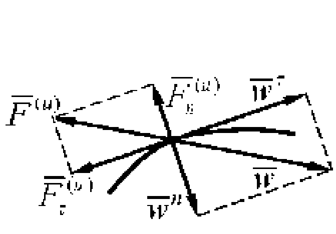

Рис. 11.2

то силу инерции можно представить в виде геометрической суммы векторов

$$\overline{F}^{(u)}=\overline{F}_{\tau}^{(u)}+\overline{F}_{n}^{(u)}\,.$$

где $\overline{F}_{\tau}^{(u)} = -m\overline{w}_{\tau}$ – касательная сила инерции, направленная по касательной к траектории точки; $\overline{F}_{n}^{(u)} = -m\overline{w}_{n}$ – нормальная (центробежная) сила инерции, направленная по нормали к траектории в сторону ее выпуклости.

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для каждой из N материальных точек механической системы можно написать

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{F}_k^{(u)} = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N. \tag{11.3}$$

Эти соотношения выражают принцип Даламбера для системы МТ: ***в движущейся механической системе система активных сил, реакций связей и сил инерции удовлетворяет условиям равновесия, то есть представляет собой систему сил, главный вектор и главный момент которой относительно любого центра равны нулю***.

Из принципа Даламбера можно получить следствия в виде шести условий равновесия, которые формально аналогичны условиям равновесия статики для сил, приложенных к твердому телу. Просуммировав выражение (11.3) для всех МТ системы, получим

$$\sum \overline{F}_k + \sum \overline{R}_k + \sum \overline{F}_k^{(u)} = 0. \tag{11.4}$$

Умножив на радиус-вектор $\vec{r}_k$ каждый из членов соотношения (11.3) и просуммировав их, получим

$$\sum(\overline{r}_k \times \overline{F}_k) + \sum(\overline{r}_k \times \overline{R}_k) + \sum \overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(u)}) = 0,$$

или

$$\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) + \sum \overline{m}_0(\overline{R}_k) + \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(u)}) = 0\,. \tag{11.5}$$

Проекции (11.4) и (11.5) на оси имеют вид

$$
\begin{gathered}
\sum F_{kx} + \sum R_{kx} + \sum F_{kx}^{(u)} = 0, \\
\sum F_{ky} + \sum R_{ky} + \sum F_{ky}^{(u)} = 0, \\
\sum F_{kz} + \sum R_{kz} + \sum F_{kz}^{(u)} = 0, \\
\sum m_x(\overline{F}_k) + \sum m_x(\overline{R}_k) + \sum m_x(\overline{F}_k^{(u)}) = 0, \\
\sum m_y(\overline{F}_k) + \sum m_y(\overline{R}_k) + \sum m_y(\overline{F}_k^{(u)}) = 0, \\
\sum m_z(\overline{F}_k) + \sum m_z(\overline{R}_k) + \sum m_z(\overline{F}_k^{(u)}) = 0.
\end{gathered}
\tag{11.6}
$$

Представляя равнодействующую силу, приложенную к каждой точке системы, как состоящую из внешней и внутренней силы получим

$$
\overline{F}_k + \overline{R}_k = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}.
$$

Следовательно, на основании выражений (11.4) и (11.5) имеем

$$
\begin{gathered}
\sum \overline{F}_k^{(e)} + \sum \overline{F}_k^{(u)} = 0, \\
\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^{(u)}) = 0,
\end{gathered}
\tag{11.7}
$$

так как главный вектор и главный момент внутренних сил равны нулю.

Положительной особенностью этих соотношений является отсутствие внутренних сил, что делает их удобными при решении задач динамики системы.

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ ИНЕРЦИИ

Как всякая система сил, система сил инерции может быть приведена к какому-либо центру O.

Рассмотрим совокупность сил инерции $\overline{F}_k^{(u)} = -m_k \overline{w}_k$.

Главный вектор системы сил инерции

$$R^{(u)} = \sum F_k^{(u)} .$$

Заменим $\overline{w}_k = \ddot{\overline{r}}_k$, тогда

$$\overline{R}^{(u)} = -\sum m_k \ddot{\overline{r}}_k = -\sum m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = -\sum \frac{d^2 (m_k \overline{r}_k)}{dt^2} = -\frac{d^2}{dt^2} \sum m_k \overline{r}_k .$$

Учтем, что

$$\sum m_k \overline{r}_k = M \overline{r}_c ,$$

где M – масса системы.

Тогда

$$\overline{R}^{(u)} = -M \frac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2} = -M \overline{w}_C ,$$

или

$$\overline{R}^{(u)} = \overline{F}_c^{(u)} = -M \vec{w}_c , \tag{11.8}$$

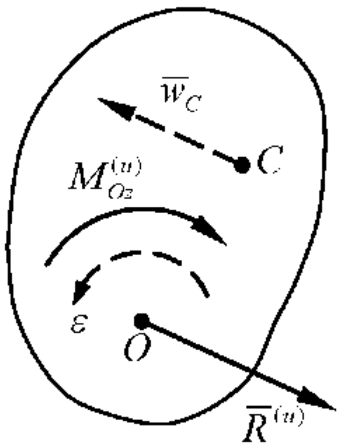

Рис. 11.3

то есть ***главный вектор сил инерции для системы МТ равен силе инерции центра масс системы в предположении, что в нем сосредоточена вся масса системы*** (рис. 11.3).

Главный момент сил инерции

$$\overline{L}_0^{(u)} = \sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^{(u)}) = -\sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^{(e)}) .$$

С другой стороны, на основании теоремы об изменении кинетического момента системы имеем

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{m}_0 (\overline{F}_k^{(e)}) .$$

Таким образом,

$$\overline{L}_O^{(u)} = -\frac{d\overline{K}_0}{dt} , \tag{11.9}$$

то есть ***главный момент сил инерции относительно центра О равен взятому с обратным знаком вектору, выражающему производную по времени от кинетического момента системы относительно того же центра.***

Аналогично для проекций. Например,

$$L_z^{(u)} = -\frac{dK_z}{dt}. \qquad (11.10)$$

В частности, при вращении твердого тела вокруг оси z его кинетический момент $L_z = I_z\omega$. Следовательно, для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно написать

$$L_z^{(u)} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(u)\tau}) = -\frac{dK_z}{dt} = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon,$$

то есть

$$L_z^{(u)} = -I_z\varepsilon. \qquad (11.11)$$

Этот момент создают касательные силы инерции.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Поступательное движение. Ускорения всех точек тела одинаковы и равны ускорению центра масс C. Силы инерции точек образуют систему параллельных сил и имеют равнодействующую, проходящую через центр масс,

$$\overline{R}^{(u)} = -m\overline{w}_C,$$

то есть ***при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к равнодействующей $\overline{R}^{(u)}$, проходящей через центр масс.***

Вращательное движение. Положим, тело вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной к плоскости чертежа (рис. 11.3), с которой совпадает плоскость материальной симметрии тела. Приводя силы инерции к центру O, получим результирующую силу и пару, лежащие в плоскости симметрии. Тогда с учетом равенства (11.11) имеем

$$L_z^{(u)} = -I_z\dot{\omega} = -I_z\varepsilon\ , \qquad (11.12)$$

то есть система сил инерции вращающего тела приводится к силе $\overline{R}^{(u)}$, проходящей через центр O, и паре с моментом $L_z^{(u)}$, лежащей в плоскости симметрии тела.

Вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела. В этом случае $\overline{w}_C = 0$, следовательно, $\overline{R}_C = 0$. Поэтому система сил инерции приводится к паре сил с моментом $L_z^{(u)}$, лежащей в плоскости симметрии тела.

Плоскопараллельное движение. Положим, тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. В этом случае ***система сил инерции приводится к лежащим в плоскости симметрии силе инерции*** $\overline{R}^{(u)} = -m\overline{w}_C$***, приложенной в центре масс, и паре сил с моментом*** $L_z^{(u)} = -I_z\varepsilon$.

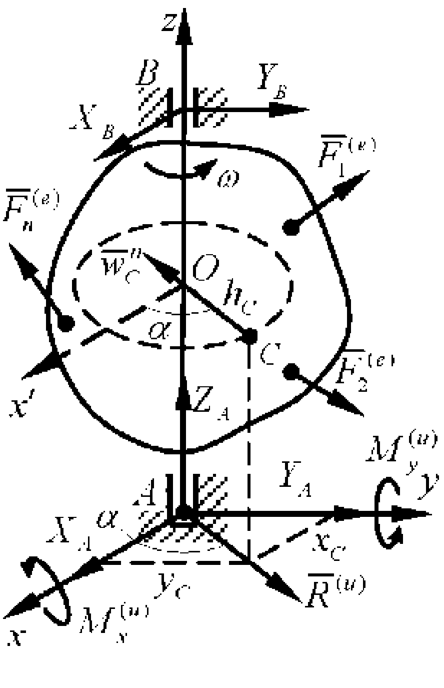

Рис. 11.4

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z с постоянной угловой скоростью ω (рис. 11.4).

Обозначим проекции на координатные оси главного вектора внешних сил $R_x^{(e)}, R_y^{(e)}, R_z^{(e)}$, главного вектора сил инерции $R_x^{(u)}, R_y^{(u)}, R_z^{(u)}$, главного момента внешних сил $L_x^{(e)}, L_y^{(e)}, L_z^{(e)}$, главного момента сил инерции $L_x^{(u)}$, $L_y^{(u)}$, $L_z^{(u)}$, динамические реакции X_A, X_B, Y_A, Y_B, Z_A. Напишем уравнения динамического равновесия тела

$$
\begin{gathered}
R_x^{(e)} + X_A + X_B + R_x^{(u)} = 0, \\
R_y^{(e)} + Y_A + Y_B + R_y^{(u)} = 0, \\
R_z^{(e)} + Z_A + R_z^{(u)} = 0, \\
L_x^{(e)} - Y_B \cdot AB + L_x^{(u)} = 0, \\
L_y^{(e)} + X_B \cdot AB + L_y^{(u)} = 0, \\
L_z^{(e)} + L_z^{(u)} = 0.
\end{gathered} \tag{11.13}
$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно, так как при отсутствии углового ускорения каждый из его членов сам по себе равен нулю.

Главный вектор сил инерции при $\omega = \text{const}$ равен произведению массы тела на нормальное ускорение центра масс C тела

$$\overline{R}^{(u)} = -m\overline{w}_C^n, \tag{11.14}$$

где m – масса тела; $w_C^n = \omega^2 h_C$ – нормальное ускорение точки C.

Тогда

$$
\begin{gathered}
R_x^{(u)} = m\omega^2 h_C \cos\alpha = m\omega^2 x_C, \\
R_y^{(u)} = m\omega^2 h_C \sin\alpha = m\omega^2 y_C, \\
R_z^{(u)} = 0.
\end{gathered}
$$

Для определения проекций $L_x^{(u)}. L_y^{(u)}$ возьмем точку тела массой m_k, отстоящую от оси на расстоянии h_k. Центробежная сила инерции точки $F_k^{(u)}=m_k\omega^2 h_k$, ее проекции на оси $F_{kx}^{(u)}=m_k\omega^2 x_k$, $F_{ky}^{(u)}=m_k\omega^2 y_k$, $F_{kz}^{(u)}=0$. Следовательно, моменты относительно осей

$$m_x(\overline{F}_k^{(u)})=-F_{ky}^{(u)}z_k=-m_k\omega^2 y_k z_k,$$
$$m_y(\overline{F}_k^{(u)})=F_{kx}^{(u)}z_k=m_k\omega^2 x_k z_k. \qquad (11.15)$$

Суммируя эти выражения для всех точек тела, находим

$$L_x^{(u)}=-\left(\sum m_k y_k z_k\right)\omega^2=-I_{yz}\omega^2,$$
$$L_y^{(u)}=\left(\sum m_k x_k z_k\right)\omega^2=I_{xz}\omega^2, \qquad (11.16)$$

где I_{yz}, I_{xz} – центробежные моменты инерции тела.

Подставляем найденные значения в формулу (11.13):

$$R_x^{(e)}+X_A+X_B+mx_C\omega^2=0,$$
$$R_y^{(e)}+Y_A+Y_B+my_C\omega^2=0,$$
$$R_z^{(e)}+Z_A=0, \qquad (11.17)$$
$$L_x^{(e)}-Y_B\cdot AB-I_{yz}\omega^2=0,$$
$$L_y^{(e)}+X_B\cdot AB+I_{xz}\omega^2=0.$$

Из этих уравнений находятся ***динамические реакции*** при равномерном вращении тела вокруг оси *z*. ***Статические реакции*** определяются из уравнений (11.17), если принять в них $\omega=0$.

Из этих уравнений следует, что вращение не будет влиять на значения реакций в подшипниках *A* и *B*, если $x_C=0$, $y_C=0$, $I_{xz}=0$, $I_{yz}=0$, что является признаком ***динамической уравновешенности*** тела при вращении вокруг оси *z*.

ЛЕКЦИЯ 12

Связи и их уравнения. Классификация связей. Связи голономные и неголономные, стационарные и нестационарные, двусторонние и односторонние. Идеальные связи. Принцип возможных (виртуальных) перемещений

СВЯЗИ И ИХ УРАВНЕНИЯ

Условия, которым должны удовлетворять в процессе движения системы координаты точек, их скорости и ускорения (при действии на точки системы любых активных сил), называются связями.

В декартовой системе координат связи могут быть выражены соотношениями между координатами (x_k, y_k, z_k), где k 1, 2, ..., N, их первыми производными по времени $(\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k)$ – компонентами скоростей и вторыми производными $(\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k)$ – компонентами ускорений. В них может входить также время t. Эти соотношения могут представлять собой уравнения или неравенства.

Связи, наложенные на систему, могут ограничивать её возможные движения под действием активных сил по сравнению с теми движениями, которые может иметь свободная система, то есть система, не подчиненная связям. Свободная система под действием активных сил может получать любое движение в пространстве, но ограничения, налагаемые связями, могут иметь характер направленности, специальное назначение, необходимое для достижения целей в соответствующих областях техники.

Аксиома связей состоит в том, что их влияние на положение и движение МТ осуществляется посредством реакций. Приложив к точкам реакции связей, систему можно рассматривать как свободную.

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

Существуют два основных типа связей: голономные и неголономные.

Голономными называются такие связи, которые выражаются или уравнениями относительно координат, или неравенствами, или же интегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат. Голономные связи ещё называют геометрическими.

Неголономными называются связи, выраженные неинтегрируемыми дифференциальными уравнениями относительно координат, то есть уравнениями, содержащими не только координаты точек, но и их производные по времени. Уравнения неголономных связей не интегрируются ни по отдельности каждое, ни в целом.

Таким образом, неголономные связи первого порядка выражаются неинтегрируемыми уравнениями типа

$$\varphi(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) = 0. \tag{12.1}$$

Неинтегрируемость уравнения состоит в том, что его нельзя привести к уравнению, в левой части которого находился бы полный дифференциал некоторой функции только от координат точек системы, то есть к виду $df(x_k, y_k, z_k, t) = 0$, после интегрирования которого получились бы уравнения голономной связи $f(x_k, y_k, z_k, t) = \mathrm{const}$.

Неголономные связи называются также кинематическими, так как они налагают условия не только на координаты точек, но и на их скорости и ускорения.

Связи разделяются на зависящие и не зависящие от времени.

Связью, не зависящей от времени, называется такая связь, уравнение которой не содержит время t.

Так, например, уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ означает, что точка находится на поверхности эллипсоида, который сам не перемещается и не деформируется, что вид связи со временем не изменяется.

Связи, не зависящие от времени, называются ***склерономными*** (то есть не изменяемые по своему виду, подобно неизменяемому твердому телу), или стационарными.

Связью, зависящей от времени, называется связь, выраженная уравнением или неравенством, содержащим явно время t. Уравнение, выражающее голономную связь, зависящую от времени, имеет вид

$$f(x_k, y_k, z_k, t)=0. \tag{12.2}$$

Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-3t)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ означает, что точка находится на движущемся эллипсоиде, центр которого перемещается вдоль оси y со скоростью $v_y=3$.

Связи, зависящие от времени, называют ***реономными*** (подвижными), или нестационарными.

Двусторонними голономными связями называются связи, выражающиеся уравнениями, например, для одной точки

$$f(x, y, z, t)=0. \tag{12.3}$$

Это уравнение показывает, что точка находится только на поверхности, выраженной уравнением. Такая связь не позволяет ей покинуть поверхность ни с какой из двух ее сторон (она как бы заключена между двумя бесконечно близкими слоями, составляющими поверхность, на которой она остается при любых активных силах, приложенных к ней). Двусторонние связи называют также удерживающими, или неосвобождающими.

Односторонними (освобождающими, неудерживающими) называются связи, выраженные неравенствами. Например, неравенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geq 1$ означает, что точка может находиться на поверхности эллипсоида или сойти с него во внешнюю область.

ВОЗМОЖНОЕ (ВИРТУАЛЬНОЕ) ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

Возможным (виртуальным) перемещением точки называется бесконечно малое ее перемещение, допускаемое в данный момент наложенными на нее связями. Это перемещение не следует смешивать с ***действительным***, которое обусловлено действующими на МТ силами, а возможное – наложенными связями. Оно может являться частным случаем возможного перемещения.

Возможное перемещение, в отличие от действительного перемещения ds, обозначается δs.

Поскольку возможные перемещения точек являются бесконечно малыми, то элементы криволинейного перемещения могут быть заменены элементами прямолинейных перемещений.

Возможным перемещением системы называется такое ее перемещение, которое определяется совокупностью возможных перемещений ее точек в данный момент.

Возможное перемещение несвободной системы ограничено наложенными на нее связями, и поэтому для определения ее положения необязательно знать координаты всех ее точек.

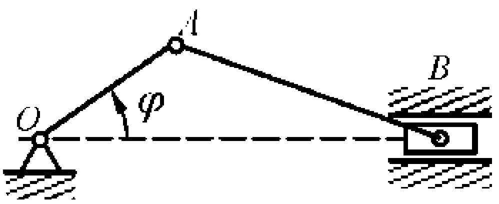

Рис. 12.1

Для кривошипно-шатунного механизма (рис. 12.1) достаточно знать угол φ поворота кривошипа, и тогда координаты всех точек этого механизма могут быть выражены функцией одной независимой переменной – угла φ. Такая система называется системой с одной степенью свободы.

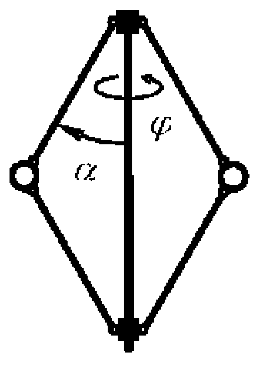

Рис. 12.2

Для определения положения центробежного регулятора в пространстве необходимо знать углы φ и α (рис. 12.2). Эта система имеет две степени свободы.

Независимые координаты, заданием которых определяется положение всех точек данной системы, называются ***обобщенными координатами.*** Число обобщенных координат равно ***числу сте-***

пеней свободы. Если положение точек системы определяется заданием n независимых величин (обобщенных координат), то такая система имеет n степеней свободы, то есть число независимых возможных перемещений системы определяет число ее степеней свободы.

ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Идеальными связями, или связями без трения, называются такие связи, при которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю на любом возможном перемещении системы. К их числу относятся все стационарные голономные связи без трения.

Для k-й точки введем обозначения сил: $\overline{F}_k$ – равнодействующая активных сил, $\overline{R}_k$ – равнодействующая реакций связей, $\overline{F}_k^*$ – равнодействующая всех сил.

Тогда

$$\overline{F}_k^* = \overline{F}_k + \overline{R}_k. \qquad (12.4)$$

Придадим какое-либо возможное перемещение системе, то есть совокупность перемещений всех ее точек $\delta\overline{r}_1, \delta\overline{r}_2, \ldots, \delta\overline{r}_N$. Найдем работу сил, действующих на этом перемещении:

$$\sum \delta A_k = \sum \overline{F}_k^* \delta\overline{r}_k = \sum (\overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k = \sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k + \sum \overline{R}_k \delta\overline{r}_k. \qquad (12.5)$$

Если $\sum \overline{R}_k \delta\overline{r}_k = 0$, то связь идеальна, и в этом случае $\sum \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = 0$.

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ (ВИРТУАЛЬНЫХ) ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пусть имеется система несвободных МТ, находящаяся в равновесии.

Выделим материальную точку M_k. Обозначим: $\overline{F}_k^{(a)}$ – равнодействующая активных сил, $\overline{R}_k$ – равнодействующая реакций связей.

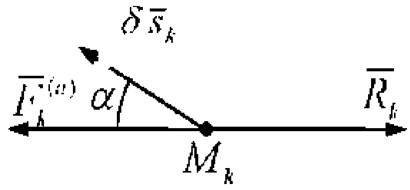

Рис. 12.3

Так как система находится в равновесии, то $\bar{F}_k^{(a)} = -\bar{R}_k$ (рис. 12.3).

Сообщим системе возможное перемещение, тогда точка M_k получит элементарное перемещение $\delta\bar{s}_k$. Сумма элементарных работ на возможном перемещении

$$\delta A_k^{(a)} + \delta A_k^{(R)} = F_k^{(a)} \delta s_k \cos\alpha + R_k \delta s_k \cos(180^0 - \alpha) = 0.$$

Написав такие равенства для всех точек и просуммировав их почленно, получим

$$\sum \delta A_k^{(a)} + \sum \delta A_k^{(R)} = 0. \qquad (12.6)$$

Для идеальных связей $\sum \delta A_k^{(R)} = 0$, следовательно,

$$\sum \delta A_k^{(a)} = 0. \qquad (12.7)$$

Нетрудно доказать и обратное: если $\sum \delta A_k^{(a)} = 0$, то система находится в равновесии. Это выражает принцип возможных (виртуальных) перемещений: ***для равновесия системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма элементарных работ всех приложенных к ней активных (внешних) сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия.***

Выражая работу сил через проекции, имеем

$$\sum (X_k^{(a)} \delta x_k + Y_k^{(a)} \delta y_k + Z_k^{(a)} \delta z_k) = 0, \qquad (12.8)$$

где $X_k^{(a)}, Y_k^{(a)}, Z_k^{(a)}$ – проекции приложенных к системе активных сил, $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ – элементарные приращения координат (их вариации) k-й точки системы на ее возможном перемещении.

Этот принцип применим и тогда, когда имеются связи с трением. В этом случае силу трения следует считать активной.

Принцип возможных перемещений применяется если требуется найти неизвестные силовые факторы для статически уравновешенных систем. Он также применим для определения опорных реакций.

Пример. В кулисном механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, ползуны A и B могут перемещаться вдоль стержней OD и OE кривошипа 1, жестко соединенных между собой под прямым углом (рис. 12.4, *а*). Стержень 2 шарнирно связан с ползунами A, B, C. Ползун С движется по направляющим параллельно оси x.

Пренебрегая трением, определить силу Q, уравновешивающую момент M. Дано: $AB = AC = 1$, $\angle ABO = \alpha$, M.

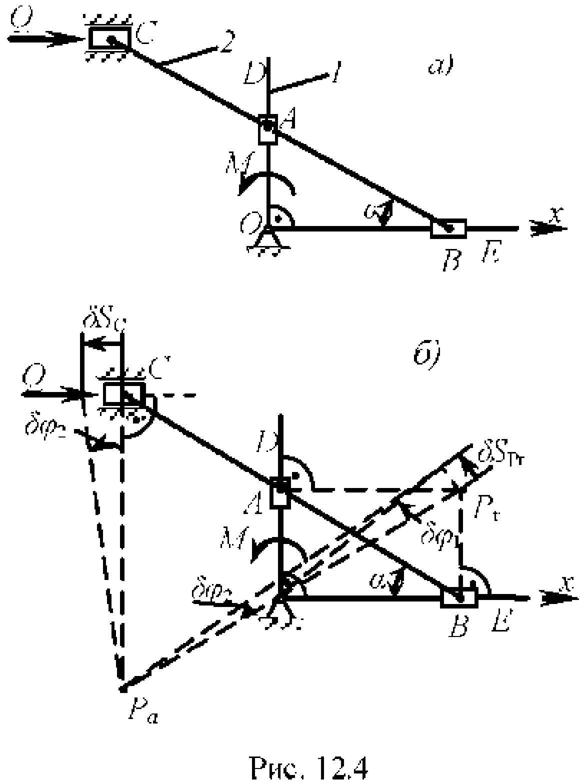

Рис. 12.4

Решение. Дадим системе возможное перемещение (рис. 12.4, *б*). На основании принципа возможных перемещений

$$\sum \delta A^{(e)} = M\delta\varphi_1 - Q\cdot\delta s_c = 0,$$

где $\delta s_c = CP_a\delta\varphi_2$, $CP_a = 3l\sin\alpha$.

Установим связь между возможными перемещениями.

Мгновенный центр вращения тела 2 в движении относительно кривошипа 1 находится в точке P_r, а в абсолютном движе-нии – в точке P_a.

Из рис. 12.4 видно, что

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_{p_r}}{OP_r} = \frac{\delta s_{p_r}}{l}, \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_{p_r}}{P_aP_r} = \frac{\delta s_{p_r}}{2l}.$$

Следовательно, $\delta\varphi_1 = 2\delta\varphi_2$.

Тогда $M\cdot 2\delta\varphi_2 - Q\cdot 3l\sin\alpha\cdot\delta\varphi_2 = 0$, откуда $Q = \dfrac{2M}{3l\sin\alpha}$.

ЛЕКЦИЯ 13

Обобщенная сила. Условия равновесия в обобщенных координатах. Общее уравнение динамики (уравнение Даламбера-Лагранжа)

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Обобщенной силой Q_i, соответствующей обобщенной координате q_i, называется скалярная величина, определяемая отношением элементарной работы действующих сил на перемещении системы, вызванном элементарным приращением δq_i координаты q_i, к величине этого приращения

$$Q_i = \frac{\left(\sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k\right)_{q_i}}{\delta q_i}. \qquad (13.1)$$

Пусть механическая система состоит из N материальных точек с голономными связями, имеющих n степеней свободы (то есть n обобщенных координат q).

По принципу возможных перемещений имеем

$$\sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0. \qquad (13.2)$$

Через обобщенные силы это выражение имеет вид

$$\sum Q_i \delta q_i = 0, \text{ или } Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n = 0. \qquad (13.3)$$

Так как все приращения независимы, то множители δq_i можно записывать произвольно.

Примем $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0, ..., \delta q_n = 0$. Тогда на основании равенства (13.3) $Q_1 \delta q_1 = 0$, откуда $Q_1 = 0$.

Затем примем $\delta q_1 = 0, \delta q_2 \neq 0, ..., \delta q_n = 0$, тогда $Q_2 \delta q_2 = 0$, следовательно, $Q_2 = 0$ и т. д.

Таким образом, получены условия равновесия в обобщенных координатах

$$Q_1 = 0, \; Q_2 = 0, \; ..., \; Q_n = 0. \tag{13.4}$$

Для равновесия голономной системы с n степенями свободы в ее положении, характеризуемом обобщенными координатами q_1, q_2, ..., q_n, ***необходимо и достаточно, чтобы значения всех обобщенных сил, соответствующие значениям обобщенных координат, равнялись нулю.***

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Пусть имеется система, состоящая из N материальных точек, имеющих произвольные двусторонние, неосвобождающие связи.

Тогда на основании принципа Даламбера для k-й точки можно написать

$$\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{F}_k^{(u)} = 0, \tag{13.5}$$

где $\overline{F}_k$, $\overline{R}_k$, $\overline{F}_k^{(u)}$ – векторы равнодействующих активных, реактивных и инерционных сил, действующих на точку.

Таким образом, точка находится в состоянии динамического равновесия, которое можно выразить принципом возможных перемещений. В результате принцип Даламбера объединяется с принципом возможных перемещений Лагранжа применительно к движущейся системе и образует ***общее уравнение динамики: сумма элементарных работ всех непосредственно приложенных к точкам системы активных, реактивных сил и сил инерции равна нулю на лю-***

бом возможном перемещении системы из положения, занимаемого ею в текущий момент времени.

Оно имеет выражение

$$\sum_{1}^{N}(\overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{F}_k^{(u)})\delta\overline{r}_k = 0. \qquad (13.6)$$

При этом связи могут быть реономными ввиду равновесия системы.

Общее уравнение динамики можно представить в иной форме, используя выражения $\overline{F}_k^{(u)} = -m_k\overline{w}_k = -m_k\ddot{\overline{r}}_k$,

$$\sum_{1}^{N}(-m_k\overline{w}_k + \overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k = 0,$$

или

$$\sum_{1}^{N}(-m_k\ddot{\overline{r}}_k + \overline{F}_k + \overline{R}_k)\delta\overline{r}_k = 0. \qquad (13.7)$$

Можно получить это уравнение в аналитической форме, использовав известные соотношения

$$\overline{r}_k = x_k\overline{i} + y_k\overline{j} + z_k\overline{k},$$

$$\delta\overline{r}_k = \delta x_k\overline{i} + \delta y_k\overline{j} + \delta z_k\overline{k},$$

$$\ddot{\overline{r}}_k = \ddot{x}_k\overline{i} + \ddot{y}_k\overline{j} + \ddot{z}_k\overline{k},$$

$$\overline{F}_k = F_{kx}\overline{i} + F_{ky}\overline{j} + F_{kz}\overline{k},$$

$$\overline{R}_k = R_{kx}\overline{i} + R_{ky}\overline{j} + R_{kz}\overline{k}.$$

Тогда на основании уравнения (13.7) имеем

$$\sum_{1}^{N}[(-m_k\ddot{x}_k + F_{kx} + R_{kx})\delta x_k + (-m_k\ddot{y}_k + F_{ky} + R_{ky})\delta y_k +$$

$$+ (-m_k\ddot{z}_k + F_{kz} + R_{kz})\delta z_k] = 0. \qquad (13.8)$$

В случае идеальных связей сумма элементарных работ их реакций тождественно равна нулю на любом возможном перемещении системы из положения, занимаемого в процессе движения,

$$\sum_{k=i}^{N} \overline{R}_k \delta \overline{r}_k = 0. \qquad (13.9)$$

Уравнения приобретают вид

$$\sum_{1}^{N} (-m_k \overline{w}_k + \overline{F}_k) \delta \overline{r}_k = 0,$$

$$\sum_{1}^{N} (-m_k \ddot{\overline{r}}_k + \overline{F}_k) \delta \overline{r}_k = 0, \qquad (13.10)$$

$$\sum_{1}^{N} [(-m_k \ddot{x}_k + F_{kx}) \delta x_k + (-m_k \ddot{y}_k + F_{ky}) \delta y_k + (-m_k \ddot{z}_k + F_{kz}) \delta z_k] = 0.$$

Пример. Механическая система состоит из ступенчатых дисков 1 и 2, тел 3, 4, 5, 6 и невесомого блока (рис. 13.1, *а*). Известно: силы тяжести $P_1 = 30$ Н,

$P_2 = P_3 = P_6 = 20$ Н,

$P_4 = 40$ Н, $P_5 = 80$ Н,

момент $M = 1{,}2$ Нм;

радиусы $R_1 = 0{,}2$ м,

$r_1 = 0{,}1$ м, $R_2 = 0{,}3$ м,

$r_2 = 0{,}15$ м,

$R_4 = 0{,}15$ м;

радиусы инерции дисков

$\rho_1 = 0{,}1$ м, $\rho_2 = 0{,}2$ м.

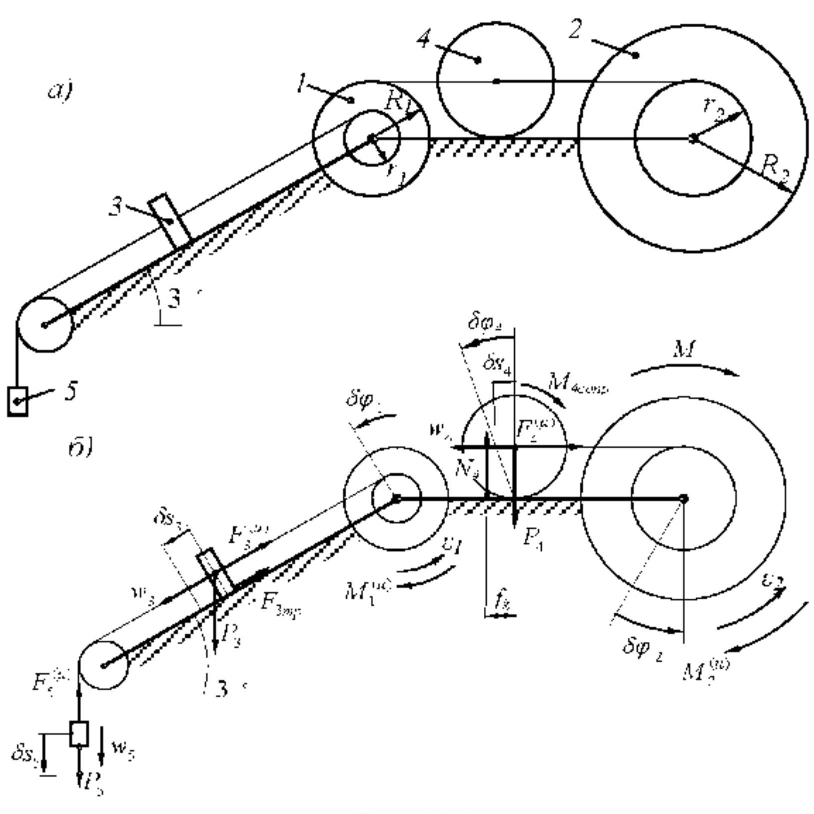

Рис. 13.1

Коэффициент трения $f=0{,}2$, коэффициент сопротивления качению $f_k=0{,}2$ см. Определить ускорение центра колеса 4.

Решение. Составим расчетную схему.

Выполним в масштабе чертеж. Покажем на нем:

- силы тяжести тел 3, 4, 5, 6;
- линейные и угловые ускорения,
- инерционные силовые факторы, направленные противоположно ускорениям (рис. 13.1, *б*).

Сообщим системе возможное перемещение. Только теперь можно показать на чертеже силу трения $F_{3тр}$ и момент сопротивления качению $M_{4сопр}$, направленные противоположно перемещениям тел.

Напишем общее уравнение динамики

$$P_5\delta s_5-F_5^{(u)}\delta s_5+P_3\sin 30^0\delta s_3-F_3^{(u)}\delta s_3-F_{3тр}\delta s_3-$$

$$-M_1^{(u)}\delta\varphi_1-F_4^{(u)}\delta s_4-M_4^{(u)}\delta\varphi_4-M_{4сопр}\delta\varphi_4-M\delta\varphi_2- \qquad (13.11)$$

$$-M_2^{(u)}\delta\varphi_2-P_6\delta s_6-F_6^{(u)}\delta s_6=0.$$

Установим связь между возможными перемещениями. ***Удобно перемещения тел выражать через перемещение того тела, ускорение которого нужно найти по условию.***

$$\delta\varphi_4=\frac{\delta s_4}{R_4}=\frac{\delta s_4}{0{,}15}=6{,}67\delta s_4,$$

$$\delta s_5=\delta s_3=\delta s_4\frac{r_1}{R_1}=\delta s_4\frac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5\delta s_4,\quad \delta\varphi_1=\frac{\delta s_4}{R_1}=\frac{\delta s_4}{0{,}2}=5\delta s_4,$$

$$\delta\varphi_2=\frac{\delta s_4}{r_2}=\frac{\delta s_4}{0{,}15}=6{,}67\delta s_4,\quad \delta s_6=R_2\delta\varphi_2=0{,}3\cdot 6{,}67\delta s_4=2\delta s_4.$$

Соотношения между ускорениями (они аналогичны соотношениям между перемещениями)

$$w_5 = w_3 = 0{,}5w_4, \quad \varepsilon_1 = 5w_4, \quad \varepsilon_2 = 6{,}67w_4, \quad \varepsilon_4 = 6{,}67w_4, \quad w_6 = 2w_4.$$

Силовые инерционные факторы

$$F_5^{(u)} = \frac{P_5}{g}w_5 = \frac{50}{g}\cdot 0{,}5w_4 = \frac{25}{g}w_4,$$

$$F_3^{(u)} = \frac{P_3}{g}w_3 = \frac{20}{g}\cdot 0{,}5w_4 = \frac{10}{g}w_4,$$

$$F_4^{(u)} = \frac{P_4}{g}w_4 = \frac{40}{g}w_4,$$

$$M_1^{(u)} = I_1\varepsilon_1 = \frac{P_1}{g}\rho_1^2\cdot 5w_4 = \frac{30}{g}\cdot 0{,}1^2\cdot 5w_4 = \frac{1{,}5}{g}w_4,$$

$$M_2^{(u)} = I_2\varepsilon_2 = \frac{P_2}{g}\rho_2^2\cdot 6{,}67w_4 = \frac{20}{g}\cdot 0{,}2^2\cdot 6{,}67w_4 = \frac{5{,}33}{g}w_4,$$

$$F_6^{(B)} = \frac{P_6}{g}w_6 = \frac{20}{g}\cdot 2w_4 = \frac{40}{g}w_4,$$

$$M_6^{(u)} = I_4\varepsilon_4 = \frac{P_4R_4^2}{2}\cdot 6{,}67w_4 = \frac{40\cdot 0{,}15^2}{2}\cdot 6{,}67w_4 = \frac{3}{g}w_4.$$

Сила трения

$$F_{3тр} = fP_3\cos 30^0 = 0{,}2\cdot 20\cdot 0{,}866 = 3{,}46 \text{ Н},$$

момент сопротивления качению колеса 4 ($N_4=P_4$)

$$M_{4сопр} = f_k N_4 = f_k P_4 = 0{,}002\cdot 40 = 0{,}08 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Найденные значения подставляем в исходное выражение (13.11):

$$80\cdot 0{,}5\delta s_4-\frac{40}{g}w_4\cdot 0{,}5\delta s_4+20\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\delta s_4-\frac{10}{g}w_4\cdot 0{,}5\delta s_4-3{,}46\cdot 0{,}5\delta s_4-$$
$$-\frac{1{,}5}{g}w_4\cdot 5\delta s_4-\frac{40}{g}w_4\delta s_4-\frac{3}{g}w_4\cdot 6{,}67\delta s_4-0{,}08\cdot 6{,}67\delta s_4-1{,}2\cdot 6{,}67\delta s_4-$$
$$-\frac{5{,}33}{g}w_4\cdot 6{,}67\delta s_4-20\cdot 2\delta s_4-\frac{40}{g}w_4\cdot 2\delta s_4=0.$$

После приведения подобных получим

$$142{,}56\frac{w_4}{g}=14{,}74,$$

откуда находим искомое ускорение тела 4

$$w_4=\frac{14{,}74}{142{,}56}g=0{,}103g=1{,}01\ \text{м/с}^2.$$

ЛЕКЦИЯ 14

Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II-го рода)

УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА II-го РОДА

Пусть имеется механическая система с голономными, идеальными, двусторонними связями с числом степеней свободы n. Это означает, что n обобщенных координат q_1, q_2, ..., q_n однозначно определяют положение системы и декартовы координаты любой МТ системы можно выразить через эти обобщенные координаты. Число МТ системы обозначим N. Связи системы считаем реономными, то есть в их уравнения явно входит параметр времени t. Тогда координаты k-й точки имеют вид

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t), \end{aligned} \tag{14.1}$$

а её радиус-вектор

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, t). \tag{14.2}$$

Применим общее уравнение динамики

$$\sum_{k=1}^{N}(-m_k\ddot{\bar{r}}_k + \bar{F}_k)\delta\bar{r}_k = 0. \tag{14.3}$$

На основании (14.2) найдем возможное перемещение k-й точки $\delta\bar{r}_k$ через обобщенные координаты как полный дифференциал от вектора $\bar{r}_k$ в рассматриваемый момент времени t

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \qquad (14.4)$$

В дальнейшем встретится двойное суммирование, поэтому заметим, что суммирование по индексу k производится по всем точкам системы от 1 до N, а по индексу i – по всем обобщенным координатам от 1 до n. Тогда соотношение (14.3) будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(-m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)+\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0. \qquad (14.5)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} + \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right),$$

откуда

$$\ddot{\bar{r}}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right). \qquad (14.6)$$

Установим необходимые для дальнейших рассуждений соотношения, которые возможны только для голономных механических систем. Сначала определим полную производную по времени радиуса-вектора $\dot{\bar{r}}_k$ на основании формулы (14.2), являющейся векторным выражением скорости k-й точки)

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \qquad (14.7)$$

Для обеих частей полученного равенства возьмем частные производные по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \qquad (14.8)$$

Выражение (14.8) является первым необходимым соотношением для получения второго искомого соотношения. Найдем частную производную от обеих частей равенства (14.7) по q_i (от t зависят коэффициенты при обобщенных скоростях):

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_1 \partial q_i}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_2 \partial q_i}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_n \partial q_i}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial t \partial q_i}. \qquad (14.9)$$

Составим полную производную по времени от функции $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$, которая явно зависит от всех обобщенных координат и от времени t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \bar{r}_k}{\partial q_i \partial t}. \qquad (14.10)$$

Заметим, что правые части равенств (14.9) и (14.10) одинаковы, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \qquad (14.11)$$

Найдено второе необходимое соотношение.

Подставляем выражения (14.8) и (14.11) в формулу (14.6):

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \qquad (14.12)$$

Подставляем правую часть равенства (14.12) под знак первой внутренней суммы соотношения (14.5)

$$\sum_{k-1}^{N}\left(-m_k\ddot{\bar{r}}_k\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)=-\left(\frac{d}{dt}\sum_{k-1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_i}-\sum_{k-1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}\right). \quad (14.13)$$

Производем преобразование правой части равенства (14.13). Напишем выражение кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k-1}^{N}(m_k v_k^2).$$

Заметим, что $\bar{v}_k=\dot{\bar{r}}_k$ и что $v_k^2=\bar{v}_k^{\,2}$. Тогда

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(m_k\bar{v}_k^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k^2.$$

Из формулы (14.7) видно, что функция $\dot{\bar{r}}_k$ зависит от всех q_i и $\dot{q}_i$.

Составим частные производные от кинетической энергии T по переменным q_i и $\dot{q}_i$. Заметим, что

$$\frac{\partial(\dot{\bar{r}}^2)}{\partial\dot{q}_i}=2\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_i}.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial\dot{q}_i}, \quad (14.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}=\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar{r}}_k\frac{\partial\dot{\bar{r}}_k}{\partial q_i}. \quad (14.15)$$

Благодаря соотношениям (14.14) и (14.15) выражение (14.13) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{N}\left(-m_k\ddot{\bar r}_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}\right)=-\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right).$$

Вторая внутренняя сумма правой части (14.5) представляет собой обобщенную силу Q_i:

$$\sum_{k=1}^{N}\bar F_k\frac{\partial \bar r_k}{\partial q_i}=Q_i\,.$$

Таким образом, уравнение (14.5) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)+Q_i\right]\delta q_i=0\,. \qquad (14.16)$$

Уравнение (14.16) называется общим уравнением динамики в обобщенных координатах. В нем член

$$-\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\partial q_i$$

выражает сумму элементарных работ всех сил инерции в системе на возможном ее перемещении, соответствующем совокупности приращений обобщенных координат ∂q_i.

Уравнение (14.16) применимо для любой совокупности независимых величин $(\delta q_1,\delta q_2,..,\delta q_n)$, в том числе и для случаев, когда одна из них не равна нулю, другие из них равны нулю (то есть изменяется только одна координата, а остальные постоянны).

Тогда можно, поочередно рассмотрев эти случаи, записать в общем виде (избавившись от знака суммы по n)

$$-\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)+Q_i=0, \quad i \quad 1, 2, 3, \ldots, n,$$

или окончательно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad i=1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (14.17)$$

Выражение (14.17) называется ***уравнением Лагранжа II-го рода***.

Для механической системы их записывается столько, сколькими степенями свободы она обладает.

Пример. Механическая система (рис. 14.1, *а*) состоит из ступенчатого барабана *1* и катка *2* (их считать однородными цилиндрами). На участке нити KE, связывающей барабан с катком, имеется пружина с коэффициентом жесткости c. Система начинает двигаться из состояния покоя, при этом пружина не деформирована.

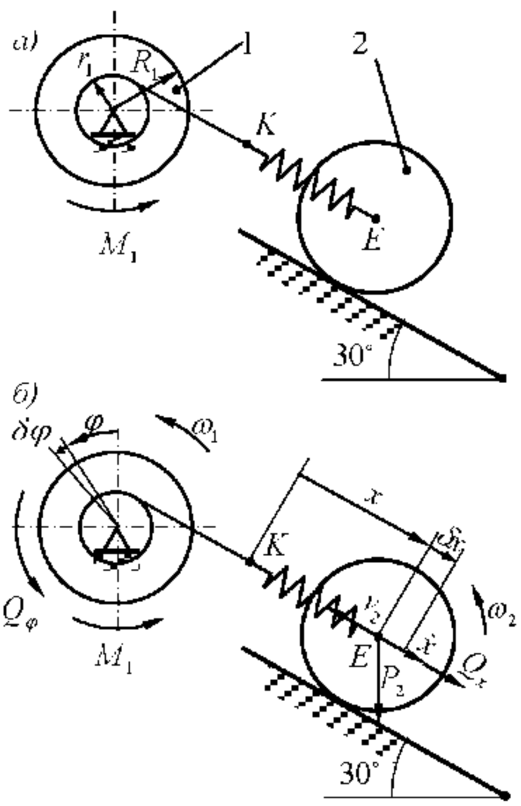

Рис. 14.1

Дано: $R_1=R_2=R, \quad r_1=0{,}4R,$ $P_1=P,\ P_2=4P,\ M_1=PR,\ c.$

Определить удлинение пружины в зависимости от времени $x=x(t)$, а также частоту и период колебаний.

Решение. Система имеет две степени свободы, поэтому можно написать два уравнения Лагранжа II рода. За обобщенные координаты примем угол поворота φ диска *1* и перемещение x центра колеса *2* точки E (рис. 14.1, *б*).

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi. \qquad (14.18)$$

Для определения кинетической энергии системы найдем скорости. Абсолютная скорость точки E рассчитывается следующим образом:

$$v_2=\omega_1 r_1-\dot{x}=0{,}4\dot{\varphi}R-\dot{x}.$$

Угловая скорость катка *2*

$$\omega_2=\frac{v_2}{R_2}=\frac{0{,}4\dot{\varphi}R-\dot{x}}{R}.$$

Определим кинетическую энергию тел.

Кинетическая энергия вращающегося вокруг неподвижной оси диска *1*

$$T_1=\frac{I_1\omega_1^2}{2}=\frac{\frac{PR^2}{2g}\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{PR^2}{4g}\dot{\varphi}^2.$$

Каток *2* находится в плоскопараллельном движении, поэтому

$$T_2=\frac{P_2v_2^2}{2g}+\frac{I_2\omega_2^2}{2}=\frac{4P}{2g}(0{,}4\dot{\varphi}R-\dot{x})^2+\frac{\frac{4P}{2g}R_2^2\frac{(0{,}4R\dot{\varphi}-\dot{x})^2}{R_2^2}}{2}=\frac{3P}{g}(0{,}4\dot{\varphi}R-\dot{x})^2.$$

Общая кинетическая энергия системы

$$T=T_1+T_2=\frac{PR^2}{4g}\dot{\varphi}^2+\frac{3P}{g}(0{,}4\dot{\varphi}R-\dot{x})^2=\frac{P}{g}(0{,}73R^2\dot{\varphi}^2-2{,}4R\dot{\varphi}\dot{x}+3\dot{x}^2).$$

Производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=-2{,}4\frac{P}{g}R\dot{\varphi}+6\frac{P}{g}\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=-2{,}4\frac{P}{g}R\ddot{\varphi}+6\frac{P}{g}\ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=1{,}46\frac{P}{g}R^2\dot{\varphi}-2{,}4\frac{P}{g}R\dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=1{,}46\frac{P}{g}R^2\ddot{\varphi}-2{,}4\frac{P}{g}R\ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0.$$

Находим обобщенные силы. ***Каждая из обобщенных сил эквивалентна внешним силам по работе, производимой ими на перемещениях точек их приложения, вызванных приращением только соответствующей обобщенной координаты в предположении, что остальные обобщенные координаты приращений не имеют.***

Поэтому

$$Q_x\delta x=P_2\sin 30^0\,\delta x-cx\delta x=(0{,}5\cdot 4P-cx)\delta x=(2P-cx)\delta x,$$

откуда $Q_x=2P-cx$;

$$Q_\varphi\delta\varphi=M_1\delta\varphi-P_2\sin 30^0\,\delta\varphi r_1=(PR-4P\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot R)\delta\varphi=0{,}2PR\delta\varphi,$$

откуда $Q_\varphi=0{,}2PR$.

Подставляем найденные выражения в исходную систему уравнений (14.18):

$$-2{,}4\frac{P}{g}R\ddot{\varphi}+6\frac{P}{g}\ddot{x}=2P-cx,$$

$$1{,}46\frac{P}{g}R^2\ddot{\varphi}-2{,}4\frac{P}{g}R\ddot{x}=0{,}2PR,$$

или

$$-2{,}4\ddot{\varphi} + \frac{6}{R}\ddot{x} = \frac{g}{R}\left(2 - \frac{c}{P}x\right),$$

$$0{,}73\ddot{\varphi} - \frac{1{,}2}{R}\ddot{x} = 0{,}1\frac{g}{R}.$$

Отсюда

$$\ddot{x} = \frac{\begin{vmatrix} -2{,}4 & \frac{g}{R}(2-\frac{c}{P}x) \\ 0{,}73 & 0{,}1\frac{g}{R} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2{,}4 & \frac{6}{R} \\ 0{,}73 & -\frac{1{,}2}{R} \end{vmatrix}} = \frac{-2{,}4\cdot 0{,}1 - 0{,}73\left(2-\frac{c}{P}x\right)}{2{,}4\cdot 1{,}2 - 0{,}73\cdot 6}\cdot\frac{\frac{g}{R}}{\frac{1}{R}} = g\left(1{,}08 - 0{,}48\frac{c}{P}x\right).$$

Следовательно,

$$\ddot{x} + 0{,}48\frac{cg}{P}x = 1{,}08g, \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} + k^2 x = 1{,}08g,$$

где $k = \sqrt{0{,}48\frac{cg}{P}}$.

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, неоднородное. Его общее решение есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений: $x = x_1 + x_2$.

Общее решение однородного уравнения

$$x_1 = A\cos kt + B\sin kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения находим их условия $\ddot{x} = 0$.

$$x_2 = \frac{1{,}08g}{k^2} = \frac{1{,}08}{0{,}48} \cdot \frac{g}{\frac{cg}{P}} = 2{,}35\frac{P}{c}.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$x = A\cos kt + B\sin kt + 2{,}35\frac{P}{c}.$$

Из начальных условий находим постоянные A и B. При $t = 0$

$$x = A + 2{,}35\frac{P}{c} = x_0 = 0,$$

откуда
$$A = -2{,}35\frac{P}{c};$$

$$\dot{x} = -Ak\sin kt + B\cos kt = Bk = \dot{x}_0 = 0,$$

откуда $B = 0$.

Тогда

$$x = -2{,}35\frac{P}{c}\cos kt + 2{,}35\frac{P}{c} = 2{,}35\frac{P}{c}(1 - \cos kt).$$

Частота колебаний

$$k = \sqrt{0{,}48\frac{cg}{P}},$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{0{,}48cg}} = 2{,}88\pi\sqrt{\frac{P}{cg}}.$$

ЛЕКЦИЯ 15

*Устойчивость равновесия и движения механической системы.
Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия.
Малые колебания системы с одной степенью свободы*

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Существуют три вида равновесия: ***устойчивое, неустойчивое, безразличное***. Рассмотрим их и покажем условия устойчивого равновесия.

Чтобы установить, будет ли рассматриваемое положение устойчивым, следует дать стержню достаточно малое отклонение от положения равновесия (в общем случае сообщить ему ещё малую начальную скорость) и рассмотреть его последующее движение (рис. 15.1). Для простоты ограничимся одним только малым начальным отклонением от начального положения.

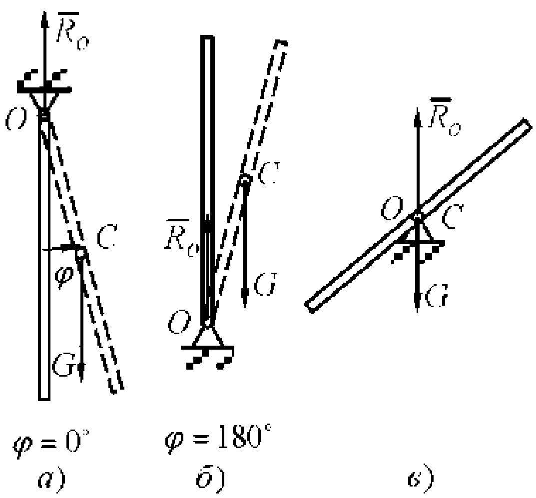

Рис. 15.1

При отклонении стержня из положения равновесия сила тяжести G и реактивная сила R_A представляют собой неуравновешенную систему сил – пару сил, которая в случае *а* будет стремиться вернуть стержень в положение равновесия, а в случае *б* удалять от него.

Если существует такое достаточно малое начальное отклонение от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то это положение называется ***устойчивым*** (рис. 15.1, *а*).

Если силы ещё больше удаляют стержень от положения равновесия, то такое положение является ***неустойчивым*** (рис. 15.1, *б*).

Если стержень, получив любое малое начальное перемещение от положения равновесия, остается в равновесии в новом положении, такое положение равновесия называется ***безразличным*** (рис. 15.1, *в*).

В общем случае стержню следует сообщить некоторую достаточно малую начальную скорость. Тогда случай безразличного равновесия можно считать частным случаем неустойчивого равновесия, так как в таком положении равновесия стержень будет продолжать удаляться от своего первоначального положения равновесия с той же скоростью по инерции.

Изложенное характерно не только для твёрдого тела, но и для любой механической системы. Наибольший интерес представляет положение устойчивого равновесия, так как в положении равновесия тело или система могут находиться длительное время, пока им не сообщается какое-либо возмущение.

При устойчивом положении равновесия система, выведенная из него достаточно малыми возмущениями в виде начальных отклонений и скоростей, сообщённых всем точкам системы или их части, совершает колебания около положения равновесия или приближается к нему без колебаний. При неустойчивом положении равновесия случайные возмущения приводят к тому, что система ещё больше удаляется от него.

Точное понятие устойчивого положения равновесия системы сформулировано для системы с конечным числом степеней свободы n в конце XIX века русским учёным А. М. Ляпуновым.

Положение системы определяется обобщёнными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, отсчитываемыми от положения равновесия, в котором они равны нулю (то есть их отсчет ведётся от положения равновесия). Начальное возмущение в общем случае состоит из начальных значений обобщённых координат $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$ и начальных скоростей $\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \ldots, \dot{q}_n^0$.

Теорема А. М. Ляпунова: ***равновесие системы называется устойчивым, если для всякого как угодно малого положительного числа ε можно выбрать два других таких малых положительных числа η_1 и η_2, что при начальных возмущениях, удовлетворяющих условиям***

$$\left|q_i^0\right| < \eta_1 \quad \text{и} \quad \left|\dot{q}_i^0\right| < \eta_2,$$

при дальнейшем движении механической системы выполняются условия

$$\left|q_i(t)\right| < \varepsilon$$

для каждой обобщенной ординаты.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА-ДИРИХЛЕ

Пусть имеется механическая система с голономными стационарными связями, находящаяся под действием сил, имеющих потенциал (такая система называется ***консервативной***). В положении ее равновесия каждая обобщённая сила Q_i равна нулю. Для случая потенциального силового поля обобщённые силы выражаются через потенциальную энергию по формулам

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.1}$$

Следовательно, в положении любого равновесия консервативной механической системы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \tag{15.2}$$

поэтому потенциальная энергия достигает своего экстремума.

По этим уравнениям ещё нельзя судить об устойчивом равновесии системы. Они определяются теоремой Лагранжа-Дирихле: ***для устойчивого положения равновесия консервативной механической системы достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в этом положении имела минимум***.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие равновесия определяется одним соотношением

$$\frac{\partial П}{\partial q}=0. \tag{15.3}$$

Для устойчивого равновесия необходимо выполнение условия минимума

$$\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q^2}\right)_{q=q_{равн}}>0. \tag{15.4}$$

Если $\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q^2}\right)_{q=q_{равн}}=0$, то такая вторая производная не может служить критерием оценки устойчивости равновесия. В этом случае необходимо исследовать производные более высокого порядка $\left(\frac{\partial^k П}{\partial q^k}\right)_{q=q_{равн}}$.

Если первая не равная нулю производная имеет чётный порядок и при этом положительна, то при $q=q_{равн}$ потенциальная энергия имеет минимум. Следовательно, это положение системы устойчиво.

Если же первая не равная нулю производная имеет нечётный порядок, то при $q=q_{равн}$ нет ни минимума, ни максимума.

Критерий Лагранжа-Дирихле является достаточным, но не необходимым условием равновесия консервативной механической системы.

Пример. Определить условия устойчивого равновесия механической системы с одной степенью свободы. Установить условия устойчивого равновесия метронома (рис. 15.2).

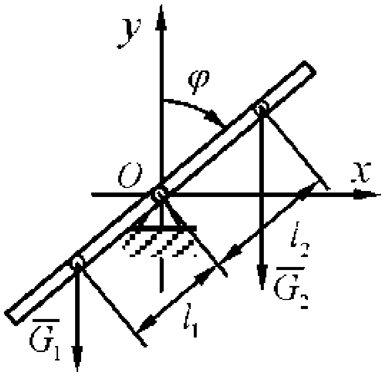

Рис. 15.2

Решение. За обобщённую координату примем угол φ. Тогда потенциальная энергия имеет вид

$$П = G_1 y_1 + G_2 y_2 .$$

При указанном на чертеже положении

$$y_1 = -l_1 \cos\varphi, \quad y_2 = l_2 \cos\varphi ,$$

следовательно,

$$П = (G_2 l_2 - G_1 y_1)\cos\varphi .$$

Найдем первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial П}{\partial \varphi} = (G_1 l_1 - G_2 l_2)\sin\varphi ,$$

$$\frac{\partial^2 П}{\partial \varphi^2} = (G_1 l_1 - G_2 l_2)\cos\varphi .$$

В состоянии равновесия

$$\frac{\partial П}{\partial q} = 0 .$$

Это возможно в двух случаях.

Случай 1. При $G_1 l_1 - G_2 l_2 = 0$, то есть при $G_1 l_1 = G_2 l_2$.

Случай 2. При $\sin\varphi = 0$, то есть при $\varphi_1 = 0$ или $\varphi_2 = 180^0$.

При $G_1 l_1 = G_2 l_2$ имеем $\dfrac{\partial^2 П}{\partial q^2} = 0$, то есть нет ни минимума, ни максимума, что соответствует состоянию безразличного равновесия $\left(\sum M_o = 0\right)$.

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ метроном находится в устойчивом равновесии, если

$$\left(\frac{\partial^2 П}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi_1 = 0} = G_1 l_1 - G_2 l_2 > 0, \quad \text{то есть } G_1 l_1 > G_2 l_2 .$$

При $\varphi_2 = 180^\circ$ условие устойчивого равновесия можно получить, если

$$\left(\frac{\partial^2 П}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi_2 = 180^\circ} = G_2 l_2 - G_1 l_1 > 0, \quad \text{то есть } G_2 l_2 > G_1 l_1 .$$

В других случаях (при $\varphi = 0$ $G_2 l_2 > G_1 l_1$, при $\varphi = 180^\circ$ $G_1 l_1 > G_2 l_2$) положение равновесия неустойчиво.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Механическая система может совершать колебания только вблизи устойчивого положения равновесия. Обобщенные координаты системы в положении равновесия принимаются равными нулю, то есть они отсчитываются из положения равновесия. Тогда колебательным движением механической системы в общем случае считают всякое её движение, при котором все обобщённые координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, то есть принимают нулевые значения, по крайней мере, несколько раз.

Для механической системы с одной степенью свободы уравнение Лагранжа II рода можно написать только одно. В общем случае оно имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q,$$

где обобщенную силу Q можно считать состоящей из трёх частей

$$Q=Q^{n}+Q^{\Phi}+Q^{B}. \qquad (15.5)$$

$Q^{n}=-\frac{\partial П}{\partial q}$ – обобщённая сила потенциальных сил. Она зависит от обобщенной координаты q и не зависит от обобщенной скорости $\dot{q}$. В случае нестационарного силового поля она может зависеть от времени (собственные колебания).

Q^{Φ} – часть обобщенной силы, зависящая от сил сопротивления, являющихся функцией величин и направлений скоростей. В нашем курсе ограничиваемся случаем линейного сопротивления (в затухающих колебаниях $\overline{R}=-\mu\,\overline{v}$).

В общем случае силу Q^{B} можно разложить в ряд Фурье и рассматривать каждое из синусоидальных слагаемых в отдельности, а результат получить методом наложения решений по принципу независимости действия сил.

ЛЕКЦИЯ 16

Явление удара. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения системы. Удар шара о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления

ЯВЛЕНИЕ УДАРА

По времени действия силы, действующие на МТ, разделяются на силы, изменяющие ее скорость за конечный промежуток времени (конечные силы, например, силы тяжести), и силы, изменяющие ее за малый промежуток времени ($\leq 0{,}1$ с) (мгновенные, или ударные, силы).

Мгновенной (ударной) силой называют силу, действующую на протяжении очень малого промежутка времени, но достигающую при этом таких больших значений, что ее импульс за это время успевает стать конечной величиной. Этот импульс

$$\overline{S} = \int_0^{\tau} \overline{F} dt, \qquad (16.1)$$

где τ – время действия силы $\overline{F}$.

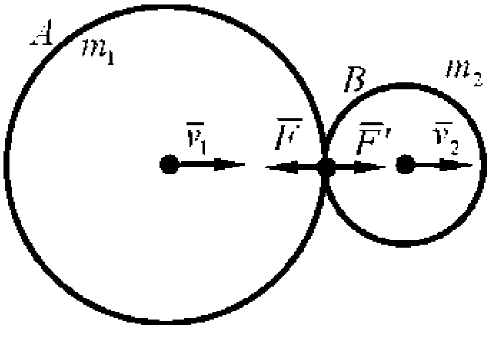

Рис. 16.1

Пусть тело A, имеющее скорость $\overline{v}_1$, и тело B, имеющее скорость v_2, соударяются (рис. 16.1). Движение тел до удара считаем поступательным и $v_1 > v_2$. Общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называется ***линией удара***.

Удар называется ***центральным***, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара. Центральный удар называется ***прямым***, если скорости центров масс соударяющихся тел направлены по линии удара. Удар тел A и B предполагаем прямым центральным. Тела считаем абсолютно гладкими.

В процессе соударения оба тела деформируются, при этом скорость тела A уменьшается, а скорость тела B увеличивается. Процесс деформирования заканчивается тогда, когда скорости тел становятся одинаковыми. Эту часть удара называют ***фазой деформации***, время ее продолжительности – τ_1.

$\overline{F}$ – сила действия на тело A со стороны тела B, а $\overline{F}' = -\overline{F}$ – сила действия на тело B со стороны A.

Ударный импульс силы $\overline{F}$ за фазу деформации определяется по формуле

$$\overline{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \overline{F} dt . \qquad (16.2)$$

Импульс силы $\overline{F}'$ за то же время $\overline{S}_1' = -\overline{S}_1$.

После деформации в силу упругости тела восстанавливают свои размеры и форму полностью или частично. Эту фазу называют ***фазой восстановления***. Она заканчивается в момент отделения тел друг от друга. Время фазы восстановления τ_2 тогда полное время удара $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Импульс ударной силы, действующей на тело A, за фазу восстановления

$$\overline{S}_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{F} dt . \qquad (16.3)$$

Действие ударной силы оценивается по ударному импульсу, поэтому все теоремы об ударе формулируются так, чтобы в них входили ударные импульсы, а не ударные силы.

Упругость соударяющихся тел при ударе оценивается отношением ударного импульса за фазу восстановления к ударному импульсу за фазу деформации, называемым ***коэффициентом восстановления*** (безразмерная величина):

$$k = \frac{S_2}{S_1}. \tag{16.4}$$

Для реальных тел в природе эти значения находятся в пределах $0 \le k \le 1$ (определяются опытным путем).

Если $k = 0$, то есть $S_2 = 0$, то фаза восстановления отсутствует, удар называется ***абсолютно неупругим***. При $k = 1$ импульсы ударной силы по фазам $S_2 = S_1$, и тело восстанавливает полностью свои размеры и форму. Удар называется ***абсолютно упругим***. При $0 < k < 1$ происходит удар тел ***средней упругости***, и он называется ***упругим***.

ДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ СИЛЫ НА МАТЕРИАЛЬНУЮ ТОЧКУ

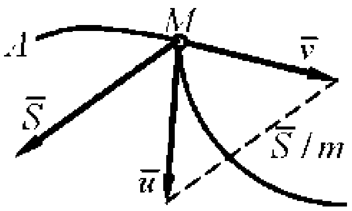

Рис. 16.2

Пусть на МТ массой m действует ударная сила $\overline{F}$ и конечная сила $\overline{F}^*$. Время действия ударной силы – τ, скорость точки в начале удара – $\bar{v}$, а в конце $\bar{u}$ (рис. 16.2).

Применим теорему об изменении количества движения МТ в интегральной форме

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_0^{\tau} \overline{F}dt + \int_0^{\tau} \overline{F}^* dt, \tag{16.5}$$

где $\int_0^{\tau} \overline{F}dt = \overline{S}$ – ударный импульс, $\int_0^{\tau} \overline{F}^* dt = \overline{S}^*$ – импульс конечной силы.

По теореме о среднем значении

$$\overline{S}^* = \int_0^\tau \overline{F}^* dt = \overline{F}^*_{cp}\tau , \qquad (16.6)$$

где $\overline{F}^*_{cp}$ – конечная величина, а τ – очень малая величина. Поэтому можно считать $\overline{S}^* = 0$.

Тогда выражение (16.5) примет вид

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \overline{S} , \qquad (16.7)$$

то есть ***изменение количества движения МТ за время удара равно ударному импульсу, приложенному к ней.***

Выражение (16.7) называется основным уравнением динамики МТ при ударе.

Скорость МТ в конце удара

$$\overline{u} = \overline{v} + \frac{1}{m}\overline{S} , \qquad (16.8)$$

где $\overline{u}$ – конечная величина, так как $\overline{v}, \overline{S}$, m – величины конечные.

Путь МТ при ударе имеет пренебрежимо малую величину $l = \int_0^\tau v dt$, где v – переменная скорость в промежутке времени (0, τ).

По теореме о среднем значении

$$l = v_{cp}\tau ,$$

где v_{cp} – конечная величина, а τ очень мало, поэтому $l \approx 0$.

Выводы

1. При ударе действием конечных сил можно пренебречь.
2. Перемещение МТ при ударе пренебрежимо мало.
3. Действия ударных сил на МТ выражаются в быстром изменении величины и направления скорости точки (формула (16.8)).

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть имеется система МТ, на которую действуют внешние и внутренние ударные силы. Действием конечных сил пренебрегаем. Время действия ударных нагрузок обозначим через τ. Назовем скорость k-й точки в начале удара $\vec{v}_k$, в конце удара $\vec{u}_k$, равнодействующие ударных сил $\overline{F}_k^{(e)}$, внутренних сил $\overline{F}_k^{(i)}$.

По теореме об изменении количества движения при ударе для k-й точки

$$m_k\overline{u}_k - m_k\overline{v}_k = \int \overline{F}_k^{(e)}dt = \overline{S}_k^{(e)} .$$

Тогда для системы

$$\sum m_k\overline{u}_k - \sum m_k\overline{v}_k = \sum\int \overline{F}_k^{(e)}dt = \sum\overline{S}_k^{(e)} ,$$

или

$$\Delta\overline{Q} = \sum\overline{S}_k^{(e)}, \qquad (16.9)$$

где $\dot{Q}$ – количество движения системы, $\sum\overline{S}_k^{(e)}$ – внешний ударный импульс.

Изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

В проекциях

$$\begin{aligned} \sum m_k u_{kx} - \sum m_k v_{kx} &= \sum S_{kx}^{(e)} , \\ \sum m_k u_{ky} - \sum m_k v_{ky} &= \sum S_{ky}^{(e)} , \\ \sum m_k u_{kz} - \sum m_k v_{kz} &= \sum S_{kz}^{(e)} . \end{aligned} \qquad (16.10)$$

На основании (16.4) можно получить теорему о движении центра масс системы при ударе. Известно, что в начале удара $M\overline{v}_c = \sum m_k\overline{v}_k$, а в его конце $M\overline{u}_c = \sum m_k\overline{u}_k$. Тогда

$$M(\vec{u}_c - \vec{v}_c) = \sum \vec{S}_k^{(e)}. \tag{16.11}$$

В проекциях

$$\begin{aligned} M(u_{cx} - v_{cx}) &= \sum S_{kx}^{(e)}, \\ M(u_{cy} - v_{cy}) &= \sum S_{ky}^{(e)}, \\ M(u_{cz} - v_{cz}) &= \sum S_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \tag{16.12}$$

Если $\sum \overline{S}_k^{(e)} = 0$, то $\sum m_k \overline{u}_k = \sum m_k \overline{v}_k$, то есть $\overline{u}_c = \overline{v}_c$. Таким образом, ***если векторная сумма внешних ударных, приложенных к системе, равна нулю, то количество движения системы и скорость ее центра масс при ударе не изменяются.***

УДАР ШАРА О НЕПОДВИЖНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ. КОЭФФИЦИЕНТ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть МТ (шарик) ударяется о гладкую неподвижную поверхность со скоростью $\overline{v}$ (рис. 16.3). Найдем скорость $\overline{u}$ в конце удара, если упругие свойства поверхности характеризуются коэффициентом восстановления k.

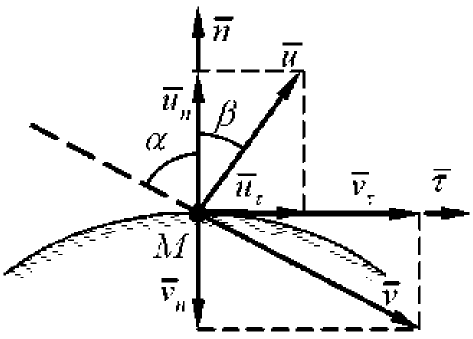

Рис. 16.3

На рис. 16.3 Mn – нормаль к поверхности, $M\tau$ – касательная к поверхности; α – угол между скоростью $\overline{v}$ и нормалью (угол падения); β – угол между вектором $\overline{u}$ и нормалью (угол отражения).

По теореме об изменении количества движений МТ при ударе

$$m\overline{u} - m\overline{v} = \overline{S}, \tag{16.13}$$

где $\overline{S}$ – ударный импульс реакции, направленный по нормали в случае гладкой поверхности.

В проекциях эта теорема выглядит следующим образом:

$$mu_\tau - mv_\tau = S_\tau,$$
$$mu_n - mv_n = S_n. \tag{16.14}$$

При наличии ударного трения поверхности $v_\tau \geq u_\tau$. Если поверхность гладкая и трение отсутствует, то $u_\tau = v_\tau$ (касательная составляющая скорости при ударе не изменяется) и $S_\tau = 0$.

Система уравнений (16.14) содержит две неизвестные u_n и $S = S_n$.

Для их определения используем дополнительные условия. Нормальная составляющая скорости за фазу деформации изменяется от v_n до 0, а за фазу восстановления – от 0 до u_n.

Тогда теорема об изменении количества движения в проекции на нормаль имеет вид

$$\begin{cases} 0 - mv_n = S_1, \\ mu_n - 0 = S_2, \end{cases}$$

откуда коэффициент восстановления

$$k = \frac{S_2}{S_1} = -\frac{u_n}{v_n}. \tag{16.15}$$

Это кинематическое выражение коэффициента восстановления в случае удара. Значение k положительно, так как проекции u_n и v_n имеют разные знаки.

Для определения u_n и S напишем систему уравнений

$$\begin{cases} mu_n - mv_n = S, \\ -\dfrac{u_n}{v_n} = k, \end{cases} \tag{16.16}$$

откуда находим

$$S=m(u_n-v_n)=mv_n\left(\frac{u_n}{v_n}-1\right)\approx mv\cos\alpha(1+k),\quad u_n=kv\cos\alpha\,. \quad (16.17)$$

Скорость МТ после удара

$$u=\sqrt{u_\tau^2+u_n^2}=v\sqrt{\sin^2\alpha+k^2\cos^2\alpha}\,. \qquad (16.18)$$

При $k=1$ (абсолютно упругий удар) $u=v$.

Заметим, что

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}=-\frac{u_\tau}{v_n}:\frac{u_\tau}{u_n}=-\frac{u_n}{v_n}=k, \qquad (16.19)$$

то есть отношение тангенса угла падения к тангенсу угла отражения равно коэффициенту восстановления.

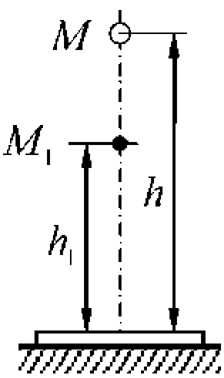

Рис. 16.4

Для опытного определения коэффициента восстановления существует много способов. Исключая влияние формы соударяющихся тел и их скорости при ударе на коэффициент восстановления, рассмотрим случай падения шарика без начальной скорости с высоты h на гладкую горизонтальную плиту (рис. 16.4). Материал шарика и плиты одинаковы.

После удара шарик поднимется на высоту h_1.

По формуле Галилея

$$v=\sqrt{2gh}\,,\quad u=\sqrt{2gh_1}\,,$$

тогда

$$k=-\frac{u_n}{v_n}=\sqrt{\frac{h_1}{h}}\,. \qquad (16.20)$$

Коэффициент восстановления k – справочная величина, зависящая от материалов соударяемых тел. Например, для удара стали о сталь $k=\frac{5}{9}$.

ЛЕКЦИЯ 17

Прямой центральный удар двух тел. Потеря кинетической энергии (теорема Карно). Теорема об изменении кинетического момента. Действие ударных сил на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара

ПРЯМОЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ ТЕЛ

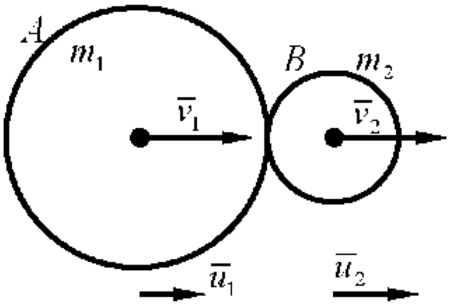

Рис. 17.1

Пусть происходит прямой центральный удар двух тел массой m_1 и m_2, коэффициент восстановления k известен (рис. 17.1). Скорости $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ направлены по линии удара. Определим $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ скорости тел после удара.

При отсутствии внешних ударных импульсов количество движения системы тел при ударе остаётся неизменным:

$$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2 .$$

Векторы скоростей $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ расположены на линии удара, так как на каждое тело действует ударный импульс, направленный по линии удара.

Поскольку векторы скоростей на ось проецируются в натуральную величину, то можно написать

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 . \tag{17.1}$$

В уравнение (17.1) входят два неизвестных u_1 и u_2. Чтобы их найти, напишем второе уравнение. При ударе о неподвижную поверхность коэффициент восстановления

$$k = -\frac{u_n}{v_n},$$

где v_n – скорость углубления тела A в подвижное тело B:

$$v_n = v_1 - v_2;$$

u_n – скорость, с которой тело A отделяется от тела B:

$$u_n = u_1 - u_2.$$

Скорости v_n и u_n имеют разные знаки. Поэтому коэффициент восстановления

$$k = -\frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

Напишем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ k = -\dfrac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}, \end{cases} \tag{17.2}$$

откуда

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - (1+k)\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + (1+k)\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2). \end{cases} \tag{17.3}$$

ПОТЕРЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ (ТЕОРЕМА КАРНО)

Изменение кинетической энергии системы соударяющихся тел за время удара

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1}{2}(u_1^2 - v_1^2) + \frac{m_2}{2}(u_2^2 - v_2^2) = \tag{17.4}$$

$$= \frac{m_1}{2}(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + \frac{m_2}{2}(u_2 - v_2)(u_2 + v_2).$$

Из системы уравнений (17.3) имеем

$$u_1 - v_1 = -(1+k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$

$$u_2 - v_2 = (1+k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2).$$

Тогда

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1+k)(v_1 - v_2)\left[-u_1 - v_1 + u_2 + v_2\right].$$

Из уравнений (17.2) имеем

$$u_2 - u_1 = k(v_1 - v_2).$$

Следовательно,

$$T_2 - T_1 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1+k)(v_1 - v_2)\left[k(v_1 - v_2) + v_2 - v_1\right] =$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2.$$

Окончательно

$$T_2-T_1=-\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(m_1+m_2)(v_1-v_2)^2. \qquad (17.5)$$

По этой формуле потеря кинетической энергии при $k \neq 1$

$$T_{пот}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(1-k^2)(v_1-v_2)^2. \qquad (17.6)$$

Это соотношение выражает известную теорему Карно.

При абсолютно упругом ударе $(k=1)$ потери кинетической энергии не происходит, то есть $T_2=T_1$.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЯМОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРА ДВУХ ТЕЛ

1. Случай абсолютно неупругого удара двух тел $(k=0)$.

Общая скорость тел после удара на основании уравнений (17.3)

$$u=u_1=u_2=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}.$$

Потеря кинетической энергии по формуле (17.6)

$$T_{пот}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2.$$

На практике такой удар применяется для деформирования тел или для сообщения скорости.

Потерянная энергия затрачивается на деформацию, а оставшаяся – на преодоление сопротивлений при последующем движении. В начале удара кинетическая энергия определяется кинетической энергией тела A, а оставшаяся – энергией тела B.

Если удар используется для деформаций, то должно выполняться условие $m_2 >> m_1$. Например, масса наковальни при ковке должна быть значительно больше массы молота.

Если удар используется для сообщения скорости, тогда, наоборот, $m_1 >> m_2$ (молоток массой m_1 при забивании гвоздя массой m_2).

2. **Случай абсолютно упругого удара** ($k=1$).

Для абсолютно упругого удара тел равных масс из уравнений (17.3) находим

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1,$$

то есть при абсолютно упругом ударе тела равных масс обмениваются скоростями. Потери кинетической энергии в этом случае не происходит.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ

Изменение кинетического момента системы относительно какой-либо точки за время удара равно векторной сумме моментов внешних ударных импульсов, приложенных к системе, относительно той же точки.

Применим теорему об изменении кинетического момента системы

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),$$

где $\overline{K_0} = \sum(\overline{r}_k \times m_k \overline{v}_k)$ – кинетический момент системы относительно неподвижной точки O; $\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = \sum\left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)}\right)$ – главный момент внешних сил, действующих на систему.

Тогда

$$d\overline{K}_0 = \sum \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)} \right) dt .$$

Интегрируем это выражение от 0 до τ :

$$\int_0^\tau d\overline{K}_0 = \int_0^\tau \sum \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)} \right) dt .$$

Левая часть выражения представляет собой изменение кинетического момента системы за время удара $\Delta\overline{K}_0$. Преобразуем правую часть:

$$\int_0^\tau \sum \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)} \right) dt = \sum \int_0^\tau \left(\overline{r}_k \times \overline{F}_k^{(e)} \right) dt = \sum \left(\overline{r}_k \times \int_0^\tau \overline{F}_k^{(e)} dt \right),$$

где перемещениями во время удара пренебрегаем, то есть $r_k = \text{const}$.

Так как $\int_0^\tau \overline{F}_k^{(e)} dt = \overline{S}_k^{(e)}$ – внешний ударный импульс, то

$$\sum \left(\overline{r}_k \times \int_0^\tau \overline{F}_k^{(e)} dt \right) = \sum \left(\overline{r}_k \times \overline{S}_k^{(e)} \right) = \sum \overline{M}_0 \left(\overline{S}_k^{(e)} \right). \tag{17.7}$$

Окончательно имеем

$$\Delta\overline{K}_0 = \sum \overline{M}_0 \left(\overline{S}_k^{(e)} \right). \tag{17.8}$$

Соотношение (17.8) справедливо и в проекциях на любую ось, например,

$$\Delta K_x = \sum M_x \left(\overline{S}_k^{(e)} \right),$$

то есть ***изменение кинетического момента относительно какой-либо оси за время удара равно алгебраической сумме моментов внешних ударных импульсов относительно той же оси***.

Следствие. При $\sum \overline{M}_0\left(\overline{S}_k^{(e)}\right)=0$ $\Delta \overline{K}_0=0$, то есть если сумма моментов внешних ударных импульсов, приложенных к системе, относительно какой-либо точки равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой точки при ударе не изменяется.

Это справедливо также по отношению к любой оси.

ДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ СИЛ НА ТЕЛО, ВРАЩАЮЩЕЕСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. ЦЕНТР УДАРА

Если произвести удар с ударным импульсом $\overline{S}$ по телу, имеющему ось вращения, то можно установить условия, при выполнении которых не возникает ударных реакций в подшипниках, расположенных на оси вращения.

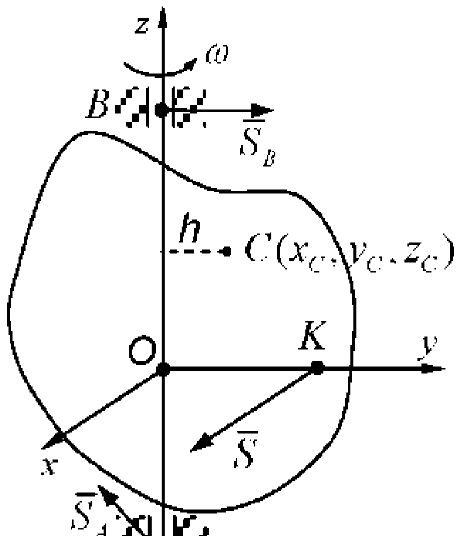

Рис. 17.2

Допустим, тело до удара вращалось вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью ω_0 (рис. 17.2).

К телу приложили ударный импульс $\overline{S}$, и оно стало вращаться с угловой скоростью ω.

Освободим тело от связей и заменим их импульсными реакциями $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$, применив к явлению удара теоремы об изменении количества движения и кинетического момента системы:

$$\overline{Q}-\overline{Q}_0=\sum \overline{S}_k^{(e)}=\overline{S}+\overline{S}_A+\overline{S}_B, \qquad (17.9)$$

$$\overline{K}-\overline{K}_0=\sum\overline{M}_0\left(\overline{S}_k^{(e)}\right)=\overline{M}_0(\overline{S})+\overline{M}_0(\overline{S}_A)+\overline{M}_0(\overline{S}_B),$$

где $\overline{Q}$ и $\overline{K}$ – векторы количества движения и кинетического момента системы.

По формуле Эйлера скорость точки

$$\overline{v}_k=\overline{\omega}\times\overline{r}_k.$$

Тогда $\overline{Q}=M\overline{v}_c=M(\overline{\omega}\times\overline{r}_c)$, где M – масса тела, $\overline{r}_c$ – радиус-вектор центра масс тела.

Так как $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ направлены по оси вращения, то

$$\overline{Q}-\overline{Q}_0=M\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & \omega-\omega_0\\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix}. \qquad (17.10)$$

Проекции кинетического момента на оси координат находим по формулам для тела, имеющего одну закреплённую точку, при условии $\omega_x=\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$:

$$K_x=I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z=-I_{xz}\omega,$$
$$K_y=-I_{yx}\omega_x+I_y\omega_y-I_{yz}\omega_z=-I_{yz}\omega,$$
$$K_z=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_z\omega_z=I_z\omega.$$

Следовательно,

$$K_x-K_{0x}=-I_{xz}(\omega-\omega_0),$$
$$K_y-K_{0y}=-I_{yz}(\omega-\omega_0), \qquad (17.11)$$
$$K_z-K_{0z}=I_z(\omega-\omega_0).$$

Проектируем равенство (17.9) на оси координат с учетом соотношений (17.10) и (17.11):

$$
\begin{aligned}
-M_{Y_z}(\omega-\omega_0)&=S_x+S_{A_x}+S_{B_x},\\
M_{X_y}(\omega-\omega_0)&=S_y+S_{A_y}+S_{B_y},\\
0&=S_z+S_{A_z}+S_{B_z},\\
-J_{xz}(\omega-\omega_0)&=M_x(\overline{S})+M_x(\overline{S}_A)+M_x(\overline{S}_B),\\
-J_{yz}(\omega-\omega_0)&=M_y(\overline{S})+M_y(\overline{S}_A)+M_y(\overline{S}_B),\\
J_z(\omega-\omega_0)&=M_z(S)+M_z(\overline{S}_A)+M_z(\overline{S}_B).
\end{aligned}
\tag{17.12}
$$

Из системы (17.12) определяются импульсы $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ и изменение угловой скорости $(\omega-\omega_0)$ для заданного импульса $\overline{S}$.

Найдём условия, при которых $\overline{S}_A=\overline{S}_B=0$. Из системы (17.12) в этом случае имеем

$$
\begin{aligned}
-My_c(\omega-\omega_0)&=S_x,\\
Mx_c(\omega-\omega_0)&=S_y,\\
0&=S_Z,\\
-I_{xz}(\omega-\omega_0)&=M_x(\overline{S}),\\
-I_{yz}(\omega-\omega_0)&=M_y(\overline{S}),\\
I_z(\omega-\omega_0)&=M_z(\overline{S}).
\end{aligned}
\tag{17.13}
$$

Очевидно, что если $S_Z=0$, то ударный импульс параллелен плоскости xOy. Выберем начало координат O так, чтобы этот вектор $\overline{S}$ лежал в самой плоскости xOy, а ось Ox направим параллельно вектору $\overline{S}$. Тогда вектор $\overline{S}$ пересечёт ось Oy в точке K. При таком выборе координат моментных осей $S_y=0$, $S_x=S$, $M_x(\overline{S})=0$, $M_y(\overline{S})=0$.

Поэтому в системе (17.13) из второго уравнения $x_c = 0$, из четвёртого $I_x = 0$, из пятого $I_y = 0$, то есть центр масс находится в плоскости yOz и ось вращения является главной осью инерции.

Так как вектор $\overline{S}$ параллелен оси Ox, то, следовательно, он перпендикулярен плоскости yOz, проходящей через ось вращения и центр масс.

Обозначим $l = OK$, тогда $M_z(\overline{S}) = -l \cdot S$ (при $S_x > 0$).

Исключая S, находим

$$l = OK = \frac{I_x}{My_C}. \qquad (17.14)$$

При выбранной системе координат y_c – расстояние от центра масс до оси вращения. Назовём его h, тогда $l = \dfrac{I_z}{Mh}$. Получена формула для вычисления приведённой длины физического маятника.

Точка K пересечения линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс, при отсутствии ударных реакций в подшипниках называется ***центром удара***.

Любой ударный импульс $\overline{S}$, линия действия которого проходит через точку K перпендикулярно к плоскости, соединяющей ось вращения и центр масс, не вызывает ударных реакций в подшипниках, если ось вращения является главной осью инерции для точки O (точки пересечения оси вращения с перпендикулярной плоскостью, содержащей ударный импульс $\overline{S}$). Расстояние от оси вращения до линии ударного импульса l равно приведённой длине физического маятника. Центр удара K и центр масс C лежат по одну сторону от оси вращения.

Если центр масс лежит на оси вращения $(y_c = h = 0)$, то центр удара находится в бесконечности. Тогда $\overline{Q} - \overline{Q}_0 = 0$ по формуле (17.10), то есть $\overline{S} + \overline{S_A} + \overline{S_B} = 0$, откуда $\overline{S_A} + \overline{S_B} = -\overline{S}$. Ударный импульс, приложенный к телу, полностью передается на подшипники.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом читателю издании изложен учебный материал по разделу «Динамика» дисциплины «Теоретическая механика». В совокупности с ранее изданным курсом лекций по разделам «Статика» и «Кинематика» [6] книга представляет полный цикл лекций, рекомендуемый для изучения курса теоретической механики студентами механико-машиностроительных специальностей. В ней приведены основные понятия, определения и аксиомы механики, рассмотрены способы решения практических задач.

Полный курс лекций служит базой для последующего изучения дисциплин «Сопротивление материалов», «Детали машин», «Теория машин и механизмов» и других в цикле инженерной подготовки специалистов.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задачи раздела «Динамика».
2. Определение материальной точки.
3. Первый закон динамики.
4. Второй закон динамики.
5. Третий закон динамики.
6. Четвертый закон динамики.
7. Первая задача динамики МТ.
8. Вторая задача динамики МТ.
9. Частные случаи прямолинейного движения МТ.
10. Виды соединения упругих элементов. Коэффициенты жесткости.
11. Свободные колебания МТ. Частота, амплитуда, период колебаний.
12. Затухающие колебания МТ. Частота, амплитуда, декремент.
13. Апериодическое движение МТ.
14. Вынужденные колебания МТ. Частота, амплитуда, период колебаний.
15. Явление резонанса.
16. Относительное движение МТ. Переносная и кориолисова силы инерции.
17. Теорема об изменении количества движения МТ. Импульс силы.
18. Теорема об изменении момента количества движения МТ относительно центра и оси.
19. Движение МТ под действием центральной силы.
20. Работа силы тяжести.
21. Работа силы упругости.
22. Понятие мощности.
23. Теорема об изменении кинетической энергии МТ.
24. Внешние и внутренние силы.
25. Моменты инерции тел.
26. Теорема Штейнера-Гюйгенса.

27. Моменты инерции тел простых форм.

28. Работа и мощность сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

29. Кинетическая энергия тел в различных случаях его движения.

30. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

31. Теорема об изменении количества движения системы.

32. Теорема о движении центра масс системы.

33. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

34. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно центра и оси.

35. Дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и плоского движения тела.

36. Физический маятник. Теорема Гюйгенса.

37. Принцип Даламбера. Метод кинетостатики.

38. Главный вектор и главный момент сил инерции.

39. Типы связей. Понятие идеальной связи.

40. Принцип возможных перемещений.

41. Понятие степени свободы.

42. Уравнение Лагранжа II-го рода. Определение обобщенной силы.

43. Виды равновесия. Теорема Лагранжа-Дирихле.

44. Малые колебания системы с одной степенью свободы.

45. Явление удара. Виды удара.

46. Теорема об изменении количества при ударе.

47. Удар тела о неподвижную поверхность.

48. Коэффициент восстановления.

49. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

50. Понятие центра удара.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Курс теоретической механики: учебник для вузов по направл. подготовки дипломир. специалистов в области техники и технологии / [Дронг В. И., Дубинин В. В., Ильин М. М. и др.]; под ред. К. С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 735 с.
2. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностр. и приборостр. спец. вузов / Н. Н. Никитин. – М.: Высш. шк., 1990. – 606 с.
3. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике: учебное пособие для втузов / И. В. Мещерский. – 45-е изд. – М.-СПб.-Краснодар: ЛАНЬ, 2006. – 448 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для вузов / под ред. А. А. Яблонского. – М.: Высш. шк. 1985. – 368 с.
5. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 14-е изд.– М.: Высш. шк., 2004. – 415 с.
6. Соколов, Г. М. Теоретическая механика. Курс лекций. Статика. Кинематика / Г. М. Соколов. – Йошкар-Ола, 2007. – 108 с.

Дополнительная литература

7. Воронков, И. М. Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – М., 1954. – 468 с.
8. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1: Статика и кинематика: учебное пособие для студ. втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон; под ред. Д. Р. Меркина. – 8-е изд. – М.: Наука, 1984. – 502 с.
9. Бать, М. И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2: Динамика: учебное пособие для студ. втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон; под ред. Д. Р. Меркина. – 7-е изд. – М.: Наука, 1985. – 558 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ